Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

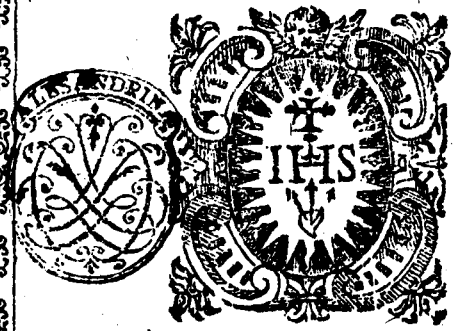
EVCLIDIS
POSTERIORES
LIBRI IX.

Acceſſit LIBER XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES, PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; ſcholijs illuſtrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum acceſſione poſt primam editionem locupletati.

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI
e Societate IESV.



ROMAE,
Apud Aloyſium Zannettum. MDCIII.

PERMISSV SVPERIORVM.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometria parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorũ. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maximè, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearũ requiratur, idque adeo, vt absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurima latera tam planorum, quam solidorum, si Geometria Theoria in opus conferatur, atque vsum, neque exprimi queant, neque intelligi. Nam non raro pleraque laterũ sunt illa linee, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellan-

pellantur: Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certe inter se sunt incommensurabilos, atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio, atque intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absque his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ suus ordo, ratioque constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum ea rei Geometricæ inseruiũt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo a principijs, definit initio vnitatem, decetque eam esse, secundum quam vnumquodque eorum, qua sunt, vnum esse dicitur. Nam secundũ vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere solemus. Caterum vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt libro primo docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quadam ex vnitatibus composita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes: Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidem partes, nimirum in 8. vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, &c.

EX his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos vna eademque mensura, nimirum vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurima earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissime lib. 10. ostendetur.

PARS

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hac definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis centinua exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hac solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12. 18. 24. 30. 60. 630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3. 4. 6. 8. cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerū, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomē trahit a 7. eū 6. metiatur 42. per 7. Itaque 6. erit septima pars numeri 42. et in reliquis eodē modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari; cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum nō metiatur, nisi per suas vnitates, pars ipsius dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum qualibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerū 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidē nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autē & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hac definitio quarta, qua partem aliquantam comprehendit.

CAETERVM partes quacunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos cōmunis duorum numerorū mensura vtrumque eorum metitur, & eū scilicet, qui partes dicitur, & eū, cuius ille partes appellatur: ita vt si communis duorum numerorum mēsura metiatur minorem per 3. & maiorē per 5. dicatur minor maioris tres quinta, Tales

partes sunt 6 huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum unitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiam illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus praestiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, qua maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantum eam, qua maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostenditur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Nō. n. proposseis duabus magnitudinibus inaequalibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris, cū ea persaepe sint incōmensurabiles, vt aperte liber decimus demōstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoque ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quem minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si vero maiorem minor non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem

non

non metiatur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariã diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4.10.40.100.1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes aequales, cum eorum dimidia sint 2.5.20.50.500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt à pari.

OMNES hi numeri 5.11.25.37.101.1001 impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe quia vnitate differunt ab his paribus 4.10.24.36.100.1000. vel etiã ab his 6.12.26.38.102.1002. Ex hoc autẽ loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius impparis 11. dimidia pars essent quinque vnitatis & semissenius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, fit vt quemlibet parem aliquis numerus par, saltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2, per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 3. &c.

CAETERVM si rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit fieri posse, vt vnus idemq; numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6 per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdū, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neque pariter par sit, cum eum non tantū metiatur par 6. per parē 4. sed etiā par 8. per imparē 3. Neque pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8 per imparem 3, verum etiam par 6. per parem 4. Sed apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodāmodo naturam vtriusque, vt cōstat. Itaq; tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui à quibusdā, pariter par & impariter appellatur. Veruntamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum rectè explicata, sed alienæ prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifestè omnē numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum verò, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, et pariter impare, demonstratque omnes numeros à binario duplos, quales sunt 2. 4.

8.16 32.64.128.&c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat; cuiusmodi sūt 6.10.14.18.22.&c. Numeros denique, qui nec à binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20.24. 28. 36.&c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionū, hos postremos numeros, alioſque similes, vere ēſſe, ſecundum traditas definitiones, pariter pares; rurſus eoſdē dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi ſint. Sed hac planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus eſt, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic. quoque hi numeri impares 9.21.25.27.33.35.39. 135.2025.& alij infiniti, impariter impares nominantur.

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar poſitionici, appellabitur numerus primus; quales ſunt omnes iſti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29. 31.&c. Nam eos ſola vnitas mētitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura metitur.

SICVT numerus ille, quem sola vnitas metitur, Primus dicitur: ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos prater vnitatem, nullus numerus, tanquam mensura communis metitur, quamuis singuli illorum habeant numeros, qui eos, prater vnitatem metiantur, appellantur inter se primi. Vt 15. 8. sunt numeri inter se primi, quia sola vnitas, mensura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. posteriorem vero isti 2. 4. tamen nullus istorū vtrumque metitur, sed sola vnitas vtriusque est communis mensura. Sic etiam hi numeri 7. 10. 15. premi inter se dicentur, quod prater vnitatem, nullum habeant numerum, mensuram communem, quamquam postremi duo habeant communem mensuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quinis numerus, dici possunt, licet improprie; numeri inter se primi: quia sola vnitas vnitatem, & numerum quemuis metitur, tanquam mensura communis.

XIII.

COMPOSITVS numerus est, quem numerus quispiam metitur.

NVMERVM, quem prater vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometra compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros pares, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, prater binarium, esse impares, quādoquidē ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos prater vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem prater vnita-

tem,

tem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15.24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7.21.35. Nam primus eorum & seipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sūt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus 8. sexies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerū 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot vnitates in multiplicāte 8. cōtinētur, procreauerimusq; eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando alterō alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel e contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerū eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alterūter multiplicantiū toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicātium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum

multi-

multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatē habet. Itaque Multiplicatio siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuentio numeri, qui ad alterutrum multiplicantiū eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hæc alia docens quid sit numerum diuidere numerum: quippe quæ necessaria omnino sit ad ea, quæ nos in ijs, quæ sequūtur, sumus demonstraturi.

NVMERVS numerum diuidere dicitur, cum numerus acceptus fuerit, qui suis vnitatibus indicat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum sumptus fuerit numerus 8. qui octo suis vnitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiso 48. contineri octies. Ita quoq; vicissim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. si acceptus fuerit numerus 6. qui sex suis vnitatibus indicat diuidentem numerum 8. in diuiso 48. contineri sexies.

HINC fit, numerum ex diuisione procreatū eandem habere proportionem ad vnitatem, quam numerus diuisus habet ad diuidentē. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus suis vnitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiso continetur; continebit numerus productus vnitatem toties, quoties numerus diuisus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuisione genitus ad vnitatem, quam diuisus numerus ad diuidentem: Itaque Diuisio vnius numeri per alium ita quoque poterit describi.

DIVI-

DIVISIO numeri per numerum, est inuentio numeri, qui ad vnitatem habet eãdem proportionem, quam numerus diuisus ad diuidentem.

ITA vides ex diuisione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuisione eiusdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita se habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiso numero per numerum, diuisum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuisionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiso enim numero A, per B, procreetur numerus C. Dico numerum A, gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita se habet ad B, vt C, ad vnitatem D; Ex definitione autem diuisionis, ita quoque se habet A, ad B, vt C, ad vnitatem D; perspicuũ est, numerum ex C, in B, genitum esse numerum A; eum tam ille genitus, quam A, eandem proportionem habeat ad B, quam C, ad D, vnitatem.

HAEC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractum, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhereant integris, siue non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuisus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit cõpositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sus semisse

duntaxat

duntaxat est in $\frac{1}{2}$. *sumendus est numerus 20. per semissem quoque sui, quæ est 10. Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum* $\frac{1}{2}$. *si* $\frac{1}{2}$ *sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties unitas est in 20. productusq. fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad* $\frac{1}{2}$. *quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. vt* $\frac{1}{2}$ *ad 1. Sic etiam* $\frac{1}{2}$ *&* $\frac{1}{3}$. *se mutuo multiplicare dicentur quando* $\frac{1}{2}$. *sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum* $\frac{1}{3}$. *tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando* $\frac{1}{3}$. *sumptus fuerit per sui semissem, quia &* $\frac{1}{2}$. *semissem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur* $\frac{1}{6}$. *qui numerus tertia pars est numeri* $\frac{1}{2}$ *siue* $\frac{3}{6}$. *& semissis numeri* $\frac{1}{3}$. *siue* $\frac{2}{6}$. *Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusq. ad finem lib. 9.*

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. *dividere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, dividentem numerum* $\frac{1}{2}$. *vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuisi 10. ad dividentem* $\frac{1}{2}$. *Sic quoque* $\frac{1}{2}$. *dividere dicetur* $\frac{1}{6}$ *quando sumptus fuerit numerus* $\frac{1}{3}$ *indicans, dividentem numerum* $\frac{1}{2}$. *non totum contineri in diuiso* $\frac{1}{6}$. *sed tertiam eius partem. Nam cum numerus* $\frac{1}{2}$. *idem sit qui* $\frac{3}{6}$. *liquido constat tertiam huius partem, nimirum* $\frac{1}{6}$. *contineri in* $\frac{1}{6}$. *Cæterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuisione q. fractorum diximus, planiora fient.*

XVI.

CVM autem duo numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas unitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati vocantur, quod ipsum contineant, non secus, ac recta linea angulum rectum ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraq. eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CAETERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana apud Geometras, Euclides solum definit planum quadrangularem rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur: quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quod omni ex parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, similes sint, & æquales, siue ambitu, siue aream, capacitatemve spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. quod ad ambitum spectat: tamen si aream, seu capacitatem consideres, ab ijsdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. necnon 2. & 12. quia tam ex mul-

tipli-

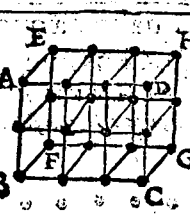
tiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10, quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quod quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum. Quod etiam de numero solido, qui iamiam definietur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planū, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicata mutuo ipsam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui pro creatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo sese multiplicantes, producunt 24. Nam ex 2. in 3 procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicantes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primum multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas; Et si hac basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus



24. altitudinem habens trium unitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. unitatum, qua multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. unitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 2. procreabitur numerus 12. pro base, qua bis sumpta faciet numerū eundem solidū 24. cuius altitudo continet duas unitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit BCGF, octo unitatum, cuius longitudo BC, quatuor unitates, & BF, latitudo duas cōplectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24. unitates, cuius altitudo DA, unitates erit. Similiter si basis sit ABFE, sex unitatum, cuius longitudo AB, tres, & latitudo BF, duas continet unitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales; fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem BC, habens quatuor unitatum. Si denique basis sit ABCD, 12. unitatū, cuius longitudo BC, quatuor continet, & latitudo AB, tres; superponetur illi alia basis similis, & æqualis EFGH, constabitque totus numerus solidus unitatibus 24. quarum duæ altitudinem dabunt AE, vel BF. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodēque modo de alijs numeris solidis iudicandum erit.

DENIQVE & unitas interdum solidus appellabitur numerus, etsi non proprie, quia eius latera sunt tres unitates, ipsam unitatē ex mutua earum multiplicatione præcedentes.

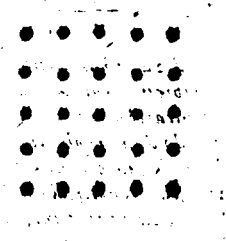
DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione dictā; quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubo, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui

æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum vnitates suas in longum & latum dispositas, refert parallelogrãmum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorũ numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis cõtinetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque vnitates, ideoque æqualiter æqualis erit.



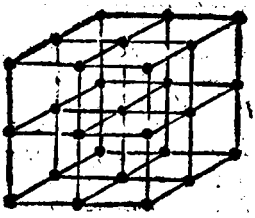
ALTERVTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero quadrata ab Arithmeticis plerisque appellatur.

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.

SOLIDVM quoque illum numerum vocat cubum, qui est æqualiter æqualis æqualiter, id est, cuius vnitates in longum, latum, atque profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, siue profunditas, æquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium

numerorum inter se producitur, Qualis est numerus 27. contentus sub numeris aequalibus 3. 3. 3. siue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam solidam redacta referunt perfectum cubum Geometricum,



existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipse numerus 27. est aequaliter aequalis aequaliter.

QVILIBET vero trium numerorum aequalium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix cubica dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eædem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rõnalis inaequalitatis (cuiusmodi sunt oẽs numeri inaequales inter se collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque insuper illius partem, vel easdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto esse corruptam, cũ manca sit, atque imperfecta, cõprehendit solũ proportionales numeros in propor-*

tione multiplici, submultiplicine, & in proportionibus reliquis minoris inaqualitatis. Nam in proportione multiplici sunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex est; in submultiplici vero, cum primus secundi. & tertius quarti, eadem pars est; & in reliquis proportionibus minoris inaqualitatis, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere possumus, quinam numeri proportionales sint in proportione superparticulari, superpartiente, multiplici superparticulari, & multiplici superpartiente. In his enim omnibus, primus numerus secundi, & tertius quarti, neque aque multiplex est, neque eadem pars, neque eadem partes; sed primus secundum, & tertius quartum, aqualiter continet, puta vel semel, vel aliquoties, & eandem insuper illius partem, easdēne partes; vt perspicuum est ex iis, quæ docuimus ad dēsin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copiosè explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales sunt, cum primus secūdi, & tertius quarti aque multiplex sit, nimirū triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. est enim primus secundi, & tertius quarti, eadem pars, ni mirum tertia. Rursus proportionales sunt hi numeri 6, 8, 9. 12. quod primus secundi, & tertius quarti eadem partes sint, videlicet trés partes quartæ. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. sunt numeri proportionales. Nam in primo exemplo primus numerus secundum, & tertius quartum, semel, & insuper eandem partem, videlicet sextam; In secundo autem semel, & easdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo denique primus secundum, & tertius quartum, bis, & præterea easdē partes cōplectitur, puta duas partes quintas. Quod si primus numerus secundi, & tertius quarti, nō sit aque multiplex, vel eadē pars, vel eadē partes; vel denique primus secundū, & tertius quartum, nō aqualiter continent, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes; nullo pacto dicēdi erūt numeri propositi proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales esse pronuntur, concedendum necessario erit, si quidem

maiores

maiores cum minoribus conferantur, quod primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex sit; Vel certe, quod primus secundum, & tertius quartum, contineat aqualiter, & insuper eandem partem, vel easdem partes: Et contra, si primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex concedatur: Vel certe primus secundum, & tertius quartum, aqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel easdem partes, colligetur numeros esse proportionales. Quod si minores ad maiores referantur, dicanturque eandem habere proportionem, fatendum erit, primum secundi, & tertium quarti, esse partem eandem, vel partes eisdem: Et e contrario, si primus secundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipsos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inaqualitatis habẽt. Nam si de proportione aqualitatis loquamur, perspicuum est, primum secundo, & tertium quarto aqualem debere esse, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, aquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundem ad aquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionem, vel ad quos idem eandem habet proportionem, aquales esse. Cum enim aquales numeri sint eiusdem, vel aque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundem aqualiter contineant, eandemque insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus aqualium sit vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos aqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, vel partes; perspicuum est, aquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad aquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eandem habentes eandem proportionẽ, sunt illius vel aque multiplices, vel eadẽ pars, vel eadem partes; Vel certe illum aqualiter continẽt, eandemq. insuper eius partẽ, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorũ vel

aque multiplex, vel eadē pars, vel eadem partes; Vel certe illos aqualiter continet, eandemque insuper illorum partiē, vel partes. secundum hanc eandem definitionem, manifestū est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem, habet, aquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorē. Item numerorū illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad quem autem idem hābet maiorem proportionem, minorem esse. Quaomnia perspicua sunt, si rectē hac definitio intelligatur.

HAEC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{2}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$, quia primus secundi, et tertius quarti, aque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocētur, vt ad $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$. & posteriores quoque ad eandem denominationē, vt ad $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationē reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finē lib. 9. demōstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$. cū primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}$. $\frac{19}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}$. $\frac{10}{4}$. atque ita de cæteris.

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est quelibet duo illius latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua latera, quæ sint proportionalia quibusdā duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas vnitates in formam planā redigātur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6. 4. pro-

portio-

portionalia sunt lateribus huius 3.2. quamuis his eisdē non sint proportionalia alia illius latera nempe 8.3. vel 12.2.

EODEM modo vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quenis tria vnius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria vnius reperiātur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum vnitates in formam solidam reducantur, erūt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8.6 4. lateribus huius 4.3.2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12.8.2. vel 16.4.3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24.6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cū tamen lateribus prioris assumptis 3.4.16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

HAEC porro similitudo planorum, & solidorū reperitur quoque in fractis numeris, sive in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & cū duo priores, quam duo posteriores inter se multiplicētur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c. Dixi, plerunq; quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignantur. Nā si duo latera sint $\frac{2}{3}$. 6. & alia duo $1\frac{1}{2}$. 12. quæ eandem proportionem habent moncuplā, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero numerum 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes sua partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. huius lib.) æquales sunt, perfectus à Mathematicis nuncupatur. Cuius-

modi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. qua simul sumpta conficiunt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici posset, siue eum metiatur, siue non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propositis adiungendæ mihi videntur ex Campano, aliisque scriptoribus nonnullæ aliæ, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim eæ, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicãs, vel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero, vt propos. 16. huius

lib.

lib. esse ndemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerū 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerū 3.

HAEC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerū $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirum quintuplus, dicetur hac comparatio, habitudine, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVAE cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, aqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. diximus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadem proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam ratio-

nem

nem habere dicitur eius,quam habet ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint;Primus ad quartum,triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecũdum:Et ſemper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HAEC definitio,vt ad magnitudines pertinet, copioſe explicata eſt defin.10.lib.5.Vnde cum omnia, quæ ibi ſcripſimus, ad numeros huc transferri facile poſſint, non eſt, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad ſecundum,& ſecundi ad tertium,& tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita ſe habere,pluribus verbis à nobis demonſtratum eſt ad defin.5.lib.6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione,inuerſaque;de compoſitione,diuiſione,& conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate;& de proportione ordinata, ac perturbata, Omnes.n. huiſmodi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur,demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES.

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

QVO-

II.

QVOLIBET numero ſumi poſſe maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri poteſt infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero propoſito maior exhiberi poteſt, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam pluriũ additione conſurgit.

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem æque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

QVORVM idem numerus æque multiplex eſt, vel æque multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum metitur.

NAM vnitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum cõstituit. Quamobrem ipsum metitur per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis vnitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus seipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquem produxerit, metietur multiplicãs productum per multiplicatum, multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C, Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundē C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus

A .... B ... C .....

B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, vnitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans proereet numerum C, ut demonstrabitur propos. 16. huius lib.

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur

per

per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metiatur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc est, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita esse, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axiom. 9. præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipsum B, vel multiplicatum a B, producere ipsum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipsum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipsum C, per B; perspicuum est, numerum A, multiplicantem ipsum B, vel ab eo multiplicatum, producere ipsum C.

A .... B ...
C .....

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metitur.

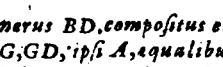
METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoque ex ipsis compositum BD. Cum enim A, metiatur ipsos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipsius A, multiplex. Diuiso ergo BC, in partes BE, EC, ipsi A,

aquales, & ipso CD, in partes CF, FG, GD, eidem A, aquales; erit numerus BD, compositus ex omnibus partibus BE, EC, CF, FG, GD, ipsi A, aqualibus, multiplex ipsius A. Quare A, ipsum BD, metitur. Quod est propositum.

XI.

NVMERVS quemcunque numerum metiens, metitur quoque omnem numerũ, quem ille metitur.

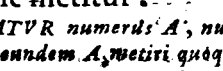
METIATVR numerus A, numerum B; & B numerũ CD. Dico eundem A, metiri quoque numerum CD, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipsum CD, erit CD, ipsius B, multiplex. Diuiso ergo CD, in partes CE, ED, ipsi B, aquales; metietur A, ipsos numeros CE, ED, quandoquidem numerũ B, tãnumero CE, quã numero ED, aquale, metiri ponitur. Igitur idem A, per prop. 10. metietur quoque numerum CD, ex CE, ED, compositum. Quod est propositum.



XII.

NVMERVS metiens totum & ablatũ, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum BC, & ablatum BD. Dico eundem A, metiri quoque reliquum DC. Cum enim A, metiatur & BC, & BD: erit tam BC, quã BD, ipsius A, multiplex, aut certe BD, ipsi A, aqualis erit. Diuise ergo tam BC, quam BD, in partes ipsi A, aquales: erit reliquus numerus DC, vel una pars numeri BC, ipsi A, aqualis, vel plures,



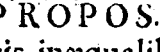
atque

atque adeo DC, æqualis erit ipsi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipsum DC. Quod est propositum.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentē, quoad assumpta sit vnitas; qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

SINT duo numeri propositi inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties potest, detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest, & reliquus FD, ex EB: Et in hac alterna detractione nunquā numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, esse inter se primos, hoc est, solam vnitatem communi mensura eos metiri. Si enim non dicantur inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit H, communi mensura præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD, & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars sit ipsius AE, vel certe ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) [a] metietur quoque H, ipsum AE: At H, metitur quoque totum AB. [b] Igitur & reliquum EB, metietur. Metitur autem EB, ipsum CF. [c] Igitur & H, ipsum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur, [d] metietur quoque reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipsum EG; [e] metietur etiam H, ipsum EG: Metiebatur autem & H, totum EB. [f] Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod est absurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac



[a] 11. prō. [b] 12. prō. [c] 11. prō. [d] 12. prō. [e] 11. prō. [f] 12. prō.

1 Pro-

proinde primi inter se sunt. Quamobrem, si duobus numeris inæqualibus propositis, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propositionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad assumpta sit vnitas.

SINT duo numeri inter se primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties potest detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam potest; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas assumatur. Metiatur enim, antequam ad vnitatem detractio perueniat, si fieri potest, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipsum EG, [a] metiatur quoque GB, ipsum EG. Cum ergo GB, & seipsum metiatur, [b] metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compositum: Metitur autem EB, ipsum CF. [c] Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipsum FD, positus sit metiri: metietur [d] quoque ipsum CD, ex CF, FD, compositum. At vero CD, metitur ipsum AE. [b] Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipsum EB, metiatur, vt ostensum est; [f] metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.

A . . . . . B . . G—B
C . . . . . F . . D

11. prō.
10. prō.
11. prō.
10. prō.
12. prō.
10. prō.

EODEM

EODEM modo & hoc verum est.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vsque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

NAM si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, a *vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.* a 1 sept.

EX his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquã reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, b *vt Euclides demonstrauit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superiori huius scholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.* b 1. sept.

PROBL. 1. PROPOS. 2. ij.

DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties potest, relinquatque EB, numerum, qui ex CD, subtractus relinquat FD, & sic deinceps semper minor de ma-

iore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidem peruenietur ad numerum, qui præcedétem metiatur Nam ſi ad vnitatẽ deueniretur, [a] numeri A B, C D, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum F D, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico F D, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtẽdemus. Quia FD, metitur ipſum EB, & EB, ipſum CF; [b] metietur quoque F D, ipſum CF, atque adeo cũ & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF. FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum F D, metiatur quoque ipſum EB; [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerũ AB, CD.

A ..... E ..... B
C . . . . . F . . D
G ——

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quam FD. Quoniam ergo G; metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipſum A E, [f] metietur quoque G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum E B; At vero EB, metitur C F. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum F D; maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam F D, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum AB, CD.

QVOD ſi minor numerus C D, metiatur maiorem A B, ita vt detractus ex A B, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

A ..... B
C ..... D

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.

[a] 21. ſept.
[b] 11. prõ.
[c] 10. prõ.
[d] 11. prõ.
[e] 10 prõ.
[f] 11. prõ.
[g] 12. prõ.
[h] 11. prõ.
[i] 12. prõ.

HOC elicitur ex ea parte demonstrationis, qua ostensum fuit FD, esse maximam mensuram ipsorum AB, CD. Demonstratum enim est ibi, numerum G, si metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum mensuram communem. Eademque ratio est de cæteris.

SCHOLIVM.

EX iis quæ dicta sunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experiemur per ea, quæ ad propos. 1. docuimus, an duo A, & B, sint inter se primi: Qui si fuerint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, quod nullam possint habere mensuram communem, præter unitatem, propter numeros A, & B, inter se primos.

Si vero A, & B, fuerint inter se compositi, & sit eorum maxima mensura cum numeris inuenta D, quæ si metiatur & numerum C, perspicuum est, tres numeros A, B, C, esse inter se compositos, cum habeant numerum D, communem mensuram.

QVOD si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C, erunt C, & D, vel inter se primi, vel non. Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita vt habeant numerum communem mensuram, metietur eiusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare eâdem illa mensura metiatur quoq; numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. b Inuenta enim numerorum C, & D, maxima communi E; eâ E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, &

A .....
B .....
C .....
D .....
A .....
B .....
C .....
D .....
A .....
B .....
C .....
D .... E ..
A .....
B .....

1.
1.
2. sept.
b 2. sept.

11. con. B; [a] metietur quoque E, eojdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe compoſiti. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perſiciendæ, vt de itibus numeris datis diximus.

iij. PROBL. 2. PROPOS. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem oporteat reperire. [b] Sit D, maxima menſura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipſum C, perſpicuum eſt D, eſſe maximam menſuram numerorum datorum A, B, C. Nam ſi maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod eſt abſurdum.

A.....
B.....D....
C.....E..F—.

Si vero D, non metiatur ipſum C; erunt ſaltem D, & C, inter ſe compoſiti. Cum enim ſint A, B, C, inter ſe compoſiti, metietur quæcunque illorum menſura communis, per coroll. propoſ. 2. huius lib. numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa menſura metiatur etiam ipſum C; erunt D, & C, inter ſe

2. ſept. compoſiti. [c] Sit eorum maxima menſura E. Dico E, eſſe maximam menſuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim ſit eorum menſura communis, hac ratione demonſtrabitur. Quoniam E, metitur numeros C,

11. prō. & D, at D, ipſos A, & B, [d] metietur quoque E, ipſos A,

& B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mẽsura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quã E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communem. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem, quod est absurdũ. Non ergo maior numerus, quam E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipiẽda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua vero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4. iiij.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B.

Sint enim primũ A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuũ

A .....
B .....

est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

SINT deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partē esse numeri B, ex defin. 3. huius lib.

A .....
B .....

a 2. sept. SED iam A, non metiatur ipsum B, a inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. b Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque AD, pars eiusdem B: similiter & DE, & EF; ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot videlicet, quoties C, in AF, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. Quod demonstrandum erat.

A..D..E..F
B .....
C..

b 3. defi.

V. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri BC, quæ est numerus D, numeri EF. Dico vtrumque numerum A, & D, simul vtriusque numeri BC, & EF, simul eadem esse partem, quæ est vel A, ipsius BC, vel D, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC; EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, propterea quod eadem pars est A, ipsius BC, quæ D, ipsius EF. Quia igitur A, & BG, æquales sunt; si illis addantur æquales D, & EH; erunt A, & D, simul æquales ipsis BG, & EH, simul. Eodem argumento erunt A, & D, simul ipsis GC, & HF

A .....
B .....G.....C
D .....
E ....H....F

simul

simul æquales: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in BC, EF; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum BC, & EF, æquale erit, quoties A, in BC, vel D, in EF, cõtinetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, simul vtrinsque BC, & BF, simul, quę est A, ipsius BC, vel D, ipsius EF. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est in numeris fractis, eademq; prorsus demonstratio adhibebitur: vt in hoc exemplo apparet, vbi numerus A, numeri BC, & numerus D, numeri EF, eadem pars est; ac proinde vterque simul A, D, vtriusq; BC, EF, simul eadem pars ostendetur, quæ A, ipsius BC: si nimirum BC, EF, diuidantur in partes BG, GC; EH, HF, ipsis A, D, æquales, &c.

A, $\frac{8}{9}$ D, $\frac{5}{7}$

B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C E, $\frac{1}{7}$ H, $\frac{1}{7}$ F

QVOD si quando contingat, numerum fractum diuidi non posse in partes æquales propositas, propterea quòd numerator in eas partes secari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partiũ. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori æquialens, & cuius numerator in propositas partes diuidi poterit. Vt si fractio $\frac{5}{9}$. secanda sit in duas partes æquales, ducendus erit vterque eius numerus in 2. si in tres, in 3. si in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima secabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. secunda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adsunt integra, reuocanda prius erũt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quam denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt si numerus $4\frac{3}{7}$. secandus sit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales sunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hæc in sequentibus quoque propositionibus obseruanda sunt, quãdo fractionibus accommo-

dantur: Et semper nomine fractionum intelligendi quoque sunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti sunt, & alij integri.

EODEM modo demonstrabimus & hoc, quod sequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars; Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

Hoc autem perspicue in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A.	*D.*	*A.*	*D.*
B. G. C	*E. H. F*	*B. G. C*	*E... H... F*

POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorum, eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorum DE, FG, HI, simul eandem esse partẽ, quæ est A, ipsius DE, Diuisis. n. numeris

A....	*B...*	*C...*
D....K....E	*F...L...G*	*H...M...I*

DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tam numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum

addan-

addantur æquales C, & HM; erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorū A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

IDEM sequitur, si loco unius numerorum A, B, C, sumatur unitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures unitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figuræ indicant.

A.	B..	C,...	A.	B.	C.
D.K.E.	F.. L.. G	H... M...I	D.K.E	F.L..G	H.M.I

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadē pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur; etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.	B, $\frac{1}{2}$	C, $\frac{3}{4}$
D I K I E	F $\frac{1}{2}$ L $\frac{1}{2}$ G	H $\frac{3}{4}$ M $\frac{3}{4}$ I

THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiā demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, A..... B..... C.... singuli singulorū. Dico &. D.... E.... F..

omnes

A.....B.....C.... omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tã multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum.n. tam sit multiplex A, ipsius D, quam est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit e contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadẽ pars ipsorum A, B, C, simul, quæ D, ipsius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, simul, omnium D, E, F, simul, quam est multiplex A, ipsius D.

D.... E... F..

SI numeri A, B, C, fracti sint, & ipsorum D, E, F, fractorũ æquemultiplices; quã multiplex est vnius vnus, tã multiplices erũt & omnes omniũ. Vt ex demonstratione liquet.

QVOD si loco vnius numerorum D, E, F, assumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonstrabitur, vt ex sequentibus figuris apparet.

A..B....C..... | A..B..C..
D..E..F... | D..E..F.

vj. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, simul vtriusque numeri C, & F, simul easdem partes esse, quæ est AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE; propterea quod eædem partes est numerus

A...G...B | D....H....E
C..... | F.....

AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars est AG, numeri C, eadem est DH, numeri F; a erit vterque AG, DH, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ AG, ipsius C, vel DH, ipsius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, simul eadem pars vtriusque C, F, simul, quæ GB, ipsius C, vel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata, partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est AG, ipsius C; quot partes eædem est numerus AB, ipsius C, vel DE, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterq; numerus AB, DE, simul, vtriusque numeri C, F, simul, quæ AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c Quod erat demonstrandum.

a 5. sept.

SCHOLIVM.

EADEM hæc propositio locum habet in numeris fractis, una cum demonstratione: vt hoc exemplum demõstrat.

$A, \frac{1}{9} G, \frac{1}{9} B$ $C, \frac{1}{9}$ $\quad$ $D, \frac{2}{7} H, \frac{2}{7} E$ $F, \frac{6}{7}$

SED & hanc propositionem ad quotcunq; numeros siue integros, siue fractos extendẽtes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; vt hic perspicuum est.

A . . K . . B	C . . . L . . . D	E . . . . M . . . . F
G	H	I . . . . .

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis

ablatus ablati : Et reliquus reliqui eadem pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadē pars numeri CD, quę ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD. Ponatur enim EB, numeri GC, eadē pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC : [a] erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD, erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dēpto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quę ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . E . . B
G . . . . C . . . . . F . . . D

[a] 5. sept.

SCHOLIVM.

A, 1/2 E, 2/5 B,
G, 4/5 C, 6/8 E, 4/5 D

LOCVM etiam habet hæc propositio, vna cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quam in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB, vel denique in integris & ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A . E . . . B	A . . . E . B	A. E. B.
G . . . . C . . F . . . . . D	G . . C . . . . . F . . D	G. . C. . F. . D

CAETERVM ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tam in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD quidem non aliter ostendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonstratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æque multiplex, atque ablatus AE, ablati C F. Dico & reliquum EB, reliqui F D, ita esse multiplicem, vt est totus AB, totius CD. Cum enim AB, ipsius CD, sit æque multiplex, atque AE, ipsius CF, erit e contrario totus CD, totius AB, eadem pars, qua ablatus CF, ablati AE, [a] *Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, qua totus CD, totius AB, Ac proinde e contrario EB, ita multiplex erit ipsius FD, vt AB, ipsius CD, est multiplex.*

A . . . . E . . . . B
C . . . F . . . D

[a] 7. sept.

QVOD si ex CD, ablata fuerit vnitas CF, vel reliqua sit vnitas FD. vel denique in integris & ablata sit vnitas CF, & alia reliqua FD, idem demonstrabitur. vt hac exempla commonstrant.

A . . . E	A . . . . E . . B	A . . . . E . . . . B
C . F . . D	C . . F . D	C . F . D

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati; Et reliquus reliqui eædē partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, easdem esse partes reliqui FD, quæ totus AB, est totius CD. Sumpto enim numero GH, æquali ipsi AB, erit GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, hoc est, quæ AE, ipsius CF. Diuiso ergo

A . . . . . K . . . . . E . . . B
C' . . . . . F . . . . . D
G . . . . . L . . I . . . . . M . . H

GH,

GH, in partes GI, IH, numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF, erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam GI, quam IH, ipsius CD, quæ tam AK, quam KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM. æqualibus ipsis AK, KE, erit GL, eadē pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cùm totus GI, totius CD, sit eadem pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partem ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quam MH, ipsius ED; erit vterque GI, IH, simul eadē partes ipsius CD, quæ vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia verò si ab æqualibus. AB, GH, æquales auferantur AK, KE; & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt; Erit quoque EB, reliquus eędem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eadē quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD, Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 7. sept.

A ..... K ..... E ..... B
C ..... F ..... D
G ..... L ..... I ..... M ..... H

SCHOLIVM.

$A, \frac{2}{19} K, \frac{2}{19} E, \frac{6}{19} B$
$C, \frac{6}{19} F, \frac{9}{19} D$
$F, \frac{2}{19} L, \frac{1}{19} I, \frac{2}{19} M, \frac{3}{19} H$

IN numeris fractis eadem hac propositio eodē prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

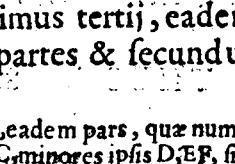
NON demōstrauit Euclides hanc propositionē, quemadmodum precedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia

quia non constabat hic reliquum numerum EB, alicuius numeri eiusdem esse partes, quæ est numerus AE, numeri CF, ibi vero perspicuum erat reliquum EB, alicuius numeri eãdem esse partẽ, quæ est AE, ipsius CF. Licet enim ipsius EB, duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9. ix.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

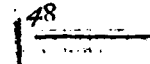
SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, ſineque A, BC, minores ipſis D, EF, ſinguli ſingulis. De his enim propoſitio intelligenda eſt. Dico & viciſſim eandem partem eſſe, aut eaſdem partes A, ipſius D, qualis eſt, aut quales B C, ipſius EF. Diuiſis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partiũ numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter ſe ſunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter ſe etiam æquales ſunt, quod & totus BC, toto, EF, minor ponatur; Erit BG, ipſius EH, eadẽ pars, aut partes, quæ GC, ipſius HF, ac propterea & vterque BG, GC, ſimul, nimirum BC, ſecundus vtriuſque EH, HF, ſimul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipſius EH, hoc eſt, quæ A, primus ipſius D, tertij. Si numerus igitur numeri pars fuerit &c. Quod demonſtrandum erat.



a 5. vel 6. ſept.

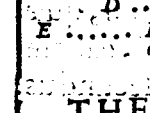
SCHO-

SCHOLIVM.



IN numeris fractis propositio hac, una cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

QVOD si loco primi numeri vnitas accipiatur, qua numeri alicuius pars sit, qua alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, qua secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

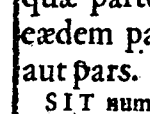


X. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eędem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, sintq; AB, C, ipsis DE, F, minores, singuli singulis. De his n. etiam intelligēda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partiū in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipsius C, quæ tam DH, quam HE, ipsius F.[a] Vicissim ergo eadem pars erit aut partes AG,

[a] 9. sept.



ipsius

ipſius DH, & GB, ipſius HE, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipſius DH, quæ GB, ipſius HE. [a] Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriuſque DH, HE, ſimul, nimirũ DE, tertij, quæ AG, ipſius DH, hoc eſt, quæ C, ſecũdus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat. [a] 5. vel 6. ſepti.

SCHOLIVM.

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exẽplo apparet.

$A, \frac{2}{1\frac{6}{5}}G, \frac{2}{1\frac{5}{5}}B$

$C, \frac{6}{1\frac{5}{5}}$

$D, \frac{3}{1\frac{9}{0}}H, \frac{3}{1\frac{0}{0}}E$

$F, \frac{9}{1\frac{0}{0}}$

THEOR. 9. PROPOS. 11. xij.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF. Dico & reliquum EB, ad reliquũ FD, eſſe, vt eſt totus AB, ad totũ CD.

A.....E.....B
C.....F...D

Cum enim ſit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; [b] erit AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB, ipſium CD, & AE, ipſium CF, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, æque multiplex. Quo poſito, erit e contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipſorũ CD, CF. [c] Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea e contrario AB, ipſius CD, & EB, ipſius FD, æque multiplex erit. [d] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita & B, reliquus ad reliquum FD. [b] 20. deſin. [c] 7. ſept. [d] 20. deſin.

SIT deinde AB, ipsius CD,& AE,ipsius CF,eadem pars,vel eædem partes. Quo posito, [a] erit & reliquus E B, reliqui FD,eadem pars,vel partes,quæ totus AB,totius CD; [b] Ac proinde, erit vt totus AB,ad totum CD,ita EB,reliquus ad reliquum FD.

A... E .. B
C..... F.... D
A.... E .. B
C..... F ... D

[a] 7. vel 8. sept.
[b] 20. def.

CONTINEAT tertio AB,ipsum C D, & AE, ipsum CF,æqualiter,eãdemque insuper illius partem, vel partes. Quo posito,erit e contrario CD,totus totius AB,eędem partes,quæ ablatus CF,ablati AE, vt mox demonstrabimus. [c] Reliquus igitur FD,reliqui EB,eædem quo-

[c] 8. sept.

A.....,E...B | A..... E ..... B
C... F.. D | C..... F ..... D

que partes erit,quæ totus CD,totius A B: Ac propterea e contrario AB,ipsum CD,& EB,ipsum F D, æqualiter continebit,eandemque insuper illius partem,vel partes vt mox ostendemus. [d] Quare erit,vt totus AB, ad totum CD,ita EB,reliquus ad reliquum FD.

[d] 8. sept.

QVOD si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE,ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoque esse æquale reliquo F D. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanẽt, sunt æqualia. Itaque si fuerit,vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum,&c. Quod erat demonstrandum.

A..... E .. B
C..... F... D

SCHOLIVM.

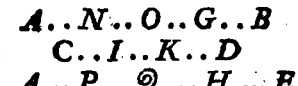
EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquido constat in his exemplis,quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.

$A, \frac{6}{9} E \frac{10}{10} B$ | $A, \frac{1}{2}\frac{4}{1} E \frac{2}{2}\frac{9}{9} B$
$C, \frac{4}{9} F \frac{10}{10} C$ | $C, \frac{1}{2}\frac{4}{1} F \frac{10}{2}\frac{9}{9} D$

LEM-

LEMMA.

QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsũ CF, æqualiter contineat, eãdemq; insuper partẽ illius vel partes; e contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadẽ partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes; e contrario AB, ipsũ CD, & AE ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partẽ vel partes, tã in numeris fractis, quã in integris: hoc modo demonstra bimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem; GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, GF, vel eorũ æque multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partiũ numeri CD, multitudini partiũ numeri CF, æqualis, quod GB, ipsius CD, sit eadẽ pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partiũ numeri AG, multitudini partiũ numeri AH, æqualis. Cum. n. AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorũ æq; multiplices, erũt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partiũ numeri CD, toties cõtinebi



tur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea que multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partiũ numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cũ multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partiũ numeri CF, erit CD, eadẽ partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.

CONTINEAT deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter, quaterut, &c. easdemque insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF; ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquemultiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GL, IB, & HK, KE, numerorũ CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partiũ ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quod quælibet partium numeri

A . . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . D
A . . . R . . . S . . . H . . . K . . . E
C . . . N . . . O . . . F

GB, eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium numeri HE, est numeri CF. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partiũ numeri AG, æqualis multitudini partiũ numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquemultiplices; erũt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH, propterea quæ multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Quibus si addantur æquales multitudines partium numerorum GB, HE, erit quoque multitudo partium numeri AB, multitudini partiũ numeri AE, æqualis; Atque adeo vna pars numeri CD, eadẽ pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partiũ numeri CF, erit CD, eadẽ partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primo propositum.

IAM vero sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius, AE, eædem partes. Dico è cõtrario AB, ipsiũ CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Itẽ diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multi-

tudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, *in* AB, *superitque eadem pars, vel partes ipsius* CD, *quoties omnes partes numeri* CF, *continentur in* AE, *& quæ pars, aut partes ipsius* CF, *supersunt, propter æquales multitudines partium numerorum* CD, CF, *&* AB, AE. *Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum* AB, AE, *contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum* CD, CF, *& insuper in duobus illis numeris supersint partes numerorum* CD, CF, *multitudine æquales. Quam ob rem* AB, *ipsum* CD, *&* AE, *ipsum* CF, *æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem vel partes. Quod secundo est propositum.*

xiij. **THEOR. 10. PROPOS. 12.**

SI sint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

SINT quotcunque numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc est, ut A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico esse quoq; oēs A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, ut est A, ad B. Sint enim primum A, C, E, minores quā B, D,

A .... C .. E ...
B ..... D .... F .....

a 20. def. F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, a eadem pars est, aut partes, A, ipsius B, quæ C, ipsius D, & E,

b 5. vel 6. sept. ipsius F, b erit quoque uterque A, C, simul utriusque B, D, simul, eadem pars, aut partes, quæ A, ipsius B, uel E, ipsius

F; Rur-

F. Rursus quia uterq; A, C, simul, tãquã unus, utriusq; B, D, simul, tanquã unius, eadẽ pars est, aut partes, quæ E, ipsius F; a erunt & ambo A, C, tãquam vnus, & E, simul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, simul eadem pars, vel partes, quæ A, ipsius B. b Quare eadem proportio est omniũ A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simnl, quæ ipsius A, ad B.

a 25. sept.

b 20. def.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo posito, erit e contrario B, ipsius A, eadem pars, quæ D, ipsius C, & F, ipsius E;

A ..... C .... E .....
B .... D .. F ...

Atque adeo vt prius, c erunt omnes B, D, F, simul, omnium A, C, E, simul, eadem pars, quæ B, ipsius A; ideoque & e contrario omnes A, C, E, simul omnium B, D, F, simul, & A, ipsius B, æque multiplices. d Quare eadem est proportio omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ est A, ad B. Hoc idem uerum est, etiamsi aliquæ proportiones multiplices, uel etiam omnes, sint numerorum ad unitatem. Est enim eadẽ semper demonstratio, ut hic apparet, adiuuante tamen scholio propos. 5. huius lib.

c 5. sept.

d 20. def.

A ... C ..... E	A ... C ... E	A ... C ... E ...
B. D .. F ...	D. D. F. .	B. D. F.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. e Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipsum B, & C ipsum D, & E, ipsum F, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes: Erit per lemma præcedentis propos. B, ipsius A, & D, ipsius C, & F, ipsius E, eædem partes. Igitur ut prius, f erunt omnes B, D, F, simul omnium A, C, E, simul eædem partes, quæ ipsius A; atque adeo per idem lemma, e contrario continebũt oẽs numeri A, C, E, simul oẽs numeros B, D, F, simul, & A, ipsũ B, æqualiter, eandẽq. insuper partẽ, uel partes,

A ..... C .... E .....
B ..... D ... F .....

e 20. def.

f 6. sept.

a 20. def. fin. a Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quę ipsius A, ad B.

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiunt A, C, simul æqua-
A .... C .... E .... les ipsis B, D, simul: quibus si rur-
B .... D .... F .... sum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, D, F, simul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propositio hæc vera esse eodem modo conijcietur, vt patet, si pro numeris integris fracti assumuntur.

xiiij.

THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, vt B, ad D. Nam sint primum A, & C, minores quā
A ... C ..... B, & D; & A, quoque minor, quam
B ... D ..... C. Quo posito, erit, propter eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadem pars, vel partes. b Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem pars erit, vel partes: c Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

b 9. vel 10. sept. c 20. def. fin.

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadē pars, vel partes. d Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadē pars erit, vel partes: Atque adeo e contrario,
A ..... C ..... vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque
B ..... D ..... multiplex erit, vel certe, per lemma propositi huius lib. A, ipsum

d 9. vel 10. sept.

C, &

C,& B,ipſum D,æqualiter continebit, eandemque inſuper partē, vel partes. a Quare erit vt A,ad C,ita B,ad D. a 20.defin.

SINT tertio A,& C,maiores quam B,& D;at A, minor quam C. quo poſito, erit ob eandem proportionem, vel A,ipſius B,& C,ipſius D, æque multiplex;vel certe A,ipſum B,& C,ipſum D,continebit æqualiter, eandemque inſuper partē, vel partes; Atq; adeo e contrario erit B,ipſius A,& D, ipſius C,vel eadem pars,vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib.eædem partes. b Viciſsim ergo & B,ipſius D,& A,ipſius C,eadem pars erit, vel partes. c Ac proinde eadem proportio erit B,ad D,quæ A,ad C, hoc eſt, erit vt A,ad C,ita B,ad D.

A .... C .....
B ... D .....

b 9. vel 10.ſept.
c 20.defin.

SINT quarto A,& C,maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo poſito,erit C,ipſius D,& A, ipſius B,ob eandē proportionem,vel æque multiplex,vel certe C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes; Atq; adeo, e contrario,erit D,ipſius C,& B,ipſius A, vel eadē pars,vel certe,per lemma propoſ. 11. huius lib.eædem partes. d Viciſsim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit ,vel partes ; Ac propterea e contrario vel B,ipſius D, & A, ipſius C, æque multiplex erit,vel certe,per lemma propoſ. 11.huius lib.B,ipſum D,& A,ipſum C,continebit æqualiter,eandemque inſuper partem,vel partes. e Quare eadem proportio erit B, ad D,quæ A,ad C,hoc eſt,erit vt A,ad C,ita B, ad D.

A .... C ....
B ... D ....

d 9. vel 10.ſept.
e 20.defin.

SINT quinto A,& C,ipſis B, & D,æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A,& B, æqualium numerorum C, & D,vel eadem pars, vel eædem partes ſunt; f Erit vt A,ad C,ita B, ad D.

A ... C ....
B ... D ....

f 20.defin.

SINT ſexto A, & C,ipſis B,& D,æquales, at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A,& B, æqualium numerorum C, & D, vel æque multiplices ſunt, vel certe illi

A ... C ...
B ... D ...

hos

hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes;[a] erit vt A, ad C, ita B, ad D.

SINT septimo ac vltimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores sint quam B, & D, siue minores, siue æqua-

A ..... C .....
B ... D...

les.[b] Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes; suntq; A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & vicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

a 20. def.

b 20. def.

SCHOLIVM.

QVOD si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI vero sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recēsere, eosque demonstrationibus certissimis confirmare, vna cum lemmate propos. 11. vt earum veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicue ex eorundem multorum demonstrationibus apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, vbi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti æque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris

partes

partes esse, satis fuisset dicere, cum primus, secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis supervacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. xv.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita D, ad E; [a] erit vicissim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eandem ob causam, cum sit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit vicissim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cum enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni B, ad E, vt demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erũt, vt mox ostendetur.) [b] Ac proinde vicissim, vt A, ad C, ita D, ad F.

A ..... D .....
B ..... E .....
C .... F ...
G .....H .....

[a] 13. sep.

[b] 13. sep.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam quemadmodum C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autẽ vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadẽ ratione sumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, rursus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor; sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod ostendendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est, hanc propositionem eadem modo demonstrari posse in numeris fractis, si pro numeris integris assumantur fracti numeri.

A . D ... IDEM verum est, si loco vnius
B .. F ..... numeri vnitas assumatur, vel etiã
C ... F ..... loco plurium plures vnitates, vt in
G : G ... hoc exemplo perspicuum est.

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorũ, quæ eidem proportioni eædem sunt inter se quo-

A ..... B ..... C ....
D ..... E ..... F ...

que sint eædem, quales sunt in demonstratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem ostẽsæ sunt proportioni B, ad E, siue numeri sint integri siue fracti, ita demonstrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipsius E, & tam A, ipsius D, quam C, ipsius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eadẽ partes; vel certe B, ipsum E, & tam A, ipsum D, quã C, ipsum F, cõtinebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes.
20. def. a Quare numeri A, D, C, F, proportionales sũt, vt quidem A, ad D, ita C, ad F. Quod est propositũ.

HOC idem demonstratũ fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

xvj. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum

quen-

quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico viciſsim vnitatem A, numerũ D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiſo enim numero BC, in vnitates BG, GH, HC, & numero EF, in partes EI, IK, KF, ipſi D, æquales;

A. D.
B. G. H. C E. I. K. F

erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturque æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipſum EI, atque vnitas GH, ipſum IK, & vnitas HC, ipſum KF; atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, ſimul numerorum EI, IK, KF, ſimul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc eſt, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compoſitus numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compoſitum æque metietur. Si vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & trilus numeris, propterea quod vnitas nõ eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, æque metitur, atque numerus D, numerũ EF, erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſsim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, æque metietur.

HAEC

HAEC propositio fractis numeris conuenire non potest. Nam si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur vicissim æque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & secundus integer quarti
a13.sept *fractum; a sed solum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam secundus ad quartum.*

THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo numeri mutuo sese multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

E.
A . . . B . . . .
D. . . . . C. . . . . .

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipsum B, faciat C, at B, ipsum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter se æquales esse. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipsum B, multiplicans faciat C;
a15.def a erit C, ex B, toties compositus, quot sunt in A, vnitates; atque adeo vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque me-
b15.sept tietur. b Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rursus eodem
c15.def. modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D: c erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atque adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eúdem numerum B, & numerus idem A, numerú C, æque. Aeque igitur numerus A, vtrumq. numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutúo sese multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad

E, vni-

E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemate propos. 14. ac proinde aequales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

E. A, 2/3. B, 4 5/7. D, 3 1/7. C, 3 1/7.

POTEST hac eadem propositio eum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemq. numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eũdem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, aque metiri. At vero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, aetiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum aque metitur. Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipsum numerus A, aque metitur, atque vnitas E, ipsum B. 15. def.

E.
A . . . B . . .
C . . . . . .

QVOD si numeri A, & B, sint fracti ambo, vel vnus eorum, demonstrabimus idem hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatẽ. At si B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod est propositum.

THEOR. 15. PROPOS. 17. xviij.

SI numerus duos numeros multipli-

cans

cans fecerit aliquos; Geniti ex ipsis eandē rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita D, ad E. Assumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compositus toties, quoties unitas F, est in A: similiterque toties E, compositus erit ex C, quoties eadem vnitas F, est in eodem A: Atque adeo B, ipsum D, & C, ipsum E, æque metietur. Quare B, ipsius D, & C, ipsius E, eadem pars erit. [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c. Quod ostendendum erat.

a 15. def.

F.
A . . .
B . . C . . . .
D ..... E .....

b 20. def.

c 13. sept

SCHOLIVM.

Si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

xix.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; [d] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademque ratione, cum ex B, in C, fiat E, fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [e] erit, vt A, ad B,

A . . . . B . . . . .
C . . . . .
D ..... E .....

d 16. sep.

e 17 sep.

ita

ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel unus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunque numeros cum Campano accommodabimus, sive numeri omnes sint integri, sive non; hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri easdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico easdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc est, esse, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nam cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F, a *erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G, erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.*

A		
B	C	D
E	F	G

a 17. vel 18. sept.

THEOR. 17. PROPOS. 19. xix.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex secundo, & quarto fit, numero. Et si, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex secundo, &

tertio fit, numero; ipsi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, secundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter se esse. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D, hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E.

[a] 19. sep.

A . . .
B . .
C . . . . .
D . . . .
E . . . . . .
F . . . . . .
G . . . . . .

Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus.

[b] 18. sep.

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C; D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem vt ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædem sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 17. sep.

[d] 18. sep.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, siue omnes fracti sint, siue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiam ad hūc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum, consequentē horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

ITA enim ostensum est numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, consequentem, æqualem esse numero F, qui procreatur ex B, consequente in C, antecedentem.

SED & sequens theorema iam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propos. 16. demonstrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numerō: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, secundum, quàm C, tertij ad D; quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, esse maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam si intelligatur esse E, ad B, vt C, ad D;

(sive E, numerus integer sit, sive fractus; sive integer cū fracto: qui quidē reperietur, vt ad propos. 19. lib. 9 ostendemus, si numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quā E, ad B: ac proinde A, maior erit, quā E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quā ex E, in eundē D: At qui fit ex E, in D, æqualis est ei, qui fit ex B, 19. sep.

A .....
B ....
C .....
D .....
E .....

in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod est propositum.

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem esse A, prima ad B, secundã, quam C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (siue E, numerus sit integer, siue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D. ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quam E, ad B. [a] *At ita est E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.*

a 19. sept.

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quã tertij ad quartum. Eadẽ enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc apposito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D: hoc est, maior est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, siue ex B, in C, quã ex D, secunda in A, tertium, siue ex A, in D, vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quam ex B, in C, quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex A, in D, quam ex B, in C; hoc est, maior ex B, in C, siue ex C, in B, quam ex A, in D, siue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertij ad B, quartum, vt iam est demonstratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quam C, ad D. Quod est propositum.

A . . . E . . . .
B . . . .
C . . .
D . . . .

THEOR. 18. PROPOS. 20.

xx.

SI tres numeri proportionales fuerint,

qui

qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, ut quidē A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit ut B, ad C, hoc est, ut A, ad B, ita D, ad C; numerusque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in se procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales sunt, a erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc est, ei, qui ex B, in se producitur. a 19. sep.

A . . . . . .
B . . . . D . . . . .
C . . . .

SED iam sit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se. Dico tres numeros A, B, C, proportionales esse. Sumpto enim rursum D, æquali ipsi B, erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in se, hoc est, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis est ei, qui fit ex B, secundo in D, tertium, b erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat. b 16. sep.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hac non variabitur, etiamsi numeri A, B, C, sint fracti, vel partim integri, partim fracti.

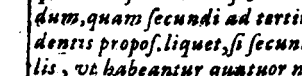
QVOD si maior fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quam ex secundo in se? Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertiū. Itē si mi-

nor fuerit proportio primi ad secundum, quam secundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quam ex secundo in se: Et si minor numerus fiat ex primo in tertiũ, quam ex secundo in se, minor proportio erit primi ad secundum, quam secundi ad tertium. Id quod ex scholio antecedentis propos. liquet, si secundo numero sumatur alius aqualis, vt habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

xxj. THEOR. 19. PROPOS. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri AB, CD, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum AB, ad CD, ita E, ad F. Dico AB, CD, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem AB, ipsum maiorem E, at minorem CD, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedẽtem, & consequentem, ipsum consequentem.



Cum enim sit, vt AB, ad CD, ita E, ad F; [a] erit viciſſim, vt AB, ad E, ita CD, ad F. Atque adeo cum AB, CD, minores sint, quam E, F; [b] erit AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eadem pars, vel partes: Partes quidem, nequaquã: Diuiſis namque, ſi fieri poteſt, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH,

HD;

a 13. sep.

b 20. def. 7.

HD; Ac propterea A G, ipsius E, & C H, ipsius F, eadem pars. [a] Erit ergo, vt AG, ad E, ita CH, ad F; [b] & vicissim, vt AG, ad CH, ita E, ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quam AB, CD, eandem, habebunt proportionem, quam AB, CD. Quod est absurdum; cum AB, CD, in sua proportione ponantur minimi. Non ergo AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea AB, ipsum E, & CD, ipsum F, æqualiter metientur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 20. def.
[b] 13. sep.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum est, si quis dicat, tres numeros esse cõtinue proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos. Hoc enim posito, ostendetur eodem modo, primum metiri secundum, & secundum, tertium, vt in hoc appositio exẽplo apparet, vbi tertius numerus secundo æqualis est. Quamnis autem dari non possint tres numeri cõtinue proportionales, quorum duo primi in sua proportione sint minimi, nisi primus sit vnitas; idem tamẽ demonstratur in tribus, etiamsi primus ab aduersario non dicatur esse vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propositio 12. lib. 9. demonstrari possit, in qua aduersarius cogitur cõcedere, tres numeros esse continue proportionales, primosque duos esse in sua proportione minimos, ac proinde primũ metiri secundum, ex hac propos. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propos. 12. lib. 9.

A .. G .. B
C ... H ... D
E .....
F ....

PARI ratione, & hoc verum est, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarum proportionum, siue eædẽ sint, siue diuersæ proportiones, metiũtur æque totidem alios numeros, qui easdem cũ eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione suarum proportionum, siue eadem sit

A... K... B C.. L. D E.... M... F
G..... H..... I.....

proportio AB, ad CD, qua CD, ad EF, siue non ita vt non possint reperiri alij numeri ipsis AB, CD, EF, minores, quorum primus ad secundum sit, vt AB, ad CD, & secundus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur seorsum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 6. vel 2. ad 1. qui minores sunt ipsis AB, CD, quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi sunt in continuatione duarum proportionum subsesquiquartarum, cum in minoribus numeris non possint continuari, reperiuntur seorsum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eisdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt AB, ad CD, & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipsum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsum I, metiri aque. Cum enim sit vt AB, ad CD, ita G, ad H, a erit vicissim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum sit vt CD, ad EF, ita H, ad I, b erit quoque vicissim, vt CD, ad H, ita EF, ad I. c Quare AB, ipsius G, & CD, ipsius H, & EF, ipsius I, erit vel eadem pars, vel eadē partes. Partes quidē nequaquā. Diuisis enim, si fieri pōt, AB, CD, EF, in AK, KB, CL, LD, EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF, atque adeo AK, ipsius G, & CL, ipsius H, eadem pars. d Erit ergo vt AK, ad G, ita CL, ad H; e & vicissim vt AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL, ad FN, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod est absurdum, cum hic supponantur in suarum proportionum continuatione minimi. Nā ergo AB, CD, EF, eadem partes sunt numerorum G, H, I. Quare singuli singulorum eadem pars; Ac propterea AB, ip-

a 3. sep.
b 13 sep.
c 20. def.
d 20. def.
e 13. sep.

sum

sum G, & CD, ipsum H, & EF, ipsi I, æque metietur. Quod est propositum.

QVOD si tres numeri dati A, B, C, minimi sint in continuatione suarum proportionum, ita vt etiam quilibet duo minimi sint facilius idem hoc modo demõstrabitur. Sint alij tres D, E, F, nõ minimi, qui eas dem habeãt proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipsos D, E, F, æque metiri. Nam per hãc propos. 21. A, B, cum sint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipsos D, E, eademque ratione B, C, ipsos E, F. Quare cum A, ipsum D, & C, ipsum F, æque metiantur, ac B, ipsum E, metientur æque omnes A, B, C, ipsos D, E, F.

CAETERVM hæc propositio cum suo scholio nullo modo conuenire potest numeris fractis: Propterea quod in numeris fractis dari non possint minimi numeri in sua proportione, sed quibuslibet datis, dari possunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligẽdum est in omnibus alijs propositionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris sunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter se primis agitur, excludendi sunt numeri fracti, cum hi non possint esse inter se primi, sed quoscunque metiri possit aliqua fractio, tanquam mensura communis. Nam si reducantur ad eandem denominationem, perspicuum est, eos habere vnam particulam, vel plures, eiusdem denominationis, mensuram communem. Alia autem omnes propositiones numerorum, in quibus minimi numeri in sua proportione, vel primi non adhibentur, æque conueniunt & integris numeris, & fractis. quod satis est, semel hoc loco monuisse.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xix.

SI fuerint tres numeri: & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem pertubata

eorum

eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A,B,C,& totidem D,E,F, qui bini sumantur, & in eadem ratione, sitque perturbata eorum proportio, vt quidem A,ad B,ita E,ad F;& vt B,ad C, ita D,ad E.Dico,ex æqualitate quoque esse vt A,ad C,ita D, ad F.Cũ enim sit vt A,ad B, ita E, ad F,a erit numerus ex A,in F,genitus æqualis numero,qui fit ex B,in E.Pari ratione,cum sit etiam vt B, ad C, ita D,ad E,b erit eidem numero,qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D, Atque adeo numerus genitus ex A,primo in F,quartum æqualis erit numero ex C,secundo in D,tertium,producto.c Quare erit vt A,ad C,ita D, ad F.

19. sep.

19. sep.

19. sep.

A ..... H ...
B ... D ....
C..... E.....
G..... F ..

QVOD si fuerint plures numeri,quam tres,ita vt sit etiam C,ad G,vt H,ad D;Dico adhuc esse,vt A,ad G, ita H,ad F.Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris,esse vt A,ad C,ita D,ad F;ponatur autem vt C, ad G, ita H,ad D;erunt tres numeri A,C,G,& alij tres H,D,F,qui bini in eadem ratione sumuntur, estq. eorum proportio perturbata.Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa,erit rursus,vt A,ad G,ita H,ad F.Eodemque modo idẽ ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres. & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alii ipsis multitudine æquales,qui bini sumantur,&c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM *modo demonstrabitur propositio in numeris fractis,vt constat.*

QVONIAM *vero Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus,quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit,& demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui à permuta-*

tata

tata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex aequalitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto erit, breuiter reliques quatuor modos ostendere in numeris, & alia quaedam quinti libri sequentibus theorematibus, qua omnia conueniunt tam fractis numeris quam integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C.

Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, a *erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus qua est B, ad D, vt A, ad C,* b *erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.*

A ..... C ... a 13. sep.
B .... D ..
b 13. sep.

II.

SI cõpositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico diuidendo esse vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, c *erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatũ FE. Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE,* d *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* e *Vicissim ergo erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod est propositum.*

A ..... C ... B
D ... F .. E
c 13. sep.
d 11. sep.
e 13. sep.

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis cõuersam esse quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cũ enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad EE; erit quoque dividen-

do, vt

do, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF; Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

SI diuisi nnmeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [a] *erit vicissim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF;* [b] *Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF:* [c] *Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.*

a 13. sep.
b 12. sep.
c 13. sep.

A ..... B ... C
D .... E .. F

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam esse quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE. Et componendo ergo, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum

IIII.

SI compositi numeri proportionales sint:

Hi quo-

Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, [a] *erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* [b] *Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF.* [c] *Vicissim igitur vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

[a] 13. sept
[b] 17 sept
[c] 13 sept

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

Si primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habu erit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quã tertius cum sexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum; Item vt BG, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, vt est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cum enim sit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit cõuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F: & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex aequalitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH. Itaque cum rursus sit, vt

A ..... B .. G | D ..... E ... H
C .... | F .....

AG, ad BG, ita DH, ad EH; & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex aqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod eſt propoſitum.

EODEM modo & hoc Theorema oſtendemus, quod ad propoſ. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonſtrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquũ GB, eſſe ad C, vt eſt reliquus HE, ad F. Cum enim ſit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur eſt, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH: erit ex aqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaq. cum rurſus ſit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F: erit ex aqualitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod eſt propoſitum.

A ..... G .. B D ..... H ... E
C .... F .....

ITEM & hoc demonſtrabimus.

VII.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eãdem, quã tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eãdem rationem habebit, quã tertius ad quartum cum ſexto.

SIT

SIT vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintum CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositum ex secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cũ enim sit, vt A, ad BC, ita A ..... D ..... D, ad EF; erit conuertendo B... C.. G E .... F..., H vt BC, ad A, ita EF, ad D.

Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D; & vt A, ad CG, ita D, ad FH; erit ex aqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH: & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH: & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH: erit ex aqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.

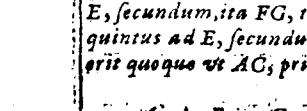
DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunque numeri AB, BG, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K; Hoc est, sit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt

BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est quam ipse FI, habet ad K. Cum enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E, secundum, ita GH, sextus ad K, quartum; erit quoque vt AC, primus cum quinto, ad E, secundum,



ita FH, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est vt AC, primus ad E, secundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, secundum, ita HI, sextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FI, tertius cum sexto, ad K, quartum. Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD, proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI. Hoc est, sit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, vt E, ad omnes illos simul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes simul, vtpote ad FI. Cum enim sit, vt E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, vt E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

HAEC vero hîc demonstratis, ostendentur nouem vltima propositiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonstratæ fuere, si pro magnitudinibus, intelligantur numeri siue integri, siue fracti, & pro modis arguendi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur

idem

ijdem modi hoc lib. demonstrati: vt opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, vt dixi, si propositiones illæ quinti lib. in manus sumantur, & magnitudines intelligantur esse numeri, eademq. prorsus demonstrationes adhibeantur.

THEOR. 21. PROPOS: 23. xxj.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A,B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quã ipsi A,& B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A,&B. Sint A..... B .... ergo, si fieri potest, C,D, minimi C------ D-- in proportione A,& B, minores- E ---- que idcirco ipsis A,& B Quoniam igitur C, D, minimi sunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque; atque adeo secundum eundem numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D; ipsum B, quoties vnitas est in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; [b] metietur & vicissim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur: [c] metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B: Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum cõmunis mensura. Quare A,& B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A,& B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A,& B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 21. sept

[b] 15. sept

[c] 15 sept

THEOR. 22. PROPOS. 24.

xxij. MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium. Dico eos esse inter se primos; hoc est, nullum numerum, præter vnitatem, cõmuni mensura eos metiri. Si.n. non sunt inter se primi, sed habent numerum communẽ mensuram; sit numerus C, eorum mensura communis, metiatur C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas est in numero D: At vero ipsum B, toties, quoties vnitas est in E. Quia igitur C, toties compositus, quot in D, sunt vnitates, procreat ipsum A; & idem C, toties cõ

A ..... B .....
C -----
D ----- E ----

[a] 9. prõ. positus, quot sunt vnitates in E, producit ipsum B: [a] fit, vt D. & E, ipsum C, multiplicantes, producant A, & B.

[b] 18. sept [b] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E: Atque adeo, cum D, & E, partes ipsorum A, & B, minores sint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod est absurdum. Primi ergo inter se sunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in

conti-

continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunque numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in cõtinuatione ſuarum proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari non poſſint, quam-uis proportio duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarũ proportionũ. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metiatur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æque, per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus: atque adeo ſecundum vnũ eundem numerum, qui ſit G. ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æque metitur: a metietur quoque vicißim a 15. *ſept. æque vnitas numerum D, & numerus G, numerum A; Eademq. ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æque, atque vnitas ipſos E, F: Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.*

IAM vero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D: & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E: & ipſum C, toties quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F: fit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus: Atque adeo, cum D, E, F, minores ſint quam A, B, C: non erunt A, B, C,

minimi in continuatione suarũ proportionũ. Quod est absurdum. Primi igitur inter se sunt A, B, C. Quod est propositum.

xxiiij. **THEOR. 23. PROPOS. 25.**

SI duo numeri primi inter se fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A, & B: & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primũ. Si enim non sunt inter se primi B, & C: metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D.

A..... B .... Quoniam igitur D, metitur C: & C,
C.. , D.... ipsum A: [a] metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

a 11. prõ

xxv. **THEOR. 24. PROPOS. 26.**

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi: sit eorum communis

A..... B .. mensura numerus E, metiens ipsum D, toties, quot vnitates sunt
C..... in numero F. Quoniam igitur E,
D..... toties compositus facit ipsum D,
E ---- F ---- quot sunt vnitates in F; [b] fit vt F, ipsũ B, multiplicãs gignat ipsum D: [c] & contra E, ipsũ F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autẽ idẽ

b 9. prõ. c 16. sep.

D, ex

D,ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus,qui ex A, secundo in B,tertium ; [a] erit vt E,primus ad A, secundum,ita B,tertius ad F,quartum. Quia vero A,& C,primi inter se sunt;& E,ipsum C, ponitur metiri;[b] erit E,ad A,primus;Atque adeo E,& A,cũ sint inter se primi, [c] in sua proportione minimi erunt. [d] Aeque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habẽtes,nimirum E,ipsum B,& A,ipsum F. Quare cum E,metiatur vtrumque B,& C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiam primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

a 19. sep.
b 25. sep
c 23. sep
d 21. sep.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxvj.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

SINT inter se primi A,& B,gignaturque C, ex A,in se ipsum. Dico C,ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D,æquali ipsi A,erit & D,ad B,primus. Quoniã igitur A,& D,ad B, primi sunt, [e] erit numerus ex A, in D, hoc est,ex A,in se genitus,nimirum C,ad eundem B,primus. Eademque arte ostendemus,numerum ex B,in se genitum,ad A,primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A.... B.....
C.....
D ....

e 26. sep

THEOR. 26. PROPOS. 28. xxvij.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A,& B,ad vtrumque C, & D, primus,gignaturque E,ex A,in B;& F,ex C,in D. Dico E, & F, in-

ter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit
a26.sep ad C, a erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cũ vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodẽ modo E, ex ipsis genitus, ad eundẽ D, primus. Quia igitur vterque
b26.sep C, & D, primus est ad E; b erit quoque F, ex illis procreatus, Ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A ..... B ...
E .....
C ... D ..
F .....

xxviij.

THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erũt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cum enim A,
c27.sep B, sint inter se primi, c erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus; atque adeo geniti duo C, D, primi inter se erunt.

A ... B ..
C ..... D ....
E ..... F .....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, d erit & C,
d27.sep factus ex A, in se, ad B: & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; e Ac proinde E,
e28.sep

factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G, & ex B, in F, fiat H, cum A, & C, primi sint ad B, [a] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus est; [b] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, [c] erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A. [d] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

a 26. sep
b 28. sep
c 26. sep.
d 28. sep

THEOR. 28. PROPOS. 30. xxix.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum alicuem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi AB, BC. Dico & vtrumque simul AC, primum esse & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, nó sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totũ AC, & ablatum AB; [e] metietur quoque reliquum B C. Non igitur primi inter se sunt AB, BC, cum eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, ostendemus eundem esse primum.

A.....B.....C
D----

e 12. pro.

SED iam vterque AB, BC, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad A B. Dico & A B, B C, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC; [f] metietur quoque D, numerum AC,

f 10. pro.

ex AB,BC,compositum: Ac proinde AC,AB, nō sunt inter se primi,cum eos numerus D,metiatur. Quod est absurdum,& contra hypothesim. Sunt igitur AB, BC, inter se primi. Eodemque argumento ostendemus AB, BC,inter se primos esse,si AC,ad BC, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad vnū illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim AC, ad AB,primus est,erunt AB, BC, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & AC,ad BC,primus erit:per primam partem eiusdem. Quod est propositum.

xxxij. THEOR. 29. PROPOS. 31.

OMNIS primus numerus, ad omnem numerum,quem non metitur,primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A,ad B,primum esse; hoc est, A,& B, esse inter se primos,licet B,compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi,metiatur eos præter vnitatem,si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A,ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C,metitur,non erit A, primus. Quod est absurdum,& contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea,omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A ..... B .....
C ---

xxxiij. THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus. is etiā vnum eorum,qui in principio,metietur.

DVO

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quem metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem vnum ipsorum A, & B, si nō vtrumque metitur. Nō metiatur enim D, ipsum A; metiatur vero ipsum C, toties, quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad E, quartū. [b] Quia vero primus D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in sua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

A .... B .....
C .....
D ... E .....

a 19. sep
b 21. sep
c 23. sep
d 21. sep

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema sequēs demōstrabimus.

SI duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compositus ad eum sit: hoc est, vel D, & C, cōpositi sint inter se. Dico D, quoque ad vnum ipsorum A, B, compositū esse: id est, vel D, & A; vel D, & B, esse quoque inter se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit vterq; A, et B, ad D, primus. [e] Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, pri-

A ... B ....
C .....
D .....

e 26. sep

mus

mus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur vel metiri ipsum G, vel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, vel ad B, cum non sit primus ad utrumque.

xxx. PROBL. 31. PROPOS. 33.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si vero compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus: Si primus, cũ metiatur ipsum B; & B, ipsum A; [a] metietur quoque C, primus ipsum A. Si autẽ C, compositus fuerit, metietur eũ alius numerus. Quia vero numerus nõ diminuitur infinite, veniemus tandẽ ad aliquẽ numerũ, quẽ nullus alius metiatur, atque adeo ad primum, qui cum metiatur omnes præcedentes, [b] metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

A .....
B ..... C ...

[a] 11. pro.

[b] 11. pro.

ALITER. Quia numerus A, compositus est, metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B, quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A, [c] metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A .....
B ... C ---

[c] 11. pro.

xxxj. THEOR. 32. PROPOS. 34.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum. n. omnis numerus vel primus sit, vel cõpositus; si quidẽ A, primus est, habetur pro-

A .....

positum:

positum: Si vero compositus; a metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum. a 33. sept

PROBL. 3. PROPOS. 35. xxxiiij

NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunque proportiones, siue eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, siue non; oporteatque totidem reperire, qui in eisdem proportionibus sint minimi. Quoniã A, B, C, sunt inter se aut primi, aut cõpositi: Si primi inter se sunt; erunt ipsi in continuatione suarum proportionum minimi, per ea quæ ad propos. 4. huius lib. demonstrauimus. Si vero nõ sunt inter se primi, b inuenta sit maxima eorum communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorum A, B, C. Quod enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C; sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per E, F, G; fit, vt D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A ..... B .... C .....
D ..
E ... F .. G ....
H ---- I ---- K ----
L ----.

b 3. sept.

c 9. pron

QVOD vero E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sunt minimi, erunt aliqui alij ipsis minores, minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiuntur æque, vt ad propos. 1. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerũ L. Quo posito, d fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; e & viciſſim L, ipsos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E,

d 9. pron
e 8. pron

primus

primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertium facit eundem A; a erit, vt E, primus ad H, secundum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur erũt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in cõtinuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, fi numeris datis quotcunque, reperimus minimos, &c. Quod faciendum erat.

19. sep.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via cõperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionẽ, quã quotcunque numeri dati continue proportionales. Vt si proponãtur continue proportionales A, B, C, D, E,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sive non, reperiemus duos in eadẽ proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima earum communis mensura eos metitur.

CAETERVM contingit interdum, vnum numerorum

A ... B .. .... C	*A .... B .. C .....*
D ...	*D . .*
E. F . . G...	*E .. F. G...*

E, F, G, per hanc propos. inuentorum esse vnitatem; quando scilicet D, maxima mensura vni ipsorũ A, B, C, aqualis est, vt ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc in-

uentos

uentos E,F,G,esse minimos in continuatione suarum proportionum,cum minor numerus dari non possit, quam unitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. xxxvj.

DVOBVS numeris datis,reperire,quem illi minimum metiantur,numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium,quos dati numeri A,& B,metiuntur.Sint primum dati numeri A, & B,inter se primi,seseque mutuo multiplicantes faciãt C.Dico C,esse minimum,quem A,& B,metiuntur. Quod enim eum metiantur,perspicuum est.Nam cum producatur C,ex A,in B,vel ex B,in A;a metietur A,ipsum C,per B;& B,eundẽ C, per A.Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus omnium,quos A, & B,metiuntur,sic demonstrabimus. Si C, non est minimus; metiatur,si fieri potest,A,& B,alium numerum D,ipso C, minorem; metiaturque A,ipsum D,per E,at B,eundem D,per F.Quo posito,b tam ex A,in E, quã ex B,in F,& e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A,primo in E, quartum, & ex B, secundo in F,tertium,c erit,vt A,primus ad B,secundum, ita F,tertius ad E,quartum.Igitur A,& B,(cum ponantur primi inter se,d & ob id, in sua proportione minimi) e æque metientur ipsos F,& E;nimirum A,ipsum F, & B, ipsum E.Quoniam vero A,multiplicans B, & E,facit C, & D;f erit C,ad D,vt B,ad ad E:Ac propterea cum B, metiatur ipsum E, vt ostensum est;metietur & C, numerus numerũ D,maior minorem.Quod est absurdum.Non igitur A,& B, metientur alium numerum minorem ipso C, atque adeo C,minimus est omnium,quos metiuntur.

A.... B .....
C.....
D----------
E------ F ----

a 7. pro.
b 9. pro.
c 19. sep.
d 23. sep
e 21. sep.
f 17. sep.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter se.g Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportio-

g 35. sep.

nc, vt

ne, vt sint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo posito, [a] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. Factus ergo sit E. Dico E, hac via procreatum esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifestum est. Nam cum tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus à C, ipsum E, producat; [b] metietur tam A, quam B, ipsum E. Quod vero E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, nō est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, [c] fiet F, tam ex A, in G, quā ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex [d] B, secundo, in H, tertiū, erit, vt A, primus ad B, secundū, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G, [e] metientur ipsos H, & G, æque, nimirum C, ipsum H, & D, ipsum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F, [f] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipsum G, vt ostensum est, metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorē, atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem duobus numeris datis reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

[a] 19. sep.

[b] 7. prō.

[c] 9. pron

[d] 19. sep.

[e] 21. sep.

[f] 17. sep.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationē habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimū, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi, Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. xxxv.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD. sitque alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum CD, metiri. Si enim E, ipsum CD, non metitur, ablato E, ex C D, quoties pót auferri, relinquetur numerus quidam minor, quã E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties potest, numerum, si fieri potest, F D, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum C F. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum CF; a metietur quoque tam A, quam B, ipsum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; b metientur & reliquum FD. Est autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare E, ipsum C D, metitur. Si duo ergo numeri numerum quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

A. . B . . .
C . . . . . F —— D
E . . . . . .

a 21. pro.
b 12. pro.

PROBL. 5. PROPOS. 38. xxxvj.

TRIBVS numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. c Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B, metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsũ D, metiantur. Dico numerum D, minimum inuentum, quẽ A, & B, metiuntur, minimũ quo-

A . . . B . . . . C . . . . .
D . . . . . .
E ——————

c 36. sep.

que esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerũ E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur; [a] metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum.

a 32. sep

SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. [b] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur Cũ A, & B, metiantur ipsum D, & D, ipsum E; [c] metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E, Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, B, C, alium numerum F, ipso E, minorem. Quoniã igitur A, & B, ipsum F, metiuntur; [d] metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipsum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo cũ C, & D, metiantur ipsum F; [e] metietur quoque eũdem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipso E, minorem metientur; sed ipse E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

b 36. sep

A.. B... C .... D..... E..... F- ------

c 11. pro

d 37. sep

e 37. sep

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonstrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipsum F, ostensum est, & E, minimum, quem A, B, C, metiũtur, eundem F, metiri.

SCHO-

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non secus ac propos. 37. huius lib. ostendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum DE, sitque F, minimus, quem iidem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipsum DE, metiri. Si enim nō metitur, metiantur eius partem DG, relinquatque numerum GE, se minorem.

A . . B . . . C . . . .
D . . . . . G - - - E
F . . . . . .

Quoniam igitur A, B, C, ipsum F, metiuntur; & F, ipsum DG, a metientur quoque A, B, C, eundem DG; Ac proinde, cum & totum DE, ponantur metiri; b metientur & reliquum GE, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum DE. a 11. pro. b 12. pro.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia perägenda, vt de tribus numeris dictum est.

THEOR. 34. PROPOS. 39. xxxvij.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam à B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum C, & B, ipsum A æque metitur; & viciſſim vnitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur: atq; adeo ea c 15. sep

A . . . . . .
B . . . . C . . .

pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autē vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius lib docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodē B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

xxxviij

THEOR. 35. PROPOS. 40.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, à qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipſum A. Nam cum B, pars denominetur à C, ſit autem & vnitas pars ipſius C, ab eodem C, denominata;

A . . . . . .
B . . . C . . . . .

a 15. ſep. metietur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque.[a] Viciſſim ergo & vnitas ipſum B, & C, ipſum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonſtrandum erat.

xxxix.

PROBL. 6. PROPOS. 41.

NVMERVM reperire, qui minimus cū ſit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C, Inueniendusque ſit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, ſiue qui ipſas denominent, D, E, F; b minimusque, quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, eſſe minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiuſmodi partes habeat, ita oſtendetur. Cum D, E, F, ipſum G; metiantur. c habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc eſt, partes A, B, C, cum hę denominentur a D, E, F. Quod vero G, ſit

D. . A, *Secunda*
E . . . B, *Tertia*
b 38. ſep. F. . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H. . . . . .

c 39. ſep.

mini-

minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim no est minimus, habeat, si fieri potest, H, ipso G minor easdē partes A, B, C Quia igitur H, habet partes A, B, C, a metientur ipsum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor sit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, sed ipse G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum sit, habet datas partes. Quod faciendum erat. a 20. sep.

SCHOLIUM

QVOD si sumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipsum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, data partes A, B, C, ipsius G, denominata scilicet à D, E, F.

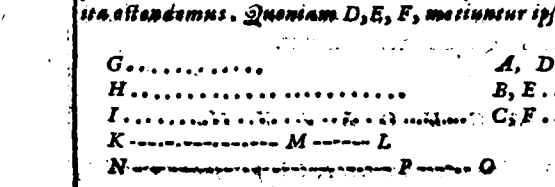
A, Secunda	*D*	..	*I* .....
B, Tertia	*E*	..	*K* ....
C, Quarta	*F*	....	*L* ....
	G	.....	

Cum enim D, E, F, ipsum G, metiantur per I, K, L, metietur aque vnitas ipsos I, K, L, & numeri D, E, F, ipsum G. b *Vicissim ergo metietur quoque vnitas ipsos D, E, F, & numeri I, K, L, ipsum G, aque, atque adeo vnitas ipsorū D, E, F, eadem pars erit, qua numeri I, K, L, ipsius G. Cum ergo vnitas sit pars ipsorum D, E, F, ab ipsis denominatas erunt & I, K, L, ipsius G, partes denominata à D, E, F.* b 15. sep.

EX his autem sequitur, minimū numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, esse minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Ostensum enim est, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum esse, qui habeat partes A, B, C, cuiusmodi sunt I, K, L, à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, si inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas à D, E, F,

sit illius duplus, numerus H; triplus vero I. &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, a numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet a D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur ipsum G, per



a 11. pro b 39. sep

constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G; metientur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G. b Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius KL, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex KL, relinquatur ML, ipso G, minor. Quoniam igitur KL, partes habet A, B, C, c metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem KL. Metitur autem & G, ablatum KM, sibi æqualem. d Igitur & reliquum ML, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H; cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens.

a 40. sep. d 12. pro.

NON aliter ostendemus numerum I, triplum ipsius G, esse tertium dictas partes habentem. Si enim non est tertius, sit alius, si fieri potest, videlicet NO, ipso prior, qui vide-

licet

licet maior sit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipso G. Quia igitur NO, partes habet A, B, C, a *metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem NO, per coroll. propos. 38. huius lib. metietur: Metiur autem & G, ipsum N P, ablatum ipsi H, duplo aequalem.* b *Igitur & reliquum PO, idem G, metietur, minorem maior. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, tertius est illas partes habens. Eademque ratione, quadruplus ipsius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.*

a 40. sep.

b 12. pro

HVC quoque referri potest sequens problema,

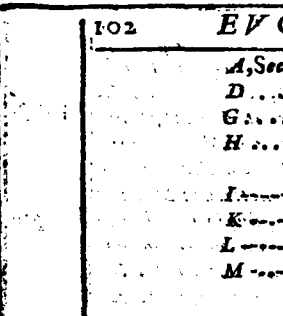
NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quælibet pars subsequentem partem contineat.

SINT data partes A, B, C; inueniendusque sit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.

pars A, cõtineas partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatque G, ex E, in F: Itẽ H, ex D, in G. Dico H, esse minimum numerũ, qui quæritur.

D ..... E ..... F .....
G .....
H .....
Vnitas
I .....
K .....
L .....
M .....

Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonstratur. Nam cum ex D, in G, fiat H, erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Est autem vnitas pars ipsius D, denominata ab ipso D. Igitur & G, pars est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum,



numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G: erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis A, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C; Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine continens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, a numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata, & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à
a 15. def. D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; à Atque adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaque cum D, ipsos G, & K, multiplicans
b 17. sep. faciat H, & I; b erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M. Erit per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autem H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoque erit numero M, pars toto. Quod est absurdum.

Non

Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.

SI vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, sient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam; & hac aliam à 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifestum est.

QVOD si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui easdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentiũ.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habentiũ. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunque numeri sunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bi

A .....
B .....
C .....
D .....

E ---
F ---
G ---
H ---

ni su-

ni sumuntur,& in eadē rōne,[a] erit,ex æqualitate,vt A,ad D,ita E,ad H:[b] Sunt autem A,& D,in sua proportione minimi,quod inter se primi esse ponantur. c Igitur tam A,ipsum E,quàm D,ipsum H,æque metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A,B,C,D,sunt in eadem cum eis ratione,sed ipsimet minimi sunt;Ac propterea,si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14 *sep.*
b 3. *sep*
c 21. *sep.*

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A,B,C,D,esse minimos in continuatione suarum proportionum,si extremi A, & D, inter se primi sint,siue A,B,C,D,sint continuè proportionales, vt vult Euclides,siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersa sunt,quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

A.... E---
B....., F----
C..... G-----
D..... H----.----

ij.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A,ad B Multiplicans A,seipsum, & numerum B,faciat C,& D. Deinde B,multiplicans seipsum faciat E. Dico C,D,E, esse tres minimos in proportione A, ad B. Quod si proportionales sint in data proportione A, ad B,hoc est,sit vt A, ad B, ita C, ad D, & D, ad E, sic ostendemus. Cum ex A,in A, & B,fiāt C,& D;erit

A.. B..
C.... D..... E .....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K,16 L,24.M,36. N,54.O,81.

d 17. *sep*

vt A,

vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D. & E; [a] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos; [b] sunt autem A, & B, inter se primi, quod minimi sint in sua proportione; [c] erunt & C, E, extremi, inter se primi. [d] Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

17. sep.

A .. B ...
C .... D ..... E .....
E, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

24. sep

29 sep

1. octa.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadē ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I, [e] erit quoque vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [f] Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I. ex B. in E, [g] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [h] Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

18. sep.

24. sep.

29. sep

1. oct.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinq; numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademq; ratione inuenietmus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales

produ-

producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, a numeri F, G, eandē rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerint: Item & G, H, I, ex ijs, quæ ad propoſ. 18. huius lib. demonſtrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc eſt, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipſos G, H, I, fecerit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi ſint, oſtendetur, vt prius. [a] 18. ſep

NON aliter ſi ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B.

A..	B...
C...	D.....
E.....	
F, 8.	G, 12. H, 18. I, 27
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.	

Eademq; ratione inueniemus ſex, ſeptem, octo, & ex taque ſiue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; ſiue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur ſemper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonſtrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eoſdem oſtendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

COROLLARIVM I.

HINC fit, ſi tres numeri minimi ſint continue proportionales, extremos quadratos eſſe: ſi autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti ſunt ex A, & B, in ſeipſos ideoque æqualiter ſunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati ſunt. Eodem modo, cùm quatuor minimorum F. G, H, I, extremi F, & I, geniti ſint ex A; & B, lateribus in C, & E, quadratos ipſorum A. & B, hoc eſt, cum numerus F. ex mutua multiplicatione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea uterque ſit æqualiter, æqualis æqualiter; ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum: ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub alijs denominationi-

bus, quæ

bus, quæ in Algebra solent explicari: Hæc autem omnia manifesta sunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propos. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verũ quidem esse in tribus, quatuorve numeris minimis continue proportionalibus inuentis arte in hac propos. tradita, non autẽ in quibuscunque tribus, quatuorve numeris minimis cõtinue proportionalibus vtcunq; propositis: Dicere, inquã, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continue proportionales aquales prorsus sunt ijs, qui per hãc propos. inueniuntur. Si enim illi dati minores essent inuẽtis, non essent inuenti, minimi, quod est contra hãc propos. Si vero dati maiores essent inuentis, non essent illi dati, minimi, quod est contra hypothesim. Quod clarissime ita fiet perspicuum. Dati sint tres numeri A, B, C, minimi continue proportionales: sumptisque duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, aa C, ex scholio propos. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propos. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nã necessario A, ipsi F, aqualis erit; atque ita, cum sit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoque permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde si A, aqualis est ipsi F, erit & B, ipsi G, aequalis: Eademque ratione ostendemus C, aqualem esse ipsi H: ideoque tres A, B, C, tribus F, G, H, singuli singulis, aequales erunt. Eademque ratio est de quatuor, aut pluribus. Quod si A, dicatur minor quam F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quam G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt, quod est absurdum, & contra hanc propos. Si vero A, concedatur maior, quam F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quam G, H: atque idcirco A, B, C, minimi non sunt, quod est contra hypothesim. Cum ergo A, minor non sit, aut maior, quam F; aqualis omnino erit; ideoque vt ostensum est, & B, C, ipsis G, H, aquales erunt. Quod est propositum.

A --- B ----- C ------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

COROL-

COROLLARIVM, II.

PERSPICVVM quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex prop. 29. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C,E, & F,I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G,H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D: Item L,M, N, medij ex A, in G,H,I, vel ex B, in F,G,H, vt ex demonstratione Euclidis, & ea quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero tam numeri A,C,F,K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones à numero A, horum vero à B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. sit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones à minimis numeris datæ rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exemplo vides C, & E, extremos numeros trium numerorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe qua ab vnitate incipiat) continue proportionales, id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus cons-

nue

nue proportionalium inueniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3 & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128 erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicant, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mētio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquinta, sumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. est primus quinque numerorum in proportione sesquiquinta, vt hic apparet 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hæc arte non possunt inueniri (quod mirū videri possit) plures numeri continue proportionales, quā propositi sunt. Neque. n. post 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionē sesquiquintam; sicut neque in priori exemplo post 2187. alius pōt reperiri, qui ad 2187. proportionē sesquialterā habeat. Ratio autem huius rei est, quod extremi hac arte inuenti sint inter se primi, vt ex demonstratione liquet. Hinc. n. fit, vt vltimus non possit esse ad alium quempiam numerū, vt pri-

mus ad secundum, veluti propos. 17. lib. 9. demonstrabitur.

iij.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis rationem habentium; Illorum extremi sunt inter se primi.

SINT numeri A,B,C,D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A,& D, inter se primos esse. Inueniantur enim duo E,F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo K,L,M,N, æqualis sit multitudini A,B,C,D. Quoniã igitur A,B, C, D, minimi sunt in sua proportione, & in eadem quoque proportione minimi sumpti sunt K,L,M, N, illis multitudine æquales; erunt singuli singulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipsi K, & D, ipsi N. Id quod nos Geometrice demonstrauimus ad finem coroll. 1. superioris propos. Sunt autem per coroll 2. propos. præcedentis K, & N, inter se primi. Primi ergo quoque sunt A, & D. Quocirca, si sint quotcunq. numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, & Quod erat ostendendum.

A,S.B,12.C,18 D,27.
E,2. F,3.
G,4. H,6. I,9.
K,8.L,12.M,18. N,27.

SCHOLIVM.

HAEC propositio intelligenda est de numeris minimis cõtinue proportionalibus, vt ex eius demonstratione, & verbis Euclidis apparere potest. Nam si A,B,C,D, non essent proportionales continue, inueniri non possent, ex præcedenti problemate, K,L,M,N, totidem minimi in eadem proportione. Immo si diuersa sint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc est, cõtinuati in suis proportionibus diuersis, quorũ extremi nõ sunt inter se primi. Sunt enim hi numeri 6.10. 13. 18 minimi in continuatione

suarum

suarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. cõpositi sint inter se. Itaque hoc theorema primi est conuersum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter se sunt primi, minimi sunt in sua proportione, vt constat ex 1. theor. Et vicissim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter se primi sunt, velut hic demonstratum est. At vero primum theorema, prout spectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi sunt inter se primi, minimi sint in continuatione suarum proportionum, vt ex scholio propos. 1. huius lib. liquet 3. Tamen non semper è contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter se primi sunt, vt manifestum est in exemplo nuper prolato 6. 10 13. 18.

iiij. ## PROBL. 2. PROPOS. 4.

RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimus numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. [a] Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeãt, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, [b] A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E, [c] Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I ------ K ------ L ------

[a] 36. sep.

[b] 9. pron

[c] 18. sep.

ratione

ratione, cũ C, & D, æque metian
tur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, A, 6. B, 5. C, 4. D, 3.
ita E, ad G. Igitur F, E, G, dein- H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
ceps proportionales sũt in ratio I —— K —— L.
nibus A, ad B, & C, ad D. Quod
autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt mini
mi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem
rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, &
B, minimi sunt in sua proportione: [a] ipsi æque metientur [a 21. sep.]
I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione
C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K,
antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipsum
K, metiantur; [b] metietur eundem K, numerus E, mini- [b 37. sep.]
mus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est
absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis
F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea
ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris mini-
mis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint qua-
tuor minimi deinceps proportionales in datis rationi-
bus. [c] Inuento rursum numero G, minimo, quem metian [c 36. sep.]
tur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, meti-
tur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G,
toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ip-
sum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties
E, ipsum I, metitur, to-
ties F, metiatur ipsum K. A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 5. F, 7.
Dico H, G, I, K, minimos H, 24. G, 20. I, 15. K, 21.
esse in datis rationibus. L —— M —— N —— O
Quod enim sint in datis ra
tionibus deinceps proportionales, constat. Cum enim A,
& B, ipsos H, & G, æque metiantur; erit vt prius, quemad-
modum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad
D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quod tam C, & D,
ipsos G, & I, quam E, & F, ipsos I, & K, metiãtur æque.
Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales sunt in
datis rationibus. Quod autem sint minimi, sic osten-

demus. Si non sunt minimi, sint in eisdem rationibus minores ipsis, singuli singulis, si fieri potest, L, M, N, O. Quia
a 21. sep. igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; a ipsi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirũ B, consequens consequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antece-
b 37. sep. dentem M. Quocirca cum B, & C, ipsum M, metiantur; b metietur eũdem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est ab surdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipsis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi sunt.

c 36. sep. SED iam E, non metiatur ipsum I. c Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipsum K, metitur, toties quoque G, ipsum L; & H, ipsum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipsum N. Dico M, L, K, N, esse minimos in

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7.
H, 24. G, 20. I, 15.
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
O ---- P ---- Q ---- R ----

proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipsos M, L, K, æque metiantur; erit vt supra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Est autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D, quod & A, B, ipsos H, G: & C, D, ipsos G, I, metiantur æque. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L, & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque est K, ad N, cum E, F, æque ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namque non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione
d 21. sep. minimi sunt, a ipsi æque metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P. Atque
e 37. sep. adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur, b metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem

P. Quia

P. Quia vero ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, cum metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & B, eundem Q; a quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q; b metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quã M, L, K, N; propterea que ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

a 21. sep.

b 37. sep

QVOD si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, vt nuper cũ tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis 6, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipsum N, non metiatur, c sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P, & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties vero S, eundem O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 3. T, 2.
M, 48. L, 50. K, 30. N, 105. O, 70.

A, 6. B, 5. C, 4. D, 3. E, 2. F, 7. S, 9. T,
M, 48. L, 40. K, 30. N, 105.
R, 144. Q, 120. P, 90. O, 315. V, 70.

c 36. sep.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliqua data fuerint in numeris non minimis, absoluemus nihilo minus problema propositū; sed prius exhibenda erunt rationes data in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorum numerorum deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestum est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod his non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & consequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

V.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F, vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; a erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, &

A, 24. B, 48. G, 18. C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

a 17. sept.

D, ad

D,ad F.[a] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A,ad G,& G,ad B. Eadē ergo proportio A,ad B,ex proportionibus laterū C,ad E,& D,ad F,cōponitur. [a] 27. def

EODEM argumento ostendemus, proportionem A,ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D,ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. A,24. B,48. G,96.

Cum enim D,multiplicans C, & F,faciat A, & G,[b] erit A, ad G, vt C,ad F. Similiter cum F,multiplicans D,& E,faciat G, & B, erit G,ad B,vt D,ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F,& D,ad E.[c] Cùm ergo proportio A,ad B,componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B, eadem ex proportionibus C,ad F,& D,ad E,componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat. C,4. D,6. F,16. E,3. [b] 17. sept [c] 27. def

THEOR. 4. PROPOS. 6. vj.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur, neque alius quispiam vllum metietur.

SINT continuè proportionales A,B, C,D,E, & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proximè insequentem metiatur, manifestum est. Nam cum sit vt A, ad B, ita B, ad C, C,ad D,& D, ad E: A,vero ipsum B,non metiatur, neque B,ipsum C,neque C, ipsum D, neque D,ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quispiam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. [d] Sumptis tribus numeris minimis F,G,H,in ratione A, ad B, erit ex æquo, vt A,ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A,ad B,ita F,ad G, A,16 B,24. C,36. D,54. E,81. F,4. G,6. H,9. [d] 2. octa hui.

A,16.B,24.C,36.D,54.E,81. F,4. G,6. H,9.

non metietur aũt A, ipſum B; neque E, ipſum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipſum G,
a 3. oct. metiretur, cum vnitas omnem numerũ metiatur. a Quare cum F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit vnitas; non metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quod nec B, tertium a ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtrabimus, neque A, quartũ D, neque B, quartũ E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam vllius multiplex erit.

SINT enim continuæ proportionales A, B, C, D, E, & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quemquam illorum vllius eſſe multiplicem. Quod enim nullius proximè inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, vt

A,81. B,54. C,36. D,24. E,16.

A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neque B, ipſius C; neque C, ipſius D; neque D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neque alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex; hoc pacto confirmabitur. Quoniam D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur e contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A, (Nam cum ſit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus ſecundũ D, nõ metietur;
b 6. oct. *b neque*

que alius quisquã illorũ vllum metietur. Quare e cõtrario, si maiores ad minores referantur, neque quisquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defi. 5. lib. 7. scripsimus.

SED & ex his sequens theorema demonstrabimus.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secũdum metiatur; & quicũque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, secundum B, metiatur. Dico & quæque illorum quemlibet sequentium metiri. Quod enim quilibet proxime insequentem metiantur, A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. perspicuum est. Nãcum sit, vt A, ad B, ita B, ad C, & ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipsum B; & B, ipsum C: & C, ipsum D: & D, ipsum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet sequentium metiatur, nempe B, ipsos D, & E, hoc modo ostendetur. Quia B, ipsum C, metitur, & C, ipsum D, a metietur quoque B, ipsum D. Rursus quia D, ipsum E, metitur, b metietur quoque B, (ipsum D, metiens) eundem E. Et sic de reliquis.

a 11. pro.
b 11. pro.

SED iam primus A, multiplex sit B, secundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet sequentium multiplicem esse. Cum enim sit vt A, ad B, ita B, ad C; & C, ad D, & D, ad E: sit autem A, ipsius B, multiplex: erit & B, ipsius C, & C, ipsius D, & D, ipsius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet proxime insequentis multiplex est. Rursus quia D, ipsius E, est multiplex, metietur e conuerso E, ipsum D: sunt autem, per inuersam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet

A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3.

sequentium metietur, vt demonstratum est; Ac propterea e contrario, si maiores ad minores referantur, & quilibet cuiusque sequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propositionem sextam, & theoremα, quod primo loco in scholio demonstrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quisquα nullum a secundo B, metiatur. Dico neque A, primum metiri B, secundum. Sint enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quα secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum; cum neque primus, neque alius quisquam vllum a secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metiatur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius a secundo B, sit multiplex: Dico neque A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi, multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quα secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam vllius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, secundum. Si enim A, ipsum B, nō dicatur A, 3 B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. metiri: a neque alius quisquam vllum metietur. Quare nec A, ipsum E. Quod est absurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, secundum metietur; Atque idcirco si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum. a 6. oct.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod secundo loco in scholio precedentis propos. demonstrauimus, cōuertamus, amplificabimus hanc propos. hoc modo.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autē, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quispiam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonstrabimus. Si enim primus non dicatur metiri secundum, vel illius esse multiplex; neque alius quisquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propos. 9. & 1. theoremate scholij precedentis. Quod est contra hypothesim.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI inter duos numeros medij continua

pro-

proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT inter duos numeros A, ß, medii proportionales continue C, D; sitque vt A, ad B, ita E, ad F.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot sunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad B, atque adeo vt E, ad F, ita G, ad K. [a] Quare cum G, & K, inter se primi sint, quippe qui extremi sint minimorum numerorum; [b] ac propterea in sua proportione minimi; [c] æque metietur G, ipsum E, & K, ipsum F. Quoties ergo G, & K, ipsos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, singuli singulos. [d] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipsos E, L, M, F, producunt; in eisdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus. At G, H, I, K, sunt continuè proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales sunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis sit multitudini A, C, D, B, tot cadent medii proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medii continua proportione ceciderint, &c. Quod demonstrandum erat.

a 3. oct.
b 23 sep
c 21. sep.
d 9. pron

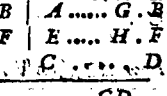
SCHO-

SCHOLIVM.

NON solum ex demonstratione constat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem esse proportionem numerorum E, L, M, F, quæ est numerorum A, C, D, B. Ostensum enim est E, L, M, F, in eadem esse proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex constructione, quam A, C, D, B. Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hæc propositio vera est, si existētibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, unitas. Item si vel A, vel B, fuerit unitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalem: Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & unitatem; superparticularis vero inter numeros sola unitate differentes; superbipartientes denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & unitatem; vel inter numeros sola unitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui easdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Nam neq; inter binarium & unitatem, neque inter duos numeros sola unitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solum numerus, qui ab vtroque unitate differt: Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modū demonstrabimus. Differant numeri A B, C D, (sive C D, unitas sit, & A B, ternarius, sive non,) binario, inter quos cadat numerus E F, minor unitate quam A B, maior vero quam C D, unitate quoque. Dico E F, non esse medium proportionalē inter A B, C D.



CD.

A..G.B
E.H.F
C.D

A..... G.B
E.... H.F
C..... D

CD. Si enim dicatur esse AB, ad EF, vt EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipsi EF, æquali, vt reliqua sit vnitas GB; & ex EF, numero EH, ipsi CD, æquali, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoque vt AB, totus ad EF, totum ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipsis EF, CD, æquales sint, ex constructione. Igitur erit quoque reliquus GB, ad reliquum HF, hoc est, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod est absurdum. Non ergo EF, medius proportionalis est inter AB, & CD.

ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non potest. Alioquin caderet etiã medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter se differunt, quod fieri non posse, proxime demonstrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non potest medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non posse, ita demonstrabimus. Cadat primum, si fieri potest, inter quinarium AB, & vnitatem C; medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt sit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniam vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipsum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque senarium AE. Igitur D, metitur totũ AE, & ablatum AB: [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatem BE. Quod est absurdum. a 11. pro.

CADAT deinde, si fieri potest, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Offendemus ergo, vt prius, D, metiri quinarium AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE: [b] ac proinde & D, numerus re- b 11. pro.

A..E.B
D....
C.

liquam

liquam vnitatem EB, metietur. Quod est absurdum.

EX quibus fit, neque illud interuallum Musicum, quod in dupla proportione consistit, vt Diapason, vel, vt vulgo dicitur, octaua; neque illud, quod in sesquioctaua proportione reperitur, cuiusmodi est Tonus, seu vulgo, secunda, bifariam posse secari, hoc est, in duas proportiones aequales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propositum attinet) secari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplae cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplae proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc vero in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inaequales. Ita quoq. Tonus in duo semitonia, quorū alterū maius, alterū minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdē, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea quae ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti, quadratorū vero proportio sit duplicata proportionis laterum; sit, vt proportio quadrati ex diametro descripti, ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quod inter numeros duplae proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus, manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est diametrum esse lateri incommensurabilem, quae de re plura ad 9. & vltimum propos. lib. 10. scribemus.

ix.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij continua proportione cecederint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, [a] sumantur in eadem proportione tres minimi G, H, I, & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; [b] erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt singuli singulis, vt K, ipsi A, & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipsum G, fecit K, [c] metietur E, ipsum G, per E, & G, ipsum K, per eundem E: [d] Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Aeque igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. [e] Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quod F, se ipsum multiplicans producat I, multiplicans vero ipsum

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.	
Vnitas.	
1.	
E, 2. F, 3.	
G, 4. H, 6. I, 9.	
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.	

[a] 2. oct.

[b] 1. oct.

[c] 7. pro.

[d] 5. pro.

[e] 20. def.

I, faciat

I, faciat N; a metietur F, ipsum I, per F, & I, ipsum N, per eundem F: b Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Aequè igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. c Proportionales ergo sunt cõtinuè, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tanta multitudo E, G, K, quam F, I, N, vna cum vnitate, æqualis sit multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B; (vt perspicuum est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G, H, I, tertij; & quatuor K, L, M, N, quarti. &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem, & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualem, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

a 7. pron
b 5. pron
c 20. def

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est; numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habet E, et F, numeri ad vnitatem, id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

CONSTAT etiã ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continuè proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E, G, K, & F, I, N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continuè esse proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

x.

SI inter duos numeros, & vnitatem continuè proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continuè proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continuè proportione cadent.

CADANT

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & vnitatem, quotcunque numeri medij continue proportionales; inter A, quidem & vnitatem, numeri C, D, E; At verò inter B, & vnitatem, numeri F, G, H, illis multitudine æquales. Dico totidem medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem. Multiplicantes enim se mutuo C, & F, faciat I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
Vnitas.

A, & B, quot sunt inter vtrumque A, B, & vnitatem. Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E; & E, ad A; æque metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A. [a] Metitur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. [b] Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H; & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [c] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [d] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex ijs, quæ a nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratio-

[a] 5. prop.
[b] 9. prop.
[c] 17. sep.
[d] 17. sep.
[e] 18. sep.

ne,

no, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, a erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri, &c. Quod erat demonstrandum. 2 18. sep

SCHOLIVM.

EX his constat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales sunt C, & F, habent.

PATET etiam ex hac demonstratione, si quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, secundum ab vnitate in se multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & sic deinceps. Demonstratum enim est, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales sunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, secundo in se; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonstrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quatum ad ea, quæ sequuntur, tum ad alia multa erunt utilia; hinc initium sumentes.

I.

SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continuo ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam esse eius, quam habet A, secundus ad E, secundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis, inter B, quidem & vnitatem, numerus A: At inter F, & vnitatem numerus E: a cadet quoq; inter B, et F, vnus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationem habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 18.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

210. 8.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem dupli-

catam

catam eius, quam habent secundi ab eodē; quarti vero eiusdē triplicatā; & quinti quadruplicatā; & sēper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se sint K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoque in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R, & ex F, in R, fiat S. Quibus positis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab vnitate, vt constat ex scholio propos. 9. huius lib. Eademque ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales, necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij. Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F, & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rōnis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij; quòd tam B, N, quam F, Q, sint ab vnitate continue proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad

E, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. I. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 3.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. i. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

E,81. D,54. C,36. B,24. A,16. Vnitas. 1. I,1. H,2. G,4. F,8.
N,576. K,256. Q,64. O,13824. L,4096. R,512. P,331776. M,65536. S,4096.

C, ad G, duplicata eſt rationis B, ad F. Eiſdē argumentis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata eſt rationis B, ad A; quod tam B, N, O, quam A, K, L, ſint ab vnitate continuè proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. & eiuſdem triplicata eſt ratio D, ad A, ex defin. Igitur eſt D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo eſt A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata ſit proportionis A, ad F. Proportio quidem A, ad H, ex defin. at proportio L, ad R, ex 1. theor. huius ſcholij, propterea quòd tam A, K, L, quam F, Q, R, continuè proportionales ſunt ab vnitate, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eſt ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata eſt rationis B, ad F, ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, ſunt continuè proportionales ab vnitate ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata eſt eiuſdem rationis B, ad F. Non ſecus demonſtrabimus rationem E, ad I, eſſe quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonſtrabitur, ſi numeri vnius ordinis deſinant in vnitatem, vt ex ſecunda figura eſt manifeſtum, in qua I, eſt vnitas.

CAETERVM theorema hoc demonſtrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propoſ. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius eſt hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonſtratis efficiemus propoſitionem hanc 10. Euclidis magis vniuerſalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem aliū numerum aſſumptum, continue proportio-

nales

nales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere in tex A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Itaq;

A, 162. Q. 216. R, 288. S, 384 B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G: erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius fœlicis, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est vt K, ad M, ita E, ad H: Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L: a cadet quoque vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi. a 28. oct.

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuum est in hac secunda figura, in qua numerus B, vnitas est, cadentque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri con-

tinue proportionales, quot scilicet inter A, & B, cadunt, &c.

EX his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, necnon inter F, & I, atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

A, 1048576. Q, 32768. R. 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

xj. **THEOR. 9. PROPOS. 11.**

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati: & ipsum D, multiplicans fecit E, ex constructione: a erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex constructione: & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum: b erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius quam habet A, ad E: duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad

a 17. sep.
A, 9. E, 21. B, 49.
C, 3. D, 7.
b 17. sep.

B, qua-

B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D: cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadrates numeros cadere numerum medium proportionalem in continua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerum medium proportionalem E, & vtrumlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem: metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B: habebunt E, & B, communem mensuram D: Idcoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

A, 9.	E, 21.	B, 49.
C, 3.	D, 7.	

THEOR. 10. PROPOS. 12. xj.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cu-

bus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Ut proportionem A, ad B, cubi ad cubum, triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E: & D, seipsum multiplicans faciat F: At C, & D, se mutuo multiplicantes faciant G: Multiplicantes vero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G: erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F: erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F, propterea que E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A, & ex constructione multiplicans ipsum G, fecit H: erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I: multiplicans vero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit cubum B: erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B. Est autem & H, ad I, vt C, ad D: quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerint ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D: Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue, sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H: triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cum sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

A 1. E 9. C 3. H 27. G 12. D 4. F 16. B 64.

17. sep.

b 17. sep.

c 17. sep.

d 17. sep. e 18. sep.

SCHO

SCHOLIVM.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales, H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad D: hoc est, esse A, ad H, vt I, ad B, vt C, ad D. Metientur autem latus D, cubum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur, metietur quoque C, ipsum I, antecedens antecedentem, quandoquidem est I, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, cubum suum A; immo & ipsum H, quod H, factus sit ex multiplicatione C, in G, ex constructione. Igitur A, H, I, communem habent mensuram C, atque adeo inter se compositi sunt. Similiter cum sit A, ad H, vt C, ad D: metiatur autem latus C, cubum suum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipsum H, consequens consequentem: Metitur autem & latus D, cubum suum B; immo & ipsum I, quod I, factus sit ex multiplicatione D, in G, ex constructione. Igitur H, I, B, communem mensuram habent D: Ac proinde sunt inter se compositi. Manifestum autem etiam hic est, priorum trium numerorum A, H, I, communem mensuram esse C, latus cubi prioris A, posteriorum verò trium H, I, B, mensuram communem esse D, latus posterioris cubi E.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xij.

SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos, qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fe-

cerint

cerint aliquos: ipsi quoque proportionales erũt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A, B, C, qui seipsos multiplicantes faciãt D, E, F, multiplicantes autem ipsos D, E, F, faciant G, H, I; & rursum multiplicantes ipsos G, H, I, faciant K, L, M, & ita deinceps. Dico quoque D, E, F, & G, H, I, & K, L, M, continue esse proportionales. Multiplicantes enim A, & B, se mutuo faciant N; & B, C, se mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A, multiplicans N, E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F, faciat R, S.

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

Simili modo A, multiplicans P, Q, H, faciat T, V, X; & B, multiplicans R, S, I, faciat Y, Z, a. Quoniam igitur A, multiplicans seipsum, & B, fecit D, N, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad N. Eodem modo, quia B, multiplicans A, & seipsum, fecit N, & E; erit etiam, vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D, N, E, continue proportionales in ratione A, ad B. Rursus, quia B, seipsum, & numerum C, multiplicans fecit E, & O, [b] erit vt B, ad C, ita E, ad O. Eademque ratione, cum C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O, & F; erit vt B, ad C, ita O, ad F; propterea que & E, O, F, continue proportionales sunt in ratione B, ad C, seu A, ad B. Quare cum D, N, E, in eadem ratione sint continue proportionales, in qua E, O, F; erit ex æquo D, ad E, vt E, ad F, atque adeo D, E, F, continue proportionales sunt.

17. sep.

17. sep

DEINDE, quia A, multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, G, P, Q, in eadem ratione, in qua D, N, E, hoc est, in ratione A, ad B, proportionales. Item quia A, & B, multiplicantes E, fecerunt Q, & H; [c] erit quoque, vt A, ad B, ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportiona-

8. sep

les in

les in ratione A, ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18. lib. 7. H, R, S, proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt, B, ad C, (ſeu A, ad B. Et eodem modo cum B, C, multiplicantes F, fecerint S, & I; a18. ſep. erit vt B, ad C, hoc eſt vt A, ad B, ita S, ad I; propterea que & H, R, S, I proportionales ſunt in ratione A, ad B. Quocirca, cum G, P, Q, H, eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continuo ſunt proportionales.

NON diſſimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata rõna datorum numerorum A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionem duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

IAM quoque numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B. Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionem tõtam demonſtrabimus hãc ratione. Fiant ex A, B, C, continue proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdẽ numeri G, H, I; & rurſum ex eiſdem in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continue proportionales.

A, 2.	B, 4.	C, 8.
D, 4.	E, 8.	F, 16.
G, 8.	H, 64.	I, 512.
K, 16.	L, 256.	M, 4096.

Nam ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, cõtinue ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propoſ. 20. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur

D, E,

D, E, F, continue sunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodem modo ostendemus G, H, I, esse proportionales continue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

EX qua rursum demonstratione apparet, numeros primo loco productos esse in duplicata ratione duorum numerorũ; secundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonstratione huius propos. 13. dati sint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eandem tamen propositionem demonstrabimus, etiam si plures fuerint, quam tres. Sint namque numeri plures, quam tres A, B, C, D, cõtinue proportionales, qui se ipsos multiplicantes faciant E, F, G, H; positos vero multiplicantes ipsos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & sic deinceps. Quoniã igitur E, F, G, a *ex demonstratis, proportionales sunt. Item F, G, H, cum illi producti sint ex A, B, C, proportionalibus in se ipsos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in se ipsos. Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non secus proportionales erunt I, K, L, M, & alij deinceps eodem modo producti.*

A 1 2 4 8
B 2 4 8 16
C 4 8 16 32
D 8 16 32 64
E 4 16 64 256
F 16 64 256 1024
G 64 256 1024 4096
H 256 1024 4096 16384
I 8 32 128 512
K 64 256 1024 4096
L 512 2048 8192 32768
M 4096 16384 65536 262144

13. oct.

THEOR. 12. PROPOS. 14. xiij.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonstratione propos. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales sunt in ratione

C, ad

C,ad D;Metitur autem A,primus extremum B,[a] metietur quoque A, primus secundum E. Quare cum sit vt A, ad E,ita C,ad D,& C,latus latus D,metietur.

A,4. E,12. B,36. C,2. D,6.

[a] 7.oct.

METIATVR iam C,latus latus D. Dico & quadratum A,quadratum B,metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D,ita A,ad E, propterea quod A,E,B,continue proportionales sunt in ratione C,ad D,vt demonstratum est propos. 11.huius lib. Quare cum C,metiatur D,metietur quoque A,primus E,secundum,ac proinde & extremum B,metietur,ex theoremate 2. scholij propos.6.huius lib. Si quadratus ergo numeris quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. xiiij.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C,& D, se ipsum multiplicans faciat E,& F,multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt appareret ex demonstratione propos.12.huius lib.tam E, G, F, quam A, H,I,B,continue sunt proportionales in ratione C, ad D;Metitur autem A, primus B,extremum,[b] metietur quoque idem A, primus H,secundum. Cum ergo sit,vt A,ad H, ita C, ad D, metietur & C,latus latus D.

A, 8. H,24. I,72. B,216. E,4. G,12. F,36. C,2. D,6.

[b] 7.oct.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit,vt C, ad D,ita A,ad H,propterea quod A,H,I, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt ostensum est

propos.

propoſ. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D: metietur & A, ipſum H; atque idcirco & extremum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propoſ. 6. huius lib. demonſtrauimus. Itaque ſi cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

xv. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum nõ metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur C, A, 16. B, 81. ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati C, 4. D, 9. A, metitur D, latus quadrati B; [a] metietur & quadratus A, quadratum B. Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

[a] 14. octa.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipſum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 14. octa.

xv. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT

SINT cubi A,& B,quorum latera C,& D; Non metiatur autem A,ipsum B. Dico quod nec latus C,latus D, metietur. Si enim C,dicatur metiri D; a metietur quoq; A,cubus cubũ B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D,metietur. a 15. oct.

A 8. B 27. C 2. D 3.

SED iam C,latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A,cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum: Ponitur enim non metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca; si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat. b 15. oct.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones, hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius lati lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neqae cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. c Igitur & latus D, latus C metietur; ac prosnde latus C, lateris D, multiplex erit. c 14. & 15. oct.

QVOD si latus C, laterit D, multiplex sit: metietur latus D. latus C. d Igitur & B, ipsũ A, quadratus quadratũ, et d 14. & 15. oct.

cubus

A, 36. B, 9. cubus cubum metietur, Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex.
C, 6. D, 3.

A, 64. B, 8. AT vero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex, non metietur B, ipsum A, quadratus quadratum, aut cubus cubum. a Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex.
C, 4. D, 2.

a 16. & 17. oct.

A, 49. B, 9.
C, 7. D, 3.

A, 125. B, 8. SIMILITER si C, latus lateris D, non sit multiplex, non metietur D, latus lateris C. b Igitur, nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, es cubus cubi, multiplex nō erit.
C, 5. D, 2.

b 16. & 17. oct.

xvj. THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, se mutuo multiplicantes faciant A, & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B, sitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis laterum homologorum C, E, vel D, F. Multiplicantes enim se mutuo D, E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, vt E, ad F, erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G, c erit A, ad G, vt C, ad E, hoc est, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit

c 17. sep. A, 12. G, 18. B, 27. C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

G, & B,

G, & B; erit quoque G. ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G. A, 12. G, 18. B, 27. C, 6. D, 9. E, 9. F, 3. 217. sep.

QVIA vero, cum A, G, B, sint continue proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, vel E, vel D, ad F, metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quod sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensurum communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F: metiantur autem C, D, latera suum planum A, antecedentes antecedentem; metientur etiam E, F, ipsum G, consequentes consequentem. Quare cum & E, F, latera suum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem mensurum tam E, quam F; ideoque erunt inter se compositi.

EX qua demonstratione etiam manifestum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes mensuras esse C, D, latera prioris plani A; posteriorum autem G, B, mensuras communes esse E, F, latera plani posterioris B.

xviij.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT solidi numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt sit C, ad D, quemadmodum F, ad G, & D, ad E, sicut G, ad H.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H. 10.

Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionem A, ad B, esse triplicatam eius, quam habent latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H. Multiplicantes enim se mutuo C, D, faciant I, & F, G, se mutuo multiplicates faciant K. Itē D, F, se mutuo multiplicates faciāt L. Postremo E, H, ipsum L, multiplicates faciāt M; N. Quia igitur C, D, E, ipsis F, G, H, proportionales sunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & E, fecit I, & L, [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, & G, fecit L, & K; [b] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, solidus factus est ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus est autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, solidus factus sit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipsum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M. [c] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc est, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K; fecerit N,

a 17. sep.
b 17. sep
c 17. sep.

& B;

& B; a erit N, ad B, vt L, ad K, hoc est, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. b Est autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipsos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, solidos similes duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

a 17. sep.
b 18. sep.

QVONIAM vero, cum A, M, N, B, sint proportionales continue, proportio A, B, triplicata est eius, quam habet A, ad M; Est autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: Habebit quoque A, ad B, solidus ad solidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum similium solidorum numerorum duo medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit A, M, N, B, proportionales esse in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, liquet inter duos similes solidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, assumptorum.

Ex ijs, quæ dicta sunt, perspicuum etiam est, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet solidorum A, B, inter se esse compositos. Cum enim A, M, N, B, ostensi sint proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc est, esse A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H: metiantur autem F, G, H, latera suum solidum B, consequentes consequentem, si de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur: metientur quoque C, D, E, ipsum N, antecedentes antecedentem: quod sit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipsum M, metiuntur: (Cum enim M, factus sit, per constructionem, ex E, in L, metietur E, ipsum M. Deinde quia M, N, B, proportionales sunt ipsis I, L, K, metitur autem K, ipsum B, quod B, factus sit ex K, in H; metietur quoque I, ipsum M: Metiuntur autem & C, D, latera planum suum I.

211. pro.

2. Igitur & C, D, metientur ipsum M; Atque adeo C, D, E, ipsum M, metientur.) Nec non & ipsum A, nimirum latera suum solidum. Ergo A, M, N, habent communem mensuram tam C, quam D, & quam E; Ideoque compositi inter se sunt. Rursus quia est A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera solidum suum A, A, 30. M, 60. N, 120. B, 240. I, 6. L, 12. K, 24. C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10. antecedētes antecedentem; metiuntur quoque F, G, H, ipsum M, consequentes consequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipsum N; (Cū enim N, factus sit ex H, in L, per constructionem; metitur H, ipsum N. Deinde quia A, M, N, ipsi I, L, K, proportionales sunt; metitur autem I, ipsum A, quod A, factus sit ex I, in E; metietur etiam K, ipsum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum suum K; metientur quoque F, G, ipsum N; atque adeo F, G, H, ipsum N, metientur.) Necnon & ipsum B, nimirum latera suum solidum. Igitur M, N, B, communem habent mensuram tam F, quam G, & quā H. Quare sunt inter se compositi. Ex quibus liquido constat, priorum trium numerorum A, M, N, communes esse mensuras C, D, E, latera prioris solidi A; At vero F, G, H, latera posterioris solidi B, communes mensuras esse posteriorum trium numerorum M, N, B.

QVIA vero solidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonstremus hoc loco, eundem numerum solidum procreari, siue primum latus ducatur in secundum, & numerus procreatus in tertium; siue primum in tertium, & numerus genitus in secundum; siue denique secundum in tertium, & productus numerus in primum: Quin etiam, propositis quotuis numeris, eundem semper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinem inter se permutent. Qua quidem res magnum vsum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiusmodi theorema:

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione

idem

idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

SINT primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D, & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: item si ex B, in C, fias G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans, D, facit E, [a] *erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem: Sed ut C, ad unitatem,* [b] *ita quoque est F, ad A; quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit ut E, ad D, ita F, ad A. Ut autem D, ad B,* [c] *ita est A, ad unitatem; propterea quod A, multiplicans B, facit D. Igitur ex aequalitate erit, ut E, ad B, ita F, ad unitatem:* [d] *atque idcirco numerus ex E, in F, productum ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.*

a 15. def.
b 15. def.
c 15. def.
d 19. sep.

A,	3.
B,	5.
C,	8.
D,	15.
E,	120.
F,	24.
G,	40.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] *erit ut E, ad D, ita C, ad unitatem: Sed ut C, ad unitatem,* [f] *ita etiam est G, ad B, eo quod G, factus est ex B, in C. Igitur erit, ut E, ad D, ita G, ad B: Ut autem D, ad A,* [g] *ita est B, ad unitatem propterea quod D, factus est ex A, in B. Igitur ex aequo erit, ut E, ad A, ita G, ad unitatem:* [h] *ac proinde numerus factus ex E, in unitatem, id est, ipsemet numerus E, aequalis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in G, & ex producto in A. Quod est secundum.*

e 15. def.
f 15. def.
g 15. def.
h 19. sep.

A,	3.
B,	5.
C,	8.
D,	15.
E,	120.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atque ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundem E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Item ex A, in C, et ex producto in B, & ex

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

producto in D: Item ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Item ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Item ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Item ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Item ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Item ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A: ita vt prater primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersa producentes eundem semper numerum. Quoniã enim vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id quod primo loco proponitur.

DEINDE quia vt in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuũ est eundẽ numerũ gigni tum ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tũ ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secundum.

TERTIO quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundem generari numerum tum ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B. Cum ergo ille sit aqualis proxime ostensus primo producto, tris & hic aqualis eidem, quod est tertium.

QVARTO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

QVINTO quoniam, vt demonstratum est in tribus,

idem

idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producta in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cum ergo ille sit ostensus tertio loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem aqualis. Quod est quintum.

SEXTO, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quam ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod est sextum.

SEPTIMO quia, vt in tribus ostendimus, idem numerus gignitur, siue productus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in A; constat eundem numerum fieri ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui fit ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Sed hic proximo ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & ille, quod est septimum.

OCTAVO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoque idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, iſs D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur et hic. Quod est octauū.

NONO quia, vt demonstratū est in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A. Sed ille ostensus est septimo loco aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod est nonum.

DECIMO quoniam, vt in tribus est demonstratū, idem gignitur numerus ex A, in C,

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120. *& ex producto in D, qui ex C, in D; & ex producto in A, producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D; & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, aqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic Quod est decimum.*

POSTREMO quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B, procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem aqualis erit. Quod est undecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum est in quinque vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinque assumatur id, quod iam in quatuor demonstratum est, & in sex, quod in quinque, &c. Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

xvij.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT

CADAT inter A, & B, medius proportionalis D. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C,[a] metientur D, & E, ipsos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B: metiantur per G.[b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C:[c] Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B,[d] erit, vt C, ad B, ita F: ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G, & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo quia G, multiplicans E, fecit B, erit & B, planus cuius, latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G, erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

a 21. sep.
b 9. pron
c 9. pron
d 17. sep.

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

THEOR. 19. PROPOS. 21. xix.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; erunt E, & G, plani similes: sint ipsius E, latera H, I, ipsius vero G, latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi sint in ratione A, C, D, f æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis, metiantur per M. Eo

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.
A, 8. C, 12. D, 18 B, 27.
E, 4, F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 36. K, 3, L, 3. N, 54.

e 20. oct.
f 21. sep

dem-

demque modo,[a] quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N;[b] ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autē E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I: nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicātes F, faciūt C, & D, vt ostē dimus;[c] erit C, ad D, vt M, ad N: d Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quod N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N, & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera, H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rē si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

A, 8. D, 72. D, 378. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 3. M, 12. K, 3. L, 3. N, 3.

1. sep.

9. pron

8. sep.

17. sep.

SCHOLIVM.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet improprie, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatē a numeris planis excludamus, non poterimus hac argumentatione Euclidis demonstrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, esse solidos similes. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiusmodi sunt etiam A, B, in eodem priori

exem-

exemplo. Hoc autem est absurdum, cum Euclides propositionē generaliter proponat, eāq; sine vlla exceptione demōstret.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xx.

SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autē sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, sitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum esse. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; a erunt A, & C, plani similes. Quare existente A, quadrato, erit & C, ei similis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 9. B, 54. C, 324. a 20. oct.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxj.

SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus sit cubus. Dico & quartum D, cubum esse. Cū enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C; b erunt A, & D, solidi similes. Quare existente A, cubo, erit & D, illi similis, cubus. Quam ob rem, si quatuor numeri deinceps sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125, b 21. oct.

SCHOLIVM.

HAEC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum, quam qui diligenter examinare velit, inueniet sane manca esse, & imperfecta. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quædam alterius;

Iure

Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, vt duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12, exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16 proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera aqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, immo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quoque aqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri nō reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla concedemus, his lateribus prioris aqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se aqualia? Item dicendum est de solidis similibus. Quopropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus: Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D. latere quadrati A, cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales, eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeo cum inter numerum A, eúdem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant medij proportionales multitudine aquales, nimirum vnus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter vnitatem, atque C, numerum, nimirū vnus, qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri sunt continue proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit ex defin. cuius latus E.

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
vni-tas.

ALITER

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, aque, ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniã extremi D, F, minimorũ trium numerorũ, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; a cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero est ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F; b cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; c metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metietur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. d Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F. Ac proinde L, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

	A, 36.	B, 48.	C, 64.
	G, 18.		H, 32.
	D, 9.	E, 12.	F, 16.
	L, 64.	K, 81.	I, 54.

a 11. oct.

b 8. oct.

c 7. oct.

d 11. oct.

ALITER. e Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, f erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, medius proportionalis H, g cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint cõtinue proportionales; h idẽ numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem

	A, 36.	B, 48.	C, 64.
	H, 6.		I, 8.
	D, 3.	E, 12.	F, 4. G, 16.

e 20. oct.

f 20. sep.

g 8. oct.

h 20. sep.

C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 8. huius lib. E, F, A, continue proportionales ab unitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & unitas. Itaq; cũ tã inter numerũ D, quã unitatẽ, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; c adent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter unitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia unitas, & numeri G, H, D, continue sunt proportionales: fiet H, ex G, in se; & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. a nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. G, 10.
unitas.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipsum A, et H, ipsum D, æque, per eã, qua ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll propos. 2. huius lib. Est aũt et A, cubus, ex hypothesi; a cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniã autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; et permutando, vt A, ad E; ita D, ad H; b cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, c metietur idem et L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
K, 32. M, 500.
I, 16. L, 250.
E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.
P, 1000. O, 10. N, 5.

12. oct.
8. oct.
oct.

numerum

numerum O, quotes H, ipſum I, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O. [a] *Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt, L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex deſin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P. cubus ſit, ex conſtructione, cubus quoque erit D.* a 22. octa.

THEOR. 22. PROPOS. 24. xxij.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; ſitque A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratũ. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D; [b] cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, vi delicet E; [c] cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui ſit F. Quia igitur tres numeri ſunt continue proportionales A. F, B; & A, primus eſt quadratus; erit & B, tertius, quadratus. Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendum.

A. 36. F. 48. B. 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

b 11. octa.
c 8. octa.
d 22. octa.

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum exhiberi nullo modo poſſe in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, & eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod eſt abſurdũ. Ponitur enim ſecundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione proportionẽ non habent, quã quadratus ad quadratũ. Si enim haberent, eſſent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. exiſtẽte quadrato, eſſet & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. & 9. 9 eſt abſurdũ. g Nã inter 4. & 8: & inter 8. & 16 & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, ſi eſſent quadrati: cũ tamẽ in ſcholio prop. 8. huius li. demõſtratũ ſit, inter numeros duplæ proportionis quoſuis nõ poſſe cadere mediũ proportionalem

e 24. octa.
f 24. octa.
g 11. octa.

SIMI-

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, a caderet inter eos medius proportionalis. b Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis, quod fieri non posse, demonstratum a nobis est in scholio propos. 8. huius lib.

a 11. oct.
b 8. oct.

xxiij. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubũ, sitq; A, cubus. Dico & B, cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D: c cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F. d cadent quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus: e erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

A. 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

c 12. oct.
d 8. oct.
e 3. oct.

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, f essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis repertæ, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.

f 25. oct.

xxiiij. THEOR. 24. PROPOS. 26.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendam quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes; a cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione continua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo similes plani numeri rationem inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 20.	C, 30.	B, 45.	
D, 4.	E, 6.	F, 9.	

a 18. oct.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet,

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. b *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit vnus medius proportionalis: Et est, vt C, ad D, ita A, ad B;* c *cadet quoque medius proportionalis inter A, & B,* d *Quare A, & B, plani similes sunt.*

A, 8.	B, 18.		
C, 16.	E, 36.		

b 21. oct. c 8. oct. d 20. oct.

EX hoc perspicuum est, planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum ponuntur enim non similes.

THEOR. 25. PROPOS. 27. XXV.

SIMILES solidi numeri rationem ha-

bent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A,B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A,B, sunt solidi similes; [a] cadent inter eos duo medij proportionales, qui sint C,D. Sumptis autem quatuor numeris E,F,G,H, minimis in continua proportione A,C,D,B; erunt extremi E,H, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

a 19. oct.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A,B, proportionem habeant inter se, quã cubi C,D. Dico A, B, solidos esse similes.

A, 16. B, 54. Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D; [b] *ca-*

C, 64. D, 216. dant autem inter C, D, eubos duo medij proportionales; [c] *cadent quoque inter A, B, duo medij.* [d] *Sunt ergo A, & B, solidi similes.*

b 12. oct. c 8. oct. d 21. oct.

EX his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, [e] *caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iã dudũ ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione nõ erunt similes solidi, cũ inter eos cadere non possint duo medij proportionales. Nam alias caderent quoque duo medij inter minimos eorundẽ proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel*

e 18. oct.

f 8. oct.

certe

certe binario tantum inter se distent, vt in scholio praedicto traditum est; inter quos certum est, non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

SIMILITER nec duo quinis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus primus, latera habet solummodo vnitatē, & seipsum, quamuis improprie. Vt bi numeri plani 29. & 23. latera habent 1.29. & 1.23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, qua constat non esse proportionalia. Quinis vero numerus solidus, qui numerus etiam primus sit, latera tantum habet duas vnitates, & se ipsum. Vt hi numeri solidi. 29 & 47. latera habent 1.1.29. & 1.1.47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perspicuum autem est, ea non posse esse proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus sit) plani similes, vel solidi similes esse possunt. Si enim duo huiusmodi numeri inter se primi, dicantur esse plani, vel solidi similes; [a] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter se primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter se primi, cū nullus numerus illos omnes, tanquā cōmunis mensura metiri possit, propter duos extremos inter se primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in scholio propos. 24. lib. 7. demonstrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod absurdum est. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi. [a] 18 & 19. oct.

EX his sequitur, si duo numeri sint plani, vel solidi similes, quorum minor sit primus, minorem numerare maiorem. Nam si eum non numeraret; [b] essent duo propositi numeri inter se primi: ac proinde, vt proximè ostendimus, non possent esse plani, vel solidi similes. quod absurdum est, & cōtra hypothesim. Verum hoc ostensiuè quoque ita demonstrabimus. Sint primum duo numeri plani similes A, B, sitq; A, minor, primus. Dico A, ipsum B, metri. Nam cum A, 3. B, 48. A, & B, ponantur plani si- C, 1. D, 3. E, 4. F, 12. [b] 32. sept.

miles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint C, vnitas, & numerus D, ipsi A, aequalis, quòd nullus alius numerus, praeter C, vnitatem, & numerum D, ipsi A, aequalem, metiatur primum numerum A: sint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt sit C, ad E, vt D, ad F.

A, 3. B, 48.
C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

a 19. sep. Erit igitur permutando C, ad D, vt E, ad F. a Igitur numerus factus ex C, primo in F, quartum aequalis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertiũ: Fit autem ex C, vnitate in F, ipsemet numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. b Quare D, ipsum F, metietur: c Metitur autem F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F, d Igitur & D, id est, A, illi aequalis, eundem B, metietur, quod est propositum.

b 4. pro. c 4. pro. d 11. pro.

HINC Perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed compositi. quod est contra hypothesim.

SINT deinde duo solidi similes A, B, sitque A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cũ ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, aequalis, quòd nullus alius numerus, praeter vnitatem, & numerum D, ipsi A, aequalem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G.

A, 3. B, 24.
B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2. G, 6.

c 19. sep. Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. c Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum aequalis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. f Quare D, ipsum G, metietur. g Metitur autem G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B. h Igitur & D, hoc est, A, illi aequalis, eundem B, metietur. quod est propositum.

f 4. pro. g 4. pro. h 11. pro.

ATQVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proxime ostendimus. Cum ergo & se ipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi, quod est contra hypothesim.

ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularem, vel superbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erunt illi ipsi per ea, quæ tradita sunt, plani seu solidi non similes.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus sit, alter vero non quadratus, plani sunt non similes; quales sunt 16. & 20. Si enim essent plani similes, [a] *haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Existente igitur 16. quadrato,* [b] *esset & 20. quadratus, quod est absurdum. ponitur enim non quadratus.* [a] 26. 8.

[b] 24. 8.

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus sit, alter vero non cubus, solidi sunt non similes, vt 27. & 40. Si enim essent solidi similes, [c] *haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus sit,* [d] *esset & 40. cubus. quod est absurdum. ponitur enim non cubus.* [c] 27. 8.

[d] 25. 8.

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A,B,se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicãs enim A,se ipsum faciat D, quadratũ. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, produxit D,& C, [a] erit vt A, ad B, ita D,ad C. At inter A,& B, cum sint plani similes, [b] vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D,& C,vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continuè proportionales D,E, C. Itaque cum tres D,E, C, continue sint proportionales, sitque primus D,quadratus, ex constructione; [d] erit quo-

A,6. B,54.
D,36. E,108. C, 324.

[a] 17.sept.
[b] 18.oct.
[c] 8.oct.
[d] 2.oct.

que

que C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicãs enim A, seipsum faciat D, quadratum.

Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C,[a] erit vt A, ad B, ita D, ad C.[b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis.[c] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet;[d] Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 6. B, 54. D, 36. C, 324.

a 17. sept.
b 11. oct.
c 8. oct.
d 20. oct.

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, ni mirum quadrati;[e] erit C, ex eis productus, quadratus.

A, 4. B, 25. C, 100

e 1. noni

II.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes

faciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus.

A, 9. D, 12. B, 16. C, 144.

Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum: a erunt A, & B, similes plani: b atque adeo inter eos unus medius cadet proportionalis, videlicet D. c Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

a 2. noni
b 18. oct.
c 22. oct.

III.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; sitque A, quadratus. Dico

A, 4. B, 20. C, 80.

B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus; erit & C. productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse

A, 9. B, 20. C, 180.

quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitq; A, quadratus, esset & B, ex theor. 1. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum. & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

THEOR. 3. PROPOS. 3 iij.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerum B. Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicans fecit D: a metietur C, ipsum D, per C; b Metitur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirū denominata à C; Ac proinde c vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; d metietur D, ipsum A, per C. Metiebatur autē & C, ipsum D, per C. Eadē ergo pars, est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; e ideoq; vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atq; adeo inter vnitatē & numerū A, duo medij proportionales cadūt numeri C, D. f At quia A, ipsum B, metitur per A, quod A, seipsum multiplicans fecerit B; g metitur vero & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; h Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; i cadent totidem inter A, & B, nimirum E, & F. Cum ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales, & A, primus sit cubus, K erit quoq; E, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum multiplicās, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 8.		
E, 16.	D, 4.	
F, 32.	C, 2.	
B, 64.	Vnitas.	a 7. pro.

b 5. pton
c 20. def.
d 7. pro.
e 20. def.
f 7. pron
g 5. pron
h 20. def.
i 8. octa.
K 3. oct

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, seipsum faciat D;[a] erit que D. cubus. Quoniam vero A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [b] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [c] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [d] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [e] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubũ numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 8. B, 27.
D. 64. C, 216.

a 3. noni
b 17. sep
c 12. oct.
d 8. oct.
e 23. oct.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicãs faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; [f] qui cubus erit. Quoniã igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [g] erit vt A, ad B, ita D, ad C; [h] At inter D, & C, cubos duo cadũt medij proportionales. [i] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [k] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A, 8. B, 27.
D, 64. C, 216.

f 3. noni
g 17. sep
h 12. oct.
i 8. Oct.
k 22. oct

SCHOLIVM.

EX his & hac, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I.

SI cubus numerus non cubum numerũ multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; 1 & multiplicatus B, cubus erit, quod non ponitur.

A, 8. B, 20.
C, 160.

5. noni

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si nãque B, sit cubus, a & factus C, cubus erit. A,8. B,17. C,136. a 4 noni

quod est contra hypothesim.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vi.

SI numerus seipsum multiplicans cubũ faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubũ. Dico & A, cubum esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex iis, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicãs numerum quempiam A, facit cubum C; erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A,8. B,64. C,512. b 5. noni

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: c Ergo inter A,8. B,64. C,512. B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt. d Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, facit; e cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales. f Atque adeo existente B, cubo, et A, cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, vt perspicuum est. c 12. oct. d 17. sept. e 8. oct. f 23. oct.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vii.

SI cõpositus numerus numerum aliquẽ

mul-

multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim 13. def A, sit compositus, [a] metietur eum, præter vnitatem, numerus aliquis: metiatur D, ipsum

A, 6. B, 11. C, 66.
D, 2. E, 3.

A, per E. Quo posito, [b] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, 9. pro. multiplicans fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorum D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

viij. SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M. Dico tertium quidem B, ab vnitate esse quadratum, & vnum intermit-

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187. H, 6561. I, 19683. K, 59049. L, 177147. M, 531441.

tes omnes, quales sunt D, F, H, K, M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum vero F, cubum simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam, n. est vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum

rum A, & numerus A, numerum B: a Metitur autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; b Atq. adeo A, multiplicãs A, ipsum B, producet. Quare B, quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sũt B, C, D, & est B, quadratus; erit & D, quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D, E, F, cum D, sit quadratus, d & F, quadratus erit, Nec non & omnes vnum intermittentes.

a 5. prop

b 9. prop

c 2. oct.

d 22. oct.

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C, æque metietur vnitas numerum A, & numerus B, numerum C. e Metitur autem vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur, f atque adeo B, ipsum A, multiplicãs procreabit numerum C. Quare cum A, seipsum multiplicans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt est ostensum, erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales sunt C, D, E, F, & est C, cubus, g erit & F, cubus. Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F, G, H, I, cum F, sit cubus, h & I, cubus erit, atque omnes semper duos intermittentes.

c 5. prop

f 9. prop

g 3. oct

h 23. oct

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, interuisis nimirum quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittentes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HOC theorema potest quoque hoc modo proponi.

SI sint quotcunque numeri ab vnitate cõtinue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, nono, vndecimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequũtur proxime numeros positos in locis, tertio, sexto, nono, duodeci-

mo,

mo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. sunt cubi. Omnes vero qui proxime sequuntur numeros positos in locis sexto, duodecimo, decimooctauo, vigesimoquarto, & alijs, quæ metitur senarius, quales sunt septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigesimusquintus, &c. sunt cubi simul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes semper vnum intermittunt post tertium ab vnitate: At secundi ordinis numeri omittunt semper duos numeros post quartum ab vnitate: Numeri denique tertij ordinis quinque semper interponunt post septimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

ix. THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem sit quadratus, & reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus, & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, sitque primum A, proximus

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos esse. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales sunt B, D, F, quadrati sint, a iam demon-

a 8. noni

stratum

ſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres continue propor

Vnitas. A,4 B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

tionales ſint A,B,C; ſitque A, quadratus; a erit & C, quadratus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue proportionalibus C,D,E, cũ C, ſit quadratus; b & E, quadratus erit. Omnes igitur A,B,C,D,E,F, quadrati ſunt. Idem oſtẽdemus, ſi plures numeri ſint cõtinue proportionales.

a 22. oct.

b 22. oct

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & oẽs

Vnitas. A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768. F,262144.

duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi, c iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: d Metitur autem vnitas numerum A, per ipſummet A. Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum metietur; e Atque adeo cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit. f Quare B, cubus eſt. Quoniam vero quatuor continue proportionales ſunt A,B,C,D, eſtque A, cubus, g & D, cubus erit. Eademque ratione, aſſumptis quatuor deinceps proportionalibus B,C,D,E, cum B, cubus ſit: h & E, cubus erit: Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi ſunt. Non ſecus demonſtrabimus, omnes cubos eſſe, ſi plures continue proportionales fuerint. Quo circa, ſi ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

c 8. noni

d 5. pro.

e 9. pro.

f 3. noni

g 23. oct.

h 23. oct

SCHOLIVM.

NON demonſtrauit Geometra, ſi numerus, qui poſt vnitatem, ſit cubus ſimul & quadratus, & reliquos omnes eſſe cubos ſimul, & quadratos; quia perſpicue hoc ipſum ex demonſtratis colligitur. Nam ſi proximus vnitati ſit cubus ſimul, & quadratus: qua parte eſt cubus, ea ratione oẽs reliqui cubi erũt; qua vero parte eſt quadratus, ea ratione &

reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicãs facit B; erit ex defin. B quadratus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicãs B, facit C, sunto

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntque A, C, quadrati; erit ex eodem scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seip-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

3. noni *sum multiplicans facit B; a erit & B, cubus. Item quia ex*
eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, suntque A, B, cu-
4. noni *bi; b erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio, A, mul-*
4. noni *tiplicans C, facit D, suntque A, C, cubi; c erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.*

x. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque

alius

alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales A, B, C, D, E, F, G, H, I, &c. & primum A, proximus vnitati non sit quadratus. Dico nec alium vllum esse quadratum, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, hoc est, præter B, D, F, H. &c. Si. n.

Vnitas. A, 1. B, 4. C, 8. D, 16, E, 32. F, 64. G, 128. H, 256. I, 512. K, 1024. L, 2048. M, 4096.

præter hos alius est quadratus, sit quadratus E. a Cum ergo & D, sit quadratus, sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E. b sed B, tertius ab vnitate est quadratus. c Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos quadratum esse.

a 8. noni
b 8. noni
c 24. oct.

SED iam A, proximus vnitati nō sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, videlicet præter C, F, I, &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus. d Cum ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quam tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D. e Sed C, est cubus, cum sit quartus ab vnitate. f Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod est contra hypothesim. Non igitur D, cubus est. Quod si E, exedatur esse cubus; g cum & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus B, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo, h erit. & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autē ostensum est duos D, & E, inter duos cubos

d 8. noni
e 8. noni
f 25. oct.
g 8. noni
h 25. oct.

C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatē, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubū simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquādo vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post vnitatem, cubus quidem, non autem simul & quadratus:

Vnitas. B, 8. B, 64. Dico B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem, a quod primo existente cubo, omnes cubi sint, b quadratum vero, quod tertius sit ab vnitate.

a 9. noni b 8. noni

SIT deinde A, post vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubum simul & quadratum; c Cubum quidem, quod quartus sit ab vnitate; quadratum vero, d quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

c 8. noni d 9. noni

SIT postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubū simul & quadratū, præter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 7776. F, 46656.

enim primo non existente quadrato, e nullus alius quadratus sit, præter tertiū ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, etc. Primo autēnon existente cubo, f nullus alius sit cubus, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, etc.

e 10. noni.

f 10. noni.

perspi-

perspicuum est, tantummodo septimum, tertium decimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de cæteris. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

THEOR. 11. PROPOS. 11. xi.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem,

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D: (quod quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) [b] æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur B, ipsum F, per A, quod sit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per F, cum sit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat ostendendum.

[a] 20. def. 7.
[b] 5. pro. 7.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex his, quantum abest maior numerus a minore metiente, tantum distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorē metitur; propterea quod eadem esse debet proportio minoris ad maiorē, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt

Vnitas, A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

ex demonstratione apparet. Itaque B, metietur F; per D. Et C, metietur F, per C, nimirum per seipsum, &c. quia tam inter B; & F, quam inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quam inter vnitatem & C, duo interiecti sunt numeri.

HINC rursus efficitur, quemlibet numerum, qui se ipsum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab vnitate. Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore distat, quantum minor ab vnitate, propterea quod si numerus numerū metiens multiplicet eum, per quem metitur, a *producitur ille, quem metitur. Ergo C, seipsum multiplicans gignet F, cum F, quantum absit a C, quoniam C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metietur, vt diximus. Sic quoque B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.*

a 9. pro.

xj. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

SINT ab vnitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimū D, metiri quoq; A, proximū vnitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundē E, primū metiri etiā numerum A, vnitati proximū. Si nāque nō metitur ipsum A: b erit E, cū primus sit, ad A, primus: hoc est, A, & E, inter se primi erūt. Metiatur

b 31. sep

E, ip-

E, ipsum D, per F, a atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in scholio præcedētis propos. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. b Quare erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, sint inter se primi; c ac proinde in sua proportione minimi; d metietur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, e atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, e ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C, per B, f atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium. g Erit igitur vt A, primus ad E, secūdum, ita G, tertius ad B, quartum. Quapropter cum A, & E, sint inter se primi; h ac propterea in sua proportione minimi; i metietur æque A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B, per H: k ita vt E, multiplicās H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, atque idcirco A, se ipsum multiplicās facit B, vt ex eodem scholio præcedētis propos. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertiū, & ex A, medio in seipsum, l Quare erit vt E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter se primi sint, m ac proinde in sua proportione minimi; æque metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesim, ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metietur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

a 9. pron
b 19. sep
b 23. sep
d 21. sep
e 9. pron
f 9. pron.
g 19. sep
h 23. sep
i 21. sep.
k 6. pron
l 20. def.
m 23 sep 21. sep

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipsum A, metiri. Si enim non metiatur; o erit E, ad

o 31. sep

A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sũt, & A, seipsum multiplicans facit B, vt ex scholio propos. præcedentis constat.

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

a 27. sep. a erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedentis

b 26. sep. propos. b erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt; & fit D, ex A, in C, ex eodẽ scholio præcedentis propos.

c 26. sep. c erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiẽs metiri potest vltimum. Si namque metiretur vltimũ, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonstratum est. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod videtur fieri nõ posse. Nã si quis demonstrare instituat, Socratem esse album ex eo, quod non est albus, paradoxũ aliquid, & inopinatum in medium videtur afferre. Cui tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nõnullis propositionibus, quæ sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 20. gloriaturque se primum omnium hanc rationẽ demonstrandi reperisse: quod arbitror eum non dicturum fuisse, si diligentius vim huius demonstrationis expendisset, vel certe, si expendit, eam in memoriam reuocasset, quandoquidem ipso longe prior Euclides vsus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere demonstrandi vsus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12. vt ibidem monuimus.

CAETERVM ex demonstratis perspicuum est, quem-

cumque

cumque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. [a] *Cum enim metiatur proximum unitati; hic autem omnes subsequentes;* [b] *quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris;* [c] *manifestum est, quod & ille omnes metiatur.*

[a] 12. not. [b] 11. noni [c] 11. pro.

THEOR. 13. PROPOS. 13. xiij.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sũt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum autem est E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; [d] metietur quoque ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; [e] atque adeo eum aliquis numerus primus metietur, quem dico alium esse, non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; [f] metietur quoque ille alius primus eundem D; [g] atq; adeo & ipsum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique, E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; [h] & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum

Vnitas. A, 5, B, 25. C, 125. D, 625.
E — H — G — F —

[d] 12. not. [e] 33. sept. [f] 11. pro. [g] 12. not. [h] 8. pron.

11. noni

D, metitur,) metietur D, per E, a Cum ergo quilibet ipsorum A, B, C, metiatur D, per aliquem ipsorum A, B, C, erit E, idem qui aliquis ipsorum A, B, C, quod est contra hypothesim, ponitur enim E, non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C. Non igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C,

8. pron

sed diuersus. Quoniã vero E, metitur D, per F, b metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus: si. n.

12. noni

sit primus, & metiatur D, vltimum; c metietur & A, proximum vnitati, qui primus est, quod est absurdum. Igitur F,

13 3. sep.

non primus est, sed compositus; d atque adeo cum aliquis numerus primus

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E --- H --- G --- F ----

metietur. quem rursus dico nullum aliũ esse posse præter primum A. Si namque alius primus quam A,

11. pro. 12. noni

metiatur F, cũ F, metiatur D, extremum; e metietur quoq; ille alius primus eundem D; fatque adeo & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo

9. pro.

non alius primus quam A, ipsum F, metitur. Iam vero quoniam E, metitur D, per F, g fiet D, ex E, in F: Fit autem

19. sep.

& D, ex A, in C, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus. Idẽ igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartũ, & ex E, secundo in F, tertium; h Ac proinde erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum; Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniã igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & non primum, sed compositum, quem solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

8. pron.

SI enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, metiaturque F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum C, per

11. noni

aliquem ipsorum A, B; i & vicissim aliquis ipsorum A, B, (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. k Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B, quod est absurdum. ostensum est enim F, non

esse

esse eundem, quem aliquem ipsorum A,B. Non ergo G, est idem qui aliquis ipsorum A,B, sed diuersus. Quoniam autem F, metitur C, per G; a metietur vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C, b metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus, cac proinde eum, aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G, cum G, metiatur C, vltimum, d metietur quoque ille alius primus eundem C, e atque adeo & ipsum A, vnitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metietur. f Iam vero quia C, fit ex F, in G, quod F, metiatur C, per G; Fit autē idem C, ex A, in B, vt docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. g Quare erit vt A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, vt demonstratum est. Igitur & G, ipsum B, metietur metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H, ostendemus similiter H, diuersum esse ab A, quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

NAM si H, idem sit qui A, metiaturque G, ipsum B, per H; metietur vtique G, ipsum B, per A; h Et vicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, vt constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A, quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem, quem A. Non ergo H, idem est, qui A. sed diuersus. i Iam vero quia B, fit ex G, in H. quod G. ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertium, & ex A, medio in se ipsum. k Quare erit vt H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium. At A, metitur ipsum G, vt est demonstratum. Igitur, & H ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare si A, primus est, maximum D, nullus alius numerus

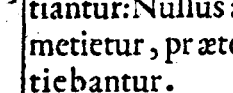
a 28. pron
b 12. noni
c 33. sep.
d 11. pro.
e 12. noni
f 9. pron.
g 19. sep.
h 8 pron
i 9. pron.
k 20. sep.

metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab vnitate quotcũque numeri deinceps proportinales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

xiiij. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI minimũ numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui à principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiatur enim si fieri potest, primus numerus E, diuersus à B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A,



per F, [a] multiplicans E, ipsum F, faciet A. [b] Quare singuli B, C, D, alterum ipsorum E, F, metientur: non quidem ipsum E, primum, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A: Quod est absurdũ. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 9. pron
b 32. sep

SCHOLIVM.

ADDIT hoc loco Campanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentiũ cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

SINT

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, in sua proportione minimi, in qua sumantur etiã duo minimi F, G: Metiatur autem primo H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, certe ad alterum eorum compositum esse. Sit enim H, non primus, sed cõ positus: a *Et sumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & sic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot sunt ipsi A, B, C, D, E. Quoniam igitur, vt constat ex modo præcrendi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. numerus A, sit ex F, in M, metiatur autem H, ipsum A, erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum, si vero ad M, qui quidem sit ex F, in I, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. erit, ex scholio eiusdem propos. 32. lib. 7. rursus H, compositus vel ad F, vel ad I, Si ad F, habetur propositum, si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum, erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, si primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.*

a 2. oct.

A, 16.	B, 24	C, 36.	D, 54.	E, 81.
M, 8.	N, 12.	O, 18.	P, 27.
I, 4.	K, 6.	L, 9.
H — —	F, 2.	G, 3.

DEINDE metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N, erit vt prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositum, si vero ad N, qui quidẽ fit ex F, in K, erit H, eodẽ modo compositus vel ad F, vel ad K, Si ad F, habetur propositum, si vero ad K, eũ K, gignatur ex F, in G, erit quoq. H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C, qui cum fiat ex F, in O, erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum, si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L, erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum, si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se, cõpositus quoq. erit H, ad G. Quod si H, sit primus, probabimus eodẽ modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsũ G;

PRÆ-

PRAETEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum; si vero ad P, qui quidem fit ex G, in L, erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si vero ad L; cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; Si vero H, primus sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10 theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare: Quod idem & Barlaam monachum fecisse à nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, feceturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri AB, & C, quorum AB, diuidatur in AD, DE, EB; Fiatque F, ex C, in AB; Item GH, ex C, in AD; & HI, ex C, in DE; & IK, ex C, in EB. Dico F, æqualem esse numeris GH, HI, IK,

hoc est, toti numero GK, ex GH, HI, IK, composito.

Quoniam enim C, multiplicans AB, fecit F; a metietur AB, ipsum F, per C, hoc est, AB, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione AD, ipsius GH; & DE, ipsius HI; & EB, ipsius IK, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ AB, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus AB, totius GK, eadem pars est, quæ AD, ipsius GH; erit quoque AB, totus totius GK, pars eadem, quæ AB, ipsius F; b Ac proinde inter se æquales erunt F, & GK. Quod est propositum.

A ... D .. E .. B C .
F .....
G ..... H .... I .. K

a 2. pro.

b 4. pro.

II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.

NVMERVS enim AB, diuidatur in AC, CB. Dico numeros, qui fiunt ex AB, toto in partes AC, CB, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto AB, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi AB;

D .....
A ... C .. B

erit

erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, aqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex AB, in AC, & in CB. quod est propositum.

IDEM demonstrabitur, si AB, in plures partes, quam in duas secetur, vt ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex AB, in AB, nimirum quadratus ipsius AB, aqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex AB, in singulas partes AC, CD, DB.

E . . . . .
A . . C . . D . B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui a prædicta parte efficitur, quadrato.

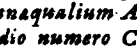
SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, aqualem esse & ei, qui sub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dicta partis AC. Sumpto enim numero D, qui dicta parti AC, aqualis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex AC, in AB; vel (quod idem est) ex AB, in AC, aqualis numeris factis ex D, hoc est, ex AC, in CB, & ex D, hoc est, ex AC, in AC, quadrato scilicet ipsius AC. Quod est propositum.

D . . . .
A . . . . C . . . . . B

IIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui a partibus efficiuntur, vna cũ numero plano, qui bis sub partibus cõtinetur.

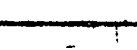
SIT numerus AB, diuisus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem esse quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius AB, æqualis est numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Est autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius AC: Item numerus, qui fit ex AB, in CB, eodem modo æqualis numero producto ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB. Igitur numerus quadratus ex AB, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium AC, CB, vna cum numero bis, qui fit ex AC, in CB. Quod est propositum.



V.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, n. AB, secetur in partes æquales AC, CB; & non æquales AD, DB. Dico numerum sub partibus inæqualibus AD, DB, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij CD, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero CB, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipsius CB, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium CD, DB, vnà cum plano numero bis comprehenso sub CD, DB; numero vero comprehenso semel sub CD, DB, vna cum quadrato ipsius DB, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex CB, in DB; fit, vt si hic numerus factus ex CB, in



DB, sumatur pro quadrato ipsius DB, vna cum numero facto ex CD, in DB; numerus quadratus ipsius CB, aqualis erit tam sit reliquo quadrato ipsius CD, vna cum reliquo numero facto ex CD, in DB, semel, & numero ex CB, hoc est, ex AC, in DB, producto. Atqui ex 1. theorem. numeri, qui fiunt ex CD, in DB, & ex AC, in DB, aqualis est numerus, qui fit ex toto AD, in DB. Igitur quadratus ipsius CB, aqualis erit quadrato ipsius CD, vna cum numero qui fit ex AD, in DB; hoc est, numerus factus ex AD, in DB, vna cum quadrato ipsius CD, aqualis erit quadrato ipsius CB. Quod est propositum.

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum; vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis est quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim AB, secetur in partes aquales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vna cum quadrato dimidij numeri CB, aqualem esse quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno, hoc est, quadrato ipsius CD. Cum enim quadratus ipsius CD, per 4. theorema, aqualis sit quadratis partium CB, BD, vna cum numero his comprehenso sub CB, BD, hoc est, quadratis partium CB, BD, vna cum numeris sub CB, BD, & sub AC, BD, comprehensis; numeris autem contentis sub CB, BD, & sub AC, BD, & sub BD, BD, hoc est, quadrato ipsius BD, aqualis sit ex 1. theorem. numerus factus ex AD, in BD; fit, vt si hic numerus factus ex AD, in BD, sumatur pro quadrato

A .... C .... B .. D

partis

partis BD, vna cum numeris factis ex CB, in BD; & ex AC, in BD, quadratus ipsius CD, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius CB, vna cum numero facto ex AD, in BD; hoc est, numerus factus ex AD, in BD, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis sit quadrato ipsius CD. quod est propositum.

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus totius, vna cum quadrato vnius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, vna cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB,

A C B

in dictam partem CB, vna cum quadrato reliqua partis AC. Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partiũ AC, CB, vna cũ numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, CB, CB, vna cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ex qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in vnam partem, vna cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit dictæ parti CB; cum quadratus totius AD, compositi ex AB, & BD, siue dicta parte CB, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum AB, BD, una cum numero qui fit bis ex AB, in BD, hoc est, quadratis numerorum AB, CB, una cum eo, qui fit bis ex AB, in CB; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum AB, CB, simul æquales numero bis comprehenso sub AB, CB, una cum quadrato numeri AC; fit, vt si pro quadratis numerorũ AB, CB, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB, una cũ quadrato ipsius AC, quadratus factus ex AD, æqualis sit numero, qui fit quater ex AB, in CB, una cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

A . . . . C . . . B . . . D

IX.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS sit numerus AB, in partes æquales AC, CB, & non æquales AD, DB. Dico quadratos partium inæqualium AD, DB, duplos esse quadratorum, qui ex AC, dimidio, & ex CD, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium AD, DB.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum AC, CD, una cum numero bis, qui fit ex AC, in CD: Si communis apponatur quadratus partis DB; erunt quadrati partium AD, DB, æqua-

A . . . . C . . . D . . B

les quadratis partium AC, CD, DB, una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD. Atqui quadrato ipsius DB, una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex CB, hoc est, ex AC & CD. Igitur, si pro quadrato ipsius DB, unà cum eo, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati ipsorum AC, CD, erunt quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod est propositum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiã numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus AB, diuisus in partes duas æquales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto BD, & quadratum adiecti numeri BD, utrosque simul, duplos esse quadratorũ, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, composito ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipsius AD, aqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD; si communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipsius BD, una cũ numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales sunt quadrati numerorũ CB, CD; & quadrato ipsius CB, æqualis est quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius BD, una cum numero,

A . . . C . . . B . . D

qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc est, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, aequales quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod est propositum.

I A M vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, aequalis sit quadrato reliquae partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, aequalis est quadrato numeri medij AC,

a 20. sep. erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Est autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB, sit aequalis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, detractum; b erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus; hoc est, CD, ipsi CB, aequalis, ad AD, ex AC, residuū. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit aequalis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad DE, ex toto CD, detractum; c erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est, DE, ipsi AD, aequalis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, aequalis; & sic deinceps, nec vnquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur

b 11. sep.

c 11. sep.

ita,

ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, aqualis sit quadrato reliquæ partis. Quod est propositum.

ALITER. Quotam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui fit quater ex AB, in CB, vna cũ quadrato ipsius AC, quintuplus erit quadrati partis AC. Est autem numerus contentus quater sub AB, CB, vna cum quadrato ipsius AC, quadratus: quippe cum æqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex AB, & CB, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur sub AB, CB, vna cum quadrato ex AC; & quadratus ex AC,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus AB, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex AB, in CB, æqualis sit quadrato ipsius AC. Quod est propositum.

VERVM hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. xvj.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habẽtium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirũ A, B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestum est ex

A, 9. B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

demonstratione propos. 2. lib. 8. D, A,9. B,12. C,16. seipsum multiplicantem facere A; D,3. E,4. multiplicantem vero ipsum E, facere B; atque E, seipsum multiplicante facere C. a Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; b erit & vterque D,E, simul ad quemlibet illorum primus. Itaque cum tam cõpositus ex D,E, quam ipse D; ad E, primus sit; c erit quoque numerus factus ex D,E, tanquam vno, in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D,E, tanquam vno, in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedentis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A,B, compositi, primi sunt ad E; d Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A,B, simul compositi.

DEINDE quia, vt prius, e vterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorum D,E; efficitur, (cum tam compositus ex D,E, quam ipse E, primus sit ad D,) f numerum factum ex D, B,12. C,16. A,9. E, tanquam vno, in E, primum esse, D,3. E,4. ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquã vno, in E, æqualis est per 3. theorem. scholij antecedentis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B,C, simul compositi, ad D, primi sunt, g atque adeo & ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

POSTREMO quia, vt prius, h vterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est: atque adeo e contrario, quilibet ipsorum D,E, primus est ad compositum ex D,E, i erit quoq; qui fit ex D, in E, ad compositũ ex D, E, primus; K Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eum qui fit ex D,E, tanquam vno, in se, primus erit. Qui autẽ fit ex D,E, tanquam vno, in se, æqualis est, per 4. theorem. antecedentis scholij, eis qui fiunt ex A,9. C,16. D, & E, in se ipsos, vna cum eo qui B,12. ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, D,3. E,4. in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis. Quoniam ergo duo numeri simul, videlicet compositus

a 24. sep. b 30. sep. c 26. sep. d 27. sep. e 30. sep. f 26. sep. g 27. sep. h 30. sep. i 26. sep. K 27. sep.

ex

ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquem ipsorum, nimirum ad eum, qui fit ex D, in E, vt ostensum est, a Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirū ad eum qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostensum est, b erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiat A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erūt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

a 20. sep.

b 30. sep.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandē cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erūt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensurabit. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumanturque F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D;

A, 8. B, 12. C, 18. D. 27.
E —— F, 2. G, 3. H ——

numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autem E, aliquem eorum, nimirum D, metietur quoque E, alterum ipsorum F, G, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius libri. Atque idcirco ipsum E, & alterum ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; a metietur quoque H, eundem compositū ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G: & tam F, quam G, medios numeros B, C; metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib 8. b metietur quoque H, medios B, C: c ac propterea & compositum ex B, C Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, vt demonstrauimus: d metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. e Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.

a 11. pro.

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E ---- F, 2. G, 3. H. ----

b 11. pro.
c 10. pro.
d 12. pro
e 3. oct.

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C, metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14. huius lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D: f metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib 8. medios B, C, g metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum B, h metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. i metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. k Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compo-

11. pro.
11. pro.
12. pro.
11. pro.
12. pro
3. oct.

siti.

sits sunt. Ergo primi. Quod est propositum.

NON aliter ostendemus A, C, D, compositos, esse ad B, primos: nec non, & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quotlibet numeris continue proportionalibus.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter se fuerint: Non erit vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam. xvij.

SINT primi inter se A, & B. Dico non esse vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C.

Quoniam igitur A, & B, primi sunt inter se, [a] atque adeo in sua proportione minimi: [b] ipsi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione existentes, nimirum A, ipsum B, & B, ipsum C; Metitur autē & A, se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, B, primos inter se Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare si duo numeri, primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . .
B . . . . .
C . . . . . [a] 23. sep [b] 21. sep

THEOR. 17. PROPOS. 17.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint: Non erit vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam. xviij.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter se primi sint. Dico non esse, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri potest, sit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E. Sunt autem

A. 8. B. 12. C. 18. D. 27. E . . .

A, D,

23.sep. A,D, cum sint inter se primi, a minimi in sua proportione-
21.sep. b Igitur æque metientur ipsos B,& E; nimirum A, ipsum B,& D, ipsum E. Atqui est A,8. B,12. C,18. D,27. E — vt A, ad B, ita B, ad C. Ergo cum A, metiatur ipsum
11.pro. B; & B, ipsum C, metietur; c atque ob id & A, ipsum C, metietur. Et quia est vt B, ad C, ita C, ad D, metitur autem
11.pro. B, ipsum C; metietur & C, ipsum D. Quare A, metiens ipsum C, d metietur quoque ipsum D. Metitur vero & se ipsum. Igitur A, metitur ipsos A, D, inter se primos. Quod est absurdum. Non ergo est vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendū.

xix.

PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri sint A,& B, oporteatque cōsiderare, an inueniri possit tertius ipsis proportionalis, hoc est, an sit B, ad alium quempiam numerum,
e 16.no. A,4. B,7. vt A, ad B. Aut igitur A,B, primi inter se sunt, aut nō. Si sunt inter se primi, e perspicuum est ex demonstratis, nō posse ipsis reperiri tertium proportionalem. Si vero non sunt A,& B, inter se primi; multiplicans B, se ipsum faciat C. Aut igitur A, metitur ipsum C, aut non. Metiatur primum A, ipsum C, per D. Dico ipsis A,B, inueniri posse tertiū
A,4. B,6. D,9. C,36. proportionalem, immo ipsū D, esse tertiū proportionalē.
f 9.pron. Cū enim A, metiatur C, per D, f fiet C, ex A, in D: Fit autē ex constructione, idem C, ex B, in se ipsum. Igitur, qui continetur sub extremis A,D. æqualis est ei, qui ex medio
g 20.sep. B, describitur; g Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus est tertius proportionalis ipsis A, B.

SED

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, non posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D, ita vt
sit A, ad B, quemadmodũ B, ad A, 6. B, 4. D ---- C 16.
D. Quoniam igitur est, vt A,
ad B, ita B, ad D; a erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; b metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secũdo in se ipsum. Eadem via cõsiderabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

a 20. sep

b 7. pro.

PROBL. 2. PROPOS. 19. XX.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium nu
merum, vt A, ad B. A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
Multiplicans B, ip- A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.
sum C, faciat D. Aut
igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, immo ipsum E, esse. quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E, c fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio cõtinetur: d Ac propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuentus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

c 9. pron

d 19. sep

SED

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalem. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E; ita vt sit quemadmodum A, ad A, 4. B, 6. C, 9. E --- D, 54. B, ita C, ad E. Quia ergo A, 3. B, 4. C, 10. E --- D, 40. quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt,
a 19. sep. [a] erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare
b 7. prox. [b] cum D, fiat ex A, in E; metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur non metiri. Quod est absurdū. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an posset, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

HAEC quæ proximis quatuor propositionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quāuis extremi inter se primi sint. Nā datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primum, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. si quadratus numerus secundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis $21\frac{1}{3}$. hoc modo. 3. 8. $21\frac{1}{3}$. Quia enim diuisis 64. per 3. fit numerus $21\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione Quotientis $21\frac{1}{3}$. per diuisorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus sit ex medio numero 8. in se, c *erunt 3. 8. $21\frac{1}{3}$. continue proportionales.*
c 20. sep.

DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertiū genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. si numerus 120. ex secundo in tertiū genitus diuidatur in primum 9. reperietur quartus proportionalis $13\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20.

$13\frac{1}{3}$.

$13\frac{1}{2}$. Cū.n.diuisis 120. per 9. fiat $13\frac{1}{2}$. producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione. Quotiēties $13\frac{1}{2}$. per diuisorē 9. ex ijs, qua in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autem idem numerus diuisus ex secundo in tertium. Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$. proportionales sunt. 19. sep

EX his facile cognoscemus, propositis quotcūque numeris continue proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus Commandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi, Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorū extremi nō primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales nec eorū extremi inter se primi. Vbi mirari satis nō possum, quo nam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in alijs quidem demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumque non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati nō sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis.n. non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cū vtrobiq; proportio sit subdupla? Idē videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionaliũ, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartũ proportionalem, Si enim A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E --- potest inueniri, sit ille D, ita vt quemadmodũ A, ad B, ita C, ad D, & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E: a 3. sep *Sed sunt A, C, inter se primi,* b *& ob id minimi.* b 21. sep *Igitur metientur æque ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At vero & A, seipsũ metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.*

HAEC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E, quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C, cum nõ magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendãt; liquido constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atque probãtum assumunt; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales,

non

non tamen deinceps, sintque A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad aliū numerum, quē admodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita D, ad E. Est ergo ex aequo, vt A, ad C, ita C, ad E; A, 4. B, 12. C, 3 D, 9. E —— *Atque adeo vt ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodū B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.*

PRIMVM vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; a manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absolumus. a 17. no.

THEOR. 18. PROPOS. 20. xxj.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. b Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C. b 38. sep

A, 2. B, 3. C, 5.
30. 1
D ---------- E . F

SED iam non sit primus D F. c Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorum A, B, C, eundem esse. Si namque G, sit idē, qui vnus ipsorum A, B, C; metian-

A, 3. B, 5. C, 7.
105. 1
D ---------- E . F
53.
G -------

c 33. sep.

tur au-

tur autem A,B,C,ipsum DE;& G,eundem DE,metietur,
[a] 11. pro. Quare G,metiens totum DF,& detractum DE, [a] metietur quoque EF,reliquum,numerus vnitatem.Quod est absurdum.Ergo G,primus non est idem, qui vnus ipsorum A,B,C; Ac proinde inuenti sunt primi numeri A,B,C,G, plures proposita multitudine primorum numerorum, A,B,C Eademque via plures inuenientur quam A, B,C, G,si sumatur minimus,quem ipsi metiantur,&c. Quocirca primi numeri plures sunt,&c. Qd demonstrandū erat.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propositis,inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A,B,C,inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet DF,si primus est, vel certe G,qui ipsum DF,metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus,& sic deinceps primos numeros,quotquot quis volet,inueniemus.

xxij. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur:totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri AB,BC,CD. Dico & totum compositum AD,parem esse. Cum.n. AB,BC,CD,sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius AB,& F, ipsius BC; & G,ipsius CD.

A.....B....C.....D
E...F..G....

Quoniam igitur est vt AB, ad E,ita BC, [b] 12. sep. ad F;& CD,ad G;(quod semper sit proportio dupla) erit

quoque

uoque vt AB, ad E, ita AD, ad E, F, G, simul. Est autem AB, ipsius E, duplus. Igitur & totus AD, compositi ex E, F, G, duplus erit. Ac propterea AD, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 22. xxiij.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par AB, BC, CD, DE. Dico & totum compositū AE, parem esse. Cū enim AB, BC, CD, DE, sint impares; differet

uilibet vnitate A . . . B . . . . . C . . . . . D . . . . . E

pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [a] Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. Igitur & totus AE, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 21. noni.
[b] 21. noni.

THEOR. 21. PROPOS. 23. xxiiij.

SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, AB, BC, CD, componantur. Dico & totum AD, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata vnitate D, ab impari CD;

rit reliquus CE, A . . . . B . . . C . . . . E . D

ar. [c] Est autem &

C, compositus ex imparibus AB, BC, multitudine pari-

[c] 22. noni.

bus, par.[a] Igitur & AE, compositus ex paribus AC, CE, par erit. Quare addita vnitate E D, totus A D, impar erit, cum impar à pari differat vnitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus facit imparem. Nam empta vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate.[b] Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; eum à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI à pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero AB, detrahatur par C B. Dico & reliquum AC, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius AB, aut maior quâ dimidia pars, vel minor.

A..... C..... B

Sit primum dimidia pars Cum igitur ipsi CB, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia, erit & AC, numerus par.

SED iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius AB. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione, sit D B, dimidia pars ipsius A B, & E B, dimidia ipsius CB. Itaque cum sit vt AB, ad DB, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium; erit permutando vt AB, ad CB, ita DB, ad EB; & diuidendo vt AC, ad CB, ita D E, ad E B; Rursusque permutando vt AC, ad DE, ita CB, ad EB. Atqui CB, ipsius EB, duplus est: Igitur & AC, ipsius DE, duplus erit; Ac propterea AC, cum bifariam diuidatur, (quod DE, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo à pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A..... C. D.. E..... B
A..... D ... C..E .. B

SCHO-

SCHOLIVM.

FACILIVS demonstrabimus hanc propos. ducendo ad impossibile, hoc modo. Si AC, reliquus non dicatur par, sed impar; detracta A.D.... C..... B vnitate A D, erit reliquus DC, par.

a *Igitur compositus DB, par quoque erit: ac proinde, addita vnitate AD, totus AB, impar fiet, quod est absurdum, cum par ponatur.* a 21. nostri.

THEOR. 23. PROPOS. 25. xxvj.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem esse. Detracta enim vnitate CD, ex CB, reliquus sit numerus DB, par. Quia igitur & totus A.....C..D....B AB, ponitur par; b erit & reliquus A D, par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus AC, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat. b 24. nostri.

THEOR. 24. PROPOS. 26. xxvij.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquum AC, parem esse. Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CB, erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par aufertur CD; c erit & reliquus AC, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum. A....C.....D:B c 24. nostri.

THEOR. 25. PROPOS. 27. xxviij.

SI ab impari numero par detrahatur. Reliquus impar erit.

EX impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim AD, vnitate ex impare AB; erit reliquus DB, par: Ex quo cum detrahatur CB, par; a reliquus DC, par

a 24. noni.

A . D . . . . C . . . . . B

quoq; erit; Ac proinde addita vnitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demostrandum erat.

xxix.

THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit:

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus,

A . . . . B . . . . .

qãot in A, sunt vnitates. Quare cũ

C . . . . . B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; b Atque adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendũ erat.

b 21. noni.

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A . . . B . . . . . .

C . . . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur æquales.

A .... B ....

C ..... B

xxx.

THEOR. 27. PROPOS. 29.

SI impar numerus imparem numerum

mul-

multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsi B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. [a] Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . C . . . . . [a 23. nona.]

COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

A . . . B . . . C . . . . . .

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eũ metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit, [b] *erit B, factus ex A, in B, impar in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.*

A . . . C . . . . . B . . . . . [b 29. nona.]

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par, erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Ell ergo C, impar.

A . . . C . . . . . B . . . . . [c 28. 29. nona.]

SCHOLIVM.

EX his clarissime quoque demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14 huius lib. aliter ostendimus; recepimusque nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus AB, in partes AC, CB, ita vt numerus ex AB, in CB, factus, aqualis sit quadrato reliquae partis AC.

A------C----B
D---E—

Aut igitur vtraque pars AC, CB, impar est; aut maior AC, impar, & minor CB, par; aut contra, maior AC, par, & minor CB, impar; aut denique vtraque pars AC, CB, par. Sit primum vtraque pars AC, CB, impar, a ideoque totus numerus AB, par. b Igitur qui fit ex AB, in CB, par est: qui vero ex AC, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB, genitus ponatur aqualis ei, qui fit ex AC, in se; erit par numerus impari aqualis. quod fieri non potest.

a 22. noni. b 28. noni.

DEINDE sit AC, impar, & CB, par, ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus AB, impar. c Quia ergo numerus ex AB, impare in parem CB, factus, par est: & numerus ex impare AC, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari aqualis. quod est absurdum.

c 28. noni.

TERTIO sit AC, par, & CB, impar; ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus AB, impar. d Quia ergo numerus ex AB, impare in imparem CB, factus, impar est: & numerus ex pare AC in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari aqualis. quod absurdum est.

d 29. noni.

QVARTO sit vtraque pars AC, CB, par. Inuentis igitur, ex scholio propos 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione AC, ad CB; e erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt AC, ad CB, ita D, ad E; erit conuertendo, vt CB, ad AC, ita E, ad D. Et componendo, vt AB, ad AC, ita totus DE, ad D: f Est autem, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, quod numerus factus ex AB, in CB, aqualis ponatur quadrato medij AC. Igitur erit quoque vt totus DE, ad D, ita D, ad E, g ac proinde nume-

e 24. sep. f 26. sep. g 20. sep.

vnus, qui sit ex toto DE, in E, aequalis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D, E, sectus est in partes D, E, quarum vel vtroque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto DE, in partem E, aequalis sit quadrato alterius partis D, quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero AB, quando vtraque pars AC, CB, vel impar est; vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.

THEOR. 28. PROPOS. 30. xxxiij.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidium quoque ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsum B, per C. Erit ergo, ex ijs, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiam partem habebit. Itaque cum A, metiatur B, per C, [a] metietur quoque C, ipsum B, per A; Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionem lib. 7. docuimus, quoniã vero est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij ipsius B, pars ab eodem A, denominata. [b] Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 28. pron.

A .....
C .....
B .....

[b] 40. sep.

THEOR. 29. PROPOS. 31. xxxiiij.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C Dico A, ad C, quoque primum esse. Si

enim A, C, non sunt inter se primi, metietur eos aliquis numerus, qui sit D, qui necessario impar erit. Nam si sit par, cum metiatur imparem A, erit A, factus ex D, pari in eum numerum, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metiens, (est enim C, par, cum dimidium habeat B.) b metietur quoque numerum B, eius dimidium. Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit &c. Quod erat ostendendum.

A . . . . . B
C . . . . . D ---

28. no.

30. no.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, c primus quoque erit ad quadruplum, cui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

31. no.

xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 32.

NVMERORVM a binario duplorum vnusquisque pariter par est tantum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita vnitate, cum A, sit

Vnitas. A, 1. B, 2. C, 8. D, 16. E, 32. binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. d Quare A, quemlibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E, qui cum omnes sint pares, vnoce duplo a binario: metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum

d 11. no.

merum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

QVOD autem iidem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continue proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirum binarius; [a] nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum; Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur à binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 13. no.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmetitis colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum. Sint. n. A, B, C, D, E, F,

à binario duplo, A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.

qui ex hic demonstratis I —— H —— G ——

omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, præter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeo si ordo numerorum à binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantum inueniri; nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum à binario duplorum, pariter par tantum; cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par; (Nam si dicatur impar, tum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I; numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus; Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars unitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt à binario I, dupli: Ac proinde G; erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autem, non esse. Quod

est ab-

est absurdum Nullus ergo alius pariter par est tantum, praeter eos, qui à binario sunt dupli.

THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidiū habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT numerus A, dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniam A, dimidium habet imparem, metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparē. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quarum æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, b Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autē C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par imparem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparē, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . .
B . . . . . C . . . .
D ---- E ----

SCHOLIVM.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantū. Quod enim quilibet eliorum sit pariter impar tū tum, confla

Impares	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.
Pariter impares tantū	6.	10.	14.	18.	22.	26.	30.

ex hac

ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tãtum, perspicuũ erit ex sequenti theoremate, in quo demonstratur, omnes pares, qui nec à binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo nullus alius par habeat dimidium imparem, prater duplos imparium numerorum, manifestum est, nullum alium prater ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparẽ.

THEOR. 32. PROPOS. 34. xxxvij.

SI par numerus neque à binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neque sit à binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet.

Nam cum dimi A . . . . . dium habeat pa rem, metietur eum binarius, par numerus per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus esset A, à binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, a cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem, erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & a 29. no.

par,& pariter impar. Si par ergo numerus neque à binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

FACILE ex his inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint,& pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui à binario sunt dupli,& omnibus, qui dimidios habet impares; erunt ex hac propositione omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

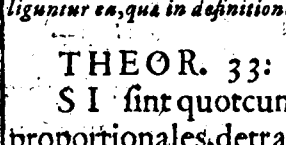
PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

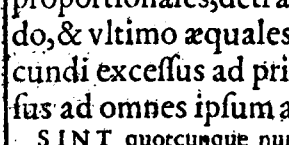
xxvii

THEOR. 33. PROPOS. 35.

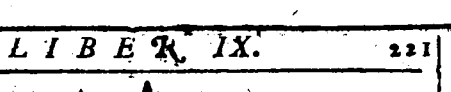
SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahantur autem à secundo,& vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D; EF; & ex B C, secundo,& EF, vltimo detrahantur C G; FH, primo A, æquales. Dico esse vt BG, ad A, ita EH, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur FI, ipsi B C, & FK, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur FI, æqualis est ipsi B C; & ablatus FH; ablato C G; erit & reliquus IH, reliquo B G, æqualis. Quia vero est vt A, ad BC, ita B C; ad D & D, ad B F; conuertendoque vt EF, ad D, ita D, ad BC, & BC, ad A; Atque





est



E . . . . . K . . . . . I . H . F

est KF, ipsi D. & IF, ipsi BC, & HF, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt EF, ad KF, ita KF, ad IF, & IF, ad HF. Diuidendo igitur vt EK, ad KF, ita KI, ad IF, & IH, ad HF; [a] Ac proinde ita etiam erunt omnes EK, KI, IH. ad omnes KF, IF, HF, hoc est, totus EH, ad D, BC, A, simul, (quibus sumptis sunt æquales KF, IF, HF,) vt IH, ad HF, hoc est, vt BG, ad A; sunt enim BG, & A, ipsis IH, & HF, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 12. sept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorũ continue proportionaliũ, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & vltimo dematur, fiatque vt reliquus secundi ad primũ, ita reliquus vltimi ad aliũ: Erit hic alius summa omnium numerorũ proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota summa. Inuenietur autẽ quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secũdi: vt liquet ex scholio prop. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniẽdus est, sunt excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo appositio, si primus numerus, nimirũ vnitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1 ita 2186. ad summã omnium, excepto vltimo, si secũdus numerus 1. multiplicetur per tertiũ 2186. fiet numerus 2186 qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summæ inuentæ 1093. proueniet summa omnium 3280.

2. 3. 9 27. 81. 243. 729. 2187.

THEOR.

xxxix.

THEOR. 34. PROPOS. 36.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A, B, C, D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, vltimum, faciat F. Dico F, esse numerum per-

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ------ 62. H, 124. I, 248. F ------ 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ------ P ------

fectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab B, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [a] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [b] ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. [c] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul. Est autem M, æqualis ipsi E. (Cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui compositus eidem E, per constructionem, est æqualis) erit compositus ex LN, nimirum ipse F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cum vni-

tas,

19. *sep.*

7. *pro.*

35. *no-*
ni.

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D.16.
E,31. G------62. H,124. I,248. F-----496.
K,31. M,31. L,31. N.465.
O------ P-----

tas, & omnes numeri A,B,C,D,E,G,H,I, metiantur ipsum F; (Cum enim F, factus sit ex E, in D; [a] metietur D. ipsum F; [b] atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A,B,C, [c] qui ipsum D, metiuntur. Rursus cum I, ipsum F, metiatur, vt ostensum est, [d] metientur quoque eundem F, numeri E,G,H, [e] qui ipsum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, vt mox ostendemus; Erunt vnitas & numeri A,B,C,D,E,G,H,I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

a 7. pro.
b 11. pro.
c 11. no.
d 11 pro.
e 11. no ni.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F, per P; Fatque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium: [g] ac propterea est vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cum A, B, C, D, ab vnitate sint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [h] vltimum D, nullus alius, præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipsum P, metietur. Cum ergo E, primus sit, [i] erunt E, & P, inter se primi; [k] ideoq; in sua proportione minimi: [l] Ac proinde æque metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. [m] Nullus vero alius præter A, B, C, ipsum D, metitur. Igitur P idem erit, qui aliquis ipsorum A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; [n] Ac proinde idem numerus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex

f 9. pro.
g 19. sep
h 13. oct
i 31. sep
k 23. sep
l 21. sep
m 21 oct.
n 19 sep

P, in

19. sep. P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I, Nō igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earū partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi aquales sunt. Si enim quotcunq; numeri ab vnitate dupli in vnam summam colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotas, quas perfectus numerus inuctus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia compositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc loco demonstrare proprietatis quasdam proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa

propriè-

proprietas, quam libro 5. septimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus, hinc exordientes.

I.

QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo, hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D.

Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D: fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium: erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. 219. sep. *Quod est propositum.*

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotientes F, G, H, I. Dico esse, vt B, ad C, ita G, ad F. Et vt C, ad D, ita H, ad G. Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proxime demonstrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Item cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H: erit vt C, ad D, ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I: erit vt D, ad E, ita I, ad H. Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

A, 48. B, 3. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, ſint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales eſſe. Quoniam enim per 2. theorema eſt, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc eſt, vt D, ad E, ita H, ad G: Et vt B, ad C, hoc eſt, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F: erunt I, H, G, E, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod eſt propoſitum.

A, 15. B, 1 C, 2. D, 4. E, 8. F, 15. G, 7 1/2. H, 3 3/4. I, 1 7/8.

IIII.

SI ſint quotuis numeri quicunque; & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorum ad quemlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum ſumma D: Et totidem alij E, F, G, quorum ſumma H; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico eſſe, vt D, ad A, B, C, ſigillatim, ita H, ad E, F, G, ſigillatim. Cum enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex aquo, vt A, B, ſimul, ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita

A, 3. B, 6. C, 12. D, 29. E, 6. F, 12. G, 24. H, 58.

E, F,

E, F, G, simul, hoc est, H, ad G.

QVIA igitur est, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex aquo, vt D, ad B, ita H, ad F.

DENIQVE quia est, vt D, ad B, ita H; ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex aquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

V.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; summa priorum per ipsos diuisa sigillatim, faciet eosdem prorsus Quotientes, quos summa posteriorum per ipsos diuisa facit.

NAM, vt in 4. theor. ostensum est, eadem proportio est summa priorum ad primum, qua summa posteriorum ad primum: ac proinde vtriusque proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuisione antecedentis termini per consequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, si vtraque summa seorsum per primos numeros, quaque per suum, diuidatur. Eademque ratio est, si per secundos, tertios, quartos, &c. diuiso fiat. Constat ergo propositum.

VI.

SI summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur; Et Quotientum summa per ipsos Quotientes; Et horum secundorum Quotientum summa per eosdem secundos Quotientes; & sic deinceps in infinitū:

procreabuntur alternis semper ijdem primi Quotientes ordine conuerso.

SINT continue proportionales quotuis numeri A,B,C, D, quorum summa E, per ipsos diuisa faciat Quotientes F, G,H,I, & horum summa K, per eos diuisa faciat Quotientes L, M,N,O. Dico hos Quotientes, & illos esse eosdem alternis, ordine conuerso, hoc est, F, & O, eosdem esse: Item G, & N: H, & M: I, & L, &c.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F,G,H,I, eandem continuam proportionem habent conuerso ordine, quam numeri A,B,C,D. Ex quotientes L, M, N, O, conuerso ordine eandem; quam Quotientes F,G,H, I, hoc est, eandem eodem ordine, quam numeri A,B,C,D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cum ex diuisione antecedentis remmi per consequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuisione E, per A, qui ex diuisione K, per I. Cum ergo Quotientes sint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L, &c. quod est propositum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E. 15.

F, 1 $\frac{1}{2}$. G, 3. H, 3 $\frac{3}{4}$. I, 7 $\frac{1}{8}$. K, 28 $\frac{1}{8}$.

L, 1 $\frac{7}{8}$. M, 3 $\frac{3}{4}$. N, 7 $\frac{1}{2}$. O, 15.

VII.

SI summa quotuis numerorum continue proportionalium per eos sigillatim diuidatur: erit summa omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter distantiũ, vel deniq; (si Quotientũ numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in se.

SINT

SINT primum quotuis numeri multitudine pares con-

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 32.
G, 63.
H, 63. I, 31 $\frac{1}{2}$. K, 15 $\frac{1}{4}$. L, 7 $\frac{3}{4}$. M, 3 $\frac{1}{1}$ $\frac{5}{6}$. N, 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$.
O, 124 $\frac{1}{2}$.

tinuè proportionales A, B, C, D, E, F, quorũ summa G, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum summa O. Dico summa O, æqualè esse numerum, qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, sunt continuè proportionales conuerso ordine in proportione A, ad B, erit N, ad M, vt I, ad H. Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I, hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M: Eademque ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in M. Et quoniã per 6. theor. summa O, diuisa per H, I, K, L, M, N, producit eosdem Quotientes conuerso ordine hoc est, summa O, diuisa per H, facit Quotientem N, producetur summa O, ex H, in N, per diuin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L. a19.sep.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continuè proportionales A, B, C, D, E, quorum summa F,

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16.
F, 31.
G, 31. H, 15 $\frac{1}{2}$. I, 7 $\frac{3}{4}$. K, 3 $\frac{7}{4}$. L, 1 $\frac{1}{4}$ $\frac{5}{6}$.
M, 60 $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{6}$.

per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum summa M. Dico summa M, æqualem esse numero genitum ex G, in L, & ex H, in K, & ex I, in seipsum. Quod enim æqualis sit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonstrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, continuè proportionales sunt, b *erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propositum.* b20.sep.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientium esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri con-

tinue proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continue proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes quæsiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorũ summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continue proportionales, eorumque summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæsiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atque mirabile sane est, posse reperiri quotcunque numeros continue proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa æqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distãt, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa æqualis sit numero producto ex uno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quascunque, eorumq. summam per vtrumque diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæsitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa æqualis est numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa æqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumq. summa 11. per vtrumque diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$, & $2\frac{1}{5}$, sunt numeri quæsiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & eorum summa, quam numerus ex multiplicatione eorum productus, est $4\frac{1}{30}$.

MI-

MINVTIARVM SIVE numerorum fractorum DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quã numeratores.

SINT dua minutiæ AB, CB, eundem habentes denominatorem, & numeratorem C, sit vnitas. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam CB, vt est numerator A, ad numeratorem C. Quoties. n. $\frac{A,6.\ C,1.}{B,12.\ B,11.}$ *vnitas C, continetur in A, toties minutia CB, in minutia AB, includitur; propterea quod minutiæ AB, diuiditur in tot minutias minutiæ CB, æquales, quot vnitates sunt in A, ita vt quælibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorẽ B.* a *Igitur eadẽ pars est vnitas C numeri A, quæ minutia CB minutia AB; ac proinde est, vt vnitas, C, ad A, ita minutia CB, ad minutiam AB: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia AB, ad minutiam CB. quod est propositum.* a 29. de fin.

QVONIAM vero minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neq. enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quod falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibus suis etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT ergo data minutia $\frac{6}{1\,1}$. *&* $\frac{1}{1\,1}$. *particula, verbi gratia, huius numeri integri* 44. *Et quia eius* $\frac{1}{1\,1}$. *est* 4. *&* $\frac{6}{1\,1}$. *sunt* 24. *perspicuum est, ita esse* 4. *ad* 24. *vt est numerator* 1. *ad numerorum* 6. *Vel ita* 24. *ad* 4. *vt* 6. *ad* 1.

HANC porro propositionem demonstrabimus propos. 4. *in vniuersum de quibuscunq. duabus minutijs eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.*

II.

NVMERATOR cuiuslibet minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quæcunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia AB, ad suum integrum.

A, 3. C, 2. D, 5.
B, 5. B, 5. B, 5.

Sumatur vnitas CB, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B. Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia sua integro æquiualet: quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat. Quoniam igitur est vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB: Et vt C, ad D, ita minutia CB, ad minutiam DB; erit ex æque vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia AB, ad minutiam DB, hoc est, ad integrum, quod est propositum.

ALITER. Sit primum datæ minutiæ A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota

A, 1. C, 1. *integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus,*
B, 5. C, 30. *pars, inquam, aliquota à B, denominatæ, propterea quod tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vni-*

tas

2 1. huius.

tas A, numeri B, qua minutia AB, integri C. 2 Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C, quod est propositum. 2 20. def.

DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia DE, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutiæ AB, A, 3. D, 1. C. 1.
B, 5. B. 5. C, 30.
b Et quia est vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam DB: Et vt D, ad B, ita minutia DB, ad integrum C, vt proxime demonstrauimus, erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad integrum C. Quod est propositum. b 1. huius.

I. T. A. Q. V. E. si data minutia $\frac{2}{5}$ sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{2}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT qualibet minutia AB. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam.

c Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia AB, ad suum integrum C, erit permutando, vt A, ad minutiam AB, ita B, ad integrum. Et conuertendo, vt minutia AB, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrum C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cum namque metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoque minutia AB, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties est vnitas A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30. c 2. huius.

in numeratore A,) eadem pars à denominatore B, denominata. quod est propositum.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. sunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu unitatis, numerator continet tres unitates, & denominator quinque.) liquido constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, trium unitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ tres unitates faciunt 90 partem, inquam, à denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque unitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, quæ quinque unitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.

IIII.

DATAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorē habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutijs, quarum altera numeratorem habet unitatem, demonstratur hic de quibuslibet minutijs. Habeāt ergo duæ minutiæ AB, CB, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CB, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem. a *Quia enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB; (Nam* b *cum sit, vt C, ad B, ita minutia CB, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam CB,) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia AB, ad minutiam CB, quod est propositum.*

a 2. huius. $A, 6.$ $B, 7.$ $C, 3.$ $B, 7.$

b 2. huius.

DATAE minutiæ $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{7}$. sint huius integri 28. cuius $\frac{6}{7}$. sunt 24. & $\frac{3}{7}$ sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorē, vt prior numerus productus ad posteriorē.

SINT duæ minutiæ AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CD, vt est F, ad H. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, a erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, b ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H; c erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D, ad C, ita est integrum ad minutiã CD, (Nam d cũ sit, vt C, ad D, ita minutia CD, ad integrum; erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiã CD.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam CD. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia AB, ad minutiã CD. quod est propositum.

F,	10.	G,	12.	a 18. sept
A,	2.	C,	4.	b 2. huius.
B,	3.	D,	5.	
H,	15.			

c 18. sept

d 2. huius.

F,		AB.
H.		Integrum.
G.		CD.

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. sint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius 20: at quatuor quintæ eiusdē, 24. Perspicuū aũt est, ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE si productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia AB, minutiæ CD, æqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem proportionem F, ad G, & minutiæ ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

INTE-

VI.

INTEGRVM ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummã duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT dua minutia AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita eſſe integrum ad ſummam minutiarũ AB, CD, vt eſt H, ad ſummam numerorum F, G. a *Quoniam n. eſt, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad G; erit componendo, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita ſumma numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia CD, ad integrum, ita eſt G, ad H,* (*nam* b *vt minutia CD, ad integrum, ita eſt C, ad D.* c *Et vt C, ad D, ita eſt G, ad H: propterea quod G, D, ipſum B, multiplicantes fecerunt G, & H.*) *Igitur ex æquo erit, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad integrum, ita ſumma numerorum F, G, ad H. Et conuertendo, vt integrum ad ſummã minutiarum AB, CD, ita H, ad ſummam numerorum F, G, quod eſt propoſitum.*

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B, 3. D, 5.
H, 15.

AB, CD. F, G,
CD. G.
Integrum. H.

a 5. huius.
b 2. huius.
c 18. ſep

SINT rurſus dua minutia $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. *particulæ numeri* 30. *cuius* $\frac{2}{3}$ *ſunt* 20. *&* $\frac{4}{5}$. *eiuſdẽ* 24. *ac proinde ſumma minutiarum* 44. *Vbi vides, ita eſſe integrum* 30. *ad hanc ſummam* 44. *vt eſt* 15. *ex denominatoribus productus ad* 12. *ſummam numerorum* 10. 12. *ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.*

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorẽ, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam AC, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E, [a] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt autẽ D, ad E,* [b] *ita est minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B, quod est propositum.*

D. 105.		E. 35.
A. 5.	✕	A. 5.
B. 7.		C. 21.

a 17. sept. b 5. huius.

DVAE minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{2}$ *sint particulæ numeri integri 42. cuius* $\frac{1}{7}$ *sunt 30. &* $\frac{1}{2}$. *eiusdem 10. Manifestum autem est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.*

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT

SINT dua minutia AB, CD, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [a] *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutia AB, CD. quod est propositum.*

$A, 3. \quad C, 9.$
$B, 4. \quad D, 12.$

a 2. huius.

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico esse vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. [b] *Est autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.*

b 2. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico maiorem esse minutiam AB, quam CD. [c] *Cum enim sit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum, & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum, ponatur autem maior proportio A, ad B, quam C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AC, ad integrum, quam minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quam minutia CD, quod est propositum.*

c 2. huius.

$A, 3. \quad C, 2.$
$B, 4. \quad D, 3.$

VERVM sit iam minutia AB, maior, quam minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quam C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrum, quam minutiæ CD, minoris ad idem integrum. [d] *Cum ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D. quod est propositum.*

d 2. huius.

MINVTIARVM $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$ *integer numerus sit 24. cuius tam* $\frac{3}{4}$ *quam* $\frac{9}{12}$ *sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ* $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. *At* $\frac{2}{3}$ *eiusdem numeri 24 sunt 16. vbi manifestum est, numerum 18. maiorem esse numero 16. ideoque minutiam* $\frac{3}{4}$ *maiorem esse minutia* $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eãdem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales; Et minutiarũ æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator, maiorem proportionem habet, illa maior est: Et maioris numerator maiorẽ habet proportionem, quam denominator.

SINT dua minutia A B, CD, sitque eadem proportio A, ad C, qua B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D. a ac proinde minutia æquales erunt. quod est propositum. A, 6. / B, 9. — C, 2. / D, 3. — a 28 huius.

SED sint iam minutia æquales AB, & CD. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. b Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutãdo, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propositum. — b 8. huius.

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Dico minutiam A B, maiorẽ esse minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quam C, ad D, c ac propterea maior erit minutia AB, quam CD. quod est propositum. A, 6. / B, 9. — C, 3. / D, 5. — c 8. huius.

VERVM sit iam minutia AB, maior quam CD. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quam B, ad D. d Erit enim maior proportio A, ad B, quam C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quam B, ad D. quod est propositum. — d 8. huius.

SINT dua minutia $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$. partes integri numeri 90. vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc est, 60. æqualem esse minutiæ $\frac{2}{3}$. id est, numero 60. At vero, minutiam eandem $\frac{6}{9}$.

id est,

id est, 60. maiorem esse minutia $\frac{1}{5}$. hoc est, numero 54.

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

DVAE minutiæ AB, CD, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarum numeratores E, F & denominator idem G, esse æquales minutijs AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G, erit vt A, ad B, ita E, ad G. b Quare minutiæ AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, c erit vt C, ad D, ita F, ad G. d Igitur minutiæ CD, FG, æquales erunt. quod est propositum.

E, 10. F, 9. A, 2. C, 3. B, 3. D, 5. G, 15.

b 18. sep. c 8. hu-ius. d 18. sep. e 9 hu-ius.

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiã reducere.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiã cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiam BC, vnitati A, æqualem esse. e Quia enim est, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id est, vnitati, erit æqualis. quod est propositum.

B, 6. C, 6. A, 1.

e 2. hu-ius.

DEINDE sit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator. Dico minutiam BC, integro A, æqualem esse. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia AD, tot vnitati-

bus

bus æqualis, quoties unitas est in A. A, 7. B, 42.
Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex D, 1. C, 6.
defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt
A, ad D, unitatem. Cum ergo minutiarum AD, BC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandem proportionem habeant, a ipsa inter se æquales erunt. Quare cum minutia AD, sit integra A, æqualis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoque minutia BC, eidem integræ A, æqualis. quod est propositum. a 8. huius.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Duplètur numerator A; vt fiat numerator C,
manente eodem denominatore A, 3. C, 6. A, 3.
B: vel denominator B, quando B, 8. B. 8. D, 4.
par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam CB, AD, duplam esse minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, CB, eundem habeant denominatorem; b erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum. b 4. huius.

RVRSVS quia minutia AB, AD, eundem habent numeratorem; c erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum. c 7. huius.

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator
C, manente eodem numeratore A, 6. A, 6. D, 3.
A; Vel numerator A, quãdo par B, 11. C, 22. B, 11.
est, dimidietur, vt fiat numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtramque minutiam AC, DB, dimidium esse minutiæ AB. Cum enim minutiæ AB, AC, eundem habeant numeratorem; d erit vt B, d 7. huius.

ad C, denominator ad denominatorem, ita AC, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia AC, minutiæ AB, dimidium. quod est propositum.

a 4. huius.

RVRSVS cum minutiæ AB, DB, habeant eundem denominatorem; a erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita DB, ad AB, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia DB, minutiæ AB, dimidium. quod est propositum.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutia sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim AB, minutia minutia CD, respectu integri numeri E, sive unitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datum minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ FG, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B.

b 2. huius. *b Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum, nimirum ad minutiam CD, cuius integrum est E:*

c 18. sep. *c Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quod A, B, ipsum C, multiplican-*

tiplicantes faciãt F, H: Erit quoque, ut minutia AB, ad minutiam CD, ita F, ad H. Rursus a quia est, ut C, ad D, ita minutia CD, ad suum integrũ E: b Item ut C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C, D, multiplicãs fecerit H, G: Erit quoque ut CD, minutia ad suum integrum E, ita H, ad G. Quoniam igitur est, ut minutia AB, ad minutiã CD, ita F, ad H: Et ut minutia CD, ad E, integrum, ita H, ad G; erit ex aquo, ut AB, minutia minutiæ CD, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem AB, minutia minutiæ CD, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quod simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ AB, minutiæ CD; cum eius valorem respectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, ut F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E. c Cum ergo quoque sit, ut F, ad G, ita minutia FG, ad idem suum integrum E; æquales erũt minutia simplices K, & FG: ac proinde cum minutia K, æqualis sit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque simplex minutia FG, æqualis datæ minutiæ AB, respectu minutiæ CD, cuius integrum E, quod est propositum.

F, 6. H, 9.
A, 2. C, 3. E, 12.
B, 3. D, 4. E, 24.
G, 12. K, $\frac{1}{2}$.

a 2. huius.
b 17. sept.
c 2. huius.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{2}{3}$. sunt 18. & huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 12. qui numerus est $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2. 3. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquivalet, qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiã minutiarũ ad simplicem minutiã reducere.

SIT primum AB, minutia minutiæ CD. Ex A, in C, fiat F; & ex B, in D, fiat F. d Et quoniam minutia EF, exprimit valorem minutiæ AB, respectu minutiæ CD; reducta erit

d 13. huius.

E, 6. data minutia minutia ad simplicem minutiam EF: quod est propositum.

A, 2. C, 3. DEINDE sit AB, minutia minutiarum CD, EF; ita vt CD, sit minutia
B, 3. D, 4. minutia EF, & AB, minutia minutiæ CD. Fiat G, ex A, in G, & H, ex
F, 12. B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atque ita deinceps, si plures sint minutiæ, nu-
A, 2. C, 3. E, 1. meri vltimo loco producti I, K, in
B, 3. D, 4. F, 2. numeros sequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam IK, cuius nu-
G, 6. H, 12. K, 24, merator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem esse. a Nam minutia GH, æqualis est minutiæ AB, minutiæ CD, respectu minutiæ EF, tanquam integri cuiusdam. b Item minutiæ IK, æqualis est minutia GH, (hoc est, minutiæ AB, minutiæ CD.) minutiæ EF, respectu integri, cuius EF, est minutia, & sic deinceps, si plures sint minutiæ. Quare minutia IK, ex numeris vltimo loco productis constituta, æqualis est datæ minutiæ minutiarum. quod est propositum.

SIT $\frac{2}{3}$ minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. est numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. sūt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. sunt 6. qui numerus est $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem constat, si tam numeratores 2, 3. 1. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis est minutiæ $\frac{3}{4}$. qualis minutiarum pars erat numerus 6. respectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore al-

terius

terius huius minutiæ datę in denominatorem illius reductæ, productos.

SINT duæ minutiæ AB, CD, quarum AB, ad aliam æqualem reducenda sit cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum: denominatorem vero denominator D, metiatur per numerũ ex C. in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H, Itẽ ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam GH, minutiæ AB, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productũ; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicans AB, facit G, H, a *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* b *ac proinde minutiæ AB, GH, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F,* c *metietur C, ipsum F, per D:* d *Metietur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadẽ ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata: propterea quod G, sit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, suntque numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* e *constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G, cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus partes C, F, denominãtur, & ex quorũ multiplicatione factus est numerus K,) cõstituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiæ simplicẽ eiusdẽ integri G, cuius numerator est vnitas, & denominator numerus*

G, 24. K, 8.

A, 2. F, 12. C, 3

B, 3. D, 4

H, 36. L, 9.

C, 1/4. F, 2/2. M, 1/8

a 17. *sept*
b 8. *hu ius.*
c 7. *pri*
d 5. *pri*
e 13. *h ius.*

K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ CD, qui cõstituit C, minutiã minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominatæ. Quo circa numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties unitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.

XVI.

DVAE minutiæ, quarũ numeratores in dènominatores viciſſim ducti gignũt numeros æquales, æquales sũt: Et minutiarum æqualium numeratores in denominatores viciſſim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est. Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ AB, CD: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: ſintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias AB, CD, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis est numero F, facto ex C, ſecundo in B, tertiũ, [a] *erit vt A, primus ad C, ſecũdum, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorẽ.* [b] *Quare minutiæ AB, CD, æquales ſunt. VEL ſic.* [c] *Quoniã eſt vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Eſt autem E, ipſi F, æqualis; erit quoque minutia AB, minutiæ CD, æqualis. quod eſt propoſitum.*

E, 24. F, 24.
A, 2. ✕ C, 8.
B, 3. D, 12.

a 19. ſep.

b 9. huius

c 5. huius.

SED ſint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerũ E, æqualem quoque eſſe numero F. Nam ob æqualitatẽ mi-

nutiarum

nutiarum 2 erit, vt A, ad G, numerator ad numeratorẽ, ita B, ad D, denominator ad denominatorẽ. b Quapropter idẽ numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic. c Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F; ponuntur autẽ minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales, quod est propositum.

2 9. huius.
b 19. sep.
c 5. huius.

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque AB, maiorem esse minutia CD. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quam F; gignetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertiũ, d erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum. Est autẽ maior proportio A, ad C, quam G, ad C; quod A, maior sit quã G, Igitur maior quoq; erit proportio A, ad C, quam B, ad D; ac proinde minutia AB, maior erit, quam minutia CD. VEL sic. f Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia AB, maior quam minutia CD. Quod est propositum.

E, 24. F, 21.
G. $1\frac{1}{4}$ A, 2 — C, 7
B, 3 — D, 12.

d 19. sep
e 9. hu.
f 5. hu.

VERVM sit iam minutia AB, maior quam minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia AB, quam minutia CD, g erit maior proportio A, ad C, quam B, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandem proportionẽ, quam B, ad D, qui sit G. h Idẽ ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartũ, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quam ex G, in D; propterea quod A, maior est quã G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quam F, ex C, in B, genitus. VEL sic. i Quoniã est, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita E, ad F: Est autẽ AB, minutia maior quam minutia CD, erit quoque E, maior quam F, quod est propositũ.

g 9. hu.
h 19. sep
i 5. hu.

ATQVE hæc est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendũ, vtrarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiã ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos termi nos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutia AB, sit æqualis. [a] *Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; sunt que C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione:* [b] *sunt autem & minimi, cum primi inter se sint. quod est absurdum.*

8. hu. ti.
23. sep

A, 11. C, —
B, 12. D, —

SI vero A, B, non sint inter se primi; [c] *sit eorum maxima mensura C, qua metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualē esse datæ minutiæ AB, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E;* [d] *producentur A, B, ex C, in D, E:* [e] *Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E,* [f] *ac propterea minutiæ AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erunt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.*

2. sep.

A, 36. D, 3.
B, 48. E, 4.
C, 12.

9. pro. 17. sep 8. hu.

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam, cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datus,

A, 3. E, 9.
B, 4. C, 12.
D, 36.

æqualem esse minutiæ AB, data. Quia enim B, metitur D per E, a *fiet D, ex B, in E. Factus est autem idem D, ex A, in C.* b *Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum;* c *ideoque minutia A B, E C, æquales erunt. quod est propositum.*

a 9. pro.
b 19. sept.
c 8. huius.

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia AB, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutia AB, EC, æquales sunt; d *erit vt A, ad B, ita E, ad C.* e *Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartũ, qui ex B, secundo in E, tertium; videlicet numerus D, factus ex A, in C.* f *Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim E, ipsum D, non metiri.*

A, 3. E, 1.
B, 4. C, 10.
D, 30.

d 8. huius.
e 19. sept.
f 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. g *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem; ita minutia AB, ad integrum, hoc est, ad unitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.*

A, 6. B, 11.
A, 6.
B, 11.

g 8. huius.

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum minorem, aliquid supersit; Quotienti integrò inuento addendam adhuc esse minutiam cuius numerator sit numerus ex diuisione reliquus; denominator vero, numerus

diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui necessario minor est numero diuidente, diuidendus adhuc est per eundem numerum diuidentem, qui maior est. Verbi gratia. Diuiso numero 23. per 4. Quotiens integer est 5. & supersunt 3. adhuc diuidenda per 4. a Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens sit $5\frac{3}{4}$.

a 19. huius.

X X.

MINVTIAS plures in vnam summam colligere.

SINT primum addenda dua minutia AB, CB, eiusdē denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat summa D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, esse summam ex additione minutiarum AB, CB, collectam. Quoniam enim minutia eundem habent denominatorem; b *erit vt A, ad C, ita minutia AB, ad minutiam CB: Et componendo, vt A, C, simul ad C, ita minutia AB, CB, simul ad minutiam CB* c *Vt autem C, ad D, ita quoque est minutia CB, ad minutiam DB. Igitur ex æquo erit, vt A, C, simul ad D, ita minutia AB, CB, simul ad minutiam DB. Cum ergo A, & C, simul æquales sint ipsi D, ex constructione; erunt quoque minutia AB, CB, simul æquales minutiæ DB. quod est propositum.*

b 4. huius.

c 4. huius.

A, 3	C, 4	D, 7.
B, 10.	B, 10.	B, 10.

DEINDE sint addenda dua minutia AB, CD, diuersarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem posterioris; & C, numerator posterioris in B, denominatorem prioris, collectaque sit summa E, ex duobus illis productis, cui supponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam EF, esse summā ex datis duabus minutijs AB, CD, collectam. d *Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum AB, CD, ita F, ex denominatoribus productus ad E,*

A, 2	C, 3	E, 17.
B, 3	D, 4	F, 12.

d 6. huius.

sum-

summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis: erit conuertendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita E, ad F: Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia EF, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita minutia EF, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum AB, CD, aequalis erit minutiæ EF, ac proinde minutia EF, summa erit ex minutijs AB, CD, collecta, quod est propositum. 2 2. huius.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs AB, CD, aequales, vt ex demonstratione propos. 10. constat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia EF, summa minutiarum AB, CD, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas AB, CD, reducta sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

IAM vero datis pluribus minutijs, addenda primum erunt duæ primæ: deinde hac summa cum tertia coniungenda, atque hac summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60 & insuper 25. vnitates, quæ faciunt $\frac{5}{1}\frac{5}{2}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{1}{1}\frac{7}{2}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{1}\frac{5}{2}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}\frac{4}{9}$. est $\frac{2}{2}\frac{1}{7}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$ ipsius 12 at $\frac{4}{9}$ eiusdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$ ipsius integri 36.

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX

EX *maiore minutia AB detrahenda sit minor C B, sinique primum hæ minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore C, minoris minutiæ ex A, numeratore maioris, reliquus sit numerus D, cui idem denominator B, supponatur. Dico minutiam DB, reliquam esse posse detractionem minutiæ CB, ex minutia AB. Quia enim C, ex A, subtractus relinquit D, compone tur A, ex C, & D, Minutia ergo AB, cuius numerator A, ex numeratoribus C, D, collectus est, summa est duarum minutiarum C B, D B; vt in prima parte antecedentis propos. ostensum est. Quare detracta minutia CB, ex minutia AB, reliqua fiet minutia DB. quod est propositum.*

A, 7. C, 3. D, 4.
B, 10. B, 10. B, 10.

DEINDE minutiæ AB, CD, habeant diuersos denominatores, detrahendaque sit minor C D, ex maiore A B. Ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris fiat E, & ex A, numeratore maioris in D, denominatorem minoris fiat F: atque E, ablatus ex F, relinquat G, cui supponatur denominator ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam GH, esse reliquæ posse detractionē minutiæ CD, ex minutia AB. Quoniã. n. D, multiplicãs A, B, facit F, H, a erit vt A, ad B, ita F, ad H: b vt autē A, ad B, ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque vt F, ad H, ita minutia AB, ad integrum. Rursus quia B, multiplicans C, D, facit E, H, c erit vt C, ad D, ita E, ad H: d Vt autem C, ad D, ita est minutia CD, ad integrum. Igitur erit quoque vt E, ad H ita minutia CD, ad integrum. Quia igitur est vt E, primus ad H, secundum, ita minutia CD, tertius numerus ad integrum, quartum numerum: e Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia G H, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundum, ita minutiæ CD, GH, tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul, ad H, ita est F, ipsis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus

E, 15. F, 35.
A, 3. C, 2. G, 7.
B, 4. D, 5. H, 20.

a 17. sep. b 2. huius. c 17. sep. d 2. huius. e 2. huius

reliquit

reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutia CD, GH, simul ad integrum. Cum ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam AB, ad integrum; erit quoque vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, GH, simul ad idem integrum: ac propterea æquales erunt minutia AB, & minutia CD, GH, simul. Detracta igitur minutia CD, ex minutia AB, reliqua erit minutia GH. quod est propositum.

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorii in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duæ minutiæ eiusdem denominationis minutijs datis æquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus; fiet minutia GH, reliqua post detractionem minutiæ CD, ex minutia AB, veluti initio huius propos. ostensum est.

IAM vero si dentur integra vna cum minutijs, subtrahenda erũt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quod si minutia detrahẽda, maior sit quam ea, à qua fieri debet subtractio, a reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærentis. Vt si subtrahenda sint $6\frac{2}{5}$. ex $12\frac{1}{4}$ subtractis 6. ex 12. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{1}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cum $\frac{3}{4}$ fuerit $\frac{7}{4}$. remanebũt 19. integra. Subtracta ergo integra numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{2}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{2}{28}$. a 11. huius.

SINT. verbi gratia $\frac{3}{40}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, $\frac{16}{40}$. detrahantur ex $\frac{3}{40}$. hoc est, ex 10. supersunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt superior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiã multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam CD, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum AC, inter se fiat E, cui supponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum AB, CD, inter se. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F, a Eritque

H,60. G,40. A,2. C,4. B,3. D,5. E,8. F,15.

a 5. huius. *vt minutia EF, ad minutiam CD, ita G, ad H. Quia vero C, multiplicans A, F, facit E, H;* b *erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rursus quia D,*

b 17. sep. *multiplicans E, & B, facit G, & F;* c *erit vt E,*

c 17. sep. *ad B, ita G, ad F. Ex aqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita ostendimus esse minutiam EF, ad minutiam CD:* d *Et vt A, ad B,*

d 2. huius *ita est minutia AB, ad integrum, hoc est, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia EF, ad minutiam CD, ita minutia AB, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia EF, producitur ex multiplicatione minutiæ AB, in minutiam CD. quod est propositum.*

QVOD si minutia per numerum integrum sit multiplicanda, supponëda erit integro numero vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, satis esse, si tunc numerator propositæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero supponatur eiusdem minutiæ propositæ denominator; propterea quod vnitas integro numero suppositæ in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt si multiplicari debeat minutia $\frac{1}{4}$ per 5. fient $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{1}$. vt hic apparet, $\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{1 \cdot 5}{4}$.

e 11. huius. *SI vero integris minutia adhæreant, ea reuocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cũ minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærẽtis vnus numerator cõflitui. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$ per $4\frac{1}{2}$ fient ha duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{2 \cdot 3}{3} \cdot \frac{9}{2}$.*

IAM

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, non erit minutia producta cum integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac subtractione factum est, sed cũ quadrato numeri integri assumpti: quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano toties numeri integri, hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}.\frac{4}{5}$. minutia huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{1\,5}$. Necesse est ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiusdem faciant numerum, qui constituat $\frac{8}{1\,5}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{1\,5}$. numeri 3600. hoc est quadrati ipsius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia AB, per minutiam CD, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F, ita vt diuiso A, per C, Quotiens sit E, & diuiso B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam EF, esse Quotientem diuisionis minutiæ AB, per minutiam CD. Quoniam enim C, metitur A, per E, & D, metitur B, per F; a gignetur A, ex C, in E, & B, ex D, in F. b Igitur minutia AB, producta est ex multiplicatione minutiæ EF, per minutiam CD; ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita minutia EF, ad 1. Quotirca cum sit, vt AB, minutia diuisa ad CD, minutiam diuidentem, ita minutia EF, ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia EF, Quotiens diuisionis minutiæ AB, per minutiam CD. quod est propositum.

A, 12.	C, 5.	E, 4.
B, 10.	D, 8.	F, 2.
A, 6.	C, 3.	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.
A, 3.	C, 3.	E, 1.
B, 8.	D, 4.	F, 2.

a 29. primi
b 22. huius.

DEINDE numeri C, D, minutia CD, non metiantur numeros A, B, minutia AB. c Reducatur minutia AB,

c 15. huius.

ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quod quidē fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H, erit minutia GH, Quotiens diuisionis minutiæ EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propos. demonstratum est. quod est propositum.

E, 24. A, 2. K, 12. C, 3. G, 8.
F, 36. B, 3. D, 4. H, 9.

E, 90. A, 6. K, 15. C, 3. G, 30.
F, 135. B, 9. D, 5. H, 27.

QVIA vero G, H, numeri minutiæ Quotietis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiuslibet minutiæ per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis, & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H, denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum est in omnibus minutijs, siue numeri minutiæ diuidētis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreātur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda secundum doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos. demōstratione liquet, atque in hoc apposito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeri A, B, metiuntur per G, H, & numeros E, F, procreatos ex A, B, in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiūtur per L, M: atque adeo tam minutia GH, quā LM, Quotiens est minutia AB, per minutiam CD, diuisa.

E, 48. A, 8. K, 6. C, 2. G, 4. L, 24.
F, 54. B, 9. D, 3. H, 3. M, 18.

IAM vero si numerus integer diuidendus sit per minu-

tium

tiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, suppo nenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator. 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{1}{1}\frac{6}{1}$. vt in appositio priori exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiēs $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. vt in posteriori exemplo apparet.

8	1	16
1.	2.	1.
1	8	1
2.	1.	16.

QVOD si minutia adhaereant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhaerente, veluti ad finem antecedentis proposi. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis gigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{2}{8}\frac{1}{1}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, qua præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

3	7	21
4.	2.	8.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuū autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{1}{8}$, id est, minutiam $\frac{2}{8}\frac{1}{1}$. quæ proxime inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inferenda, sitque primum sensus, addĕdam esse minutiam AB, unius particulæ minutiæ CD, ad minutiam CD: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$. unius septimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & composito numero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam GH, æqualem esse minutiæ AB, respectu unius particulæ minutiæ CD, additæ ad minutiam CD. Quoniam enim AB, minutia unius particulæ minutiæ C D, a reducitur ad simplicem minutiam AH, cuius numerator idem est, qui A, productus nimirum ex unitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appositio hoc exemplo apparet. Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorĕ prioris productum: (Cum enim B, in C, D, faciat F, H; b erit vt C, ad D, ita F, ad H; c ac propterea minutiæ CD, FH, æquales erunt.) efficitur, minutiam GH, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum FH, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum FH, AH; efficitur, inquam, minutiam GH, summam esse minutiarum FH, A H, vt initio propos. 20. ostensum est; hoc est, summam ex minutia AB, respectu unius particu-

F, 24.

A, 3	*C*, 6	*G*, 27.
B, 4.	*D*, 7.	*H*, 28.

A, 3	1	*A*, 3
B, 4.	*D*, 7.	*H*, 28.

14. hu us.

17. sep 8. hu us.

la minutia CD, qua minutia AH, ostensa est aequalis, & ex minutia CD, quae ostensa est aequalis minutiae FH, collectam. Minutia igitur GH, procreatur ex insitione minutiae AB, in minutiam CD; id est, aequalis est minutia AB, unius particulae minutiae CD, & minutiae CD, simul. quod est propositum.

IAM vero si plures minutiae AB, CD, EF, GH, sint inserendae, hoc est, si minutia AB, unius particulae minutiae CD, unius particulae minutiae EF, unius particulae minutiae GH: & minutia CD, unius particulae minutiae EF, unius particulae minutiae GH: & minutia EF, unius particulae minutiae GH, addi debeant ad minutiam GH, ita agendum erit. Ex G, numeratore postremae minutiae GH, in F, denominatorem penultimae minutiae EF, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdē penultimae minutiae EF, ut fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimae minutiae CD, addatur C, numerator eiusdem minutiae CD, ut fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximae antecedentis minutiae AB, adiiciatur A, numerator eiusdem minutiae AB, ut fiat P. Atq; ita deinceps ducatur semper ultimus numerus conflatus in denominatorē proximae antecedentis minutiae, productoq; numerator eiusdem proximae antecedentis minutiae adiiciatur, donec nulla minutia superst. Numero autē P, qui ultimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, ut fiat L, deinde L, in D, ut fiat N, post hac N, in B, ut fiat Q, &c. Dico minutiam PQ, ex insitione datarum minutiarū produci in eo sensu, quem exposuimus. Nam ut in duabus minutijs ostensum est, minutia KL, producitur ex insitione minutiae EF, in minutiā GH, hoc est, aequalis est summae ex minutia EF, unius particulae minutiae GH, & ex minutia GH, collectae. Deinde minutia CD, unius particulae minutiae EF, unius particulae minutiae

P, 119.	M, 59.	K, 14.		
A, 1.	C, 3.	E, 2	G. 4.	
B, 2.	D, 4.	F 3.	H, 5.	
Q, 120.	N, 60.	L, 15.		

14. hu-
ius.

GH. a facit minutiam simplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in unitatē bis posita hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, E, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, b aqualis est minutia KL; quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrauimus, minutia MN, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, cōflatur, aqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; aqualis quoque erit eadē minutia MN, summæ collectæ ex minutia GH, et ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ GH, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rursus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, d facit minutiam simplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus, e aqualis est minutia MN, f quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur PQ, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, q fit ex B, in M, conflatur, aqualis sit summa collecta ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propos. 20. mōstratum est; aqualis quoque erit eadem minutia PQ, sūmæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia AB,

a 14. huius.
b 8. huius.
c 17. sept.
d 14. huius.
e 8. huius.
f 17. sept.

vnius

unius particulæ minutiæ CD, unius particulæ minutiæ EF, unius particulæ minutiæ GH, quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam AB, totius minutiæ CD, ad minutiam CD. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam GH, produci ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiæ GH, æqualem esse summæ collectæ ex minutia CD, & ex minutia AB, minutiæ CD. Quoniam enim minutia AB, minutiæ CD, a reducitur ad minutiam simplicem EH, cuius numerator est E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, ut exemplum appositum demonstrat: b Minutia quæque FH, æqualis est minutiæ CD; c quod numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia GH, (quæ ex ijs, quæ ad initium propos. 20. ostendimus, æqualis est summæ minutiarum EH, FH,) æqualis summæ collectæ ex minutia CD, (hæc est, ex minutia FH) & ex minutia AB, minutiæ CD, (id est, ex minutia EH,) atque ideo minutia GH, procreatur ex insitione minutiæ AB, in minutiam CD, in hoc posteriori sensu, quod est propositum.

		E, 18.	F, 24.			
	A, 3	C, 6	G, 42			
	B, 4.	D, 7.	H, 28.			
	A, 3	C, 6	E, 18			
	B, 4.	D, 7.	H, 28.			

a 14. huius.

b 8. huius.

c 17. sep.

QVOD si plures sint minutiæ inferendæ AB, CD, EF, GH, hoc est, minutiæ AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH, addendæ sint ad minutiam GH, ita agen-

P, 232.	M, 104.	K, 20.				
A, 1	C, 3	E, 2	G, 4			
B, 2.	D, 4.	F, 3.	H, 35.			
Q, 120.	N, 60.	L, 15.				

dum erit. Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adiiciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adiiciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vsque locum assumptarum productus, donec nulla superſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt; ſupponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam, vt in duabus minutijs demonſtratum eſt, minutia KL, producitur ex inſitione minutiarum E F, GH, id eſt, æqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutiæ C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, a fecit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutiæ quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, b æqualis eſt minutiæ K L, c quod numeratores habent minutiarum ad denominatores hos habent proportionem eandem quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur eſt minutia M N, cuius numerator M, conflatur ex numeris, qui ex numeratoribus C, E, G, gignuntur, & ex numero, quem D in K procreant, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſita oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K

a 14. huius.

b 5. huius.

c 17. ſep.

P, 2304. M, 864. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4. H
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 130. N, 60. L, 15.

gigni-

gignitur, denominator vero est idem N; aequalis erit etiam eadem minutia MN, summa collecta ex minutia GH, & ex minutia EF, minutia GH, & ex minutia CD, minutia EF, minutia GH. Rursus minutia AB, minutia CD, minutia EF, minutia GH, a facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autē Q, ex B, in N, procreatus, sive ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autem est idem Q, ex B, in N, procreatus, b aequalis est minutiae MN; c quod harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N. faciat numeros alterius huius minutiae. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem nnmeratores A, C, E, G, gignant, & ex numero, quem facit B, in M, cum aequalis sit, ex ijs, quae initio propos. 20. demonstrata sunt, summa collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem est Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem est idem Q; aequalis quoque erit summa collecta ex minutia GH, & ex minutia EF, minutia GH, & ex minutia CD, minutia EF, minutia GH, & ex minutia AB, minutia CD, minutia EF, minutia GH, quod est propositum. Eademque de pluribus est ratio.

a 14. huius.

b 8. huius.

c 17 sep.

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS ijs, quae ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus: id quod ad defin. 10. lib. 5. & ad defin. 5. lib. 6. & ad propos. 23. lib. 6. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclidis agit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. in ijs propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam, aut compositam proportionem de magnitudinibus, vel numeris

demonſtrat, non eſſe vero additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatane: Item vt proportio ex pluribus proportionibus compoſita ſit vere totum quippiam, cuius partes ſint proportiones, ex quibus componi dicitur, vt plerunque interpretes Eucl. exiſtimant, ex hoc perſpicue confirmari poteſt: quod pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cũ hac compoſitio intelligenda ſit, ſiue maior quantitas cũ minore, ſiue minor cum maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. oſtendimus, ſi poſitis his tribus terminis continue proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolum duplicata dicere tur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coacernata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis nõ videt partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionẽ 1. ad 10. qua una pars eſt, maiorẽ eſſe proportione 1. ad 100? Hic autẽ 4. 4. 4. partem æqualem eſſe toti? Sic etiã, ſi, poſitis his tribus terminis nõ continue proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. vere coacervaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdem auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior quã totum, quod proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autẽ 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundum, proportioni 10. ad 5 primi termini ad vltimũ. Id quod coguntur omnino concedere, vbi nihil negant, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris vero 3. & 16. Quoniam igitur Euclides ibi demonſtrat, proportionem 24. ad 48. compoſitam eſſe ex proportionibus laterum; hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars cõponens, (ſi hæc compoſitio eſt vera, additio.) nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto proportione videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. vere totũ eſt, & eius partes componentes proportio quadrupla 12. ad 3. et proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi altera harũ ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur

24.	48.
12. 2.	3. 16.

& ma-

& maius ex minore subtrahi potest, nimirum proportio quadrupla 12. ad 3. ex proportione subdupla 24. ad 48. & subtracta proportione suboctupla 2. ad 16. ex proportione subdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quam ea, à qua facta est subtractio. Quod si posterioris numeri plani 48. latera sumantur 12. & 4. erit una partium componentium nimirum proportio 2. ad 4. aequalis toti proportioni videlicet 24. 48. 24. ad 48. Et subtracta proportione 12. 2. 12. 4. 2. ad 4. ex proportione aequali 24. ad 48. superesset adhuc proportio aequalitatis 12. ad 12. qua maior est quam totum, hoc est, quàm proportio 24. ad 48. Rursus sequeretur, totii non augeri, etiamsi ei infinita partes adderentur. Positis enim his quatuor terminis. 12. 4. 2. 1. si proportio 12. ad 1. vere componatur ex proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. volut ex partibus, ita ut hae proportiones simul sumptae proportioni 12. ad 1. sint aequales: si cum illis terminis continuentur adhuc alij tres termini hoc modo. 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadem proportio 12. ad 1. ex sex proportionibus, quarum priores tres sunt eadem illa, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. addita tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totii ex illis conceruatii. Haec autem omnia absurda sunt, & cõtra principia Mathematicorum. Huc accedit, quod secundum communem hominum sensum duae proportiones triplae constituant proportionem sextuplam, non autẽ nonuplam, vt praedicti auctores volunt, quamquã nonupla proportio dicatur tripla duplicata, vt in hisce numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, si agens aliquod sit, vt 3. illud idem duplo potentius factum esse vt 6. non aũt vt 9? Sic etiam communis intelligentia cõprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionẽ octuplam, propterea quod duae mouentia vt 3. & 5. moueant simul sumpta, vt 8. non autem ex illis constitui proportionem 15. ad 1. quamuis haec ex illis per continuationem composita esse dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His addo, multorum agentium vires non posse dimidiari, eo quod inter duos numeros, qui proportionẽ agentis ad patiẽs

expri-

exprimãt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6, nõ posset habere agens duplo minus, quod inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autẽ nõ statim intelligat: agens vt 3. in dupla proportione minus esse, quam agens vt 6?

LIQVET ergo huiusmodi compositionem proportionum non esse additionem, sed proportionũ continuationẽ, quæ per multiplicationem denominatorũ fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonstrauimus, vbi etiam exposuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus composita, propter terminorũ continuationẽ, quemadmodũ & ad defin. 10. lib. 5. explicauimus, cur positis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continue proportionalibus, extremorum proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compositione proportionum dicturi sumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirum additio, subtractio, multiplicatio, ac diuisio fieri debent per proportionum denominatores, vt recte docet Volumnius Rodulphus in disputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum sunt fractiones, siue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cum de nominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer est, supponi possit vnitas, vt ex eo fiat quasi minutia ab vnitate denominata.) quarum qualibet æqualis est fractioni, quam constituunt duo quicunque numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator est, si ex antecedente fiat numerator, & ex consequente denominator: manifesto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorum numerorum non differre, siue per proportionũ denominatores, siue per numeros earundem proportionum quoscunque, positis tamen consequentibus terminis sub antecedentibus, instar minutiarum, instituantur, vt egregie Cardanus præcipit in sua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM enim sint in vnam summam colligenda duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniam denominatores

sunt

sunt 3. & 5. ex quorum additione fit summa 8. concernabitur octupla proportio ex illis. qua

summa etiam colligitur, siue denominatores, supposita prius vnitate cuilibet illorum, instar minutiarum addantur, siue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos data proportiones reperiuntur;

3	×	5	12	×	40
1		1	4		8
		8			256
		1			32

perinde ac si essent fracti numeri, positis terminis consequentibus sub antecedentibus; in vnam summam colligantur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autem 256. ad 32. quarum vtraque octupla est. Sic etiam ex proportione dupla superquadripartiente septimas, & sesquialtera, quarum denominatores sunt 1 2 3 2 *& 2 1, 4 2. & 1 1/2. & 1 1/2. & qua inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quam 342. 84. Sed quando per denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factum est. Nam 2 4/7 reuocauimus ad 1 8/7. & 1 1/2 ad 3/2. Quod in aliis etiam operationibus intelligendum est.*

8	×	3	256	×	120	5	×	57	3	×	342	×	6
1		1	32		4	1		14	21		84		4
			640					72			864		
			128.					28			336.		

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquitertia; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla superquadripartiens septimas; vt hic perspicuum est.

TERTIO si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est per proportionem duplam: Ita proportio sesquialtera per superbipartientem quintas instituenda erit opera-

tio

tio, vt hic vides, producetur que ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

3	2	6	12	10	120	3	8	24	9	16	144
1	1	1	4	5.	20.	2	5.	10	6	10	60

QVARTO & vltimo si proportio sextupla diuidēda proponatur per proportionē triplā: Itē proportio dupla superbipartiens quintas per proportionem sesquialteram: si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

6	1	6	120	4	480	24	2	48	144	6.	864
1	3.	3.	20.		12. 240.	10	3.	30.	60	9.	540

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quod in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorē, quemadmodū in minutijs.

IAM vero multiplicationem proportionū à nobis præscriptam, quā auctores additionem falso nuncupant, cū proportionū compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defi. 5. lib. 6. egit, conuenire, atque adeo cōpositionē illā Euclidis vere esse multiplicationem, non autem additionem, vt dixi mus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales; ducaturque A, antecedens in antecedentem C, & fiat E, ex cōsequente vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, qua ex illa multiplicatione producitur, esse exōpositiā ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D; ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5 lib. 6. Fiat

A,	6.	C,	12.	A,	3	C,	6	
B,	2.	D,	4.	B,	2.	D,	5.	
E,	72.	F,	8.	E,	18.	F,	10.	
G,	24			G,	12.			

enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G, a erit ut A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F. b erit ut C, ad D, ita G, ad F. Componitur autem proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum ha eadem sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cum enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum nõ differat, liquido constat compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

a 18. sep

b 17. sep

EADEM ratione ostendemus, subtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, non esse aliud, quam diuisionem à nobis explicatã, esseque cõpositioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipsi volunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem est, ac si termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, qua ex diuisione proportionis A, ad B, per proportionẽ C, ad D, producitur, vt docuimus, esse eam, qua relinquitur, sublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc est, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad D, & E, ad F, iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiunt G, F, c erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rursus quia ex A, in C, D, fiũt G, E, d erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G, ad F, c composita sit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem est, quæ G, ad F,) composita ex eisdem proportionibus G, ad E, hoc est, C, ad D, & E, ad F; ac proinde subducta proportione C, ad D, ex proportio-

A,	4.	C,	6.		
B,	2.	D,	3.		
E,	8.	F,	12.		
		G,	24.		

c 1 sep

d 17. sep

ne

ne A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum si ex proportione G, ad F, (posito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua est proportio E, ad F. Sed quis non videt, hoc potius esse diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quam proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, subtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in posteriori exemplo accidit? Atque hac de proportionum compositione: qui plura desiderat, legat eruditissimum tractatum hac de re a Volumnio Rodulpho Spoletano conscriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

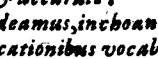
ABSOLVIT *Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantū satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nūc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solidæ, tum planæ, neque perfecte intelligi possunt, neque cum res tulerit, in opus atque usum conferri; propterea quod plerunque latera earum incommēsurabilia sunt:*

Id quod & de planis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrauimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearũ, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore a quouis, qui præcedentium tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Immo contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest, vt existimem, tractationem illum radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicũ atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad vsum possit reuocare, hic vero nullo modo. Hæc enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebra ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studioserum pro adiumento, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusque demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ sola necessaria ibi fuerunt, nemo fere sit, qui

ignoret.

ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante à Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit: declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur cõmensurabiles, definiens eas esse, quas eadem mẽsura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mensura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 10. palmorum & linea 13. palmorum: quia eas linea tam vnius palmi, quam dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commensurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue cõmensurabilia, qua metitur idẽ corpus, seu solidũ.



II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, et latus eiusdẽ; quoniam nullã habent mensurum communẽ, vt propositione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ linea incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicẽtur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, qua nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commen-

ſurabiles ſunt, cum quadrata earum idem ſpatium metitur.

LINEARVM rectarum quadam commenſurabiles ſunt longitudine, quas nimirum alia linea, tanquam menſura communis, metitur; cuiuſmodi ſunt illæ, quas in expoſitione defin. 1. commenſurabiles ſimpliciter diximus; quadam vero longitudine incommenſurabiles, quas ſcilicet nulla linea, tanquam menſura communis, metitur. Rurſus linearū, quæ ſunt incommenſurabiles longitudine, alia ſunt eiuſmodi, vt earum quadrata ſint commenſurabilia; alia vero ita ſe habent, vt & quadrata earum incommenſurabilia ſint. Linea ergo illa longitudine incommenſurabiles, quarū quadrata ſunt commenſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earum potentias, hoc eſt, ſecundum earum quadrata (eſt enim, vt ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiuſque linea quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſæ ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.

QVOD ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſum lineas potentia commenſurabiles, non autem commenſurabiles longitudine, reſpondendum eſt, lineas longitudine commenſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitione cōmenſurabilium magnitudinum, cum huiuſmodi lineas una communis menſura metiatur, vt dictum eſt: At vero quoniam lineas potentia commenſurabiles nulla cōmunis menſura metiri poteſt, ſed tantummodo earum quadrata idem ſpatium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

XIIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cū quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommenſurabiles, quæ

rum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ commensurabiles tam longitudine quam potentia, hanc quasi conuenientiam inter se, & connexionem, vt lineæ longitudine commensurabiles, sint etiam commensurabiles potentia, ita vt nullæ lineæ dari possint commensurabiles longitudine, quin earum quadrata commensurabilia quoque sint, quotiam quadratū ex communi earum mensura descriptum metitur tanquam mensura communis eorum quadrata, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta AB, metitur rectas CD, EF, ita quoque quadratum AG, quadrata CH, EI, metitur: Non autem, vt omnes lineæ potentia commensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur, Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quam potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potētia incommensurabiles; sint etiā incommensurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoque incōmensurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundū earū quadrata, commensurabiles existant. Quæ quidem omnia perspicua erūt ex coroll. propos. 9. huius libri.

V.

HIS positis, ostenditur, cuicunque rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: ālias quidem longitudine, & potentia; ālias vero potentia so-

lum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

Si proponatur aliqua recta linea notæ magnitudinis, erũt omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum. Item quædam illi incõmensurabiles longitudine tantum, quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quamquam eius verba hoc sonare videantur) hæc ita se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdam dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa proposita, ratione cuius alia commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniam ea ponitur semper certa, & nota, alia vero cum illa comparata non semper nota sunt, quamuis singula seorsum sumpta existant certa quoque, ac nota; cum qualibet in quotcunque partes æquales possit diuidi.

V I.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocũque, appellari quoque Rationales, non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali; (est enim

tam

tam numerus 20. quam 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato. vt 16. 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.

VII.

HVIC vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt vtroque modo, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine & potentia, sed longitudine tantum Rationali linea proposita incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod à proposita recta fit, dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius alia superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabilia quidem, Rationalia.

OMNES plana superficies quadrato Rationalis linea

proposita commensurabiles, Rationales dicuntur; non quidē ex positione, vt illud, sed quia cum eo collata reperiuntur ei vel commensurabiles, vel incommensurabiles: quemadmodum etiam linea, quæ Rationali lineæ quomodocunque cōmensurabiles sunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipsa spatia commensurabilia quadrato Rationalis lineæ propositæ, sunt saltem potentia commensurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perspicuum est, ipsas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommensurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter superficies plana quadrato à Rationali lineæ descripto incommensurabiles, Irrationales vocantur, ac lineæ, quæ Rationali propositæ prorsus incommensurabiles sunt, Irrationales sunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipsa possunt, Irrationales: si quidem ea quadrata sint, ipsa latera; si vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ spatijs incommensurabilibus æqualia quadrata describunt.

VOCAT lineas, quæ possunt spatia quadrato Rationalis lineæ incommensurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipsa spatia dixit Irrationalia: ita vt si incommensurabilia spatia fuerint quidem quadrata, latera ipsorum dicantur Irrationalia; si vero non fuerint quadrata, sed alia quæcunque figura rectilinea, appellentur rectæ, quæ describunt quadrata æqualia illis spatijs incommensurabilibus, Irrationales.

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus,

lineas,

lineas, quæ possunt spatia incommensurabilia eidem quadrato Rationalis linea, appellari debere Rationales. Nã lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoque incommẽ surabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstrabiturque in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRAETEREVNDVM quoque nõ est, Euclidẽ & veteres Geometras has voces: longitudine & potentia, atque potẽtia tantum: *apponere fere semper vocibus istis:* commensurabiles ac commensurabiles: *Vix autem, & rarissime his:* Rationales, & Irrationales: *Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tãtum; Item incommensurabiles longitudine & potẽtia, vel longitudine tantum: Minus vero recte Rationales longitudine & potentia, vel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniã Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, vt varie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commẽsurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque sint locuti.*

CAETERVM his definitionibus adiungemus postulatum vnum, & nonnulla pronuntiata, quorum vsus in hoc libro repetitur.

POSTVLATVM, SIVE Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri, perspicuum est, minorem toties posse

multiplicari, donec superet maiorem. Constat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri eiusdem generis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in vltimis tribus prouunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum huc possint transferri, mutata solum voce, numeri, in vocem, magnitudinis.

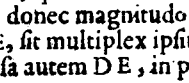
CAETERVM quia hoc in libro discedendum nobis fuit a numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, vt ad propos. 13. diximus, quemadmodum & in am-

nibus seriem Campani negleximus, vt docuimus ad initiũ primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine è regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinē Theonis, inferior autem Campani seriem demonstraret. Quod si vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelligas, quod ad numerum propositionum attinet.

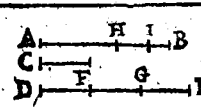
THEOR. 1. PROPOS. 1.

DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquũ est, rursus detrahatur maius quàm dimidiũ; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

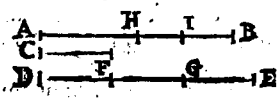
PROPOSITAE sint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarum AB, sit maior. Dico si ex AB, auferatur maius quam dimidiũ; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tandem magnitudinem quandam, quæ minor sit quàm C. Multiplicetur enim C, toties, donec magnitudo facta DE, maior sit quam AB, ita vt DE, sit multiplex ipsius C, proxime maior quam AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quam dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidium HI; atque hoc semper fiat, donec partes ipsius AB, multitudine æquales sint partibus ipsius DE. Sint ergo iam partes AH, HI, IB, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior est quam AB; At ex DE, ablatum est DF, minus quam dimidium, vel certe dimidium, si DE, ipsius C, sit duplex; ex AB, vero maius quam dimidium AH: Erit reliquum FE, reliquo HB, maius. (Cũ



enim



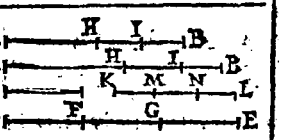
enim DE, maior sit quam AB; si ex DE, dimidiũ auferretur, necnon & ex AB, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex AB. Si ergo ex DE, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex AB, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rursus quoniam FE, maior est quàm FB, auferturque ex FE, dimidium FG, vel certe minus quam dimidium, si FE, maior sit quam duplex ipsius C; at ex HB, maius quam dimidium HI; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo IB: atque ita procedendo ostendemus tandem postremam partẽ ipsius DE, qualis hic est GE, maiorem esse postrema parte ipsius AB, qualis hic est IB. Cum ergo GE, postrema pars ipsius DE, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, maior quam IB, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est IB, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex AB, auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo HB, nec non & reliquum GE, maius reliquo IB; cũ ex maiori DE, ablatum sit DF, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori AB, dimidium AH, &c.

ALITER. Facta constructione, vt prius, sumatur KL, ita multiplex ipsius IB, vt est multiplex DE, ipsius C. Diuisa ergo KL, in partes KM, MN, NL, ipsi IB, æquales, erunt tot partes in KL; quot in DE. Quoniam vero AH, maior est quam HB. vel certe illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quam IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc est, quam KM. Rursus quia HI, maior est quam IB; vel certe illi æqualis; est autem IB. ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quam MN, vel illi æqualis; atq; adeo tota AI, maior, quam tota KN.

Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota KL: Est autē DE, maior adhuc, quam AB: Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cū sit vt DE, ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quam multiplex est DE; ipsius C,) erit quoque C, maior quam IB. Ac proinde relicta est IB, minor quam C. Quod erat demonstrandum.



a 14. 5n.

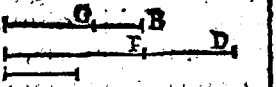
SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16 lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

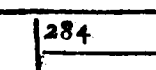
THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarum minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB; & sic deinceps, alterna quadam detractione auferatur semper minor de maiore, & nunquā reliqua metiatur præcedentē. Dico magnitudines AB, CD, incōmensurabiles esse. Si n. non sunt incommensurabiles, metietur eas aliqua mensura cōis. Metiatur eas, si fieri pōt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipsi



AB,



AB, vel minor. Detracta aũt AB, ex CD, quoties potest, relinquat FD, se minorem, ita vt AB, ipsam CF, metiatur. Rursus detracta FD, ex AB, relinquat se minorẽ GB, ita vt FD, metiatur ipsam AG; atq; hoc semper fiat. a Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, se minorem, erit CF, ablata maior, quã dimidia ipsius CD; alias si esset dimidia, vel minor quam dimidia, posset adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipsius AB: Et sic deinceps semper fiet. Quare cum semper auferatur maius, quam dimidium, b relinquetur tandem magnitudo quædam minor quam E.) Sit ergo iam relicta GB. minor quam E. Quoniam igitur E, metitur AB, & AB, metitur CF; c metietur quoque E, ipsam CF: Metitur autẽ E, & totam CD. d Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG; e quare & E, ipsã AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB: f ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Nõ ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommensurabiles sunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. dec.

b 1. dec.

c 2. pron.
d 3. pron
e 2. pron.
f 3. pron.

SCHOLIVM.

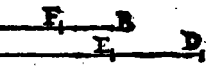
HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommẽsurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturque minor AB, ex CD, & reliqua sit ED, Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & sic deinceps: Dico in hac alterna detractione nunquã reli-

quam

quam metiri precedentem. Si enim fieri potest, metiatur FB, precedentem ED. Quoniã igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [a] *metietur quoque FB, ipsam AF; Metitur autẽ & seipsam.* [b] *Igitur FB, & totã AB, metietur: Metitur autem AB, ipsam CE.* [c] *Igitur & FB, ipsam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipsam ED;* [d] *Igitur & FB, totam CD, metietur. Ostensa est autem & FB, ipsam AB, metiri. Quare FB, vtramq; AB, ED, metitur, quod est absurdum, ponuntur enim AB, CD, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua precedentẽ magnitudinem metitur. Quod est propositum.*



a 2. pron
b 1 pron.
c 2. pron
d 1. pron

SIMILITER & hoc demonstrabimus.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua precedentẽ.

NAM si nunquam reliqua metietur precedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, vt demonstrauit hoc theoremate Euclides, Quod est absurdum. ponũtur enim commensurabiles.

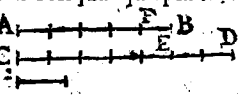
ITAQVE facile ex his dignoscemus, an dua quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nam detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quapiam metiatur precedentem; erunt magnitudines propositæ commensurabiles, cũ illa eadẽ reliqua metiatur vtramque magnitudinem propositã, vt cõstat ex demõstratione primi theorematis huius scholii. Ex eo enim quod reliqua magnitudo FB, metiri dicebatur precedentem ED, ostensum est, eandem reliquam FB, metiri vtramque magnitudinem AB, CD. Si vero nunquam reliqua magnitudo precedentem metiatur, propositæ magnitudines incommensurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonstrauit.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

DATAE duæ magnitudines commensurabiles sint AB, CD. quarum oporteat maximam mensuram inuenire. Quoniam AB, CD, commensurabiles sunt, fit vt si minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties potest, relinquat ED; & ED, detracta ex AB, quoties potest, relinquat FB, & hoc semper fiat alterna quadam detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis scholij. Metiatur iam FB, reliqua præcedentem ED. Dico FB, esse maximam mensuram communem magnitudinum AB, CD. Quod enim vtramque metiatur, ita ostendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, meritur AF; a metietur quoque FB, ipsam AF: At metitur FB, & sejpsam. b Igitur FB, totam AB, metietur; c atque adeo & ipsam CE, quam AB, metitur. Cũ ergo & ipsam ED, metiatur; d metietur quoque FB; totam CD, metitur ergo FB, vtramque AB, CD. Quare vtriusque AB, CD, communis mensura est FB.

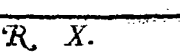


QVOD autem FB; sit maxima earum communis mensura, ita probabimus. Si non est maxima, erit aliqua alia communis earum mensura, maior quam FB. Sit ergo, si fieri potest, G, illarum communis mensura. maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem & AB, ipsam CE, e metietur quoq. G, ipsam CE: At metitur quoque totam CD, f Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED, ipsam AF. g Ergo & G, ipsam AF, metietur. Quare cum G, totam etiã AB, metiatur; metietur quoque eadem G, reliquam FB, maior minorẽ. h Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo, quam FB, communis mensura est ipsarum AB, CD, Quare FB, maxima earum communis mensura est.

a 2. pron
b 1. pron
c 2. pron
d 1. pron
e 2. pron
f 3. pron
g 2. pron
h 3. pron

QVOD

QVOD si minor magnitudo AB, metiatur maiorem CD, ita vt detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipsa AB, ambarum maxima mensura communis: cum & se ipsam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commensurabilibus datis: &c. Quod faciendum erat.



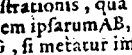
COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.

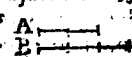
ELICITVR hoc ex ea parte demonstrationis, qua ostensum est FB, esse maximam mensuram communem ipsarum AB, CD. Demonstratum enim est ibi magnitudinem G, si metatur i magnitudines AB, CD, metiri quoque maximam mensuram FB. Eademque est ratio decæteris.

SCHOLIVM.

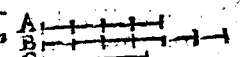
EX his, quæ dicta sunt, non erit difficile considerare, an quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles, necne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propos. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commensurabiles sint, an non. Quæ si fuerint incommensurabiles, perspicuum est, omnes tres A, B, C, esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B,



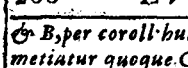
SI vero A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.



QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maximam communis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinū A,



& B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.



a 3. decimi. SI vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, commensurabiles. a Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cum E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;

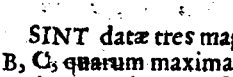
b 2. pro. b metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.

SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si data sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

iiij. ## PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

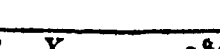
c 3. decimi. SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mensuram inuenire oporteat. c Sit D, maxima mensura ipsarum A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est, D, maximam esse



mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadem, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem, quod fieri nō pōt. Si vero D, nō metiatur; C, erunt saltē D, C, cōmensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum communis ipsam D, maximam mensu-

ram

rā ipſarum A,B,per coroll. præcedentis propoſ. Cum ergo eadem illa mēſura metiatur quoque ipſam C; erunt D, & C, commenſurabiles.[a] Sit igitur E; maxima menſura ipſarum inuenta. Dico E, maximam menſuram eſſe datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim ſit communis earum menſura, ita planum fiet. Quia E, metitur D,& C;& D,metitur A,& B;[b] metietur quoque E,ipſas A,& B.Metitur autem & ipſam C. Igitur E,menſura eſt communis ipſarum A,B,C,quemadmodum aſſeruimus.



a 3. decimi.

b 2.pro.

QVOD autem E, ſit earum maxima menſura, hoc modo confirmari poteſt. Si non eſt maxima, ſit F, maior quam E, ſi fieri poteſt,earum menſura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximā menſuram D, per coroll. præcedentis propoſ. Metitur autem & C:Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum menſuram maximam E,ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima eſt earum communis menſura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, magnitudinem F, ſi metiatur ipſas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem menſuram. Eademque de cæteris eſt ratio.

SIMILI modo, pluribus magnitudinibus cōmenſurabilibus datis, quam tribus, maximam earum menſuram communem inuenietis; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum menſura maxima, &c. Reliqua vero omnia abſoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus eſt dictum.

LEMMA.

SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidem numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; et vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex ijs, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis

E, 3. demonstrata sunt, tam
F, 4. proportio A, ad D, compo
G, 1. nitur ex proportionibus
H, 2. A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspicuum est, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compositas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & nu

E, 3. merorum proportio fue-
F, 12. rit perturbata, vt in hoc
G, 4. exemplo apparet, in quo
H, 6. est, vt A, ad B, ita G, ad

H; &

H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.

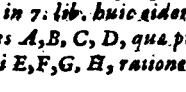
SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in aliis multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videantur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituunt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantum est in quantitatibus eiusdem generis; in numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conueniãt. Vel certe demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEOR. 3. PROPOS. 5. v.

COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eas habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerũ. [a] Sit enim earum maxima mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad vnitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atque



a 3. decimi.

vnitas numerũ E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinẽ, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat maximam communem mensuram propositarũ magnitudinem commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine. & ob id potentia quoque commensurabiles, vt rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum. Ha enim sola communem recipiunt mensuram, atque adeo in eis demonstratio locum habet.

QVOD si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem, quam numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atq; idcirco mensuram habent communem, ipsisque demonstratio huius theorematis conuenit. At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cum sint, communis mensura sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

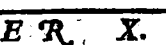
EX demonstratione porro eiusdem huius theorematis liquido constat, commensurabilium magnitudinũ proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E, per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.

VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeãt in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æquẽ, ac communis magnitudinum cõmensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam vt demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quãcunque communem earum mensuram, nihil omnino hoc

theorema

theorema demonstrabimus eodem argumento. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniãtur in hac posteriori demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionem cum illis, vt ex appositis figuris apparet. Quoniam vero in priori demõstratione numeri inuenti, sunt minimi omnium eandem cum ipsis proportionem habentium; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.



THEOR. 4. PROPOS. 6.

vj.

SI duæ magnitudines inter se proportionem habeant, quam numerus ad numerum: commẽsurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duę magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis sit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C, continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiam vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A, ad F, [a] ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sũt. Quocirca cum E, ipsum F, metiatur, metietur quoque eadem E, ipsam B; Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur: [b] Ac proinde A, & B, magni-

[a] 9. qu.

[b] 1. def.

B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duæ magnitudines inter se proportionem habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Quot sunt vnitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium vni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum D, æque metiantur; ponitur vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idem lemma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipsam quoque A. Igitur A, & B, habentes eandem communem mensuram E, a commensurabiles sunt. Quod est propositum.

E — Vni . tas.
A — C, 5.
B — D, 3.

a 1. def.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonstratione theorematis aperta est nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita se habeat quæuis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propositionis) si inuenienda sit linea, ad quam ita se habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates sunt in C, & sumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates sunt in D. Hoc enim si fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonstratum est.

HINC rursus apparet, quanam arte possit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectæ, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda sit linea, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum datæ lineæ A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex ijs, quæ modo diximus, ad quam sic se habeat A, vt C, ad D: b Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad F, atq; adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum sit vt A, ad F, ita C. ad D,) sic quadratum ex A, ad quadratum ex G, cum quadrata omnia sint similia similiterque descripta.

A — C, 5.
G
F — D, 3.

b 13. sex.

SCHO-

SCHOLIVM.

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, cõmensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantũ; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

THEOR. 5. PROPOS. 7. vij.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B. Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum: aerunt ipsæ commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur .n. incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommensurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat. 26. decimi.

SCHOLIVM.

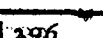
QVOCVNQVE modo linea incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles: Quod non ponitur.

THEOR. 6. PROPOS. 8. viij.

SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas in-

a 5. decimi



commensurabiles esse. Si enim A, & B, credantur esse commensurabiles; a erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant; &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsæ necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendum est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

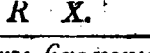
LEMMA.

SI sint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportionales; sitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam.

SINT continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; siue priores in eodem

genere

venere sint, in quo posteriores, sive non; sitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque esse vt A, ad B, ita D, ad E. Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata est; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E, æquales; quandoquidem eorum proportiones duplicatæ æquales sunt.



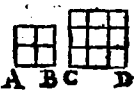
IDEM sequitur, si plures quantitates sint, quam tres; si tamen in quatuor assumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonstrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

THEOR. 1. PROPOS. 9. VII.

QVAE a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum

numerum: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratū. Quoniam enim rectæ AB, CD, longitudine sunt commensurabiles; a erit AB, ad CD, vt numerus ad numerum: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerum F: b habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: c Item & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratum ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerum quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositum.



a 5. decimi.

b 20. sexti.

c 11. 8.

ALITER. Posita eadem constructione, contineatur rectangulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicantes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G, H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atque adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdem propos. Quoniam

igitur

igitur est A B, ad C D, vt E, ad F: [a] Vt autem A B, ad C D, ita est quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ob eandem altitudinem A B, si C D, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est A B, ad C D, vt E, ad F, [b] Vt autem A B, ad C D, ita est rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandem altitudinem C D, si A B, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum B D, ad quadratum ex C D, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum B D, & quadratum ex C D, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

a 1. sexti

b 1. sexti

SIT secundo quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas A B, C D, esse longitudine commensurabiles. Sint. n. numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex A B, ad quadratum ex B D, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H: [c] Habet autem quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, proportionē duplicatam lateris A B, ad latus C D, [d] Item & quadrus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatā lateris E, ad latus F: erit proportio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant, quam numeri E, F, ipsæ commensurabiles erunt longitudine. Quod est propositum.

c 20. sex

d 11. oct.

e 6. dec.

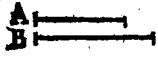
ALITER. Repetatur constructio figuræ posterioris. [f] Quia igitur est vt A B, ad C D, ita quadratum ex A B, ad rectangulū B D; Item vt A B, rursum ad C D, ita rectangulū B D, ad quadratum ex C D, vt supra diximus; erūt quadratū ex A B, rectangulum B D, & quadratū ex C D, continue

f 1. sexti

pro-

proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineam CD. Sunt autē & numeri G, I, H, continue proportionales in rōne numeri E, ad numerum F, vt supra ostēdimus; poniturq; quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratum numerum H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc est, vt E, ad F; a ideoque AB, CD, rectæ proportionem habentes, quam numeri E, F, commensurabiles sunt longitudine. Quod est propositum. a 6. dec.

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommensurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; erunt A, B, longitudine commensurabiles, vt iam est demonstratum. Quod est absurdum. ponuntur enim longitudine incommensurabiles. Non ergo quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratū. Quod est propositum.



QVARTO, ac postremo quadratum ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Dico eas longitudine esse incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles credantur, habebūt earum quadrata, vt est demonstratum, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. quod est absurdum. ponuntur enim non habere. Non ergo longitudine commensurabiles sunt A, & B. Quod est propositum. Igitur quæ a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, rectas lineas, quæ longitudine sunt cōmensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ

lon-

longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM enim quadrata linearum longitudine commensurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratū numerum. vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum: a ipsa commensurabilia erunt; b Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia cōmensurabiles sunt. a 6. dec. b 3. defi.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionē non habēt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamen quā numerus simpliciter ad numerum, c potentia quidem commensurabiles sunt, d cum earum quadrata commensurabilia sint: at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineę potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis. c 3. defi. d 6. dec.

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus, liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse. solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, e potentia quoque incōmensurabiles sunt, f cum earum quadrata incommensurabilia sint. e 4. defi. d 8. dec.

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam ob rem lineę potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter cōsiderāda sunt hæc, quæ sequuntur. Primū lineas rectas longitudine commensurabiles, quarū quadrata, ex prima parte theorematis proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratū numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi

mi possunt, si cũ linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ; (est enim recta AB, 2. & CD, 3) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cũ Rationali linea proposita conferantur: Deinde e contrario, quadrata inter se proportionẽ habẽtia, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ, quorũ linea, seu latera ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continẽt totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratũ Rationalis linea resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demõstratione descripta; (continet enim quadratum ex AB, quatuor mẽsuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mẽsuras quadratas complectãtur, quã sunt vnitates in numeris illis quadratis, si cũ quadrato linea Rationalis conferãtur. Sæpe numero enim lineæ datæ cõmensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali linea proposita sũt lõgitudine incommẽsurabiles; Ac propterea quadrata illarũ proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratũ numerũ, vt in hoc theoremate est ostensũ, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continẽt, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

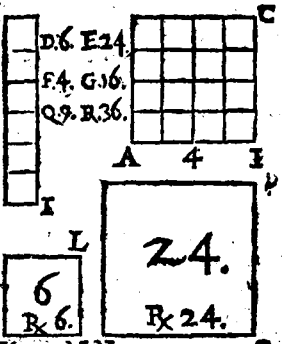
EXPONATVR linea Rationalis AB, expressa numero 4. cuius quadratum AC, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, a vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratũ numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum HI; constans ex sex quadratis mensuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; b atque ipsi HI, quadratum æquale constituatur KL, cuius latus KM. Postremo per ea, quæ in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratũ NP, ita se habeat KL, quadratũ rectæ KM, vt numerus D, ad numerũ E,

a 26. oct.

b 14. sec.

vel

vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniam igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratum KL, ad quadratum NP, per eon ſtructionem; continet autẽ quadratum KL, 6. menſuras quadratas, qualiũ 16. continet quadratum Rationale AC. (conſtructũ enim eſt quadratum KL, æquale rectangulo HI, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris.) continebit quadratũ NP, earundẽ menſurarũ quadratarũ 24. ac propterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erũt Rad. 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cũ 6. & 24. non ſint numeri quadrati, eruntq; lineæ Rationali AB, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata KL, NP, proportionẽ habeãt, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, ſit autem quadratorũ proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterũ ſubdupla videlicet 1. ad 2. Huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. 2 Quare longitudine cõmenſurabiles ſunt recta KM, NO. cum proportionem habeant, quam numerus ad numerũ. Intelligenda ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiã illæ longitudine cõmenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cũ lineâ Rationali comparẽtur. Quod ſi conſiderentur eadẽ lineæ KM, NO, ſimpliciter, & abſolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cũ enim proportionẽ habeant ſubduplam, ſi KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiuſdem ma-



26. dec.

gnitudinis partes 4. si illa in 3 secabitur hæc in 6 &c. At vero hæ partes nullo modo æquales sunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino sunt longitudine incommensurabiles, vt diximus.

RVRSVS, quia quadratæ KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratas mensuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, resoluitur, quæ vnitates sunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale est sex huiusmodi mensuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor vnitatibus, & G, ex 16.) Et si maiores quadrati in eadem proportione sumantur Q, R, pauciores tales mensuras complectuntur quadrata KL, NP, quam sunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cum alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus constituatur; manifestum est, in hac theoremate intelligēda quæque esse quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, quæ pauciores quadratas mensuras, vel plures comprehendunt, quam vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, si ea conferuntur cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadē quadrata KL, NP, considerentur absolute, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali lineæ AB, descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nam si recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum KL, quatuor mensuras quadratas, & quadratum NP, sexdecim, quot scilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, si eadem linea secentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quas nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensuræ nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, resoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumque lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam

numeri

numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quam quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis longitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali linea incommensurabiles sint, vt sit sensus. Quadrata quæ describuntur à rectis lineis longitudine inter se commensurabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ, quãuis ipsa quadrata, si cũ quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpe numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habẽtia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, siue hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, siue non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi lineæ Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplum est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; Nulla autem proportio dupla eadẽ esse põt, quæ quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplam proportionẽ habentes nullus medius cadat proportionalis; vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis, eorum latera, nempe diameter, & latus in vno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

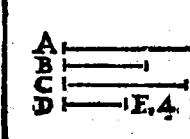
THEOR. 8. PROPOS. 10. xj. x.

SI quatuor magnitudines proportio-

nales fuerint, prima vero secundæ fuerit cõmensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines A, B, C, D, sitque A, prima secundæ B, comensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter se, commensurabiles sunt, [a] habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum, nempe, quam E, ad F. Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet, quam numerus E, ad numerum F. [b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt.

a 5. deci.



b 6. dec.

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt, [c] non habebit A, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [d] Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

c 7. dec.

d 8. deci.

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor proposita magnitudines fuerint lineæ, prima autem secunda commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quarta longitudine commẽsurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus, posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commen-

surabilis

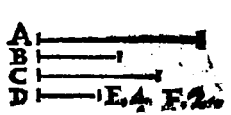
ſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, commenſurabilis eſt potentia ipſi B, a erunt earum quadrata commenſurabilia, b ac propterea proportionem habebunt quã numerus ad numerum, c Eſt autem, vt quadratũ ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propoſitæ A, B, C, D, proportionales ſint, & earum quadrata figuræ ſimiles ſimiliterque deſcriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. d Quare commenſurabilia erunt; e Ac propterea lineæ C, D, potentia commenſurabiles. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita manifeſtum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum ſint commenſurabiles potentia tantum, longitudine incommenſurabiles ſunt: non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propoſ. 8. huius lib. Sunt autẽ potentia commenſurabiles, vt oſtendimus: Igitur potentia tantum ſunt commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

a 3. def. b 5. deci. c 22. ſex. d 6. deci. e 3. def.

EADEM ratione, ſi prima ſecunda ſit incommenſurabilis longitudine tantum, erit & tertia quarta longitudine tantum incommenſurabilis. Nam ſi A, & B, ſint longitudine tantum incommenſurabiles; erunt ipſarum potentia commenſurabiles; ac propterea ipſa potentia tantum, commenſurabiles erunt. Igitur, vt nunc oſtendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commenſurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS ſi quatuor magnitudinũ priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ ſuperficies, vel ſolida; ſequetur nihilominus, ſi lineæ ſint longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles, & reliquas duas magnitudines cõmenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim lineæ lõgitudine ſint commenſurabiles, erit earũ proportio, qua numeri ad numerum, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandem, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, qua nume-

a 6. deci.



ri ad numerum; a atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ longitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neque reliquarum duarum magnitudinũ eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, qua numeri ad numerum. b Quare incommensurabiles

b 8. dec. erunt. Quod est propositum.

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duæ, lineæ, demonstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensura-

c 5. dec. bilia sint, c habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cum ipsis rationem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerũ; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, non habebunt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neque lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt, per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum.

LEMMA.

DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nã huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum nu-

merum,

merum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeãt, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunque numeros pri mos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli.n. horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, vt ad finem lib. 8. docuimus.

A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quã quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidã tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Cõmandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conãtur. Ita igitur rem expediũt.

EXPONANTVR quatuor numeri A, B, C, D, ita vt non sit sicut A, ad C, ita B, ad D; & fiat ex A, B, numerus E; & ex C, D, numerus F. Perspicuum igitur est E, F, numeros planos esse, planos autem dissimiles; quoniã latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.

A, 2. C, 3. B, 6. D, 16. E, 12. F, 48.

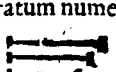
HAEC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errant autem huiusmodi interpretes, quia sæpe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam, plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionẽ habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemque prior nu-

mérus latera habent 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunque duobus lateribus alterius. qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

x. PROBL. 3. PROPOS. 11.

xj. PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum: alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Deinde ex corollario propos. 6. huius



B, 10. lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratũ *C, 6.* ex A, vt numerus B, ad numerum C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neque quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. [a] Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeant, quam numerus B, ad numerum C, [b] ipsa cõmensurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione potentia

a 29. dec.

b 6. dec.

com-

commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inuenienda linea incommensurabilis lõgitudine,& potẽtia. a Inueniatur recta E,inter rectas A,& D,longitudine tantum incommensurabiles,media proportionalis.Dico E,ipsi A,incommẽsurabilem esse longitudine,& potentia. Quoniam enim est quadratum ex A,ad quadratum ex E,per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A,ad D;& A,incommensurabilis est lõgitudine ipsi D, vt iam est ostensum:b erit & quadratum ex A,incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E,ex definitione,potentia sunt incommensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9.huius lib.& omnino longitudine incommensurabiles sunt. Est igitur E,ipsi A, incõmensurabilis longitudine & potentia. Quocirca propo tæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas,&c. Quod erat demonstrandum.

a 13. sex.

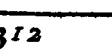
b 10. dec

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per defi.6.Rationalis, quia potentia illi est cõmensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis ex defin.7.cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est,inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse vtrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potẽtia;atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarũ statuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A,D, sunt longitudine tantum incommensurabiles., vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem esse, ipsi incommensurabilem longitudine, & potentia; Eodemque argumento ostendemus, eandem longitudine, & potentia ipsi

D, esse incommensurabilem. Cum enim recta D, E, A, sint



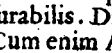
B, 10. cõtinue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, 10. dec *C, 6. ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. a Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta, D, & E, ex defin. incõmensurabiles sunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.*

IN codicibus vulgatis praponitur hæc undecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demõstretur, vt ex dictis apparet

THEOR. 9. PROPOS. 12.

QVAE eidem magnitudini sunt cõmensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, b habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerum E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, c sumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C: & I, ad K, vt F ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I, & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, d inter se commensurabi-



D. 10. E, 8. F, 2. G, 3. H, 5. I, 4. K, 6.

5. dec. 4. 8. 6. dec.

les

les sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atque A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoque A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam habet numerus H, ad numerum K; Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cũ enim A, & C, sint potentia commensurabiles, a erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirum vt F, ad G, b Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps proportionalibus: erit rursum ex æquo quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt numerus H, ad numerum K. c Quare quadrata ex A, & B, cõmensurabilia sunt, atq; adeo lineæ A, B, potentia cõmensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tãtum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ, longitudine inter se commensurabiles, licet vtraque cuipiam alteri lineæ potentia tantum sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commensurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

a 25. dec.

b 24. oct.

c 26. dec

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiã cõmẽsurabilis; erit & reliqua eidẽ cõmensurabilis.

SINT

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitque A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

A ——————
C ——————
B ——————

QVOD si magnitudines A, B, C, sint linea, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine cõmensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si linea A, & B, potentia tantum sint commensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tãtum, colligemus quidem eodem argumento, reliquam B, eidem C, potentia esse commensurabilem; quia vtraque B, C, ipsi A, hac ratione potentia est commensurabilis ex hypothesi. Non autem colligere licebit, si A, ipsi C, commensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidem C, longitudine commensurabilem esse, quia non vtraq. B, C, ipsi A longitudine commensurabilis est, sed C, quidem longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

xij. 0.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incõmensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse cõmensurabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi

A
C
B

a 12. decimi.

A, com-

A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [a] *ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis: erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

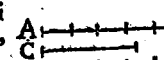
[a] 12. dec

QVONIAM vero hæc propositio 13. apud Theonem lemma est, sit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia à iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

THEOR. 11. PROPOS. 14. xiij. viij.

SI sint duę magnitudines commensurabiles; altera autē ipsarum magnitudini cuipiā incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cum & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; [b] erunt & A, C, inter se



[b] 12. dec

com-

commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duę magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

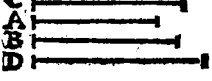
SCHOLIVM.

HIC quoque, si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si
2. dec. *enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, a essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (cum hoc posito, utraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum. ponitur enim A, ipsi C, longitudine incommensurabilis. Quod si A, & B, commensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles;*
2. dec. *b & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.*

COLLIGVNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, qua in hoc lib. demonstrantur, perutile.

QVAE incommensurabilibus sunt commensurabiles, & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommensurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incom-



4. dec. *mensurabilis; c erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, &*
4. dec. *est B, ostensa ipsi C, incommensurabilis; d erit & reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.*

SI

SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incommensurabiles. Si vero A, & B, incommensurabiles sint potentia, & ipsis potentia tantum commensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incommensurabiles; vt perspicuum est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, ostenderimus antea ad propos. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex ijs, quæ tradita sunt in lib. 3. & 4. demonstratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, et C, quarum AB, maior, oporteatque inuenire, quo AB, plus possit quam C. Diuisa AB, bifariam in D, describatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, semicirculus AEB, [a] *in quo aptetur recta AE, ipsi C, æqualis, iungaturq; recta EB. Dico rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ EB.* [b] *Cum enim angulus E, in semicirculo rectus sit;* [c] *erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc est, quam C, quadrato rectæ EB. Quod est propositum. Similiter*

a 1. quarti.
b 31. tert.
c 47. primi.

DVABVS datis rectis lineis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.

HOC etiam tradidimus ad propos. 47. lib. 1. Sint ergo in eadem figura datæ duæ rectæ AE, EB, quæ si coniungantur ad angulũ rectũ E, poterit eas recta ducta AB, [a] *quippe cum quadratum AB, æquale sit quadratis ex AE, EB.*

[a] 47. primi.

xiiij. xij.

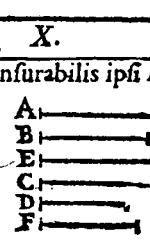
THEOR. 12. PROPOS. 15.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quãtum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A, B, C, D, possitque A, prima plus quam B, secunda, quadrato rectæ E; & C, tertia plus possit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, si E, commensurabilis sit longitudine ipsi A; & F, commensurabilem esse longitudine ipsi C: Si

vero

ero E, sit longitudine incommensurabilis ipsi A; & F ipsi C, longitudine incommensurabilem esse. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D; a erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Est autem quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypothesim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; b Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur est vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F; erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare si A, est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quoque C, ipsi F, longitudine commensurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.



a 22. sexti.

b 23. sexti.

SCHOLIVM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantũ commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, vt constat ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. scripsimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

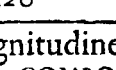
xv. ix.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtriqué ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ a principio ma-

gnitu-

gnitudines commensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines commensurabiles AB,BC. Dico totam quoque magnitudinē AC, vtrique ipsarum AB,BC, commensurabilem esse. a Sit enim ipsarum AB, BC, communis mensura D. Quoniam igitur D, ipsas AB, BC, metitur, b metietur quoque D, totam AC, ex ipsis compositam. Cum ergo D, metiatur AC, & AB; erunt AC, AB, commensurabiles: Similiter cum D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, cōmensurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis erit.



a 3.dec.

b 1.pro.

SED iam tota AC, ex AB, BC, composita commensurabilis sit alteri ipsarum AB, BC, nempe ipsi AB. Dico & AB, BC, inter se commensurabiles esse. c Sit enim D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; d metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commensurabiles erunt AB, BC, inter se. Eodem argumento ostendemus AB, BC, esse commensurabiles, si AC, ipsi BC, fuerit commensurabilis. Si duę igitur magnitudines commensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

c 3.deci.

d 9.pro.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandē & reliquæ commensurabilē esse. Vt si AC, ipsi AB, sit cōmensurabilis, esse quoque eandē AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostēsum est, semper D, communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cum metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt AC, BC. Quod est propositum.

xvj. ix.

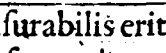
THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duę magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtri-

que

que ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ à principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incommensurabiles AB, BC. Dico totam quoq; magnitudinem AC, vtrique ipsarum AB, BC, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest,



nempe ipsi AB, a sitque D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; b metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramque AB, BC, erunt AB, BC, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commensurabilis est AC, ipsi AB: Eadēq. ratione neq. ipsi BC, commensurabilis erit. Quare vtriq. ipsarū AB, BC, incommensurabilis est.

a 3. dec.

b 3. pro.

SED iam tota AC, composita ex AB, BC, incommensurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi AB. Dico quoque AB, BC incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, c erit quoque tota AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis. Quod est absurdum. Ponitur enim AC, alteri ipsarum, nempe ipsi AB, incommensurabilis. Non ergo commensurabiles sunt AB, BC. Eodem argumento ostendemus AB, BC, incommensurabiles esse, si AC, ipsi BC, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

c 16. dec

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquę incommensurabilem esse. Nempe si AC, incommensurabilis sit ipsi AB, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, incommensurabilem. Si enim AC, ipsi BC, foret commensurabilis, esset quoque AC, ex coroll. præcedentis propos. reliquę AB, commensurabilis. Quod est absurdum: ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo AC, ipsi BC, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D. &c. quam quidem solum linea longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

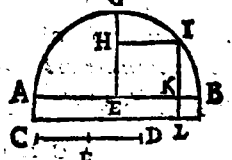
HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartã partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

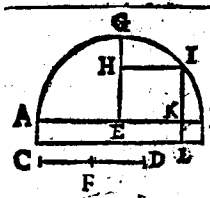
QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectãgulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteque figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidia parte maioris descripto; (quod quidem appli-

catum est ad dimidium maioris, deficitque figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. lib. 6. libet tamen idipsum hac in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB, maior sit, oporteatque ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidem parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati ex recta CD, descripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, et interuallo EA, vel EB, semicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque AE, dimidia ipsius AB, hoc est EG, ipsi AE, æqualis, maior quã CF, dimidia ipsius CD. Posita igitur EH, æquali ipsi CF, agatur per H, ipsi AB, parallela HI, demittaturque IKL, ad AB, perpẽdicularis, & sit KL, ipsi KB, æqualis; Ac tandẽ perficiantur rectangulũ AL, & quadratũ BL. Dico parallelogrammũ AL, applicatum ad rectã AB, deficiẽs figura quadrata BL, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniã. n. KI, media proportionalis ẽ inter AK, KB, vt in scholio propos. 13. lib. 6. tradidimus, erit rectãgulũ sub AK, KB, hoc est, rectangulũ AL, æquale quadrato ex KI, hoc est, quadrato ex EH; [b] (est. n. KI, ipsi EH, æqualis, qb parallelogrãmũ EI,) hoc ẽ, quadrato ex CF: Est aũt quadratum



a 17. sexti.

b 34. primi.



dratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD; quod quadratum ex CD, per scholium propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensque quadrato BL, æquale est quartæ parti quadrati ex CD, descripti. Quod est propositum.

SCHOLIVM II.

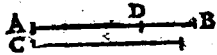
EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius sit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, sit EH, æqualis ipsi CF. Deinde acta HI, parallela ipsi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus paratis, ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus AK, KB, æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quam recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis; quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales; & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C; & ad maiorem AB, applicetur parallelogrammū deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore C, descripti, ita vt DB, latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatū deficit. Dico segmenta AD, 

DB, inæqualia esse. Si enim AD, DB, segmenta dicantur esse æqualia; cum ex 1. lemmate parallelogrammum applicatū ad AB, deficiensque figura quadrata ex DB, descripta, æquale sit rectangulo sub AD, DB; sit autē quod sub æqualibus AD, DB, quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratū ex AD, dimidio ipsius AB, descriptū; atque adeo ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum ex AB, quadruplum erit ipsius parallelogrammi: Est autē & quadratum ex C, per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex C. Igitur quadrata rectarum ex AB, & C, æqualia sunt, atq; rectæ AB, & C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur. n. inæquales, & AB, maior. Inæqualia igitur sunt segmenta AD, DB. Quod est propositum.

HOC facile etiam apparet ex constructione

problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per constructionem, EH, aqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi CF, ductaque HI, parallela ipsi AB, & tandem demissa perpendicularis IK, vt partes factæ ex applicatione sint AK, KB; manifestum est AK, KB, segmenta esse inæqualia, cum AB, in E, secta sit bifariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

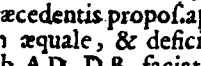
xvii. xiij.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: maior tanto plus poterit quâ minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

SINT

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB, quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad AB, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub AD, DB, faciatque segmenta AD, DB, longitudine commensurabilia. Dico AB, plus posse quã C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniã enim per 3. lemma præcedẽtis propos. AD, maior est, quã DB; diuidatur AB, bifariã in E, & ipsi ED, æqualis sumatur EF. Quo facto, cum totæ EA, EB, æquales sint, & ablatæ quoque EF, ED, erunt & reliquæ AF, BD, æquales. Et quia recta AB, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D, [a] erit rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadruplum rectanguli sub AD, DB, & quadrati ex ED, æquale erit quadruplo quadrati ex EB, Est autem quadruplo rectãguli sub AD, DB, æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex ED, æquale est quadratum ex FD, (quadratum enim ex FD, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cum FD, dupla sit ipsius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale est quadratum ex AB, (quod quadratum ex AB, quadruplum sit per scholiũ propos. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipsius AB.) Igitur & quadrata ex C, & FD, æqualia sunt quadrato ex AB: Ac proinde recta AB, plus potest quam recta C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur FD, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi AB. Quoniam rectæ AD, DB, longitudine ponuntur commensurabiles: [b] erit quoq; tota AB, parti DB, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis; (quod composita ex DB, AF, dupla sit ipsius DB,) Igitur cum vtraque AB, & composita ex DB, AF, longitudine sit commensurabilis ipsi DB, [c] erunt quoque AB, & composita ex DB, AF, longitudine inter se com-

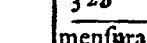


a 5. sec.

b 16. dec

c 12. dec

mensurabiles; Ac propterea cum AB, composita ex AF,



DB, tanquam vna, & ex FD, commensurabilis sit longitudine compositæ ex AF, DB; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. commensurabilis longitudine reliquæ FD. Ergo AB, plus potest quam C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi commensurabilis.

SED iam AB, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammum applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectę longitudine sibi commensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, longitudine commensurabilis. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine commensurabilis reliquæ compositæ ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cum vtraque AB, DB, longitudine sit commensurabilis
a 12. dec compositæ ex AF, DB; a erunt quoque AB, DB, longitudine inter se commensurabiles; Atque adeo cum tota AB, composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine
b 16. dec ipsi DB; b erunt ipsæ AD, DB, longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

xviij. xiiij.

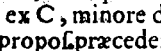
THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem aplicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine

ipsam

ipsam diuidat; maior tanto plus poterit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB; quartæ autem parti quadrati ex C, minore descripti applicetur ad AB, per 2. lemma propos. præcedentis, parallelogrammũ æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incommensurabiles. Dico AB, plus posse quam C, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Iisdem enim quæ supra constructis,



similiter ostendemus AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur demonstrare oportet ipsi A, longitudine esse incommensurabilem. Quoniam rectæ AD, DB, ponuntur longitudine incommensurabiles; a erit quoque tota AB, parti DB, longitudine incommensurabilis. Sed DB, longitudine commensurabilis est compositæ ex DB, AF, cum hæc illius sit dupla. Igitur cum duarũ linearum commensurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF, ipsa DB, longitudine sit incommensurabilis rectæ AB: b erit quoque reliqua composita ex DB, AF, eidem AB, longitudine incommensurabilis. Ac propterea cum AB, composita ex AF, DB, tanquam vna, & ex FD, incommensurabilis sit longitudine compositæ ex AF,

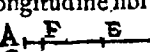
a 17. decimi.

a 14. decimi.

DB,

DB, erit eadem AB, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ FD, longitudine incommensurabilis. Ergo AB, plus potest quam C, quadrato rectæ FD, longitudine sibi incommensurabilis.

IAM vero AB, plus possit quam C, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrãmũ applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque in re&a AB, partes AD, DB. Dico & rectas AD, DB, esse incommensurabiles longitudine. Ijsdem enim constructis, ostendemus vt prius, rectam AB, plus posse quam C, quadrato rectæ FD. Quare cum AB, ponatur plus posse, quã C, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis: erit AB, ipsi FD, incommensurabilis longitudine. Igitur cum tota AB, composita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, longitudine incommensurabilis sit ipsi FD; erit eadem AB, per coroll. propos. 17. huius lib. & reliquæ compositæ ex AF, DB, longitudine incommensurabilis: Est autem composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum illa huius sit dupla. Igitur cũ duarũ linearum commensurabilium, nempe quæ ex AF, DB, componitur, & DB, ipsa composita ex AF, DB, longitudine incommensurabilis sit rectæ AB, [a] erit & reliqua DB, eidem AB, longitudine incommensurabilis: Ac proinde cũ tota AB, compposita ex AD, DB, incommensurabilis sit ipsi, DB, longitudine; [b] erunt & ipsæ AD, DB, longitudine inter se incommensurabiles. Quam ob rem si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, &c. Quod erat demonstrandum.



a 14. de.

b 17. dec.

SCHOLIVM. I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commensurabilibus, & incommensurabilibus; nunc ad Rationales & Medias transit in sequentibus.

LEMMA. I

QVONIAM demonstratum est, lineas lon-

gitudi-

gitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles esse, potentia vero commensurabiles, non omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea commensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilē non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commēsurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potētia, longitudine fuerit incommēsurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantū ipsi commensurabilis.

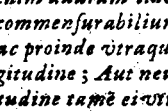
LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potētia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incōmensurabiles sunt, potentia autem solum commensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solum: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se cōmensurabiles, vt intelligatur; etiā potentia cōmensurabiles esse; Si vero potētia inter se solum

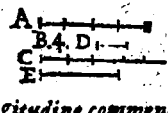
lium sunt commensurabiles: dicuntur ipsæ quoque Rationales, potentia solum inter se commensurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera lineatũ Rationalium longitudine inter se commensurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter se commensurabilium, altera æqualis est expositæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commensurabilis quoque longitudine; Aut neutra Rationali expositæ æqualis est, longitudine tamẽ ei vtraq; est cõmensurabilis: Aut deniq; vtraq; expositæ Rationali commensurabilis est solũ potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expositæ Rationalis A, diuisa in quatuor partes, quot nimirum vnitates sunt in numero B. Sũpto deinde quolibet alio numero C, sit D, recta æqualis partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandã aliã E. Item quoties vnitas est in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales sũt ipsi D; ipsæ æquales erũt. Rursus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commensurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commensurabiles longitudine, Rationales sunt. Sunt autem & ostensæ lõgitudine inter se commensurabiles, cum habeant D, communem mensuram. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales E, F, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, & quarũ vna nẽpe E, æqualis est Rationali expositæ A.



IAM vero D, metiatur duas lineas quasdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neutrum sit qui B, ita vtvtraq; linea C, & E, inæqualis sit ipsi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, mensuram habentes communem D, longitudine commensurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitu-



dine commensurabiles, Rationales sunt. Cum ergo & inter se sint longitudine commensurabiles; inuenta erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra æqualis est Rationali expositæ A.

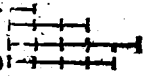
POSTREMO expositæ Rationali A, [a] inueniatur rectæ B, longitudine tantum incommensurabilis, quæ secetur in quotcunque partes æquales, & sumatur C, compositæ ex ulijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. Quo facto, erunt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico eâdē expositæ Rationali A, potentia solum esse commensurabiles. Quoniam enim A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeo & potentia; [b] Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solum potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles expositæ Rationali A. Quod erat propositum.

[a] 11 dec.

[b] 2. dec.

[c] 14. dec.

QVOD si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mensura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt unitates in totidē numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.



E, 5.
F, 5.
G, 4.

CAETERVM & omnes lineas Rationales, non solum

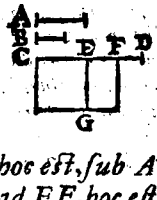
expo-

expositæ Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles,
a 6. def. *facile hoc modo demonstrabimus.* a *Quoniam Rationales lineæ sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum;* b *quæ autem*
b 12. sex. *eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.*

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundã, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque. n. linea recta CD, abscindatur CE, ipsi A, æqualis; & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum sub CE, & EF,



c 1. sexti *hoc est, sub A, & B.* c *Quoniam igitur est vt CE, ad EF, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuũ est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primã ad secundã, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*

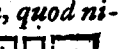
EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectan-

gulum FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.

SIT spatium A, commensurabile Rationali spatio B. Dico & A, Rationale esse. Sit namque C, quadratum Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel Irrationalia, *quod nimirum ab exposita Rationali describitur. Quoniam igitur B, Rationale est,* [a] *erit ipsum Rationali C, commensurabile: Est autem & A, ipsi B, commensurabile. Igitur A, & C, cum commensurabilia sint ipsi B,* [b] *inter se quoque cõmensurabilia erunt; ac proinde spatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea exposita descripto commensurabile,* [c] *Rationale est. Quod erat demonstrandum.*



[a] 9. def.

[b] 12. dec

[c] 6. def.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

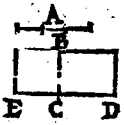
xix. xv.

QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis, secundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale est.

SIT exposita Rationalis A, & spatium rectangulum B D, contentum sub Rationalibus longitudine, commensurabilibus BC, CD, secundum aliquem prædictorum modorum. (hoc est, secundum aliquem trium mo-

dorum

dorum, quos in scholio 2. antecedentis propos. explicuimus; ita vt vel altera ipsarum BC, CD, Rationali expositæ A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum. Dico B D, rectangulum Rationale esse. Describatur enim ex altera earum, nempe ex B C, quadratum B E. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expositæ A, cõmensurabilis est



a 3. def. vel longitudine & potentia, vel potentia solum: a erit quoque quadratum BE, ex B C, descriptum quadrato ex

b 8. def. A, commensurabile: b Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia vocantur, vel Irrationalia. c Igitur & BE, illi cõmensurabile, Rationale est.

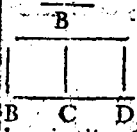
c 9. def. Quia vero BC, hoc est, EC, & CD, lõgitudine cõmensurabiles sunt, (ponũtur. n. BC, CD, Rationales inter se longitudine commensurabiles.) d & est vt EC, ad CD, ita E B,

d 1. sexti ad BD; e erunt quoque E B, BD, commensurabilia. Quare

e 10. dec ex lemmate 4. antecedentis propos. B D, Rationali BE, commensurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

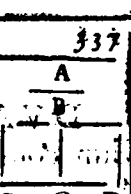
THEOR. 18. PROPOS. 21.

xx. xvj. SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.



SIT rursum exposita Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquẽ modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. exposuimus, hoc est, siue BC, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Applicetur autem ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Di-

co CD, Rationalem esse, & ipsi BC, commensurabilem longitudine. Describatur enim ex BC, quadratum BE; quod similiter, vt in antecedenti propos. ostendemus, Rationale esse. Quia igitur BE, BD, Rationalia sunt, [a] ipsa commensurabilia erunt quadrato ex linea Rationali exposita A, descripto; [b] Ac propterea & commensurabilia inter se erunt: [c] Est autem vt BE, ad BD, ita EC, hoc est, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, commensurabiles sunt longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. docuimus. Est ergo CD, ipsi BC, commensurabilis longitudine: [d] sed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atque idcirco Rationali expositæ A, commensurabilis sit, vt in scholio propos. 12. huius lib. demonstrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis est, & longitudine commensurabilis ipsi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 9. defi. 10.
[b] 12. decimi.
[c] 1. sexti.
[d] 6. defi. 10.

LEMMA I.

RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.

POSSIT recta A, spatium Irrationale, hoc est, quadratum ex A, æquale sit spatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem esse. Si enim dicatur Rationalis; A——— *erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonstratione propos. 20. huius lib. ostensum est. quod est absurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis est. Igitur Irrationalis.*

HOC idem constat ex definitione 11. huius lib. V bi lineæ potentes spatia Irrationalia, vocantur Irrationales.

LEMMA II.

DVAS rectas Rationales potentia solum commensurabiles inuenire.

DVO genera sunt linearum Rationalium potentia tantum inter se commensurabilium. Aut.n. altera earum est æqualis expositæ Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expositæ Rationalis A, cui a 12 dec. *æqualis sumatur B. Deinde ipsi B, a inueniatur C, longitudine tantum incommensurabilis, seu (quod idem est) potentia tantum commensurabilis. Quoniam igitur B, C, ipsi A, commensurabiles sunt, (B, quidem, quod ei sit æqualis; at C, ex constructione, quod inuenta sit potentia tantum incommensurabilis ipsi B, atque adeo ipsi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia solum commensurabiles. Inuentæ ergo sunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commensurabiles, quarum altera, nempe B, expositæ Rationali A, æqualis est.*

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rursus expositæ Rationalis A, cui longitudine tantum incommensurabilis b 11 dec. *inueniatur B; & huic rursum longitudine tantum incommensurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, esse Rationales potentia tantum commensurabiles. Quod.n. sint solũ commensurabiles potentia, patet ex cõ-*

structione. Quod autē sint Rationales, ita ostendemus. Quoniam A, C, ipsi B, potentia sunt commensurabiles; erunt & A, C, commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 12 huius lib. demonstrauimus. Quare cum vtraque B, C, expositæ Rationali A, sit potētia commensurabilis; erūt B, C, Rationales. Inuentæ ergo sunt B, & C, Rationales potentia tantum commensurabiles. a 6. def.

SCHOLIVM.

QVOD si inuenienda sint quotcunque linea Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 10. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur, nempe A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in corroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantū commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G, vt A, ad C; similiterq; quadratum ex E, ad quadratū ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D) b erūt ipsa inter se cōmensurabilia; ac propterea & rectæ ipsa potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Ratio-

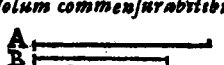
A, 5. E
B, 7. F
C. 3. G
D, 2. H

b 6. decimi.

nales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam eorum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem nō habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati. a *Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensa sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.*

a 9. deci.

QVOD si propositis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inueniēda sit adhuc alia, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propositæ duæ Rationales potentia tantum commensurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autem alio numero E, qui ad quemlibet ipsorum C, D, primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per corollar. propositionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, b *commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, qua numeri quadrati ad numerū quadratum, vt ad finē lib. 8. ostendimus; (quod D, & E, qui ambo non sunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, ideoque plani non similes, ac proinde ex ijs, quæ in scholio propos. 26. lib. 8. ostendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)* c *erunt rectæ B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo*



b 6. dec.

c 9. dec.

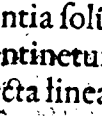
hi nume-

hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratū; (quod ostendemus perinde, vt idem demonstrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.

THEOR. 19. PROPOS. 22. xxj.

QVOD sub Rationalibus potentia solū commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media. xix.

SIT exposita Rationalis A, & rectangulum B D, contentum sub Rationalibus B C, C D, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus. (hoc est, siue altera illarum, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non.)



Dico rectangulum B D, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi B D, æquale est, Irrationalem quoque, quę vocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonstratione propos. 20. diximus. [a] Et quoniam est vt E C, hoc est, B C, ad C D, vt B E, ad B D: Est autem B C, ipsi C D, longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex iis, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, B E, ipsi B D, incommensurabile. [b] Quare cum B E, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A, sit autem B E, ipsi B D, incommensurabile; [c] erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem B D, incommensurabile. Ac propterea B D, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, [d] Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum B D, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.

[a] 21. *sexti*

[b] 9. *def.*

[c] 14. *dec*

[d] 10. *def.*

VOCETVR autem hęc linea potens ipsum B D, Media, [e] propterea quod media proportionalis est inter

[e] 17. *sex.*

duas BC. CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratum æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. a *Cum enim eius quadratum æquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidē in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineā Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, qua medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hæc linea Media hoc loco appellatur.* 17. *sex*

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint continue proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilineæ similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22. lib. 6 demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum mediū proportionale est inter quadrata rectarū BC, CD, ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulū Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc n.

falsum

falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaque non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, & spatium Medium. Omne siquidem rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est, vt ostendimus: At non omne spatium Medium sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus continetur. Vnumquodque tamen omne spatium Medium aquale est alteri cuipiam Medio sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contento. Nam alias recta ipsum potens, non esset dicenda Media, quia non posset rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum, vel non esset proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commensurabiles.

VNDE Medium describi sic poterit, vt dicamus, illud esse rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus comprehenso aquale est, ita vt ipsum possit linea recta, qua Media in hoc theoremate est vocata. Omne enim Medium non contentum sub duabus huiusmodi Rationalibus reuocari potest ad aliud Medium, cuius latera sunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commensurabiles, vt in scholio sequentis theorematis ostendemus.

THEOR. 20. PROPOS. 23. xxij. xx.

QVOD à Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine incommensurabilem.

SIT linea *Media* A, & Rationalis BC, siue ea sit expositæ, siue expositæ commensurabilis longitudine & potentia,

a 45. pri vel potentia tantum a applicetur que ad BC, rectangulũ BD, æquale quadrato ex media A, vel rectangulo, quod huic quadrato æquale est, faciatque latitudinem CD. Dico CD, Rationalem esse, & ipsi BG, longitudine incommensurabilem. Quoniam enim A, Media est, ipsa A potest rectangulum sub duas rectis Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum, alias non posset dici Media. Sit igitur illud rectangulum E G, sub Rationalibus EF, FG, potentia tantum commensurabilibus contentum. Et quia A, ex hypothesi, potest etiam ipsum BD, æqualia erunt BD, & EG, b lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos. nempe erit vt BC, ad EF, ita EG, ad CD; c Ac propterea quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex CD. Sed quadratũ ex BC, commensurabile est quadrato ex EF, (quod rectæ BC, EF, ponantur Rationales: atque adeo inter se commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.) Igitur d & quadratum ex FG, commensurabile erit quadrato ex CD, propterea; & rectæ FG, CD, commensurabiles erunt saltem potentia. Ergo cũ FG, Rationalis expositæ Rationali sit commensurabilis, si ipsa non est exposita Rationalis; erit quoque CD, expositæ Rationali commensurabilis, vt ostendimus in scholio propos. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommensurabilis ipsi BC. Quoniã enim EF, FG, Rationales sũt potentia tantum commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles; & est vt EF, ad FG, ita quadratũ ex EF, ad rectangulum EG, sub EF, FG, contentum, ex e 10. dec lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex EF, incommensurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod huic æquale est. Atqui quadratum ex EF, commensurabile est quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales sint, atque idcirco saltem potentia com-

b 14. sex

c 22. sex

d 10. dec

mensurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commensurabile sit quadrato ex EF, at rectangulum BD, eidem quadrato ex EF, incommensurabile; a incommensurabilia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulum BD, vt recta CD, ad rectam BC. b In commensurabiles ergo sunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo est CD, & Rationali BC, longitudine incommensurabilis. Quam ob rem, quod à Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat.

a 13. dec

b 10. dec

SCHOLIVM.

FACILIVS, quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis BC, & A, sumatur tertia proportionalis pro latere CD. Cũ enim BC, A, & CD, proportionales sint; c erit rectangulum BD, sub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A.

c 18. sex. d 17. sex.

HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulũ æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifestum est omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contẽto sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentũ. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium cõtentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

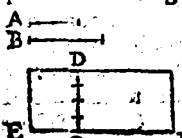
THEOR. 21. PROPOS. 24.

MEDIAE commensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Me-

diam

diam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, a ad quam applicetur rectangulum DE, æquale quadrato ex A, Media. Quoniam igitur D E, Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit CE, latitudinem; b erit C E, Rationalis ipsi C D, longitudine incommensurabilis. Rursus ad C D, Rationalem c applicetur rectangulum D F, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commensurabiles, erunt quoque eorum quadrata, hoc est, rectangula ipsis æqualia, DE, DF, commensurabilia. d Est autem vt D E, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. e Igitur E C, C F, longitudine sunt commensurabiles: Sed EC, ostensa est Rationalis, & longitudine ipsi C D, incommensurabilis. f Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommensurabilis est. Cum ergo & Rationalis sit, propterea quod Rationali expositæ C D, sit commensurabilis; (Nam cum E C, CF, sint longitudine ostensæ commensurabiles, & E C, ipsi C D, commensurabilis saltem potentia quod Rationalis sit; erit & CF, eidem CD, commensurabilis potentia ex iis, quæ in scholio propos. 12. huius lib. scripsimus,) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commensurabiles, g Ac proinde recta B, potens rectangulum D F, sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus CD, CF, Media est. Mediæ igitur commensurabilis, Media est. Quod ostendendum erat.



a 45. pri
b 23. de cimi.
c 45. pri
d 1. sexti e 10. dec
f 14. dec
g 22. dec

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, spatium Medio spatio commensurabile Medium esse. Postquam enim demonstratum est DF, commensurabile esse Medio DE, ostensum ex eo mox fuit DF, esse quoque Medium. Nimirum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus CD, CF, contentum. Eademque ratio est in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo potest demonstrari.

SIT spatium DF, spatio Medio DE, commensurabile. Dico & DF, Medium esse. Possit enim A, Media ipsum DE, Medium. (Nam cum D E, Medium sit, poterit ipsum recta, quæ Media dicitur; vt in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipsum DF.

Quo-

Quoniam igitur DB, DF, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis æqualia, commensurabilia. Quare A, B, rectæ potentia saltem sunt commensurabiles; Atque ideirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & DF, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia. Vniuersè enim quæ longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si vero rectæ quædam linea Mediæ potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi cõmensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediæ rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia sõlum commensurabilis.

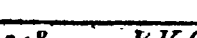
LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniatur duæ rectæ cõmensurabiles B, C, illæ quidem longitudine, hæc vero potẽtia tãtum; [a] *erit vtraque B, C, Mediæ A.*

a 24. de elem.

com-



commensurabilis, Media. Cũ ergo A, B, sint longitudine commensurabiles; & A, C, potentia tantum; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Media commensurabilis, Media sit; non tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cum dua Media dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanã via inuenienda sint dua Media longitudine & potentia incommensurabilia.

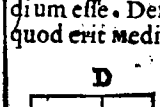
xxiiij. xxiij.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum AD, sub Mediis AC, CD, longitudine commẽsurabilibus. Dico AD, Medium esse. Describatur ex CD, Media quadratum BD, quod erit Medium. [a] Et quoniam est vt AC, ad CB, ita AD, ad DB. Sũt autem AC, CB, hoc est, AC, CD, longitudine commẽsurabiles; [b] erunt AD, DB, commẽsurabilia. Quare spatium AD, Medio DB, commensurabile, Medium est, ex coroll. præcedentis propos. Quod ergo sub Mediis longitudine commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

21. *sexti*



xxv. xxiij. *vltima*

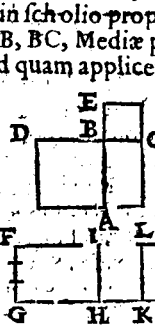
THEOR. 23. PROPOS. 26.

QVOD sub Medijs potentia tantum

com-

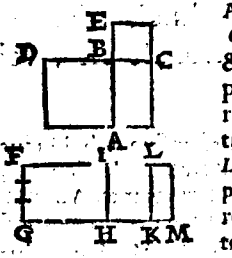
commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale est, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehensum sub Mediis AB, BC, potentia tantum commensurabilibus. Dico AC, esse vel Rationale, vel Medium. Describatur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erit, vt in scholio propos. 2. huius lib. docuimus, cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, [a] ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, descripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, descripto; eritque totum FM, vnum rectangulum, quemadmodum propos. 45. lib. 1. est ostensum. Quia vero AD, CE. Media sunt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL, [b] (est enim & KL. Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM, [c] erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipsi FG, seu KL, longitudine incommensurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter se sunt commensurabiles, erunt & earum quadrata AD, CE, atque adeo & ipsis æqualia rectangula FH, LM, commensurabilia: [d] Vt autem FH, ad LM, ita est recta GH, ad KM. [e] Igitur GH, KM, longitudine inter se commensurabiles sunt. Quare GH, KM, Rationales ostensæ, sunt longitudine inter se commensurabiles, Rationali vero FG, solum commensurabiles potentia, cum ei ostensæ sint longitudine incommensurabiles; [f] Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Rationale est. Et quoniam est, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE, (quod DB, BC, ipsis AB, BE, sint æquales, vtraque vtrique,) [g] & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoque vt AD, ad AC, ita



[a] 45. primi.
[b] 34. primi.
[c] 23. decimi.
[d] 1. sexti
[e] 10. decimi.
[f] 20. decimi.
[g] 1. sexti.

AC,



AC, ad CE, atque adeo AD, AC, CE, proportionalia sunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: [a] Habent autē rectæ GH, HK, KM, easdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales sunt; [b] propterea quę rectangulum sub GH, KM, quadrato ex HK, æquale est. Est autem rectangulum sub GH, KM, ostensū Rationale. Igitur & quadratum ex HK, Rationale est; ideoque & recta HK, Rationalis erit: [c] & ob hoc ipsi FG, Rationali expositæ, hoc est, ipsi HI, commensurabilis vel longitudine, & potentia, vel sōlum potentia. Et si quidem HK, ipsi HI, longitudine sit commensurabilis, [d] rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK, longitudine commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK, ipsi HI, potentia sōlum commēsurabilis sit, [e] erit rectangulum HL, sub Rationalibus HI, HK, potentia tantum commensurabilibus contentum, hoc est, AC, illi æquale, Medium. Est ergo AC, rectangulum sub Medijs AB, BC, potentia tantum commēsurabilibus contentum, vel Rationale, vel Medium. Quo circa quod sub Medijs potentia tantum commensurabilibus, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 1. sex.
[b] 17. sex
[c] 6. def.
[d] 20. dec
[e] 22. dec

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propos. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipsi AC, æquale, [f] si tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis sumatur. pro latere HK. [g] Nam rectangulum sub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo sub medijs AB, BC.

[f] 12. sex
[g] 16. sex

HAC eadem arte utemur in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstratur, rectangulum contentum sub duabus rectis Medijs potentia tantum commensurabilibus esse vel Rationale, vel Medium,

duobus Euclides propos.28.quanam ratione inueniēda sint duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propos.vero 29. duas Medias potentia solum commensurabiles inquirit, quæ spatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, a *rectangulum contentum sub duabus Rationalibus longitudine commensurabilibus esse Rationale;* b *Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum rectangulum esse Irrationale, appellarique Medium, & rectam, quæ ipsum potest, Mediam. Rursus ex demonstratis constat,* c *rectangulum cōprehensum sub duabus Mediis longitudine commensurabilibus esse Medium;* d *Rectangulum autem sub duabus Mediis potentia solum commensurabilibus comprehensum esse vel Rationale, vel Medium.* a 20. dec b 22. dec c 25. dec d 26. dec

QVOD si quis roget, qualenam rectangulum sit illud, quod sub duabus Mediis longitudine & potentia incommensurabilibus continetur; Respondemus illud nec Rationale esse, nec Medium, sed tertium quoddam genus constituere, nempe æquale esse rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulum AC, comprehensum sub duabus Mediis AB, BC, longitudine & potentia incommensurabilibus. Dico AC, neq; Rationale esse, neq; Mediū, &c. Constructis enim eisdem, vt in theoremate, ostendemus similiter, rectas GH, KM, Rationales esse, & ipsi FG, longitudine incommensurabiles. Et quia recta AB, BC, ponūtur incommensurabiles longitudine & potentia; erūt & earum quadrata AD, CE, atque adeo ipsis æqualia rectangula FH, LM, incommensurabilia. e *Vt autē FH, ad LM, ita est recta GH, ad rectam KM.* f *Igitur recta GH, KM, longitudine inter se sunt incommensurabiles. Quare GH, KM, ostensæ Rationales, sunt potentia tantum inter se commensurabiles.* g *Ac propterea rectangulum sub ipsis GH, KM, Irrationale est, quod Mediū appellatur, et recta ipsū potēs, Irrationalis, quæ dicitur Media.* h *Potest autem rectangulum sub ipsis GH, KM, recta HK; (Nā vt prius ostēdemus, tres GH, HK, KM, esse proportionales) Igitur HK, Irrationalis est, & Me-*

e 1. sex f 10. dec g 23. dec h 17. sex

dia

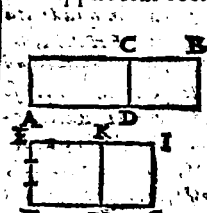
a 21. decimi. dia. Quare IK, Rationale nō est: si enim Rationale esset, a faceret ipsum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine commensurabile. Quod est absurdum: ostensa enim est HK, Irrationalis, nempe Media. Eodem modo neque IK, medium est; si enim esset Medium, b 23. decimi. b faceret ipsum applicatum ad Rationalem HI, latitudinē HK, Rationalem, & ipsi HI, longitudine incommensurabilem, quod est absurdum: ostensa est enim HK, Irrationalis, & Media. Itaque cum IK, neque Rationale sit, neque Medium; necessario neque AC, illi aquale, Rōnale erit, neq; Medium, sed tertium quoddam genus constituet, nempe aquale erit ipsi IK, quod sub Rationali, & Media continetur, cum HI, Rationalis sit, & HK, ostensa Media. Ex quibus efficitur, rectam, quæ potest spatium sub duabus Medijs lōgitudine & potentia incommensurabilibus, quales ponuntur A B, B C, comprehensum, posse quoque rectangulum sub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentum. Quod est propositum.

xxvj. xxii.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

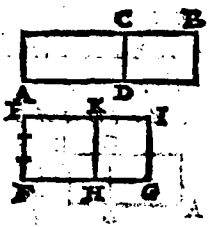
MEDIVM non superat Medium Rationali.

c 45. pri. SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non esse Rationale. Sit enim, si fieri potest, DB, Rationale. Exposita ergo Rationali linea EF, c ad ip sam applicetur rectangulū EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt sit reliquum HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Mediis AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, sunt applicata, d erunt rectæ FG, FH, Rationales, & ipsi EF, incommensurabiles longitudine. Rursus quia Rationale HI, applicatum est ad Rationalem HK,



d 23. decimi.

(est enim



(a est enim recta HK, Rationali EF, æqualis) b erit recta HG, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine sint commensurabiles; & EF, ipsi FH, longitudine incommensurabilis, vt est ostensum; c erit & HG, eidem FH, longitudine incommensurabilis. Est autem vt FH, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulum sub FH, HG, ex tertio lemmate propos. 19. huius lib. d Igitur quadratum ex FH, incommensurabile est rectangulo sub FH, HG. Sed quadrato ex FH, commensurabile est quadratũ ex HG, (quod sint ambo ex lineis Rationalibus FH, HG, descripta) e atque adeo & duo quadrata, ex FH, HG, simul, quadrato ex FH, commensurabilia sunt: Et rectangulo sub FH, HG, commensurabile est id, quod bis continetur sub FH, HG, (quia hoc illius est duplum.) Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duo quadrata ex FH, HG, simul incommensurabilia sunt rectangulo sub FH, HG, bis f Quare & compositum ex quadratis rectarum FH, HG, & ex rectangulo bis sub FH, HG, incommensurabile est cõposito ex quadratis rectarum FH, HG, g At quadratis ex FH, HG, vna cum rectãgulo bis sub FH, HG, æquale est quadratum ex FG. Igitur & quadratum FG, incommensurabile est cõposito ex quadratis rectarum FH, HG: Est autem compositũ hoc Rationale, ex lẽmate 4. propos. 19. huius lib. quod ostẽsum sit commensurabile quadrato Rationali ex FH, Igitur cum huic composito, quod Rationale est, incommensurabile sit quadratum ex FG, h erit quadratum ex FG, Irrationale i, ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod est absurdum, ostensa enim est FG, Rationalis longitudine ipsi EF, incõmensurabilis. Nõ ergo DB, quo Medium AB, superat Medium AC, Rationale est. Quã obrẽ Medium non superat Medium Rationali. Quod erat ostendendum.

a 34. pri
b 1. de. cimi.
c 14. decimi
d 10. decimi.
e 16. decimi,
f 17. decimi
g 4. sec.
h 10. de. fin.
i 11. de. fin

SCHOLIVM:

EX dictis & hoc demonstrabimus.

RATIONALE superat rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, superet Rationale AC,

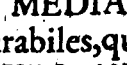
spatio DB. Dico DB, quoque esse Rationale.
a 29. definitione. *Quoniam enim AB, AC, Rationalia sunt;* a *erunt AB, AC, commensurabilia quadrato Rationalis expositæ;* b *atque adeo & inter se commensurabilia. Quare cum totum AB, compositū ex AC, DB, commensurabile sit ipsi AC, erit quoque idem AB, reliquo DB, commensurabile, ex coroll. propos. 16. huius lib. Est autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propos. 19. huius lib. Rationale est. Quod est propositum.*
b 12. decimi.

PROBL. 4 PROPOS. 28.

xxvij. o.

MEDIAS inuenire potētia tantū cōmensurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propos. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentiā tantum commensurabiles, c inter quas media proportionalis sumatur C, d fiatq; vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, esse Medias potētia tantū commensurabiles, quæ Rationale comprehendant. Quoniam enim A, B, Rationales ponuntur potentia tantum commensurabiles; e erit rectangulum sub ipsis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo f cum ipsum posit recta C, erit C, Media. Et quoniam est vt A, ad B, ita C, ad D, sunt que A, B, potentia tantū commensurabiles; erunt quoque C, D, solum commensurabiles potentia, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. g Est ergo & D, Mediæ C, commensurabilis Media. Quare inuentæ sunt Mediæ C, D potentia tantū commensurabiles. Dico iam ipsas continere Rationale. Quoniam enim est vt A, ad B, ita C, ad D, & permutando vt A, ad C, ita B, ad D. Vt autē A, ad C, ita est C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D, ideoque B, media pro-



c 13. sex
d 12. sex
e 22. decimi.
f 17. sex.
g 24. decimi.

por-

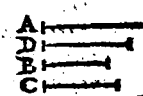
portionalis inter C,& D, a poterit rectangulum sub ipsis C,D,comprehensum. Est autem quadratum ex B, linea Rationali,Rationale. Igitur & rectãgulum sub C, D, Rationale est. Medias ergo inuenimus C,D,potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat. a 17. sex

PROBL. 5. PROPOS. 29. xxviij.

MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineãt.

EXPONANTVR per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commensurabiles, b & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. b 13. sex

c Deinde fiat vt B,ad,C, ita D, ad E. Dico D,E, Medias esse potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineãt. Quoniã enim AB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles: erit rectangulum sub A, B, arque adeo & quadratũ ex D, d quod illi æquale est, e Irrationale, quod Medium dicitur; & ipsa recta D, Media. Et quia est vt B, ad C, ita D, ad E, sunt autem B, C, Rationales, & potentia solum commensurabiles; erunt quoque D, E, potentia solum commensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. demonstratum est. Cum ergo D, Media sit, f erit & E, illi potentia solum commensurabilis, Media. Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles. Dico iam ipsas continere Medium. Quoniam enim est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutãdo vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. g Rectangulum igitur sub DE, æquale est ei, quod sub A, C: Est autem quod sub A, C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus h Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo inuenimus D, E, po-



c 12. sex
d 17. sex
e 22. dec
f 24. dec
g 16. sex
h 22. dec

tentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM. II

IN ijs quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D, Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E. Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo

A, 6.	*C, 12.*	*E, & F, numeri plani similes, quando*
B, 4.	*D, 8.*	*quidem latera habẽt proportionalia, vt ex constructione est manifestum.*
E, 24.	*F 96.*	

228. & 29. noni

QVONIAM autem in lib. 9. ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerũ parem; Imparem vero, si impar multiplicet imparẽ, perspicuum est, quonã modo inueniri possint duo plani similes, quorũ vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidẽ par, alter vero impar. Si enim latera sumpta sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam, si autem numeri sint impares, erunt & plani eorũ impares. Quod si vnius latera sint imparis numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus impar: horum vero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parẽ, alterum vero imparem, &c.

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes AB, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar. b *Et quoniã, siue a pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par ẽ; detracto BD, ex AB, qui æqualis*

b 24. & 26. noni

sit

sit ipsi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiso bifariã in E; Dico numerum factum ex AB, in BD, [a] *qui quidẽ quadratus est, compositum cum quadrato numeri ED, facere quadratum. Quoniam enim numerus AD, bifariam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cũ quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nẽpe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratũ, cum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod est propositum.*

A ..... E ..... D ..... B
C .....

[a] 1. noni

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, quando AB, & C, similes fuerint, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumantur AB, & C, non similes, vterque tamen par, vel impar; inuenti erunt eodem modo duo quadrati numerorũ BE, ED, quorum excessus, numerus scilicet, qui fit ex AB, in BD, nõ est quadratus. Si enim quadratus esset, [b] numeri AB, BD, hoc est, AB, & C, plani similes essent. Quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

[b] 2. noni

SCHOLIVM II.

ITAQVE si iubeamur inuenire duos quadrates numeros, quorum excessus etiam sit numerus quadratus; sumemus vt prius, duos planos similes, quorum vterque par, vel impar sit, nẽpe AB, & C; & reliqua perficiemus, vt in proxime demonstrato est dictum. Nam quadrati numeri ex BE, ED, descripti sunt illi, quos quærimus. Excedit enim quadratus ex BE, quadratum ex ED, numero, qui producitur ex AB, in BD, qui etiam quadratus est.

A ..... E ..... D ..... B
C .....

SI vero inueniendi sunt duo quadrati, quorum excessus non sit quadratus: sumendi erunt duo numeri plani AB, & C, non similes, quorum vterque par sit, vel impar, & reliqua peragenda, vt prius. Nam similiter ostendemus quadratum ex BE, aequalem esse quadrato ex DE, vna cum eo, qui ex AB, in BD, fit; Quare excessus quadratorum ex BE, ED, est numerus factus ex AB, in BD, qui cum non sit quadratus; (Si enim esset quadratus, essent AB, BD, plani similes, quod non ponitur) constat propositum.

A . . . E . . . D . . . . . B
C . . . . . .

HOC posterius facilius absoluemus, si quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter sit quadratus, alter vero non. Vt si quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato Sic quoque si idem quadratus 36 diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. superabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & sic de caeteris.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes AB, & C,

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . . B
C . . . . . .

pares, vel impares, vt in lemmate praecedenti, fiatque eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum AB, DB, inter se, vna cum quadrato ex DE, aequalis sit quadrato ex BE. Auferatur deinde ex DE, vnitas EF. Erit ergo quadratus ex DF, minor quadrato ex DE, quod & latus DF, latere DE, minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF,

in se,

in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex BF, vel aequalis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex BF; ac propterea latus ipsius maius latere BF. Erit ergo latus ipsius vel aequale numero BE, vel maius. (Minus enim non erit, quoniam inter numeros BE, BF, sola vnitate inter se distantes nullus medius est nu-

A.. H.. I. E. F. G... D..... B C.....

merus, ne vnitas ipsa secetur; Esset autem dictu latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam BF, minus vero quam BE.) Si dicatur aequale, ita vt quadrato ex BE, aequalis sit quadratus numerus compositus ex quadrato, qui fit ex AB, in BD, & ex quadrato numeri DF; cum eidem quadrato ex BE, sit ostensus in praecedenti lemmate aequalis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE; erit, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, aequalis ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE. Ablato ergo communi, eo scilicet, qui fit ex AB, in BD; erit reliquus quadratus ex DF, aequalis reliquo quadrato ex DE; Ideoque & latus DF, lateri DE, aequale, pars toti. Quod est absurdum. Non ergo latus quadrati compositi ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in se fit, aequale est numero BE. Sed neq; maius. Sit. n. si fieri po-

teſt, latus illius æquale numero BI, qui maior ſit, quã BE, ita vt quadrato ex BI, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex BI, latere maiore, maior eſt quadrato ex BE, latere minore: erit quoque cõpoſitus ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe ſit, (cum hic compoſitus æqualis ponatur quadrato ex BI,) maior quadrato ex BE. Eſt autem quadrato ex BE, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE: Ablato ergo communi, qui fit ex AB, in BD; erit reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex DE, maior; ac proinde latus DF, latere DE, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter fit ex AB, in BD, alter vero ex DF, in ſe, maius eſt latere BE. Sed neque æquale, neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex BF.

A..H..I..E..F..G...D.....B C.....

SIT iam, ſi fieri põt, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF; & ponatur numerus AH, duplus vnitatis EF. Quia igitur totus AD, totius ED, duplus eſt, (diuiſus enim eſt AD, in E, bifariã.) & ablatus AH, ablatæ vnitatis EF, erit & reliquus HD, reliqui FD, duplus, ex iis, quæ ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco HD, in F, bifariam diuiditur. Qua-

re ex

re ex 6. theorem eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, erit numerus, qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis quadrato ex BF. Sed eidem quadrato ex BF, æqualis ponitur numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF: Igitur qui fit ex HB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis est ei, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF: et detracto communi quadrato ex DF, relinquetur, qui fit ex HB, in BD, ei qui fit ex AB, in BD, æqualis. Quare cũ HB, AB, multiplicantes eundem BD, producant æquales numeros; a habeant autem multiplicantes eãdem proportionem, quã producti; erit HB, ipsi AB, æqualis, pars toti. Quod est absurdum. Non est ergo, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, quadrato ex BF, æqualis. a 18. sep.

SIT tandem, si potest fieri, numerus qui ex AB, in BD, vna cũ quadrato ex DF, minor quadrato ex BF, ac propterea & latus eius latere BF, minus, quod sit BG, ita vt qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, æqualis sit quadrato ex BG. Sumatur autem ipsius EG, duplus AI. Quoniam igitur totus AD, totius FD, duplus est, & ablatus AI, ablati EG; erit rursus & reliquus ID, reliqui GD, duplus; ac propterea ID, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus, qui fit ex IB, in BD, vna cum quadrato ex DG, æqualis quadrato ex BG: Ponitur autẽ eidem quadrato ex BG, æqua-

lis

A..H..I.E.F.G...D.....B
C .....

lis, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Igitur qui fit ex IB, in BD, vna cum quadrato ex DG, æqualis est ei, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Ablatis igitur quadratis ex DG, & DF, quorum qui ex DG, minor est, remanebit qui ex IB, in BD, maior eo, qui ex AB, in BD, pars toto. Quod est absurdum. Nō est ergo qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF, minor quadrato ex BF. Sed neque maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DF. Quod est propositum.

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inuenimus duos numeros, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratum in duos non quadratos partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

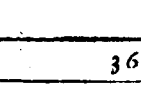
xix. xvij. PROBL. 6. PROPOS. 30.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabils, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

EXPONATVR linea Rationalis AB, & inue-

niantur

niantur ex ijs, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum excessus D E, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex A F, accommodeturque A F, in semicirculo A B F, circa diametrum A B, descripto: ac denique connectatur recta F B. a Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo; b erit quadratum ex A B, æquale duobus quadratis ex A F, & F B; hoc est, recta A B, plus poterit quam A F, quadrato rectæ F B. Et quia est quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, vt numerus C D, ad numerum D E, c erunt quadrata ex A B, A F, commensurabilia; atque adeo cum quadratum ex A B, sit Rationale, nempe ex linea Rationali A B; descriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, propterea que & recta A F, ipsum describens, Rationalis. Rationales ergo sunt A B, A F, atque adeo commensurabiles saltem potentia. Quia vero quadratum ex A B, ad quadratū ex A F, proportionem non habet, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (cum neque quadratus numerus C D, ad non quadratum D E, proportionem habeat, beat, quā quadratus ad quadratū; alias & D E, quadratus esset, d vt in Arithmeticis est demostratum. quod non ponitur) e erunt rectæ A B, A F, longitudine incōmensurabiles: Sunt autē cōmensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur A B, A F, Rónales sunt potentia tantū cōmensurabiles.



a 31. ter
b 47. pri
c 6. deci.
d 74. 6ti.
e 9. dec.

I A M vero, quoniam est vt C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex A F; erit per conuersionē rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratū numerū C E, ita quadratum ex A B, ad quadratum ex F B. (sicut enim C D, superat D E, quadrato C E, ita etiam quadratum ex A B, superat quadratum ex A F, quadrato ex F B,) f Quare rectæ A B, F B, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantum commensurabiles, ita vt maior A B, plus possit, quam minor

f 9. deci.

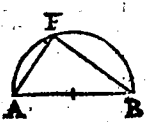
AF, quadrato lineæ F B, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

xxx. xviij.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur-que per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati CE, ED, ita vt ex illis compositus C D, non sit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus C D, secetur in duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD, ad neutrum ipsorum CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum, alias secundum priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus: iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum C E, ED, quadratus quoque, [a] vt in Arithmeticis ostensum est. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum. vt ad id, quod ex A F; accomodeturque A F, in semicirculo AFB, circa A B, descripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, vt in præcedenti, A B, plus quam AF, quadrato rectæ FB; eruntque AB, AF, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propos. Quoniã vero rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex F B; Non habet autem CD, ad C E, proportionem, quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum



C, 144. E, 16. D C, 160. D.
C..... E... D

[a] 24. 6.

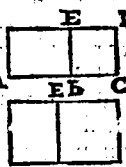
ex

ex *AB*, ad quadratum ex F B, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. [a] Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales *AB*, AF, potentia tantum commensurabiles, ita vt maior *AB*, plus possit quam minor A F, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum. [a] 9. dec.

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectū constitutæ, quarum A B, maior sit. Dico esse, vt AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex B C. Describatur enim ex B C, quadratum BD, compleaturque rectangulū AD; eritq; rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æqualis: [b] *perspicuum autem est, esse vt A B, ad BC, ita AE, ad BD.*



[b] 1. sexti

EODEM modo erit, vt minor ad maiorē, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratū maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua AB. minor est, quam BC.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

xxxi. xxiiii. xxv.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

a 30. dec

a REPERTAE sunt duæ Rationales A,B, potentia tantum commensurabiles: ita vt A, maior plus possit quã B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitque C, media proportionalis inter A,& B; & fiat vt A,ad B,ita C,ad D. Quoniam igitur A,B,sunt Rationales potentia solum commensurabiles;

A
C
B
D

b 22. de cimi.

b erit rectangulum sub A,B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autem A,& B,potentia tantum cõmensurabiles;erũt quoque C,& D, potentia solum commensurabiles. vt in scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C,D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cùm enim sit vt A,ad B,ita C,ad D;& permutando vt A,ad C, ita B,ad D;sit autem vt A,ad C,ita C,ad B,erit quoque vt C, ad B,ita B,ad D;d Ac propterea rectangulum sub C,& D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit;erit & rectangulũ sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quoniam vero est vt A,ad B,ita C,ad D: potest autem A, plus quam B,quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis,ex constructione; e poterit quoque C, plus quam D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles,quæ Rationale continent,ita vt maior C, plus possit quam minor D,quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.

c 24. de cimi.

d 17. sex.

e 15. dec

QVOD si repertæ sint A,B, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam B. quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D,quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHO-

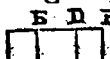
SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C, D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineãt, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

SI sint tres liueæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secũda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum cõstitutæ. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub BC, CD. Describatur enim ex BC, quadratum BCDE, perficiaturq; rectangulum AF; Eritq; AE, contentũ sub AB, BC; & CF, sub BC, CD; quod BE, CD, ipsi BC, æquales sint. [a] *Perspicuum autem est esse AB, ad CD, vt AE, ad CF. Quod est propositum.*



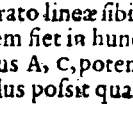
[a] 1. sex.

PROBL. 9. PROPOS. 33. xxxij. xxvj.

INVENIRE duas Medias potentia solum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

SINT inuentæ tres Rationales A, B, C, potentia tantum

tum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. a Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commensurabilibus, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi commensurabilis longitudine: inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia solum commensurabilis, per ea, quæ in scholio propos. 21. huius lib. demonstrauimus. b Et ipsarum A, B, sumatur media proportionalis D; c fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniã igitur ex lemmate antecedenti, est vt A, ad C, ita rectangulum sub A, B, ad rectangulum sub B, C: d Est autem rectangulo sub A, B, æquale quadratum ex D, e & rectangulo sub B, C, æquale rectangulum sub D, E, quod proportionales sint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum sub D, E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. recta D, ad rectam E, Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia solum commensurabiles. Ergo & D, E, potentia solum commensurabiles sunt, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus. f Quia vero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; g erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis Media. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, h quod Medium est, (quod B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectãgulum sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; i poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum commensurabiles, quæ Medium cotinent, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ rectæ lõgitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciẽdũ.



a 30. dec
b 13. sex
c 12. sex
d 17. sex
e 16. sex
f 22. dec
g 24. de cimi.
h 22. de cimi.
i 15. dec

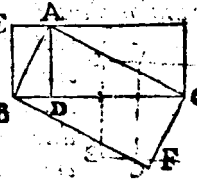
QVOD

QVOD si repertæ fuerint A,B,C,Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A,plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis,reliqua autem construatur,vt prius, demonstrabimus similiter,inuentas esse duas Medias D,E,potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quam minor E,quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

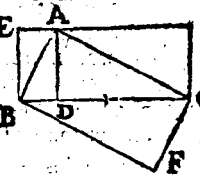
SIT triangulum rectangulum ABC,angulum rectum habens BAC,à quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulũ contentum sub CB,BD,æquale esse quadrato ex AB:contentum autem sub BC,CD,æquale quadrato ex AC: & contentum sub BD,DC,æquale quadrato ex AD:contentũ denique sub BC, AD, æquale contento sub AB,AC.

QVONIAM ex coroll.propos. 8. lib. 6. recta AB,media proportionalis est inter CD,BD, erit *rectangulum sub CB, BD, quadrato ex AB,æquale.* 17. sex



EADEM ratione erit rectangulum sub BC, CD, *æquale quadrato ex AC; quoniam per idem coroll.* AC,*media proportionalis est inter* BC,CD.

RVRSVS quia ex eodem coroll. AD, inter



BD, DC, media est proportionalis, erit eodem modo rectangulum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

POSTREMO, a quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit vt BC, ad AC, ita AB, ad AD. b *Quare rectangulum sub BC, AD, æquale est rectangulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum CE, contentū sub BC, AD: Item rectangulum AF, sub AB, AC, contentum.* c *Quoniam igitur rectangulum CE, duplum est trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula CE, AF. quod est propositum.*

a 8. sexti

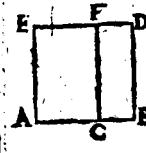
b 16. sexti.

c 41. primi.

LEMMA II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorē, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulū sub tota & minore parte cōtentū.

SECETVR recta AB, non bifariam in C, sitque maior pars AC. Dico esse vt AC, ad CB, ita rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur n. ipsius AB, quadratū ABDE, ducaturq; CF, ipsi AE, parallela; eritq; AF, contentū sub AB, AC, et CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, æquales sint. d *Qm igitur est vt*



d 1. sex.

AC,

AG, ad CB, ita AF, ad CD; constat propositum.

EADEM ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor aũt secetur bifariã; erit rectangulũ sub ipsis contentũ duplũ rectãguli, quod submaiori linea, & dimidia parte minoris cõtinetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulũ rectũ constituentes ABC, secetur q; minor BC, bifariam in D. Dico rectangulũ sub AB, BC, duplũ esse rectanguli sub AB, BD. Compleatur enim rectãgulum AC, sub AB, BC; ducaturque DE, ipsi AB, parallela, eritque BE, contentũ sub AB, & BD dimidia minoris.

Quoniam igitur AC, ipsius BE, duplum est, quod & basis BC, dupla sit basis BD, constat propositum. a 1. sexti

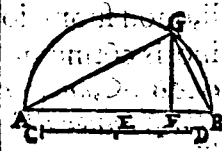
EODEM modo, si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod sub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AB, minore & BD, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

PROBL. 10. PROPOS. 34. xxxiij. xxvij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis,

Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

a 31. dec. a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia solum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quam minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; seceturque CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius sib, ad AB, applicetur quadratum ex CE, hoc est quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud quod sub AF, FB, continetur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturque rectæ AG, GB. Quoniã igitur AB, plus potest, quam CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque



b 19. dec. est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartæ parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum vero sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma 1. eiusdem antecedentis propositionis; c quod angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB, ac propterea cum AF, FB, longitudine sint incommensurabiles; d erunt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. e Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est; f æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 17. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factum, g æquale est quadrato ex FG, (propterea quod angulus AGB, rectus est & FG, ad AB,

c 31. tert.

d 10. dec.

e 4. defin 42. primi.

f 17. sex.

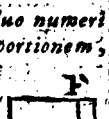
per-

perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE; æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existentis ipsius CE, dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cum FG, dimidia sit minoris CD,) a Sed rectangulum sub AB, a 22. dec.
CD, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Medium est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectangulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentum igitur sub AG, GB, Medium quoque est. Ostensum autem est compositum ex earum quadratis Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

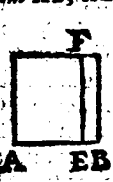
DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam quadratus ad quadratum; fiatque vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniam igitur est vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE.



Non habet autem C, ad D, proportionem quam quadratus ad quadratum; b *erunt latera AB, AE, dictorum quadratorum proportionem non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cum AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur* C, 6. D, 4. b 9. dec. c 1. sex.

a 10. decimi. cum AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, a erit quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabile. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur, erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemque argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum



C, 6. D, 4. est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

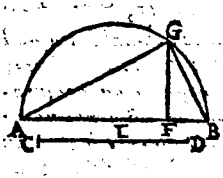
AT vero si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totum AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim utrumque AF, FB, Rationale sit: erunt ipsa inter se commensurabilia. b Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum utrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile utrique Rationali AF, FB, c Rationale quoque est. Quod est propositum.

b 16. decim. def 9.

PROBL. 11. PROPOS. 35. xxxiv. xxviij.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

d 32. dec. A REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quam minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, æquale existens quadratis rectarum AG, GB, Medium est, erit quoque compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in



e 47. primi.

ante-

antecedēti propositione, ostēdemus rectangulū sub AB, CD, duplū esse rectāguli sub AB, FG; atque adeo illud esse huic cōmēsurabile. Quare cum rectāgulū sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos 33. huius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ ostēsæ sunt potentia incommensurabiles, faciunt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdē comprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.

xxxv. xxix.

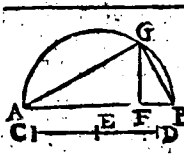
PROBL. 12. PROPOS. 36.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediū, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

a REPERIANTVR duę Mediæ AB, CD, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior AB, plus possit quam minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiátque reliqua, vt in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas AG, GB, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media AB, Medium est, b. & quadratis rectarum AG, GB, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus, vt in 34. demonstrabimus, rectan-

a 33. dec

b 47. primi.



gulum sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum ex constructione, rectangulum sub AB, CD, Medium sit: erit quoque rectangulum sub AB, FG, hoc est, sub AG, GB; quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam vero AB, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi CD: Est autem eidem CD, ipsa CE, longitudine commensurabilis; quod illa huius sit dupla; a erunt AB, CE, longitudine incommensurabiles. Sed vt AB, ad CE, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, CE, hoc est, ad rectangulum sub AB, FG; hoc est, sub AG, GB. (sunt enim rectangulum sub AB, FG, & sub AG, GB, per 1. lemma propos. 33. huius lib. æqualia.) b Igitur quadratum ex AB, incommensurabile est rectangulo sub AG, GB. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

a 13. dec

b 10. dec

SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 14. huius lib. nos demonstrandum recepimus: nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, quam rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulum Medium, Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulū sub AG, GB, commensurabilia. quod

non ponitur. Quocirca si sumatur AB, potens compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB, inuenta erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. xxxvj. xxx.

SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duæ Rationales AB, BC, potentia solum commensurabiles, inuentę per 2. lemma propos. 21. huius lib. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quoniã enim AB, longitudine incommensurabilis est ipsi BC: & vt AB, ad BC, ita est rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, per lemma propos. 21. huius lib. erit rectangulum sub AB, BC, quadrato ex BC, incommensurabile. Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est eius duplum, nempe quod bis sub AB, BC, continetur; & quadrato ex BC, cõmensurabile est quadratum rectę AB; (omnia enim sunt Rationalia) [b] atque adeo & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, eidẽ quadrato ex BC, commensurabile est. Igitur per ea, quę in scholio propos. 14. huius lib. ostendimus, & duod bis sub AB, BC, continetur, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compositũ ex eo, quod bis sub AB, BC, & ex cõposito quadratorũ rectarum AB, BC, hoc est, quadratum ex tota AC, ([c] Est enim hoc quadratum æquale quadratis rectarũ AB, BC, vna cum rectãgulo sub AB, BC, bis) compositio ex quadratis rectarum AB, BC, [d] incommensurabile erit: Est autẽ compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale, quod

[a] 10. dec.
[b] 16. dec.
[c] 4. set.
[d] 17. dec.

com-

commensurabile sit ostensum quadrato Rationali ex BC, Rationali. Igitur quadratum ex AC, quadrato Rationali ex BC, incommensurabile, [c] Irrationale est; atque adeo & recta ipsa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, seu vt alii loquuntur, Binomiũ, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia solum commensurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commẽsurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod ostendendum erat.

c 10. def

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nam recta quæ inter eas est medio loco proportionalis, [b] *Irrationalis est, qua Media vocatur. At vero composita ex ipsi,* [c] *Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur.*

b 22. de cimi.

c 37. de cimi.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

SI duæ Mediæ potentia tantum commẽsurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autẽ ex binis Mediis prima.

xxxvij. xxxj.

COMPONANTVR duæ Mediæ [d] superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse.

Quia enim AB, est ad BC, vt rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propos. 31. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC, longitudine incommensurabiles; [e] erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex BC, incommensurabilia; Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, [f] atque adeo & compositum ex

d 28 de cimi.

e 10. dec

f 16. dec

ipsarum quadratis quadrato ex B C, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub A B, B C, hoc est, quadratum ex A C, a quod huic composito æquale est, b incommensurabile quoque est rectangulo sub A B, BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC, commensurabile rectangulum semel sub A B, BC, cum hoc sit illius dimidium. c Igitur quadratum ex A C, incommensurabile est rectangulo sub AB, BC: Ponitur autem rectangulum sub AB, BC, Rationale. d Irrationale ergo est quadratum ex AC, e & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima, vel vt alii loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

a 4. sec. b 17. dec

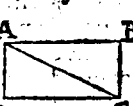
c 13. dec

d 10. def e 11. def

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATVR rectangulũ ABCD, sub Rationali AB, & Irrationali BC. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, & faciet ipsum ad Rationalem AB, applicatum latitudini BC, Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim B C, Irrationalis. Non ergo AC, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.



1

22. dec

THEOR. 27. PROPOS. 39.

xxxvii xxxii.

1 SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium con-

tineant

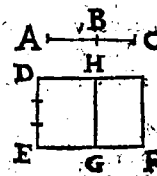
tineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secunda.

a 29. decimi.

COMPONANTVR duæ Mediæ a superius inuentæ AB, BC, potentia tantum cõmensurabiles, quæ Medium contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, b ad quam applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC; & composito ex quadratis rectarum AB, BC, æquale alterum ad eandem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, c æquale est duobus quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, continetur.

b 45. primi.

c 4. secũ.



Quoniam vero, ex hypothesi, rectangulum sub AB, BC, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurabile, hoc est, HF, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; d erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum DG, vtriusque ipsorum commensurabile: Sed verumque quadratorum ex Medijs AB, BC, Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; (e est enim GH, Rationali DE, æqualis) f erunt eorum latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia AB, BC, longitudine incommensurabiles sunt; & est vt AB, ad BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, BC, ex lemmate 1. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommensurabile rectangulo sub AB, BC, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est: Atqui quadrato ex AB, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarum AB, BC; & rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod continetur bis sub AB, BC, cum hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. hu-

d 16. dec

e 34. pri

f 23. de mi.

ius

ius lib. diximus, erit & cõpositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectanguluꝫ DG, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, rectangulo HF. Cum ergo sit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [b] erit EG, ipsi GF, longitudine incommensurabilis. Ostensum autem iam fuit EG, GF, esse Rationales. Rationales igitur sunt EG, GF, potentia tantum commensurabiles, [c] ac propterea & tota EF, composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex AC, ipsi DF, æquale, Irrationale est. Quare & recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem ex binis Mediis secunda, seu vt alijs placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

a 21. sexti
b 10. decimi.
c 37. decimi.

SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantum commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Mediis primam: Hic vero lineam Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Mediis potentia tantũ cõmensurabilibus, quæ Medium contineat, ex binis Mediis secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA

SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta AD, in B, non bifariam, sitque maior pars AB, in qua sumatur BC, minori BD, æqualis, vt sit AC, excessus,

quo

quo AB, superat BD, hoc est, BC, ipsi BD, æqualem. Dico quadrata rectarũ AB, BD, simul maiora esse rectãgulo bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC. Quoniã. n. quadrata ex AB, BC, [a] *æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, vna cũ quadrato ex AC, est q; BC, ipsi BD, æqualis: erunt quoque quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis sub AB, BD, vna cũ quadrato ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora sunt, quam rectangulum bis sub AB, BD, quadrato rectæ AC. quod est propositum.*

a 27. secũ.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

xxxix. xxxiij.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

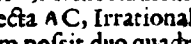
SI duæ rectæ lineæ potentia incõmensurabiles componantur; quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ [b] superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. Dico totam AC, esse Irrationalem. Quoniam. n. rectangulum sub AB, BC, Medium ponitur, erit & rectangulum bis sub AB, BC, illi commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 4. huius lib. atque adeo Irrationale. Ponitur autem compositũ ex

b 34. dec.

quadra-

quadratis rectarum AB, BC, Rationale. [a] Incommensurabile ergo est rectangulum bis sub A B, BC, composito ex quadratis rectarum A B, BC. [b] Igitur & rectangulum bis sub AB, BC, una cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale; [c] erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; [d] Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem Maior, quia [e] cum posit duo quadrata ex AB, BC; & rectangulum bis sub AB, BC; compositum ex quadratis rectarum AB, BC, per lemma antecedens, maius est rectangulo bis sub A B, B C. Quare cum compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale sit, rectangulum vero bis sub AB, BC, Medium; recte vocabitur AC, Maior, siquidem à Rationali, quod maius est, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 10. def
[b] 7. dec
[c] 10. def
[d] 11. def
[e] 4. sec.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

xxxx. xxxiiij.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [f] superius inuctę AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum quidem ex quadratis ipsarum, Medium, rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Dico totam

[f] 35. dec

AC, Irrationalem esse. Quoniã enim compositum ex quadratis rectarum AB, BC, Medium est; quod vero continetur bis sub A B. BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod sub AB, BC, semel cõtinetur, Rationale ponatur; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC. [b] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectãgulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est rectãgulo bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, vt diximus, sit Rationale; [c] erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; [d] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium, potẽs, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 10. def.
[b] 17. dec
[c] 10. def.
[d] 11. def.

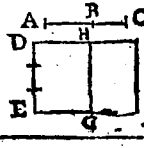
xxxxj. xxxv.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediũ, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

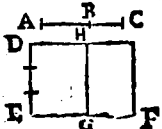
[e] 36. decimi.

COMPONANTVR duæ rectæ [e] superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectãgulum sub eisdem Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileq;



com-

compositō ex quadratis ipsarum. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, [a] ad quam applicetur rectangulum D F æquale quadrato ex A C; Et cōpositō ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG Et quia quadratum ex AC, hoc est, rectangulum DF, [b] æquale est compositō ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo bis sub AB, BC. Quoniam vero tam compositum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulum DG, quam rectangulum sub AB, BC, atque adeo ex coroll 24. huius libri, quod bis sub AB, BC, nempe ipsum HF, (cū illi sit commensurabile) Mediū ponitur, [c] facient DH, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommensurabiles. Rursus quia compositum ex quadratis rectarum AB, BC, id est, rectangulum DG, incommensurabile ponitur rectangulo sub AB, BC: Eidem autem rectangulo sub AB, BC, commensurabile est ipsius duplum, nempe quod bis continetur sub AB, BC, hoc est, ipsum HF; [d] erunt & DG, HF, incommensurabilia. Quare [e] cum sit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; erunt EG, GF, longitudine incommensurabiles: Atqui EG, GF, ostensæ sunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales sunt potentia solum commensurabiles; [g] ac propterea tota EF, ex ipsis cōposita Irrationalis est. Quare DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propos. 38. huius lib. Irrationale est. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale est; [h] ideoque & recta ipsa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis sub A B, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Mediū, &c. Quod erat demonstrandum.

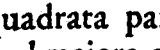


[a] 45. prim.
[b] 4. sec.
[c] 3. dec.
[d] 3. dec. et 1. sext.
[e] 10. dec.
[g] 37. decimi.
[h] 11. def.

LEMMA.

SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales; erũt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, *& rursus inæqualiter in* D, *sintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quã posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim* AB, *bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC,* CB, *vna cum quadrato ex EC,* [a] *æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC,* CB, *vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD,* DB, *vna cum quadrato ex* ED. *Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratum ex EC, maius sit quadrato ex ED; erit reliquum rectangulum sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD,* DB; *ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniam vero quadratũ ex AB,* [b] *æquale est tam rectangulo bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, quã rectangulo bis sub AD, DB, vna cũ quadratis ex AD,*



[a] 5. sec.

[b] 4. sec.

DB;

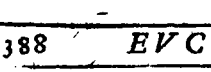
DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vna cũ quadratis ex AC, CB, æquale rectangulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cũ rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

SED cadat iam D, inter A, E. Quoniam igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quam partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorum) maior quam CB; *(quæ priorum minor est) ac proinde cum AE, EB, æquales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE. Itaque quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, a æquale est quadrato ex EB:* a 5. sec. *Item rectangulum sub AD, DB, vna cũ quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulũ sub AC, CB, vna cum quadrato ex* EC, *æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex* DE. *Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.*

THEOR. 31. PROPOS. 43: xxxxij. xxxvj.

QVAE ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri.



Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterũ in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, non diuidi bifariã. Nã si bifariã diuideretur, essent AC, CB, lõgitudine cõmensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantũ commẽsurabiles. Eodem modo neque ad D, bifariã secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tãrum commensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quã ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt, quã partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedẽs, quadrata ex AC, CB, vel minora sũt quadratis ex AD, DB, vel maiora. (Neque enim partes AD, DB, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus AC, CB, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nã hac ratione secaretur AB, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorũ æqualis est, vt in pronunciato 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia quadratis ex AD, DB, vna cum rectangulo bis sub AD, DB, a quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex AB, fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & ablati compositi ex quadratis rectarum AD, DB, idem sit reliqui rectanguli bis sub AC, CB, & reliqui rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale est. (Cum enim rectæ AC, CB, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in scholio propositionis 34, huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum AD, DB, Rationale. Qure cum

a 4. sec.

Ratio-

Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27, huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est. a Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, Medium est, erit & quod bis sub AC, CB, illi commensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub AD, DB, Medium erit. b Quare cum Medium non superet Medium Rationalis, non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Nō igitur AB, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat punctū diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

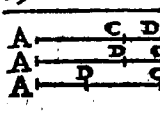
a 22. decimi

b 27. decimi

THEOR. 32. PROPOS. 44. xliij. xxxvij.

QVAE ex binis Medijs prima, ad vnū duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propos. 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D. existat, similiter probabimus, vt in præcedenti propositione, excessum rectāguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub, AD, DB, eundē esse, qui est cōpositi ex quadratis rectarū AC, CB, & cōpositi ex quadratis rectarū AD, DB: Sed excessus rectāguli bis sub AC, CB, & rectāguli bis sub AD, DB, spatiū est Rationale (Cū enim AC, CB, ponātur continere Rationale, erit & quod bis sub AC, CB, ei,



quod cõtinetur semel sub AC, CB, commensurabile, Rationale. Eodẽ que modo Rationale erit, quod bis sub AD, DB. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri ostẽdimus: perspicuum est, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatiũ esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & cõpositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale est. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ sunt, & potẽtia cõmensurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. [a] Quare & compositum ex ipsis vtriq; ipsorum commensurabile erit. Igitur cum vtrumq; sit Medium, erit & cõpositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus cõpositum ex quadratis rectarum AD, DB, [b] Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale. Ostẽdimus autẽ & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quã ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rẽ ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

a 16. dec

b 27. dec

xxxiv. xxxviij.

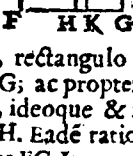
THEOR. 33. PROPOS. 45.

QVAE ex binis Medijs secunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs secunda AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB. Mediæ sint potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propos. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, continenesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia

nomi-

nomina AD,DB,Igitur vbicunqne punctum D, existat, similiter ostendemus,vt in propositione 43. quadrata ex AC,CB,maiora esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur rationalis E F, a ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH,æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei,quod continetur bis sub A C, CB, quandoquidem quadratum ex AB, b æquale est quadratis ex AC, CB, & rectangulo bis sub AC,CB. Eodem modo si ad EF,applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale, erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD,DB, comprehenso. Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD,DB;erũt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt,inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt per lemma propos. 39.huius libri, rectangulo bis sub AC,CB; erit & EH, maius quam I G; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH,maior quam dimidium ipsius FH. Eadẽ ratione ostẽdemus FK,maiorẽ esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH. HG, partibus FK,KG, singulæ singulis. Quoniã vero AC,CB, Mediæ sunt,& potentia commẽsurabiles;erunt & earum quadrata Media,& commẽsurabilia. c Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commẽsurabile erit. Cum ergo vtrumque ipsorum sit Medium,erit quoque cõpositum ex ipsis, hoc est,EH, per coroll.propos. 24.huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK, d Quare EH, EK, ad Rationalem EF,applicata faciunt latitudines FH,FK,Rationales ipsi EF,longitudine incommensurabiles. Eodem modo cum rectangulum sub AC,CB ponatur Medium,erit & quod bis sub AC,CB,hoc est,IG,illi cõmensurabile,Medium, ex coroll. propos.24.huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalẽ HI,e erit HG,Rationalis ipsi HI, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus L G,Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL;longitudine in-



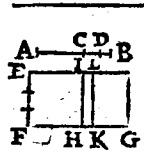
a 45. pri.

b 4. sec.

c 16. dec.

d 23. dec

e 23. dec



commensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine sunt incommensurabiles, & est vt AC, ad CB ita per lemma 3. propos 19 huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, a erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. Sed quadrato ex AC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, CB, (Cum n. AC, CB, potentia sint commensurabiles, atque adeo ipsarum quadrata commensurabilia; b erit & compositum ex ipsis vtrilibet ipsorum, nimirum quadrato ex AC, commensurabile.) Rectangulo vero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholium propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB. hoc est, ipsi IG. Quocirca c cum sit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, d erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autē & Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. e Igitur FG, tota Irrationalis est quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum G. Eodem modo ostendemus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, f vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur AB, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctum, quam ad C. Quare ad vnū duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.

a 10. dec
b 10. dec
c 1 sexti
d 10. dec
e 37. dec
f 43. dec

xxxv. xxxix.

THEOR. 34. PROPOS 46.

MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB. potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale, rectangulum vero sub ipsis Medium, vt vult propos. 40 huius lib. Dico AB, non posse diuidi

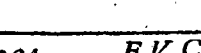
ad

ad aliud punctum in alia nomina quæ scilicet lineæ incōmensurabiles quoque sint potentia, facientes compositū ex ipsarum quadratis Rationale, & rectangulum sub ipsis Medium. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicūque ergo punctum D, exiterit, demonstrabimus similiter, vt in propositione 43. excessum compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, eum esse, qui rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus cōpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatiū est Rationale: (quia cum vtrūq. cōpositū ex hypothesi sit Rationale, erit quoq. eorum excessus spatiū Rationale, vt in scholio propos. 27. huius lib. ostēdimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectāguli bis sub AD, DB, spatiū est Rationale. Quoniā vero rectangulū sub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulū bis sub AC, CB, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis sub AD, DB. a Igitur cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale; Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum. a 27. dec

THEOR. 35. PROPOS. 47. xxxxvj. xxxx

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum vero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius lib. Dico AB, non posse



se diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineę quoque incõmensurabiles potẽtia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, ostendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub A D, DB, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum A C, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propoſ 44. Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: a Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatium Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

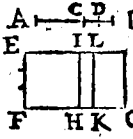
a 27. de *imi.*

THEOR. 36. PROPOS. 48.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media A B, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, C B, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum qaadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propoſ. 42. huius libri. Dico A B, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiam lineæ potentia incommensurabiles, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis

Me-



Medium, incommensurabileque compositio ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina, ad punctum D, vbicunque hoc punctum D, existat. Constructio autem eadem fiat, quæ in propos. 45. ostendemusque vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse, singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi composito æquale, Medium. Item quia rectangulum sub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. quia illi commensurabile est. Igitur Media EH, IH, applicata ad Rationalem EF, (est enim IH, ipsi EF, æqualis) [a] facit latitudines FH, HG, Rationales longitudine ipsi EF, incommensurabiles. Eadem quoque ratione probabimus, & rectas lineas FK, KG, Rationales esse, longitudine incommensurabiles ipsi EF. Quia vero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, descriptis, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, ex hypothesi, rectangulo bis sub AC, CB, nempe rectangulo IG; [b] estque vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostendimus: Sed ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Non secus demonstrabimus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non posse, [c] iam ante demonstratum est. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in sua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

[a] 23. decimi.

[b] 1. sexti.

[c] 43. decimi.

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuisa in nomina, cuius maius nomen plus possit

ſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile; Vocetur ex binis nominibus ſecunda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomen; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHO-

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearum, quæ ex binis nominibus appellantur colligitur hac ratione. Quoniam nomina linea, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt linea Rationales potentia tantum commensurabiles, non poterit vtrũque nomen expositæ Rationali commensurabile esse longitudine; (alias enim nomina ipsa essent quoque linea longitudine inter se commensurabiles, vt in scholio propos. 12. huius libri docuimus, quod non ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina inæqualia sunt; (alias enim essent lineæ inter se longitudine commẽsurabiles, quod nõ ponitur) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirũ prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vna cum eisdem tribus generibus alia tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.

RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile, quoniam maius natura antecedit minus, cum minus a maiori contineatur; tertiam ve-

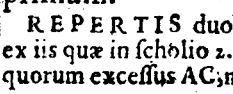
ro, in qua neutrum ipsorum nominum exposita Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

xlviij. xxxxij.

PROBL. 13. PROPOS. 49.

INVENIRE ex binis nominibus primam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex iis quæ in scholio 2. propos. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius libri quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam enim quadrata ex EF, FG, cum proportionem habeant, quam numeri AB, AC, a commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. b Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles; c Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, sit autem AB, maior, quam AC, erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniam ihitur est vt AB, numerus ad



a 6. dec.

b 9. dec.

c 37. dec

AC,

AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebunt, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [a] ac proinde rectæ EF, & H, longitudine cõmensurabiles sunt. Quoniã igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

[a] 9. dec.

PROBL. 14. PROPOS. 50. xlix. xliij.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in præcedenti propositione, expositaque Rationali quadã D; sumatur ei longitudine commensurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, esse ex binis nominibus secundam. Quoniam enim quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, [b] commensurabilia sunt; erunt & rectæ FG, EF, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis est. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [c] Incõmensurabiles ergo sunt longitudine rectæ FG, EF. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [d] Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex

[b] 6. dec.

[c] 9. dec.

[d] 37. dec.

binis

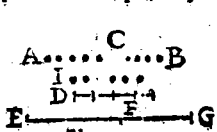
binis nominibus dicitur; Dico & secundam esse. Cum enim sit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF; Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB maior quam AC; erit & quadratū ex EF, maius, quā quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in præcedenti propos. H, ipsi EF longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque minus nomen FG, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

L. xliiij.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

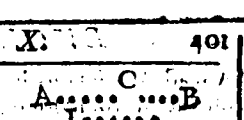
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius nūmerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cū non sit quadratus, non habebit ad quadratum AB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rursus cum sit non quadratus proxime maior, quam AC, differet vel sola vnitate ab AC, vel binario, (Vnitate quidem, quando AC, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum; binario vero, quādo vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt si AC, sit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At si AC, sit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addi-



xxxxx. xvij

ta ad

ta ad 5. non fatit quadratũ, &c.)
Quare vt in scholio propos. 8. lib. 8, ostendimus, non cadet inter I, ad AC, medius proportionalis. Igitur nõ erunt similes plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Exposita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll. propos. 6. huius lib. vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. [a] Erunt ergo quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commensurabilis; atque adeo & lineæ D, EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc est, quadratum ex D, ad quadratum ex EF, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [b] erunt D, & EF, rectæ inter se longitudine incommensurabiles. Rursus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. [c] Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commensurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia. Igitur cum EF, ostensa sit Rationalis; erit & FG, Rationalis. Et quia AB, ad AC, hoc est, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] erunt EF, FG, longitudine incommensurabiles. Sunt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [e] Atque idcirco tota EG, Irrationalis est ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam esse. Quoniam enim est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG; Non habet autẽ I, ad AC, proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; [f] ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt



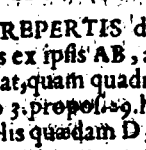
[a] 6. dec.
[b] 9. dec.
[c] 6. dec.
[d] 9. dec.
[e] 37. dec.
[f] 9. dec.

AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Est autem AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; & neutra ipsarum EF, FG, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

PROBL. 16. PROPOS. 52. INVENIRE ex binis nominibus quartã.

li. xlv.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in schol. 3. propos. 9. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rónalis, cum Rationali D, commensurabilis sit. Quod si reliqua construantur, vt in propos. 49. ostendemus similiter, vt ibi, totam EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartã esse. Erit enim rursus, vt in 49. propos. quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49 propos. per conuersionem rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neque quadratum ex EF, ad quadratum ex H, erit, vt numerus quadratus ad numerum quadratum. [a] Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectæ EF, & H. Itaque cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen E F, longitudine commensurabile expositæ



a 9. dec.

Ratio-

Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

PROBL. 17. PROPOS. 53. lij. xlvj.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

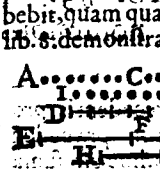
REPERTIS (repetita figura præcedentis propos.) duobus numeris AC, CB, vt in præcedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositæ Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen FG, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

PROBL. 18. PROPOS. 54. liij. xlvij.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoque quadratus, habeatque ad neutrū

ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus qui libet non quadratus diuidatur in duos numeros inter se
230. sep. primos. a Nam hac ratione & totus ad vtrumq; ipsorum primus erit; atque ideirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ ad finem lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quã quadratus ad quadratum; qualis est quilibet numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, non quadratos proportionem non habebit, quam quadratus ad quadratum. Expohatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. prop. 6. huius lib. & reliqua fiant, vt in propos. 51. ostendemusque vt ibi, rectas D, & EF, esse longitudine incommensurabiles, atque totam EG, ex binis esse nominibus. Dico & sextam esse. Demonstrabimus enim similiter, vt in 51. propos. D, & FG, longitudine esse incommensurabiles, esseque quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoque vt in propos. 49. per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum,
b 9. dec. b erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum EF, FG, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.



L B M M A

SI recta linea secta sit vtcunque: erit re-

Etan-

ctangulum sub partibus contentũ, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentũ sub tota, & vna parte, medium propoportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratũ dictæ partis.

SECTA sit recta AB, vtcunque in C. Describatur ex AB, quadratum ABDE, in quo diameter ducatur BE. *Ducta autem ex C, recta CF, ipsi* BD, *parallela, quæ diametrũ secet in* G, *agatur per G, ipsi AB, parallela HI. Erũt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium* AC, CB; *vtrumque autem rectangulorum* DG, GA, *comprehensum eisdem partibus: At verò rectangula* CD, AI, *sub tota AB, & parte CB, cõtẽta. Dico* DG, *medium proportionale esse inter quadrata FH, CI: At* CD, *medium esse proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniã enim* [a] *vt HG, ad GI, ita est tam FH, ad DG, quam AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI.* [b] *Est autem AG, ipsi DG, æquale. Igitur erit quoque vt FH, ad DG, ita DG, ad CI; Atque adeo DG, medium proportionale est inter quadrata FH, CI.*

a 1. sexti

b 43. pri.

RVRSVS quia est, [c] *vt AB, ad CB, ita tam AD, ad CD, quã AI, ad CI; erit vt AD, ad CD, ita AI, ad CI: Est autem* AI, *ipsi* CD, *æquale. Igitur erit vt AD, ad CD, ita quoq; CD, ad CI. Quare* CD, *medium proportionale est inter quadrata AD, CI. Eodem modo erit AF, medium*

c 1. sexti

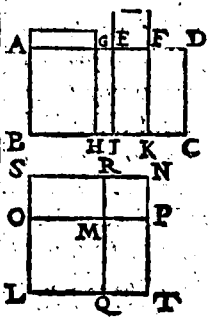
proportionale inter quadrata AD, FH.

Liiij. xLviij.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Irrationalem eſſe, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; & deniq; AE, expoſitæ Rationali AB, longitudine commenſurabilis erit. Secetur ED, bifariã in F. Quia igitur AE, plus poteſt quam ED, quadrato rectę ſibi longitudine commenſurabilis, ſi quartæ parti quadrati ex ED, hoc eſt, quadrato ex EF, æquale parallelogrammum ſub AG, GE, contentum, per 2. lemma propoſ. 17. huius lib, applicetur deficiens figura quadrata; a in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. Quare AG, GE, partes inter ſe, longitudine commenſurabiles ſunt. Ducãtur iam per puncta G, E, F, ipſis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK. b Et parallelogrammo AH, æquale quadratum fiat LM: At parallelográmo GI, æquale fiat quadratum MN; coniungaturque quadrata LM, MN; ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnam rectam lineam conſtituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnã rectã QR, vt demonſtratum eſt à nobis ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. propterea qđ anguli OMQ, PMR, ad verticem M, ſunt æquales, nempe recti.



a 18. *dec.*

b 14. *ſec.*

Compleato autem rectangulo L N, cum rectæ O M, M P, rectis Q M, M R, æquales sint; ideoque & tota O P, toti Q R, [a] sit autem O P, ipsis S N, L T, & Q R, ipsis L S, T N, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoque quadratum. [a] 34. pri

QVONIAM vero rectangulum sub A G, G E, æquale est, per constructionem, quadrato ex E F, [b] erit vt A G, ad E F, ita E F, ad G E; [c] Ac propterea & vt A H, ad E K, ita E K, ad G I. Quare E K, medium proportionale est inter A H, G I, hoc est, inter quadrata L M, M N, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, M N, medium proportionale est T M, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur est T M, ipsi E K. [d] Cum ergo ipsi T M, æquale sit M S, [e] & ipsi E K, æquale sit F C, erit & M S, ipsi F C, æquale. Quocirca totum quadratum L N, toti rectangulo A C, æquale est; atque adeo recta O P, potest spatium A C, contentum sub A B, Rationali, & A D, ex binis nominibus prima. Dico O P, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur. [b] 17 sex [c] 1. sexti [d] 43. pri [e] 36. pri

QVONIAM enim A G, G E, ostensæ sunt longitudine commensurabiles, [f] erit & tota A E, vtrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cum sit maius nomen ipsius A D, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & A G, G E, eidem A B, ex scholio propos. 12. huius lib. longitudine commensurabiles sunt; Atque adeo cum A B, sit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. [g] Quare rectangula A H, G I, sub Rationalibus longitudine commensurabilibus contenta Rationalia sunt: Ideoque & quadrata L M, M N, ipsis æqualia, Rationalia erunt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rationales erunt. [f] 16. dec [g] 20. dec

ET quoniam A E, ipsi E D, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi A E, longitudine ostensa commensurabilis A G, & ipsi E D, commensurabilis est longitudine E F, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & A G, E F, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & A H, E K, [h] eandem proportionem habentia, quam A G, E F, [i] incommen- [h] 1. sexti [i] 10. dec

surabilia sunt. ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt
a 10 dec incommensurabilia. a Igitur rectæ OM, MP, longitudine
b 1. sex. sunt incommensurabiles b cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. c Qua propter tota OP,
c 37. sex potens spatium AC, Irrationalis est quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

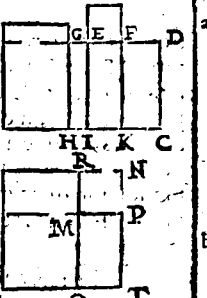
Ex. xLix. **SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quę ex binis Medijs prima appellatur.**

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit. n. ipsius AD, maius nomē AE, erūt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quam ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; & denique ED, Rationali expositæ AB, longitudine cōmensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua construantur, vt in antecedenti propositione: Quo facto demonstrabimus similiter, vt ibi; rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incommensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomē existēs ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB; d erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in ante-
d 13. de

cedenti

cedenti propositione longitudine commensurabiles; a erit quoque tota AE, vtrique ipsarum commensurabilis. Quare cum AE, maius nomē existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales. Cum ergo vtraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at vero AE, Rationali AB, longitudine incōmensurabilis; b erit vtraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine; Ac proinde tam AB, AG, quā AB, GE, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Igitur rectangula AH, GI, Media sunt; propterea- c que & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, NP, sunt Mediæ.



a 16. dec.

b 14. dec.

c 22. dec.

QVIA vero AG, GE, longitudine sunt commensurabiles; d erunt & AH, GI, eandē cum illis proportionē habentia commensurabilia; atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt; ipsi vero AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG, & ipsi AD, longitudine commensurabilis est EF, eius dimidia; erunt per scholium propos. 14. huius lib. AG, EF longitudine incommensurabiles: Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis, e incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, incommensurabilia sunt; f Ideoq. & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, g cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT. Cum ergo ostensum sit OM, MP, Medias esse, & commensurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi AB, hoc est, ipsi EI. Est autem EF, ipsi ED, quoque longitudine commensu-

d 10. dec.

e 10. dec.

f 10. dec.

g 1. sex.

rabilis

rabilis;[a] erunt etiam EI, EF, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum EI, Rationalis sit, erit & EF, Rationalis.[b] Quare EK, rectangulum, Rationale est; Est autem MT, sub OM, MP, contentum ipsi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale est. Quapropter OM, MP, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationaleque continentes;[c] atque adeo OP, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

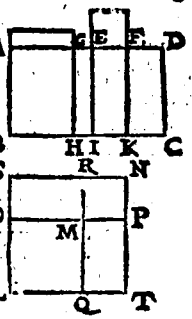
[a] 12. dec
[b] 20. dec
[c] 38. dec

THEOR. 39. PROPOS. 57.

Lvj. L.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea, spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ dicitur ex binis Medijs secunda. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Erunt ergo AE, ED, ex definitione. Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; Et denique neutra ipsarum AE, ED, Rationali expositæ AB, longitudine commensurabilis erit. Secta ED, bifariam in F, reliqua, omnia fiant, vt[1] in propos. 55. Similiter ergo, vt ibi, ostendemus rectam OP, posse spatium AC: Et vt in antecedenti propos. 56. rectas OM, MP, esse Medias potentia tantum commensurabiles; propterea quod AE, Rationali AB, po-



nitur

nitur longitudine incommensurabilis, quemadmodum & ibi eadem AE, ipsi AB, longitudine erat incommensurabilis. Quoniam vero ED, EF, sunt commensurabiles longitudine; estque ED, ipsi AB, Rationali, hoc est ipsi EI, longitudine incommensurabilis; a erit quoque EF, eidem EI, longitudine incommensurabilis: Sunt autē EF, EI, Rationales, quod EF, dimidia sit ipsius ED, Rationalis; & EI, expositæ Rationali AB, æqualis. Igitur EF, EI, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; b Ac propterea EK, Medium est: ideoque & MT, æquale ipsi EK, Medium est, quod sub Mediis OM, MP, continetur. Itaque cum OM, MP, Mediæ sint potentia solum commensurabiles, contineantque spatium Mediū; c erit OP, Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demōstrādū.

a 14. dec

b 22. dec

c 22. per

THEOR. 40. PROPOS. 58. Lvij. Lj.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ Maior vocatur. Sit enim AE, ipsius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique AE, ipsi AB, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propos. 55. d Erunt ergo AG, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, posse spatium AG. Dico OP, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam enim AG, GE, longitudine incommensu-

d 19. dec

10. dec

mensurabiles sunt; erunt & rectãgula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeo & quadrata LM, MN, ipsis AH, GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia sunt incommẽsurabiles. Quia vero AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; [b] & rectangulum AL, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem AL, æquale composito ex quadratis LM, MN. Compositum ergo ex quadratis LM, MN. Rationale est.

20. dec

ET quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine incommensurabilis Rationali AB; erit & EF, ipsius dimidia eidẽ AB, longitudine incommensurabilis; Et est EF, Rationalis, cum sit Rationali ED, commensurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. Quare EK, Medium est, sub ipsis contentum; ideoque & MT, illi æquale, contentumque sub OM, MP, Medium est. Quocirca cum OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis MT, Medium; Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

22. dec

40. dec

viij.
Lij.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ dicitur potẽs Rationale & Medium. Sit enim ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tan-

tum

tum commensurabiles; & AE, plus potest, quam ED, quadrato rectæ lõgitudine sibi incommensurabilis: & denique ED, longitudine commensurabilis est expositæ Rónali AB. Secta ED, bifariam, fiant reliqua o eadem, quæ in propos. 55. a Erunt igitur rursus AG, GE, longitudine incommensurabiles. Simili autem modo, vt in propos. 55. constabit rectam OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ potens Rationale & Medium appellatur.

a 19. dec

Erunt enim, vt in propos. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles. Et quia AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis & longitudine incommensurabilis Rationali AB; erunt AE, AB, Rationales potentia tantum commensurabiles. b Quare rectangulum AI, sub ipsis cõtentum, Medium est. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali AB, cum sit minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, erit & EF, ipsius dimidia, eidem AB, commensurabilis longitudine, & Rationalis. c Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, longitudine commensurabilibus, Rationale est; atque idcirco & MT, sub OM, MP, contẽtum Rationale erit, cum ipsi ER, sit æquale. Quamobrem cum rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles sint, faciantque compositum quidem ex ipsarũ quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, sub ipsis contentum, Rationale, d Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demonstrandum.

b 22. decimi

c 20. dec

d 41. dec

lix. lxij.

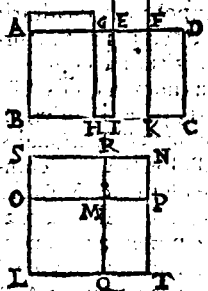
THEOR. 42. PROPOS. 60.

SI spatium contineatur sub Rationali,

& ex

& ex binis nominibus Sexta. ; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quę ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potes bina Media. Sit enim ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defi. Rationales potentia tantum commenſurabiles, & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectę ſibi longitudine incommenſurabilis; & denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in ſuperioribus, & eruntque AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Iam vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ. 58. rectas OM, MP, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis LM, MN, Medium. Vt autem in propoſ. 58. erit quoque MT, ſub OM, MP, comprehenſum, Medium. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommenſurabilis eſt longitudine ipſi ED, hæc vero eidem commenſurabilis; [b] erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles. [c] Igitur & AI, EK, incommenſurabilia ſunt. [d] cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis LM, MN, quod ipſi AI, æquale eſt, & rectangulum MT, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciátque & compoſitum ex ipſarum quadratis LM, MN, Medium, & MT, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis, [e] erit tota OP, Irrationalis, quæ bina Me-



dia

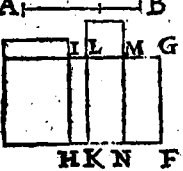
dia potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

lx. liiij.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primã.

SIT ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC; a & ad Rationalem expoſitam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB. latitudinẽ faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus eſſe primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis ſub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis ſub AC, CB, b æqualia ſint quadrato ex AB, quemadmodum & eidẽ quadrato ex AB, æquale eſt, per conſtructionem, rectangulum DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipſis LK, GF, parallela agatur: MN: eritque vtrũque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur. c Et quoniam AC, CB, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quod tota AB, ſit ex binis nominibus; erunt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commenſurabilia; d quorum vtrique cum etiam commenſurabile ſit compoſitum ex ipſis; erit quoque compoſitum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Eſt autem huic compoſito æquale, per conſtructionem, rectangulum DK. Igitur & DK, Rationale erit: quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE, e faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipſi DE, longitudine commenſurabilem.

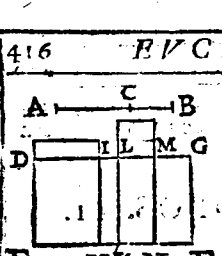


a 45. pri.

b 4. ſec.

c 37. decimi.

d 16. decimi.



RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, [a] erit rectangulum sub ipsis, Medium, atque adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem, [b] facit LG, latitudinem Rationalem, & ipsi LK hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. [c] Igitur DL, LG, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [d] Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

[a] 22. decimi.
[b] 23. decimi.
[c] 13. decimi.
[d] 37. decimi.

QVONIAM enim ex lemmate propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, CB, medium proportionale est inter quadrata ex AC, CB, erit quoque LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo [e] cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeant, quam DH, LN, IK; erit quoque recta EM, media proportionalis inter DI, IL. [f] Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, commensurabilia sunt, quod AC, CB, ponantur potentia commensurabiles; erunt & DH, IK, ipsis æqualia commensurabilia. [g] Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam autem DK, maius est, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora sint, per lemma propos. 39. huius libri, quam rectangulum bis sub AC, CB; erit & recta DL, maior quam LG, [h] cum DL, LG, eandem rationem habeant, quam DK, LF. Itaque quoniam DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatur rectangulum sub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex minore LG, descripti; (ostensum enim est rectangulum sub DI, IL, æquale quadrato ex LM) diuiditur DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commensurabiles, vt est demonstratum; [i] poterit DL, maior plus quã LG,

[e] 1. sexti
[f] 17. sexti.
[g] 10. decimi.
[h] 1. sexti.
[i] 18. dec.

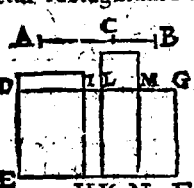
minor,

minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum DG, ostensa sit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus posse, quam LG, minus nomen, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis nominibus, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 44. PROPOS. 62. Lxj. Lv.

QVADRATVM eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundam. Constituantur enim eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & & vtrumque ipsorum LN, MF, ei quod sub AC, CB, cõtinetur. Quoniam igitur A C, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes [b] Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale cõtinent; erunt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectangula ipsis æqualia D H, IK, commensurabilia, atque Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. DK, Medium, quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub AC, CB, Rationale est, erit & eius duplum, nempe LF, Rationale, quod cum applicatum sit ad Rationalem LK, [e] erit eius latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine com-



a 45. primi.

b 38. dec.

c 16. dec.

d 23. decimi.

e 21. dec.

mensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, ipsa LG, sit ipsi DE, commensurabilis longitudine, at DL, longitudine incommensurabilis, a erunt DL, LG, longitudine incommensurabiles. Quod cũ DL, LG, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potentia solum commensurabiles; b ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, maius nomen esse, & posse plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius DG, maius nomen DL, plus possit, quam minus nomen LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen LG, ostensum sit longitudine commẽ surabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Mediis prima, &c. Quod erat ostendendum.

a 13. dec

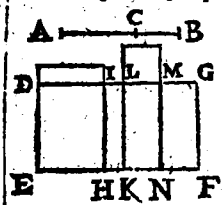
b 37. dec

L xii. Lvi.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatũ, latitudiuẽ facit ex binis nominibus tertiã.

SIT ex binis Mediis secunda AB, cuius maius nomen AC, c & ad Rationalem DE, applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus tertiam. Constructis enim iisdem, quæ in propos. 61. quoniam AC, CB, ex binis Mediis secundam AB, componentes, d Mediæ sunt potentia solum commẽ surabiles, quæ Mediũ continẽt; Erũt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, & Media e Cum ergo propterea, & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit & ex coroll. propos. 24. huius libri DK, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, feri eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incom-



c 45. 1. pri

d 39. dec

e 16. dec

f 23. dec

men-

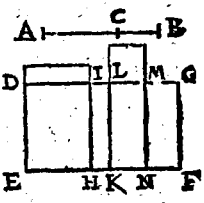
mensurabilis. Rursus quia rectãgulum sub AC, CB, Medium est; erit & eius duplum LF, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem LK; [a] erit latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, ipsi CB, longitudine est incommensurabilis; estque vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, erit quoque quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommẽ surabile. [c] Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, CB, quod quadrata ex AC, CB, commensurabilia sint, quippe cum rectæ ipsæ potentia ponantur commensurabiles; & rectangulo sub AC, CB, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub AC, CB. Igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, rectangulo LF, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius libri constripsimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum DK, LF, habentes [d] longitudine sunt incommensurabiles; Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; [e] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61, ostendemus DL, esse maius nomen, possitque plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrẽ cum DL, maius nomen plus possit, quam LG, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, LG, Rationali expositæ DE, sit ostensa longitudine commensurabilis; erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratum ergo eius, quæ ex binis Medijs secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

a 23. dec
b 10. dec
c 16. dec.
d 10. dec
e 37. dec

THEOR. 46. PROPOS. 64.

Lxiij. Lvij.

QVADRATVM Maioris ad Rationalẽ applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.



a 45. pri

SIT Maior AB, cuius maius nomen AC, a & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse quartam. Construantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia AC, CB, Maiorem AB,

b 45. dec

componentes, b potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Medium; erit quoque DK, composito ex quadratis rectarum AC, CB, æquale existens, Rationale; At vero LF, duplum eius quod sub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur

c 21. dec

Rationale DK, ad Rationalem DE, est applicatum; c erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item cum LF, Medium sit applicatum ad Rationalem

d 23. dec

LK, d erit LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, DE, longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipsi DE, commensurabilis sit longitudine

e 13. dec

hæc vero eidem DE, longitudine incommensurabilis; e incommensurabiles erunt longitudine DL, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LH, Rationa-

f 37. dec

les potentia tantum commensurabiles; f ideoque DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM. Quia autem quadrata ex AC, CB, incommensurabilia sunt, quod rectæ AC, CB, potentia incommensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommensura-

g 10. dec

bilia, g atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam vero vt in propos. 61. ostendimus, DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DI, IL, quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam DL, ad I, in partes longitudine incommensurabi-

h 19. dec

les, h poterit DL, plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa

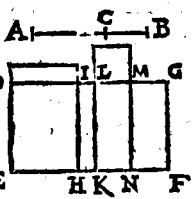
DL,

DL,(maius nomen ipsius DG, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo Maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 47. PROPOS. 65. Lxiiij. Lviij.

QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam esse. Fiant enim eadem omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, [b] potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectangulum sub ipsis contentum, Rationale; erit DK, æquale composito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium, & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, [c] facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [d] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa vero longitudine incommensurabilis, [e] erunt DL, MG, longitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potentia solum commensurabiles,



[a] 45. pri
[b] 41. dec
[c] 23. dec
[d] 21. dec
[e] 13. dec

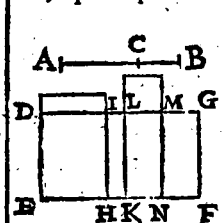
a 37. dec a Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in propos. 61. ostendemus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM, & vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quam LG, quadrato rectę sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cũ & minus nomen LG, ostensum sit expositę Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

Lxv. Lix.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

b 45. pri SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, b & ad Rationalem DE, applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextam. Constructis enim iisdẽ, quæ in propos. 61. quoniam rectæ AC, CB, componentes ipsam AB, potentem bina Media, c potentia incommensurabiles sunt, faciũtque & cõpositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, & incommensurabile composito ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi composito æquale, quam LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Medium. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; d erunt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudinę incommensurabiles. e Quoniam vero compositum ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem vero rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplum; f Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub



c 42. dec

d 23. dec

e 42. dec

f 13. dec

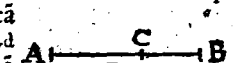
AC,

AC,BC,hoc est, ipsi LF;Ac propterea rectæ D L, L G, eandem rationem habentes cum D K, L F, [a] longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum commensurabiles; [b] Ac proinde DG,est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus D L, esse maius nomen, posseque plus quam LG,quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum ergo ostensum sit neutram ipsarum DL,LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE;erit ex defin.DG,ex binis nominibus sexta. Quadrátum igitur eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum. [a] 10. dec. [b] 37. dec

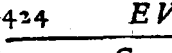
THEOR. 49. PROPOS. 67. Lxvi. Lx.

EI, quæ est ex binis nominibus,longitudine commensurabilis,& ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunque AB,diuisa in sua nomina, quorum maius AC,& CB,minus, sitque recta DE, ipsi A B, longitudine commensurabilis. Dico D E, quoque esse ex binis nominibus, & ordine eandem ipsi AB. [c] Fiat enim vt tota AB,ad totã DE,ita ablata AC, ad ablatã DF. [d] Erit ergo& reliqua CB,ad reliquã FE, vt tota A B, ad totam D E. Et quoniam ipsi A B, longitudine commensurabilis ponitur DE; [e] erit & DF,ipsi AC,& FE,ipsi CB,longitudine commensurabilis: [f] Sunt autem A C, C B, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE,Rationales sunt. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita CB, ad FE,& permutando vt AC,ad CB,ita D F, ad F E: Sunt autem A C, CB,potentia solum commensurabiles; [g] erunt & DF,FE,potentia solum commensurabiles. Igitur D F, F E, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; [h] Ac propterea DE,ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB,ordine eandem esse. Aut enim AC, plus poterit



[c] 12. sex [d] 19. 6. [e] 10. dec [f] 37. dec [g] 10. dec [h] 37 dec



quam CB, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidem AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; a poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si AC, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominibus prima; b erit & DF, eidem Rationali longitudine commensurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit commensurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero CB, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositæ longitudine commensurabilis. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum AC, CB, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt AB, sit ex binis nominibus tertia; c erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

a 15. dec

b 12. dec

c 12. dec.

AT si AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; d poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse, vel quintam, vel sextã, prout & AB, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Si igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

d 15. dec

SCHOLIVM.

QVOD si recta DE, potentia tantum commensurabilis sit ipsi AB, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si lece: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantum:) & DE, esse ex binis nominibus. At eam esse ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, nullo mo-

do con-

do concludemus. Nō enim sequitur, si AC, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & DF, maius nomen eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expositæ Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine: At vero DF, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si AB, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt DE, illi potentia tantum commensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.

SIT enim AB, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C, sitque ei commensurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F, & partes AC, CB, partibus DF, FE, proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri posse, vt DE, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi AB. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine. a Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita AB, ad DE, b erunt propterea & AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima est. Eodem modo neque vtraque ex binis nominibus quarta erit. Sed neque secunda vel quinta. Esset enim vtrumque nomen minus CB, FE, ex defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atque adeo & inter se. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.

a 12. dec

b 10. dec

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis. Cum ergo sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, c poterit

c 15. dec

terit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; a *poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cui sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB.*

a 15. dec

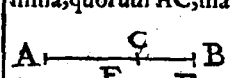
IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

Lxvij. Lxj.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Medijs est, atque ordine eadem.

SIT ex binis Medijs AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorum AC, maius, & CB, minus, sitque ei rectæ DE, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoque ex binis Medijs esse, & ipsi AB, ordine eandem. b Fiat enim vt tota AB, ad totam DE, ita ablata AC, ad ablatam DF. c Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi AB, ponitur longitudine commensurabilis DE; d erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. e Igitur & DE, FE, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: f Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; g erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cum ergo & ostensæ sint Mediæ, erit DF, FE, Mediæ potentia tantum commensurabiles; h Atque idcirco DE, erit ex binis medijs. Dico & ipsi AB, eandem esse ordine. Quoniam.n. est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE:



b 12. sex
c 19. qn.
d 10. dec
e 24. dec
f 38. dec
g 10. dec
h 38. uel 9. dec.

Est

Est autem vt AC, ad CB, ita quadratum ex AC, ad rectãgulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. [a] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Medijs prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale; cum illi sit commensurabile; [b] atque adeo & DE, ex binis Medijs prima erit. Si vero rectangulum sub AC, CB, fuerit Medium, ita vt AB, sit ex binis Medijs secunda: erit & rectangulum sub DF, FE, ei commensurabile, Medium, ex corollario propos. 4. huius lib. [c] Ac propterea & DE, erit ex binis Medijs secunda. Quare ei, quæ ex binis Medijs longitudine commensurabilis, &c. Quod demonstrandum erat.

a 10. dec

b 18. dec

c 39. dec

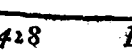
SCHOLIVM.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineã DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Medijs, ex binis Medijs esse, atque ordine eandẽ ipsi AB, cui commensurabilis est, si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantum, &c. vt manifestum est.

THEOR. 51. PROPOS. 69. Lxviij. Lxij.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea Maior AB, diuisa in sua nomina ad C, eiq; commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tãtum. Dico & DE, Maiorẽ esse. Fiant. n. eadẽ, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem



dem habeant rationem, quam tota AB, ad totã DE. Quoniã igitur AB, DE, cõmensurabiles sunt vel lõgitudine & potẽtia, vel potẽtia tm; a10.dec. erunt quoque tam AC, DF, quam CB, FE, eodẽ modo cõmensurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad b22.sex FE, & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE, b erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarũ AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, quadrato ex FE, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia c10.dec. tantum. c Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile est composito ex quadratis d40.dec rectarum DF, FE. d Est autem compositum illud Rationale, e9.defin cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. e Igitur & hoc Rationale est.

RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectãgulum sub DF, FE: Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB; ad rectangulum sub DF, FE: Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & poten- f10.dec tia, vel potentia tantum. f Igitur & rectangulũ sub AC, g40.dec CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. g Est

autem

autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE illi commensurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE,[a] suntque AC, CB, potentia incommensurabiles, cum componant Maiorem AB;[b] Erunt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaq; cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; [c] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

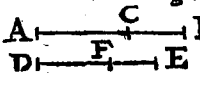
[a] 40. dec
[b] 10. dec
[c] 40. dec

THEOR. 52. PROPOS. 70.

Lxix. Lxiij.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse potẽtem Rationale ac Medium. Constructis.n.iisdẽ quæ supra, ostendemus, vt in præcedenti propos. compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, FE.[d] Est autem illud compositum Medium, cum rectæ AC, CB, componant ipsam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propos. 24. huius lib. & hoc compositum illi commensurabile, Medium est. Eodem modo, vt in eadem propos. antecedenti, erit rectangulum sub AC, CB, [e] quod Rationale est, commensurabile rectangulo sub DF, FE, atque adeo & rectangulum sub DF, FE, Rationale est, ex 9. defin. Denique vt in eadem superiori propos. erunt DF, FE, potentia incommensurabiles. Quare cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale, vt demonstratum est; [f] erit to-



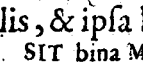
[d] 41. dec
[e] 41. dec.
[f] 41. dec

ta DE, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

SIT bina Media potens AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue longitudine & potetia siue potētia tantū. Dico & DE, esse bina Media potētē. Cōstructis enim iisdē, quæ supra, ostēdemus, vt in propos. 69. cōpositū ex quadratis rectarū AB, CB, cōpositō ex quadratis rectarū DF, FE, commensurabile esse: Nec non & rectangulum sub AC, CB, esse cōmensurabile rectangulo sub DF, FE.[a] Cū ergo tam compositū ex quadratis rectarū AC, CB, quā rectāgulū sub AC, CB, Mediū sit; erit etiam ex coroll. propos. 24. huius lib. tā compositū ex quadratis rectarū DF, FE, quā rectangulū sub DF, FE, Mediū. Sed & DF, FE, potentia incōmensurabiles sunt, vt prius. Postremo [b] quia cōpositū ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulū sub AC, CB, incommēsurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod AB, bina Media potest; Est autē cōpositō ex quadratis rectarū AC, CB, cōmensurabile ostēsum cōpositū ex quadratis rectarū DF, FE, & rectāgulo sub AC, CB, probauimus cōmensurabile rectāgulū sub DF, FE; Erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositū ex quadratis rectarū DF, FE, & rectangulum sub DF, FE, incōmēsurabilia Quare cū rectæ DF, FE, potentia sint incōmēsurabiles, faciantq; compositum ex ipsarū quadratis Mediū; & quod sub ipsis cōtinetur, Medium, incōmēsurabileque cōpositō ex quadratis ipsarum; erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa Media potens est. Quod erat ostendendum.



a. dec

b. dec

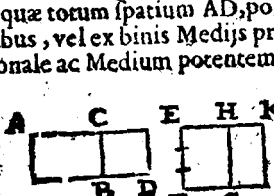
THEOR. 54. PROPOS. 72.

SI Rationale & Medium componan-

tur,

tur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quę ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale ſpatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum ſpatium AD, poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD; vel minus: Aequale ſiquidē non erit; alias cum AB, ſit Rationale, eſſet & illi æquale CD, Rationale. quod non ponitur. Sit primo maius, [a] & expoſita Rationali EF, applicetur ad eam rectangulum EG, æquale ipſi AB, & ad HG, aliud HI, æquale ipſi CD, vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Et quoniam AB, Rationale eſt, & CD, Medium, erit quoque EG, Rationale, & HI, Medium; quæ cū applicentur ad Rationalē EF, [b] erit EH, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis; [c] At vero HK, Rationalis, & eidē EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia EG, HI, incōmenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitionibus; quod EG, Rationale ſit, at HI, Irrationale, nempe Mediū; [d] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommenſurabiles longitudine. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Et quoniā maius ponitur AB, quam CD, hoc eſt, EG, quam HI; erit quoque EH, maior quam HK, [f] cum EH, HK, eandē rationem habeant, quā EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, quadrato rectę ſibi commenſurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus



[a] 45 pri.
[b] 21. dec
[c] 23. dec
[d] 30. dec
[e] 37. dec
[f] 5. ſex.

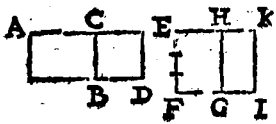
prima, cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & spatium AD, compositum ex Rationali AB, & Medio CD, [a] Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

a 55. decimi.

SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & spatium AD, [b] Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

b 58. dec

SIT deinde AB, minus quam CD, & eadē construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus & EH, ipsi EF, longitudine commensurabilis. Et quia AB, minus est quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoque recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rursus HK, maius nomen ipsius EK, quæ est ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit Hk, quam EH, quadrato rectę longitudine sibi commensurabilis; erit EK, ex binis nominibus secunda, cum EH, minus nomen commensurabile sit longitudine Rationali EF, vt ostensum est. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF. & ex binis nominibus secunda EK, atque adeo & spatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compositū, [c] Irrationalis est, quæ dicitur ex binis Mediis prima.



c 56. decimi.

SI vero HK, plus possit quā EH. quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis, erit EK, ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & spatium AD,

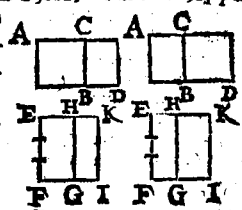
Irra-

[a] Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demostrandū erat. a59. dec

THEOR. 55. PROPOS. 73. Lxxij. Lxvj.

SI duo media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommensurabilia AB, CD. Dico rectam quæ potest totum spatium AD, esse vel ex binis Mediis secundam, vel bina Media potentem. Erit enim rursus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Aequale siquidem non erit; alias essent AB, CD, commensurabilia. quòd non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cum illis sint æqualia. [b] Igitur rectæ EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cum EG, HI, Media sint, applicenturque ad Rationalem EF,) [c] Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis, Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; [d] ac propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedeti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK. ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus

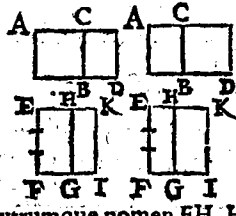


b10. dec

c23. decimi.

d37. dec

tertia. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rónali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo



a57.dec & ſpatium AD, a Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs ſecunda dicitur.

SI vero EH, plus poſſit quã HK, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis, cũ vtrumque nomen EH, HK, longitudine ſit incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium EI, ſiue ſpatium AD, b Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

b60.dec

QVOD ſi AB, minus ſit, quam CD, non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe commenſurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, c latitudinem efficit Rationalem ipſi Rationali longitudine incõmenſurabilem.

c23.dec

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem appli catum, d latitudinem efficit ex binis nominibus primam.

d61.dec

ET quadratum eius, quæ eſt ex binis Medijs prima ad Rationalem applicatum, e latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.

e62.dec

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, ad Rationalem applicatum, f latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

f63.dec

AT verò quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, g latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

g64.dec

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, h latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

h65.dec

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, i latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

i66.dec

ITA-

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; Inter se autem, quod ordine non sint eædem ex binis nominibus: perspicuum est, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus est dictum, inter se differentes esse.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de septem senariis.

IN primo, qui continetur propos. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum sex linearum Irrationalium, nimirum eius, quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Mediis prima; & eius, quæ ex binis Mediis secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum divisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis dividi posse in sua nomina.

IN tertio deinde contento propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inventionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, secundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & sextæ.

IN quarto, quem absoluit propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quanam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

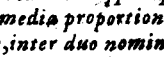
IN quinto autem, quem reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absolvitur, demonstravit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicavit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationali-

bus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, qua quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusuis linea Irrationalis, est quoque Irrationalis eadē illi, inter cuius nomina media existit.



SIT enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC, & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel DB, æqualis sumatur E. Dico E, mediam esse secundū Analogiam Arithmeticam, inter AC, CB: & esse quoque ex binis nominibus. Quoniam enim AC, superat dimidiam AD, recta DC, & dimidia DB, superat ipsam CB, eadem recta DC; perspicuum est, dimidiā ipsius AB, nempe E, esse mediā proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, commensurabilis est longitudine toti AB, cum hæc illius sit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipsi AB, vt in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadem Euclides demonstrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generantur, quæ in præcedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM. per detractionem.

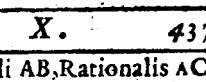
Lxxiii. Lxviij.

THEOR. 56. PROPOS. 74.

SI à Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DE-

DETRAHATVR a Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC; Et sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; a erunt incommensurabilia quadratum ex AB, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia. b Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex AB,) rectangulo vero sub AB, AC, commensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum AB, AC, & rectangulum sub, AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. c Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, sit Rationale, (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto:) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.



a 10. dec

b 16. dec

c 7. sec.

SCHOLIVM.

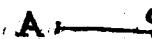
POTVISSET *Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.*

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis no-

minibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum AB, AC, sint Rationales potentia tantum commensurabiles; a *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis nominibus dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.*

a 37. dec



Lxxiiij Lxix.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

SI à Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia, b atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile. erit quadrato ex AC. Est autem quadratum ex AC, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est cõpositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. c Cũ ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile re-

b 16. dec

c 7. dec.

ctangulo

ctangulo bis sub AB, AC.a Quare & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex BC, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Mediis primæ, a maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat. a 17. dec

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI à maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomẽ auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim AB, AC, sint Media potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale; b *erit compositæ ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima.* b 38. dec

THEOR. 58. PROPOS. 76. Lxxv. Lxx.

SI à Media Media auferatur potentia, tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat, Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR à Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangu-

lum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia commensurabilibus: commensurabilia sunt; a erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrumque ipsorum Medium; quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, vtrique commensurabile, Medium est; ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulum sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub AB, AC; ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. b Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC; vna cum quadrato ex BC; superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est; rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. c Medium autem non superat Medium Rationali, Non ergo quadratum ex BC. Rationale est. Ergo Irrationalis, & ipsa recta BC; Irrationalis. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quæ ex binis Mediis secunda, a maiori nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur a Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

A C B

6. dec

7. sec.

27. dec

SCHOLIVM

HOC etiam theorema ita potuit fieri proponi.

SI a maiori nomine eius quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

39. dec

QVONIAM enim AB, AC, Media sunt potentia tantum commensurabiles, continentque Medium; d erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Mediis secunda appellatur cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome secunda.

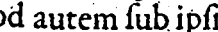
THEOR.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

Lxxvj. Lxxj.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR à recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale, rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale est, rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; a erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. b Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositū ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incōmensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. c Igitur quadratum ex BC, illi incōmensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autem Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineæ Maioris a maiori nomine, vt in scholio sequenti dicemus. Si igitur a recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 10. dec

b 7. sec.

c 10. def

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: a erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusque maius nomen AB, minus autem AC. Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.

a 40. dec

THEOR. 60. PROPOS. 78.

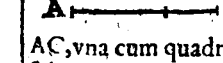
Lxxvij. Lxxij.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale, at rectangulum sub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub AB, AC, Rationale; b erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub AB,

b 10. def.

c 7. sec.



AC. c Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, AC. d Sunt ergo rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensu-

d 17. dec

rabilia.

rabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB, AC, Rationale sit; [a] erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium existit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 10. def.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autē cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM enim AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationales; [b] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens; cuius maius nomen est AB, minus autē AC. Auferatur igitur minus nomen AC, a maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.*

[b] 41. doc

THEOR. 61. PROPOS. 79.

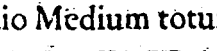
Lxxviij Lxxiij.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua

Irra-

Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitque tam compositum ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incōmensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam BC, esse Irrationalem.



2 9. sec. a Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Mediū etiam est; (cum Medio, quod sub AB, AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC. b Medium autem nō superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC, quod Medium est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendēdum erat.

b 27. def

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incōmensurabileque composito ex quadratis ipsarum, erit cōposita, ex illis Irrationalis, qua bina Media potens dicitur, cuius ma-

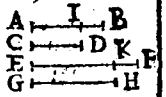
ius

ius nomen AB, et minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinē, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitque IB, excessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniam enim IB, excessus est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis sint æquales, singulæ singulis. Est autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem excessus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque excessus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod est propositum.



COROLLARIVM.

EX his constat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiā habentes, habere quoque vicissim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiusmodi Analogia consistit in eodem excessu, quem ostendimus eundem esse inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter secundam & quartam magnitudines reperitur, si idem sit excessus

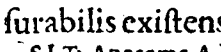
sus inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc est, si quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

Lxxix. Lxxiiij.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

APOTOMAE vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commẽ surabilis existens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia solum toti AC, commensurabilis. Dico ipsi AB, aliam Rationalem non congruere, quę toti sit potentia tantum commensurabilis. Si enim fieri potest, congruat alia Rationalis BD, ita vt BD, ipsi AD, sit potentia solum commensurabilis. Et quia BC, Rationalis est; erit AC, illi solum potentia commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles, Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis sub AC, BC, qui inter compositum ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis sub AD, BD; (superat enim compositum ex quadratis rectarum AC, BC, rectangulum bis sub AC, BC, quadrato ex AB; a quod compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale sit rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodẽ modo compositum ex quadratis rectarum AD, BD, superat rectãgulum bis sub AD, BD, quadrato eodem ex AB; b cum & cõpositum ex quadratis rectarum AD, BD, æquale sit rectangulo bis sub AD, BD, vna cum quadrato ex AB.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, DB. Est autem excessus inter illa com-



a 7. secũ.

b 7. secũ.

posita

posita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. quod vtrumque Rationale sit. (Nã cum AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles; erunt earũ quadrata Rationalia, & commensurabilia, a Igitur & compositum ex ipsis vtrique illorum commẽsurabile est, atque adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostendemus cõpositum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium Rationale est. b Et quia rectangulum sub AC, BC, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. c Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, Rationale spatium nõ est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

a 16. decimi.

b 22. def.

c 27. decimi.

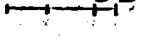
THEOR. 63. PROPOS. 81. Lxxx. Lxxv.

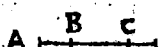
MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat BC, Media toti AC, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quia,

BC,

BC, Media est potentia solum ipsi AC, commensurabi-
a 24. dec lis; a erit & AC, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrumque sit Rationale. (cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC, BC, illi commensurabile, Rationale, Atque eadem ratione Rationale erit rectangulum bis sub AD, BD (Igitur & excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solum cōmensurabiles; erunt & ipsarum quadrata Media, &
b 16. dec commensurabilia. b Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile est, atque adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non aliter quoque Me-
c 27. dec dium erit compositum ex quadratis rectarum AD, BD. c Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia solum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Mediæ igitur Apotome primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.





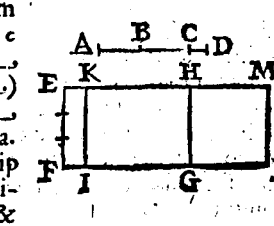
Lxxxj. Lxxvj.

THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIAE Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum

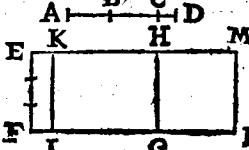
lum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome secunda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Medium. Dico ipsi AB, aliã Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatq; cum tota Mediũ. Si.n. fieri pót, cógruat ipsi alia BD, Media toti AD, potentia tãtum commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, a ad quam applicetur rectangulum EG, æquale composito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et denique aliud EL. æquale composito ex quadratis rectarum AD, BD. b Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur sub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur sub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum enim BC, Media ponatur, c erit & AC, ipsi potentia, commensurabilis, Media.) erunt & earum quadrata, Media, & commensurabilia.



Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & EG, qd illi composito æquale est, Medium est; quod cũ applicetur ad Rationalẽ EF, e erit EH, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectãgulum sub AC, BC, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplũ, nempe KG, Medium: quod cum applicetur ad Rationalẽ KI, f erit KH, Rationalis ipsi KI, hoc est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, BC,

a 45. pri.
b 7. sec.
c 24. dec.
d 16. dec.
e 23. dec.
f 23. dec.



longitudine incommensurabiles sunt, estque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, vt ostendimus lemmate 3. ad
a10.dec. propos. 19. huius lib. a erit quadratum ex AC, incommensurabile rectangulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata commensu-
b16.dec rabilia. b Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo sub AC, BC, commensurabile est eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est,
c10.dec. ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. c Rectæ igitur EH, KH, eandem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potentia tãtum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensura-
d74.dec bilis ipsi EH, d erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solum commensurabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tan
e80.dec tum congruere, e demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

Lxxxij. Lxxvij.

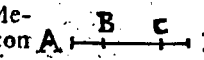
THEOR. 65. PROPOS. 83.

MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum

quidem

quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; at rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadē præstet. Sit enim, si fieri potest, alia cōgruens BD, toti AD, potentia incōmensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulum sub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrumque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium est Rationale. sed & non Rationale est. (Cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. [a] Quare vnum non superabit alterum Rationali. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommensurabilis, &c. Minori ergo vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.



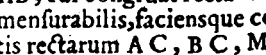
a 27. dec

THEOR. 66. PROPOS. 84. Lxxxiij Lxxviij

EI, quæ cum Rationali Medium totū facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex

ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum vero sub AC, BC, Rationale. Dico ipsi AB, aliam rectam non congruere, quæ hæc eadem faciat. Si enim fieri potest, congruat ipsi alia recta BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Medium, rectangulum vero sub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propos. 80. ostensum est, idem excessus est inter cōpositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter hæc rectangula, spatium Rationale, vt in propos. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa composita, spatium Rationale est: sed & non Rationale est; cum vtrumque sit Medium.



a 27. dec. a Medium enim Medium non superat Rationali. Quod est absurdum. Non ergo ipsi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

Lxxxiv Lxxix.

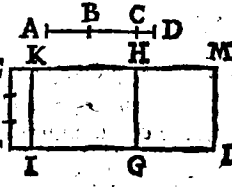
THEOR. 67. PROPOS. 85.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis

conti-

continetur Medium, incommensurabileq; composito ex ipsarum quadratis.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipsi vero congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, facienſque & compositum ex quadratis rectarũ AC, BC, Medium, & rectangulum sub AC, BC, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipsi AB, aliam non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si.n. fieri potest, congruat ipsi recta alia BD, toti AD, potentia incommensurabilis, ita vt & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, Medium sit, & rectangulum sub AD, BD, Medium quoque, ac incommensurabile composito ex quadratis rectarum AD, BD. Constructis autem ijsdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium est; erit etiam EG, illi æquale, Medium. [a] Recta igitur EH; Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & eius duplum KG, Medium. [b] Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniam KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cum illud huius sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC; [c] erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, [d] longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis ipsi EH; [e] erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostendemus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ vna tantum recta



[a] 23. dec
[b] 23. dec
[c] 14. dec
[d] 10. dec
[e] 74. dec

280. dec congruit, &c. Quod est absurdum.[a] Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

DEFINITIONES TERTIÆ.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

SI vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruēs expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

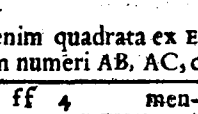
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarum, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86. LXXXV. LXXX.

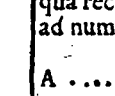
INVENIRE primam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorum excessus AC, non sit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratū, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit EF. Eritque EF, cum commensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, cō-



[a] 6. dec.

mensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia vero AB, AC, proportionem non habet, quam quadrati numeri; neque quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. a Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, GF. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia tantum commensurabiles; b atque idcirco reliqua EG, Apotome est. Dico & primam esse. Posit enim recta EF, plus quã recta GF, quadrato ex H. Et quia est, vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per cõuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex H. Habent autẽ AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; c Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis; estque tota eadem EF, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

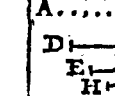


9.dec. 74.dec 9.dec.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE secundam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. præcedenti; expositaque Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis GF, eritque GF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex EG, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico EG, esse secundam Apotomen.



6.dec.

d Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt;

Erunt

Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltē potentia. Cum ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoque EF, Rationalis. Quia vero numeri AC, AB, atque adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [a] erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solum commensurabiles; [b] Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Posit enim recta EF, plus quam GF, quadrato ex H. Quoniam ergo est vt AC, ac AB, ita quadratum ex GF, quadratum ex EF; & conuertendo, vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF: Ostendemus iam vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

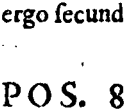
[a] 9. dec.

[b] 74. dec.

PROBL. 21. PROPOS. 88. INVENIRE tertiam Apotomen.

Lxxxvij Lxxxii.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 86. sumatur alius numerus I, vt in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Posita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. [c] Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionem habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeo & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rōnalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [d] erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt AB, ad AC, ita quadra-

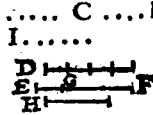


[c] 6. dec.

[d] 9. dec.

tum

tum ex E F. ad quadratum ex G F, ex eodem corollario
26. dec. propoſ. 6. huius lib. Dico E G, eſſe tertiam Apotomen.
[a] Quoniam enim quadrata ex E F, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles,



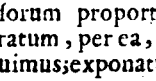
ſaltem potẽtia. Cum ergo EF, oſten ſa ſit Rationalis, erit & G F, Rationalis, cum illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia AB, AC, atque adeo & quadrata ex EF, GF, proportionem non ha-
[b] 9. dec. bent, quam numeri quadrati; [b] Erunt rectæ EF, GF, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt EF, G F, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea,
[c] 74. dec. cum ex EF, auferatur G F, potentia illi ſolum commenſurabilis; [c] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniam enim eſt vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit ex æquo vt I, ad A C, ita quadratum ex D, ad quadratum ex G F: Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quam numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [d] Sunt ergo
[d] 9. dec. rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſſit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H; Oſtendemuſque, vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi E F, longitudine commenſurabilem. Quapropter cum tota E F, plus poſsit quam congruens G F, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

Lxxxviij Lxxxiij

PROBL. 22. PROPOS. 89.
INVENIRE quartam Apotomen.

RE-

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commen surabilis sit EF; eritque propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, EG, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. E G, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

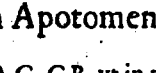


a 9. dec.

PROBL. 23. PROPOS 90. Lxxxix Lxxxiv

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propos. præcedenti. fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & quintam esse. Posit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis esse vt AB, ad CB, ita quadratum EF, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos antecedenti, rectæ EF, & H, longitudine incommensurabi-



les;

lis; estque congruens GF, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. EG, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

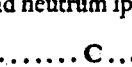
Lxxxx. Lxxxv.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propos. 54. ita vt AB, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiant, vt in propos. 83. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & E F, longitudine incommensurabiles esse; & E G, Apotomen esse. Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam E F, plus quam GF, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi E F. Igitur cum tota E F, plus possit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum EF, GF, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. EG, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextã Apotomen. Quod erat faciendum.

A.....C.....B
I.....



SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

a 49. dec *SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome.* a *Reperiatur prius ex binis nominibus prima A B, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta C D, qua æqualis sit ipsi CB: Dico A D, esse primam Apotomen. Quoniam enim AC, CB, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erunt etiam AC, DC, Rationales potentia tantum commensurabiles.* b *Est ergo A D, Apotome. Et*

b 74. dec

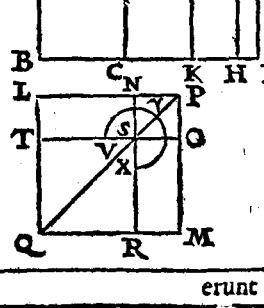
quia

quia AC, plus potest, quam CB, hoc est, quam DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis: & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, qua ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadem ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicuntur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextam, si minora nomina ex maioribus auferamus.

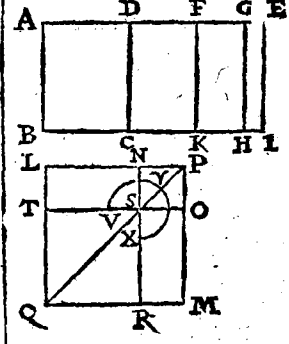
THEOR. 68. PROPOS. 92. Lxxxxi Lxxxvi

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali A B, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium A C, Apotomen esse. Sit ipsi A D, congruens D E. Erunt igitur A E, D E, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solum commensurabiles; & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali A B; & denique eadem A E, tota plus poterit, quam congruens D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex F E, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad A E, rectangulum æquale sub A G, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. decimi lib. Et quia A E, plus potest, quam D E, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis:



erunt



[a] erunt rectæ AG, GE, longitudine commensurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commensurabilis erit: Est autem AE, Rationali AB, longitudine commensurabilis, [c] Igitur & vtraque AG, GE, ipsi AB, longitudine est commensurabilis; atque ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, parallelis, quæ ipsi BC, productæ occurrant in H, I, [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum sub duabus rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale. Rursus quia vtraque DF, FE, longitudine commensurabilis est ipsi DE; & DE, longitudine incommensurabilis est Rationali AB; (Nam si commensurabilis esset longitudine, cum & AE, [e] sit eidem AB, longitudine commensurabilis; [e] essent AE, DE, longitudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim solum potentia commensurabiles:) [f] erit etiam vtraque ipsarum DE, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quoniam vtraque DF, FE, Rationali DE, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

[a] 18. dec
[b] 16. dec
[c] 12. dec
[d] 20. dec
[e] 12. dec
[f] 14. dec
[g] 22. dec

IAM vero ipsi AH, [h] fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI, æquale fiat quadratum NO, communem habens cum LM, angulum LPM. [i] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem, æquale est quadrato ex FE: [K] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [l] Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipsis habeant

[h] 14. sec
[i] 26. sex
[K] 17. sex
[l] 11. sexti

beant ratione; erit FI, medium proportionale inter AH GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem inter eadem LM, NO, per lemma propos. 14. huius lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia sunt: [a] Sed ipsi FI, æquale est DK, & ipsi LO, æquale est MN. Est ergo totum DI, toti gnomoni VYX, cum quadrato NO, æquale. Est autem & totum AI, per constructionem, æquale quadratis LM, NO, Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, est æquale; Ac propterea recta TS, potest spatium AC, Dico TS, Apotomen esse. [a] 36. dec

QVONIAM enim spatia AH, GI, ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt LM, NO, erunt quoque quadrata LM, NO, Rationalia, atque adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt LO, & NO, cum vnum sit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [b] eandem rationē habentes cum LO, NO, [c] longitudine incommensurabiles sunt; [d] Atque idcirco reliqua TS, Apotome est. Si spatium ergo cōtineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat. [b] 1. sexti. [c] 10. dec [d] 74. dec

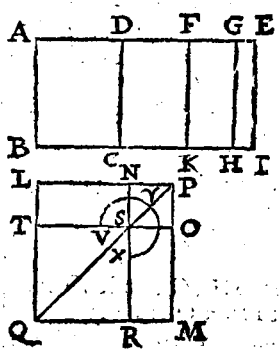
THEOR. 69. PROPOS. 93.

Lxxxxii. Lxxxvii.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma secunda AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, Mediæ Apotomen esse primam. Sit ipsi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ secundæ, Rationales potentia tantum commensurabiles; & congruens DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Secetur DE, bifariam in F. & reliqua omnia

con-



18.dec

16.dec

cōstruantur, vt in propositione præcedenti. a Eruntque rursus, vt in antecedenti propositione, AG, GB, longitudine commensurabiles; b Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine cōmensurabilis. Est autem AE, Rationali AB, longitudine, incommensurabilis: (Si enim commensurabilis esset ipsi AB, longitudine, cum DE, eidem AB, ponatur longitudine commensurabilis; c essent AE, DE, inter se quoque commensurabiles longitudine. Quod est absurdum. ponuntur enim potentia tantum commensurabiles.) d Igitur & vtraque ipsarum AG, GE, longitudine incommensurabilis est eidem AB. Est autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia solum commensurabiles; e Atque idcirco rectangulum vtrumque AH, GI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium est. Rursus quia vtraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis est; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commensurabilis; erit quoque, vt in scholio propositionis 11. huius lib. ostendimus, eidem AB, Rationali longitudine commensurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. f Vtrumque ergo rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus longitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen esse primam.

c12.dec

d14.dec

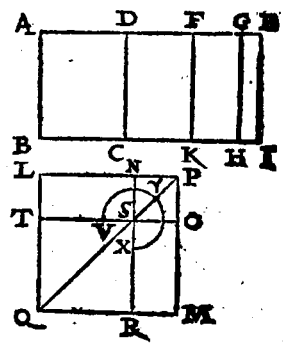
e22.dec

f20.dec

g10.dec

g QVONIAM enim AG, GE, longitudine sunt commensurabiles, g erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atque adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, saltem potentia

tia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata L M, NO, Medijs AH, GI. æqualia, (ostensa. n. sũt AH, GI, Media esse) Media sint. Et quoniã FI, atque adeo sibi æquale LO, Rõna le est, propterea que Medio NO, incõmensurabilea; erũt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, lon gitudine incommensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & cõmensurabiles; erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale est ostensum; b erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.



a 10. dec

b 75. dec

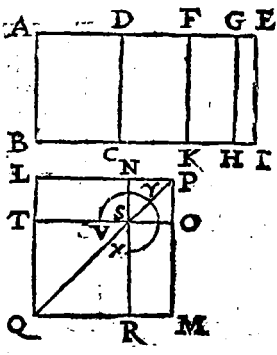
THEOR. 70. PROPOS. 94. Lxxxiii Lxxxviii

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit enim ipsi AD, congruens DB. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter se commensurabiles; c Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commensurabilis erit. Est autem AE, posita incommensurabilis longitudine Rationali AB. d Igitur & vtra-

c 16. dec

d 14. dec



que AG, GE, eidem AB, longitudine erit incommensurabilis. Cum ergo vtraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam AB, AG, quã AB, GE, Rationales potentia solum commensurabiles; a Ac propterea vtrumque rectangulum AH, GI, Mediũ erit. Rursus quia DE, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali AB; erit quoque vtraq; DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis existens, b eidem AB, longitudine incommensurabilis. Cum ergo vtraque DF, FE, Rationali DE, commensurabilis, sit Rationalis; erunt tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles; c atque propterea vtrumque rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Mediæ Apotomen secundam.

a 13. dec
b 14. dec
c 22. dec

QVONIAM enim AH, GI, Media sunt ostensa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas ostendimus commensurabiles esse, d commensurabilia sunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commensurabiles sunt, saltem potentia. At vero quia AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis GE, ipsi vero DE, commensurabilis est longitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incommensurabiles; e ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, FE, hoc est, illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO,

d 10. dec
e 10. dec

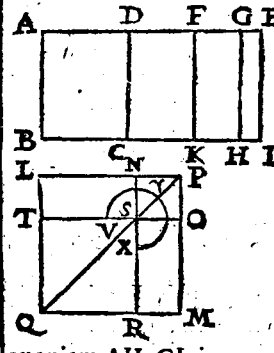
NO,

NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commẽsurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, vt constat ex propos. 92. quod Medium esse ostendimus; erit & LO, Medium.) [a] erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 76. dec

THEOR. 71. PROPOS. 95. xciiij. Lxxxix

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, lõgitudine commensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua omnia fiant, vt prius. [b] Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulum sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [c] erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis, [d] erit DI, atque adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; [e] incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero similiter demon- [b] 19. dec [c] 20. dec [d] 22. dec [e] 10. dec



strabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Minorem.

QVONIAM enim ex constructione, rectangulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO: Est autem illud ostensum Rationale; erit & compositū ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Item quia FI, Medium est ostensum, erit & LO, contentum sub TO, SO, illi æquale; Medium. Denique quoniam AH, GI, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atque adeo rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitque compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum vero sub ipsis, Medium; a 77. dec erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

Lxxxv. Lxxxx.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium AC, (repetita figura proxime antecedentis propositionis) sub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ spatium AC, potest, esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantū

com-

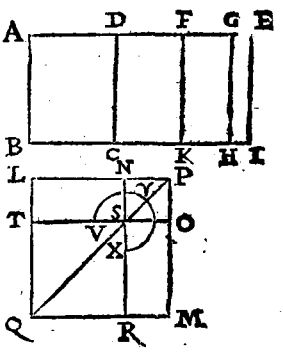
commensurabiles,& DE,Rationali AB,commensurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit,quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis.Secetur DE,bifariam in F, & reliqua construantur, vt prius. Erunt ergo rursus,vt in antecedenti propos. AG,GE,longitudine incommensurabiles.Et quia AE, Rationalis longitudine incommensurabilis est Rationali AB,vt in propos.93.diximus; a erit rectangulum A I, Medium. Item quia DE,Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; b erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI,Rationale.Rursus erunt, vt in præcedenti propos. AH,GI,incommensurabilia;poteritque,vt ostensum est in propos.92.recta TS,spatiũ A C.Dico T S,esse eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. a22.dec b20.dec

QVONIAM enim ostensum est AI,Medium esse; erit & compositum exquadratis LM,NO,rectarum TO, SO, illi æquale,Medium.Item,quia demonstrauimus FI, Rationale esse;erit & LO,rectangulum sub TO,SO,contentum,cum illi sit æquale, Rationale.Sunt autẽ & TO, SO, potentia incommensurabiles, vt in propos. antecedenti est demonstratum.Igitur cum TO, SO, potentia incommensurabiles sint, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium;rectangulum vero sub ipsis,Rationale; c erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca si spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta,&c. Quod erat demonstrandum. c78.dec

THEOR. 73. PROPOS. 97. Lxxxxvi Lxxxxi.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta; Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR spatium A C, sub Rationali AB, & Apotoma sexta A D. Dico rectam, quæ potest



ſpatium AC, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Sit enim ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ. 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; a erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI. Medium. Eruntque vt in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; b Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commenſurabilia ſint, c erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. Iam vero demonſtrabimus, vt in propoſ 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

a 22. dec

b 10 dec

c 14. dec

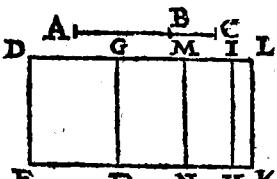
QVONIAM enim AI, Medium oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia FI, Medium oſtenſum eſt; erit & LO, illi æquale, contentumque ſub TO, SO, Medium. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile, vt oſtendimus; erit quoque LO, ſub TO, SO, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarum TO, SO; propterea quod LO, ipſi FI, & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Deni-

que TO,SO,potentia incommensurabiles sunt,vt in propos.95.est demonstratum. Quamobrem cum TO,SO, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarū quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile; [a] erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum. [a] 79.dec

THEOR.74. PROPOS. 98. xcvij. xcij.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

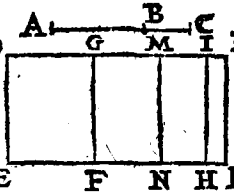
SIT Apotome AB,& ipsi congruens BC, ita vt AC, BC,sint Rationales potentia solum commensurabiles; [b] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF,æquale quadrato ex AB,latitudinem faciens DG.Dico DG, esse Apotomen primam. Ad eandem enim DE, applicetur rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH,aliud IK,æquale quadrato ex BC; ita vt totum DK, æquale sit cōpositō ex quadratis rectarum AC, BC. [c] Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC,BC,vna cum quadrato ex AB; si auferantur quadratum ex AB,& rectangulum DF; relinquetur GK, rectangulo bis sub AC,BC,æquale;atque adeo diuisa GL, bifariam in M,ductaque MN,ipsi DE,parallela, erit MK, æquale rectangulo sub AC,BC. Et quoniam AC,BC,Rōnales sunt;erūt quoq;quadrata ex AC,BC,Rōnalia;ideoque cōmensurabilia. [d] Cū ergo & cōpositum ex quadratis rectarum AC,BC, vtrique ipsorum sit cōmensurabile,



[b] 45.pri

[c] 7. sec.

[d] 6.dec



erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, [a] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulum sub ipsis, atque adeo & eius dupli GK, Medium. Quod cum applicetur ad Rationalem GF; [b] erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quoniã DK, Rationale, & GK, Medium, hoc est, Irrationale, incommensurabilia sunt; [c] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales potentia tantum commensurabiles; [d] Ac propterea reliqua D G, Apotome erit. Dico & primam esse.

a 21. dec

b 23. dec

c 10 dec

d 74. dec

QVONIAM enim per Lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, BC, hoc est, MK, medium est proportionale inter quadrata rectarum AC, BC, hoc est, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt. [e] Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH, IK, commensurabilia sunt, [f] erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ D L, G L, inæquales sint, & ad maiorem DL, applicatum rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiensque figura quadrata; atque sit ostensa DI, ipsi IL, longitudine commensurabilis; [g] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum DG, esse Apotomen, & totam DL, plus pos-

e 17. sex.

f 10. dec

g 18. dec

se.

se, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensuralem esse lógitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

xcviij. Lxxxxiii

QADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalē applicatum latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale: [a] Et ad Rationalem DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen secundam esse. Construantur enim eadem, quæ in antecedenti propos. ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media, & commēsurabilia; [b] ac proinde & totum DK, vtrique illorum commēsurabile erit. Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius libri. Cum ergo DK, applicetur ad Rationalem DE, [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulū sub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod cum applicetur ad Rationalem DE, [d] erit GL, Rationalis longitudine commensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, Medium, id est, Irrationale, & GK, Rōnale, incōmensurabilia sunt; [e] erūt rectæ DL, GL, eandem habētes cum illis rationem longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Rationales potentia tantum com-

a 45. pri

b 16. dec

c 23. dec

d 21. dec

e 10. dec

men-

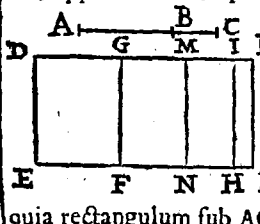
74.dec mensurabiles; a Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundâ esse. Nam similiter, vt in præcedēti propos. demonstrabimus totam D L, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis Quare cum congruens G L, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. D G, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundam. Quod ostendendum erat.

Lxxxxix xciiii.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secunda A B, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantum commensurabiles, contineantque Medium: b Et ad Rationalem DE, Applicetur D F, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico D G, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostendemus iā, vt in propos. præcedenti, DK, Medium esse, c atque adeo rectam DL, Rationalem ipsi DE, lōgitudine incommensurabilem. Et quia rectangulum sub AC, BC, Medium est, atque ob id & eius duplum G K, d erit quoque GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine sunt incommensurabiles, estque vt A C, ad BC, ita per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum sub A C, B C, e erit quadratum ex A C, incommensurabile rectangulo sub A C, B C. f Est autem quadrato ex A C, commensurabile compositum ex quadratis rectarum A C, B C; quod quadrata ex rectis A C, B C, potentia commensurabilibus descripta,



45.pri

23.dec

123.dec

10.dec
16.dec.

com-

commensurabilia sint; rectangulo vero sub AC, BC, commensurabile est rectangulum bis sub AC, BC. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, BC, hoc est, ipsi GK, a Atque adeo rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles sunt. Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; b Ac proinde reliqua DG, Apotome est. Dico esse & tertiam. Similiter enim, vt in propos. 98. demonstrabimus DL, totam plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo neutra ipsarum DL, GL, Rationali DE, longitudine sit commensurabilis. vt demonstratum est; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratum igitur Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat ostendendum.

a 10. def

b 74. def

THEOR. 77. PROPOS. 101.

C. LXXXVI.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

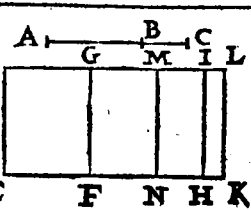
SIT minor AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommensurabiles sint, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulum vero sub AC, BC, Medium: c & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est; d erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GL, Medium est; e erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quo-

c 45. pri.

d 22. def

e 23. def

niam



a 10. dec. niam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Medij incommensurabilia sunt; a erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incõmensurabiles. Ostẽsæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt b 74. dec DL, GL, potentia tantum commensurabiles; b Ac propterea reliqua DG. Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim A C, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, c 10. dec incommensurabilia; c Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub D I, I L, æquale sit quadrato ex M L, id est, quartæ parti quadrati ex G L, vt in propos. 98. est demonstratum; d poterit D L, plus quam G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad D L, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, I L, æquale quartæ parti quadrati ex G L, minore, deficiens figura quadrata, diuidensque maiorem D L, in partes DI, I L, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruẽs G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, sitque eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

d 19. dec

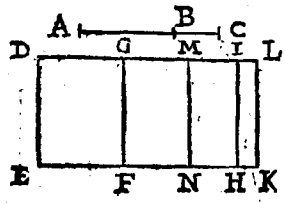
THEOR. 78. PROPOS. 102.

CI. CXXXVI

QVADRATVM eius; quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem aplicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: [a] Et ad Rationalē DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG, Dico DG, Apotomen quintam esse. Constituantur enim, eadem, quæ supra. Quoniā igitur compositū ex quadratis rectarum AC, BC, atqueadeo & illi æquale DK, Medium est; [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia, sunt: [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; [e] Atque idcirco reliqua, DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem enim modo, vt in antecedenti proposit. demonstrabimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE, erit ex defin. DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quę cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonstrandum erat.



a 45. pri

b 23. dec

c 22. dec

d 10. dec

e 74. dec

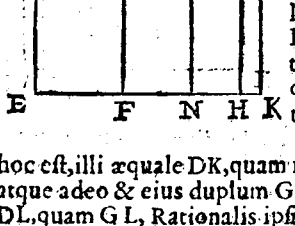
THEOR. 79. PROPOS. 103.

Cii. Lxxxxvii

QVADRATVM eius, quæ cū Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

SIT

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens A B, & ipsi congruens B C, ita vt A C, B C, potentia sint incommensurabiles, faciantque & compositum ex quadratis rectarum A C, B C, Medium, & rectangulum sub iisdem A C, B C, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum.



a 45. pri. a Et ad Rationalem D E, applicetur quadrato ex A B, spatium æquale D F, latitudinem faciens D G. Dico D G, esse sextam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Quoniam igitur tam compositū ex quadratis rectarum A C, B C, hoc est, illi æquale D K, quam rectangulum sub A C, B C, atque adeo & eius duplum G K, Medium est; b Erit tam D L, quam G L, Rationalis ipsi D E, longitudine incommensurabilis. Et quia rectangulum sub A C, B C, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum A C, B C; Et sunt rectangulum sub A C, B C, & eius duplum G K, commensurabilia; c Erit & G K, eidem composito, hoc est, ipsi D K, incommensurabile; d propterea quæ rectę D L, G L, eandem habentes rationem, quam D K, G K, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt D L, G L, potentia solum commensurabiles; e Atque ideirco reliqua D G, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus enim similiter, vt propos. 101. totam D L, plus posse, quam congruentem G L, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum D L, G L, commensurabilis sit longitudine Rationali D E, erit ex defin. D G, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum.

b 23. dec

c 14. dec
d 10. dec

e 74. dec

THEOR. 80. PROPOS. 104.

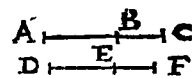
C iii. xcviii.

RECTA linea Apotomæ longitudine

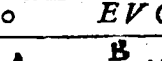
com-

commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atque ordine eandem ipsi AB; [a] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [b] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, uel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine pronuntur commensurabiles; [c] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rónales. Rursus quia est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles; erunt quoque ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, [d] reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Possit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quo posito, [e] poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; [f] erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadé ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commensurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; [g] erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitu-



a 12. sex
b 12. 6n
c 10. dec
d 74. dec
e 15. dec
f 12. dec
g 14. dec



gitudine commensurabilis. Quare vtraque AB,DE, ex defin erit Apotome tertia.

POSSIT iam AC,plus quam BC,quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. a 15.dec Quo posito, a poterit & DF,plus EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos.67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eandem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis exposita, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum ex hypothesi. Immo vero, si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt DE, illi potentia tantum commensurabilis, sit Apotomen eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, secunda, quarta vel quinta, eique congruens BC, & sit DE, ipsi AB, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eique congruentem EF, & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensura-

bilis

bilis longitudine: atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt AC, & DF. Quare cum sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; b erunt quoque AB, & DE, longitudine cõmensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeo & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles, quod non ponitur.

a 12. dec

b 10. dec

SEMPER tamen verum est, si AB, est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, quæ ipsi AB, potentia solum est commensurabilis, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, c poterit quoque DF, plus quam EF, quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit quoque DE, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quæuis ordine non eadem ipsi AB: quia rursus, cum sit vt AC, ad BC, ita DE, ad EF, d poterit quoque DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta.

c 15. dec

d 15. dec

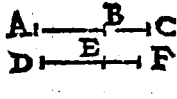
IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

Ciiii. Lxxxxix

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est. atque ordine eadem.

SIT Mediæ Apotome quæcunque A B, eique congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi A B, commensurabilis DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & D E, Mediæ Apotomen esse, & ipsi A B, ordine eandem.



a Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF, b Erit ergo tota AC, ad totam D F, vt A B, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur A B, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; c erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodem modo commensurabiles. Et quia A C, BC, Mediæ sunt, d erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita B C, ad E F; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autem A C, B C, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. D F, E F, solum potentia commensurabiles. Quare cum D F, E F, Mediæ sint ostensæ, e erit reliqua D E, Mediæ Apotome. Dico & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniã enim est vt AC, ad BC, ita D F, ad E F; & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex A C, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt D F, ad EF, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub D F, E F; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex D F, ad rectangulum sub DF, EF; Et permutando vt quadratum ex AC, ad quadratum ex D F, ita rectangulum sub A C, BC, ad rectangulum sub D F, EF. Igitur cum quadratum ex A C, commensurabile sit quadrato ex D F, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles; f erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare g rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt A B, sit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub D F, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; g atque adeo & D E, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub A C, B C, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoque rectan-

gulum

a 12. sex
b 12. 6
c 10. dec
d 24. dec
e 75. vel 76. dec.
f 10 dec
g 75. dec

gulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. [a] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secunda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum. a 76. dec

THEOR. 82. PROPOS. 106. Cv. Cxvi C.

RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est;

SIT Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulū vero sub iisdē AC, BC, Medium. Sit autem DE, ipsi AB, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, Minorem esse. Fiāt enim eadem quæ supra. ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, eandem habeant rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Et quoniā est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutādo vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [b] erit vt quadratū ex AC, ad quadratum ex BC, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex EF, & componendo vt compositū ex quadratis rectarum AC, BC, ad quadratum ex BC, ita compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF: & permutado vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratū ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratum ex BC, commensurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. [c] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, composito ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur, & compositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. de- b 22. sex c 10. dec

monſtrabimus rectangulum ſub AC,BC, rectangulo ſub DF,EF,eſſe commenſurabile:ponitur autem rectangulum ſub AC,BC,Medium: Erit quoque rectangulum ſub DF, EF,ex coroll.propoſ.24.huius lib.Medium, Et quia eſt vt AC,ad BC,ita DF,ad EF,ſuntque AC, BC, potentia incommenſurabiles,a erunt etiam DF,EF,potentia incommenſurabiles.Quam ob rem cum DF, EF, potentia ſint incommenſurabiles,faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum DF,EF,Rationale, rectangulum vero ſub iiſdem DF,EF,Medium;b erit DE,Minor.Recta ergo linea Minori commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 10. dec

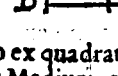
b 77. dec

CviCxvii Ci.

PROBL. 83 PROPOS. 107.

RECTA linea commenſurabilis ei,quę cum Rationali Medium totum efficit; & ipſa cum Rationali Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB,cum Rationali Medium totum efficiēs, & ipſi congruens BC,ita vt AC,BC, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC,BC,Mediū;at rectangulum ſub AC, BC,Rationale:Sit autem DE, ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo.Dico & DE, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra,oſtendemus,vt in antecedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF,EF.Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll.propoſ. 24. huius lib. Medium.Rurſus vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC,BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur,erit & hoc Rationale,ex defin.9 Sunt denique eodem modo, vt in præcedenti propoſ.eſt probatum,rectæ DF, EF,poten-



tia incommensurabiles. Igitur cum DF, EF, incommensurabiles sint potentia, faciantq; compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, rectangulum vero sub ipsis, Rationale; a erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonstrandum erat. a 78. dec

THEOR. 84. PROPOS. 108. Cvii. Cii.

RECTA linea commensurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipsa cum Medio Medium totum efficiens est.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum efficiens, & ipsi congruens BC, ita ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum ex quadratis ipsarum Medium, & rectangulum sub ipsis Medium quoq; & adhuc incommensurabile composito ex ipsarum quadratis: Sit autem DB, ipsi AB, quomodolibet commensurabilis. Dico & DE, esse, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdem, quæ supra, probabimus similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremo quia composito ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulum sub DF, EF; Sunt autem compositū ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC. per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scho-

lio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, & rectangulũ sub DF, EF, incommensurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; [a] erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

a 79. dec

Cviii. Ciii.

THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR à Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorem. Exponatur enim Rationalis EF, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipsi CD, ita vt totum EI, toti AD, sit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale est; [c] erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commensurabilis. Rursus quia HI, Medio CD, æquale Medium est, [d] erit HK, Rationalis, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Itaque cum EK, quidem sit longitudine commensurabilis ipsi EF, at HK, eidem EF, longitudine incommensurabilis, [e] erunt EK, HK, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles: [f] propterea reliqua EH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK,

b 45. pri.
c 21. dec
d 23. dec
e 13. dec
f 74. dec

plus

plus poteſt quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt EK, quam HK. quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine; cum tota EK, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc eſt, ſpatiũ AB, ſibi æquale, [a] Apotome eſt. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; cũ tota EK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, [b] Minor eſt. Medio ergo a Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat. [a 92. dec] [b 95. dec]

THEOR. 86. PROPOS. 110. cix. Ciiii.

RATIONALI à Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Mediũ totũ effiicit. Eadem. n. conſtruãtur, quæ ſupra. Et quia EI, Medio AD, æquale, Medium eſt; [c] erit EK, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; [d] erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Itaque cum HK, quidẽ ipſi EF, ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidẽ EF, longitudine incommenſurabilis; erũt HK, EK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [f] Ac proinde reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut [c 23. dec] [d 21. dec] [e 13. dec] [f 74. dec]

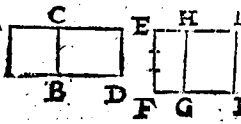
igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, cum congruens HK, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome secúda. Recta igitur potens spatium
a 93. dec EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma secunda EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, a Mediæ est Apotome prima. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum congruens HK, sit ostensa commensurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens spatium EG, contentum sub Rationali EF,
b 96. dec & Apotoma quinta EH, hoc est, spatium illi æquale AB, best ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c. Quod ostendendum erat.

Cx.
Cv.

THEOR. 87. PROPOS. 111.

MEDIO a Medio detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel Mediæ Apotomen secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Constructis enim iisdé quæ supra; quoniam EI, HI, Mediis AD, CD, æqualia
c 3. dec Media sunt, e erunt EK, HK,



Rationales ipſi E F, longitudine incommenſurabiles. Et quia AD, CD, hoc eſt, EI, HI, ponuntur incommenſurabilia; a erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationẽ, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles; b Ac propterea reliqua FH, Apotome eſt, & ei congruẽs HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus poteſt EK, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commenſurabilis ſit oſtenſa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale; c Mediæ Apotome eſt ſecunda. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum neutra ipſarum EK, HK, Rationali EF, ſit longitudine commenſurabilis, vt demonſtrauimus; erit ex defin. EH, Apotome ſexta. Quam ob rem recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſexta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, d eſt ea, quæ cum Medio Mediũ totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 10. dec

b 74. dec

c 94. dec

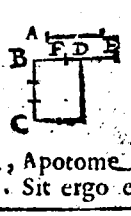
d 97. dec

THEOR. 88. PROPOS. 112.

Cxj. Cvj.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

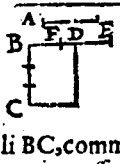
SIT Apotome A; quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, A, aliqua ex binis nominibus. Expoſita autem Rationali BC, e applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniam igitur A, Apotome eſt; f erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei



e 45. pri

f 98. dec.

con-



congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ B E, D E. Rationales potentia tantum commensurabiles, poteritque BE, plus quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & ipsa BE, Rationali BC, commensurabilis erit longitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex binis nominibus; [a] erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomen BF. Erunt igitur ex defin. eius, quæ ex binis nominibus prima est, BF, FD, Rationales potentia solum cõmensurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa BF, Rationali BC, longitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine sit commensurabilis eidẽ B C; [b] erunt quoque B E, B F, inter se commensurabiles longitudine. Igitur cum tota BE, sit longitudine commensurabilis parti BF, erit & eadem BE, reliquæ parti FE, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis sit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum B E, FE, longitudine commensurabilium, ipsa BE, longitudine incommensurabilis est ipsi DE; (quod BE, DE, Rationales sint potẽtia solum commensurabiles) [c] erit quoque altera FE, eidem DE, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque FE, DE, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt FE, DE, potentia solum commensurabiles. Quare reliqua FD, [d] Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat.

a 61. dec

b 12. dec

c 14. dec

d 74. dec

COROLLARIVM.

EX demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatũ, e latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.

23. dec

A T quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, f latitudi-

98. dec

nem

nem efficit Apotomen primam.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad rationalem applicatum, a latitudinem efficit Apotomen secundam.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ secundę ad Rationalem applicatum, b latitudinem efficit Apotomen tertiam.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, c latitudinem efficit Apotomen quartam.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, d latitudinem efficit Apotomen quintam.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, e latitudinem efficit Apotomen sextam.

ITAQVE cum hę latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter se autem, quod ordine non sint eædem Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Media, & inter se se differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demõstrauimus, Apotomen tandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & cæterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At vero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum quinque Irrationalium, quæ ipsam sequuntur, ad Rationalem applicata, latitudines efficiũt ex binis nominibus primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, eąsdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam expusita, tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Mediis prima.
4. Ex binis Mediis secunda.
5. Maior.

6. Ra-

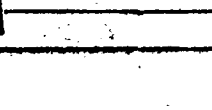
a 99. dec
b 110. dec
c 101. dec
d 102. dec
e 103. decimi.

6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima:
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

Cxii. o.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.



245. pri

SIT Rationalis A, & ex binis nominibus BC, cuius maius nomẽ BD; a & ad BC, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BF. Dico BF, eſſe Apotomen, cuius nomina

hoc

hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia, sunt nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotomen BF, esse, ordine eandem ipsi BC, ex binis nominibus. [a] Applicetur enim rursus ad DC, minus nomen, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex A, atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; sitque ipsi DG, æqualis BH. Et quoniam æqualia sunt BE, CG; [b] erit vt BC, ad DC, ita, DG, hoc est, sibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Est autem BD, maior, quam DC. Igitur & HF, maior est, quam FB. Ponatur FI, ipsi FB, æqualis; [c] & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc est, ad sibi æqualem BF, ita FK, ad BK. Ostensum est autem esse vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt BD, ad DC, ita FK, ab BK. At BD, DC, (cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. [d] Igitur & FK, BK, potentia solum commensurabiles sunt.

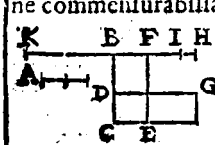
RVRSVS quia est vt HF, ad BF, ita FK, ad BK, [e] erunt quoque HF, FK, antecedentes simul, nempe tota HK, ad BF, & BK, consequentes simul, hoc est, ad totā FK, vt FK, ab BK. Ac propterea FK, media proportionalis est inter HK, BK. Quare vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, secunda. Quia vero CG, cum Rationale, sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum [f] facit DG, latitudinem Rationalem ipsi DC, longitudine commensurabilem; Erit quoque HB, ipsi DG, æqualis, Rationalis & longitudine, commensurabilis ipsi DC. Et quoniam ostensum est, esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quoque vt BD, ad DC, ita HK, ad FK. [g] Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum, ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commensurabile est quadrato ex DC. (quod rectæ BD, DC, sint Rationales potentia commensurabiles, cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus) [h] Commensurabile igitur erit

quoque

[a] 45. pr
[b] 14. ne 16. sex
[c] 12. sex
[d] 10. de cimi.
[e] 12. qu
[f] 21. dec
[g] 22. sex
[h] 10. de

quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratum ex FK; ita recta HK,
a 10. dec ad BK. a Igitur longitudine commensurabilis est HK, ipsi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propos. 16. huius lib. Ostensa est autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commensurabilis, Rationalis est; ac propterea & BK, ipsi HK, comensurabilis, Rationalis exstit. Cum ergo ostensa sit FK, ipsi BK, potentia solum commensurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales
b 74. dec sint, & potentia tantum ostensæ commensurabiles, b erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod est primum.

QVONIAM vero ostensum est esse rectam HK, totâ
c 16. dec parti BK, longitudine commensurabilem, c erunt propterea & BK, BH, longitudine inter se commensurabiles. Cum ergo BH, ostensa sit longitudine commensurabilis ipsi DC; erit quoque BK, ex scholio propos. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commensurabilis. Rursus quia, demonstratum est esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK; Sunt autem modo
d 10. dec DC, BK, ostensæ longitudine commensurabiles; d Erunt quoque BD, FK, commensurabiles longitudine. Itaque, cum FK, ipsi BD, & BK, ipsi DC, longitudine sit commensurabilis, erunt ipsius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipsius BC, ex binis nominibus, longitudine commensurabilia. Quod est secundum.



ITEM quia demonstrauimus esse vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erit idcirco Apotomæ nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominibus ipsius BC, quæ est ex binis nominibus. Quod est tertium.

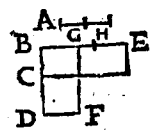
POSTREMO vel BD, plus potest, quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest B D, quam DC, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; cum sit vt BD, ad
e 15. dec DC; ita FK, ad BK; e poterit quoque FK, plus quam BK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis: Et si

BD, plus poteſt quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Et ſi quidem BD, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commenſurabilis; erit & FK, quæ longitudine oſtenſa eſt commẽſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Si vero DC, ſit Rationali commenſurabilis longitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commenſurabilis Si denique neutra ipſarũ BD, DC, ſit Rationali longitudine commẽſurabilis; [a] erit quoque neutra ipſarum FK, BK, commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome BF, ipſi BC, ex binis nominibus, vt conſtat ex definitionibus ſecundis; atque tertiis. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat. a 14. dec

THEOR. 90. PROPOS. 114. Cxiij. o.

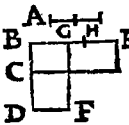
QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatũ, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quem ipſa Apotome.

SIT Rationalis A, & Apotome BC, cui congruat CD, [b] & ad BC, applicetur rectangulum CE, æquale quadrato ex A, latitudinem faciens BE. Dico BE, eſſe ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc ipſam BE, ex



b 45. pri

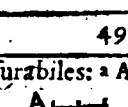
binis



binis nominibus, esse ipsi BC, Apotoma
a 45. pri. ordine eandem. a Applicetur enim rursus
ad BD, totam, rectangulum BF, æquale
eidem quadrato ex A, hoc est, ipsi CE, la-
titudinem faciēs BG. Et quoniam BF, CE
b 14. vel 16. sexti æqualia sunt; b erit vt BE, ad BG, ita BD
ad BC; & per cōuersionem rationis, vt BE, ad GE, ita BD
ad CD. Secetur quoque EG, ad H, secundum proportionē
BE, ad GE, ex ijs, quæ in schol. propos. 10. lib. 6. conscripsi-
mus; vt sit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia
igitur est vt BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata
ad HG, ex GE; ablatam; erit quoque BH, reliqua ipsius
BE, ad HE, reliquam ipsius GE, vt tota BE, ad totam GE.
Erat autem vt BE, ad GE, ita EH, ad HG. Erit igitur quo-
que vt BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media
proportionalis est inter BG, GH. Quare erit vt BH, pri-
ma ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad qua-
dratum ex HE, secunda, per coroll. propos. 20. lib. 6. Quia
vero fuit vt BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc est, BH, ad HE
& sunt BD, CD, cum sint nomina Apotomæ BC, Rationa-
c 10. dec les potentia tantum commensurabiles, c Erunt quoque
BH, HE, potentia solum commensurabiles; Ac propterea
quadrata ex BH, HE, commensurabilia. Igitur rectæ BH
GH, eandem habentes rationem cum quadratis ex BH
d 10. dec. HE, vt demonstrauimus, d longitudine sunt commensu-
rabiles; Ac propterea tota BH, longitudine commensu-
rabilis existens parti GH, commensurabilis quoque lon-
gitudine erit parti reliquæ BG, ex coroll. propos. 16. hu-
ius lib. At vero cum BD, Rationalis sit, nempe maius no-
men Apotomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Ra-
c 21. dec tionali linea A, æquale, Rationale; e erit latitudo BG, Ra-
tionalis commensurabilis longitudine ipsi BD. Igitur e
scholio propos. 12. huius lib. & BH, eidem BD, Rationa
commensurabilis est longitudine, atque adeo Rationali
existit; quandoquidem BH, BG, longitudine commensu-
rabiles sunt ostensę. Quia vero BH, HE, ostensæ sunt co
mensurabiles potentia tantū, & BH, Rationalis; erit quo
que HE, illi commensurabilis, Rationalis. Rationales e

go sunt

go sunt BH, HE, potentia solum commensurabiles: [a] Ac propterea BE, ex binis nominibus est. Quod est primum. [a 37. dec]



QVONIAM vero ostendimus esse BH, ad HE, vt BD, ad CD, atque adeo permutando BH, ad BD, vt HE, ad CD; Ostensa est autem BH, ipsi BD, longitudine commensurabilis; [b] erit quoque HE, ipsi CD, commensurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipsius BE, ex binis nominibus, commensurabilia sunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod est secundum. [b 10. dec]

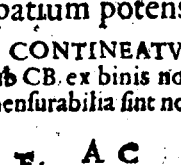
IMMO & in eadem proportione, cum demonstratum sit esse BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod est tertium.

POSTREMO vel BD, plus potest quam CD, quadrato rectę sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus potest quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, [c] poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine: Et si BD, plus potest, quam CD, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis. Et si quidem BD, Rationali expositæ longitudine sit commensurabilis; erit quoque BH, commensurabilis existens longitudine ipsi BD, eidem Rationali longitudine commensurabilis, ex scholio propos. 12. huius lib. Si vero CD, longitudine sit commensurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Si vero neutra ipsarum BD, CD, commensurabilis sit longitudine Rationali expositæ; [d] erit quoque neutra ipsarū BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertiis definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum. [c 15. dec] [d 14. dec]

THEOR. 91. PROPOS. 115.

SI ſpatium contineatur ſub Apotoma,& ea,que ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomę,& in eadem proportione; Recta linea, ſpatium potens,eſt Rationalis.

CONTINEATVR ſpatium AB,ſub Apotoma AC, & ſub CB ex binis nominibus,cuius nomina CD,DB,commenſurabilia ſint nominibus CE,AE,Apotomæ AC;& in eadem ratione,nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Poſſit autem recta F,ſpatium AB.Dico F, eſſe Rationalem. Expoſita enim Rationali G, [a] applicetur ad GB,quæ ex binis nominibus,rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [b] Erit ergo latitudo BH,Apotome, cuius nomina HI,BI,longitudine commenſurabilia ſunt nominibus CD,DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD,ad DB;atque adeo vt CE, ad AE,& permutãdo, vt tota HI, ad totam CE,ita ablata BI,ad ablatam AE. [c] Erit ergo & reliqua BH,ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE; [d] Commenſurabilis autem eſt longitudine HI, ipſi CE, quod vtraque HI, CE, commenſurabilis fuerit longitudine ipſi CD. [e] Igitur & BH, ipſi AC,longitudine eſt commenſurabilis; [f] Atque idcirco & HC, ipſi BA, commenſurabile erit,[g] cum ſit vt HB,ad AC,ita HC, ad BA:Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale Rationale eſt.Igitur & BA, illi commenſurabile,Rationale erit,proptereaque & recta F,ipſum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter ſi ſpatium contineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus,cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus Apotomæ,& in eadem proportione;Recta linea ſpatium potens, eſt Rationalis. Quod erat demonſtrandum.



CO-

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale continea tur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium A B, contentum sub AC, CE, Apotomâ, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotoma nominibus eius, qua ex binis nominibus commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, longitudine ostensa sunt esse commensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

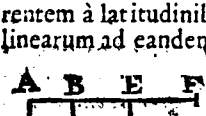
THEOR. 92. PROPOS. 116. Cxv. Cvii.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

SIT Media A B. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali AC, contineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentum, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non esse eandem alicui tredecim illarum quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, a latitudinem faciat Rationalem ipsi AC, longitudine incommensurabilem; Et quadrata reliquarum duodecim Irrationaliū, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius

a 23. def

lib. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad eandem Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinē Mediam; perſpicuum eſt, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem facit differentem à latitudinibus, quas quadrata illarum tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



QVOD ſi compleatur rectangulum DE; erit & hoc contentum ſub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lemmate propo. 38. Poſſit ergo ipſum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rurſus EF, non eſſe eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi BE. Hoc autem manifeſtum eſt, cum quadratū ipſius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarū tredecim, & quadratum etiam ipſius BE, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes à BE, vt demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter ſe, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

Cxviii. vii.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

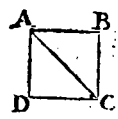
PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri AB. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; a ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; ſintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo eſt vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad nu-

a 5. dec.

me-

merum G, Erit quoque vt quadratum ex A C, ad quadratum ex A B, ita quadratus numerus ex E F, ad quadratum numerum ex G, (a Cum enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex A C, duplum est quadrati ex AB, per ea quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariã possit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipse E F, illum producens, par erit. (Si namque impar esset, cum se ipsum multiplicans producat suum quadratum, esset & quadratus ipse impar; b eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod est absurdum. ostensus est enim par.) Quia vero EF, & G, in sua proportione minimi, c inter se primi sunt; & EF, ostensus est par, erit G, impar. (Si enim par etiam esset, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non essent inter se primi. Quod est absurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus est numeri EH, d & quadrati habet proportionem laterum duplicatam; erit quadratus ex E F, quadruplus quadrati ex E H (Quadrupla enim proportio duplicata est proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex E F, duplus sit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partium 4. est quadratus ex EF, talium 2. erit quadratus ex G; & taliũ 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus est quadrati ex E H, cum illius ad hunc proportio sit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt supra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens, par, & ipse quoque G, par. Sed & impar est ostensus. quod est absurdum. Non ergo longitudine commensurabilis est diameter AC, lateri AB. Igitur incommensurabilis longitudine.

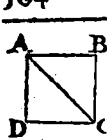


a 20. sex. & 11. oct. taui.

b 29. noni.

c 2 4. sep

d 11. oct.



ALITER. Sit si potest fieri, diameter AC commensurabilis longitudine lateri AB; habeantq; AC, AB, proportionem, quã numeri EF, & G, qui minimi sint in sua proportione; atque adeo inter se primi. Non erit igitur G, E . . . H . . . F vnitas. (Cũ, n. quadratũ ex AC, duplũ sit quadrati ex AB; sit aũt vt quadratũ ex AC, ad quadratũ ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratũ numerum ex G, vt in priori demonstratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, est vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod est absurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam est demonstratum, quadratus ex EF, duplus est quadrati ex G, metietur quadratus ex G, [a]14.oct quadratum ex EF, a ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cum ergo & G, se ipsum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter se compositi, habentes mensuram communem, numerum G: Sed & inter se primi sunt. Quod est absurdum. Non ergo commensurabilis est diameter AC, longitudine lateri AB. Quare ostendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonstrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in scholio propos. 47. lib. 1, demonstrata a nobis sunt, quadratum diametri dupli est quadrati ex latere descripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia sumptis in proportione dupla [b]10.nonni. *quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. b solum tertius ab vnitate quadratus est, & cæteri omnes vnum intermittentes, quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non sit; erunt solum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus sit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad* [c]24.oct. *2. proportionem, quam quadratus ad quadratum (c alias & 2. quadratus esset.) ac propterea neque quadratũ ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quã nu-*

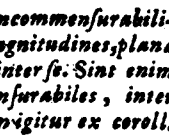
merus

merus quadratus ad numerũ quadratũ. a Incõmensurabilis ergo est diameter longitudine ipsi lateri. Quod est propositũ. a 9. dec.

HOC etiam theorema aliter demonstrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in scholio propos. 8. lib. 8. et in scholio propos. 9. huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Gracis reperitur hoc loco appendix quadam, cuius intelligentia ex sequentibus Stereometria libris pendet, vt merito omitti posset. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commẽsurabilitatem omnium magnitudinũ, & incommensurabilitatẽ pertinens: visum est eam paucis explicare, assignando more nostro solito in margine loca Stereometria, quæ ad demonstrationem eorum, quæ hic dicuntur, necessaria sunt. Est igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommensurabilibus, innenietur & alia quam plurima magnitudines, plana scilicet, atque solida incommensurabiles inter se. Sint enim rectæ A, C, longitudine inter se incommensurabiles, inter quas media proportionalis sit B. Quoniam igitur ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad C, ita est figura rectilinea quauis super A, constituta ad figuram rectilineam sibi similem, similiterq; positam super B, & sunt A, & C, longitudine incommensurabiles; b erunt rectilineæ illa figura super A, & B, incommensurabiles.



b 10. dec

RVRSVS c quoniam circuli, quorum diametri A, B, proportionem habent quam quadrata ex A, & B, descripta: Quadrata autem hæc, cum sint figura rectilineæ similes, similiterque posita, proportionem habent, quam recta A, & C, ex coroll. propos. 20. lib. 6. d Habebunt quoque circuli diametrorum A, B, eandem proportionem, quam recta A, C. Sed recta A, C, incommensurabiles sunt longitudine. e Igitur & circuli diametrorum A, B, incommensurabiles sunt.

c 2. duo decimi.

d 11. qn

e 10. dec

IAM vero si constituantur solida, nempe pyramides, vel prismata eiusdem altitudinis, quorum bases sint figuræ rectilineæ similes, similiterque descriptæ super A, B, f habebunt pyramides, atque prismata eandem proportionem, quam ba-

f 5. 6. vel 7. duodecimi.

sas, hoc est, quam rectilinea illa figura. Quare cum rectilinea illa figura incommensurabiles sint, vt modo est demonstratum; a incommensurabilia etiam erunt ipsa solida, nimirum pyramides, & prismata.

a 10. dec

QVOD si coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum bases circuli sint diametrorum A, B, b habebunt huiusmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum basibus, hoc est, cum illis circulis. Cum ergo circuli ostensi sint incommensurabiles, c Erunt quoque incommensurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta sunt igitur non solum lineæ, & superficies incommensurabiles, verum etiam & corpora, siue solida incommensurabilia. Quod est propositum.

b 11. duo decimi.

c 10. dec

EADEM autem ratione, si recta A, & B, longitudine commensurabiles sint, d ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, necnon & ipsarum circulos, commensurabiles esse, e atque adeo & earundem pyramides, & prismata, ac denique conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.

d 10. dec

e 5. 6. 7. & 11. duodec.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POST QVAM *Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometriæ parte disseruit, qua circa plana versatur, sibique nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinã linearum commensurabilium, atque incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci:*

Nunc

Nunc tandem aggreditur in hoc libro undecimo eam partē Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima eſt: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatē, quæ præter longitudinem latitudinemque ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem, ita vt tres dimenſiones poſſideat, vnam quidem ſecundum longitudinem, aliam vero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſſitudinem, altitudinemve, appellari ſolidum, ſiue corpus: quemadmodum quantitas longitudinem tantum habēs, linea; quæ vero longitudini latitudinem adiecit, ſuperficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt rectè intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hac enim deſcribit veſtigium quoddam longum tantum, hoc eſt, lineam, propterea quod punctum omnis eſt magnitudinis expers; vt autem percipiamus ſuperficiē, monent, vt intelligamus lineā aliquā in tranſuerſum moueri; hac enim deſcribet veſtigium longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem linea, latū vero propter motum illum, qui in tranſuerſum eſt factus; carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatē trina dimenſione præditam, conſulunt, vt cōcipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter eleuari, ſiue in tranſuerſum moueri; hac enim ratione deſcribetur veſtigiū quoddam longum, latum, atque profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundū vero ſeu craſſum, propter eleuationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hac ergo quantitas, ſolidum ſiue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta diſtincta a linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quod triplex tantū dimenſio poſſit aſſignari, vt perſpicue in commentarijs, quos in ſphæram Ioannis de Sacro Boſco conſcripſimus, a nobis fuit demonſtratum ex Ptolemæo in libello de Anatemmate.

SO-

II.

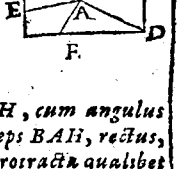
SOLIDI autem extremum, est superficies.

QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies uero lineas recipit, ut in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremum esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei: perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

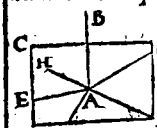
LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quęque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

VT linea recta AB, plano CD, insistens, ita ut B, punctum sit in sublimi extra planum CD, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpendicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus alijs, quæ in eodē existentes plano ipsam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, ut AB, æqualiter insistat plano CD, & non magis in unam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque deinceps BAH, rectus, ideoque illi æqualis. Eademque ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, ut AB, cum una linea ex A, in plano CD, educta non efficeret angulum rectum, etiamsi cum alijs omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB, recta ad pla-



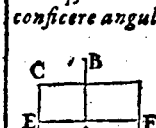
num

num CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad plan



recta, concedendum quoque erit, eam cu
omnibus in eodem plano ductis, qua ipsa
tangunt, rectos constituere angulos. Et e
trario, vt recte cõcludatur, lineam quan
piam esse ad planum datum rectã, demo
strandum erit prius, eam cum omnibus
eodem plano ductis, qua ipsam tangunt, rectos angulos co
ficere.

VT autem recta quapiam plano cuicunque insistens r
ctos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem pla
ductis, ipsamque tangentibus, satis est, vt cum duabus n
efficientibus lineam vnam, sed se mutuo secantibus, si pro
cantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte collig
tur, eam cum omnibus alijs rectos quoque angulos efficer
vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duab
non efficientibus lineam vnam: quia si duæ linea compon
vnam rectam lineam, non necessario assequitur, lineam, q
cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus alijs rect
conficere angulos. Recta enim AB, insistat plano CD, ess



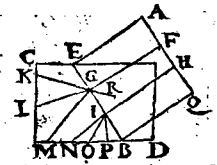
ciatque rectos angulos cum duabus
eodem plano ductis AE, AF, qua recta
vnam lineam componant. Dico AB, n
propterea cum omnibus alijs rectos ang
los constituere; atque idcirco non esse r
ctam ad planum CD. Hoc autem perspicuum est, cum A
circa EF, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctu
B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; n
hilominus tamen ipsa cum EF, semper eosdem rectos angu
los, & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duab
angulum componentibus, quales sunt AG, AD, in priori f
gura, rectos constituat angulos, tum demum cum omnib
alijs rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucid
demonstrabitur propos. 4. huius lib.

IIII.

PLANVM ad planum rectum est

cum rectæ lineæ, quæ communi planorum sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducuntur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

INSISTAT planũ AB, plano CD, ita vt linea AQ, sit in sublimi, hoc est, extra planum subiectum CD, at EB, in ipso eodem plano. Sit autem horum planorum communis sectio EB, qua, vt demonstrabitur propos. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I, ex ipsis in plano AB, ducantur GF, IH, perpendiculares ad communem sectionem EB. Si igitur linea FG HI, ad planum alterum CD, recta fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum alijs omnibus in plano CD, a punctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partẽ inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis: Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique a lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse conceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, estendendum prius erit; lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.

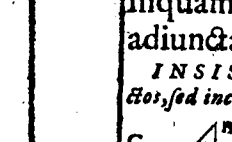


V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio est, cum a sublimi termino rectæ illius

lineæ ad planum deducta fuerit perpend
cularis, atque a puncto, quod perpendicu
laris in ipso plano fecerit, ad propositæ i
lius lineæ extremum, quod in eodem e
plano, altera recta linea fuerit adiuncta; es
inquam, angulus acutus insistente linea,
adiuncta comprehensus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos
ctos, sed inclinata, ita vt punctum B, sit extra planum in
blimi, punctum uero A, in plano. Deinde
B, termino sublimi rectæ AB, intelligat
ad idem planum deducta perpendicular
BE; faciens in plano punctum E; atque
E, ad A, adiungatur recta EA; erit que n



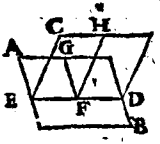
a17. pri. *cessario angulus BAE, acutus, a cum in triangulo ABE, d*
anguli BAE, BEA, duobus sint rectis minores, & angul
BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehensus l
nea insistente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rec
AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur esse inc
natio lineæ AB, ad planum CD, quantus est dictus angul
acutus BAE.

VI.

PLANI ad planum inclinatio, est ar
gulus acutus rectis lineis contentus, qu
in utroque planorum ad idem communi
sectionis punctum ductæ, rectos cum secti
ne angulos efficiunt.

PLANO namque AB, insistat planum CD, ita vt pa
ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ip
plano AB, sitque CD, inclinatum ad AB; & communis e
rum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem

eius puncto F, duæ perpendiculares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometra angulum GFH, dicunt angulū inclinationis plani CD, ad planum AB, siue is acutus sit, siue rectus, obtusus ue: quamquam proprio solū angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat totius æquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterū; obtusus vero recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem unius plani supra alterum, generaliter dici consueuit a plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communi illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, sive is rectus sit, sive acutus, sive obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON obscura est hac definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo a recto magis recesserit.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur: hoc est, siue ad dexteram, siue ad sinistram: & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dextram, nec ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscisum, vt manentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dextrã, & ad sinistram: Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

SIT enim tectum quodpiam A B G D E F, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius basis BCFE, auferaturque fastigium AGHDKI. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter se, si ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur: nec tamen idcirco parallela dicentur, cum producta ad partes GH, KI, conueniant in fastigio A D. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem linea in eodem plano existentes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dextram: ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrarsum, sursum, atque deorsum. Itaque duo plana quacunque, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; linea vero recta, vel sunt parallela, vel ad alteram partem protracta conueniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandem nec sunt parallela, neque unquam conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & intransuersum posita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: qua cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: qua nunquam conueniunt.

IX.

SIMILES solidę figurę sunt, quæ simi-

similibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudicauit, vt breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim consequatur & angulorum solidorum æqualitas, vt ex defin. 14. patebit, cũ illos constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

AEQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figura solida non solum similes, verum etiam æquales. Nam si animo cœpiantur se se penetrare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterum excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundẽ vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo cõgruent: ac propterea inter se existent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingãt,

nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVAE lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planũ, vt lib. 1 exposuimus, qualis est angulus BAC, contentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædam linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ AB, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non cõponetur angulus planus totus ex BAD, DAC, immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, solidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco pluues quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

HAEC definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existẽtes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura

appa-

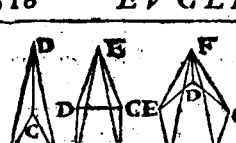
apparet. Angulus enim BAD, in plano est, in quo rectæ AB, AD, & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB, atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus solidus, sed totus quidã angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diuersis sint planis. Habit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis prabent duo parietes eum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his vero perspicuũ cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli solidi mutuo congruent, si se se ponere intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quæ duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehendimus hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua cõtinetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secatur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quę planis continetur, ab vno plano ad vnum punctum constituta

VIDELICET figura solida a planis ABC, ABCD,

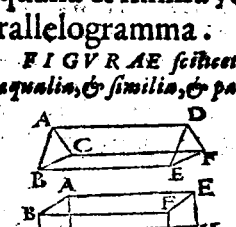


ABCDE, ad puncta D, E, F, constituta appellantur pyramides. Perspicuū autem est, omnia plana, quibus pyramis continetur, esse triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositū. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrāgula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera plānum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nūcupari solet. Vt pyramidis triāgularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangulā vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

XIII.

PRISMA est figura solida, quæ planis continetur, quorum aduersa duo sunt & æqualia & similia, & parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRAE scilicet solidæ, quarum plana aduersa & æqualia, & similia, & parallela sunt triāgula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogramma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBHG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur prismata. Itaque prisma nil aliud erit, quā columna quædam



dam laterata aqualis crassitudinis, cuius bases oppositæ sunt aquales, similes, & parallelæ, siue hæ sint triãgula, siue quadrangula, siue pentagona, &c. Vnde tot parallelogramma continebit prisma quodlibet, quot latera, siue anguli, in vno quoque oppositorum planorum reperiuntur, vt figura indicant.

EX his manifestum est, quantum hallucinentur ij, inter quos est & Campanus, qui prisma intelligunt esse eam figuram solidam duntaxat, cuius duo plana aduersa parallela aqualia, similiaque, triangula sunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram solidam Campanus vocat Corpus serratile. Cum enim hæc figura sit solum vna species prismatis, definitio autem tradita infinita alia genera prismatis amplectatur, vt constat; præsertim quod plurima demonstrationes in hoc lib. & 12. sequenti, ex aquo omnibus prismatibus conueniunt; perspicuum est eos hallucinari, qui vnum tantum prismatis genus ex hac defin. colligunt. Sumpserunt autem fortasse hi auctores occasionem errandi, quod Euclides & in propos. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quod tali prismati solum demonstratio illa conueniat. Quod si sola ea figura, vt ipsi volunt, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma triquam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Immo in corollario dictæ propositionis septimæ infert Theon Pyramidem esse tertiam partem prismatis eandem cum illa basin habentis, altitudinem aqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triãgula, sed alia quauis rectilinea, aqualia tamen & similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secundum Theonem, atque adeo secundum Euclidem, cum communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiam, quod à Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & aqua-

lia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA est, quando, semicirculi manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum: ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circũductus figuram describit, quam Geometra sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum videlicet illud quiescens, a quo omnes lineæ rectæ in peripheriam cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existunt illi lineæ circumuolutæ: Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, à quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinem definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiam modo.

SPHAERA est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO in libro de Vniuersitate de mundo loquens elegãter hanc definitionem expressis his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radijs attingitur.

AXIS

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphęræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphęrę, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque à sphæræ superficie terminata.

HAE tres definitiones non egent expositione; dummodò hoc solum notetur, omnem diametrum sphæræ posse esse axē, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea, æqualis sit reliquę, quæ circa rectum angulum conuertitur, Orthogonius erit co-

nus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulũ ABC, circa latus quiescẽs AB, quod est circũ rectũ angulũ, circumducatur, donec integram reuolutionem expleat, describetur solida quadam figura, qua continentur duabus superficiebus, circulari vna ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

QVOD si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticẽ A, rectus est. Cum enim latera AB, BC, ponantur æqualia;
a 5.pri. *a erunt & anguli BAC, BCA, æquales, qui cum æquinaleant vni recto, eo quod ABC, rectus est, erit angulus BAC, semirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quiescens latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit*
b 18.pri *maius; b erit & angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atque adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescens latus AB, maius fuerit circũducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutãgulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum enim latus AB, maius sit latere BC,*
c 18.pri *erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cũ hi duo vni recto æquentur, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoq; reliquus BAC, semire-*

to minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

XX.

BASIS vero coni est circulus, qui a circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est BC, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ad basim rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionem, quæ & rectum, et inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiã circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousq; ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter se se aptatis,

quarum

quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quę eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiē.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quę per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentam circulo, & conica superficie, quę inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & superficiei conicæ vertex est.

AXEM, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum producitur.

BASIM, circulum ipsum.

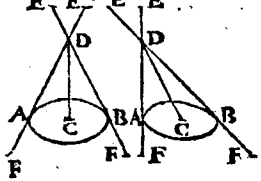
CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipsis basibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium scripsit.

SIT circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod sublime D; iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea DB, feratur eousque in circuli AB, circumferentia, quousque punctū B, rursus in eum locum restituatur, a quo capit moueri: describet superficiem quandam, qua quidem constat ex duabus superficiebus ad D, punctum se se tangentibus. Eam vo-

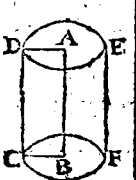
cat Apollonius conicam superficiem, qua & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipsam describēs in infinitum producitur. Verticem superficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum uero appellat figuram contentam circulo AB, & ea superficie, quam DB sola describit, Coni uerticem punctum D. Axem DC. Basim AB, circulum. Quod si DC, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum uocat conum: Sin minus, Scalenum.



XXI.

CYLINDRVS est, quando rectanguli parallelogrammi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogrammum in seipsum rursus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumassumpta figura.

CYLVTI si rectangulum parallelogrammum A B C D, circa latus quiescens A B, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura descripta cylindrus, qua quidem tribus superficiebus cōtinetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera A D, B C, describunt, & altera curua, eaque conuexa, quam latus C D, describit, instar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum est, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, est quiescens il-

la recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in superficri figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri sunt circuli a duobus aduersis lateribus, quæ circumaguntur, descripti.

QVALES sunt circuli a lateribus AD, BC, oppositis descripti.

EVCLIDES porrò solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, qua Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungẽs, quousque rursus in eum locum restituatur, a quo moueri cæpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica super-

ficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

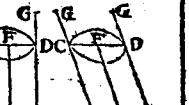
AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

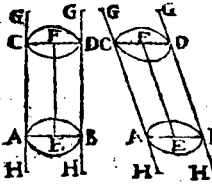
LATVS autem cylindri, linea, quę cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylindri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque AB, CD: iunctaque recta AC, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra E, F, in planis circulorū semper æquidistantes, vna cum recta





AC, circumducantur, donec ad eũ locum restituantur, vnde moueri caperunt; describetur a linea AC, superficies quadam rotũda, quam Serenus cylindricam uocat; qua et augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitum, proiicitur. Cylindrum vero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos ABCD. Axem, rectam EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

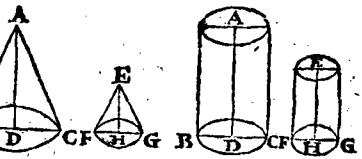
XXIIII.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorum ab eorum axibus, & basium diametris sumpsit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundum duas dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinem; Axes vero eosdem secundam profunditatem, seu altitudinem similes esse demonstrant. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis autẽ axes AD, EH, & basiũ diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter basis ad FG, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia uidelicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundũ profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione descripti sunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuersiones cylindros effecerũt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit vt AD,

ad

ad EH, ita BC, ad FG; Sit autē vt BC, ad FG, a ita dimidia BD, ad dimidiā FH: erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circum æquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectangula similia inter se erūt: Triangula quidem, b propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula sunt, c ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter se similia existunt: Rectangula vero, d eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, sunt æqualia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



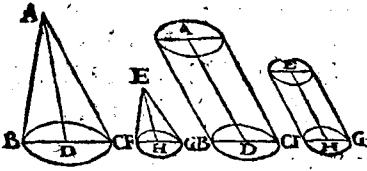
a 15. 6n

b 6. sex.

c 5. sexti

d 34. primi.

QVOD si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basiū erūt proportionales, angulique inclinationū, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri ABC, EFG: In conis autem axes sint AD, EH, & basium diametri BC, FG, similiter & in cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, existentque anguli inclinationū ADB, EHF, tam in conis, quam in cylindris, æquales inter se; dicentur & coni inter se, & cylindri quoque inter se se similes; quoniam nimirum hac ratione & ives eorum dimensiones sunt



pro-

proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, velut, in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non sint recti.

XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDRVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida, sub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HAEC sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continantur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Pla-

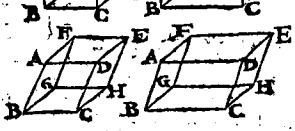
to in Tymæo quinque mundi corpora, quæ simplicia a philosophis nuncupãtur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioannis a sacro bosco latius explicauimus. Horum omnium constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autem propos. 17. Icosaedri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusque definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atque formam quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodum faciles, quibus ea quilibet secundum eorum soliditatem possit confingere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinque illa dari potest, vt demonstrabimus ad finem lib. 13.

QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mẽtio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit parallelepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

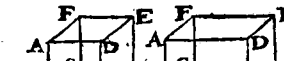
XXX.

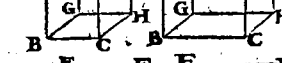
PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarũ, quæ ex aduerso, parallelæ sunt contẽta.

VELVTI solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGE, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH; Item DF, CG; Item AG, DH, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehẽsa. qua quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorũ. Si enim sex parallelogramma fuerint aquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedũ illud, cubus, respondebitque quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia aquilatera, sed altera parte longiora, quamuis duo sint aquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, aquilatera quidẽ, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectangula fuerint omnia, neque omnia aquilatera, quamuis duo sint rectangula, & aquilatera, vel rectangula tantum, vel aquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, qua ex aduerso, aqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Caterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poteris Prisma, vt ex definitione prismatis constat.





XXXI.

SOLIDA figura in solida figura dicitur inscribi, quando omnes anguli figurę inscriptæ constituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figurę, cui inscribitur.

XXXII.

SOLIDA figura solidæ figuræ vicissim circumscribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figurę circum

scriptæ tangunt omnes angulos figuræ, circum quam describitur.

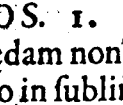
NON est necesse, vt anguli interioris figura constituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figura, cum interdum figura exterior plures, interdum pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: sed satis est, vt omnes anguli figura interioris tangant vel aliquot angulos, vel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita vt nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur vel ab angulis, vel a lateribus, vel denique a planis figura exterioris.

VERVM duæ hæ postremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inscriptionibus, circumscriptionibusque mutuis corporum regularium copiose agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

RECTAE lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

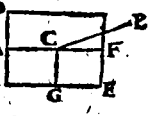
SIT enim, si fieri potest, rectæ lineæ AB, pars quidem AC, in subiecto plano DE, pars vero CB, in sublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, supra planum DE, existant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipsi AC, rectæ lineæ continua, quædam recta linea in directum posita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent segmentum AC. quod est absurdum, vt in pronunciatio 10. lib. 1. demonstrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

HAEC est communis demonstratio interpretū. Sed fortasse dicet aliquis, in ea aliquid desiderari, nempe vt ostendatur, recta AC, esse aliquam rectam in plano DE, in directū, & continuum positam. Qui enim concedit, recta AB, partē quidem AC, esse in plano DE, partem vero CB, in sublimi,

vtique negabit, rectã AC, in plano DE, dari posse aliam rectam in continuum, & directum, quandoquidem rectum CB, in rectum & continuũ positam esse fatetur ipsi AC. Veruntamen ei, qui sic dubitat, respondendum est, rectã quamlibet finitam in quouis plano datã posse in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cũ plana superficies sit illa, qua ex æquali suas interiacet lineas, hoc est, qua recte, & æqualiter semper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem si AC, in plano DE, producatur vsque ad F, erit CF, recta recta AC, in continuum & directum posita. Verum demonstremus iam id ipsum Geometrice, in plano videlicet DE, ipsi AC, dari posse aliam rectam, qua cum ipsa vnam rectam lineam constituat, quãuis quis dicat, AB, esse quoque rectam, viusque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in sublimi esse positam. a Ducatur enim in plano DE, ipsi AC, perpendicularis CG; & in eodẽ plano ipsi CG, perpendicularis CF. Dico CF, esse ipsi AC, positam in continuum & rectum. Cum enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos constituant ACG, FCG, ex constructione; b erunt AC, & FC, in directũ et continuum posita. Quamobrem etiamsi quis contendat, AB, esse rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, subiecto, pars autem CB, in sublimi sit constituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, qua cum AC, vnam rectam constituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, segmentũ commune habebunt AC. Quod est absurdum.



a 11. primi.

b 14. primi.

HINC sit omnes partes cuiusuis rectæ lineæ, hoc est, totam rectam lineam, in vno existere plano.

ij.

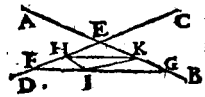
THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano.

RECTAE lineæ AB, CD, se mutuo secent in E, & in EB, ED, sumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta

FG,

FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno esse plano; Item rectas AB, CD, in vno quoque plano existere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirum



EHIG, in plano vno existat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in sublimi, vel contra; Existent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in sublimi, vel contra, quod fieri non posse, iam supra a demonstratum est. Quod si eiusdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur esse, pars autem GIK, in sublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in uno plano, partes vero KG, IG, in sublimi, vel contra. Si denique eiusdē trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoque rectarum FE, GE, partes quidem FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel contra. Quæ omnia absurda sunt, b vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in uno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

a 1. vndecimi.

b 1. vndecimi.

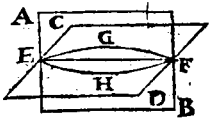
QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG: c in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædam in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulum EFG, consistere demonstrauimus. Quòcirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

c 1. vndecimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI duo plana se mutuo secent; communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD; sitque communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectam. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF,



& in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, cõis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendũ.

ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintque termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectantur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, constat propositum: Ipsa enim erit communis sectio. Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cum eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tãtum plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

iiij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

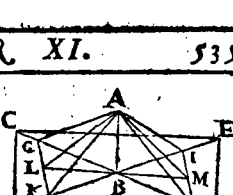
SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat. Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectã AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt: Cum enim se mutuo secent in B; erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumantur inter se æquales rectæ BG, BH; item rectæ BI, BK; ducanturque rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secans rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi, ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, trianguli BGK, lateri-

a 2. vndecimi.

bus

bus BH, BL, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; a & anguli quoq; ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales: b Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.



a 15. pri.

b 4. pri.

RVRSVS c cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erunt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia, ex constructione. d Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

c 15. pri.

d 26. pri.

PRAETEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, e erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.

e 4. pri.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; f erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

8. pri.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; g erunt quoque bases AL, AM, æquales.

g 4. pri.

QVONIAM denique latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sũt lateribus AB, BM, triãguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demõstratis; h erũt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehẽsi, æquales; qui cũ sint deinceps; recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cũ recta LM, quę in plano subiecto ipsam tãgit in B: Eadẽq; rõne ostendetur, rectã AB, cũ omnibus rectis, quæ in eodẽ plano ipsã tangẽt in B, angulos rectos cõstituere; etiãsi inter pũcta G, I, & K, H, ductæ sint, dũmodo rectæ GI, KH, iũgãtur: vel certe literæ disponãtur, vt prius, quema-

h 8. pri.

d

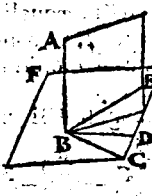
modum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen L M, non ducitur à sinistra in dextram, vt in priori figura, sed a superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CBDF, quod per rectas C D, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

V.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. a Cum enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. b Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in uno sunt plano, cum se mutuo secent in B; sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. c Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia uero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; d erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsam in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absur-



a 2. vndecimi.

b 2. vndecimi.

c 3. vndecimi.

d 4. vndecimi.

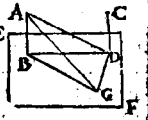
dum

dum. Duabus igitur rectis BC, BD, in uno plano FC, existentibus, non erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6. vi.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos, sint anguli; Parallelę erunt illæ rectę lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; a erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA, Et basis autem & basis communis AG, b erunt anguli ABG, GDA, æquales: est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. c Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erūt plano, hoc est, CD, erit in plano per rectas DB, DA, ductoid Est autē AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti, e erunt rectæ AB, CD, parallelę. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



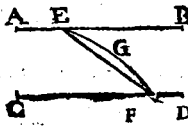
a 4. pri.
b 8. pri.
c 5. undecimi.
d 2. undecimi.
e 28 pri

THEOR. 7. PROPOS. 7. vii.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in

quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quę ad hęc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

IN parallelis AB, CD, sumantur vtcunque duo puncta E, & F, quę recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem esse plano, in quo, per definitionem parallelarum, sunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur esse in eodem plano parallelarum, sed extra; secet iam alind planum superficiem parallelarum per puncta E, & F, sitque communis sectio horum planorum EGF, a quæ recta linea erit. Duæ igitur rectę EF, EGF, cum habeant eosdem terminos E, & F, superficiem claudent. quod est absurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB, CD, erit recta EF. Quare si duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. Quod erat demonstrandum.



a 3. undecimi.

SCHOLIVM.

HAEC eadem propositio vera est, etiamsi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non sint, dummodo in eodem plano existant, vt manifestum est ex demonstratione.

viii.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos; & reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

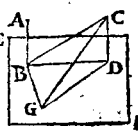
SINT parallelæ rectæ AB, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF, erit

b 29. pri

b per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: b Sunt au-

tem

tem duo C D B, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpendicularis ad B D; ponanturque æquales B G, CD. Coniungantur deinde rectæ D G, G C, C B. Quoniam igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus G B, BD, trianguli G B D, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, C D B, GBD, æquales, nimirum recti; a Erunt bases CB, GD, æquales; Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, BC, trianguli G B C, & basis est communis CH; b Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem CDG, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta G B, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B, (Si namque producerentur DB, C B, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existent; c ac proinde ad rectos angulos erit plano per B D, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta AB; d propterea quod rectæ BD, BC, in eodem sunt plano, in quo parallelæ AB, CD; cum puncta B, C, D, existant in parallelis AB, CD. Igitur & G B, recta rectæ B A, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum AB, recta sit ad rectas BG, BD; c erit quoque AB, recta ad planum per BG, BD, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit: Quod erat ostendendum.



a 4. pri.

b 8. pri.

c 4. undecimi.

d 7. undecimi.

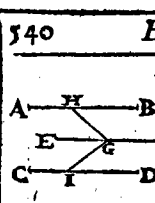
c 4. undecimi.

THEOR. 9. PROPOS. 9. ix.

QVAE eidem rectę lineę sunt parallelę, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelę.

SINT rectæ AB, CD, ipsi EF, parallelæ; non sint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, C D, parallelas

quo-



quoque esse. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipsam EF, ducatur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarum AB, EF, at GI, in plano parallelarum CD, EF. Quoniam igitur E G, recta est ad duas rectas G H, G I, se tangentes mutuo in G; [a] erit recta quoque ad planum per ipsas GH, GI, ductum. Quamobrem cum sint parallelæ AB, EF, & EF, sit recta ad planum per GH, GI, ductum; [b] erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cum sint parallelæ CD, EF, sit autem EF, recta ad planum per GH, GI, ductum; [c] erit etiam C D, recta ad idem planum; [d] Atque proinde rectæ AB, C D, cum rectæ sint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ sunt parallelę, sed non in eodem cum illa plano: hæ quoque sunt inter se parallelæ. Quod erat demonstrandum.

a 4. undecimi.
b 8. undecimi.
c 8. undecimi.
d 8. undecimi.

SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non esse in eodem plano cum recta EF, cui sunt parallelæ. Nam si forent in eodem plano cum ipsa EF; essent AB, CD, inter se parallelæ, ex 30 propos. 1. lib. Superuacaneum ergo esset, hoc idem demonstrare.

X.

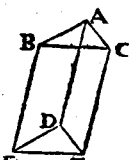
THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodem plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponantur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelę

sunt

sunt & æquales; a erunt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumẽto parallelæ erũt & æquales CF, AD. Quare cũ BE, CF parallelæ & æquales sint eidem AD, b erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales; c Ac propterea parallelæ & æquales erunt rectę BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, triangu-



a 33. pri

b 9. undecimi.

c 33. pri.

guli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modo demonstrauimus; d Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehensi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.

d 8. pri.

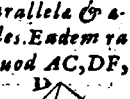
SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam est, quando prieres duæ rectæ in eodẽ sunt plano cum duabus posteriori bus Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodẽ plano, sitque AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF, ducãturque rectæ BC, EF, quæ aut in una recta linea erunt cõstitutæ, aut non. Sint prius in una recta BF. Quoniam igitur parallelæ sunt AB, DE, e æquales erunt anguli ABC, DEF, internus & externus. Similiter æquales erunt anguli ACB, DFE. Sunt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC; ACB, trianguli ABC, æquales sũt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. f Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod est propositum.

e 29. pri.

f 32. pri.

NON sint iam BC, EF, in una recta linea constituta. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, sint parallelæ & æquales; g erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem AD, parallelæ existentes & æquales, h inter se parallelæ erunt & æquales; i Ac proinde parallelæ & æquales quoque erũt BC, EF. Itaque cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli



g 33. pri

h 30. pri.

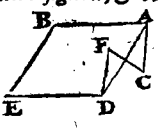
i 33. pri.

DEF,

a 8. pri. *DEF, & basis BC, basi EF, a erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, aquales. Quod est propositum.*

CAETERVM vt conclusio huius theorematis recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (siue omnes sint in eodem plano siue nõ,) vt tres recta AD, BE, CF, nulla ratione se mutuo secent; vt ex prima & vltima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.

SVNT enim recta AB, AC, rectis DE, DF, parallela in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos cõprehẽdunt,



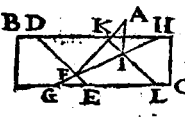
non sunt aquales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, se mutuo secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallela & aquales, nõ tamen propterea AD, CF, quas eas coniungunt, parallela sunt & aquales, propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum nõ habet, deficiente hac conditione; qua tamen in superioribus figuris seruatur.

xi. ## PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planum BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta

b 12. pri. vtcunque DE, b ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF: Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH, c ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. d Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL, cum DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, f ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum, g erit quoque KI,



c 11. pri.
d 12. pri.
e 3 1. pri.
f 4. vndecimi.
g 8. vndecimi.

ad

ad idem planum per FA, FH, ductum recta. [a] Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tãgitque rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. [b] Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam diximus. Quod faciendum erat.

[a] 12. vndecimi.

[b] 4. vndecimi.

SCHOLIVM.

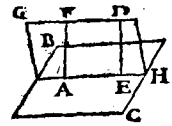
QVOD si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis [c], *erit ipsa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis, ad subiectum planum BC, perpendicularis, cum perpendicularis sit ad vtramque DE, GH.*

[c] 4. vndecimi.

PROBL. 2. PROPOS. 12. xii.

DATO plano a puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato pũcto A, in plano BC, ducenda perpẽdicularis ad datum planũ BC. [d] Ex quouis pũcto D, in sublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, [e] ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, recta esse ad planum datum BC. Cum enim DE, AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planum BC, ex constructione: [f] erit quoque AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.



[d] 11. vndecimi.

[e] 31. pri

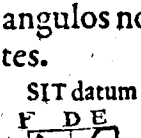
[f] 8. vndecimi.

THEOR. 11. PROPOS. 13. xiii.

DATO plano, a puncto, quod in illo

illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planũ AB. Ducantur enim si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB, & per CD, CE, a quę in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secans planum AB, per rectam lineam GH. Cũ igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales pars, & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineę ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes. Quod erat demonstrandum.



a 12. undecimi,

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpendiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; b erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

b 6. undecimi,

SCHOLIVM.

EODEM modo a puncto in sublimi ad subiectũ planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum BC, si fieri potest, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, c quæ in vno plano sunt, planum FG, secans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ sint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod est absurdum: d cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.

c 2. undecimi,

d 17. pri.

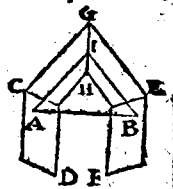
ALITER. Si AD, AE, rectæ sunt ad planum BC,

[a] *ipsa erunt inter se parallela, cum tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.* [a] 6. undecimi.

THEOR. 12. PROPOS. 14. xiiii.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E, [b] & faciant communem sectionem rectam lineam GH; In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. [c] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parallela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



[b] 3. undecimi.

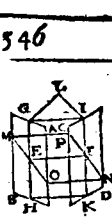
[c] 17. pri

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, Videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquũ quoque recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoque esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incidens, faciatque communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK. eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IEE, dicatur obtusus; erunt duo anguli GEF,



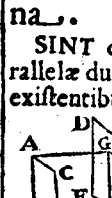
IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, in plano GK, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & planæ AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; a cum tota recta HGL, sit in uno plano, nempe in AB, prodicto: Itē tota recta KIL, in uno quoque plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdū, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE) Eodem modo si a liud planum, vt delicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas communes cum ipsis sectiones MO, PN, erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, rectæ, b quoque erit EF, ad planum CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.

a 1. vndecimi.

b 4. vndecimi.

XV. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana.



SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusque in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex c A, enim deducatur ad planum EF, perpendicularis AG, occurrens plano EF, in puncto G. d Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; e erunt & AB, GH, inter se parallelæ; f Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC, g recta quoque erit GA, ad planum BC,

c 11. vndecimi.

d 31. pri

e 9. vndecimi.

f 29. pri

g 4. vndecimi.

per

per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum E F, ex constructione. a Igitur parallela sunt plana B C, E F. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandum. a 14. undecimi.

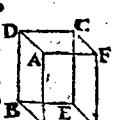
SCHOLIVM.

QVOD si perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta eadat in ipsummet punctum D, cõcludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non sunt ducenda alia parallela. Vt si lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC; ita vt A G, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, GA, esse rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductum, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema subsequẽs. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

DATVM planum sit A B, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano A B, ducantur vtcunque duæ rectæ D B, DA, se tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur D C. Deinde in plano B C, per rectas DB, DC, ducto, b agatur CE, ipsi D B, parallela. Et in plano AC, per rectas D A, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato A B. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusque in alio cum illis plano parallelæ sint, c parallela erunt plana A B, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum. b 31. primi. c 15. undecimi.

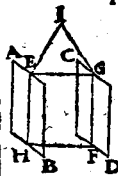


THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam secentur, communes illorum sectiones sunt parallelæ. xvi.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cum sint in plano EF secante. Conueniant igitur in pũcto I. a Quia ergo tota recta HEI, in vno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in vno quoq; est plano, videlicet in CD, producto; cõueniens etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plana quopiam secẽtur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 1. vndecimi.



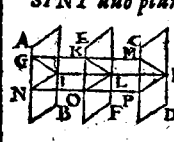
SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, vt hic demonstratum est; Non tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cũ per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci quorum duo tantum sunt parallela, alia vero in aliquam, partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, CD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorum sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, b erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL, c atque adeo pa-

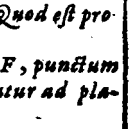


b 16. vndecimi.
c 9. vndecimi.

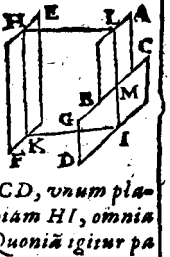
ral-

rallela erunt inter se G I, M H. *Non aliter ostendemus, parallelas esse* N I, P H. *Itaque cum* I G, I N, *sese mutuo tangentes in* I, *parallelæ sint rectis* H M; H P, *se tangentibus in* H, *existentibusque in alio plano*; a *erunt plana* A B, C D, *per ipsas ducta parallela. Quod est propositum.* a 15. undecimi.

ALITER. Sumatur in tertio plano E F, *punctum quodlibet* G, *à quo in vtramque partem educatur ad planum* E F, *linea recta perpendicularis, occurrens plano* A B, *in puncto* H, *& plano* C D, *in puncto* I. *Quoniam igitur linea* H G, *recta est ad planum* E F, *recta quoque erit ad planum* A B, *sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis* 14. *huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione* G I, *recta erit ad planum* C D. *Quamobrem cum recta* H I, *sit recta ad plana* A B, C D; b *parallela inter se erunt plana* A B, C D. *Quod est propositum.* b 14. undecimi.



QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficiunt planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. *lib.* 1. *demonstrauimus. Sint enim plana* A B, C D, *plano* E F, *parallela, conueniantque producta secundum rectam* C G. *Dico plana* A B, C D, *vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam* H I, *omnia tria plana per lineas rectas* H K, L M, M I. *Quoniã igitur parallela sunt plana* A B, E F, c *erunt & communes sectiones* L M, H K, *parallelæ. Eadem ratione parallelæ erũt* I M, H K. *Quam ob rem cum recta* L M, I M, *parallelæ sint ipsi* H K, *existãtque in eodem plano secante* H I, *& conueniant in* M; *ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad* 30. *propos. lib.* 1. *ostendimus. Ac proinde plana* A B, C D, *vnum planum efficient*; d *propterea quod recta* L I, *in vno iacet plano. Quod est propositum.* c 16. undecimi. d 1 undecimi.

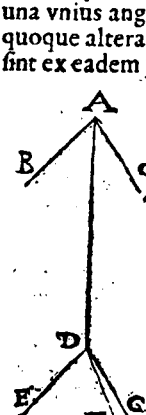


ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano,

vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.

PORRO conuersum quoque propos. 10. facile demonstrabimus, hoc loco, videlicet.

SI in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea una vnius anguli lineę vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.



IN planis n. parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitque AB, ipsi DE, parallela; & AC, DF, sint ad easdem partes plani per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse: hoc est, ducta recta AD, planum per AC, AD, ductum transire etiam per rectam DF; ita vt AC, DF, sint communes sectiones factæ à plano per AC, AD, ducto, in planis parallelis per AB, AC, & DE, DF, ductis. a *Hinc enim efficitur, sectiones AC, DF, parallelas esse. quod est propositum. Si namque planum per AC, AD, ductum non facit in illis planis parallelis sectiones AC, DF. faciat sectiones AC, DG,* b *quæ parallelæ erunt.* c *Igitur angulus EDG, angulo BAC, hoc est, angulo EDF, æqualis erit. quod est absurdum, cum vnus sit totum, & alter pars.*

a 16. vndecimi.

b 16. vndecimi.

c 10. vndecimi.

xvii.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

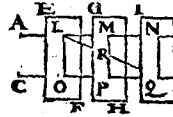
SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue non, existentes tamen in eodem plano; siue in transuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L

M, N,

M,N,O,P,Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earum inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH, [a] & rectq; triangulũ LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero plana parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, [b] erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [c] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 2. vndecimi.
b 16. vndecimi.
c 2. sexti



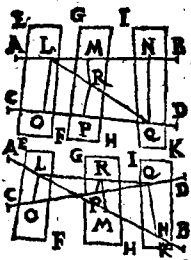
SCHOLIVM.

QVOD, si data recta AB, CD, sint in vno eodemque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planum per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [d] *quæ inter se parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirũ communem sectionem planorum LOQN, GH.*

d 16. vndecimi.

SI uero duæ rectæ AB, CD, nõ sint in eodẽ plano, non efficient RM, RP, vnã rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia [e] *cum triangulum LOQ, sit in uno plano, & triangulum LNQ, in uno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa triangula in vno eodemq; plano existerent,*

e 2. vndecimi.



21. vndecimi.

essent duæ rectæ AB, CD, in eodem illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est contra hypotesim.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorũ; ac proinde vnam rectam nõ constituẽt; alias in vno essent plano. quod est absurdum.

EADEM hac propesito locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, non sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratum est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

NON secus si plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, secẽt, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorũ planorũ & triãgulorum LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si rectæ AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

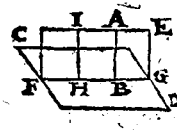
EX demonstratione porro perspicuũ est, si quotlibet lineæ in vno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis, segmenta illarum linearũ inter parallelas esse proportionalia. Sint enim duæ rectæ AB, CD, in postrema figura quomodocunque in vno plano dispositæ, quæ secentur tribus parallelis LO, RPM, (Litera enim P, nunc ad intersectionem rectarum CD, RM, pertineat.) QN. Dico segmenta LM, MN, eandem proportionem habere, quam segmenta OP, PQ. Iuncta n. recta LQ, b *erit vt LR, ad RQ, ita tam OP, ad PQ, ob triangulum LOQ, quam LM, ad MN, ob triangulum LNQ. Igitur erit, vt OP, ad PQ, ita LM, ad MN. Eademque ratio est de pluribus. Vt autem rectè demonstratio procedat in quibuslibet duabus rectis, ducenda est recta à primo puncto sectionis vnius rectæ ad vltimum sectionis punctum alterius. Ita vides in duabus AB, CD, ductam esse rectam ex L, primo puncto rectæ AB, ad Q, vltimum punctum rectæ CD. Idemque seruatum est in figuris huius propos. 17.*

b 2. sexti

THEOR. 16. PROPOS. 18. xviii.

SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planũ CD. Ductum enim sit per AB, planum EF, secans planum CD, per rectam lineã FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, a ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniã igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; b erit quoque IH, ad idẽ planũ CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad cõmunem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelæ, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Simili que argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



a 31. pri

b 8. undecimi

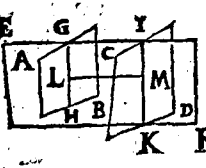
SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia

sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano enim EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: a eademque perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planũ quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta est, b ipsa parallela erunt.



SED iam parallela sint plana AB, CD; sitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; c quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum rectæ. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planũ CD, recta quoque erit. d Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque viciſſim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectũ. Quod est propositũ.

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planũ sit rectũ.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oporteatque per FG, planum ducere, quod ad planũ CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, recta FG, c erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planum ducatur EF. quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT

a 29. primi.
b 14. vndecimi.
c 16. vndecimi.
d 18. vndecimi.
12. vndecimi.
18. vndecimi.
XIX.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoque esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorũ AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, a recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alteram rectarum BF, DF, tantum; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectũ; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defin. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cum perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; b ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniam igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadẽ ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra c demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. undecimi.

b 11. pri

c 13. undecimi.

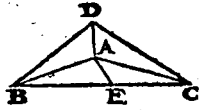
THEOR. 18. PROPOS. 20. XX.

SI solidus angulus tribus angulis pla-

nis

nis contineatur: Ex his duo quilibet vt vt assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuum est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si vero duo tantum sint æquales, & tertius vtrouis minor, cõstat quoq; quoslibet duos reliquo maiores esse. Quòd si vnus, videlicet BAC, sit maximus, reliqui aũt siue æquales, siue inæquales, manifestũ etiã est, quemlibet horum cũ maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico jam hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos
a 23. pri BAD, DAC. In plano n. per AB, AC, ducto a fiat angulus



BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectę BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quo-
b 4 pri. que ipsis contenti, per constructionem, æquales; a erunt
c 20. pri mi. bases BD, BE, æquales. b Quia vero latera DB, DC, maiora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quam CE. Cum igitur latera AD, AC, trianguli DAC, æqualia sint lateribus AB, AC,
d 25. pri mi. trianguli EAC; & basis CD, maior basi CE; c erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

xxj. OMNIS solidus angulus sub minori-

bus,

bus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt cõstituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis continetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. [a] Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sũt angulo CBD; similiterq; duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA, ADB, maiores angulo CDB: erũt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. [b] Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi, vna cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, ([c] sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferatur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidũ angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 20. vn decimi.

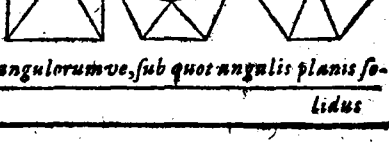
b 32. pri mi.

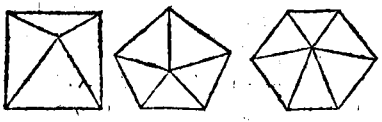
c 32. pri mi.

SCHOLIVM.

QVONIAM hac demonstratio ab interpretibus accommodatur soli illi angulo solido, quem tres plani anguli constituunt; ideirco nos eam ad omnes angulos solidos extendemus hoc modo.

SIT angulus solidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos esse quatuor rectis quoque minores. Nam si omnibus angulis planis recta subtendãtur ordine in eodem plano existentes; constituetur pyramis, cuius vertex datus angulus solidus, tot laterum, angulorumve, sub quot angulis planis solidus

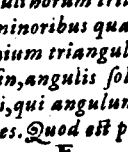




lidus angulus cõprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorum, (a cum anguli cuiuslibet trianguli duobus sint rectis aquales) bis tot rectis erunt aquales, quot angulos continet basis: Sed omnes anguli basis aquales sunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, qua ad 32. propos. 1. lib. demonstrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum superabunt omnes angulos basis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (propterea, quod prope basin constituantur anguli solidi, quorum quilibet tribus planis angulis continetur, b & horum quilibet duo relique, nempe ea, qui in basi, sint maiores) superabunt omnes anguli horum triangulorum angulos eorundem prope basin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum superent illos eorundem, qui prope basin, angulis solidum angulum constituentibus, erunt anguli, qui angulum solidum componunt, quatuor rectis minores. Quod est propositum.

a 32. primi.

b 20. vndecimi.



VERVM vt res melius percipiatur, sit gratia exempli angulus solidus A, contentus quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, quibus subtendantur ordine recta BC, CD, DE, EF, FB, in vno, eodemque plano, in eo videlicet, quod rectas AB, AC, AD, AE, AF, secat in punctis B, C, D, E, F; ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulum solidum A. c Quia vero omnes anguli quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB aquales sunt decem rectis; Anguli autem quinque basis BCDEF, aquales sunt sex rectis, nempe decem minus quatuor; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope

c 32. primi.

basin

basin maiores sint angulis basis ; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; a *erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui est in basi : Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis ; quandoquidem hi cum illis aquales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibēda est in alijs omnibus angulis solidis.*

a 20. undecimi.

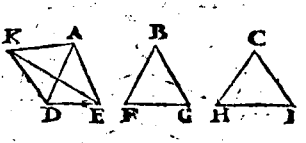
THEOR. 20. PROPOS. 22. xxii.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas connectentibus triangulum constituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamē lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarum DE, FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, b ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod enim duæ DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. c Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatq; primū AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus

b 22. pri

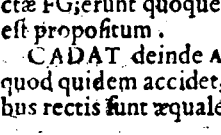
c 23. pri



EAD,

EAD, DAK, compositu
quod quidem continge
quãdo duo anguli DA
& B, duobus rectis sun
minores. Ponatur AK, ip
si AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam
igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt later
bus BF, BG, triãguli BFG; & anguli ipsis contenti DA
a 4. pri. & B, æquales; a erunt & baſes KD, FG, æquales. Rurſu
quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt later
bus CH, CI; & angulus EAK, maior angulo C; propter
quod duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angul
b 24. pri c 20. pri C; b erit & baſis EK, maior baſe HI: c Sunt autem rect
ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erun
ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis re
ctæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quo
eſt propoſitum.

CADAT deinde AK, in rectum & continuũ ipſi AE
quod quidem accidet, quãdo duo anguli DAE, & B, duo
bus rectis sunt æquales. Ponaturque AK, ipſi AD, æqual

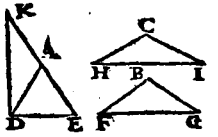


d 4. pri. c 20. pri. rurſum, & connectatur rect
KD. d Erit, igitur, vt prius, KI
ipſi FG, æqualis. e Quoniam
ro rectæ ED, DK, maiores ſu
recta KE; & KE, æqualis eſt r
ctis CH, CI, ex hypotheſi,
conſtructione; erunt quoque
f 20. pr. ED, DK, maiores duabus CH, CI: f Hæ autem maio
ſunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, q
HI. Cum ergo DK, oſtenſa ſit æqualis ipſi FG; erunt qu
que DE, FG, maiores quam HI. Quod eſt propoſitum.

CADAT poſtremo AK, ad partes AE, ita vt nec an

lus totus componatur ex an
lis EAD, DAK, nec recta
EAK; quod demum euen
quando duo anguli DAE, &
duobus rectis ſunt maiores
naturque rurſum AK, ipſi

æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. a Erit igitur, vt prius, KD, ip si FG, æqualis. b Quoniam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK, & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi & cõstructione; erũt quoq; DE, DK, maiores q̃ CH, CI: c Hę autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quã HI. Cũ ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, si angulo C, ad FB, constituatur angulus æqualis, &c. d Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.



a 4. pri.
b 21. pri.
c 20. pri.
d 22. pri

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; e erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; f erunt quoque duæ illorum bases æquales, g & basis tertij vtraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod si unus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; h erit quoque basis DE, omnium maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quam FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE, i Fiat. n. angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturq; AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctũ K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transit circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatẽ rectarum AD, AK, AE. Connectantur deinde rectæ DK, KE. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponũtur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionem; erit angulus C, maior reliquo angulo KAE. Et quia latera AD, AK, trianguli ADK, æqualia sunt lateribus BF, BG,

e 4. pri.
f 4. pri.
g 24. pri
h 24. pri
i 23. pri

trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [a] erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, triāguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; [b] erit & basis HI, maior basi KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: [c] Sed DK, KE, maiores sunt, quam DE. Igitur multo maiores erunt FG, HI, quam DE. Quod est propositum.

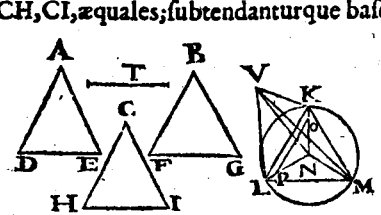
[a] 4. pri.
[b] 24. pri
[c] 20. pri

PROBL. 3. PROPOS. 23.

EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac conditione, vt quilibet duo sint maiores reliquo. Oportet iam ex tribus angulis A, B, C, angulum solidum confi cere, qui nimirum contineatur tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponantur sex lineæ angulos dictos comprehendentes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendanturque bases DE, FG, HI. [d] Fieri ergo pót, vt ex DE, FG, HI, triāgulū cōstituatur. Cōstituatur ex ipsis igitur triangulū KLM, sitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectæ FG;

[d] 22. vn decimi.



&

& latus KM, rectæ HI, æquale. e Describatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrum N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritque quælibet rectarum angulos planos comprehendentium, nempe AD, AE, &c. maior qualibet ductarum ex centro N. Quod ita ostendetur. Cadat primo centrum N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quando triangulum est oxygonium, vt ex coroll. propos. 5. lib. 4. constat. Si igitur AD, AE, maiores non credantur, quam NK, NL, erunt uel æquales, vel minores. Sint ergo æquales. Quoniam igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia sunt lateribus NK, NL, trianguli NKL; & basis DE, basi KL, æqualis: b erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodem argumento erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cum igitur tres anguli circa N, æquales sint quatuor rectis ex coroll propos. 15. lib. 1. erunt quoque tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Dico quod neque minores. Si enim minores sint AD, AE, quam NK, NL, abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, ducaturque recta OP. Quoniam igitur est vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cum & antecedentia inter se, & consequentia sint inter se æqualia; erunt latera NK, NL, trianguli NKL, secta proportionaliter; c ac proinde OP, ipsi KL, parallela erit. d Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, æquales erunt, & triangulum NOP, triangulo NKL, æquiangulum. e Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Est autem NK, maior quam NO. f Igitur & KL, hoc est, DE, quæ æqualis est ipsi KL, maior erit, quam OP. Quocirca cum latera AD, AE, trianguli ADE, sint æqualia lateribus NO, NP, trianguli NOP, & basis DE, maior basi OP, g erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadem ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostendetur. Cū igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. prop. 15. lib. 1. erūt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Qd est absur-

a 5. quar

b 8. primi.

c 2. sex. d 29 pri

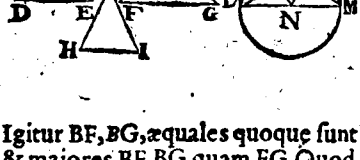
e 4. sex.

f 14. q°

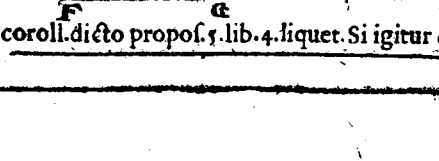
g 25. pri

dum.ponuntur enim quatuor rectis minores. Non igitur minores sunt AD,AE,quam NK,NL;sed neque æquales. Igitur maiores.

CADAT deinde centrum N,in latus LM;quod tum continget;quando triangulum KLM,angulum LKM, habuerit rectum,vt ex eodem coroll.propos.5.lib.4. manifestum est. Si igitur AD, AE, dicantur esse æquales ipsis NK,NL;erũt quoque BF,BG,æquales eisdẽ NK,NL. Cum ergo NK,æqualis sit ipsi NM; æquales erũt BF, BG, rectæ LM: Posita autẽ fuit LM, æqualis ipsi FG.



20.pri Igitur BF,BG,æquales quoque sunt rectæ FG.[a] Sunt autẽ & maiores BF,BG,quam FG.Quod est absurdum.Non igitur æquales sunt AD,AE,ipsis NK, NL. Quod si AD, AE,minores credantur,quam NK,NL;erunt quoque BF, BG,minores quam NK,NL.Cum ergo NK, æqualis sit ipsi NM;minores erunt BF,BG,quam recta LM:posita autẽ fuit LM,ipsi FG,æqualis.Igitur BF, BG, minores quoque 20.pri sunt recta FG. Quod est absurdum, [b] cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD,AE, quam NK, NL; sed neque æquales:Igitur maiores.

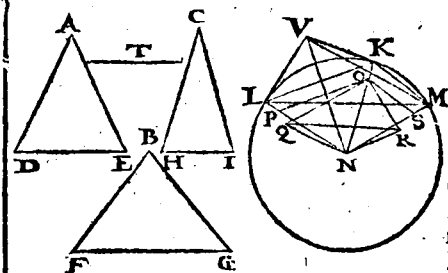


CADAT postremo cẽtrum N, extra triangulũ KLM, infra latus LM,quẽdemum accidet, quando angulus LKM, fuerit obtusus, vt ex coroll.dicto propos.5.lib.4.liquet. Si igitur dicantur AD,

AE,

AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum & basis DE, basi KL, ponatur æqualis; [a] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadē ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LNM, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; [b] erit angulus LNM, angulo B, æqualis. Sed & maiorem ostendimus esse. Quod est absurdum. Nō igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credantur esse minores, quam NK, NL; si abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C, maior angulo KNM. [c] Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transit circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. [d] Quare cū angulus PON, æqualis sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet. n. similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; est autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; [e] erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt ostendimus: [f] erit basis LM, hoc est, FG, maior basi QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia sunt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & basis FG, maior basi QR; [g] erit angulus B, maior angulo QNR. Rursus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angu-

a 8. pri.
b 8. pri.
c 23. pri
d 29. pri
e 4. pri.
f 24. pri
g 25. pri



lus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cum B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, existat; possit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. [a] Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis, connectanturque rectæ KV, LV, MV. Quoniã igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit, ex defi. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM; [b] ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex cõstructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti; [c] erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectę VK, VL, VM, æquales sunt rectę AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamobrem, cum latera VK, VL, trianguli VKL, æqualia sint lateribus AD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; [d] erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demonstrabimus,

a 12. vn decimi.

b 47. primi.

c 4. pri.

d 8. pri.

angulum

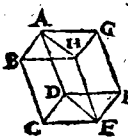
angulum LVM, angulo B; & angulum KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaque angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

THEOR. 21. PROPOS. 24.

xxiiii.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum A B E F, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma similia, & æqualia. Cũ enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; a Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD.



a 16. vndecimi.

Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & non in eodem plano, sed in oppositis; b erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. c Quoniam vero AB, ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogrammo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris AH, DE, d cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint late-

b 10. vndecimi.

c 34. primi.

d 34. pri

ribus DC, CE, trianguli DCE; [a] & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostensum est; [b] erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. [c] Quare cũ triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorum BG, CF; erunt parallelogramma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogramma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

a 10. vn decimi.
b 4. pri.
c 34. pri.

xxv. THEOR. 22. PROPOS. 25.

SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum ABCD, productum in vtramque partem quantumlibet, sumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela planis AD, EF, BC, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur solidum AEFD, cõtinetur planis parallelis ex hypothesi; ipsũ parallelepipedũ erit, ex definitione, [d] habebitq; plana opposita, parallelogrãma similia, & æqualia. Eodẽ modo erunt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana opposita, parallelogramma similia, & æqualia. [e] quoniã vero parallelogrãma AG, KV, LX, cũ sint super æquales bases AE, AK, KL, æqualia sunt; & similia quoque, [f] cum anguli vnius sint æquales angulis alio-

d 24. vn decimi.
e 36. pri
f 29. pri

rum,

rum,& latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum,ideoque proportionalia.Eademque ratione æqualia & similia sunt parallelogrâma AY,KZ,Lα. Cum igitur æqualia quoque sint,& similia parallelogramma AD,KP,LQ:Erunt tria plana AG, AY, AD, solidi AEFD,æqualia,& similia tribus planis KV,KZ,KP,solidi AKPD,& tribus planis LX,Lα, LQ, solidi KLQP: a Sunt autem tria in vnoquoque solido æqualia,& similia tribus reliquis oppositis in eodem,nempe AG,ipsi ZF;& AY,ipsi VF;& AD,ipsi BF,&c.Igitur per defin.10.huius lib.æqualia sunt solida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia ostendentur solida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS.Quare quam multiplex est basis LG, basis AG,tam multiplex erit solidum LEFQ,solidi AEFD;Et quam multiplex est basis OG, basis BG,tam multiplex erit solidum OEFT,solidi BEFC.Quoniam vero si basis LG,(multiplex basis AG,primæ magnitudinis,)æqualis est basi OG, (multiplici basis BC,secundæ magnitudinis,) æquale quoque est solidum LEFQ, (multiplex solidi AEFD,tertiæ magnitudinis)solido OEFT, (multiplici solidi BEFC,quartæ magnitudinis,)propterea quod basibus LG,OG,æqualibus existentibus,æqualia quoque sunt & similia sex parallelogramma solidi LEFQ,sex parallelogrammis solidi OEFT:Si autem basis maior est base,solidum quoque solido maius est;& si minor, minus; in quacunque hoc fiat multiplicatione: Erit per defin.6.lib.5.vt basis AG,prima magnitudo, ad basin BG,secundam magnitudinem,ita solidum AEFD, tertia magnitudo,ad solidum BEFC, quartam magnitudinem. Eadem ratione demonstrabitur esse solidum ad solidum, vt est basis DY,ad basin CY,& vt basis AY, ad basin BY, & vt basis DG,ad basin CG.Si solidum igitur parallelepipedum plano secetur,&c.Quod erat ostendendum.

a 24. undecimi.

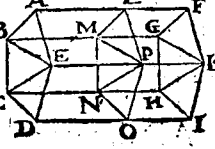
SCHO-

SCHOLIVM.

HAEC propositio accommodari etiam potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo: erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidū. Sit enim primo prisma ABCDEF. cuius plana aduersa sint triāgula ABC, DEF, seceturq; plano GHI, aduersis planis parallelo. Dico vt est basis AI, ad basin FI, ita esse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG, Intelligatur enim prisma ABCDEF, in vtramque partem quantumlibet productum, & ex AF, protracta vtrinque capiantur quotcunque recta AK, KL, ipsi AG; & quotcunque recta FM, MN, NO, ipsi FG, aequales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS, MTV, NXY, OZa; parallela planis ABC, GHI, FED, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, secantur plano AI, a16.undecimi. *a erunt communes sectiones AC, GI, parallelae: Sunt autem & AG, CI. parallelae ex hypotesi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI, secantur plano AH;* b16.undecimi. *b erunt communes sectiones AB, GH, parallelae: Sunt autem & AG, BH, parallelae, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum est AH. Eodem modo parallelogrammum ostendetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, aequalia sunt lateribus GI, GH, trianguli GHI;* c34.primi d10undecimi. *c cum AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit aequale: d & anguli CAB, IGH, sunt quoque aequales, eo quod recta CA, AB, parallela sunt rectis IG, GH, & non in eodem plano;* e4. primi. *e Erunt triangula ABC, GHI, aequalia inter se, & aquiangula.* f1.sexti *f Quare latera circa aequales angulos proportionalia habebunt: Atque idcirco similia erunt. Igitur solidum ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, aequalibus & similibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadem arte prismata erunt ABCQPK,*

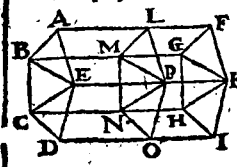
KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniam vero parallelogramma AI, KC, LQ, aequalia sunt, & similia; necnon AH, KB, LP, & CH, QB, SP, erunt omnia plana prismatis ABCIHG, aequalia & similia omnibus planis prismatis ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defi. 10. huius lib. aequalia erũt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione aequalia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quã multiplex est basis LI, basis AI, tã multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG, & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZαIHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, primae magitudinis) aequalis est basi OI, (multiplici basis FI, secũda magnitudinis,) aequale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiae magnitudinis,) prismati OZαIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartae magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus aequalibus, aequalia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est, & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinẽ, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AH, ad basin FH, & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sit polygona, nempe pentagona, secetur que plano LMNOP. Dico rursus vt est, basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoque prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sunt triangula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin



MK,

MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, qua demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. a Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, vt CN, ad NH: & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML. BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF. MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG, hc proinde eandem inter se. b Vt autem vnum ad vnum, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, vt basis CM, ad basin NG, ita prisma ABCDELMNOP: ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.



a 21. sexti

b 12. quinti

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostendi demonstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se aequalia, & similia, c propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe cõmunes sectiones parallelorũ planorum, d ac proinde angulos aequales comprehendunt, &c. Vnde, vt prius, ostendetur prisma ex vna parte inter se aequalia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

c 16. vndecimi.

d 10. vndecimi.

COROLLARIVM.

EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis aequidistante, sectionem esse figuram aequalem & similem planis oppositis: Veluti demonstratum est in priori prismate, triangulũ GHI, aequale esse & simile triangulo ABC, atque adeo triangulo DEF. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de paralelepipedo.

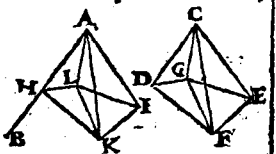
PROBL. 4. PROPOS. 26.

xxvi.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum

ctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

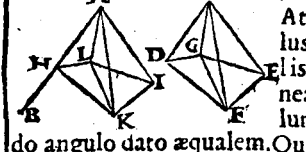
SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodē plano existentibus. a Ducatur ex F, ad planum per CD, CE, ductum perpendicularis FG, connectanturque rectæ DF, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, b fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductū constituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano per CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. c Ex L, vero ad planum, in quo sunt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LK, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulum solidum A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis enim rectis HK, HL, IK, IL; cum latera AH, AL, triāguli AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, trianguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per constructionem; d Erūt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem; e æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF, recti ex defin. 3. huius lib. f erunt & bases HK, DF, æquales. Quare cum & latera AH, AK, trianguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, trianguli CDF, ex constructione. (cum enim AL, LK, latera latribus CG, GF, æqualia sint ex cōstructione. cōprehendantq; angulos æquales, nimirū rectos, ex defin. 3. huius lib: g erunt bases AK, CF, æquales.) h Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK,



a 11. vn decimi.
b 23. pri
c 12. vn decimi.
d 4. pri
e 4. pri.
f 4.. pri.
g 4. pri.
h 8. pri.

sunt

sunt æqualia lateribus GE,GF,& anguli ILK,EGF,recti
a 4. pri. ex defin.3.huius lib.a Erunt bases IK, EF,æquales: Cum igitur & latera AI,AK,trianguli AIK,lateribus CE, CF,
b 4.pri. trianguli CEF,sint æqualia ex constructione;b Erunt quoque anguli IAK, ECF,æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI,HAK, KAI, solidum angulum A, componentes, æquales tribus angulis planis DCE,DCF,FCE,angulum solidum C, componentibus; Atque proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam,eiusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.



SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus continea tur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendenda erunt omnibus angulis planis recta in uno eodemque existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita vt figuram planam polygonam constituant, pyramisque quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resoluatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quot triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur, quorum quilbet tribus angulis planis continetur, constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido aqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus aqualis, subtendenda sunt angulis planis recta BC, CD, DE, EF, FB, vt fiat pentagonum BCDEF, quod in tria triangula resoluatur BCF, FCD, DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus

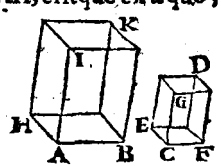
aqua-

æqualis G, contētus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH. Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK; Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.

PROBL. 5. PROPOS. 27. xxvii.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT a data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. [a] Fiat ad rectã AB, eiusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vtres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis ECG, GCF, FCE. Deinde vt est CF, ad CG, [b] sic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH, eritque ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. Post hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis B H, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallelæ sint parallelogrammis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterque positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales. & latera circa ipsos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione, erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterque posita. Eadem ratione similia erunt, similiterque posita parallelogramma HI, EG, & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, solidi AK, similia sunt, similiterque posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. [c] Sunt autem tria cuiusli-



[a] 26. undecimi.

[b] 12. sexti

[c] 24. undecimi.

bet

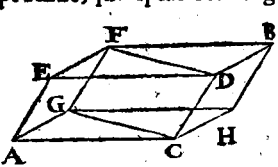
bet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterque posita sex planis solidi CD; Ac proinde ex defi. 9. huius lib similia sunt, similiterque posita solida AK, CD. A data ergo recta linea dato solido parallelepipedũ simile, & similiter positum descripsimus. Quod erat faciendum.

xxviii.

THEOR. 23. PROPOS. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana oppositæ sint AH, EB, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela est, [a] & æqualis ipsi AE, cum sint parallelogramma CE, GE; [b] erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF, [d] Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erunt & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. [d] Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma, æqualia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG, FED, DBF, proportionalia. [e] Igitur similia quoque erunt dicta trangula. [f] Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis



ACG-

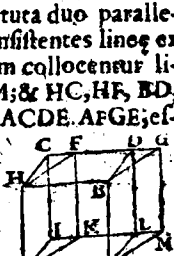
[a] 34. pri
[b] 9. vndecimi.
[c] 33. pri
[d] 24. vndec mi.
[e] 6. sexti
[f] 24. vndecimi.

ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGC-DBF; propterea & ipsa prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 24. PROPOS. 29. xxix.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin cõstituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in iisdem collocentur lineis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelelepeda ACDE, AFGE; esse inter se æqualia. [a] Cũ. n. æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadẽ basi AE, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato communi trapezio AELK, æqualia quoque triangula AIK, ELM, [b] Quoniam vero omnia latera trianguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; [c] Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. [d] Rursus parallelogrammum AC, æquale est & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogramm. ũ AF, parallelogrammo EG: [e] Sed & IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales ([f] Nam cum rectæ, IL, KM,

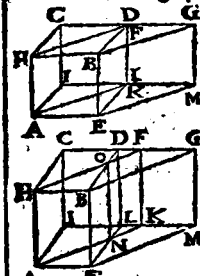


a 35. pri
b 34. pri
c 4. sexti
d 24. undecimi,
e 36. pri
f 4. pri

æquales sint ipsi AE, erunt quoque inter se æquales: quare communi dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erunt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erunt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HAEC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrãmis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere modijs, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, vt ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in pũctum L, cadit; vel vltra L, eodem modo demonstrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis aqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula AIK, ELM, aqualia. Vnde vt prius, aqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, aqualia



fient parallelepipeda ACDE, AFGE.

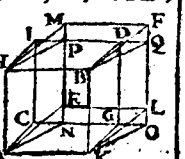
IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis aqualibus AL, AM, demat ur triangulum commune ANE, erunt reliqua trapezia AILN, NKME, aqualia; quibus si addatur triãgulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, aqualia fient. Vnde, vt prius, aqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB, à quibus si auferatur prisma cõmune KLNODF, (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO.) remanebit solidum comprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, aquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH, fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se aqualia.

SO-

THEOR. 25. PROPOS. 30. xxx.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eandem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ non in iiſdem collocantur rectis lineis: inter ſe ſunt æqualia.

SVPER baſin AB in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non ſint in eiſdem rectis, hoc eſt, neque CI, GD, protractæ tranſeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ; &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, eſſe æqualia. Cum enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, ſecet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, eaſdem in punctis P, Q; adiungantur rectæ AN, KO, HP, BQ. [a] Quia igitur rectæ PQ, MF, ſunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipſi HB, eſt æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammum HIDB. [b] Igitur & HP, BQ, parallelæ ſunt & æquales, ideoque parallelogrammum eſt HPQB. Eadem ratione parallelogramma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Eſt autem & parallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum eſt APQR. [c] Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale eſt parallelepipedo APQK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK,



[a] 34. pri

[b] 33. pri

[c] 29. pri

AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basim, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hac propositio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdē collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

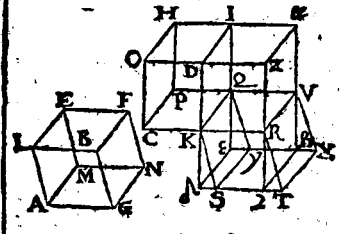
NAM si vnum dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedū in eadem cum reliquo altitudine; erunt aqualia abscissum, & reliquum. Cum igitur & totum huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.

29. vel 30. vndecimi. xxxi. xxxii.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

SVPER æquales bases AB, CD, in eadem altitudine, sint constituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hæc parallelepipeda esse æqualia inter se. Sint enim primum insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; & insistentes CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares. Quo posito, erunt omnes dictę perpendiculares inter se, æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinem. Producatur CK, in rectum, sitque KR, æqualis ipsi LB, & fiat angulus RKS, in plano QK, extenso æqualis angulo BLA, ponaturque KS, æqualis ipsi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, super



quod

quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, construatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia sunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & similia. Rursus quia latera KQ, KS, æqualia sunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectæ ponantur ad plana KT, LG, erunt & parallelogramma QS, EA, æqualia & similia. Eodem modo cum latera KR, KQ, æqualia sint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & similia. Quare cum tria plana, KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia sint & similia, a tribus planis LG, EA, LF, parallelepipedi AEFG, b eam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia. a 24. vn decimi. b 24. vn decimi.

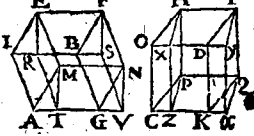
CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ; & IQ, XY, in ε, compleaturque parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractę conveniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IkR α. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qδγ V, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ, QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eisdem rectis δT, εX, c ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V. c 29. vn decimi.

d QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia sunt inter se; & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kγ, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales. e Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: f Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KIαR; cum parallelepipedum CHαR, secetur plano IK, planis oppositis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita est solidum Qδγ V, ad solidum IKR α; cum & parallelepipedum Iδγα, secetur plano KV, oppositis planis Dαδβ, parallelo. g Igi- d 35. pri e 7. 4n. f 25. vn decimi. g 9. 4n.

tur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qβγ V. cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα, nimirum eandem, quam habent bases æquales CD, Kγ, ad eandem basin DR. Quare cum parallelepipedum Qβγ V, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG; æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum.

SINT iam neque insistentes lineæ AM, GN, LE, BF, ab basin AB, neque CP, KQ, OH, DI, ad basin CD; perpendiculares: a Et a punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares; Item à punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autem omnes hæ perpendiculares inter se æquales, cum sint altitudines dictorum parallelepipedorum æquales. Ducantur rectæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. b Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostenderur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

a 11. vndecimi.



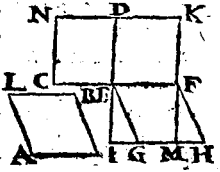
b 29. vel 30. vndecimi.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine cõstructione tot parallelepipedorum, quamuis ea-

dem

dem sit demonstratio illius, qua nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L; & recta EF, rectæ LB, & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturq; parallelogrammum EH, quod æquales erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur super bases EH, IF, EK, constituta parallelepipeda eiusdem altitudinis cum parallelepipedis super AC, CD, constructis; sintque insistentes lineæ perpendiculares ad dictas bases. Perspicuum est igitur, solidum super EH, æquale esse ac simile solido super AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia sint & similia planis huius, per constructionem: a Sunt autem & æqualia parallelepipeda super EH, IF, cum habeant basin eandem, cuius infimum latus EF, erectam super planum IK; Item plana basi opposita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cuius infimum latus IH, atque insistentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eisdem rectis lineis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum super IF, parallelepipedo super AB. b Quoniam vero parallelogramma EH, IF, æqualia sunt; & EH, æquale est ipsi CD: æqualia erunt IF, CD. c Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK; d Est autem vt IF, ad EK, ita solidum super IF, ad solidum super EK, quod solidum super IK, secetur plano super EF, erecto parallelo planis super DK, IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK, cum solidum super CK, secetur plano super DE, erecto parallelo planis super CN, FK, erectis. Quare erit vt solidum super IF, ad solidum super EK, ita solidum super CD, ad solidum super EK, e Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda super IF, & CD. Ostensum est autem parallele-



a 29. vndecimi.

b 35. pri

c 7. quinti.

d 25. vndecimi.

e 9. quinti.

pipedum super IF, aquale parallelepipedo super AB. Aequalia ergo erunt & parallelepipeda super AB, CD. Quod est propositum.

CONVERTETVR quoque haec propos. 31 in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine; super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basin.

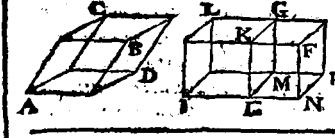
SI enim unum altero credatur altius, sit ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine,
231.vn decimi. *a fient aequalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur aquale alteri; aquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis unius credatur maior basi alterius, si ab ea abscindatur basis aequalis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedū eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo partem toti esse aequalem. Quod est absurdum.

xxxiii. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis super bases AB, EF. Dico esse solidum
b45.pri ad solidum, vt est basis ad basin. b Super rectam enim EK, constituatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui sit æqualis angulo ENF. Constituent autem parallelogramma EF,



IK,

IK, totum parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturque totum vnum parallelepipedum IFLH; a erunt parallelepipeda ABCD, IKLM æqualia; cum habeant æquales bases, per constructionem AB, IK; & eandem altitudinem, ex hypothesi. b Quare erit vt solidum IKLM, ad solidum EFGH, ita solidum ABCD, ad idem solidum EFGH: c Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, vt basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidum ABCD, erit ad solidum EFGH, vt basis AB, ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

a 31. vn decimi
b 7. qn.
c 25. vn decimi

SCHOLIVM.

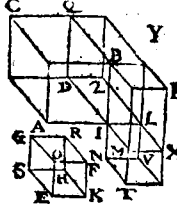
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadem tredatur altitudo; ex maiori abscindatur minori æqualis, & ducatur planum basi parallelum, d *eritque vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum.* e *Abscissum ergo æquale est toti. Quod est absurdum.*

d 32. vn decimi.
e 9. qn.

THEOR. 28. PROPOS. 33. xxxvj.

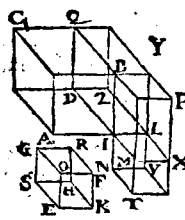
SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda ABCD, EFGH, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionem parallelepipedi ABCD, ad parallelepipedum EFGH, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR; Item DI, ad M, & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde



com-

cõpletis parallelogrãmis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia
a 15. pri. sunt lateribus GR, GO; a & anguli contenti æquales, cum angulus LIM, sit æqualis angulo AID, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis est angulo EKH, seu RGO; erunt parallelogrãma IX, GF, similia, & æqualia. Eadem ratione similia erunt, & æqualia LN, KS; item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, similia sunt, & æqualia tribus planis GF,



b 24. vn decimi. RS, GE, parallelepipedi EFGH: b Sunt autem tria cuiusque similia, & æqualia tribus reliquis oppositis. Igitur æqualia sunt, & similia parallelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. huius lib. Rursus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MP. BL; Item completis parallelogrãmis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob similitudinem parallelepipedorum ABCD, EFGH, est vt AI, ad EK, hoc est, ad IL, ita DI, ad HK, hoc est, ad IM; & BI, ad EK, hoc est, ad IN. c Vt autem AI, ad IL, ita est parallelogrammum AD, ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & vt BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. d Sed vt AD, basis ad DL, basin, ita est parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & vt basis DL, ad basin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP; & vt basis BL, ad basin LN, ita parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedum LNTX. Quare erit, vt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedum LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedũ LNTX. Ac proinde quatuor quantitates sunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; proportio primæ ADCB, ad quartam LNTX, hoc est, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad secundã DLYQ,

c 1. sex.

d 32. vn decimi.

ex

ex defin. 10. lib. 5. [a] Vt autē ADCB, ad DLYQ, ita est basis AD, ad basim DL; [b] Et vt AD, ad DL, ita est recta AI, ad IL, hoc est, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, est triplicata proportionis homologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sūt in triplicata ratione homologorū laterum. Quod erat demonstrandum.

a 23. vi. facim
b 1. ex

COROLLARIVM.

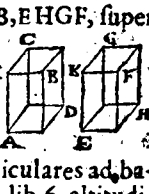
EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterq; descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterum homologorum.

THEOR. 29. PROPOS. 34.

xxxiiii
xxxv.

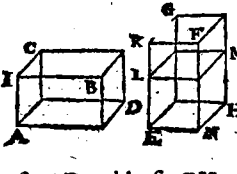
AEQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, super bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse vt AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primum insistentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita vt AI, EK, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & bases AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. ostendimus. Quare erit, vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI. Ac proinde bases & altitudines sunt reciprocæ.



QVOD si altitudines AI, EK, inæquales fuerint; sit EK, maior, ex qua abscindatur EL, ipsi AI, æqualis;

& per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur æqualia sunt solida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad solidum EHML, ita EHGF, ad idem solidum EHML: [b] Vt autem solidum ADCB, ad solidum EHML, ita est basis AD, ad basin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL. Et vt solidum EHGF, ad solidum EHML, ita est eadem ratione basis KM, ad basin LN, cum hac ratione, solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si nimirum bases ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt basis AD, ad basin EH, ita basis KN, ad basin LN: [c] Sed vt KN, ad LN, ita est recta EK, ad rectam EL, hoc est, ad AI, ipsi EL, æqualem. Quare erit vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ sunt bases, & altitudines.



a 17. qnti

b 32. vn decimi.

c 1. sex.

SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Si enim altitudines EK, AI, sunt æquales; cum sit basis AD, ad basin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypothesi; erunt & bases AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant bases, & altitudinem eandem, inter se æqualia erunt.

d 31. vn decimi.

QVOD si altitudo EK, maior fuerit, abscindatur EL, ipsi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelum basi EH. Quia igitur ex hypothesi est, vt basis AD, ad basin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc est, ad EL, ipsi AI, æqualem; [e] Vt autem basis AD, ad basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur, [f] Et vt EK, ad EL, ita est KN, ad LN; [g] Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum EHGF, ad solidum EHML, cum solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erunt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit vt solidum ADCB, ad solidum EHML, ita

e 32. vn decimi.

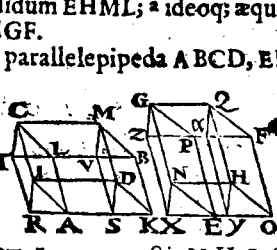
f 1. sexti

g 32. vn decimi.

solidum

solidum EHGF, ad idem solidum EHML; [a] ideoq; æqualia erunt solida ADCB, EHGF. [a 9. qnti]

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum insistentes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non sint perpēdiculares ad bases AB, EF. Demittantur autem à punctis I, D, M, C, ad planū basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Item a punctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntque perpendiculares RI, XN, parallelepipedorum altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, vt basis AB, ad basin EF, ita esse altitudinem XN, ad altitudinem RI. [b] Cū enim æqualia sint solida ABCD, EFGH, ex hypothesi, [c] sit autem ABCD, æquale solido RVCD, quod habeant eandem basin CD, eandemq; altitudinem RI; & EFGH, eadem ratione, æquale solido XαGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XαGH, æqualia. Quare cū habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH; erit, vt iam demonstratum est, vt basis CD, ad basin GH, hoc est, vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ. [b 29. uel 30. undecimi.]



SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, vt prius; Cum sit vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; [d] Sit autem AB, ipsi CD, & EF, ipsi GH, æqualis; erit quoque vt basis CD, solidi RVCD, ad basin GH, solidi XαGH, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Quare cum XN, RI, sint insistentes lineæ perpendiculares ad bases CD, GH; erunt, vt iam ostensum est, æqualia parallelepipeda RVCD, XαGH. [e] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualia. Igitur æqualia quoque erunt parallelepipeda ABCD, EFGH. Idemque ostendetur, si insistentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius [d 24. undecimi.] [e 29. uel 30. undecimi.]

vero

vero non. Quam ob rem, Aequalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

OMNIA hac, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædicta hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existentia. a *Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.*

29.30. vel 31. vndec.

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adiiciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. b *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin;* c *Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triãgula.*

32 vn decimi. 15. 12

PRAETEREA, si duobus prismatis prædictis similibus addantur alia duo prismata illis æqualia & similia, consti tuentur duo parallelepipeda similia, d *quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum. Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia,* e *cũ eandem habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatam proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.*

33 vn decimi. 15. 12

DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, compo-

nentur

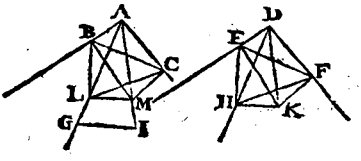
nentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinũ cum prismatis. [a] *Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eadem sint, vel certe triãgula earum dimidia* [b] *eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.*

[a] 34. undecimi.
[b] 15. quinti.

THEOR. 30. PROPOS. 35. xxxvii.

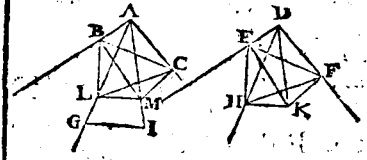
SI fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autem lineis quælibet sumptæ fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpẽdiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctę fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: a sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demittantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, existunt, perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectæ IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter se. Nam si AG,



DH,

DH, sunt in æquales auferatur a maiori AG, ipsi DH, æqualis linea AL, & ex L, in plano trianguli AGI, ducatur ipsi GI, parallela LM. Quoniam igitur parallelæ sunt GI, LM, & est GI,



b 8. vndec. ad planum anguli BAC, rectas: b erit quoque LM, ad idem planum recta. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF, & connectantur rectæ BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta est ad planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per

b 47. pr. c 47. pr. defin. 3. huius lib. b Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML; c Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus sit, ex constructione. Quadratum

d 47. pr. ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CM, ML: d At quadratis rectarum CM, ML, æquale est quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus sit per de-

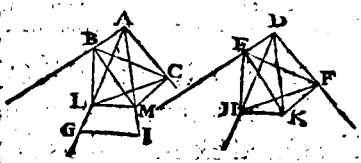
e 48. pr. f 47. pr. 547. pr. finit. 3. huius lib. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AC, CL; e Ac proinde angulus ACL, rectus erit. f Rursus quia quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AM, ML: g Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AB, BM, cum an-

h 47 pr gulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML; h At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML. sit rectus ex

i 48. pr. defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; i propterea que angulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB, trianguli ABL, æquales sunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH;

k 26. pr. sunt que latera AL, DH, æqualia; k Erunt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erunt rectæ AC, CL, rectis DF, FH.

Quare



Quare cũ latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypothesi; a erunt & bases BC, EF, inter se, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE, æquales. Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales; cum omnes sint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, sint ostensa æqualia; b erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia sunt ostensa lateribus DF, FK, trianguli DFK, & anguli ACM, DFK, sunt recti; c erunt & bases AM, DK, inter se æquales. Cum autem æquales sint ostensæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia; d Quia vero quadratum rectæ BL, æquale est quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti sint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarum EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia sunt, quod rectæ BM, EK, ostensæ sint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt; e ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia sint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & basis LM, basi HK, æqualis; e erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, &c. Quod ostendendum erat.

a 4. pri.
b 26. pri.
c 4. pri.
d 47. pri.
e 8. pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE, si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique. Erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales

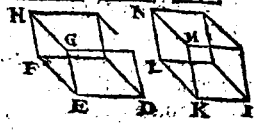
& sublimes æquales A L, D H, constituunt angulos æquales I, AB, HDE. Item LAC, HDF: demonstratum fuit, demissas perpendiculares LM, HK, esse æquales.

xxxviii

THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod equilaterū quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A, B, C. Cōstituaturque angulus solidus E, ex tribus angulis planis quibuscunque DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipsi A; & EF, ipsi B; & EG, ipsi C, sit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod sub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipsis fieri. a Deinde ad rectam IK, eiusque punctum K, fiat solidus angulus K, æqualis solido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales sint tribus DEF, DEG, FEG, ita vt rectę IK, KL, KM, æquales sint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN, quod contineri dicitur sub linea B, se ex ipsa describi. Dico solidum DH, æquale esse solido IN. Cum enim sit vt DE, ad IK, ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: b Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habent circa æquales angulos reciproca: Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorum verticibus insistunt sublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos comprehendunt cum lineis primo positis, ex constructione, vtrumque vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ; nimirum altitudines parallelepipedorum,



a 26. vn decimi.

b 14. sex

DH,

DH,IN, si bases sint DG,IM, inter se æquales, per coroll. propos. præcedentis. a Quare parallelepipeda DH,IN, cũ habeant bases DG,IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. a 31. undecimi.

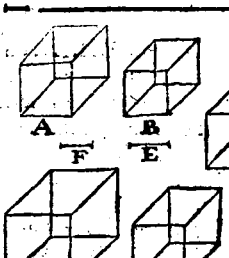
SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sic enim parallelepipedum DH, descriptum ex rectis A,B,C, ut dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo IN, descripto à media B. Dico tres A,B,C, esse continue proportionales. Nam veluti prius, ostendentur earum altitudines ex F,L, demissa esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia erunt eorũ bases DG,IM æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Quæ bases cum anguli habeãt æquales DEG,IKM, ex constructione: b habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, ut DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cum DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoque ut A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum. b 14. sexti

THEOR. 32. PROPOS. 37. xxxii.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT quatuor rectæ proportionales A, B, C, D; ut quidem A, ad B, ita C, ad D: constituanturque super A, & B, duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterq; descri-



pta; item super C, & D, alia duo C, & D, similia similiterque posita, siue hæc sint illis similia, siue non. Dico esse quoque solida A, B, C, D, proportionalia; Vt quidem solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Inueniantur enim per scholium propos. 1 2. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duæ continue proportionales E, F. Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur sunt quatuor lineæ A, B, E, F, & quatuor lineæ aliæ C, D, G, H, quæ binæ in eadem ratione sumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita est solidum A, ad solidum B, & vt C, ad H, ita solidum C, ad solidum D, ex coroll. propos. 33. huius lib. Igitur erit vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Quod est propositum.

SINT iam e contrario solida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, esse quoque proportionales. [a] Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] super quam describatur parallelepipedum ipsi D, vel C, simile, similiterque positum. Quoniam igitur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam est ostensum, [c] vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D. Igitur erit vt solidum C, ad solidum D, ita idem solidum C, ad solidum I. [d] Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quæ cum sint similia similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam

a 12. sex
b 27. un decimi.
c 9. 5.

B, ita

B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint. &c. Quod erat demonstrandum.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primum vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. [a] Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatæ sunt proportionum æqualium, nempe rectæ A, ad rectam B, & rectæ C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, vt rectam A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [b] Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B. Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectæ C, ad recttam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatæ, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

[a] 33. vndecimi.

[b] 33. vndecimi.

SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterque descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusque solidum sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hæc propositio cõuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia sunt triangula, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. [c] *Cum igitur prismata, eorum di-*

[c] 15. 2.

midia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.

xiii. ## THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.

PLANVM enim AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quam dico cadere in communē sectionē AD. Nam si fieri potest, a12.pri cadat extra ad punctum F,[a] & ab, F, in plano AC, ducatur ad rectam AD, perpendicularis FG; connectaturque recta EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD, erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atque adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandem 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt, quod est absurdū, b17.pri [b] cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionē AD, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HAEC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demōstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AC, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionē, c12.pri [c] ducatur ex E, ad rectā AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defi. huius lib. recta erit ad planū AC. Quare ex puncto E, extra planū AC, ducta sunt ad ipsum planū AC, duæ perpē-

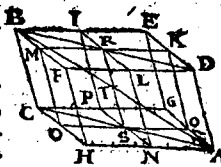
dicu-

diculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

THEOR. 34. PROPOS. 39. xxxix.

SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta, sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam recta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, per quæ extensa sint duo plana IN, KO, quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH; [a] & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum [b] sint parallelogramma AS, HS, [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales: [e] Ac propterea AS, CS, vnam rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectã. Rursus quia vtraque AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, [f] ipsæ quoque inter se parallelæ erunt, & æquales. [g] Quare & rectæ AG, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æqua-



[a] 34. pri
[b] 29. pri
[c] 4. pri.
[d] 13. pri
[e] 14. pri
[f] 9. vndecimi.
[g] 33. pri

les sunt. Quia vero AC, BD, parallelę sunt; [a] erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. [b] Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: [c] Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

a 27. undecimi. d 29. & 15. pri. c 26. pri

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto, nimirum in puncto T, in quo bifariam diuiduntur, vt hic demonstratum est, rectam RS.

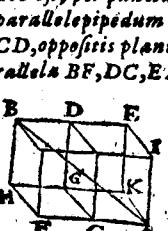
SCHOLIVM.

NVIC theremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34. primi lib. demonstrauimus, videlicet.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrū hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planum CD, oppositis planis AE, BF, parallelum. d *Et quia plana parallela BF, DC, EA, secant rectas quascunque proportionaliter; secatur autem BA, bifariam in G; secabuntur quoque latera aduersorum planorum AH, BI, atque adeo & bases AH, BI, bifariā.* e *Cum igitur sit vt basis KC, ad basim CH, ita solidum AD, ad solidum CB, erit parallelepipedum AB, sectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*

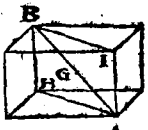
d 17. undecimi.



e 25. undecimi.

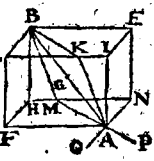
TRANSEAT secundo planum secans AI BH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic

secatur parallelepipedum per centrum G, immo per totam diametrum AB; a *cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI.* b *Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.*

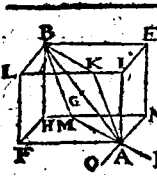


a 7. 11 decimi.
b 28. un decimi.

TERTIO planum secans AKBM, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM; c *erunt communes sectiones AM, BK, parallelæ. Similiter parallelæ erunt AK, BM, cum sint cõmunes sectiones planorum parallelorum AL, BN, facta a plano AKBM. Quare parallelogrammum est AKBM;* d *ideoque tam recta AK, BM, quam recta AM, BK, inter se erunt æquales. Quia ergo latera BK, BL, triãguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis. (Productis enim NA, MA, ad O, P, erunt AO, AP, rectis BL, BK, parallelæ;* e *ac proinde æquales anguli erunt OAP, LBK.* f *Cum igitur OAP, æqualis sit angulo MAN; æquales quoque erunt anguli KBL, MAN.)* g *Erunt bases KL, MN, inter se, & anguli BKL, BLK, angulis AMN, ANM, æquales; & triangulum triangulo æquale. Quare & similia erunt triangula BKL, AMN,* h *cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia. Quoniam vero recta KL, recta MN; & angulus BKL, angulo AMN; & angulus KBL, angulo MAN, est æqualis, vt ostendimus; erit & reliqua IK, reliqua HM; & reliquus angulus BKI, reliquo AMH; & reliquus KBE, reliquo MAF, æqualis. (Est enim tota LI, toti NH, æqualis, & tam anguli BKL, BKI, quam anguli AMN, AMH, duobus rectis æquales; & totus angulus LBE, toti angulo NAF, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum LE, FN.) Sunt autem & latera BE, EI, lateribus AF, FH, æqualia; & anguli BEI, EIK, angulis AFH, FHM, ob parallelogramma LE, FN. Igitur quadrilaterum BKIE, & æquilaterũ, & æquian-*

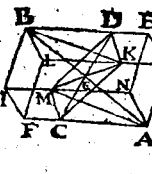


c 16. un decimi.
d 34. pri
e 10. un decimi.
f 15. pri
g 4. pri.
h 4. sext.



gulum est quadrilatero AMHF; Ac propterea æquale & simile, cum singula singulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triãgula BHM, AIK; & quadrilatera AKLF, BMNE; cum inter se sint & æquilatera et æquiangula. Quapropter solidum contentũ planis AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, æquale erit solido contento planis BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & æqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo AB, sectum est plano AKBM, per centrum G, bifariam.

POSTREMO planum secans CD, neque aduersis planis parallelum sit; neque per diametros planorum oppositorum, neque per vllos angulos eorum ductum, sed vtcunque secet plana opposita AH, BI. Ostendemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quãm rectas CM, DK, esse æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; connectanturque rectæ AM, BK. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, [a] inter se sunt parallelæ; [b] Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in centro G. In solo enim centro G, recta AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. [c] Et quoniam angulus BDC, angulo alterno ACD, æqualis est; [d] Est autem & angulus BGD, angulo AGC, ad verticem æqualis; & latus BG, lateri AG, æquale, quòd AB, bifariam secetur in G, centro; [e] Erit & latus DG, lateri CG, æquale. Cum ergo per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostendimus, diametri CD, KM, se mutuo bifariam secent, transibit KM, per punctum G, ibique diametrum AB, secabit. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC; [f] & angulus BGD, æqualis angulo AGC; [g] Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodẽ argumento æqua-



a 9. undecimi.
b 7. undecimi.
c 29. pri
d 15. pri
e 26. pri
f 15. pri
g 4. pri.

les

les erunt recta EK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius anguli huius æquales: Est autem totus DBL, toti GAN, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniam igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; a Erit & basis KL, basi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMG, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum est, & æquiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum singula conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterum DEIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum BI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale est solido contento planis DMNB, EIKD, DMCK, KFAC, CMNA, AIEN; cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur AB, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.

a 4. pri.

SED secetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrū

AB,

AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, secabitur parallelepipedū AB, bifariam plano FH, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariā secari plano GD; Igitur solida CB, FE, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se aqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo aliud punctum, praeter G, dimidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum eris parallelepipedi. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

xxxj.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturque parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim cōnectantur rectæ NO, PQ constituta erūt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cū prismatis. Nam plana horū solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib. a Quoniam igitur parallelogram-

34. pri

mum

mum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplū: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. a Quare parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorū dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (b Nam parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque, si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 31. undecimi.

b 32. undecimi.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, propositionem hanc intelligi de illis duntaxat prismatis, quæ duo triangula habent opposita; cum imperet parallelepipeda compleri; quod fieri non posset, si prisma super parallelogrammum ABCD, constituerum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Esset enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et Solidorum secundum.

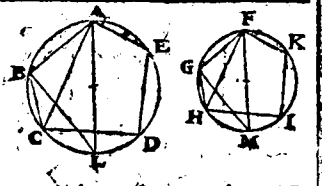
THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVAE in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorum diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & connectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est, vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [a] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: [b] Est autem angulus ALB, angulo ACB; &

angulus

angulus FMG, angulo FHG, æqualis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cum ergo & anguli ABL, FGM, æquales sint, nempe recti in semicirculis existétes; [b] erunt & reliqui BAL, GFM, æquales. [c] Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permutando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG, [d] Igitur est vt quadratum ex AL, ad quadratū ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad polygonū FGHIK, super FG; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

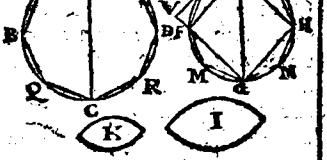


a 31. ter.
b 32. pri
c 4. sexti
d 22. sex

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

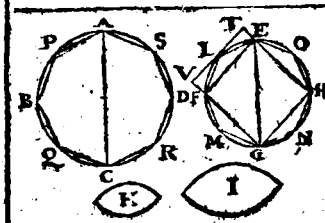
CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum si a diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratū diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulum EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim esset æqualis, [e] haberet circulus ABCD, ad circulū EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitu-



e 7. anti

gnitu-



gnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidiũ circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi EF, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis HE, GF, productus in T, & V. a Quia ergo triangulum ELF, dimidiũ est parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium segmenti circuli EEF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ EL, LF, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si a circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFGH; & a reliquis segmentis plus quam dimidiũ, nempe triangula ELF, FMG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; b relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta EL, LF, FM, &c. simul sumpta minora, quã magnitudo K. Cum igitur circulus EFGH, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, simile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile

a 41. pri

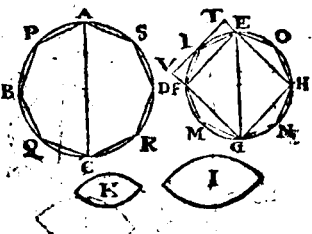
b 1. def.

fiet,

fiet, si semicirculi ABC, ADC, bifariam secetur in B, & D; & rursus circumferentiæ A B, B C, C D, D A, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia ABCD, in quot distributa est circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inscripta similis figuræ ELFMGNHO, vt patet. a Quoniam igitur est polygonum A P B Q C R D S, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri BH, hoc est, per hypothesim, vt circulus ABCD, ad I: Est autē polygonū APBQCRDS, minus erit circulo ABCD. b Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

a 2. duodecimi,

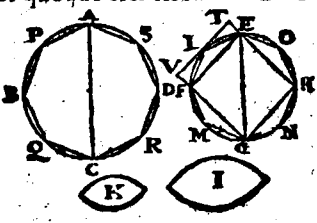
b 14. q̄n



QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demonstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionem, quam habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri A C; Ita vt generaliter & vniuersè demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem; siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.

SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cum ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri A C. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinem aliquam,

14.g. nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, a ma
ior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare



erit vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri A C, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratum diametri ad quadratū diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autem circulus ABCD, maior est, & EFGH, minor; eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratum diametri circuli ABCD, non posse habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinē circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud conceda tur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorē. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratū est: Ita vt generaliter & vniuerse quoque demonstratum sit, nunquam quadratū diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, 7.g. ad I; b sit autem vt circulus ABCD, ad I, ita idem circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulū EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue mi-

nor.

nor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum.

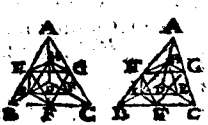
COROLLARIVM.

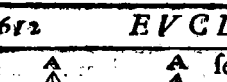
HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptum. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratum diametri, veluti demonstratū est.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius basis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariam in E, F, G, H, I, K, cõnectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuisa itaque est pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum bases triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec nõ in duo solida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox ostendemus esse prismata, quorum illius basis est parallelogrammum EBFG, & triangula opposita EHG, BIF; huius vero basis est triangulum CFG, cui opponitur triangulũ FIH, habẽtq; hæc prisma tã terminũ cõmunem, parallelogrãmum FGHI; & cũ duabus illis pyramidibus cõponunt totã pyramidẽ, vt constat, si recte cõcipiatur pyramidis vertex D, in sublimi, necnõ eius triãgula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides esse æquales, & similes inter se, & similes toti; Item duo hæc prismata esse inter se æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, triãguli ADB,





a 2. sex. secta sint bifariam, ac proinde proportionaliter; a erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erũt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & b 9. undecimi. HG, DC. b Sunt autem & rectæ FG, HI, cũ parallelæ sint ipsi AB, inter se parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ sunt GH, FI, cum sint parallelæ ipsi DC. Quare parallelogramma sunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, c 10. undecimi. DC, sunt parallelæ; c erunt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadem ratione æquales erunt anguli HEG, DBC; & d 4. sex. HGE, DCB. d Proportionalia igitur sunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde simile est triangulum HEG, triangulo DBC. Sũt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH. pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9. lib. 11. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ; e 10. undecimi. erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadem ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI, ACB. f Quare, f 4. sexti latera trianguli HIK, lateribus trianguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autẽ & triangula DHI, DIK, DKH, triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. lib. 11. Quoniam autem triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. & ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cum similia sint ostensa triangulo h 34. pri ABC, & super rectas posita AE, HI, h quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erunt

& si-

& similia triangula EHG, IDK, cum sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, a quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. lib 11. quandoquidem omnia triangula vnius qualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratū est. a 34. pri

RVRSVS, b quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: c Sunt autem & parallela; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentum duobus triangulis EHG, BIF, ex aduerso æqualibus & similibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, prisma est, ex defin. Eodē modo prisma ostendetur solidum CFGHIK. d Cū. n. rectę FC, CG, GF, æquales sint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogrāma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiāgula inter se, ac propterea similia: e Sūt aūt & parallela, quod rectæ CF, CG, per quas ducitur planū CFG, parallelæ sint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur solidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduersō æqualibus & similibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, prisma est. Quoniam vero prismata EBFGHI, CFGHIK, sunt eiusdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, basis illius, duplum est trianguli CFG, basis huius, per scholium propos. 41. lib. 1. f Ipsa inter se æqualia erunt. b 34. pri c 15. vn decimi. d 34. pri e 15. vn decimi. f 40. vn decimi.

DENIQVE quia prisma EBFGHI, maius est pyramide EBFI, totum parte; est autem pyramis EBFI, æqualis & similis pyramidi AEGH, necnon pyramidi HIKD, vt perspicuum est ex æqualitate & similitudine triangulorum: Maiora erunt prismata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidiū pyramidis ABCD, excedent, hæ vero a dimidio eiusdem

deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales secatur, maior dimidium eius superat, minor vero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens basin, &c. Quod erat ostendendum.

iiij.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT super bases triangulares ABC, EFG, duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, SQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirum in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propositio præcedens: eodemque modo intelligantur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & sic deinceps. Dico ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia

prismata

prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit vt BC, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraque linea diuisa est bifariam; sint autē triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propos. 4. lib. 6. a Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC; ita triangulum EFG, ad triangulum RQG. Et permutando, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG: Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, vt mox ostendemus, atque adeo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST, b ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQG, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedenti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cum sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, c ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AI-

a 22. sex

b 12. qn

c 12. q

LM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

LEMMA.

QVOD autẽ sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostendemus. Intelligantur ex verticibus D, H, ad bases ABC, EFG, demissæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, b secant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demissam proportionaliter; secatur autem DG, bifariam in O; secabitur quoque perpendicularis ex D, demissa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demissa bifariam secabitur a plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe prismatũ altitudines, æquales; Ac proinde prismata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter se erunt, vt bases LKC, RQG, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 11. demonstrauimus.

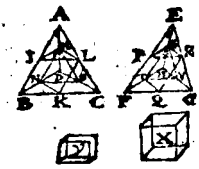
b 17. vn decimi.

v. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SVB eadem altitudine existentes pyra-

mides,& triangulares habentes baſes,inter ſe ſunt,vt baſes.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD,EFGH, quarum baſes triangula ABC,EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Si enim non ita ſit, ponatur vt baſis ABC,ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus,magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH,in duas pyramides æquales,& duo priſmata æqualia,iuxta propoſ.3.huius lib. Rurſus eodem modo factæ pyramides in pyramide EFGH,in binas pyramides æquales,& in bina priſmata æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi a pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium,nempe duo priſmata PFQRST, GQRSTV; a quæ maiora ſunt dimidio pyramidis EFGH: Ité a reliquis pyramidibus EPRS, STVH,plus quam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps; b relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis EFGH,ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X,Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD,in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM,MNOD,in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. c Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora,quam tota pyramis ABCD; d erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quã ſolidum X. Oſtenſa vero ſunt & maiora. Quod eſt abſurdũ. Nõ ergo minus eſt ſolidũ X, pyramide EFGH.



a 3.duodecimi
b 1.dec.
c 4.duodecim.
d 14.Qn

SIT

SIT deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG: Erit conuertendo ſolidum X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidum X, maius ponitur pyramide EFGH, [a] erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit, vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt, baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum X, pyramide EFGH, ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; [b] ſit autem pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt ad pyramidem EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoque vt baſis ABC, ad baſin EFH, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.

a 14. 5n

b 9. 5n

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & à puncto abſciſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Eritque vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modo conſtitutam: Sed ſic quoque erit ad totam pyramidem. [c] *Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.*

c 9. 5n.

COROLLARIVM.

HINC fit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM ſequitur è conuerſo, pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes eandem habere altitudinem. Et pyra-

mides

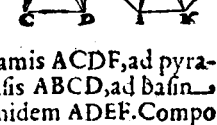
mides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarii eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

vi.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarum baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula, numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triangulares diuiſa. a Quia vero eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: b Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſim GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidem GHIKLM. c Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus



a 5. duo decimi.

b 7. duo decimi.

c 7. duo decimi.

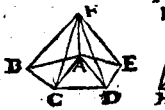
ABCDE	ABCDEF
ADE	ADEF
GKL	GKLM
GHIKL	GHIKLM

cum

cum quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifestumque est ex demonstratione. Quare exæquo, erit vt basis ABCDE, ad basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: Ac propterea, sub eadem altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quarum bases polygona latera habent multitudine aqualia, facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura continet latera quam basis alterius. Sint enim primum duæ



pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto.n. pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero aquales diuisa. a *Quoniam vero est, vt basis ABC, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* b *Erit vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo est ostensum: c & vt basis ADE, quinta quantitas ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem;* d *Erit etiam basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita*

a 5. duo decimi.

b 24. qn

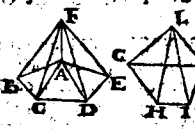
c 5. duo decimi.

d 24. qn

pyra-

pyramis ABCDEF, tertia quantitas cũ sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula in basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona ABCDE, ad basin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quam ob rem duæ pyramides qualibet, quarum vnius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat à polygona, eiusque pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, vt dictum est.

SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygona, sintque plura latera in vna base quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluta enim polygona ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia vero, vt iam est demonstratum, est vt basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonã, secũdam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quãtitas ad pyramidẽ GHIKL, quartam quantitatem; Erit etiam vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatẽ, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cũ sexta ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonstratum est; Et est quoque, vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam



quan-

24.gn. *quantitatem, vt ante est ostensum; a Erit etiam vt basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basim GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod est propositum. Non aliter procedendum erit, sit, plura triangula fuerint in basi ABCDE.*

HANC autem propositionem 6. & ea, quæ in hoc scholio demonstrata sunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet basium, quę inter se sunt, vt bases: eandem habent altitudinem.

QVOD non secus ostendemus, ac ea, quæ in scholio propos. 5. huius lib. diximus, ostensa sunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases multangulas, vel eandem constitutas, esse inter se æquales; cum eandem habeant proportionem cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

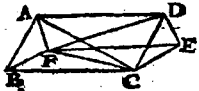
RVRSVS contra sit, pyramides multangulas æquales, & super æquales bases, vel super eandem constructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere bases, si non habuerint eandem. Hæc autem duo demonstrabuntur, vt in coroll. 5. huius lib. diximus.

vi. ## THEOR. 7. PROPOS. 7.

OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma ABCDEF, cuius duo triangula oppositæ, æqua-

æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. [a] Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia sunt; [b] estque vt basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutæ, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari a vertice C, ad planum ADEF, demissa. Est autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC; cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE,) totum prisma componentes, vt perspicuum est, æquales sunt inter se; ac propterea prisma ABCDEF, in tres pyramides æquales est diuisum. Quo circa omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 34 pri

[b] 5. duo decimi.

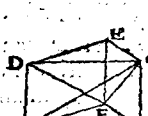
COROLLARIVM.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens basin ABF; & prisma ABCDEF, sub eadem altitudine eandem habens basin triangularem ABF. Dico pyramidem esse tertiam partem prismatis. Nam si ducatur recta FC, erit prisma diuisum in tres pyramides æquales ABCF, DCFC, CDEF, vt demonstratum est; Ac propterea pyramis ABCF, hoc est, pyramis ABFC, (cum hac illi sit æqua-

[c] 7. duo decimi.

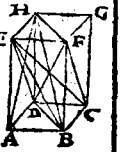
lis,



lis, imme eadem, quod eisdem planis comprehendatur ABF, FCA, ABC, CBF,) certia pars erit prismatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, aqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine, & super eandem basin ABF, constituta, ex coroll. propos. 5. huius lib. manifestum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum ipsa habet basin triangularem & altitudinem; ac propterea prisma e contrario esse pyramidis triplum.

SIT deinde pyramis ABCDE, cuius basis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & prisma ABCDEFGH, sub eadem altitudine eandem habens basim. Dico rursus pyramidem esse prismatis partem tertiam. Resolutis enim basi ABCD, & plano opposito EFGH, in triangula, numero aequalia ADE, BCD, EHF, FGH, erit prisma in totidem prismata, bases habentia triangulares divisum. Ductis ergo rectis AH, BH, DF, CF, erit, ut demonstratum est, pyramis ADBH, tertia pars prismatis ABFBHD; & pyramis BCDF, tertia pars prismatis CDHGFB. Quare ut pyramis ADBH, ad prisma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad prisma CDHGFB; & propterea ut una pyramis ad suum prisma, ita omnes pyramides ad omnia prismata, hoc est, ad prisma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, simul tertiam partem constituent prismatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, aequales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, super eandem basin, & super eadem altitudine, nimirum inter plana parallela sunt aequales, ex coroll. propos. 5. huius lib. Eademque ratione aequales sunt pyramides BCDF, BCDE, super eandem basim, & super eadē altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE, erit & pyramis ABCDE, tertia pars prismatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, aqualis sit cuicunque alteri pyramidi sub eadem altitudine & su-

per eandem basim ABCD, constituta, per coroll. propos. 5. huius lib. perspicuum est, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet basim multilaterum, eandemque altitudinem.



QVOD si basis pyramidis, ac prismatis plura habeat latera, eodem modo ostendetur, pyramidem esse prismatis partem tertiam. Nam diuisis polygonis in trangula, factum erit prisma in totidem prismata bases habentia triangulares. Vnde singula pyramides triangulares horum prismatum erunt tertia partes singulorum prismatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales sint pyramidi basim habenti polygonum prismatis propositi, constat propositum.

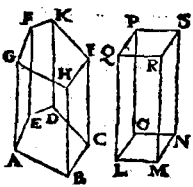
EODEM modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiusmodi pyramis, æqualis est pyramidi illi, quæ eandē cum prismate habet & basem, & altitudinem, per coroll. propos. 6. huius lib. Quam quidem iam ostendimus tertiam esse prismatis partem.

SCHOLIVM I.

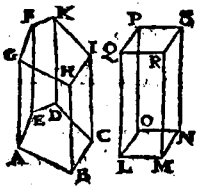
EX dictis facile demonstrabimus hanc propositionem, videlicet.

SVB eadem altitudine existentia prismata, quæscunque habeant bases, inter se sunt, vt bases.

QVAMVIS enim hoc demonstratum sit in lib. 11. de prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & æqualia, sunt triangula, licet eorum bases sint parallelogramma, vertices vero linea recta; necnō de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus vniuerse de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quāuis plura latera, seu anguli in vnius basi reperiantur, quam in basi alterius. Sint igi-



tur duo prismata eiusdē altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorū bases sint figuræ multilateræ. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si.n.ex omnibus angulis vtriusq; basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases; Ac proinde per coroll. præcitatum huius propos. quælibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.



15. 9n

CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM. II.

VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demōstratū.

SCHOLIVM II.

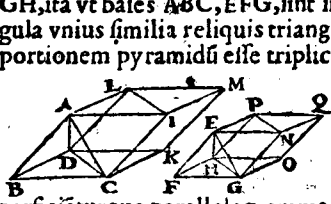
CÆTERVM tamen ea, quæ in priori corollario, quam illa quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent plana basi parallela, æqualia, & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandem-

dumque habens basim, tertia pars ipsius prismatis, vt in corollario 1. demonstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis concipiatur vnum parallelogrammorum, ita vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemq; altitudinem, tertia eius pars, sed dua tertia partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud aquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars cõstituti parallelepipedi, ex corollario praedicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2 erit parallelepipedũ. 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2, nimirum sesquialteram. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quae eandem cum tali prismate habeat altitudinẽ, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiam partem prismatis. Quae cum ita sint, nõ habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eãdem proportionem, quam basis ad basis, nisi hoc aliud prisma in vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quae ostendimus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorum vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quae in verticibus plana habeant basibus parallela, aqualia atque similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, dua tertia partes prismatum, vt modo demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationẽ, quam prismata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8. viii.

SIMILES pyramides, quae triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita vt bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triangulis alterius. Dico proportionem pyramidū esse triplicatam proportionis, quā habent latera homologa, nempe BC, FG, Extendantur enim plana triangulorum, ABC, CBD, DAB,



perficiāturque parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ conuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur completum parallelepipedum BM, eiusdem cum pyramide altitudinis; cum plana solidi BM, sint parallela, vt facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodem modo perficiatur parallelepipedum FQ. Quoniam igitur ob similitudinem pyramidum, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estque, vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, similia. Eodem modo cum anguli ABD, EFH, sint æquales, sitque vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Item anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG: erunt & parallelogramma AL, BK, parallelogrammis FP, FO, similia. a Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepipedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM, quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, b sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, c prismata DBCILA, HFGNPE, habent eandem proportionē, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; d habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. e Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum, BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Simi-

a 24. vn decimi.
b 24. vn decimi.
c 15. 4n
d 11. qn
e 33. vn decimi.

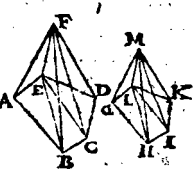
les

les itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos recta EB, EC, LH, LI, a *diuisæ erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis GHL, LHI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM; Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM: Ac propterea cum sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH.* b *Quare æquiangula, atq; adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM.* c *Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt lateram homologorum AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cum igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeant vnam &*



a 20. sex.

b 5. sex.

c 8. duodecimi.

eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnam eandemque proportionem, triplicatam scilicet illius; Atque idcirco erit vt vna pyramis ABEF, ad vnam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, cum pyramis ABEF, ad pyramidem GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

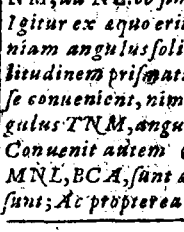
12. qn

8. duo decimi.

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatam proportionem homologorū laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum proportionem esse triplicatā proportionis homologorum laterū, Nam si ex angulis A, & L, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, erunt, vt de pyramidibus dictum est, triāgula ABC, CAD, DEA, triāgulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam vero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM; Vtrautem CB, ad CA; ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO, angulo ECD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD. Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, sunt æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse pro-

20. sex



por-

portionalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; sed triangulo ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sūt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sūt, ex defi. solidorū similiū. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ. per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterum homologorū BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. proportionum habere homologorum laterū BC, MN, triplicatam, quo paulo ante vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

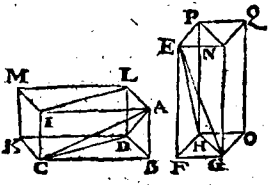
EX quibus omnibus colligitur. pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multāgula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. vii.

AEQVALIVM pyramidum, & triāgulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines, illę sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinem pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD. Si enim perficiantur, vt in præcedenti propos. dictū est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus,



connectanturque rectæ I L, P N; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatũ dupla æqualia quoque erunt. [a] Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinem solidi BM: [b] Vt autem basis BI, ad basim FN, ita est triangulum ABC, ad triangulũ EFG. Igitur erit quoque vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eædem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea bases & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

a 34. vn decimi.

b 15. qn

SINT iam bases & altitudines reciprocæ. Dico pyramides esse æquales. Constructa enim figura, vt prius: [c] cũ sit vt AB C, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; sintque eædem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque bases parallelepipedorũ, & altitudines eorundem reciprocæ; [d] Ac propterea inter se æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & prismata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, prismatum tertiæ partes, æquales erunt. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares bases habentium, &c. Quod erat demonstrandum.

c 14. qn

d 34. vn decimi.

SCHOLIVM.

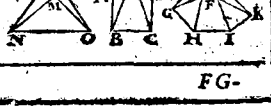
EADEM ratione Aequalium pyramidum, quarum bases non sint triangulares, reciprocantur bases atque altitudines. Et quarum pyramidum triãgulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illa sunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem A B C D, basin habeat triangularem; at vero EFGH I, non triangula-

rem

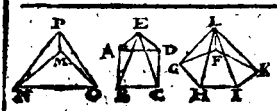
rem. Fiat basi non triangulari EFGH, aquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, si basis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propos. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, qua demonstrauimus ad propos. 42. lib. 1. Deinde super KLM, fiat pyramis KLMN, eiusdem altitudinis cum pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, aquales habent bases, & eandem altitudinem, ipsæ erunt aquales, per ea, qua in scholio propos. 6. huius lib. ostendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, aqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, aqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, bases triangulares; a erit ut basis ABC, ad basim KLM, hoc est, ad huic aqualem basim EFGH, ita altitudo pyramidis KLMN, hoc est, altitudo pyramidis EFGHI, (ponuntur enim he altitudines aquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, aqualium bases & altitudines reciprocantur. a 9. duodecimi.

SED reciprocentur iam harum pyramidum bases atque altitudines. Dico ipsas esse aquales. Constructa enim figura eodem modo; cum basis KLM, aqualis sit basi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, qua pyramidis EFGHI, ponatur autem esse ut ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque ut basis ABC, ad basim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. b Quamobrem aquales sunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, aqualis sit pyramidi EFGHI, per ea, qua assensa sunt in scholio propos. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, aqualis. Quod erat propositum. b 9. duodecimi.

SINT deinde pyramidas aquales ABCDE, FGHIKL, quarum bases sint multangulæ. Fiat rursus triangulum MNO, aquale basi ABCD, & pyramis MNOP, eiusdem altitudinis cum pyramide ABCDE. Eritque ex scholio propos. 6. huius lib. pyramis MNOP, aqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc aqualis ponitur pyramidi



FG-



FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, aqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt nunc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt, baſis ABCD, ſibi aqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim ha altitudines aquales.) Ac propterea pyramidum aqualium ABCDE, FGHIKL, baſes & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam baſes harum pyramidũ atque altitudines. Dico ipſas eſſe aquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſis MNO, aqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinẽ pyramidis MNOP. Quare vt ante oſtendimus, aquales erunt pyramides MNOP, FGHIKL. Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, aqualis ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, aqualis erit. Quod eſt propoſitum.

OMNIA hæc facile quoque demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint aquadia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum eſ ipſis, & ſuper eaſdem baſes, aquales; cum ſint eorum tertia partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certe dua tertia, ſi ni mirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorũ vertices linea recta, vt in ſcholio eiuſdem propoſ. oſtenſum eſt. Quare, vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atque altitudines reciprocantur. Cum ergo ha baſes & altitudines eadem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habẽtium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides aquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint tripla, vel certe ſeſ-

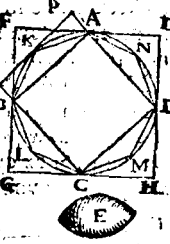
qual-

qualitera, æqualia quoque sunt. Quod est propositum.

THEOR. 10. PROPOS. 10. ix.

OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basin habentis, & altitudinem æqualem.

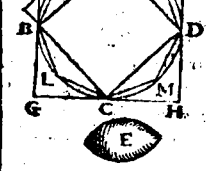
HABEANT conus & cylindrus basin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri esse tertiam partem. Si enim conus non credatur esse tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, sed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quã triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus sit æqualis triplo coni & magnitudini E, simul. Inscribatur in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelligantúrque super hæc quadrata sub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidiũ est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus; a estque vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiusdem altitudinis; Erit & parallelepipedum basis ABCD, dimidium parallelepipedi basis FGHI; Ac proinde parallelepipedum basis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius basis circulus ABCD. Secentur bifariã peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiungantúrque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulũ in K, quæ parallela erit ipsi AB, vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis DA, CB, productis in P, & O; & super AKB, ABOP, intelligantur prismata sub altitudine coni & cylindri. b Quia ergo triangulũ AKB, dimidiũ est parallelogrammi ABOP; erit quoque prisma basis AKB, dimidium prismatis, seu parallelepipedi basis ABOP: cum sit prisma ad prisma, vt basis ad basim, quemadmodũ ad propos. 7. huius lib. demon-



a 32. *vndecimi.*

b 41. *pri*

strauimus; Ac propterea prisma basis AkB, maius erit, quam dimidium segmenti cylindri, cuius basis figura cõtenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt prismata, quorum bases reliquæ triangulæ BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia segmentorum cylindri, quorum bases circuli segmenta. Omnia igitur hæc prismata simul maiora sunt, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodē modo prismata eiusdem altitudinis cum cono, & cylindro, quæ maiora erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum cylindri simul, quorum bases circuli segmenta, & sic deinceps. Quoniam vero si a cylindro, cuius basis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum basis ABCD; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum prismata basiũ AKB, BLC, &c. atque in hũc modum semper fiat detractio; a 1. dec. relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni. Sint iam segmenta cylindri relicta basium AK, KB, BL, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulę AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cũ cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoque conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadē cum ipso basis & altitudo, ex coroll. propos. 3. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.



SIT

SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudinis E; ita vt conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratū ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturque super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium est quadrati FGHI, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstrauimus, [a] estque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super ABCD, dimidium pyramidis super basin FGHI; ac proinde pyramis super basin ABCD, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus ABCD. Secentur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adiunganturque rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipsi AB, vt ad propos. 17. lib. 3. demonstrauimus, occurrat q; rectis DA, CB, productis in P, & O, & super AKB, ABOP, intelligantur pyramides sub altitudine coni & cylindri. [b] Quia ergo triangulum AKB, dimidium est parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis super basin AKB, dimidium pyramidis super basin ABOP, [c] cum pyramides habeant proportionem eandem, quam bases; ac proinde pyramis super basin AKB, maior erit dimidio segmenti coni, cuius basis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt pyramides, quarum bases reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadē cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia segmentorum coni, quorum bases circuli segmenta. Omnes igitur hæ pyramides simul maiores sunt, quam dimidia omnium segmentorum coni simul. Quod si rursus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, secentur bifariā, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, constituentur eodē modo pyramides eiusdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt simul, quam dimidia omnium segmentorum coni simul, quorum bases circuli segmenta; & sic deinceps. Quoniam vero si a cono, cuius basis

[a] 6. duodecimi.

[b] 41. pri

[c] 6. duodecimi.

circulus

circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis super basin ABCD, quam maiorem esse ostendimus, quã dimidium coni, cuius basis est circulus ABCD, & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nimirum pyramides basium AKB, BLC, CMD, DNA; atque 1. de. in hunc modum semper fiat detractio; a relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus coni supra tertiam partem cylindri: Sint iam segmenta coni relicta basium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta minora, quã E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul; si ex cono detrahantur segmenta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est præfatis coni segmẽtis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cum cono & cylindro, maior quam tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cum prisma eandem habens basim cum dicta pyramide, eandemque altitudinem cum cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum, erit huiusmodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum, Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostẽsus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea que conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandẽ cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS propositio hæc solum intelligatur de conis & cylindris rectis; cum hos duntaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuersè ita proponi poterit,

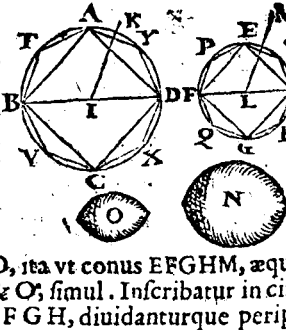
OM-

OMNIS conus siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni & cylindri.

THEOR. 11. PROPOS. 11. xi.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases.

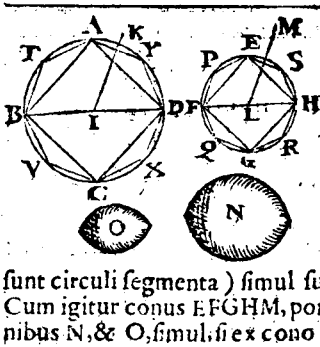
SINT sub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ bases circuli A B C D, E F G H, altitudines vero æquales IK, LM. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum. Si enim hoc non creda tur, sit vt basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si enim esset æqualis, a haberet conus ABCDK, ad conum E F G H M, & ad N, proportionem eandem; ac propterea esset conus ad conũ, vt basis ad basim: quod non con editur. Sit ergo primũ N, minor quam conus



a 7. q̃n.

FGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis t magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circu- EFGH, quadratum E F G H, diuidanturque peripheæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ E P, P F, F Q, &c. Quoniam igitur si ex cono FGHM, detrahatur pyramis super basin E F G H, eiusm altitudinis, & a reliquis segmentis auferantur pyraides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimi-

dio



dio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedentis propositionis ostensum est;[a] relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidem bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul, si ex cono detrahatur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmentis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum EPFQGRHS, eiusdem altitudinis cum cono, maior quam N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonum ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2. huius lib. docuimus. ducanturque circulorum diametri BD, FH. Quoniam igitur per coroll. propos. 2. huius lib. est vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita polygonum ATBVCXDY, ad polygonum EPFQGRHS; Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, [b] & vt polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, [c] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N: Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

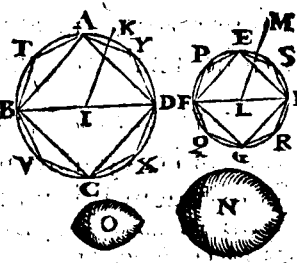
SIT Secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM;

maior

1. dec.

duo ecimi,

14. qn,



maior quoque erit conus A BC D K, quã O. Quare erit vt circulus EFGH, ad circulũ ABCD, ita conus E FGH-M, ad magnitudinẽ O, quę minor est cono ABCDK, Quod est absurdũ. Ostẽsum. n. est iã, nõ posse esse conũ ad magnitudinẽ minorẽ alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Nõ ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM, Sed neque minor est ostẽsa; Aequalis igitur est. Quapropter cũ ponatur, vt basis ABCD, ad basin EFGH. ita conus ABCDK, ad N; Sit aũt, vt conus ABCDK, ad N, ita idem conus ABCDK. ad cõtum EFGHM, erit quoque vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDk, ad conum EFGHM. d 7. quinti

b QVONIAM autem, vt conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni ABCDK,) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM,) Erit quoque vt basis ALCD, ad basin EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrum EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari potest, quo ysi sumus in conis, si loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & prismata. Sub eadem ergo altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum. b 15. quinti

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque est, hanc propositionem, quam Euclides de conis, & cylindris solis tactis proposuit, ob rationem superius traditam, extendi etiam posse ad conos, & cylindros scalenos, vt eius demonstratio manifeste indicat, ita vt propositio vniuerse proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, siue ambo recti sint, siue scaleni, si-

ue vnus rectus, & alter scalenus; inter se proportionem habent, quam bases.

CONVERTETVR hæc propositio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter se sint, vt bases; ipsi sub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonstrabis eo, modo, quo conuersum propos. 32. lib. 11. ostendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiusdem altitudinis super eandē, vel æquales bases constitutos, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, esse inter se æquales: propterea quod eandem proportionem habent, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur, conos & cylindros æquales super eandem, vel æquales bases, in eadem esse altitudine: Et æquales in eadem altitudine, super æquales bases esse, si non habuerint eandem. Quod ostendemus non aliter, ac conuersum propos. 31. lib. 11. demonstratū fuit.

x. THEOR. 12. PROPOS. 12.

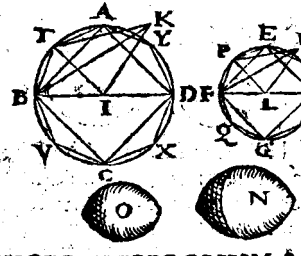
SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametroum, quę in basibus.

SINT similes coni, & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, axes vero LK, LM, & diametri basium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatam diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim esset æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, pro-

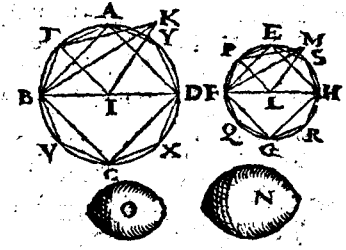
7. 5. [a]

por-

ortionem eãdem; Ac proinde proportio coni ABCDK, d conum EFGHM, esset quoque triplicata proportionis liametri BD, dd diametrum FH; quod non conceditur. Sit rgo primũ N, minor quam conus EFGHM, magnitudine); Fiatque eadẽ prorus constructio figurę, quæ in præcedẽti proositione, ita vt rursus yramis EPFQGRHSM, maior ostendatur, quam N. Ducãtur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, vt habeantur duo triangula BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, similes ponũtur; erit, ex 24. defin. lib. 11. vt diameter BD, ad diametrum FH, ita axis IK. ad Axem LM; Ac permutando vt BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea que axes recti ad eorũ bases; erit triangula BIK, FLM, æquiangula; Ac propterea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autem BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcubus BT, FP, sint æquales; vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostensum est; sitque vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatem tam linearum BI, IT, quam FL, LP; erunt triangula BIT, FLP, similia) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rursus quia latera KI, IB, trianguli KIB, æqualia sunt lateribus KI, IT, trianguli KIT, & anguli dictis lateribus comprehensi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cum axis IK, rectus ponatur ad circulum ABCD, erunt bases KB, KT, æquales. Eodem modo æquales erunt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. (Quoniam vero vt KB, ad BT, ita KT, ad eandem BT; Item vt MF, ad FP,



a 15. 5. b 6. sex. c 4. sex. d 6. sex. e 4. pri. f 7. 5.



ita MP, ad eandem FP: Erat autem vt KB, ad BT, ita MF, ad FP: Erit quoque vt kT, ad BT, ita MP, ad FP; Et conuertendo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cum sit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF, & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti ostensum est; habebunt triangula BKT, FMP, latera proportionalia, a ideoque æquiangula erunt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendentur reliqua triangula ambientia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cum sint multitudine æqualia, erunt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca *in triplicata* proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autem BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinem triangulorum BIT, FLP; b Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidem habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH; Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; c erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur maior est magnitudo N, cono EFGHM.

a 6. sexti

b 11. 5.

c 14. 5.

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autem & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime ostendimus. Erit vt conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDK,

ta pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem A T B V C X D Y K. Quare cum ex coroll. propos. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem A T B V C X D Y K, habeat proportionem triplicatam homologorum laterum PF, ad TB, hoc est, diametri FH, ad diametrum B D; habebit quoque N, ad conum A B C D K, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrũ B D. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum B D. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHK, [a] erit quoque conus ABCDK, maior quam O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinem O, minorem cono A B C D K, proportionem habet triplicatam diametri FH, ad diametrum B D, Quod est absurdum. Ostensum enim est, non posse conum ad magnitudinem alio cono minorem, proportionem habere triplicatam eius, quam habent bassum diametri. Non ergo maior est magnitudo N, cono E F G H M: Sed neque minor est ostensa. Aequalis igitur est; [b] ac proinde conus A B C D K, eandem habet proportionẽ ad conum EFGHM, & ad N. Cũ ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorum B D, & F H; erit quoque conus ABCDK, ad conum EFGHM, in earundem diametrorum proportione triplicata. [c]

[a] 14. huius.
[b] 7. huius.
[c] 15. huius.

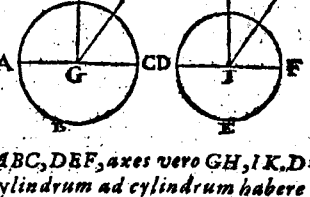
[c] QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoque cylindrus ad cylindrum proportionem diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD si maior conus, & cylindrus cum minore comparentur, perspicuum est, in secunda parte huius propos. Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8. huius lib. mi-

norem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterum homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HAEC porro propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni & cylindri scaleni, quorum bases circuli ABC, DEF, axes vero GH, IK. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatam. Intelligatur enim super easdem bases duo coni, & cylindri recti eorundem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducaturque per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana secantia bases lineis rectis AC, DF, quae diametri basium erunt. Quoniam igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF, a erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad easdem recta. b Ac propterea perpendiculares lineae ex H, K, ad bases demissae cadent in AC, DF, communes sectiones; & proinde erunt anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui aequales inter se erunt, cum coni & cylindri scaleni similes ponantur. Sunt autem & anguli CGL, FIM, aequales, nempe recti, c ex defin. 3. lib. 11. Reliqui igitur, HGL, KIM, aequales quoque erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta HL, per axium vertices ducta ipsi AC, parallela: d ideoque angulus L. rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, aequales erunt, cum sint aequales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, aequiangula sunt; e atq; idcirco erit vt GH, ad GL, ita IK, ad IM; &



permutan-

a 18. vn decimi.
b 38. vn decimi.
c 32. pri
d 29. pri
e 4. sexti

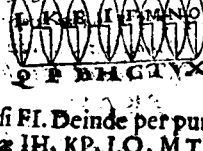
ermutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autẽ axis GH, d axem IK, ita eſt AC, diameter ad DF, diametrum; quod oni & cylindri ſcaleni ponantur ſimiles. Igitur & GL, axis d IM, axem erit, vt diameter AC, ad DF, diametrum; Et roinde coni & cylindri recti ABCL, DEFM, ſimiles erunt x definitione. a Quare proportionem habebunt diametri tu triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABGH, (cum eandem habeant baſim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus DEFM, cono & ylindro DEFK, (ob eandem rationem,) eſt æqualis, vt conat ex coroll. propoſ. 11. huius lib. b Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & ylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, ideoque roportio coni & cylindri ABCH, ad conum & cylindrum DEFK, triplicata quoque erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod eſt propoſitum.

a 12. duodecimi.

THEOR. 13. PROPOS. 13. xj.

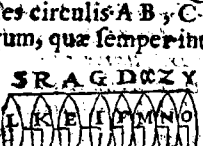
SI cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelis: Erit ut cylindrus ad cylindrũ, ita axis ad axem.

SECETVR cylindrus ABCD, plano GH, parallelo duerſus planis AB, CD, quod quidem ſecet axem EF, in . Dico vt eſt cylindrus ABHG, ad cylindrum GHCD, ta eſſe axem EI, ad axẽ IF. Intelligatur n. cylindrus AB-D, in vtramque partẽ vna cũ eius



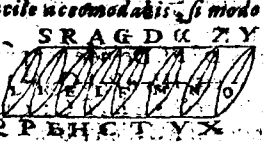
xe & rectãgulo EC, ad cuius reuo utionem deſcriptus eſt cylindrus, rotractus quantũlibet; Sumãturq; n axe producto quotcunque rectæ K, KL, æquales ipſi EI; Item quotũq; rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi FI. Deinde per puncta L, K, L, M, N, O, ducantur rectæ IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, deſcribent cir-

culos GH, PQ, QS, Tα, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem semidiametrorum, quæ semper inter se æquidistantes circumferuntur. Ac propterea cylindri erunt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZK, ex definitione, componentes totum cylindrum SQXY, Quoniam vero tam cylindri SP, PA, AH, super bases æquales QS, PR, BA, & sub altitudinibus æqualibus KE, EK, IE, æquales sunt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, super æquales bases XY, VZ, Tα, CD, & sub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propos. 11. huius lib. erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quam multiplex est axis IL, ipsius axis IE; Item tam multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex est axis IO, ipsius axis IF. Quoniam autem si axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis est axi IO, (multiplici axis IF, secundæ magnitudinis) æqualis quoque est cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) vt ex propos. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior est axe, cylindrus quoque cylindro maior est; Et si minor, minor, in quacunque hoc contingat multiplicatione; Erit, per defin. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axem IF, secundã magnitudinem, vt cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylindrus igitur plano secetur aduersis planis parallelo, erit vt cylindrus ad cylindrũ, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandũ.



SCHOLIVM.

ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstratione cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis recti-



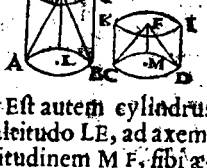
gulum circa quiescens latus circumfertur; sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri LS, KR, EA, &c. semper aequidistantes circa centra L, K, E, &c. una cum recta ST, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, quae scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

xi.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE, MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturq; axis EN, æqualis axi MF, & circa centrum N, intelligatur circulus OP, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHOP, eiusdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniã igitur cylindri HP, CI, cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propos. 11. huius lib. a cylindrus AG, ad ipsos eandem habebit proportionem. b Est autem cylindrus AG, ad cylindrum HF, vt axis, seu altitudo LE, ad axem, seu altitudinem EN, hoc est, ad altitudinem MF, sibi æqualem. Igitur & cylindrus AG, ad cylindrum CI, erit quoque, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.



a 7. qu.
b 13. duo decimi.

c QVIA vero coni ABE, CDF, sunt tertiæ partes cylindrorum AG, CI; d ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem. Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Su-

c 10. duo decimi.
d 15. qu

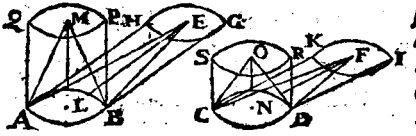
per

per æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

HOC idem conuenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint super bases æquales AB, CD, coni ABE, CDF, & cylindri ABGH, CDIK, scaleni, quorum altitudines LM, NO. Dico conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, esse, vt est altitudo LM, ad altitudinem NO. Super basin enim AB, constituatur cylindrus rectus ABPQ, sub altitudine LM; Item super basin CD, cylindrus CDRS, sub altitudine NO. Quoniam igitur est cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO: Est autem cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Item cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

a 14. duodecimi.



QVONIAM autem coni, b cum sint tertia partes cylindrorum, c eandem habēt proportionem, quam cylindri. Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodem argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundem altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

b 10. duodecimi.

c 15. 2n.

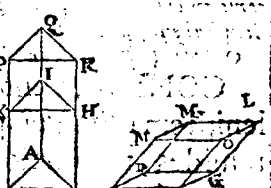
IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, æqualis sit cylindro recto ABPQ: sit autem cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonstrauit: Erit quoque cylindrus scalenus

nus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

a 15. qn. bio. uo decim. i.

a QVONIAM vero coni eandem habent proportionem, quam cylindri, b cum illi horum sint tertia partes; Erit etiã conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod nihilominus ostenderetur eadem ratione, qua vsi sumus in cylindris, vt manifestum est.

EADEM quoque hac propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super aequales bases constitutis. Sint enim super bases aequales ABC, DEFG, prismata ABCHIK, DEFGLMNO, & pyramides sub eisdem altitudinibus. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem. Sint namque insistentes lineae AI, CH, BK, prismatis ABCHIK, ad basin ABC, perpendiculares, ita vt BK, sit altitudo prismatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, sumantur IQ, HR, KP, aequales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur prisma HIKPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Erudique prismata HIKPQR, EL, cum habeant & bases, & altitudines aequales, inter se aequalia. ex corroll. 2. propos. 7. huius lib.

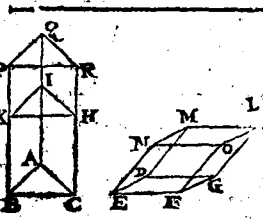


c 7. qn.

c Ac propterea prisma ABCHIK, ad vtrumque eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propos. 25. lib. 11. prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, est vt planum BI, ad planum KQ; d Et vt planum BI, ad planum KQ, ita est recta BK, ad KP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma EL, vt BK, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod est propositum.

d 1. sex.

e QVOD si insistentes lineae AI, CH, BK, non sint perpendiculares ad basin ABC, constituendum erit super basin ABC, aliud prisma, cuius insistentes sint perpendiculares ad basin, & aequales altitudini prismatis ABCHIK. Nam ex



ex 2. coroll. propos. 7. huius lib. hæc duo prismata eandem habentia altitudinem, & basin, sint æqualia, sitque prisma constitutum ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinem; erit & prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinem huius.

15. qn 10. duo decimi.

a QVONIAM *vero pyramides eandem habent proportionem cum prismatis,* b *quod illa sint horum tertia partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.*

EADEM *prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.*

HÆC *omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.*

OMNIA *quoque hæc facile converti possunt hoc modo.*

CONI & cylindri tàm recti, quam scaleni; item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

NAM *alioquin pars æqualis foret toti, vt in converso propos. 31. lib. 11. ostensum est.*

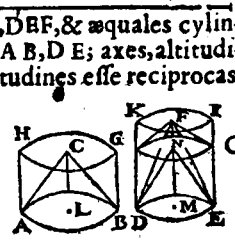
xij.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT

SINT æquales coni ABCD, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes, altitudinesve LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidē ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum cylindri ponātur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit vt baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.



QVOD ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planū ON, baſi DE, parallelum, vt in ſcholio propoſ. 15. lib. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO, OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; [a] erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. [b] Eſt autem vt cylindus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: [c] Item vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

a 7. q̄n.
b 11. *duo decimi.*
c 14. *duo decimi.*

IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales. [d] cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demonſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF, conſtituātur duo coni, vt in figura.

d 10. *duo decimi.*

SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidem in cy-

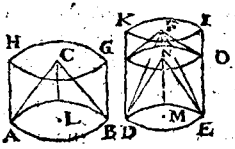
lindris

lindris cõfirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum sit vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erũt & bases AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri super æquales bases AB, DE, & sub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt; ex coroll. propos. 11. huius lib.

QVOD si altitudines fuerint inæquales, fiat constructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt basis AB, ad basin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc est, ad huic æqualem MN; a est autem vt basis AB, ad basin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines sint æquales: b Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum bases sint æquales: erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO; c Ideoque cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

a 11. *duo decimi.*
b 14. *duo decimi.*
c 9. *qn.*

AT vero in conis hæc erit demonstratio. Si conorum



ABC, DEF, bases & altitudines reciprocentur, reciprocabũtur quoque bases, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cum eædem sint bases, altitudinesq; conorum, & cylindrorum. Quã ob rem, vt ostensum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonstrari tamen potest eodem modo conos esse æquales, quo ostendimus cylindros æquales esse. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

NON difficile erit idem ostendere de conis, & cylindris scalenis. Si enim æquales sint coni & cylindri scaleni, erunt quoque recti easdem cum illis bases, & altitudines habẽtes, æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare vt ostensum est, bases & altitudines reciprocabuntur. Quod si bases, & altitudines conorum & cylindrorum scalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque bases & altitudines conorũ & cylindrorum rectorum, si eadem sint bases, & altitudi-

nes

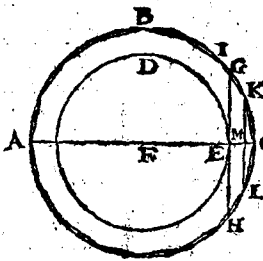
nes rectorum & scalenorum. Quare, vt demonstratum est, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri scaleni, cum sint rectis æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. inter se quoque erunt æquales.

IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum sit rectus, & alter scalenus, vt perspicuum est ex ijs, quæ in scholio propos. 14 huius lib. docuimus.

PROBL. 1. PROPOS. 16. xiij.

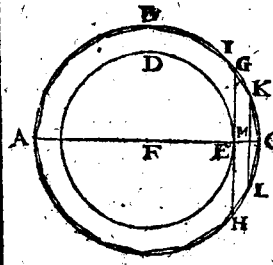
DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idem centrum F, oporteatque in maiori ABC, inscribere polygonum æquilaterum, cuius latera numero pari continentur, non tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, secans circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulũ DE, in E, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Quoniam igitur arcus AGC, maior est arcu GC, si ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex residuo BC, dimidium BI, & ex residuo IC, dimidium IK, & sic deinceps; a relinquetur tandẽ minor arcus quã CG. Sit igitur iam arcus CK, arcu CG, minor, & subtẽdatur recta CK. Dico rectã CK, esse vnũ latus polygoni inscribendi. Si. n. arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrans AB, in totidem partes æquales diuidatur, in quot diuisus est quadrans BC; necnon semicirculus AHC, in totidem partes, quot continet semicirculus



a 1. def.

ABC,



ABC; deinde omnibus arcubus rectæ lineæ subtendantur, a quæ æquales quidem erũt ipsi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK; æquales subtendant; Descriptum erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidẽ non tangere circulum minorem DE, ita ostendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, secans ipsam AC, in M. Quoniam igitur anguli GEM, KME, recti sunt; b erunt rectæ GH, KL, parallelæ. Quare cum recta GH, tangat circulum DE, in solo puncto E; recta KL, erit tota extra dictum circulũ, nec vnquam ipsum continget, quod nunquam cum recta GH, conueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abest, quam KL, circulum DE, tanget. Ac propterea neque alia latera polygoni inscripti, cum æqualia sint lateri CK; c ideoque æqualiter cum CK, a centro F, distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

a 29. tert

b 29. pri

c 14. tert

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, Si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed tota extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

xiiij. PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT

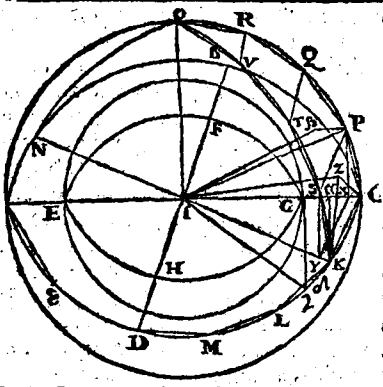
SINT duæ sphæræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inscribere solidum polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorem sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintque communes sectiones factæ in sphæris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphærarum, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes lineæ rectæ cadentes ex I, ad peripherias sectionũ sunt æquales, cum ducantur ex centro sphærarum ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducantur in his circulis diametri AC, BD, se se in centro I, secantes ad angulos rectos, vt sint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. [a] Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidem vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad BG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiã vsque circuli ABCD, quæ circulum EFGH, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et recta Gγ, [b] applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero si arcui Cγ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, [c] latus Cγ, oppositũ maiori angulo, nempe recto, maius est latera Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoque recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidium auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidium LK, & sic deinceps; [d] relinquetur tandẽ arcus minor arcu Cδ, seu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritque recta CK, subtensa minor quam recta Aε, hoc est, quam Gγ, ex scholio propos. 29. lib. 3. Dico igitur, rectam CK, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tangat circulum EFGH, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet; multo minus recta CK, subten-

[a] 16. duodecimi.

[b] 1. primi.

[c] 19. primi.

[d] 1. huius.



dens arcum minorem arcu CL, eundem circulum tanget. Rursus ducta diametro KN, [a] erigatur ex centro I, ad plana circulorum ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, [b] quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientq; cõmunes sectiones, circulos, vt iã dictum est, quorũ semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, [c] ex defin. 3. lib. 11. quadrantes erunt OC, OK; atque adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoque quadrantes CD, OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL; & quadrãtes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; [d] erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, kL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S. ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, [e] quæ inter cõmunes sectiones AC, NK, cadent; [f] eruntq; inter seaparallelæ.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. [g] & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoque erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus an-

gulis

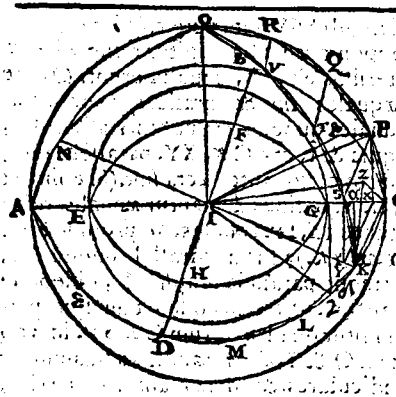
a 12. vndecimi.
b 18. vndecimi.
c schol. 21. ter.
d 29. ter
e 38. vndecimi.
f 6. vndecimi.
g 27. ter

gulis SKY, SYK, trianguli SKY. Sunt autem & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. a Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PY, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY, b æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter se. c At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demantur æquales rectæ CX, KY, relinquentur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK.) d Erunt parallelæ quoque PS, CK, inter se, cum vtraque parallela sit ipsi XY, e ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent. Totum igitur quadrilaterum CKSP, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpendiculares, & connectantur rectæ QC, TK, ostendemus similiter CK, QT, esse parallelas; atque eadem ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cum eidem CK, sint parallelæ; totumque quadrilaterum PSTQ, in vno esse plano. Eadem ratione in vno erit plano quadrilaterum QTVR. f Est autem & triangulum RVO, in plano. Si igitur eadem constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD, necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphærio, vt tota sphæra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, constructis, inscriptum eius in sphæra maiori solidum polyedrum circumscriptum dictis quadrilateris atque triangulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

a 26. pri
b 33. pri
c 2. sex.
d 9. duodecimi.
e 7. undecimi.
f 2. undecimi.

DVCATVR enim ex I, ad planum CKSP, perpendicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Cadere autem perpendicularem IZ, intra quadrilaterum CKSP, in scholio sequenti ostendemus. Quoniam igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; g erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, quadratis rectarum IZ,

g 47. pri



ZK, æqualia; Ac proinde dempto cómuni quadrato IZ, reliqua, quadrata rectarú ZC, ZK, æqualia erunt; ideoque & ipsæ rectæ ZC, ZK, æquales. Similiter ostendemus rectas, quæ ex Z, ad PS, ducentur, æquales esse & inter se & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad intervallum ZC, descriptus per quatuor puncta C, K, S, P, transibit. Eademque ratione circa reliqua quadrilatera PSTQ, QTVR, & triangulum RVO, circulos describi posse demonstrabimus. Quoniam vero, vt
a 12. sec. postea ostendemus, angulus CZK, obtusus est; erit quadratum rectæ CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; adeoq; cum hęc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectæ ZC.

DVCATVR ex K, ad rectam AC, perpendicularis Kα. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI; & Aα, maior sit, quam AI, erit AC, minor duplo ipsius Aα. Quam ob rem cum sit, b vt AC, ad Aα, ita rectangulum sub AC, αC; ad rectangulum sub Aα, αC, quod bases horum rectangulorú sint AC, Aα, & eadem altitudo αC; erit quoq; rectangulú
b 1. sex. sub AC, αC, minus duplo rectanguli sub Aα, αC. c Est autem rectangulum sub AC, αC, æquale quadrato rectę CK, & rectangulum sub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quod recta CK, inter AC, αC, sit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (si enim connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, ostensum sit maius esse duplo quadrati rectæ
c 17. sex.

ZC,

Z C, erit quadratum rectæ K α, maius quadrato rectæ Z C.
a Quoniam vero quadratum rectæ IC, æquale est quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratum rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK; Suntque æqualia quadrata rectarum æqualium IC, IK, & ruot & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarum Iα, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectæ αK; & ex illis minus, videlicet rectæ ZC, erit reliquum quadratum rectæ IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta IZ, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tangat sphæram minorē EFGH, quod per coroll. propos. præcedentis recta Kα, tota sit extra dictam sphæram; multo minus punctum Z, longius distans, eandem sphæram continget. Ac proinde cum omnia alia puncta plani CKSP, longius absint a sphæra EFGH, quam punctum Z, vt mox ostendemus, non tanget planum CKSP, sphæram EFGH. a 47. pri

SED & expeditius ex ipsa fere constructione figuræ ostendemus, planum CKSP, non tangere sphæram minorem EFGH, si prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex constructione ostensum fuit, rectam CK, minorem esse recta Cγ: b Est autem CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtusus sit, vt mox demonstrabitur; Multo maior erit Gγ: quam ZC; Ac propterea quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. c Quia vero quadratum rectæ Iγ, æquale est quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; sunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, sit sphæræ minoris EFGH, semidiameter, existet punctum Z, extra eandem sphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, sphæram EFGH, nequaquam continget. b 19. pri c 47. pri

DVCATVR rursus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PS-

TQ, descripti, vt demonstratum est; Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus IβP, rectus sit, ex 3. defin. lib. 11. a erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Iβ, βP. Quia vero & quadratum rectæ IC, (quod æquale est quadrato rectę IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale est quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC: æqualia; Est autem quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior sit, quam linea βP, vt postea ostendemus. Reliquũ igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoque & linea, Iβ, maior quam linea IZ. Ac proinde multo magis punctum β, extra sphæram BFGH, existet, quam punctum Z, propterea-que multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget sphæram maiorẽ EFGH. Eodem modo demonstrabimus, quod neque reliqua plana sphæram dictam contingere possint. Quocirca, duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscripsimus, quod non tangat minoris sphæræ superficiem. Quod erat faciendum.

a 47. pri

COROLLARIVM.

EX ijs, quæ demonstrata sunt, manifestum est, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto solido polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. Nam si ex centris sphærarum ad omnes angulos basium, dictorum polyedrorum rectæ lineę ducantur, distribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & similes, quarum homologa latera sunt semidiametri sphærarum; vt constat, si intelligatur harum sphærarum minor intra maiorem circa idem centrum descripta. Conuenient.n. sibi mutuo lineæ rectæ ductæ a cẽtris ad basium angulos, ob similitudinem basium: Ac propterea pyramides efficientur similes. Quare cum singulæ pyramides in vna sphæra ad singulas pyramides illis similes in altera sphæra, habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc est, semidiametrorum sphærarum, vt constat ex coroll. propos. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc est, solidum polyedrum ex ipsis compositum, ad omnes pyramides, id est, ad solidum polyedrum ex ipsis constitutum. Habebit quoque polyedrum vnius

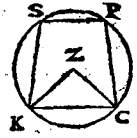
sphæ-

sphæræ ad polyedrum alterius sphæræ proportionem triplicatam semidiametrorum, atque adeo diametrorum sphærarum, a cum semidiametri atque diametri eandem habeant proportionem. a 15. qu

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero ne nimis longa demonstratio fieret, nonnulla in ea assumpta fuerunt, vt vera; qua tamen nondum sunt demonstrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonstranda.

PRIMVM itaque ostendendum est, punctum Z, cadere intra quadrilaterum CKSP, & angulum CZK, in quadrilatero CKSP, esse obtusum. Quod vt commodius fiat, describatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura superiori, est vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, similia sint.) Est autem IK, maior quam IY; b erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis sit ostensæ ipsi SP, erit quoq; KC, maior quàm SP, Ac propterea in hac figura, arcus CK, maior erit arcu SP, ex scholio propos. 28. lib. 3. c Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, sint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipsi KC, lineæ sint æquales demonstratæ; (subtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex constructione figura superioris constat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Atque idcirco quilibet arcuum C, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque à semicirculo superabitur; ac proinde multo magis segmentum SP, minus erit semicirculo. Ex quo fit, centrum Z, non esse in illis segmentis, sed extra, nimirum intra quadrilaterum CKSP. Eadem ratione ostendemus, perpendiculares ex I, ad plana aliorum quadrilaterorum demissas, qualis est Kβ, cadere intra quadrilatera; necnon & perpendicularem ex I, ad triangulum ORV, ductam, cadere intra ipsum. Quia igitur arcus CK, quadrante maior est; angulus CZK, obtusus erit., nempe recto maior, cum

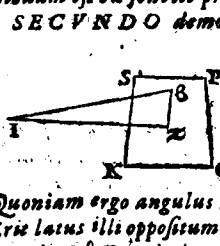


b 14. qu

c 28. ter

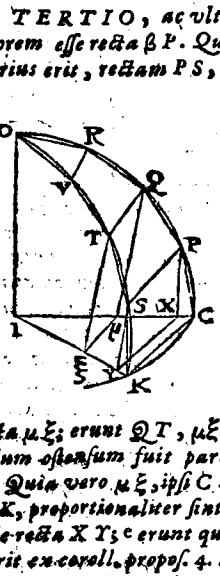
angulo recto in centro subtendatur quadrans circuli, vt per spectatum est ex scholio propos. 27. lib. 3.

SECVNDO demonstrandum est, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius a centro I, abesse, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur recta Iθ, Zθ.



a 19. pri. Quoniam ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. a Erit latus illi oppositum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo IθZ, nimirum acuto, opponitur. Ac propterea punctum θ, longius a centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.

TERTIO, ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse recta βP. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, maiorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figura, ea videlicet, qua continetur semidiametris IC, IK, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demissantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, b que in communes sectiones IC, IK, cadent, c eruntque inter se parallelæ, vt de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adiungatur recta μξ; erunt QT, μξ, parallelæ & æquales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & æquales PS, XY.



b 38. vn decimi. c 6. vn decimi.

d 2. sex

e 30. p ri

f 14. qn

d Quia vero μξ, ipsi CK, parallela est; quod latera IC, IK, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY; e erunt quoque μξ, XY, parallelæ. Quare erit ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ. Est autem IY, maior quam Iξ. f Igitur & YX, maior erit

quam

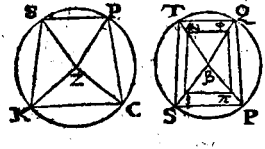
quam ξμ; Ac proinde & PS, qua æqualis est ipsi XY, maior erit quam QT, qua æqualis est ipsi ξμ.

HOC ergo demonstrato, describantur ex centris ZK, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egrediantúrque e centris rectæ ZC, ZK, ZS, ZP; ςP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis. Quia ergo latera ZK, ZC, æqualia ponúntur lateribus βS, βP, & basis KC, maior est basi PS; a erit angulus KZC, maior angulo SβP: Eadem ratione maior erit angulus SZP, angulo TβQ. At quoniam bases KS, CP, basibus ST, PQ, sunt æquales; b erunt anguli KZS, CZP, angulis SβT, PβQ, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis sint æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. quod est absurdum. Non igitur æqualis est recta ZC, rectæ ςP.

a 25. pri

b 8. pri.

SIT deinde ZC, minor, quam βP. Et abscindantur βπ, βρ, βω, βφ, ipsis ZC, ZK, ZS, ZP, æquales, connectanturq; rectæ πρ, ρω, ωφ, φπ, c quæ parallelæ erunt rectis PS, ST, TQ, QP, eo quod rectæ ex centris secta sunt proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit vt βS, ad SP, ita βρ, ad ρπ. Cum ergo βS, maior sit quam βρ, d erit & SP, maior quam ρπ. Eademq; ratione maiores erunt ST, TQ, QP, rectis ρω, ωφ, φπ; Ac propterea cum PS, minor sit, quam CK, & ST, PQ, æquales rectis KS, CP; & TQ, minor quam PS, erunt rectæ ωρ, ρω, ωφ, φπ, minores rectis CK, KS, SP, PC. Quare cum rectæ βπ, βρ, βω, βφ, rectis ZC, ZK, ZS, ZP, sint æquales; e erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi sint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. Quod est absurdum. Non igitur minor est recta ZC, quam βP: Sed neque æqualis est ostensa; Maior igitur est. Quod erat ostendendum.



c 2. sex.

d 14. qn

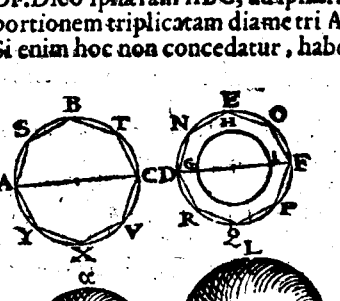
e 25. pri

xv.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

SINT duæ sphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. Dico sphæram ABC, ad sphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrū DF. Si enim hoc non concedatur, habebit sphæra ABC, ad aliam sphæram GHI, minorem, vel KLM, maiorē, quā DEF, triplicatam, proportionem diametri AC, ad diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primum sphera ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam, diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque sphæra GHI, concentrica sphæræ DEF, a Inscribatur in sphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem sphæram GHI; Atque huic simile polyedrum ASBTCVXY, inscribatur in sphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio sphæræ ABC, ad sphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Est autem, per coroll. præcedentis propos. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad



a 17. duo decimi.

dia-

diametrum DF; Erit vt sphæra ABC, ad sphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum sphæra ABC, maior sit polyedro ASBTCVXY, erit & sphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod est absurdum. Non igitur habebit sphæra ABC, ad sphæram GHI, minorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. 14. 5.

HABEAT secundo sphæra ABC, ad sphæram KLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propos. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt sphæra ABC, ad sphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt sphæra KLM, ad sphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Est autem ex dicto coroll. præcedentis propositionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrũ ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & sphæra KLM, ad sphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrũ AC. Ponatur vt sphæra KLM, ad sphærã ABC, ita sphæra DEF, ad aliã sphærã Zαβ. Habebit igitur & sphæra DEF, ad sphæram Zαβ, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia sphæra KLM, maior ponitur, quam sphæra DEF, erit quoque sphęra ABC, maior, quam sphæra Zαβ. Quapropter sphæra DEF, ad sphęram Zαβ, minorem sphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod est absurdum. Ostensum enim est non posse sphæram ad sphæram alia sphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit sphæra ABC, ad sphęram KLM, maiorem sphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF: Sed neque ad minorem habet, vt demonstratum est: Igitur habebit ad sphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphæræ itaque inter se sun-

in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HINC ſit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum ad polyedrum ſimile in hac deſcriptum. Quia tam ſphæra ad ſphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonſtratum eſt.

* * *
* *

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

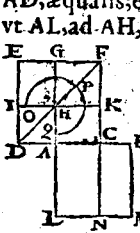
Et Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS: 1.

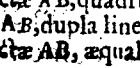
SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumens dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Producta autem BA, ad D, sit AD, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ CD, quintuplum esse quadrati rectæ AD. Describatur enim super CD, quadratum CE, in quo ducta diametro DF, ducatur AG, ipsi DE, parallela, secans diametrum in H, puncto, per quod ducatur IK, parallela ipsi CD. Produ-

cta deinde GA, perficiatur quadratum AM, protrahaturque FC, ad N. eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum A D, A C. a Quia ergo est vt A B, ad AC, ita AC ad CB; b erit rectangulum CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipsius AD, sitque AL, ipsi AB; & AH, ipsi AD, æqualis; erit quoque AL, ipsius AH, dupla. c Est autē vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius AK. d Quoniam autem AK, ipsi IG, est æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineæ AD; erit & gnomon OPQ, eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni OPQ, addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. e Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Et rursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB, ipsius AD, est dupla, f ita quoque erit rectangulū sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cum vtriusque rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum, æquale erit rectangulo sub AB, AC.) g Quod vero sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ AC, cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis quadruplū quoque erit quadrati rectæ AD. Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD. h Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale sit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub



AD,

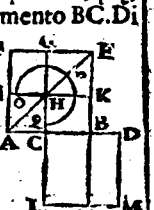
a 3. def. 6. exti.
b 17. 6. ex
c 1. 6. ex.
d 43. 1. pri
e 2. 6. ex.
f 1. 1. ex.
g 17. 6. ex
h 4. 6. ex.

AD, AC, bis; Erit & quadratum rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

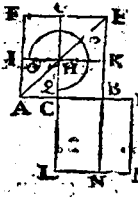
THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI recta linea suijpsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, possitque quintuplum segmenti AC; sumatur autem ipsius AC, dupla CD, quę, vt post ostendemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquam partem prioris lineæ. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrũ in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; EB, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplum ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratum CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdem quadrati CI, quadruplus: Est autẽ & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. a Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectangulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum; a 1. sex.



Est

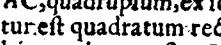


[a] 43. pri

a Est autem CK, ipsi HF, æquale. Aequale igitur est LB, ipsis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratū KG, reliquo rectangulo BM. Quoniā ergo sunt tres rectæ CD, CB, BD; estque rectāgulum BM, sub CD, BD, comprehensum æquale ipsi KG, quadrato rectæ CB; [b] Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rē, ex definitione, recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque maius segmentum CB.

[b] 17. sex

ALITER. Quoniam quadratum rectæ AB, quintuplū ponitur quadrati rectæ A C; [c] estque quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vna cum rectangulo sub AC, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum CB, AC, vna cum rectangulo sub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectæ A C. Dempto igitur quadrato rectæ A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum sub AC, CB, bis, quadruplum eiusdem quadrati rectæ AC; Est autem & quadratum rectæ C D, eiusdem quadrati rectæ AC, quadruplum, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequale igitur est quadratum rectæ CB, & rectangulū sub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectāgulum sub AC, CB, bis, æquale sit rectāgulo sub CD, C B; (sicut enim recta C D, dupla est rectæ AC, [d] ita quoque duplum erit rectangulū sub CD, CB, rectanguli sub AC, CB; cum vtriusque rectanguli eadem sit altitudo CB; Ac propterea rectangulum sub CD, CB, æquale erit rectangulo sub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum sub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale; [e] At quadratum rectæ CD, æquale est rectangulis sub CD, CB, & sub CD, BD. Igitur quadratū rectæ CB, & rectangulum sub C D, C B; æquale erit rectangulis sub CD, CB, & sub CD, B D; Ac proinde dempto communi rectangulo sub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectangulo sub CD, BD; [f] ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, secta est in B, extrema ac media ratione, estque



[c] 4. sec.

[d] 1. sex.

[e] 2. sec.

[f] 17. sex

segmen-

ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſuiipſius ſegmenti quintuplum poſſit, &c. Quod erat demonſtrandũ.

LEMMA.

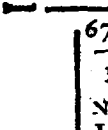
QVOD autem recta CD, maior ſit nec eſſario quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erũt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autẽ quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarũ AC, CD,[a] cum æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC: Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdẽ quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB, ideoque dempta communi AC, maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod eſt propoſitum.

[a] 4. ſecũ.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod à dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum AC, bifariam diuidatur in D. Dico quadratum rectæ BD, quadruplũ eſſe quadrati



rectæ CD. Describatur enim super AB, quadratum AE, in quo diameter BF. Deinde ex C, D, ducantur ipsis AF, BE, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, K, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secent rectas CG, DH, in P, Q. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum AC, CD, BD. Quoniam igitur recta AC, dupla est rectæ CD, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati PQ. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB, [a] erit rectangulum sub AB, CB, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, quadruplum erit quadrati PQ. Quia vero æqualia, sunt quadrata NH, PQ, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earum latera HK, IQ, æqualia; [b] ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. [c] Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt. [d] Est autem IO, ipsi ID, æquale. Ergo & QE, eidem ID, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo CO; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati PQ; erit etiam gnomon RST, eiusdem, quadrati PQ, quadruplus; Ac propterea addito quadrato PQ, erit quadratum DO, ex recta BD, quintuplum quadrati PQ, ex recta CD.

[a] 17. sex
[b] 34. pri
[c] 36. pri
[d] 43. pri

ALITER. Cum [e] AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita CB, [e] erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD; Ac rectangulum sub AB, BC, quadruplum est quadrati rectæ CD; (Nam cum sit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [f] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; quod cum, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum sit quadrati rectæ CD; erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum eiusdem quadrati rectæ CD.) Ac propterea rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum quadrati rectæ CD. Igitur & quadratum rectæ BD, quintuplum erit quadrati rectæ CD. Si recta

[e] 6. sex
[f] 17. sex

ergo

ergo linea secundum extremam & mediam rationem secetur; minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplū potest eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonstrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter secetur; & minus segmentum assumens dimidiū maioris segmenti quintuplū possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. Recta illa linea, secta erit extrema & media ratione.

SIT recta AC, diuisa inæqualiter in C, cuius maius segmentum AC, bifariam sectum sit in D; sitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD: Dico rectam AB, diuisam esse in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propos. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est autem & gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ, ex recta CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiusdem quadrati PQ, quadruplus. Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG: At gnomoni RST, æquale est rectangulum CE, vt supra ostensum est. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idem rectangulum CE, sub AB, BC, comprehensum: a Ac proinde erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, ex definitione, secta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod est propositum. a 17. sex

ALITER. Cum AC, diuisa sit bifariam in D, & ei addita GB, b erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectangulū b 6. sec.

sub rectis lineis AB, BC, descriptum, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD; rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Est autem eiusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale est a17.sex *rectangulum sub AB, BC.* [a] *Quamobrem erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde secta erit AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

V THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod à tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque segmentum maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratum AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntque CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon kLM, vna cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectæ BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

b17.sex

ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [c] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atque adeo rectangulum sub AB, BC, bis, vna

c17.sex

cum

cum quadrato rectæ A C, triplum quadrati rectæ A C. Sunt autem quadrata rectarum A B, B C, simul æqualia quadrato rectæ A C, vna cum rectangulo sub AB, B C, bis. Igitur & quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ A C. Quocirca si recta secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodque à minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum. a 27. secũ

SCHOLIVM.

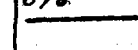
CONVERSVM etiam huius verum est, videlicet.

SI recta linea inęqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmẽti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inaequaliter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectã AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata A D, C H, tripla sint quadrati I F, dempto quadrato I F, erit gnomen KL M, *vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati I F: Est autem gnomen KLM, vna cum quadrato CH, aequalis duobus rectangulis A H, C D. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati I F; Ac proinde cum aequalia sint A H, & C D, erit A H, ipsi I F, aequale. Quapropter cum rectangulum A H, sub A B, B C, aquale sit quadrato I F, recta A C;* b *erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac propterea AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.* b 17. sex

ALITER. cum quadrata rectarum AB, BC, tripla sint quadrati recta AC; c *Sint vero quadrata rectarum AB, BC, aequalia quadrato recta AC, & rectangulo sub AB, BC, bis; erit & quadratum recta AC, vna cum rectangulo sub A B, BC, bis, triplum quadrati recta AC. Dem* c 7. secũ

pto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectangulum sub AB, BC, bis duplum quadrati rectæ AC. Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale quadrato rectæ AC. a Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoq; AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.

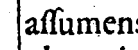


17. sex

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremã & mediam rationẽ secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur quadrati: Et si recta linea inæqualiter secetur, totaq; assumens minus segmentum posit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Dico quadratũ ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmento. b Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC: c Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continue proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectãgulum sub AB, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiusdem quadrati ex AC, quintuplum erit, quod est propositum.



b 8. sec.

c 17. sex

SIT deinde recta AB secta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis, sitque quadratum

ex AD,

ex AD, quadrati ex AC, maiori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectã esse extrema ac media ratione. [a] *Quoniã. n. quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, una cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, una cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplum quadrati ex AC: hoc est, rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC.* [b] *Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C sectã est extrema & media ratione. Quod est propositum.*

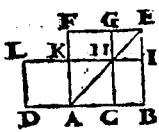
[a] 8. sec.

[b] 17. sex

THEOR. 5. PROPOS. 5. iiij.

SI recta linea secũdam extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secũdum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quę à principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, essęque maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum in H, puncto, per quod agatur ipsi BD, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela DL, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CK, IG, quadrata rectarum AC, BC. Quoniam igitur est vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [c] Erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato CK, rectæ AC. [d] Est autẽ CK, ipsi AL, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi AL; additoque communi BK, erit rectangulum BL, contentum



[c] 17. sex

[d] 36. pri

17.sex sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ A B; a Ac proinde erit vt B D, ad AB, ita AB, ad DA. Quare B D, secatur in A, extrema ac media ratione, estque maius segmentum A B.

ALITER. Quoniam est vt AB, ad AC, hoc est, ad AD, ita AC, ad CB; Erit conuertendo vt DA, ad A B, ita BC, ad CA; & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad C A, hoc est, ad AD. Secta igitur est BD, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis maiori segmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media rõne, detrahaturque ex maiori segmẽto segmentum minus; erit maius segmentum sectũ extrema ac media ratione, & maius segmentum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmẽtum AD, & ex maiori segmento AB, detrahatur recta A C, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum A B, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, & maius segmẽtum esse rectam A C, quæ æqualis est minori segmento A D. Facta enim prioris figura cõstructione, cum sit vt BD, ad AB,

17.sex *ita AB, ad AD, b erit rectangulum BL, contentum sub B D, AD, æquale quadrato BF, recta AB; & ablato cõmuni B K,*

36.pri *erit AL, æquale ipsi IF; c Est autem A L, ipsi C K, æquale. Æquale igitur est I F, contentum sub A B, C B, quadrato*

17.sex *CK, rectæ AC; d Ac proinde erit vt A B, ad A C, ita A C,*

ad

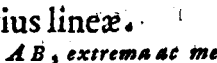
ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentum maius est AC, minus vero segmentum rectæ CB. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; a *erit quoque ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione. Quod est propositum.* a 19.5n

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Eritquoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitque DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF. Cũ enim sit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, eum vtrobique sit proportio dupla; b *erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam; Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE.* c *Quoniam vero est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*



b 19.5n

c 15.5n

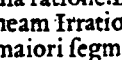
THEOR. 6. PROPOS. 6. vi

SI recta linea Rationalis extrema ac

media

media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. a Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. b Quare commensurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea quæ ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarum CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) c erunt rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur AD, Rationalis potentia tantum, commensurabilis; d erit reliqua AC, Irrationalis, quæ appellatur Apotome.



RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; e erit rectangulum AE, æquale quadrato rectæ AC. Quam ob rem quadratum Apotomæ Ac, nimirum rectangulū AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, f facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

a 1. tertijdec.

b 6. dec.

c 9. dec.

d 74. dec

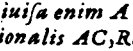
e 17. sex

f 98. dec

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano offendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cũ sit ipsi AC, commensurabilis. a *Quoniam autem quadratum recta BD, quintuplum est quadrati recta CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum;*  b *ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsa recta BD, CD, commensurabilis erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionẽ, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionẽ, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erunt recta BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde si à Rationali BD, detrahatur CD, Rationalis potentia tantum cõmensurabilis;* c *erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*

a 3. terdecimi.

b 6. dec.

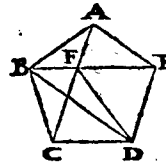
c 74. dec vii.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Aequiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi se intersecãt rectæ BE, AC, recta ducatur ED. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, equalia sunt

late-



lateribus C B, C D, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis cõtenti æquales, ex hypotheſi; [a] erunt & baſes BE, B D, & anguli A E B, CDB, æquales; [b] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia ſint oſtenſa latera BE, BD; Toti igitur anguli A E D, CDE, æquales erunt. Rurſus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoque ipſis contẽti æquales, ex hypotheſi: [c] Erit & baſis BE, baſi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales ſint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; [d] erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac proptereа ſi ipſa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera FE, ED, trianguli F E D, æqualia ſint lateribus FC, CD, trianguli FCD; & baſis communis FD; [e] erunt & anguli dictis lateribus contenti F E D, F C D, æquales: Sunt autem & anguli AEB, BCA, oſtenſi æquales. Aequales igitur ſunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cum angulo AED, oſtẽſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

a 4. pri.
b 5. pri.
c 4. pri.
d 6. pri.
e 8. pri.

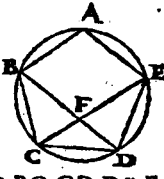
SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi; [f] Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [g] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

f 4. pri.
g 5. pri.

THEOR. 8. PROPOS. 8. xj.

SI peniagoni æquilateri,& æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis,qui sunt deinceps C, D, rectę DB, CE, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari extrema ac media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pentagoni.



[a] Descripto enim circulo circa pentagonum; [b] erũt quinque arcus AB,BC,CD,DE,EA, æquales. Quia vero latera CD,CB,trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC,DE,trianguli DCE;& anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; [c] Erunt & bases DB,CE,& anguli CDB,DCE,æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF,duo anguli FCD,FDC,sint æquales,[d] & ipsis æqualis sit externus angulus BFC:erit angulus BFC,duplus anguli DCE:[e] Est autẽ & angulus BCE, eiusdem anguli DCE,duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt: [f] Ideoque recta BF,lateri pentagoni BC,æqualis. [g] Quoniam autem anguli DBC,ECD, arcubus æqualibus insistentes æquales sunt;erunt duo anguli DBC,CDB,trianguli BCD,æquales duobus angulis DCF,FDC, trianguli CFD. [h] Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD,[i] Quare erit vt BD,ad DC,hoc est,ad BF, æqualem ipsi DC,ita CD,hoc est,sibi æqualis BF, ad FD; Ac proterea BD,secta est in F,extrema ac media ratione,estq; maius segmentum BF,lateri pentagoni æquale,vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in [i],extrema ac media ratione, maiusque illius segmẽtum

a 14. quarti.
b 28. tert
c 4. pri.
d 32. pri.
e 33. sext
f 6. pri.
g 27. tert
h 32. pri.
i 4. sexti

EF,

EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelam esse opposito lateri: hoc est, BD, parallelam esse lateri AE, & CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum,

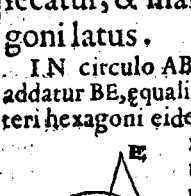
22. ter a *Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales, erunt etiam A, & AEC, duobus rectis*

28. pri *æquales:* b *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositum.*

THEOR. 9. PROPOS. 9.

ix. SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectũ addatur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidem circulo inscripti. Dico EA, rectam sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusque segmentum esse EB, latus hexagoni. Ducatur enim ex A, per centrum D, diameter AC, coniungaturque rectę DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripherię circuli: continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies: Ac proin



33. sex de arcus BC, quadruplus erit arcus AB. c Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni: (est

enim

enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4. [a] erunt & anguli BDE, BED, æquales: [b] quibus cum æqualis sit externus ABD: erit angulus ABD, duplus anguli BED: [c] Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erũt anguli BED. [d] Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC, erit angulus BDC, quadruplus eiusdẽ anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD, [e] erunt triangula ADE, ABD, æquiangula. [f] Igitur erit vt EA, ad AD, hoc est, ad EB, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, EB, sibi æqualis ad BA: Atque idcirco recta EA, secta est in B, extrema & media ratione, estque maius segmentum BB, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum.

a 5. pri.
b 32. pri
c 5. pri.
d 32. pri
e 32. pri
f 4. sex.

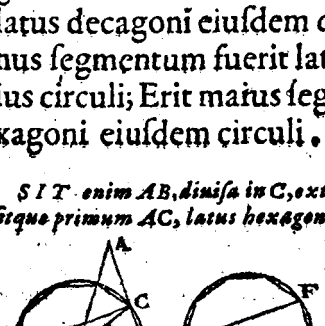
SCHOLIVM.

QVIA vero demonstrauimus ad propos. 5. huius lib. si minus segmentum linea diuisa extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur, maius segmentum secari quoque extrema & media ratione, eiusque segmentum maius esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni, secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propos. 5. huius lib. ostendimus. Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile cum Campano demonstrabimus. Videlicet.

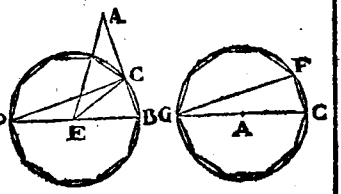
SI lineæ diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentū latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

SIT enim AB, diuisa in C, extrema & media ratione, sitque primum AC, latus hexagoni circuli BCD. Dico minus segmentum CB, esse eiusdem circuli latus decagoni. Capiatur enim BC, in circulo, ita vt CA, extra eiculum cadat. Et ducta ex B, per centrum E, diametro BED, connectantur rectæ EA, EC. Quia ergo est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; & est AC, latus hexagoni æquale semidiametro EB, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Erit quoque vt AB ad BE, ita EB, ad BC, [a] *ideoque triangula ABE, EBC, æquiangula erunt, cum habeant latera circa cōem angulum B, proportionalia; eritq; angulus A, angulo BEC, æqualis. Rursus quia latera CA, CE, æqualia sunt, nempe latera hexagoni;* [b] *erunt anguli CAE, CEA, æquales;* [c] *quibus cum æqualis sit externus BCE, erit BCE, duplus anguli A:* [d] *Est autem angulo BCE, angulus CBE, ob æqualitatem laterum EB, EC, æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli A; Ac proinde duo anguli BCE, CBE, simul quadrupli erunt eiusdem anguli A.* [e] *Cum ergo angulis BCE, CBE, æqualis sit externus CED; erit quoque angulus CED, eiusdem anguli A, & propterea anguli BEC, qui æqualis ostensus est angulo A, quadruplus.* [f] *Quare & arcus CD, quadruplus erit arcus BC; Ac proinde arcus semicirculi BCD, eiusdem arcus BC, quintuplus*



6. sex.
5. pri.
32. pri
5. pri.
32. pri
33. sex

exiſtet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus BC. Quapropter recta BC, latus eſt decagoni.

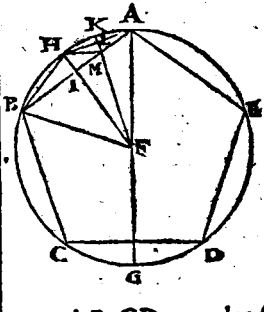


SIT deinde CB, minus ſegmentum, latus decagoni circuli BCD. Dico maius ſegmentum AC, eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus BC, in circulo BCD; ducaturque diameter BED. Deinde interuallo AC, deſcribatur circulus CFG, cuius diameter CAG; eritque ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. AC, latus hexagoni circuli CF. Quoniam igitur AB, ſecta eſt in C, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum AC, latus hexagoni circuli CFG; erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentũ CB, latus decagoni eiuſdem circuli CFG. Deſcribatur ergo in circulo CFG, decagonum æquilaterum & æquiangulum CFG; Item in circulo BCD, decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; eruntque latera BC, CF, inter ſe æqualia. Quoniã vero, ſi connectantur rectæ CD, FG, anguli CDB, FGC, ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtendimus, quod inſiſtãt arcubus ſimilibus BC, CF, nempe decimis partibus peripheriarum; & ſunt quoque anguli BCD, CFG, in ſemicirculis æquales, a *nimirum recti;* b *Erunt quoque latera BD, CG,* a 31. ter
inter ſe æqualia. Quam ob rem cum diametri BD, CG, ſint æquales, æquales quoque erunt circuli BCD, CFG. Ac proinde, cum recta AC, ſit latus hexagoni circuli CFG, erit quoque eadem recta AC, latus hexagoni circuli BCD. Quod eſt propoſitum. b 36. pri

THEOR. 10. PROPOS. 10. X.

SI in circulo pentagonum ęquilaterum deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, descriptum, sit pentagonum æquilaterũ. Dico quadratum lateris AB, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vna cum quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur enim diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiso deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, secans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, secans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quæ recta ducatur HM. Quoniã igitur arcus AH, BH, æquales sunt; [a] erunt & anguli ipsis insistentes AFH, BFH, æquales. Quare cum latera AF, FI, trianguli AFI, æqualia sint lateribus BF, FI, trianguli BFI, & anguli ipsis contenti æquales quoque; [b] erunt & bases AI, BI, æquales, & anguli AIF, BIF, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ AL, HL, & anguli ALF, HLF, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus ABCG, AEDG, demantur æquales arcus ABC, AED; relinquentur arcus CG, DG, inter sese æquales, ideoque erit arcus CG, dimidium arcus CD. Est autem & arcus AH, dimidiũ arcus AB. Igitur cum arcus AB, CD, æquales sint; erunt quoque eorum dimidij arcus CG, AH, æquales; Ac proinde cum arcus AH, duplus sit arcus HK, erit & arcus CG, duplus eiusdem arcus HK. Eodem modo, quia arcus AB, BC, æquales sunt, & est arcus AB, duplus arcus BH, erit etiam, arcus BC, eiusdem arcus BH, duplus. Quare arcus CG, BC, æquemultiplices sunt, nempe dupli, arcuum HK, BH; [c] Ac propterea totus arcus BG, duplus quoque erit totius arcus BK, [d] & idcirco angulus quoque BFG, duplus anguli BFK. [e] Sed quia idem angulus BFG, ad centrum duplus est quoque anguli FAB; erunt idcirco anguli BFM,



a 7. ser

b 4. pri.

c 1. 6n. d 33. sex e 20. 3 r

FAB,

FAB, æquales; a Ac propterea triãgula ABF, FBM, cum habeãt angulos FAB, MFB, æquales, & angulum ABF, communem, æquiangula erunt. b Quocirca erit vt AB, ad BF, ita BF ad BM; c ideoque rectangulum sub AB, BM, æquale erit quadrato rectæ BF. a 32. pri. b 4. sex. c 17. sex

RVRSVS quia latera AL, LM, trianguli ALM, æqualia sunt lateribus HL, LM, trianguli HLM, & anguli quoque ipsis contenti æquales, nempe recti; d erunt & bases AM, HM, & anguli LAM, LHM, æquales: e Est autem angulus LAM, angulo HBA, æqualis, quod & latera HA, HB, æqualia sint. Igitur & angulus LHM, eidem angulo HBA, æquals erit; f Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erunt. g Quam ob rem erit vt AB, ad AH, ita AH, ad AM; h ideoque rectangulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostensum est autem & rectangulum sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarum BF, AH. i At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum. d 4. pri. e 5. pri. f 32. pri. g 4. sex. h 17. sex. i 2. secũ.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam, quę ex centro diuidit arcum quempiã bifariã, diuidere quoque rectã illi arcui subtẽsam bifariã, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

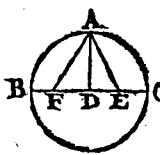
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pentagoni ductam diuidere & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos: Demonstratum enim est,

diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppositum CD, subtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum transeat per centrum, secabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonstratio erit in omni polygono æquilatero in circulo descripto, si numerus laterum fuerit impar, vt constat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemeo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum aquilaterũ describitur, eiusque demonstrationem in hunc locum distulimus; paucis nunc a nobis ea demonstranda est. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF, adiungaturque recta AF. Dico rectam AF, esse latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim



a 6. sec. *CD, secta sit bifariam in E, eique addita DF, a erit rectangulum sub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoque quadrato rectæ EA, quæ ipsi EF,*

b 47. pri *est æqualis. b Est autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum sub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale est quadratis rectarũ AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum sub CF, DF, æquale quadrato rectæ*

c 17. sex *AD, hoc est, quadrato rectæ CD. c Quam ob rem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF, propterea que recta CF, diuisa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius segmentum CD, sit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propos. 15. lib. 4. erit minus segmentum DF, latus decagoni eiusdem circuli, vt demonstrauimus ad propos. 9. huius lib. d Rursus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, vna cum quadrato lateris decagoni DF, æquale est quadratum lateris pẽtagoni eiusdem circuli; e Est autem eisdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF; ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.*

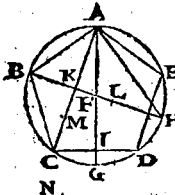
d 10. ter tij decimi.

e 47. pri

THEOR. 11. PROPOS. 11. xii.

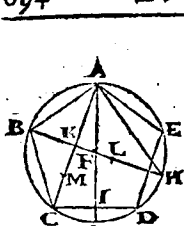
SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo A B C D E, habente diametrum Rationalem; describatur pentagonum æquilaterum A B C D E. Dico eius latus A B, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri A G, B H, secetque A G, latus C D, in I, connectanturque rectæ A C, A H, quarum A C, secet diametrum B H, in K. Abscindatur quoque ex semidiametro F H, quarta eius pars F L: Item ex recta A C, quarta eius pars C M. Quia igitur diameter B H, ponitur Rationalis; erunt quoque FL, BF, illi commensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota BL, composita, [a] cum sit commensurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit. [a] 16. dec



RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta secat arcum AC, bifariam in B; secabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG, rectam C D, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo ACI, AFK, cum habeant angulos A I C, AKF, rectos, & angulum CAI, communem, [b] æquiangula inter se erunt. [c] Quamobrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA, siue ad FH, ipsi FA, æqualem. [d] Vt autem CA, ad FH, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc est, vt CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad FL; Atque componendo, vt CD, CK, simul ad CK, ita Fk, FL, simul, nimirum recta KL,

[b] 32. pri
[c] 3. sex.
[d] 15. qu



ad FL; a Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratū rectæ KL, ad quadratū rectę FL. Quia vero ſiAC, ſecetur extrema ac media rõne, (ducta videlicet recta BD,) b maius eius ſegmentum æqualę eſt lateri pentagoni, nimirū ipſi c CD; Erit quadratum rectę cõpoſitæ ex CD, maiori ſegmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ ſcilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL, d ideoque quadratum rectæ KL, commenſurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commenſurabiles quõque erunt, ſaltem potentia: Eſt autem FL, oſtenſa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

a 2. ſex

b 8. tertij decimi.

c 1. tertij decimi.

d 6. dec.

DEINDE quia qualium partium 4. eſt BF, talium 1. eſt FL; ac propterea qualium 5. eſt BL, talium 1. eſt FL: erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. eſt quadratum rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25.) e habent enim quadrata proportionem laterum duplicatam.) Qualium vero partium 1. eſt quadratum rectæ FL, talium 5. oſtenſum eſt quadratum rectæ KL. Qualium igitur 25. eſt quadratum rectæ BL, talium 5. eſt quadratum rectæ KL; ac proinde quadratū rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratū, (vt patet ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Eſt enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) f Erunt rectæ BL, KL, longitudine incommenſurabiles: ideoque, cum oſtēſæ ſint Rationales, erunt Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex Rationali BL, dematur Rationalis KL, potentia tantum commenſurabilis; g erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei vero congruens erit KL.

e 20. ſex

f 9. dec.

g 74. dec

IAM vero recta BL, poſſit plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum KL, & N; Qualium autem

partium

partium 5. fuit quadratum rectæ B L, talium 1. fuit quadratum rectæ KL. Erit reliquum quadratum rectæ N, talium partium 4. qualium 5. est quadratum rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum B L, & N, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. a Quare commē surabilia erunt; propterea quæ rectæ ipsę B L, & N, commensurabiles, saltem potentia; Est autem BL, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum BL, & N, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quæ 5. ad 4.) b Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potētia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta B L, Rationalis longitudine sit commensurabilis Rationali BH; (Qualium enim partium 8. est BH, talium 5. est BL,) possitque plus, quam congruēs KL, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

a 26. dec.

b 9. dec.

POSTREMO quia recta A B, est media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propos. 8. lib. 6. (quod triangulum ABH, c habeat angulum BAH, rectum, à quo ducta est A K, ad basin perpendicularis) d erit quadratum rectæ AB, æquale rectāgulo sub BH, BK. Quocirca cū superficiem contentam sub Rationali B H, & Apotoma quarta BK, possit recta linea AB; e Erit A B, linea Minor, &c. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c. Quod erat demonstrandum.

c 31. ter

d 17. sex

e 95. dec

THEOR. 12. PROPOS. 12. viij.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus, potentia triplū est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo A B C, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur A B C. Dico quadratum lateris

AB, triplum esse, quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ secet, ex coroll. 2. propos. 10. huius lib. arcum BC, bifariam in E, & rectam BC, bifariam quoque, & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus BC, sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque coniuncta recta BE, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres sextas partes totius circuli; arcus vero AB, cum sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit eiusdem circuli. Igitur arcus BE, sexta pars est eiusdem, ac proinde recta BE, latus est hexagoni, & æqualis semidiametro DE, ex coroll. propos. 15. lib. 4. [a] Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale est quadratis rectarum AB, BE, [b] quod angulus ABE, in semicirculo rectus sit; Est autem quadratum rectæ AE, quadruplum quadrati rectæ BE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla sit lineæ BE; erunt quadrata rectarum AB, BE, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ BE; Ac proptereà qualium partium 4. sunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ AB. Quare quadratum rectæ AB, triplum est quadrati rectæ BE, quæ æqualis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 47. pri

b 31. ter

COROLLARIVM. I.

SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti. Nam cum latus AB, extensum sit potentia triplum semidiametri AD, posito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atque adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum est quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET

ET quia ex corol.1.propos.8.lib.6.vt est AE,ad AB, ita se habet AB,ad AF;erit quoque latus trianguli æquilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad basim demissæ potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib.14. propos.13.

COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi potest,semidiametrum DE, bifariam secari in F,a latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ EF;si ponatur quadratum rectæ AB, partium 12.erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. a Est autem quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4.erunt quadrata rectarum BF, FE. Est autem taliũ partium 3.quadratum rectæ BF, (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF,ex scholio propos.4.lib.2.Est enim AB,dupla ipsius BF.) Igitur talium 1.erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE,hoc est,quadratum rectæ DE, sibi æquale,quadruplum erit quadrati rectæ FE.Igitur ex scholio propo. 4.lib.2.recta DE,dupla erit ipsius FE.Quocirca DE, bifariam secatur in F. a 47.pri

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonstrabitur hoc theoremate proposito.

SI in circulo triangulum æquilaterum describatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque vicissim bifariam,& ad angulos rectos secabitur a latere opposito.

IN circulo ABC,cuius centrum D,triangulum aquilaterum inscribatur ABC. Dico rectam AE, per centrum D, ductam, hoc est, diametrum, secare bifariam & angulum BAC,& latus BC,necnon ad angulos rectos;Semidiametrũ quoque DE,secari a latere BC,bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis BD,CD,BE;cum latera AB, AD,

æqualia

æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli CAD; & bases BD, CD, æquales quoque: a *Erunt anguli BAD, CAD, æquales. Quod est primum.*

a 8. pri.

DEINDE, cum latera AB, AF, trianguli BAF, æqualia sint lateribus AC, AF, trianguli CAF, & anguli ipsis contenti æquales ostensi: b *Erunt & bases BF, CF, & angulo ad F, æquales, ideoque recti. Quod est secundum.*

b 4. pri.

POSTREMO, cum anguli BAE, CAE, demonstrati sint esse æquales; c *erunt & arcus BE, CE, æquales. Quare cum BEC, arcus sit tertia pars circumferentiæ, erit BE, sexta pars eiusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque semidiametro proinde BD, æqualis, ex coroll. propos. 15. lib. 4.* d *Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales sunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune;* c *Erunt & latera DF, EF, æqualia. quod est tertium.*

c 26. ter

d 5. pri.

c 26. pri

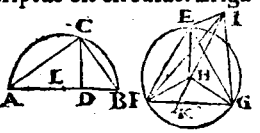
xiii. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT datæ sphæræ diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB; & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AD, ipsius DB, dupla; at vero AB, eiusdem DB, tripla; & ipsius AD, sesquialtera. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis sit ipsi DC, describatur circulus EFG, cuius centrum H, in quo triangulum æquilaterum inscribatur EFG, adiunganturq; rectæ HF, HG, quæ singulæ æquales erunt ipsi DC, cum æquales sint ipsi

HE,

HE, ad cuius interuallum describetur est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico solidum



contentum quatuor triangulis FEG, IEF, IFG, IEG. esse Pyramidem, siue Tetraedrum. Quoniam enim latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 11. [a] erit basis AC, basi IE, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam AC, æqualem esse rectis IF, IG. Rursus quia tres lineæ AD, DC, DB, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propos. 20. lib. 6 vt AD, ad DB, ita quadratum rectę AD, ad quadratum rectæ DC; & componendo, vt AB, ad DB, ita quadrata rectarum AD, DC, simul ad quadratū rectæ DC: [b] Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectę AC. Igitur erit quoque vt AB, ad DB, ita quadratum rectæ AC, ad quadratum rectæ DC; Ac proinde cū AB, sit ipsius DB, tripla, erit quoque quadratum rectę AC, triplum quadrati rectę HE, cum HB, æqualis sit ipsi DC: [c] Atqui & quadratum rectę EF, triplum quoque est eiusdem quadrati rectę HE. Quadratum ergo rectę AC, quadrato rectę EF, æquale erit; & propterea recta AC, rectę EF. Quare cum recta AC, ostensa quoque sit æqualis rectis IE, IF, IG; erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter AB; & diametrum sphæræ AB, potentia sesquialteram esse lateris EF, vel AC.

[a] 4. pri.

[b] 47. pri

[c] 12. terdecimi.

EXTENDATVR perpendicularis IH, vsque ad K, vt sit HK, ipsi DB, & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres IH, HE, HK; erunt quoque IH, HE, HK, proportionales. Quare cum HE, sit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK, semicir-

micirculus circa I K, descriptus in plano rectarum I K, HE, transibit per E, vt mox ostendetur; Eodemque argumento tam semicirculus circa eandem rectam IK, descriptus in plano rectarum IK, HF, transibit per F, quam semicirculus circa eandem I K, descriptus in plano rectarum IK, HG, per G. Igitur quilibet horum semicirculorum, circumductus, manente fixa diametro, sphæram describet, quæ constitutum Tetraedrum complectitur, cum per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc sphæra descripta æqualis sit sphæræ datæ, quod diameter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehendetur idem Tetraedrum sphæra data.

QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales sunt, ex coroll. propos. 8. lib. 6, erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem recta AB, sesquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. est AB, talium 2. sit AD. Igitur & quadratum rectæ AB, sesquialterum erit quadrati rectæ AC; Ac propterea cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis; perspicuum est, diametrum sphæræ potentia sesquialteram esse lateris Tetraedri, seu pyramidis. Pyramidem ergo constituimus, & data sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

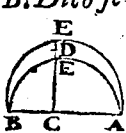
LEMMA.

QVOD autem semicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, descriptus, transeat per E, facile demonstrabitur hoc proposito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectam descriptus transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico semicirculum circa AB, descriptum transire per D. Nam si transeat citra D, vel vltra, nimirum per punctũ E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propos. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quã quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo sub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarũ CD, CE, inter se æqualia, & ipsæ rectæ CD, CE, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Transibit ergo semicirculus per D.*

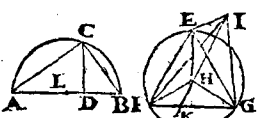


a 17. se

HINC manifestum est, semicirculum in superiori figura descriptum circa IK, in plano rectarum IK, HE, transire per E, cum HE, sit ad Ik, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadruplam sesquialteram semidiametri circuli circa basim pyramidis descripti. Cum enim diameter sphæræ AB, ostensa sit potentia sesquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualium 9. est quadratum rectæ AB: At qualium partiũ 6. est quadratum rectæ EF, talium partium 2. est quadratum rectæ HE, [b] quod quadratum rectæ EF, triplum sit quadrati rectæ HE. Qualium igitur partium 9. est quadratum rectę AB, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter sphæræ AB, potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri HE, cum proportio quadratorum sit, quæ 9. ad 2.



b 12. te tijdec.

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis py

ramidis

ramidis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Sit enim L, centrum semicirculi ACB, eritque L, centrum quoque sphæræ. Dico rectam L D, (quæ nimirum ex centro sphæræ ad basin EFG, ducitur perpendicularis; cum AD, æqualis sit ipsi IH, & ideo punctum D, idem quod H, quemadmodum & L, idē est, quod centrum sphęræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe rectæ A B, & tertiam partem semidiametri A L. Quoniam enim AD, dupla est ipsius DB; Qualium partium 4. est AD, talium 2. erit DB: ac proinde talium 6. tota A B, & semidiameter AL, talium 3. Quare si AD, est 4. & A L, erit LD, 1. & idcirco LD, sexta pars erit rectæ A B, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ A L, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis H I, duas tertias partes continebit ipsius diametri. Est enim HI, eadem, quę AD, continens duas tertias diametri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nam proportio 9. ad 4. est duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponantur que, vt hac figura indicat, facile ex ipsis rite inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundū totam soliditatem. Hanc vero praxim, & sequentes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regularia in materia quauis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.

XV. PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem; & demonstrare, quod sphęræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

SIT sphæræ, quæ constitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB, & ex centro D, ad A B, perpendicularis ducatur

tur DC, connectanturque rectæ AC, BC, [a] quæ æquales inter se erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis sit ipsi AC, vel BC, describatur super eam quadratum EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, se mutuo secantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum sint semidiametri circuli circa quadratū descripti, vt in 4. lib. demonstratū est. Deinde ex I, in vtramq; partē ad planū quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipsi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico solidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, esse octaedrum, quod quæritur. Quoniam enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia sunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipsis contenti, recti; (ipse quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod sit æqualis angulo GIH, sibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & basium EH, GH.) [c] Erit & basis EK, basi EH, æqualis; Eodemque modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula esse æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia sint lateribus quadrati EFGH, singula singulis. Constitutum igitur iam est octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi sphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis constructa comprehenditur; & diametrum sphæræ AB, potentia duplam esse lateris EF, vel AC.

[a] 4. pri.

[b] 8. pri.

[c] 4. pri.

QVONIAM enim IE, perpendicularis est ad KL, ex 3. defin. lib. 11, & media proportionalis inter segmenta KI, IL; (quod tres rectæ KI, IE, IL, æquales sint, ideoque eandem habeant proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL, IE, descriptus transibit per punctum E, ex lemmate præcedentis propos. Eadem ratione semicirculus descriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum est de punctis G, H. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, describet

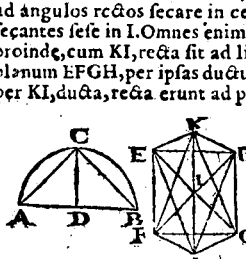
scribet sphæram, quæ complectitur octaedrum constitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hæc sphæra æqualis sit datæ sphæræ, cuius diameter AB; (Nam cum rectæ AC, EF, æquales sint, ideoque ipsarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC, duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ FE, quadrati rectæ EI; Erunt & rectæ AD, EI, hoc est, KI, semidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde sphæræ ipsarum æquales existent.) comprehendetur idem octaedrum data sphæra.

[a] 47. pri

QVIA vero quadratum rectæ AB, [a] æquale est quadratis rectarum AC, BC, quæ æqualia sunt; erit quadratum rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cum AB, sit diameter sphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifestum est, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris octaedri. Itaque octaedrum constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

EX dictis manifestum est, in octaedro tres diametros se mutuo ad angulos rectos secare in centro sphæræ: quales sunt KL, EG, FH, secantes sese in I. Omnes enim anguli ad I, ostensi sunt recti. Atque proinde, cum KI, recta sit ad lineas EG, HF: [b] recta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductum: Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt: Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantque angulos rectos, eo quod (cum quadratum diametri sphæræ duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus,) quadratum diametri HF, æquale existit quadratis laterum octaedri Fk, kH. [d] Ita enim efficitur, vt angulus F k H, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.



[b] 4. vndecimi. [c] 18. vndecimi. [d] 48. pri

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum E F G H, vertices vero

K &

K,& L;altitudines denique,ſemidiametri IK,IL:cuiuſmodi ſint pyramides EFGHk.EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius,vt conſtat,cum ſint triangula æquilatera,& æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

COROLLARIVM. III.

SI tetraedrũ,& octaedrum in eadem ſphæra deſcribantur,erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri ſphæræ diuiſum in ſex partes. a Quoniam igitur diameter ſphæræ eſt potentia ſeſquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4.qualium 6.eſt quadratum diametri ſphæræ. b Rurſus quia diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris octaedri,erit quadratum lateris octaedri talium partium 3.qualium 6.quadratum diametri ſphæræ.Igitur cum talium partium 4.ſit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. eſt quadratum lateris octaedri;perſpicuum eſt,latus tetraedri potentia ſeſquitertium eſſe lateris octaedri.

a 13.*ter tij dec.*

b 14.*ter tij dec.*

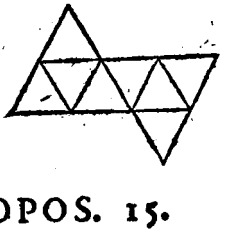
COROLLARIVM IIII.

DENIQVE,quia in quadrato EFGH,recta EH,parallela eſt rectæ FG;& in quadrato ELGK, recta EK,rectæ GL:c Erit planum EHk, per EH,EK,ductum plano FGL,per FG,GL,ducto parallelum.Cum igitur eadem ſit ratio de cæteris baſibus octaedri, efficitur, baſes octaedri oppoſitas inter ſe parallelas eſſe.

c 15.*vn decimi.*

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hac figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſeſe complicatis componetur octaedrum ſecundum totam ſoliditatem, vt ait Albertus Durerus.



PROBL. 3. PROPOS. 15. xiiij.

CVBVM conſtituere : & ſphæra complecti, qua & priores figuras ; & demonſtrare,quod ſphęræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Super rectam EF, quæ rectæ BC, sit æqualis, quadratum cõstituatur EFGH, super quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipsi BC, quarum extrema coniungantur rectis IK, kL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planum EFGH, rectæ sunt; a erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis posita sit ipsi BC, hoc est, ipsi EF. b Igitur & EF, IK, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammum est EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales sint ipsi EF, omnes quatuor lineę æquales existunt: c Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales sint oppositis angulis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, d cum simile sit & æquale quadrato opposito EFGH. Est enim EL, solidum parallelepipedum, e quod eius plana opposita sint parallela, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi sphęra diametri AB. Sint enim planorum oppositorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM, HL, per quas ducantur plana EkLH, FIMG. f Quia igitur tam planũ EKLH, quã FIMG, cubũ bifariã secat; vtrumque per centrum cubi transibit, ex scholio propos. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiusdem propos. se mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum sectio, recta scilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana EKLH, FIMG, rectangula sunt, (Cum enim HE, perpendicularis sit duabus rectis EI, EF,

ob

6. vndecimi.
33. primi
34. primi
d 24. vndecimi.
e 15. vndecimi.
f 28. vndecimi.

ob quadrata EM, EK; [a] perpendicularis quoque erit ad planum EK, ideoque & ad rectam EK, ex defin. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus est HEK. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, necnon & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo sunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera vnius æqualia sint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, vt constat ex scholio propos. 24. lib. 1. Ac proinde & semidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI. æquales erunt. Quare semicirculus circa EL, ex centro P, descriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, sphæram describet per omnes cubi angulos transeuntem; quam quidem æqualem esse sphæræ diametri AB, ita demonstrabitur. [a] 24. vndecimi.

CVM quadratum rectæ EK, [b] æquale sit quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FK, ac proinde duplum quadrati rectæ EF, hoc est, quadrati rectæ KL: Erunt quadrata recarum EK, KL, tripla quadrati rectæ KL. [c] Est autē quadratis rectarum EK, KL, æquale quadratum rectæ EL, quod angulus EKL, sit rectus in rectangulo EKLH. Igitur & quadratum rectæ EL, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc est, quadrati rectæ BC: At vero eiusdem, quadrati rectæ BC, triplum est quadratum rectæ AB. (Nā tres rectæ AB, BC, BD, proportionales sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt est AB, ad BD, ita erit quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipsius BD, sit tripla, : erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum. (Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia sunt; ac propterea ipsæ rectæ EL, AB, diametri nimirum sphærarum, ideoque & ipsarum sphæræ æquales existunt. [b] 47. pri [c] 47. pri

QVIA vero ostensum est quadratum diametri BL, triplum esse quadrati lateris cubi KL, manifestum est, diametrum sphęrę potentia triplam esse lateris cubi. Quocirca cubum constituimus, & sphæra complexi sumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonstratione huius problematis manifestum est, omnes diametros cubi inter se esse æquales, seseque mutuo bifariam in centro sphæræ secare. Atque eadem ratione rectas, quæ centra quadratorum oppositorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonstratum enim est, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales esse, seseque mutuo bifariam secare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppositorum GHML: EFkI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione ostendetur. Duo anguli OPP, OPF, trianguli OFP, æquales sunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis est alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ sunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum E F k I, GHML, c & angulus OPF, æqualis est opposito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum sint semidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erunt; ac proinde recta NO, bifariam secabitur in P. Eademque est ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppositorum.

a 29. pri
b 16. undecimi.
c 15. pri

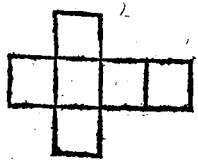
COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri sphæræ, seu cubi, æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul sumptis. d Nam qualium partium 9. est quadratum diametri, talium 6. est quadratū lateris tetraedri: e Qualium vero partium 9. est idem quadratum diametri, talium 3. est quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi simul sunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri. Ac proinde quadratum diametri æquale est quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifestum est ex semicirculo circa diametrū sphæræ descripto, in quo latus tetraedri est AC, cubi vero BC. f Perspicuum autem est, diametrum sphæræ A B, posse & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, sit rectus.

d 13. ter sij dec.
e 15. ter sij dec.
f 47. pri.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur sex quadrata inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, facile componetur cubus secundum totam soliditatem, si dicta quadrata rite complicentur inter se. Efficietur enim ex illis figura quædam solida octo angulos solidos continens instar tesserae cuiuspiam, vt constat.



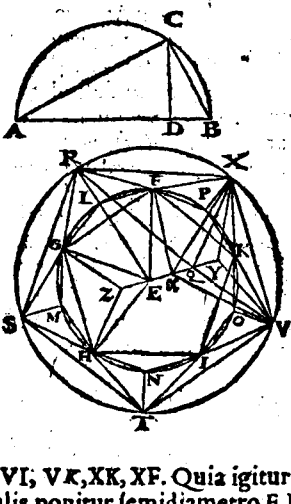
PROBL. 4. PROPOS. 16. xvj.

ICOSAEDRVM constituere: & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras; & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quam semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla; & ipsius AD, sesquiquarta; At vero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, fit æqualis, circulus describatur ex centro E; [a] in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P; connectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex centro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntque omnes inter se æquales; [b] sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas coniungunt, nempe EL, QR, EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus.) [c] binæ inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectæ BC. [d] Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademque ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, cõuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quæ ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planum per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per

[a] 11. quarti.
[b] 6. vndecimi.
[c] 33. pri
[d] 15. vndecimi.

QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R, S, T, V, X, rectis AS, ST, TV, VX, XR. a Quia igitur LR, PX, æquales sunt, & parallelæ; si concipiatur duci recta LP; b erunt quoque LP, RX, æquales & parallelæ; c Ac proinde in circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP, quintam partem circuli FGHIK, nempe duas decimas partes FL, FP. Igitur & RX, quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prorsus argumento concludemus, reliquas rectas RS, ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pentagonum æquilaterum est RSTVX, omnia latera, æqualia habens lateribus pentagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pētagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur semidiametro EF, hoc est, lateri hexagoni circuli FGHIK, & est LF, latus decagoni; d erit quadratum lateris pentagoni eiusdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF. e Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus sit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale est quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pentagoni LP, seu FG, hoc est, ipsi RX, æqualis erit. Eademq;



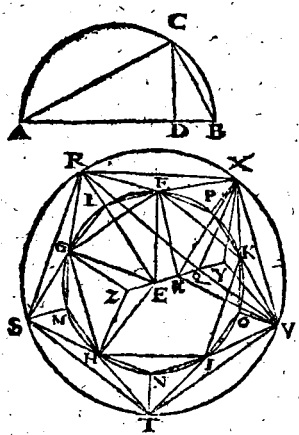
a 6. undecimi.
b 33. primi
c 28. tertiæ
d 10. tertiædecimi.
e 47. primi

ratione erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriusque pentagoni æquales; Ac propterea decem triangula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter se æqualia; cum eorum omnia, latera æqualia sint lateribus pentagoni æquilateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramque partem extendatur, sintque rectæ QY, EZ, æquales singulæ lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniã ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; a erit quadratum lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarum QX, QY; b Est autem eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta; ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectę XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non diximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiameter, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus,) quæ omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturq; singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit

a 10. 13 tij dec.
b 47. pri

ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphęra diametri A B.

DIVISA enim recta E Q, bifariam in α, ducantur rectæ α F, α X, α V. Quoniam igitur latera α Q, Q V, trianguli α Q V, æqualia sunt lateribus α Q, Q X, trianguli α Q X, cum Q V, Q X, sint semidiametri circuli R S T V X: Sunt autem & anguli α Q V, α Q X, æquales, nempe
14. pri. recti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & bases α V, α X, æquales. Eademque ratione, si ducantur rectæ ex α, Q, ad R, S, T, ostendentur rectæ α R, α S, α T, æquales & inter se, & ipsis α V, α X. Rursus quia latera α Q, Q X, trianguli α Q X, æqualia sunt lateribus α E, E F, trianguli α E F, cum Q X, E F, sint semidiametri circulorum æqualium, & E Q, diuisa sit bifariam, in α: Sunt autem & anguli α Q X, α E F, æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11.



4. pri. Erunt quoque, bases α X, α F, æquales: eodemque modo si ex α, E, ad G, H, I, K; rectæ ducantur, ostendentur α G, α H, α I, α K, æquales ipsi α X; Ac proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales sunt. Quoniam vero Q E, semidiameter est, hoc est, latus hexagoni circuli F G H I K; & E Z, latus decagoni eiusdem circuli; c erit Q Z, diuisa in E, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit Q E. Quare minus segmentum Z E, assumens E α, dimidium maioris segmenti, hoc est, recta α Z, d quintuplum poterit

c 9. tertij dec. d 3. tertij dec.

eius

eius, quod ex Eα, describitur, quadrati: Potest autem & recta αF, quintuplum eiusdem quadrati rectæ Eα. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum sit quadrati rectę αE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla sit ipsius Eα; erunt quadrata rectarum EF, Eα, simul quintupla quadrati rectæ Eα. a Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale sit quadratum rectæ AF; erit quoque quadratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zα, Yα, æquales fiunt.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrũ ZY, ex centro α, per omnes angulos Icosaedri constituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphæræ diametri AB. a 47. p

b CVM enim sit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipsius αZ, ad QE, duplam ipsius αE; c Ac propterea vt quadratũ rectæ αZ, ad quadratum rectæ αE, ita quadratum rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratum rectæ αZ, ostensum quintuplum quadrati rectæ αE: erit quoque quadratum rectę YZ, quintuplum quadrati rectę QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectæ BC: Est autem & eiusdẽ quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existente AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt. b 15. d c 22. se

QVONIAM denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendũ est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur.) potestque quintuplum quadrati rectæ BC, hoc

est,

est, rectæ illi æqualis E F; erit quoque semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum, A B, E F, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. a erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, latus pentagoni, hoc est, latus Icosaedri, b Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icosaedrum igitur constituimus, & sphæra sumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonstrauimus, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. quod erat faciendum.

6. dec.

11. ter j deci.

COROLLARIVM I.

EX dictis infertur, sphæræ diametrum esse potentia quintuplam semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex quo scilicet Icosaedrum constitutum est, & qui per quinque Icosaedri angulos incedit. Ostensum enim est quadratum diametri AB, quintuplum esse quadrati rectæ BC, hoc est, semidiametri EF.

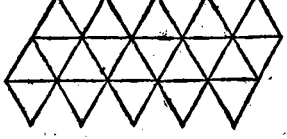
COROLLARIVM II.

ITEM manifestum est, sphæræ diametrum esse compositam ex latere hexagoni, hoc est, ex semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli: Nam YZ, diameter sphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icosaedri opposita, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidem rectæ LP, sit quoque parallela recta HI, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus H L, I P: continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademq; est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLIVM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

DO-

xvii.

PROBL. 5. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra complecti, qua & prædictas figuras; & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratum ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit communis horum sectio recta AD, (Insistūt enim omnes bases cubi sibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus constitueretur, erectæ sunt ex angulis basis EFGH, quatuor lineæ E I, F K, G L, H M, ipsi basi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere potest ex figura propositionis 15. huius lib.[a] Quare & bases cubi per ipsas ductæ, rectæ erunt ad eandem basin EFGH.) Diuisis itaque cūctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quæ rectis connectantur secantibus sese in O, P, centris quadratorum, vt constat ex demonstratione octaui problematis lib. 4. Secentur O K, P L, P N, extrema ac media ratione in punctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales segmentis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, esse vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri constituendi. Quod enim pentagonum ATDVX, sit in vno plano, ita ostendetur. Cum RV, SX, sint ad quadratum ADEF, rectæ, [b] ipsæ erunt parallelæ; Ac proinde, cum sint æquales, (quia segmenta maiora PR, PS, quibus æquales sunt positæ, æqualia sunt, cum & lineæ sectæ PL, PN, æquales sint.[c] (erunt quoque contin-

[a] 18. vn decimi.

[b] 6 vn decimi.

[c] 33. pri
[d] 3. pri

gentes

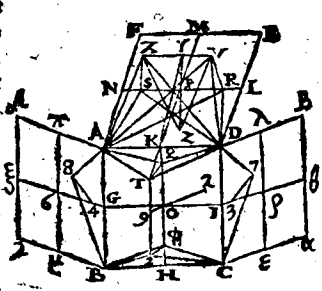
gentes rectæ RS, VX, æquales & parallelæ: [a] Est autem & AD, eidem RS, siue LN, parallela, eo quod AN, DL, parallelæ sunt & æquales. [b] Igitur & AD, VX, parallelæ sunt; [c] Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipsis erunt plano; ideoque trapezium ADVX, in vno existet plano: Est autem & triangulum ATD, in vno plano. Dico quod & in eodem plano cum trapezio ADVX. Ex P, namque ducatur PY, parallela ipsi RV, atque erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta sit RV: Et connectantur rectæ KT, KY. Quoniam igitur est vt OK, ad OQ, ita OQ, ad QK, ob sectionem rectę OK: Est autem kP, ipsi OK, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & PY, ipsi OQ, (cū æqualis sit ipsi RV, quæ posita fuit æqualis ipsi OQ, maiori segmento;) Erit quoque vt KP, ad PY, ita OQ, hoc est, QT, illis æqualis, ad QK. Quare cum triangula PKY, QTK, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum K, composita, [e] ita vt homologa latera sint parallela, nempe PK, & QT, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum ABCD; & PY, QK, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum ADEF: [f] Erunt reliqua latera KY, KT, in rectam lineam collocata; [g] Ac propterea recta TY, in vno erit plano, ideoque planum ATD, & planum ADVX, vtrum planum constituent, per rectas TY, AD, ductum. Quocirca pentagonum ATDVX, in vno existit plano.

QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera AN, NS, trianguli ANS, æqualia sint lateribus AK, KQ, trianguli AKQ; (Sunt enim AN, AK, dimidia latera cubi, & NS, KQ, segmenta minora rectarum æqualium sectarum.) & anguli ANS, AKQ, recti; si ducatur recta AQ, [h] erunt bases AS, AQ, æquales. Rursus cum latera AS, SX, trianguli ASX, sint æqualia lateribus AQ, QT, trianguli AQT: (Nam rectæ AS, AQ, ostensæ sunt æquales, & SX, QT, sunt segmenta maiora rectarum æqualium sectarum) & anguli ASX, AQT, recti, ex defin. 3. lib. 11. [i] Erunt quoque bases AX, AT, æquales. Quod si ducatur recta DQ, ostendemus eodem

argu-

[a] 33. pri
[b] 9. vndecimi.
[c] 7. vndecimi.
[d] 8. vndecimi.
[e] 6. vndecimi.
[f] 32. sex & 1. vndecimi.
[h] 4. pri.
[i] 4. pri.

argumento, rectam DT, rectæ AT; si vero ducatur recta DR, rectam DV, rectæ DT, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera XA, AT, TD, DV; æqualia: quibus etiam æquale ostendemus reliquum VX, hac ratione. [a] Quadrata rectarum PN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ SX: Est autem quadrato rectæ PN, æquale quadratum rectæ AN. Igitur & quadrata rectarum AN, NS, simul tripla sunt quadrati rectæ SX. [b] Cùm ergo quadratis rectarum AN, NS, æquale sit quadratum rectæ AS; erit quoque quadratum rectæ AS, triplum quadrati rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarum AS, SX, simul, quadrupla eiusdem quadrati rectæ SX. [c] Est autē quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratū rectæ AX. Quadratum ergo rectæ AX, quadruplū quoque erit quadrati rectæ SX, hoc est, quadrati rectæ PS, hoc est, quadrati rectæ XY; [d] Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cum igitur & quadratum rectæ VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectæ XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarum AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsæ æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pentagonum ATDVX.



QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori segmento PS; [e] erit quoque NR; secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit NP. [f] Quadrata igitur rectarum NR, RP, simul tripla sunt quadrati

[a] 4. tertijdeci.
[b] 47. pri
[c] 47. pri
[d] 34. pri
[e] 5. tertijdeci.
[f] 4. tertijdec.

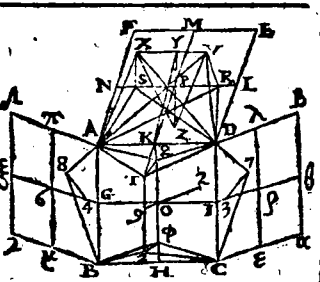
rectæ

rectæ NP, hoc est quadrati rectæ AN: Est autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla
47. pri sunt eiusdem quadrati rectæ AN. a Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarum RV, AR, quadrupla sunt quadrati rec-
47. pri tæ AN. b Cum ergo quadratis rectarum AR, RV, æquale sit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectę AV, eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod AD, dupla sit ipsius AN. Aequalia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoque & rectæ AV, AD, æquales. Simili argumẽto, ductis rectis DS, DX, ostendemus DX, DA, æquales esse; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniam igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia sunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & bases AD,
8 pri DX, æquales quoque; c Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo
d 7. ter. ijdęcim AXV. Ac proinde, cum in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeantur anguli æquales ATD, DVX, AXV, d ipsum erit æquiangulum.

QVOD si sumantur alia duo cubi quadrata Cαβ D, Bγδ A, recta ad quadratum A B C D, in communibus sectionibus CD, AB, quorum singula latera bifariam secentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur se mutuo secantibus in quadratorum centris ρ, σ. Secentur deinde OH, OK, ρI. σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educantur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, QT, 37, 48, æquales segmentis maioribus φO, QO, 3ρ, 46, coniunganturque rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT. TA, A8, 8B, B4, demonstrabimus eadem rõne, pentagona T2C7D, T2B8A, æquilatera esse & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Constructa igitur iam sunt tria pentagona tangentia cubi tria latera AD, DC, AB, & sibi mutuo cohærentia lateribus communibus

TD,

TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricetur alia nouem similia pentagona tangentia reliqua nouem cubi latera; constitutum erit Dodecaedrū. Quod quidem sphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ comprehenduntur, hac arte demonstrabimus.



INTELLIGANTVR plana cubi opposita secari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam secantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppositum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppositū, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniam igitur plana secantia recta sunt ad dicta plana cubi, quod parallela sint basibus cubi, quæ rectæ sunt ad plana ADEF, ABCD; a Erunt & communes eorum sectiones ad eadem cubi plana rectæ. Quare cum Y P, recta sit ad planum ADEF, ipsa producta versus Z, erit communis sectio planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodē pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis 9OZ; erit ipsa, communis sectio planorum, quæ per rectas GI, HK, ducuntur. b Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant; secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphæræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde, omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoque esse omnes rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuum, ducta recta Z X. c Quoniam parallelæ sunt KP, OZ, quod vtraque recta sit ad planum ABCD; Item parallelæ sunt QK, ZP, quod vtraque recta sit ad planū ADEF; erit PKOZ, (debent. n. duo puncta Z, intelligi esse coniūcta) parallelogrammū, d ac propterea

a 19. vn decimi.

b 39. vn decimi.

6. vn decimi.

PZ, æqualis erit ipſi KO, hoc eſt, ipſi NP, dimidio lateri cubi: Eſt autem & PY, ipſi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. a Quare cum quadrata rectarum NR. PR, ſimul tripla ſint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, ſecta ſit extrema & media ratione; erunt quoque quadrata rectarũ ZY, PY, hoc eſt, quadrata rectarum ZY, YX, ſimul tripla quadrati rectæ PZ. (Eſt. n. XY, æqualis ipſi PS, hoc eſt, ipſi PY:) b Eſt aũt quadratis rectarũ ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratũ rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc eſt, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiuſdem quadrati dimidij lateris cubi triplum eſt quoque quadratum ſemidiametri ſphæræ cubum comprehendentis: (c Nam vt diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiameter ad dimidium lateris; d Ac proinde vt quadratum diametri ad quadratum lateris, ita quadratum ſemidiametri ad quadratum dimidij lateris. e Cum ergo quadratum diametri triplum ſit quadrati lateris, erit quoque quadratum ſemidiametri triplum quadrati dimidij lateris.) Aequale igitur eſt quadratum rectæ ZX, quadrato ſemidiametri ſphæræ, ſeu cubi; Ac propterea ZX, æqualis ſemidiametro. Eadem ratione, erit ducta recta ZV, ſemidiametro æqualis. Vel certe quia cum latera ZY, YX, trianguli ZYX, æqualia ſint lateribus ZY, YV, trianguli ZYV, & anguli contenti recti. (Cum enim PY, ſit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem, ad ſibi parallelam VX, perpendicularis.) f Erunt bales ZX, ZV, æquales: Sunt autem & ZA, ZD, ad angulos cubi, ſemidiametro ſphæræ æquales, vt dictum, eſt. Sunt ergo iam quatuor rectæ ductæ ex Z, centro ſphæræ ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales ſemidiametro ſphæræ. Vt autem oſtendatur & recta ducta ZT, ad quintum angulum T, ſemidiametro æqualis, deſcribatur circa pentagonum, cum ſit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipſius ex Z, centro ſphæræ perpendicularis demittatur Zω, connectanturque rectæ ωA, ωT, ωD, ωV, ωX. g Quoniã igitur quadratum rectæ ZA, æquale eſt quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ ZX, quadratis rectarum

4. ter. dec.

47. pri

15. qm 22. ſex

15. ter. dec.

4. tri.

47. pri

ctarum Zω, ωX; Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quod rectæ ZA, ZX, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarum Zω, ωA, quadratis rectarum Zω, ωX, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarum ωA, ωX, ideoq; rectæ

ipsæ ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ωV, ωD, & inter se, & ipsis ωA, ωX, æquales; quod & rectæ ZV, ZD, æquales sint ostensæ rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ, a punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ωT, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarum Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT. b Cum ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ ZA; his vero quadratum rectæ ZT; Erunt æqualia quadrata rectarum ZA, ZT; propterea; & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare sphæra complectes cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri: Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, quacubus.

a 9. tert.

b 47. pri

POSTREMO cum sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: c erit quoque vt NL, dupla ipsius NP, ad RS, duplam ipsius PS, ita RS, dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipsius SN; Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR; Sed NL, tota ita secta, Rationalis est: (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius.) d Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictas figu-

c 15. quinti

d 6. tertij dec.

ras;& demõstrauimus,quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea,quę vocatur Apotome. Quod erat faciẽdum.

COROLLARIVM I.

CVM ergo demonstratum sit;recta LN, extrema aç media ratione secta,maius segmentum esse rectam RS:Sit autem L N, æqualis lateri cubi,& RS,lateri Dodecaedri;Perspicuũ est,si latus cubi secetur extrema ac media ratione,maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pẽtagoni Dodecaedri eadem sphæra cõprehensi. Nam AD,latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis AV,DX, subtendentibus angulos X,& V, eiusdem pentagoni.

a 8. tertiũdec. b 5. tertiũdec.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, a facit maius segmentum latus pentagoni:b ac propterea recta cõposita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni,hoc est,ex latere cubi, & ex maiori segmento, id est,ex latere Dodecaedri,similiter diuiditur,facitque minus segmentum latus dodecaedri,& maius segmẽtum latus cubi:Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri,maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis,in Dodecaedro esse sex latera,quorũ bina opposita sunt parallela,bifariamque secantur,& ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque,& ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX,T2,quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB:aliaq; quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum,quæ super bases cubi oppositas existunt,parallela sunt, cũ parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis,secanturque,ex demonstratis,bifariam & ad rectos angulos,a lineis rectis,quæ centra basium cubi oppositarum coniungunt; qualés sunt rectæ YZ, 9Z,&c.quæ vt demonstratum est, se mutuo inter secant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem,quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi; & YP,9O,æquales maioribus segmentis æqualibus PS,OQ;Erunt totę YZ,9Z,æquales:Eademque ratione reliquæ lineæ ex Z,ad sectiones oppositorum laterũ ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ

æquales

æquales sunt, seque bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo kOZP, angulus OZP, rectus est, cum opponatur recto OkP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra bassium coniungentes efficere angulos rectos. Omnes enim parallelæ sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ: erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmentū erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY: a ideoque vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem duplā ipsius ZP, ad duplā ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ. a 15. q̄m

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona aquilatera, & equiangula, inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, componetur Dodecaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter se complicentur.

PROBL. 6. PROPOS. 18. xviij.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæræ diameter AB, quæ in C, secetur bifariam; In D, vero ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt BE, sit quinta pars eiusdem. Descripto dein-

d e circa AB, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E, ipsi AB, perpendiculares C F, DG, EH; connectanturque rectæ AF, BF, AG, BG, AH, BH. Post hæc ex HA, abscindatur HI, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH, connectaturque recta BI. Postremo BG, secetur extrema ac media ratione in K, sitque maius segmentum BK.

QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico AG, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; AF, latus Octaedri; BG, latus cubi; BI, latus Icosaedri; BK, denique latus Dodecaedri. Quoniam enim AG, media proportionalis est inter BA, AD, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt BA, ad AD, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AG: Est autem BA, ipsius AD, sesquialtera: cum talium partium 2. sit AD, qualium 3. est BA. Igitur & quadratum rectæ BA, sesquialterum est quadrati rectæ AG; a Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; erit AG, latus Tetraedri.

a 13. 13. Euclidis.

RVRSVS quoniam AF, est media proportionalis inter BA, AC, ex eodem coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ AF, ex adducto coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ BA, duplum quadrati rectæ AF. b Quare cum diameter sphæræ potentia, sit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

b 14. 13. Euclidis.

DENIQVE cum BG, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipsius BD, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. c Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; erit BG, latus cubi.

c 15. 13. Euclidis.

PRAE-

PRAETEREA quia, ex eisdem corollariis, BH, est media proportionalis inter AB, BE, atque ideirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Est autem, ex constructione AB, ipsius BE, quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter sphęræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis ex coroll. 1. propos. 16. huius lib. Erit BH, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli; Est autem HI, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. [a] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, simul; Ac proinde [b] cum quadratum rectæ BI, æquale sit quadratis rectarum BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiusdem. [c] Quam ob rem BI, latus est Icosaedri. [a] 10. terti dec. [b] 47. pri [c] 16. terti deci-

DENIQVE cum BG, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione; erit BK, maius segmentum latus Dodecaedri in eadē sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

QVOD vero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perspicuum est, qualium partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse quadratum lateris Tetraedri; talium vero 3. quadratum lateris Octaedri; & denique quadratum lateris cubi talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertium lateris Octaedri, potentia vero duplum lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterum lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harū trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionem inter se habent, quam numerus ad numerum, [d] Ac propterea diameter sphæræ, & latera dictarum figurarum lineæ sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta late-

Diamet. 6. *Tetraed.* 4. *Octaed.* 3. *Cub.* 2.

[d] 6. dec.

9. dec.

ra Rationalia. Quia vero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. a Erunt huiusmodi lineæ, nimirum diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, longitudine incõmensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum, commensurabiles.

A T vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc vero Apotome, vt demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diametro sphæræ commensurabilia, essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum, ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

SED neque inter se vllo pacto commensurabilia sunt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credantur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, b erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, c erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commmensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo d quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112 lib. 10. Apotome, & Minor sunt lineæ Irrationales prorsus inter se differentes, ita vt neutra sit eadem alteri.

104. de
106. de

16. eor
dec.

ITAQVE quamuis ex lateribus expositis quinque figurarum regularium, tria quidem priora sint commensurabilia & inter se, & diametro sphæræ, ideoque Rationalia existant, duo vero posteriora incommensurabilia,

& in-

& interse, & diametro, reliquisque lateribus; ac proinde Irrationalia sint; Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius sit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icosaedri; Latus denique Icosaedri maius latere Dodecaedri; hoc est, eo ordine se mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras construximus. Quæ forte causa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiusmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius esse latere Octaedri, perspicuum est. Cum enim A G, latus Tetraedri subtendat maiorem arcum, quam A F, latus Octaedri; maior erit recta A G, quam A F, ex scholio propos. 28. lib. 3.

EODEM modo ostendemus latus Octaedri maius esse latere cubi. Nam B F, latus Octaedri maiorem arcum subtendit, quam B G, cubi latus.

LATVS autem cubi B G, maius esse latere Icosaedri B I, hac arte demonstrabimus. Quoniam A B, tripla ponitur ipsius B D; a & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectæ A B, noncuplum quadrati rectę B D, cum noncupla proportio sit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectę A B, talium 1. erit quadratum rectæ B D. Qualium autem partium 9. est quadratum rectæ A B, talium 3. est quadratum rectæ B G; b quod illud huius triplum sit; Ac proinde talium quoque 3. sunt quadrata rectarum G D, B D, cum æqualia sint quadrato rectæ B G. Igitur si auferatur quadratum rectæ B D, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ G D. Quoniam vero quadratum rectæ A B, quintuplum est quadrati rectæ B H, erit quadratum rectæ B H, minus quam talium partium 2. Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; c erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplā, minor quā 2. Quare quadratū rectę G D, maius est quadrato rectę B H, ideoq; recta G D, maior quā recta B H, Rursus quia diameter sphęrę A B, componitu

a 20. sex

b 15. ter tij dec.

c 10. 9n.

ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrum constituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI, eiusdem circuli, per coroll. 2. propos. 15. huius libri constat latus decagoni HI, maius esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertijs partibus, nempe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atque adeo cum quadratum rectæ AB, nonuplum sit ostensum quadrati rectæ BD, erit idem quadratum rectæ AB, nonuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdum. quintuplum enim est demonstratum. Non ergo HI, tertia pars est ipsius AB: Sed neque maior tertia parte. Si enim rectæ HI, dicatur maior tertia parte rectæ AB, & proinde dupla ipsius HI, maior quam duæ tertiæ, hoc est, quam AD, erit BH, minor quam tertia pars BD. Quare quadratum rectæ AB, maius erit, quam nonuplum quadrati rectæ BH. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neque æqualis tertiæ parti, vt ostendimus. Minor ergo est quam tertia pars, hoc est, quam BD. Itaque cum rectæ GD, DB, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: a Est autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectæ BI, quadratis rectarum BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoque erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus scilicet icosaedri.

a 47. pri

MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patefiet. Cum rectæ BG, diuisæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BK, & minus GK, erit rectangulum sub BG, BK, maius rectangulo sub BG, GK; atque adeo rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK. b Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG. Et duobus rectangulis sub BG, GK, æqualia sunt duo quadrata rectæ BK, (Nam tum sit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; & erit quadratum

b 2. secũ

c 17. sex

dratum

dratum rectæ BK, æquale rectangulo sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ B K, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ B K; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ B G, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ B H, (Cum enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ BG, & quintuplum quadrati rectę BH; erunt tam tria quadrata rectę BG, quam quinque quadrata rectę BH, æqualia eidem quadrato rectę AB, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinque quadrata rectę B H, maiora erunt sex quadratis rectę B K; Ac proinde vnum quadratum rectę B H, maius erit uno quadrato rectæ B K. (Si namque æquale esset quadratum rectę BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora sex quadratis rectæ BK, quod est absurdum, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quam recta BK; Ac propterea cum BI, maior sit quam BH, multo maior erit BI, latus videlicet Icosaedri, quam BK, latus Dodecaedri. Latera igitur quinque figurarum exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur inter se æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus;

EX quinque, angulus Icosaedri;

EX sex autem huiusmodi triangulis ad idem punctum

coeun-

cœuntibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri anguli cõtineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propos. 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, duodecim tertias partes vnius recti, hoc est, erunt quatuor rectis æquales. Quare ex ipsis nullus angulus solidus constituetur. a Nam solidus omnis angulus minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. a 20. vn decimi.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus conficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erunt. Multo ergo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus cõponitur. Cum enim quinque anguli pẽtagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erunt quatuor rectis, ideoq; ex ipsis angulus solidus constituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidi angulus confici potest. Cũ enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eo quod continet vnum rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quam quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis constitui poterit angulus solidus. Nam cum sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; ac proinde vnus angulus contineat vnum rectum, ac præterea duas partes sextas vnius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo componetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus eiusmodi angulis, quam tribus, angulus solidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores sunt

quatuor

quatuor rectis. Quam ob rē perſpicuū eſt, præter dictas quinque figuras, aliā figurā ſolidā non poſſe conſtitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus continetur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrum viginti triangulis eiuſmodi contentum.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMÒ, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum & angularum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quodnis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in vnius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerū laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6. numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicantur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidium eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autē octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerū laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidiū eſt rur-

sus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniunt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorum, qui simul coeunt ad angulum solidum constituendum, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conficiunt vnū angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidum angulū Octaedri.) conficiunt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituunt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorū vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot enim anguli conueniunt ad constituendum angulum solidum Dodecaedri) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione dignum est, cubum & Octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad an-

gulos

gulos solidos. Nam quot bases in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet sex bases, & octo angulos solidos: octaedrum vero octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrum duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrum, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor bases, totidemq; solidos angulos.

FINIS ELEMENTI TERTIIDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM DECIMVM.

Et Solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij vero, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS Alexandrini ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique nostro ob disciplinæ societatem commendatus longissimo peregrinationis tempore cum eo versatus est. Cumque dissererent aliquando de scripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icosaedri eidem sphæræ inscri-

ptorum, quam hæc inter se habeant rationem, censuerunt ea nõ recte tradidisse Apollonium; quæ a se emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderunt. Ego autem postea incidi in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accurate complectebatur de re proposita, ex eiusque problematis indagatione magnã equidem cepi voluptatem. Illud certe ab omnibus perspici potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autẽ diligenti, quantum conijcere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis consignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum vel maxime in Geometria versatus, scite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris benevolentiã, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, vt prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi ascribuntur: Duo vero subsequentes a plerisque Hypsicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui solent; in quorum quidem priori inter se comparantur Icosaedrum, & Dodecaedrum, tam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori verò exponuntur descriptiones aliquot figurarum regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri sint instar appendicis eiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iniucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones vnius in alio; quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartus decimus, quinque vero problematibus decimus quintus absolui-

tur:

tur: Visum est, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuersum differere, proponendo varia theoremata, atque problemata, quibus & predicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribuntur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanū, & Franciscū Flussatē Candallæ, qui diligētē operā, & sedulā in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim non solum insequentes duos libros quamplurimis theorematibus problematibusque locupletauit; verumetiam integrū librum, qui ordine decimussextus est, adiunxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Ceterum præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri et dodecaedri facile intelligi potest ex eius prooemio ad Protarchum, quod superius est positum.

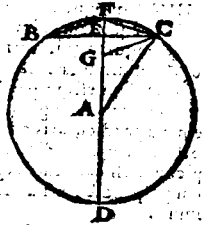
QVONIAM vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & a Francisco Flussate, ideoque & a nobis discrepant; annotauimus in margine ordinē vtriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hac nota O, intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

QVAE ex centro circuli cuispiam in pētagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

EX

EX centro A, circuli B C D, ducatur AE, perpendicularis ad B C, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse lineæ compositæ ex latere hexagoni & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi EF; connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. a Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti; b erunt bases CF, BF, æquales; c ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde existente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, suntque anguli contenti recti; d erunt & bases CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars est semicircumferentiæ DCF, cum sit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4, est arcus DC hoc est, arcus DC, quadruplus erit arcus CE. e Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: f Est autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem sit basis DC, Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis ostensus CGF, duplus erit anguli CAF: g Atqui angulus CGF, externus, æqualis est internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, sit dimidium anguli CGF, vt ostensum est, erit GCA, reliquum dimidium eiusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA; h ac proinde & latera AG, CG, æqualia. Est autem CG, recta ostensa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FG, simul: Ac



a 3. ter.
b 4. pri
c 28. ter
d 4. pri.
e 32. sex
f 20. ter.
g 32. pri
h 6. pri.

proinde tres simul A E, EF, FC, hoc est, duæ simul A F, FC, duplæ erunt ipsius AE, atque idcirco e contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum simul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM I.

EX his sequitur, lineam perpendicularem ductam ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secare arcum, quē dicta hæc linea recta subtendit, bifariam. Demonstratum enim est rectam AE, quæ ex centro perpendicularis est ad B C, diuidere arcum BC, bifariam in F.

COROLLARIVM II.

HINC quoque fit, perpendicularē ex centro ad latus pentagoni ductam æqualem esse vtrique lineæ simul, & ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam enim vt in hac propos. ostensum est, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis est dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni simul: Est autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propos. 12. lib. 13. æqualis dimidio semidiametri, seu lateris hexagoni; perspicuum est eandem perpendicularem ad latus pentagoni esse æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni simul.

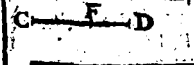
iiij. ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur; ipsæ similiter secabūtur, in easdem scilicet proportiones.

SECENTVR binæ rectæ A B, C D, extrema ac media ratione in E, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt AB, ad CD, ita A E, ad C F, & EB, ad FD; Item vt AE, ad EB, ita CF, ad FD, &c. Cum enim sit, vt AB, ad AE, ita AE, ad EB; & vt CD, ad CF, ita CF, ad FD; a erit rectangulum sub AB, E B, æquale quadrato rectæ AE; & rectangulum sub C D, F D, æquale quadrato rectæ

a 17. sexti



CF,

CF. Quam ob rem erit vt rectangulum sub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita rectangulum sub CD, FD, ad quadratum rectæ CF; (est enim vtrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. vt quadruplum rectanguli sub AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, ad quadratum rectæ CF: & componendo, vt quadruplum rectanguli sub AB, EB, & quadratum rectæ AE, ad quadratum rectæ AE, ita quadruplum rectanguli sub CD, FD, & quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ CF: [a] Sed quod quater continetur sub AB, EB, vna cum quadrato rectæ AE, æquale est quadrato lineæ compositæ ex AB, EB; Et quod quater continetur sub CD, FD, vna cum quadrato rectæ CF, æquale est quadrato lineæ compositæ ex CD, FD. Igitur erit quoque vt quadratum lineæ compositæ ex AB, EB, ad quadratum rectæ AE, ita quadratum lineæ compositæ ex CD, FD, ad quadratum rectæ CF, [b] Ac proinde, vt recta composita ex AB, EB, ad rectam AE, ita recta composita ex CD, FD, ad rectam CF: Et componendo vt composita recta ex AB, EB, & recta AE, hoc est, dupla ipsius AB, ad rectam AE, ita recta composita ex CD, FD, & recta CF, id est, dupla ipsius CD, ad rectam CF; Et permutando, vt dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita AE, ad CF; [c] Vt autem dupla ipsius AB, ad duplam ipsius CD, ita est AB, ad CD. Erit ergo vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; Ac propterea, cum sit vt tota AB, ad totam CD, ita AE, ablata, ad CF, ablatam; [d] erit quoque reliqua EB, ad reliquam FD, vt tota ad totam. Quare vt AE, ad CF, ita erit EB, ad FD; cum vtraque proportio eadem sit proportioni AB, ad CD: Et permutando, erit vt AE, ad EB, sic CF, ad FD, & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

a 28. secti

b 2. sext

c 15. quinti

d 19. quinti

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequēs theorema

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorũ eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

9. ter dec. 8. ter dec. 4. quar dec.

QVONIAM enim a latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; b & recta subtendens pentagoni angulum secta extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni: c sit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad maius, quæ maioris segmenti recta anguli pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, vt maius segmentum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoq; latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni, quod est propositum.

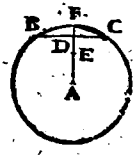
EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodẽ cẽtro ad latus triãguli æquilateri ductæ, minus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, circuli BC, ducta perpendicularis AD, ad latus BC, pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius segmentum AE, esse æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducta; minus vero segmentum ED, æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdẽ circuli. Extẽsa nãq; recta AD, ad F, & connexa recta FC, erit FC, latus

deca-

decagoni, cum ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. arcus BC, nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in F; a Ac proinde recta composita ex AF, latere hexagoni, & FC, latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum AF, latus hexagoni, minus vero segmentum FC, latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota AD, diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex AF, FC, similiter diuisum, ita AE, maius segmentum ad AF, maius segmentum; & ED, minus segmentum ad FC, minus segmentum: b Est autem tota AD, dimidium totius compositæ ex AF, FC. Igitur & AE, ipsius AF, semidiametri, & ED, ipsius FC, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo per corollariū propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum AE, æquale esse dictæ perpendiculari, minus vero ED, dimidio lateris decagoni. Quod est propositum.



a 9. tertij dec.

b 1. quar tidec.

THEOR. 3. PROPOS. 34

ij. iiij.

SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarum CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2.

propoſ. 10. lib. 13. diuidat & arcũ CD, & latus CD, bifariã in G, & H, erit arcus CG, decima pars totius circũferẽtiæ, ideoque recta ſubtenſa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla eſt rectę F G; erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ F G: a Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla ſunt quadrati rectæ FG; Atque adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiuſdem rectæ F G: b Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirum ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni; & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.

a 47. pri

b 10. ter tÿdoc.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiuſmodi.

SI in ſphæra eadem cubus, & dodecaedrũ inſcribantur, quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.

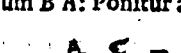
CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCD E, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiam ſphæra deſcripti; eritque ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. recta AC, ſubtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. c Perſpicuum eſt autem quadrata rectarum AC, CD, lateris ſcilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla eſſe quadrati ſemidiametri FG, &c.

c 3. quarti decimi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR enim AB, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentum AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdem circuli. Sit enim AD, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum ipsi AB; a eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum B A: Ponitur autem & A B, secta in C, similiter. b Igitur erit vt B D, tota ad maius sui segmentum A B, ita A B, tota, ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque vt B D, tota ad maius sui segmentum AB, ita AB, maius segmentum ad AD, segmentum minus, per definitionem lineæ sectæ extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erunt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est AB; erit & AC, eiusdem circuli latus decagoni.



ALITER. Adiungatur ipsi A B, in rectum recta A D, æqualis maiori segmento A C; c eritque tota recta B D, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur A B, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, erit per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. AD, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodem circulo descripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum.

O. iij.

a 29. tertiij dec.

b 2. quarti decimi

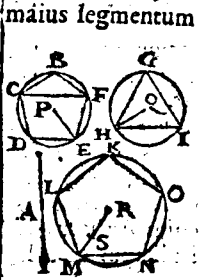
c 5. tertiij dec.

ij. k.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptum & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundem circulum circumscribere & pentagonum BCDEF, & triangulum GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsâ circumscribentes esse æquales. Circumscribat enim circulus KLMNO, pentagonum KLMNO,[a] ex quo Icosaedrum, sphæræ inscribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri, ideoque quodlibet ipsorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Secenturque RM, extrema ac media ratione in S;[b] eritque maius segmentum RS, latus Decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quoque recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quę erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos. BF, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi CF, secti extrema ac media ratione;[c] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius segmentum ad RS, maius segmentum; Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratū rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo, per ea, quæ demonstrata sunt in scholio propos. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectę RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib.



a 13. 4or tydec.

b 4. quarti-decimi.

c 2. quarti-decimi. d 22. sex

13. quam

13. quam quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 1. propos. 16 lib 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: a Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoque quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cum hæc ostensa sint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ RS. Sed quoniam, (b cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectæ MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; c sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectæ MN, æqualia quindecim quadratis rectæ QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectæ PE, æqualia quindecim quadratis rectæ QH; ac propterea vnum quadratum rectæ PE, vni quadrato rectæ QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI, æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrandum.

a 1. 4. ter tÿdec.

b 3. quartidecimi.

c 2. 4. ter tÿdec.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

iij. vi.

SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari compre-

henditur

henditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale:

EX centro F, circuli circumscribentis pẽtagonum Dodecaedri A BCDE, ducatur ad latus C D, perpendicularis FG. Dico rectangulum sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis. n. rectis ex F, ad oẽs angulos pentagoni, resoluetur pentagonum in quinque triangula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. cum bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrens duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum C I, contentum sub H C, hoc est, sub FG, & CD. [a] Quoniam vero rectangulum C I, duplũ est trianguli F C D, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium; erit rectangulum CI, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pentagonis Dodecaedri, cũ quinque triangula æqualia sint vni pentagono; Atque adeo sextuplum rectanguli CI, quinquies sumpti, nimirũ rectangulum CI, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorum pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

a 41. pri

ALITER. Facta eadem figuræ constructione, [b] cum rectangulum CI, duplum sit trianguli FCD, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulum CI, trigesies sumptum æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabit duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triangulis. Atque idcirco trian-

b 41. pri

gulum

gulum FCD, sumptum sexagesies æquale erit superficiei Dodecaedri.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

iij. vii.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum Icosaedri superficiei æquale.

EX centro D, circuli circumscribentis triangulum Icosaedri ABC, ducatur ad latus perpendicularis DE. Dico rectangulum contentũ sub DE, & BC, trigesies sumptum, æquale esse toti superficiei Icosaedri. Ductis namque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, resoluetur triangulũ in tria triãgula æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & basis vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per D, recta FG, parallela ipsi BC, occurrens in F, & G, duabus perpendicularibus BF, CG, ex B, C, ductis ad BC; eritque rectangulum BG, contentum sub FB, hoc est, sub DE, & BC. Quoniam vero rectangulum BG, duplum est trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorũ duorum triangulorum ipsi DBC, æqualium: Erit rectangulum BG, ter sumptum æquale sex huiusmodi triangulis, hoc est, duobus triangulis Icosaedri, cum tria talia triangula æqualia sint vni triangulo Icosaedri; Atque adeo idem rectangulum trigesies sumptum, nempe decuplum rectanguli BG, ter sumpti, æquale erit viginti triangulis Icosaedri, hoc est, toti superficiei Icosaedri, nimirum decuplo duorum triangulorum Icosaedri. Si ergo ex centro circuli triangulum Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

a 41. pri

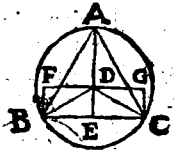
ALI-

a 41. pri

ALITER. Facta eadem constructione figuræ,[a] cum rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, id est, æquale dicto triangulo bis sumpto; Erit rectangulum B G, trigesies sumptum, æquale triangulo DBC, sumpto sexagesies: Atqui sexaginta huiusmodi triangula conficiunt viginti triangula Icosaedri, eo quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambę figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus. b Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto; c Item superficies Icosaedri æquàlis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. d Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiē Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.



b 6. quartidecimi.

c 7. quartidecimi.

d 15. q.

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendiculatis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulum Tetraedri ABC, circumscriptum a circulo, cu-

ius

ius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icosaedri dictum est. Dico rectangulum BG, sexies sumptū, aquale esse superficiei Tetraedri.

a Quoniam enim rectangulum BG, duplum est trianguli DBC, hoc est, aquale duobus eiusmodi triangulis; erit ipsum sexies sumptum aquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula constituant totam superficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aquilatera ipsi ABC, aqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, sexies sumptum, superficiei Tetraedri, siu Pyramidis aquale. a 41. pri

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies sumptum, aquale esse superficiei Octaedri. b Cum enim rectangulum BG, duplum sit trianguli DBC, hoc est, aquale duobus eiusmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies sumptum aquale vigintiquatuor huiusmodi triangulis; Sed viginti quatuor talia triangula constituunt octo triangula Octaedri, id est, totam superficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies sumptum aquale est superficiei Octaedri. b 41. pri

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, describatur, & ducta MN, perpendicularis ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati recta linea, vt quadratum resoluatur in quatuor triangula aqualia; Atque per M, agatur OP, ipsi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum sub OI, hoc est, sub MN, & IK, sumptum duodecies, aquale esse superficiei cubi. c Quoniā enim rectangulum IP, duplum est trianguli MIK, hoc est, aquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies sumptum aquale vigintiquatuor eiusmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula constituant sex quadrata, id est, totam superficiem cubi, quos quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies sumptum aquale superficiei cubi. Quod est propositum. c 41. pri

ALI

ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HK; (sunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, sit dimidium lateris HI, nempe æqualis ipsi MN) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

iiij. viii.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes; quarum tres sint AH: Angulum vero A, subtendens recta BE, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint BI, & vna IE, ita vt BI, sint quintupla ipsius IE. Dico rectangulum cõprehensum sub AH, BI, æquale esse pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, cõtinet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum sit semidiameter; erit AH, ipsius AF, sesquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. propos. 10. lib. 13. in puncto K; continebit tam KB, quam KE, tres sextas rectæ BE; atque adeo cum BI, contineat quinque, continebit KI, duas. Ac proinde & KB, ipsius KI, erit sesquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; a atque idcirco rectangulum sub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo sub medijs AF, KB. b Est autem rectangulum sub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant basin AF, & eandem altitudinem BK, hoc est, inter easdem sint parallelas consti-

16. sex

41. pri

tuta.

tuta. Igitur & rectangulum sub AH, KI, duplum erit eiusdem trianguli ABF: [a] Est autem & rectangulum sub AH, KI, duplum rectanguli sub AH, IE; propterea quod & basis KI, dupla est basis IE, (continet enim KI, duas sextas partes ipsius BE, & IE, vnam.) eademque semper altitudo AH. Igitur æqualia sunt triangulum ABF, & rectangulum sub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentaganum ABCDE, quintuplū est trianguli ABF, quod pentagonum in quinque huiusmodi triāgula resoluatur, ductis rectis e centro F, vt propos. 6. huius lib. docuimus. [b] Rectangulum vero sub AH, BI, quintuplum est rectanguli sub AH, IE; quod & basis BI, quintupla sit basis IE, eademque semper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum sub AH, BI, æqualia sunt. Rectangulum ergo contentum sub tribus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 1. *sex.*

b 1. *sex.*

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, si pentagonum ABCDE, statuatur basis Dodecaedri in aliqua sphæra descripti, BE, est latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icosaedri in eadem sphæra constituti, (c comprehensi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) secat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propos. 12. lib. 13. secet semidiametrū FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem semidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifestum est, rectangulum comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, nempe sub AH, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.

c 5. *quartidecimi.*

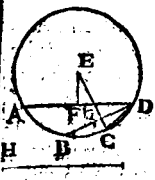
THEOR. 9. PROPOS. 9.

iiii. viii.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo ABCD, [d] circumscribente & pentagonum Dodecaedri, & triāgulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & triāguli AD; & ex cētro E, ducārur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit denique H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico est

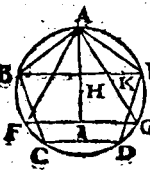
d 5. *quartidecimi.*



se, vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est B D, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem E G, sectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentum est E F, ex scholio propos. 2. huius lib. a Erit vt H, tota ad B D, maius sui segmentum, ita E G, tota ad E F, maius sui segmentum; b Ac proinde rectangulum sub extremis H, E F, æquale erit rectangulo sub mediis B D, E G. c Quia vero est, vt H, ad A D, ita rectangulum sub H, E F, ad rectangulum sub A D, E F, cum bases sint H, A D, altitudo vero semper eadem B F; Erit quoque vt H, ad A D, ita rectangulum sub B D, E G, (quod est æquale rectangulo sub H, E F,) ad idem rectangulum sub A D, E F. Quare cum ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectangulum sub B D, E G, ad rectangulum sub A D, E F, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; Erit quoque, vt H, latus cubi, ad A D, latus Icosaedri, ita superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. quarti decimi. b 16. sex c 1. sex.

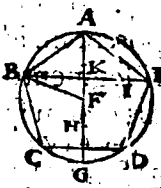
ALITER. d Circumscribat pentagonum, Dodecaedri A B C D E, & triangulum Icosaedri A F G, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A, per centrum H, recta A I, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidet latus F G, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta B E, quæ latus erit cubi, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. cuius quinque sextæ partes sint B K. Dico rursus esse, vt B E, latus cubi ad F G, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim rectangulum sub A I, B K, æquale est pentagono A B C D E, ex coroll. propos. 8. huius lib. Item rectangulum sub A I, I F, æquale est triangulo A F G, ex scholio propos. 41. lib. 1.



d 5. quarti decimi.

cum

cum FG, basis trianguli dupla sit ipsius IF, basis rectanguli: erit vt rectangulum sub AI, BK; ad rectangulum sub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: a Est autem vt rectangulũ sub AI, BK, ad rectãgulũ sub AI, IF, ita BK, ad EF, cũ bases sint BK, IF, & altitudo eadẽ sẽper AI. Erit igitur quoque vt pentagonũ ABCDE, ad triangulũ AFG, ita BK, ad IF; Ac proinde, (si primum, & tertium, nihilum pentagonum ABCDE, & recta BK, æque multiplicentur per numerum 12. Item secundum, & quartum, nempe triangulũ AFG, & recta IF, æque multiplicentur per numerum 20. b erit quoque vt pentagonum ABCDE, duodecies sumptum, hoc est, superficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigesies sumptum, nempe ad superficiem Icosaedri, ita recta BK, duodecies sumpta, ad rectam IF, vigesies sumptam. Atqui recta BK, duodecies sumpta æquialet lateri cubi BE, decies sumpto; (Nam cũ BK, contineat quinque sextas partes ipsius BE, continebit eadem BK, duodecies sumpta sexaginta partes sextas eiusdem BE, quæ efficiunt decem integras rectas BE.) Recta vero IF, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eo quod FG, est ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptum ad latus Icosaedri FG, decies sumptum; Ac propterea, c cum eandem proportionem habeãt decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.



a 1. ex

b schol. 12. q.

c 15. q.

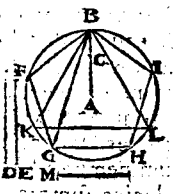
THEOR. 16. PROPOS. 16.

iiij. ix.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod à to-

ta,& id quod à maiori segmento, ad rectam potentem id,quod à tota,& id,quod à minori segmentō, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum A C. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex A, centro, ad interuallum AB, circulus describatur, in quo constituatur & pentagonum æquilaterum B F G H I, & triangulum æquilaterum B K L. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta B G, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam vero A C, maius segmentum semidiametri AB, sectæ extrema ac media ratione, [a] est latus Decagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum A B, latus est Hexagoni; [b] poterit BE, latus pentagoni & totam AB, latus videlicet hexagoni, & maius segmentum A C, latus scilicet Decagoni in eodem circulo. Possit iam & recta M, totam AB, & minus segmentum BC, per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Dico sic esse D, latus propositum cubi ad E, latus propositum Icosaedri, vt est BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus segmentum B C. [c] Quoniam enim, quadratum lateris trianguli æquilateri B K, triplum est quadrati semidiametri A B; [d] Item quadrata rectarum AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ B K, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum A B, B C, hoc est, quadratum rectæ M, ipsis æquale, ad quadratum rectæ A C. Vtrobique enim proportio est tripla. Perinutando ergo erit, vt quadratum, rectæ B K, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC. Est autem vt quadratum rectæ A B, ad quadratum rectæ A C, ita quadratum rectæ



BG,

BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectę BG, sectæ extrema ac media ratione, maius segmentum sit BF, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. eo quòd BG, est latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ; a Erit vt tota AB, ad maius segmentum AC, ita tota BG, ad maius segmentum BF, b Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF, ita quadratū rectæ BK, ad quadratū rectæ M: Et permutādo, vt quadratū rectæ BG, ad quadratū rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ M; c Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC. Cum igitur proposita latera D, E, cubi & Icosaedri, eandē habeant proportionem, quam rectæ BG, BK, vt mox ostendemus; perspicuum est, vt se habet recta BF, potens totam AB, & maius segmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus segmentum BC, ita se habere propositum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

a 2. quarti decimi.

b 2. sex

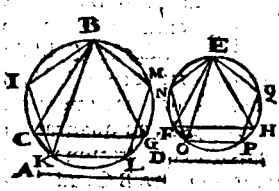
c 22. sex

SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæra, eandem habeant proportionem, quam recta BG, BK, demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphęra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæra. Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, & circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona equilatera BIKLM, ENOPQ, connectian-



turque recta BK, CK, EO FO. a Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonū, & Icosaedri trianguli eiusdē sphæra; & ponitur BCG, triangulū Icosaedri in eadem sphæra descripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonum Dodecaedri in eadem cum ipsis sphæra descripti. Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoque ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circumferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione segmentorum similium, æquales inter se, quam anguli BKC, EOF, inter se, eum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, æquiangulum. b Quare erit vt BK, hoc est, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri, ita EO, hoc est, recta D, illi æqualis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum.

a 5. quartidecimi.

b 4. sex.

PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, similium eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphæra, quam habent B G, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.

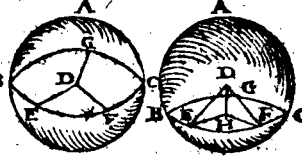
EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.

LEM-

LEMMA I.

SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFGC. Dico BEFCG, esse circulum. Trã seat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione BEFCG; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadãt; erit ex defin. circuli, figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.



TRANSEAT secundo planum secans nõ per centrũ sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittanturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectantur rectæ DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; & erit 47. pri *tam quadratũ rectæ DE, quadratis rectarũ DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata*

rectarum DE, DF, æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur et quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarū DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare et rectæ HE, HF, æquale erunt. Eodē argumento ostēdemus, omnes lineas ex H, *ad extremitatem cōmunis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus* HE, HF. *Figura igitur plana BEFCG, unica linea contenta, ex defin. circuli, circulus erit; eiusque centrum, punctum* H, *in quod perpendicularis* DH, *cadit. Quod erat propositum.*

COROLLARIVM

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra: illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant à centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes à centro sphęræ, æquales sunt.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter a centro F, distare. Ducantur enim ex E, ad eorū plana perpendiculares EF, EG, quæ per corollar. præcedentis lemmatis in ipsorum cētra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias

circu-

circulorum vtcunque, connectanturque rectæ EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarũ EF, FB, quã quadratum rectæ EC, quadratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiẽ, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale: Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant a centro E.

47 prt

SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, a centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarũ EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur distare a cẽtro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC, æquale erit; atque adeo æquales erũt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod erat propositum.

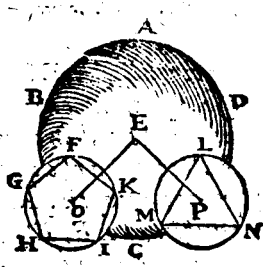
iiii. x.

THEOR. 11. PROPOS. 17.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.

IN sphæra A B C D, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum F G H I K: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum L M N. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra A B C D, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per lemma 1. præcedens, duo circuli in sphæra F G H I K, L M N, comprehendentes pentagonum, & triangulum. a Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli F G H I K, L M N; Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabunt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde

a 15. quarti-decimi.



cum

cum & baſes ipſarū æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales erūt inter ſe, ex coroll. propoſ. 6 lib. 12. Eodemque modo, ſi ex omnibus angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarum altitudines æquales erūt altitudinibus pyramidum Dodecaedri. a Quoniam autē eſt, vt baſis FGHIK, ad baſin LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriuſque eadem ſit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. demonſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidē LMNE. Rurſus quia eſt, (ſicut modo diximus) vt tota ſuperficies Dodecadri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20 pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: b Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atque adeo, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrū, &c. Quod erat demonſtrandū.

a 6. duodecimi.

b 9 quartidecimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero oſtenſum eſt quoque, c ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra: d Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemque ſphæræ, vt eſt linea potens totam diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum: e Item ita eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra: Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri: & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri: & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius: & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

c 9. quartidecimi.

d 10. quartidecimi.

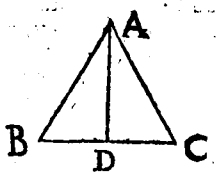
e 11. quartidecimi.

o. xi.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineæ perpendicularis ab vno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

IN triangulo æquilatero ABC, ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum BC, perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AB, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniam enim, ob æqualitatem laterũ AB, AC, a anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erunt duo anguli B, & D, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli A D C; habent autem & latus AD, commune, vel AB, AC, æqualia. b Igitur & reliqua latera BD, CD, æqualia ſunt; 1c propterea latus BC, hoc eſt, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratũ lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. c Cum igitur quadrato rectæ AB, æqualia ſint quadrata rectarũ AD, BD; erũt quoq; quadrata rectarũ AD, BD, quadrupla quadrati rectę BD; Ac proinde, quaſi ũ partiũ 4. eſt quadratũ rectæ AB, vel quadrata rectarũ AD, BD, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ AD. Quare quadratũ rectæ AB, partium 4. ſeſquitertiũ eſt quadrati rectæ AD, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia, ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



a 5. pri.

26. pri

c 47. pri

8. pri.

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum. n. eſt BD, & CD, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariã à perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli A B D, æqualia ſint lateribus A C, AD, trianguli ACD: & baſis BD, baſi CD, æqualis: d Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id eſt, angulus BAC, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari AD.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

o. xiij.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphæræ diameter Rationalis A. Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri inscripta sphæra, esse Mediam. Sit enim BCD, vnum triangulum Tetraedri, & EFG, Octaedri illius sphæræ, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera opposita CD, FG, perpendiculares BH, EI. a Quoniam igitur quadratum diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri B C, b & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, B C, EF, proportionem, quam numeri 6.4.3. c ideoque commē surabilia erunt. Quare lineæ ipsæ A, BC, EF, commensurabiles existent saltem potentia; atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.

a 13. ter tijdec.
b 14. ter tijdec.
c 6. dec.

RVRSVS, d quia tam quadratum rectæ B C, quadrati rectæ BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, sesquitertium est; habebunt tam quadrata rectarum B C, BH, quam quadrata rectarum E F, E I, proportionem inter se, quam numeri 4.3. e ideoque tam illa, quam hęc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipsæ BC, BH, quam lineæ EF, E I, commensurabiles existent. Est autem & tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia, videlicet toti, commensurabilis. f Igitur & tam BH, CH, quam EI. FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, ostensæ sint Rationales, erunt quoque BH, EI, Rationales. g Quoniam vero tam CH, BH, quam F I, E I, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem,

d 12. quartidecimi.
e 6. dec.
f 12. decimi.
g 9. dec

quam

quam 1. ad 3. [a] cum oſtenſum ſit talium partium 1. eſſe tam quadratum CH, quam quadratum FI, qualium 3. eſt tam quadratum BH, quam quadratum EI.) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commenſurabiles: [b] Ac proinde tam rectangulum ſub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium erit: Sunt autem triangula BCD, EFG, æqualia rectangulis ſub CH, BH, & ſub FI, EI, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum CD, FG, duplæ ſint baſium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erũt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri triangulo BCD, ſit commenſurabilis; (eſt enim triangulum BCD, totius ſuperficiei quarta pars.) Itẽ tota ſuperficies Octaedri triangulo EFG, commenſurabilis; (Eſt enim triangulum EFG, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media. Quod erat oſtendendum.

a 12. uartæ ecimi.

22. de imi.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles: Ac propterea rectangula ſub CH, BH, & ſub FI, EI, hoc eſt, triangula BCD, EFG, ipſis æqualia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale: perſpicuum eſt, quod infertur.

o. xiiij.

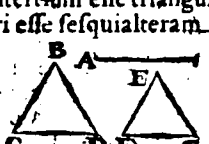
THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies

autem

autem Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.

SIT sphæræ diameter A, in qua descripti Tetraedri basis sit triangulum BCD; Octaedri vero basis triangulũ EFG. Dico triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; At vero superficiem Octaedri esse sesquialteram superficiei Tetraedri. a Quoniam enim quadratum diametri A, sesquialterũ est quadrati lateris Tetraedri CD; b duplum vero quadrati lateris Octaedri FG; fit, vt qualium partium 6. fuerit quadratum diametri A, talium 4. sit quadratum lateris CD; & talium 3. quadratum lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, sesquitertium est quadrati rectæ FG: Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita est triangulum BCD, ad triangulum EFG. (c quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter se habent laterum CD, FG, duplicatam, cũ sint similia.) Igitur & triangulum BCD, sesquitertium est trianguli EFG.



a 13. 10r tÿdec.

b 14. 10r tÿdec.

c 20. & 19. sex.

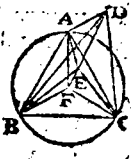
RVRSVS, quoniam ostensum est triangulum BCD, sesquitertium esse trianguli EFG; Ac propterea qualium partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3. esse triangulum EFG; Fficitur, vt triangulum EFG, octies sumptum, hoc est, tota superficies Octaedri, sit earundem partium 24; At triangulum BCD, quater sumptum, id est, tota superficies Tetraedri, earũdem partium 16. Quam ob rem superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri eiusdem sphæræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 0. XV.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrũ sphæ-

ræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad dictam basim.

SIT Tetraedrum ABCD, contentum quatuor trianguli æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in sphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E, centrum sphæræ recta DEF, incidens in basim ABC, circulo inscriptam ad punctum F. Dico F, esse centrum basis ABC, & DF, perpendicularem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex centro sphæræ ad eius superficiē æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli AED, CED, æquales erunt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt, b eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF; CEF; si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, trianguli EAF, æqualia, sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF, & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; c Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoque æquales erunt FB, FC, si considerentur triangula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; d erit F, centrum basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.



a 1. pri.

b 13. pri

c 4. pri.

d 9 ter.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planū circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit; efficitur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdem circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. quod est

absur-

absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

o. xvi.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratum subduplum quadrati diametri sphęrę.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in sphæra descriptum, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplum quadrati diametri sphęrę. Ductis enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, quæ æquales sunt, cum sint semidiametri sphæræ, ductæ videlicet e centro ad superficiem sphæræ: [a] quoniam quadratum diametri sphærę duplũ est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri, AG, ex scholio propos. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphæræ, talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratum rectæ AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cũ ergo quadratum rectæ AG, æquale sit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; [b] Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGD, recti. [c] Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectum erunt coniunctæ; [d] atque adeo rectæ AC, BD, se se secantes in G, in vno existent plano; [e] Ac propterea rectæ earum extrema connectentes AB, BC, CD, DA, in eodẽ plano erunt cum ipsis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrum in duas py-

[a] 14. tertiædec.

[b] 48. pri

[c] 14. pri

[d] 2. vndecimi.

[e] 7. vndecimi.

ramides

ramides ABCDE, ABCDF, quarum basis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides æquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cum quælibet constet ex quatuor triangulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sunt & similia, & basi communi ABCD. Dico iam earum altitudines esse æquales, & basin ABCD, esse quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ. Quoniam enim ostensum est, quadratum lateris Octaedri AB, æquale esse duobus quadratis semidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis semidiametrorum AG, EG; a Ac propterea angulus AGE, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus DGE. Quoniam igitur recta EG, duabus rectis AG, DG, se mutuo secantibus in G, ad rectos angulos insistit, b ipsa recta erit ad planum ABCD, per rectas AG, DG, ductum; nempe ad basin pyramidum. Quare EG, altitudo est pyramidis ABCDE. Similiter ostendemus FG, altitudinem esse pyramidis ABCDF. Cum ergo EG, FG, sint semidiametri sphæræ æquales, per spicuum est, dictas pyramides esse æqualium altitudinum. Rursus quia AC, est diameter sphæræ; c erit eius quadratum duplum quadrati lateris AD; Ac propterea æquale duobus quadratis laterum AD, DC, d Quare angulus ADC, rectus est; Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum est: Sed & æquilaterum, cum eius latera sint latera Octaedri. Igitur quadratum est; quod cum sit descriptum ex latere octaedri AB; constat ipsum esse subduplum quadrati diametri sphæræ. Octaedrum ergo in sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

48. pri

4. vnd. eiusm.

4. sch 7. c.

48. pri

12. ter idec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propositionem demonstrauimus in coroll. 2. propos 14. lib. 13. ex ipsa videlicet constructione octaedri. Verumtamen quia hic demonstratur a Campano, non habita ratione constructionis octaedri, visum est eius demonstrationem hoc etiam loco conscribere.

TE-

THEOR. 17. PROPOS. 17.

o. xvij.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ.

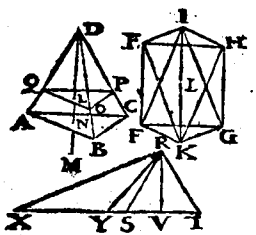
VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad Octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quę potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphærę.

SIT Tetraedrum A B C D, & octaedrum EFGHIK, in vna eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter ſphæræ DM, incidens in baſin A B C, ad punctum N. a Erit igitur N, centrum baſis ABC, & D N, perpendicularis ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum ſphæræ & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiameri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib 13. Erit D L, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, paralle-

a 15. *quartidecimi.*

lum plano ABC; [a] Eruntque rectæ QO, OP, PQ, parallelę rectis AB, BC, CA; Ac propterea triangulũ QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, [b] cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulum erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC: Sunt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. [c] Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter; erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL. vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, [d] cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hæc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt constat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex propos. 2. lib. 8. Rursus [e] quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.



SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triangulo DQP; demittaturque ex R, ad ST, perpendicularis RV. [f] Eritque latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectę DP, talium 27. erit quadratum rectæ RV. Erat autem earundem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens viginti septẽ sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri.

RVRSVS extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27.

ex

10. vn decimi.

10. vn decimi.

17. vn decimi.

18. duo decimi.

20. sex

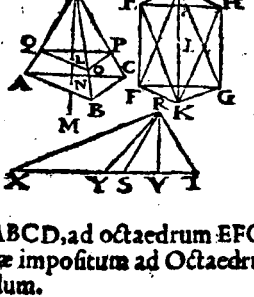
f 12. vnarti decimi.

ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturque TX, bifariam in Y, vt sit TY, talium partium 32. qualium 27. est TS, seu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3. nempe sesquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, est 27. (proportio enim 36. ad 27. est sesquitertia) ac propterea qualium TY, est 32. Quare linea TY, continet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita esse tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK, vt rectangulum contentum sub recta RV, (quæ potest vigintiseptẽ sexagesimas quartas partes quadrati lateris DC,) & sub recta TY, (quæ cõtinet octo nonas partes eiusdem lateris) ad quadratum diametri sphæræ.

CVM enim ductis rectis RX, RY, a triangulum RTX, duplum sit trianguli RTY, quod & basis TX, dupla sit basis TY: b Est autem & rectangulum sub RV, TY, duplum eiusdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo sub RV, TY. c Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulum sub RV, TY, ad idem triangulum RST: d Est autem triangulum RTX ad triangulum RST, vt basis TX, ad basin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectãgulum sub RV, TY, ad triangulum RST, hoc est, ad triangulum DQP, siue QOP, sibi æquale, erit vt 64. ad 27. Fuit autem & pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectangulum sub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD: At vero vt triangulum QOP, ad quadratum diametri sphæræ DM, ita est pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nam cum DN, recta sit ad planum ABC, recta quoque erit ad planũ QOP, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoq; sphæræ semidiameter DL, altitudo erit pyramidis seu tetraedri QOPD: e Octaedrum autem EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarum basis cõis quadratum EFGH, dimidium quadrati diametri sphęrę; & altitudines æquales semidiametri sphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex scholio pp. 5. lib. 12. erit vt basis QOP, ad basin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidẽ EFGHI; Ac propterea per

a 1. sex.
b 41. pri
c 7. qu.
d 1. sex.
e 16. quartidecimi.

ea, quæ in scholio propos 22. lib. 5. ostendimus, vt basis QOP, ad duplum basis EFGH, hoc est, ad quadratũ diametri sphæræ DM, ita pyramis QOPD ad duplum pyramidis EFGHI, hoc est, ad Octaedrum EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum sub RV, potente viginti septẽ sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC, & sub TY, octo nonis eiusdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri sphæræ DM, ita pyramis, seu tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK. Tetraedrum ergo sphæræ impositum ad Octaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, seu illi aqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: Ac proinde, a *cum recta RT, sit potentia sesquitertia rectæ RV; erit RV, potentia subsesquitertia ipsius RT, nempe trium quartarum partiũ lateris tetraedri. Rursus quia TY, fuit talium partium 32. qualium 27. ST, seu DP; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, superquintupartiens vigesimas septimas partes ipsius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare constat, esse quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum sub RV, quæ potentia subsesquitertia est trium quartarum partium lateris tetraedri, & sub TY, quæ superquintupartiens est vigesimas septimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

a 12. uarti- ecimi.

o. xvii.

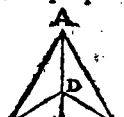
THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basin

oppo-

oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli ad eandem basin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, per D, recta AE, quæ perpendicularis erit ad BC, eamque bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico AE, triplam esse rectæ DE, quæ scilicet perpendicularis est e centro ad basin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera DA, DB, trianguli ADB, æqualia sint lateribus DB, DC, trianguli BDC; (e centro enim ducuntur) sit autem & basis AB, basi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia ex coroll propos 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum est trianguli BDC. Quoniam vero rectangulum sub AE, EB, triangulo ABC; & rectangulum sub DE, EB, triangulo BDC, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum basis trianguli BDC, dupla sit basis BE, vtriusq; rectanguli; Erit quoque rectangulum sub AE, EB, triplum rectanguli sub DE, EB: a Est autem vt rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub DE, EB, eiusdem altitudinis EB, ita basis AE, ad basin DE. Igitur & AE, tripla est ipsius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.



a 1. sex.

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cum enim AE, tripla sit ipsius DE: qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE: Reliqua igitur AD, earundem partium 2. continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

THEOR. 19. PROPOS. 19. o. xvij.

SI octaedrum sphęrę inscribatur: erit se-

midiameter ſphærę potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunque octaedri ducitur.

SIT baſis aliqua octaedri in ſphæra, cuius centrum D, deſcripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro ſphæræ D, perpendicularis demittatur D E; ducaturque ſemidiameter ſphæræ D B. Dico ſemidiametrum DB, potentia triplam eſſe perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. huius lib. perpẽdicularis DE, in centrum circuli ſphæræ, qui triangulum A B C, circumſcribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta B E; a quoniam quadratum diametri ſphæræ duplum eſt quadrati lateris Octaedri A B; & quadruplum quadrati ſemidiametri ſphæræ DB, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partium 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum ſemidiametri ſphæræ DB, 3. b Quia vero quadratum lateris AB, triplum eſt quadrati ſemidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ ſcilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. quarum 6. fuit quadratum lateris A B. Quare c cum quadratum rectæ DB, æquale ſit quadratis rectarum B E, D E; ſit autem quadratum rectæ DB, oſtenſum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum eſt quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum ſphæræ inſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

14. ter 3 dec.

12. ter 3 dec.

47. pri

o. xviij.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphęrę deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati: Perpendicularis autem à centro ſphæræ in aliquam

baſin

basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æquale esse dimidio lateris cubi. [a] Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi: Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.

a 15. 13 dec.

PRODVCTA autem KI, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, [b] quia AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE, ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AB, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniam vero perpendicularis KL, e centro sphæræ I, cadit in bases AE, BH, ad puncta K, & L, erunt K, & L, cētra circulorū dictas bases ambientiū in sphæra, per coroll. lēmatis 1. propos. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariā secabitur à dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea cum KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

b 6. undecimi.

c 16. undecimi.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. [d] Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ e Perspicuum au-

d 15. 13 dec.

e 31. undecimi.

tem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaque cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex B A, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

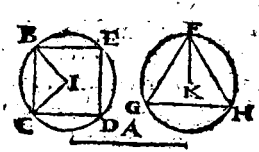
VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari ex centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Sit enim corpus regulare quodcunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, solidum autem EFGH, contentum sub EI, tertia parte superficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, qua æqualis sit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad basin ABC. Dico solidum EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Nam ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint, ipsi æqualiter a centro distabunt, per lemma 2. propos. huius lib. Ac propterea perpendiculares ex K, centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidũ, æquales erunt. Quoniam vero prisma contentum sub basi ABC, & altitudine KL, triplũ est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 6. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimi-

rum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis A B C D. Quam ob rem cum idem prisma triplum sit prismatis E F G H, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida E F G H, A B C D, æqualia. Quod est propositum.

THEOR. 21. PROPOS. 21. 8. xi.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum B C D E, & octaedrum, cuius vnum triangulum F G H. Dico eundem circulum circumscribere & quadratum B C D E, & triangulum F G H, hoc est, circulos B C D E, F G H, ipsa circumscribentes, esse æquales. Sint enim rectæ ex centris I B, K F. a Quia igitur quadratum diametri A, triplum est quadrati lateris cubi B C, & quadratum lateris B C, duplum quadrati rectę B I; (Nam ducta recta I C, fiet angulus B I C, rectus, cum subtendat quadrantem; b Ac proinde quadratum rectæ B C, æquale erit quadratis rectarum B I, I C. Quare cum rectarum æqualium B I, I C, æqualia sint quadrata; duplum erit quadratum rectæ B C, quadrati rectæ B I.) qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 2. erit quadratum lateris B C; & talium 1. quadratum rectæ B I. Rursus c quia quadratum diametri A, duplum est quadrati lateris octaedri F G; d & quadratum lateris F G, triplum quadrati rectæ F K; ex centro ductæ; qualium partium 6. ponetur quadratum diametri A, talium 3. erit quadratum lateris F G; & taliũ 1. quadratum rectæ F K. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectæ B I; æqualia erunt quadrata rectarum B I, F K; Ac propterea & rectæ ipsæ, & circuli ex



a 15. tertij decc.

b 47. primi

c 14. tertij

d 12. tertij

ipsis

ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

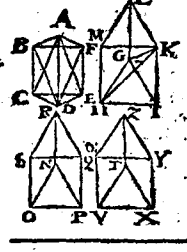
HINC fit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex centro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorum ipsas circumscribentium, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. 2 qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt à centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proindè æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. quemadmodum & oppositæ bases cubi parallelæ sunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod est propositum.

2 21. quartidecimi.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphæræ inscribantur; Erit octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHLK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus commune est ipsa diameter AD, & vertex communis A, nempe in BCDA, cuius basis BCD; in BDFA, cuius basis BDF; in CDEA, cuius basis CDE; & in DEFA, cuius basis DEF; quæ quidem omnes bases infra quadratum BCEF, exi-



stunt

ſtunt continentes cum ipſo dimidiatam partem octaedri. Quoniam vero quælibet harum pyramidum conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipſorum commune eſt AD, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri laterã exiſtunt, a inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum cõtineantur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Cõſtituatur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedi triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, cõſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. b Quoniam igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex ijs, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. qualiũ quatuor continere diximus octaedrum.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα.

a 8. pri.

b 14. quarti decimi.

Quia vero priſma TVXYZα, ad priſma GHIKLM, proportionẽ habet, quã altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadẽ quæ octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrum ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplũ tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinem tetraedri: Eſt autẽ altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarum coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpendiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atque vt latus cubi ad altitudinẽ tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nã tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quam quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito. n. quadrato diametri

ſphæræ 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex propoſ 15. lib. 13. & quadratum altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. ideoq; quadratū lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphæræ 6. a erit quadratum lateris octaedri 3. & quadratum lateris tetraedri 4. &c. Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandum erat.

COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri, ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. a Nam & quadratum diametri ad quadratum lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.

18. 13 doc.

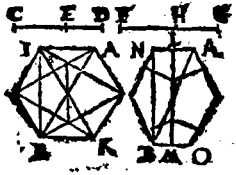
THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineę latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecae-

dri,

dri, eius sphæræ, cuius AB, diameter existit. Intelligatur enim in sphæra, cuius diameter AB, descriptum Icosaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde Icosaedri opposita AI, BK, connectantur rectæ IB, quæ subtendet vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, vt cõstat ex propos. 16. lib. 13. (Nam in ea figura, ducta recta ZF, erit RSHZF, pentagonum, ob quinque latera Icosaedri æqualia GR, GS, GH, GZ, GF, cadétia in superficiẽ sphæræ, in quo recta RH, latera opposita RX, HI, coniungens angulum RSH, subtendit) clariusque patebit ex constructione Icosaedri, quã ad finem lib. 16. ex Pappo afferemus. quod etiam videre licet in aliquo Icosaedro materiali. Quia vero AI, BK, latera opposita parallela sunt, per coroll. 3. propos. 16. lib. 13. [a] erunt anguli AIB, IBK, æquales duobus rectis; Ac proinde, cum sint inter se æquales, (Ducta enim alia diametro IK; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia sint lateribus KB, BI; & bases quoque AB, IK, æquales;[b] Erunt anguli AIB, IBK, æquales) recti erunt;[c] ideoque quadratum rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum AI, IB; Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypothesi, quadratis rectarum CD, CE; Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia sunt quadratis rectarum CD, CE; [d] Ac propterea cum CE, sit maius segmentum ipsius CD, diuisæ extrema ac media ratione; Item IA, maius segmentum ipsius IB, similiter diuisæ; (Nam IB, subtendit angulum pentagoni, cuius latus est IA, latus Icosaedri. Constat autem, rectæ subtendentis angulum pentagoni, si secetur extrema ac media ratione, [d] maius segmentum esse æquale lateri eiusdem pentagoni) æquale erit CE, maius segmentum ipsi IA, lateri Icosaedri. [e] Cum enim sit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; [f] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratũ rectæ IA,



a 29. pri
b 8. pri.
c 47. pri
d 8. terÿdec.
e 2. quarti decimi.
f 22. sex

Ac

Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ IA: Ostensa sunt autem quadratis rectarũ CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [a] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale est quadratũ rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales sunt. Quod est propositum. 14.2.n

RVRSVS latera Dodecaedri opposita AN, BO, secentur bifariam in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipsa latera, recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales, parallelæ sunt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. [b] erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Est autem recta LM, secans latera opposita bifariam, perpendicularis ad ipsa latera opposita; per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, [c] Ac proinde quadratũ rectæ propositæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale sit positum quadratis rectarũ FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, sit minus segmẽtum ipsius FG, sectæ extrema ac media ratione: Itẽ NA, minus segmentum ipsius NB, hoc est, ipsius LM, similiter diuisæ, per coroll. 4. propos. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus segmẽtum ipsi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter ostendemus, ac supra demonstrauimus, CE; maius segmentum æquale esse ipsi IA, lateri Icosaedri. Si recta ergo linea proposita potuerit totam aliquam lineam sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris lineę latus Dodecaedri eius sphæræ, cuius recta linea proposita diameter existit. Quod erat ostendendum. 33. pri

47. pri

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus segmẽtum rectæ lineæ extrema ac media ratione sectę: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius segmentum DE, & minus EF, rectæ DF, sectæ extrema ac media ratione. Sit quoque eidem sphæræ inscriptum Icosaedrũ GHI, cuius latus GH, & subtendens angulum pentagoni ex lateribus Icosaedri compositi GI, & diameter HI. Dico quadratrum lateris GH, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; a erit GH, maius segmentum ipsius GI, diuisæ extrema ac media ratione. b Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema, ac media ratione. c Quia vero quadratum diametri HI, æquale est quadratis rectarum GI, GH, quod angulus IGH, rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris AB, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarũ DE, EF: d Est autem quadratum diametri HI, duplum quadrati lateris octaedri AB. Igitur & quadrata rectarum GI, GH, dupla sunt quadratorum rectarum DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF,

a 8. tertij dec.
b 5. tertij dec.
c 47. pri
d 4. tertij dec.

ita

ita est quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF. (a Nam cum sit vt GI, ad GH, ita DE, ad EF. b Erit quoque vt quadratum rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratum rectæ DE, ad quadratum rectæ EF; & componendo, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadratum rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF; & permutando, vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita quadratum rectæ GH, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ GH, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat; cui recta subtendatur: Erit recta linea, quę potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quæ æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD, sitque recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E, latus esse octaedri illius sphæræ, in qua AD, vel AC, latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmentum AC, vel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphæræ potentia tripla maioris segmenti BC, nempe lateris cubi; c Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati

maioris

maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphæræ æquale erit quadratis rectarum AB, AD, hoc est, quadrato rectæ BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphæræ. a Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Possit autē recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius A D, latus Dodecaedri ponatur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum. a 14. ter 13 dec.

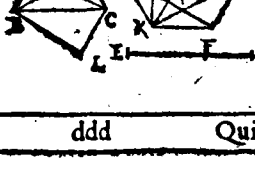
COROLLARIVM.

b QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit maius segmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum BC,) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD,) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit. b 8. ter 13 dec.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineæ rectæ extrema ac media ratione sectę; latus Icosaedri eidem sphærę inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri A B C D, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectæ E G, diuisæ extrema ac media ratione: Sit quoque H I, latus Icosaedri H I K, eiusdem sphæræ. Dico HI, rectā potentia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connecturq; recta IK, diameter.

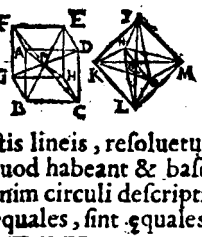


a Quia igitur H I, eſt maius ſegmentum rectæ H K, diuiſæ extrema ac media ratione; b Erit quoque compoſita K HI, diuiſa eodem modo in H, maiuſque ſegmentum HK, & minus HI. c Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulum BCL, ita vt BL, recta ipſi BF, & CL, ipſi F G, ſit æqualis, d Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur poſſe rectas BL, CL, hoc eſt, rectas EF, FG: Eſt autem & angulus IHK, rectus, vt propoſ. 23. huius lib. oſtendimus; e Eſtque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. f Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula ſunt. g Ac propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CL. h Atqui IK. diameter eſt potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & H I, latus Icoſaedri erit potentia ſeſquialterum ipſius C L, hoc eſt, minoris ſegmenti F G. Si latus itaque Tetraedri poſſit maius, & minus ſegmentum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ.

SINT in eadem ſphæra cubus A B C D E F G H, & Octaedrum I K L M N O, quorum centra P, & Q. Dico eam eſſe proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet ſuperficies cubi ad ſuperficiem Octaedri; nec non, quam habet cubi latus ad ſemidiametrum ſphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, reſoluetur cubus in ſex pyramides æquales, quod habeant & baſes æquales, & altitudines. Cum enim circuli deſcripti circa pyramidum, ſeu cubi baſes æquales, ſint æquales, ac propterea æqualiter à cen-



tro

tro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem o b causam, [a] Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & octaedri triangulum; æqualiter distabunt bases pyramidum cubi, & octaedri a centro sphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita basis pyramidis cubi ad basim pyramidis Octaedri, ex scholio propos. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demonstrauimus, sextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipse, ad pyramidem Octaedri, ita sextuplum basis pyramidis cubi, superficies videlicet tota cubi, ad basim pyramidis Octaedri; Ideoque rursus, ex eodem scholio, vt cubus ad octuplum Pyramidis Octaedri, nimirum ad ipsum Octaedrum, ita superficies cubi ad octuplum basis pyramidis Octaedri, ad ipsam scilicet superficiem Octaedri. Quod primo loco ostendendum proponebatur.

[a] 21. quarti decimi.

SINT rursus in eadem sphæra cubus ABCD, & octaedrum E F G H I K, sitque diameter sphæræ, seu Octaedri E G, & centrum L. Auferatur autem ex A B, latere cubi tertia pars A M; Item ex semidiametro E L, tertia pars E N. Quoniam vero quadratum I F K H, lateris Octaedri, basis existens duarum pyramidum, in quas Octaedrum secari diximus propos. 16. huius lib. [b] sesquialterum est quadrati BD, lateris cubi BC: Est autem & recta A B, rectæ BM, sesquialtera, ex constructione; reciprocabuntur bases IFKH, BD, & altitudines A B, BM: [c] Ac propterea parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo super basim B D, & sub altitudine A B, nimirum cubo A B C D. Rursus quia recta EL, rectæ EN, tripla est; erit & parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine E L, triplum parallelepipedi super eandem basim, & sub altitudine E N, vt

[b] 18. tertiædec.

[c] 34. vndecimi.

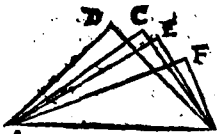
in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus: Sed & idem parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine EL, triplum est pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propos. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo super basim IFKH, & sub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum est parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla sit altitudinis EN. a Item Octaedrum EFGHIK, duplum est pyramidis IFKHE. Aequale igitur erit parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, est ad parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex scholio propos. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita est AB, ad EL. (Cum enim sit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL: & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum super basim IFKH, & sub altitudine BM, æquale est ostensum cubo ABCD: Et parallelepipedum super eandem basim, & sub altitudine LN, æquale est Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, semidiametrum sphæræ. Quod secundo loco demonstrandū proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, &c. Quod erat ostendendum.

a 16. quarti decimi.

SCHOLIVM.

b 13. tertij dec. *QVIA demonstratum est* b, *diametrum sphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia describuntur, esse sesquialterā potentia lateris Tetraedri, ita vt, si quadratum diametri ponatur 3. partium, earundem 2. sit quadratum lateris Tetraedri; perspicuum est, si ex quadrato diametri data, auferatur quadratum duas tertias illius partes continens, vt in scholio propos. 13. lib. 6. ostendimus, latus huiusce quadrati esse Te-*

traedri latus. Vel etiam, si quadrato diametri constituantur duo quadrata aqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodem scholio; maioris quadrati latus esse latus Tetraedri. Nam si ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur necesse est quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem, quadratum lateris Tetraedri.



Vt si diameter sphæræ ponatur AB, ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ AC, continens duas tertias partes, quadrati diametri AB; Vel si constituantur duo quadrata rectarum AC, BC, quadrato diametri AB, aqualia, ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC; Erit recta AC, latus Tetraedri.

RVRSVS a cum ostensum sit, diametrum sphæræ potentia duplã esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri AB, dematur quadratum rectæ AD, quod dimidium sit quadrati diametri AB; Vel si cõstituantur duo quadrata rectarum AD, BD, quadrato diametri AB, aqualia, & inter se proportionem habentia aqualitatis, secundum doctrinam scholij propos. 33. lib. 6. rectam AD, latus esse Octaedri. a 14. tertiædec.

DEINDE, b quoniam docuimus, diametrum sphæræ potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum rectæ BC, quod tertia pars sit quadrati diametri AB; Vel si quadrato diametri AB, constituantur duo quadrata aqualia rectarum AC, BC, ita vt quadratum rectæ AC, duplum sit quadrati rectæ BC, iuxta doctrinam eiusdem scholij propos. 33. lib. 6. Lineam rectam BC, cubi latus existere. Vel certe cum diameter AB, possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri AB, auferatur quadratum lateris Tetraedri AC, relinqui quadratum lateris cubi BC; Quemadmodam e contrario, si ex quadrato diametri AB, tollatur quadratum lateris cubi BC, remanet quadratum lateris Tetraedri AC. b 15. tertiædec.

PRAETEREA, quia si recta aliqua potuerit totam

quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum [a]; Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea; Constat si quadrato diametri AB, exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 13. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum AE, BE, proportionem habentium, quam recta quauis extrema ac media ratione diuisa ad maius segmentum; Rectam minorem BE, esse Icosaedri latus.

[a] 23. quartidecimi.

POSTREMO, quoniam si recta quæpiam potuerit totam aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; [b] Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri AB, constituatur duo quadrata æqualia rectarum AF, BF, proportionem habentium, quam quæcunque recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum; Minorem lineam BF, latus esse Dodecaedri.

[b] 23. quartidecimi.

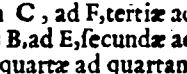
HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidē sphæræ impositorum scripserunt. Sequētes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adijciemus, quæ ad eorundē quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continuo proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT

SINT qratuor rectæ A,B,C,D, continue proportionales; necnon quatuor A,E,F,G, ita vt A, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F,tertiæ ad tertiam,esse duplicatam proportionis B,ad E,secundæ ad secundam, & proportionem D, ad G,quartæ ad quartam esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cum enim recta C,ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; [a] habeat autem & quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A,duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B,ad rectam A: Erit vt recta C,ad rectam A,ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A. Eadem ratione erit,vt recta F, ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A; Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E, vt recta A, ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B, ad quadratum rectæ E, vt recta C, ad rectam F: [b] Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B,ad rectam E. Quod est primum.



quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

[a] 20. sex

[b] 20. sex

RVRSVS cum recta D,ad rectam A, ex defin. 10. lib. 5. proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B,ad rectam A; [c] habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B,ad rectam A; Erit vt recta D,ad rectam A, ita cubus rectæ B, ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G,ad rectam A, ita cubus rectæ E, ad cubum rectæ A; Et conuertendo

Cubus B. Recta D
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G.

[c] 33. vndecimi.

vt recta A, ad rectam G, ita cubus rectæ A, ad cubum rectæ B. Quia ergo est cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, vt recta D, ad rectam A; & cubus rectæ A, ad cubũ rectæ E, vt recta A, ad rectã G; Erit ex æquo, cubus rectæ B, ad cubum rectæ E, vt recta D, ad rectam G: [a] Est autem proportio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineæ rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

a 33. vn decimi.

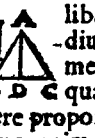
SCHOLIVM.

HOC idem demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æqui lateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositum BC, recta perpendicularis AD, quæ bifariam secabit latus BC, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris AB. [b] Inueniantur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris AB, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub A D, B D, æquale sit triangulum A B C, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. [c] Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale,



b 13. sex

c 17. sex

qua-

quadratum rectæ E; Aequalia erunt triangulum ABC, & quadratum rectæ E. [a] Quoniam vero quadratum lateris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB, ad rectam E; Constat, quadratum lateris AB, ad triangulum A B C, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 20. sex

COROLLARIVM.

ITAQVE, si in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidiū lateris æquale est ipsi triangulo. Ostensum enim est, quadratum rectę E, quæ media proportionalis est inter AD, DB, æquale esse triangulo A B C.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem sphęra describantur: erit quadratū cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpendicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiusuis ABCD, & Tetraedri in eadem sphæra descripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E, ad latus oppositum FG, deducta diuidens FG, latus bifariam, ex coroll. propos. 12. huius lib. Dico, esse quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli E F, ad perpendicularem EH. Posita enim inter EH, FH, media proportionali IK; [b] cum quadratum lateris Tetraedri E F, duplum sit quadrati lateris cubi A B; [c] sit autem & duplum rectanguli sub latere EF, & dimidio eius F H, eo quod dictum quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum sub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; [d] Ac propterea AB, media proportionalis

[b] 8. ter tij Elec.
[c] 1. sex.
[d] 17. sex

erit

erit inter EF,FH,hoc est,tres rectæ FH,AB,EF, continue erunt proportionales:Sunt autem & tres rectæ FH, IK, EH,continue proportionales, ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit FH,[a] erit proportio rectæ EF,ad rectam EH, tertiæ ad tertiam, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, secundæ ad secundam duplicata. Quare cum & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectæ IK, hoc est, ad triangulum EFG, (est enim ex coroll. propos. 29. huius lib. quadratum rectæ IK,æquale triangulo EFG,)[b] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB,ad rectam IK;Erit quadratum cubi AC,ad triangulum Tetraedri EFG,vt latus EF,ad perpendicularem EH. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphæra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

FH. AB. IK. EF. EH.

a 28. quartidecimi.

b 20. sex

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis vero, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra, descripti.

SIT Tetraedri triangulum ABC, & altitudo, seu axis Tetraedri DE, latusque cubi eiusdem sphæræ F. Dico latus Tetraedri AB, esse potentia sesquialterum axis DE: Axem vero DE, potentia sesquitertium lateris cubi F. Nã circa triangulum[c] descripto circulo ABC; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt constat ex propos. 15. huius lib. ducatur AD, semidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratum lateris AE, hoc est, lateris AB, d æquale est quadratis rectarum AD,DE,[e] & triplum quadrati semidiametri AD; Fit,

c 5. quar

d 47. pri e 12. ter tijdec.

vt po-

vt posito quadrato lateris AB, seu AE, partium 6. quadratum rectæ AD, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis DE, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

QVONIAM vero latus Tetraedri AB, a potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris AB; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis DE, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum. a 18. ter tydec.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. b quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis DE: perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri: Ac proinde, c cū quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ. n. proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. apparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13. b 13. ter tydec. c 20. sex

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinem Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet d tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi. d 12. quartidecimi.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus ABC, & Tetraedrum DEFG. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro al-

titu-

titudinem.[a] Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularem dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis A B C; Erit basis prismatis A B C, ad basim prismatis D E F G H I, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata A B C, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiusdem tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. Quod ostendendum erat.

[a] 30. artificimi.

COROLLARIVM.

VNDE, prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum A B C, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM DECIMVM.

ET SOLIDORVM QVINTVM vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypsiclis Alexandrini de quinque corporibus.

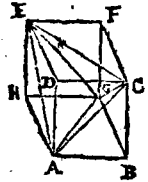
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato cubo pyramidem describere.

IN cubo dato ABCDEFGH, oporteat describere pyramidem, seu tetraedrũ. Ab vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in basibus tribus ipsum constituentibus tres diametri EA, EG, EC, ex quarum extremitatibus A, G, C, similiter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus basibus, quæ extrema priorum trium diametrorum connectant. Quoniam igitur diametri quadra-

torum

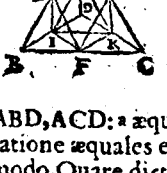


torum æqualium æquales sunt, quod potentia duplæ sint laterum æqualiũ quadratorum, vt in scholio propos. 47 lib. 1. demonstrauimus, perspicuũ est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in eubo esse inscriptum, ex defin. 31 lib. 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedro ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, constituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra, planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI, infra



idem planum consistunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, trianguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterorũ ABD, ACD: æquales erunt bases EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra tetraedrum descriptum est; cũ omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

CO-

COROLLARIVM.

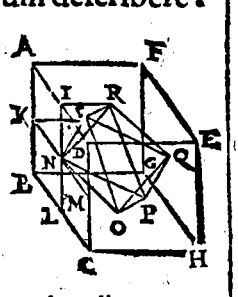
QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt æqualia, sese mutuo ad angulos rectos secantia, vt in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. demonstrauimus: quorum quodlibet pyramidem ABCD, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem HIkD, & prisma HIKGAE: necnon in pyramidem EBFI, & prisma EFCGKI; Constat autem pyramidem pyramidi esse æqualē, & prisma prismati: a Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FkHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, terraedrum bifariam secari tribus quadratis æqualibus, quę octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.

a 8. *duodecimi.*

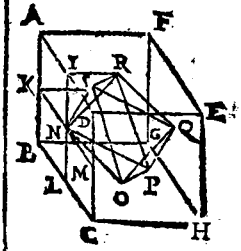
PROBL. 3. PROPOS. 3. iii.

IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato AH. Diuidantur latera basis ABCD, bifariam in punctis I, K, L, M, quæ connectantur rectis IL, KM, secantibus sese in N, puncto, quod quidem centrum est quadrati ABCD, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basiū centra O, P, Q, R, S. Erunt igitur



omnes rectæ ex dictis centris ductæ ad media puncta basium, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, vt perspicuum est ex prædicta demonstratione propos. 8. lib. 4. Postremo si præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planum NOQR; quatuor autem OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, triangu-



li KNS, quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictũ est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cũ NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis est recto angulo KAF, in quadrato AG, eademq; ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt baſes NR. NS, æquales. Non aliter oſtendemus, reliquas lineas omnes & inter ſe, & his duabus æquales eſſe; ſi nimirum e centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra exiſtunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas eſſe ad I, dimidium lateris AD, quod commune eſt quadratis AC, AE, quorum centra ſunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ ſunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N, & S, &c. Quam ob rẽ conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum eſt deſcriptum, cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 10. vn decimi.

[b] 4. pri.

[c] 2. quinti decimi.

[d] 2. quinti decimi.

ALITER. [c] In cubo dato inſcribatur pyramis; [d] In hac deinde pyramide Octaedrum figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonſtratione propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

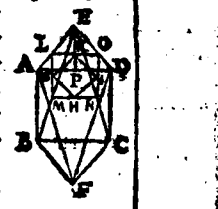
COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo descripti NQ, RO, (si ducerẽtur,) se mutuo secãt ad angulos rectos, ex coroll. 1. prop. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarum: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum sese mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus. diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4. iiii.

IN dato octaedro cubum inscribere.

DATVM octaedrum sit ABCDEF, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli octaedri, & quælibet duæ octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis ABCDE, cuius basis ABCD, quadratum, triangula vero æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC, CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC; CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habent cõmunia. Est enim EM, latus cõmune triangulis LME, EMN; Et EN, commune triangulis EMN, NEO; & denique EO, commune triangulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triangulũ LME, triãgulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostendemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sunt.



a Quia vero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP, b Est autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque

a 18. quarti decimi.
b 2. sex.

constituent LM N O. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; a æqualis erit angulus M L O, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniã vero tam planũ per LO, LM, quam per NM, NO, ductũ, b parallelum est plano ABCD, c ipsa, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, d per coroll. propos. 12. lib. 13. d Erunt & bases KL, KO, æquales, hoc est, recta LO, bifariam secabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam secabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum sint laterum quadrati LN, dimidia, æquales inter se erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, e æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano existunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; (f cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus sint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propos. 32. lib. 1. semirecti; rectus erit angulus GKI; Eademque ratione recti erunt anguli KGH, GHI, HIK.) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod si eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, describentur similiter quadrata: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter se erunt. Quare sex huiusmodi quadrata cubum component: qui quidem

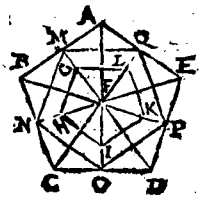
a 10. vndecimi.
b 15. vndecimi.
c 15. vndecimi.
d 4. pri.
e 4. pri.
f 13. pri

ex

ex defin.3 1.lib.11.intra Octaedrum descriptus erit, cum octo eius anguli tangãt octo Octaedri bases in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

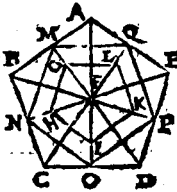
PROBL. 5. PROPOS. 5. v. vi

IN dato Icosaedro, Dodecaedrum inscribere.



SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icosaedro continẽtur, quarum videlicet bases sunt pẽtagona ex quinque Icosaedri lateribus composita, vertices vero, duodecim anguli Icosaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius basis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF, CDF, DEF, EAF, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectantur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex scholio propos.12.lib.13.bifariam secabunt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD; PE, QE, QA, æquales sint, quæ cum angulos comprehendant æquales, nempe anguloꝫ pentagoni, [a] æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum æquàlium ad bases oppositas demissæ. Dum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BM, trianguli FBM, æqualia sint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; [c] erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam vero & rectæ FG, FH, FI, FK, FL, nimirum semidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circumscribẽtiũ, æquales sunt, & angulos

[a] 4. pri.
[b] 8. pri.
[c] 4. pri.



comprehendunt æquales, vt demonſtratum eſt; [a] Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. [b] Rurſus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quam anguli BNM, MNO, ONC, æquales ſunt duobus rectis. [c] Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, exiſtens. Denique cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales ſint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, dnplæ ſunt ipſarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. dparallelæ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipſis MN, NO, OP, PQ, QM; [e] Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter ſe æquales erunt. [f] Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta parallela ſunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto conueniuntque in recta HI, ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum conſtituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL, pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum, rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula; quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem, duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum viginti anguli dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendũ.

a 4. pri.
b 13. pri
c 4. pri.
d 2. ſex.
e 10. vn decimi.
f 15. vn decimi,

CO-

COROLLARIVM.

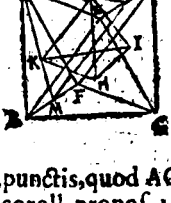
ITAQVE cum omnes rectæ è centro Icosaedri ad centra basium, hoc est, ad angulos Dodecaedri sibi inscripti, sint æquales; (Cũ enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. perpendiculares sint ad plana circulorũ æqualium bases Icosaedri circũscribentium, atque adeo eorundem distantiæ existant à centro sphæræ, seu Icosaedri; æquales erunt inter se, ex lemm. 2. eiusdem propos. 19. lib. 14.) Idem erit centrum Icosaedri, atque sibi inscripti Dodecaedri.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

O. V.

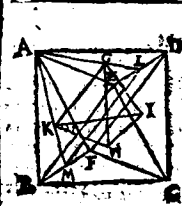
IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro ABCDEF. In pyramide octaedri superioris ABCDE, sumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerso sibi respondentium AED, BEC; Item in pyramide inferiori ABCDF, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AFB: quæ quidem centra coniungantur sex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, vt fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per scholium propos. 12. lib. 13. coniungaturque recta LM, quæ ipsi BE, vel FD, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterum DE, BF, oppositorum in quadrato EF. Quoniam vero rectæ AL, AM, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, punctis, quod AG, AK, duplæ sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propos. 18. lib. 14. [b] Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangula ALM, AGK, similia. [c] Quare vt AL, ad LM, ita AG, ad GK; & permutando.



x 33. pri

b 2. sex.
c 4. sex.



vt AL, ad AG, ita LM, ad GK. Est autē AL, ipsius AG, sesquialtera; quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostendemus, & reliquarum linearū cētra G, H, IK, cōiungentiū sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici, ideoque Tetraedrum constitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 3 1. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem describimus. Quod erat faciendum.

a 18. quartidecimi.

ALITER. b In octaedro dato inscribatur cubus, c & in cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; & in angulis cubi collocentur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

b 4. quartidecimi.

c 1. quintidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA vero ostensum est, vtramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM, d ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse: e Atque eadem ratione KH, ipsis FC, EA, parallelum esse: d Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DEC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallelas, binis nimirum singula: Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singulas videlicet binis oppositis.

d 9. vndecimi. & 15. vndecimi.

COROLLARIVM II.

PRAETEREA, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetrae-

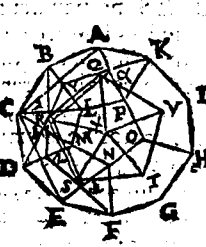
tetraedrum in cubo descriptum, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituantur: Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæræ circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptū, vt constat ex 4. propos. huius lib. Sit aūt diameter sphæræ sesquialtera axis tetraedri in ea sphæra descripti per coroll. 1. propos. 11. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quæ centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

o. vii.

IN dato dodecaedro Icosaedrum describere.

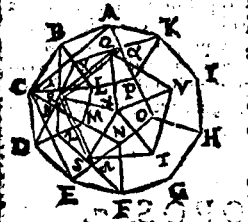
SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoque in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiusdem propositionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant, (a constat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) b Igitur Aα, Cβ, paralle-



a 28. ter
b 28. pri

[a] 9. undecimi. [b] 4. pri. [c] 33. pri [d] 4. pri. [e] 4. ter [f] 4. ter. [g] 8. pri. [h] 4. pri.

læ sunt rectæ BY, a atque adeo & inter se parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM, b quæ æquales sunt, cum latera KA, KB, lateribus DC, DM, æqualia sint, anguloſque contineant æquales. c Rectæ ergo ipſas connectentes AC, αβ, æquales erunt & parallelæ. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubtendant rectæ CL, EN, per centra R, S, rectæ ducantur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γδ, æquales eſſe ipſas CE, γδ:



d Sunt autem AC, CE, inter ſe æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt conſtat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt verſus X, vt figura monſtrare videtur, ſed extrorſum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter cum & rectæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales ſint, (Nam YQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum BL, DM, a centris Q, R, S, circulorum æqualium, qui nimirum pentagona æqualia circumſcribunt, e atque adeo æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, diſtantiæ ſunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulorum æqualium, fidoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt;) g erunt quoque anguli YβγZδ, æquales: Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales ſint; h æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorum copulantes. Quare triangula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri L, M, N, O, P, conſtituta, æquilatera erunt & æquidia. Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri, ſimilia triangula conſtruantur:

tur:

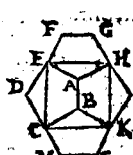
tur: (Habet enim dodecaedrum viginti angulos solidos) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

o. viij.

IN dato Dodecaedro cubum describere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus, ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidē ABCDE, ABKIH, secundum latus idem commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLK, secundum angulos EAH, CBK. In his vero pentagonis subtendantur angulis A, B, D, I, rectæ EH, CK, CE, HK, quadrilaterum efficientes EHKC, quod æquilaterum erit. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, angulosque contineant æquales, ex hypothesi; a æquales erunt bases EH, HK, KC, CE. b Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferunt ex circulo pentagonum ABCDE, circumscribente arcus æquales; Erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. rectæ AB, CE, parallelæ. Eademq; ratione parallelæ erunt AB, HK. c Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; d Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, e in eodemque cum ipsis plano; ideoque parallelogrammum erit EHKC; quod ostēdimus esse æquilaterum. Quia vero planum ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1. propos. 10. lib. 14. circa quadrilaterum EK, descriptum; f Erunt tam anguli oppositi E, K, quam



a 4. pri
b 28. ter
9. vn decimi.
d 33 p
e 7. undecimi.
f 22. ter

a 34. pri. quam C,H,duobus rectis æquales; a Ac propterea cum oppositi E,& K,sint æquales,necnon & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli E,C,K,H,recti. Quare EK, quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis dodecaedri,& latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pentagonis similiter octo angulis octo aliæ rectæ subtendantur eodem ordine;constitutum erit solidum sex quadratis contentum;quæ cum sint æqualia, b eo quod eorum latera

b 4. pri.

æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt;cubum constituent intra Dodecaedrum descriptũ. propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri,eiusq; octo anguli in octo Dodecaedri angulis residēt. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciēdum.

COROLLARIVM.

HINC fit,rectam,quæ subtendit vnum angulum pentagoni æqui lateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est,CE,ipsi AB,esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

o. ix.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit octaedrum,sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3.propos.17.lib.13.nimirum AB,CD,EF,GH, IK,LM,quæ bifariam secentur in N,O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO,PQ,RS, sectiones oppositorum laterum coniungētes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos dividēt, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes NT, OT,PT, QT, RT, ST. Quo circa

c 4. pri.

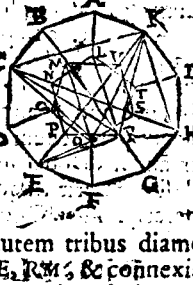
duo-

duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erunt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineãtur; ac proinde octo triangula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erũt, cõstituenteq; octaedrum intra Dodecaedrũ descriptũ, cũ sex anguli octaedri tangãt sex latera Dodecaedri opposita, ex cõstructione. In datõ igitur Dodecaedro octaedrũ descripsimus. Quod faciẽdũ erat.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT, MOQSV, BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pentagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidẽ C, opponitur lateri AL, communi pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LT, cõi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, cõi pentagonis RLN, LNB;) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex punctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, & fiet pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; a quoniam dodecaedrum in sphæra describitur; si planum trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib. 14. b Ac propterea angulus CKH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostendemus rectos esse angulos CRH, KRE, KQE,



RQM

a 7. ter tij dec.

b 31. tert.

a 47.pri RQM, CQH. a Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autem quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Aequalia erunt quadrata rectarum CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM; nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ. n. b 4.pri rectæ cum subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, b æquales sunt;) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CKRQ; quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor c 8.quin sidec. angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrū.

d 11.quin sidec. ALITER. c In proposito Dodecaedro cubus describatur; d & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem describimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

e 5.quin sidec. f 8.quin sidec. e DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrū; f & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim anguli cubi resideant in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedri in centris basium Icosaedri

faedri collocentur; tangent anguli cubi eadem centra basium Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rem in dato Icosaedro cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 12. PROPOS. 21.

o xii.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

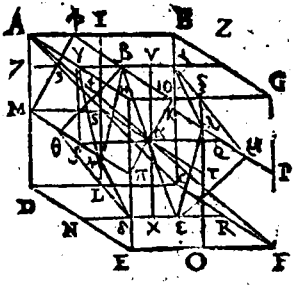
IN dato Icosaedro a cubus describatur, b & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. c Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

a 11. *quinti dec.*
b 1. *quinti dec.*
c 11. *quinti dec.*
d 1 *quinti dec.*

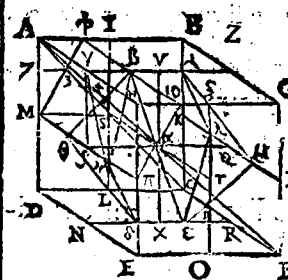
PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SIT in cubo proposito AF. describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, ρ, coniunctis rectis IL, KZ, ξO, Mπ, KP, NR, quarum inter se coeuntium, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo punctо duæ lineæ ducantur in figura vestra Hac C.



tur;



stur, sed vna duntaxat, quæ rursus bifariam secentur in δ,V,T,ρ,Q,X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ se mutuo in centro α, bifariam secãt, & ad angulos rectos, vt in corollar. propos. 3. huius lib. docuimus, sunt que lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia rectarũ YZ. Mϖ, secentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt sint maiora segmenta, Yβ, Zγ, Mθ, ϖκ, ductis rectis Yρ, Yκ, βθ, βκ. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρκ, βV, segmenta minora rectarum æqualium YV, ρτ, æqualia quoque: a Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ YC; Erũt & quadrata rectarum Yρ, ρκ, tripla eiusdem quadrati rectæ Yβ. Quare, b cum quadratis rectarum Yρ, ρκ, æquale sit quadratum rectæ Yκ, c quod angulus Yρκ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, d recta est ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum, rectus erit angulus CYκ, ex defin. 3. lib. 11. e Ac propterea quadratum rectæ Cκ, æquale quadratis rectarum Yκ, YC, existẽs, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ, (quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ YC, cum quadratum rectæ Yκ, triplum sit ostensum quadrati rectæ Yβ.) Ideoque f cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta Cκ, rectæ Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata est duplæ proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & θκ, dupla ipsius ρκ, quod minora segmenta θρ, κρ rectarum æqualium Mρ, ϖφ, æqualia sint. g Erit igitur vt Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipsius Yβ, ad θκ, duplam ipsius ρκ; Est autem Yβ, maius segmentum ad ρκ, rectam minoris segmento βV, æqualem, vt tota ad maius segmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac pro-

a 4. sexti. b 47. primi. c 29. primi. d 4. undecimi. e 47 primi. f 20. sexti. g 19. quinti.

inde $\theta\kappa$, erit maius segmentum rectæ $\beta\kappa$, sectæ extrema ac media ratione. Eadem ratione ostendemus $\theta\kappa$, maius esse segmentum rectæ $\beta\theta$, extrema ac media ratione sectæ, si nimirum ducatur recta $Y\vartheta$. Quare æquales erunt $C\vartheta, \beta\kappa$, constituentes triangulum Isosceles $C\theta\kappa$, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus; Ac proinde $\theta\kappa$, erit latus pentagoni in circulo triangulum $\beta\theta\kappa$, circumscribente descripti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

INTELLIGATVR iam planum trianguli $\beta\vartheta\kappa$, extendi, (ducta per β, hecta $C\varphi$, ipsi $M\pi$, parallela,) per parallelas $M\pi, \varphi$ 10. vt sit planum extensum $\varphi\pi$, occurrens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi $A\varphi$, parallela, connectaturque M 3; a quæ parallela est vtriq; $A\varphi, 73$, Quoniã igitur per coroll. propos. 4 lib. 6. triangulũ A 73. simile est triãgulo AMS; b ac proinde vt AM, ad MS, ita est A 7. ad 73. Sunt aũt AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erunt quoque A7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad $A\varphi$, ita M7. ad 73. Est autem $A\varphi$, maius segmentum rectæ M A, diuisæ extrema ac media ratione. (c quod æquales sint $A\varphi$, YC, necnon & MA, YV, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7A, maius segmentum erit rectæ M7. extrema ac media ratione sectæ; d Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M 7. e Atqui vt M7. ad 7A, ita est S3. ad 3 A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusque segmẽtum est S3. f Quia vero $S\alpha T$, parallela est ipsi $M\pi$; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per $S\alpha T$, planum ducatur parallelum plano $\varphi\pi$, ducto per $M\pi$, g secabuntur rectæ AS, $A\alpha$, in easdem rationes, in punctis 3. & 4. cum planum $\varphi\pi$, rectas AS, $A\alpha$, secet in 3. & 4. at planum per $S\alpha T$, ductum plano $\varphi\pi$, parallelum eadem secet in S, & α. Atque idcirco, cum AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo $A\alpha$, semidiameter cubi, in 4. maiusque segmentum erit α4.

a 33. pri

b 4. sex.

c 34. pri

d 5. tertij dec.

e 2. sex.

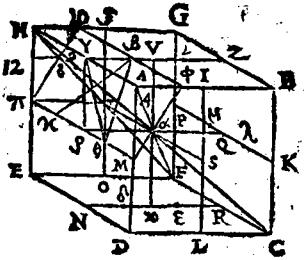
f 33. pri

g 17. undecimi.

IISDEM

IISDEM argumentis ostendemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media ratione a plano φπ, vt perspicuum est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secũda appareat. Sunt enim lineamẽta omnino similia lineamentis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratũ AC, locũ quadrati HF; & quadratum HF, locum quadrati AC, obtineat in hac secunda figura. Quod tamen in prima figura, sine hac inuersione probabitur etiam hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figura; (Hæc deest in figura, quam tamen quilibet ducere poterit) quã planum φπ, secet in 9. prope punctum H; intelligaturque per rectam AH, planum plano φπ, parallelum. Quonia igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniunt, secanturque planis parallelis in punctis A, H; & 4, 9; (Nam planum φπ, eas secat in 4. & 9. planum vero per AH, ductum plano φπ, parallelum, easdem secat in A, & H;) [a] erit vt α 4, ad 4 A, ita α 9, ad 9 H. Cum ergo αA, secta sit in 4 extrema & media ratione, erit quoque αH, similiter secta, quæ quidem demonstratio locum etiam habet in hac cubi inuersione in secunda figura. Ostendamus nunc, si rectæ iungantur θ4. β 4, β9. κ9, rectilineum β4θκ9. in plano φπ, existens, pentagonum esse æquilaterum, & æquiangulum.

a 15. vndecimi.

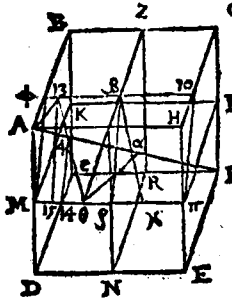


INVERTATVR rursum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirum continent triangulum βθκ, siue planum φπ, hunc situm habeant, quem monstrat tertia hęc figura. Deinde in plano φπ, recta coniuncta θ 4. extendatur vsque ad rectam φ 10. in punctum 13. Quoniam igitur ducta recta KP, & iunctis rectis MK, [b] P. planum MP, parallelum est plano AG, (quod & rectæ PK, KM, paral-

b 15. vndecimi

lelæ

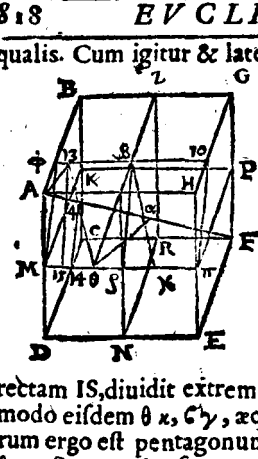
lelæ ſint rectis GB, BA,)[a] ſecatque cubum bifariam; ideo que per centrum α, tranſit, per ea quæ in 1 chol. propoſ. 39. lib. 11 oſtenſa ſunt; ſi per rectas α4 A, θ4 13. planum extendatur, [b] fient αθ, A 13. communes ſectiones planorum MP, AG, parallelæ; Ac proinde triãgula αθ4. 1α34. æquiangula erunt; [c] Eritque vt α4 ad 4 A, ita θ4. ad 413. Quare cum αA, in 4. ſecta ſit extrema ac media ratione, vt oſtendimus; eodem modo erit ſecta ϑ13. in 4. Rurſus plano NZ, per centrum α, tranſeunti, parallelum ducatur planum per punctum 4. ex ſchol. propoſ. 15. lib. 11. ſecans φπ, recta 4 14. [d] Eſt autem eidem plano NZ, parallelum planum DB. [e] Rectæ igitur αA, ρM, in eaſdem rationes ſecabuntur in punctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. ſecta erit extrema ac media ratione, minuſque erit ſegmentum 14 M, ideoque æquale minori ρϑ, ipſius Mρ. Quare cum ex ρ14. maiori ſegmento ipſius ρM, auferatur ρϑ, minus ſegmentum; Erit, vt demonſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13. ρ14. diuiſa in θ, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmẽtum erit ρϑ Poſtremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela, [f] ſecabuntur rectæ θ13. ϑ15. proportionaliter; Ac proinde & ϑ15. ſecta erit in 14. extrema ac media ratione, maiuſque ſegmẽtum erit ϑ14. [g] Quapropter erit vt ρϑ, maius ſegmentum ad ϑ14. minus, ita θ14. maius ad 14. 15. minus: Vt autem ϑ14. ad 14. 15. ita eſt tota ϑ15. ad θ14. maius ſegmentum. Igitur erit vt ρϑ, ad θ14. ita ϑ15. ad eandem ϑ14. Ac propterea rectæ ρθ, vel ρχ, & ϑ15. æquales erunt Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelum per 4. 14. ductum, ſecantur plano φπ, [h] erunt communes ſectiones ϑρ, 4. 14. parallelæ, ideoque & 13. 15. βρ, parallelæ erunt, [i] angulusque externus βρχ, interno 13. 15 ϑ. æ-



[a] 32. vndecimi.
[b] 16. vndecimi.
[c] 4. ſex.
[d] 15. vndecimi.
[e] 17. vndecimi.
[f] 2. ſex.
[g] 2. quartidecimi.
[h] 6. vndecimi.
[i] 29. pri-

qualis. Cum igitur & latera βρ, ρκ, lateribus 13. 15. 15θ' sint æqualia. a æquales erunt quoque rectæ βκ, 13 θ. Ac proinde & earum segmenta maiora θκ, θ4, (Ostensum enim est θκ, esse maius segmentum ipsius βκ,) æqualia erunt. Eadem arte & Cδ, ipsi βγ, in prima figura ostendetur æqualis, si simili situ triãgulum Isosceles formetur super basim βγ, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem θκ, Cγ, æquales erunt κϑ. Cϑ. Aequilaterum ergo est pentagonum β4θκϑ, quandoquidem βγ, θκ, rectæ æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarũ, quales sunt YV, ZV, πρ, Mρ. Sed & æquiangulũ, vt mox ostẽdemus. Si igitur hac arte duodecim triangula, nimirum ad singulas rectas Mπ, YZ, NR, IL, ξO. KP; bina ipsi βθκ, similia, & æqualia constituantur; Ita enim ad Mπ, duo huiusmodi triangula videsβθκ, δθκ,) & ipsorũ beneficio duodecim pentagona ipsi β4θκϑ, similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in sex rectis lineis Mπ, YZ, NR, IL. ξO, KP, bini nimirum in singulis, octo vero reliqui in octo semidiametris cubi consistunt, nempe in punctis, quæ ipsas extrema ac media ratione diuidunt, qualia sunt puncta 4. & ϑ. in semidiametris Aα, & Hα, secundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inscriptum esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrum, quamuis non proprie, cum non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi constituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

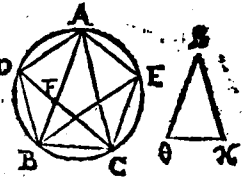
a 4. pri.



LEM-

LEMMA.

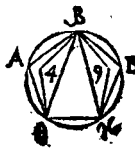
QVOD autem triangulum βθκ. cuius basis θκ. maius segmentum existat vtriusque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diuisi simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus. Describatur circa triangulũ Isosceles ABC,



quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuisisq; angulis ABC, ACB, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propos. 11. lib. 4. tradidimus, secentque se mutuo rectæ AB, CD, in F. a Quoniam ergo AB, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusque eius segmentũ est AF, æquale lateri BC: b Erit vt AB, tota ad maius suum segmentum BC, ita βθ, tota ad maius suum segmentum θκ; Eodemque modo, vt tota AC, ad maius segmentum CB, ita cκ, tota ad maius segmentum κθ: Est autem quoque vt AB, ad AC, ita βθ, ad βκ, vtrobique enim est proportio æqualitatis. Triangula igitur βθκ, ABC, proportionalia habẽtia latera, æquiangula sunt, æqualesq; erũt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; propterea que vterq; angulorum θ, κ, duplus erit anguli β; & triangula βθκ, ABC, similia.

a 8. tertiædec.
b 2. quartidecimi.

PENTAGONVM vero β4θκ9, æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostẽdemus. Describatur circa triangulũ βθκ, circulus



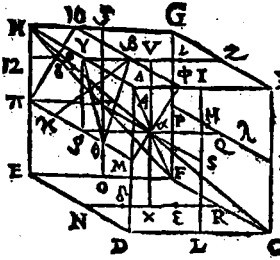
βAθκB; *qui si transeat per puncta* 4, & 9, *perspicuum est ex ijs, quæ ad propos.* 16. *lib.* 4. *docuimus, pentagonũ æquiangulũ esse. Si vero nõ incedat per pũcta* 4, & 9. *Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinã propos.* 11. *lib.* 4. *pentagonum æquilaterum & æquiangulum* βAδκB. *Quoniam igitur tam rectæ* Aθ, Aζ, *quã rectæ* 4δ, 4β, *æquales sunt rectæ* θκ, *cũ & rectæ* β4δκ9, & βAθκB, *pentagonum sit æquilaterum; Erunt tam duæ rectæ* θA, δ4, *quam duæ* ζA, ζ4, *æquales. quod fieri non posse demonstratum est propos.* 7. *lib.* 1. *Transit ergo circulus triangulo* βθκ, *circumscriptus per puncta* 4, & 9. *Ac proinde pentagonum* β4θκ9, *æquiangulum est.*

SCHOLIVM.

EX his colligere licebit sequentes propositiones.

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera, potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.



a 33. pri

b 29. pri

c 47. pri

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri ζε, *intelligaturque coniuncta recta* γε, a *æqualis existens & parallela lateri cubi* VX, *quod &* Vγ, Xε, *æquales sint, & parallelæ. Quoniam igitur angulus* βVX, *rectus est;* b *rectus quoque erit angulus* βγε, *ad* γ, *constitutus,* c *Ac proinde quadratum diame-*

vri βε, æquale erit quadratis laterum Cγ, γε, nempe Dodecaedri, & cubi.

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentũ latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, a *cum sit vt YX, ad βV, ita YZ, dupla ipsius YV, ad βγ, duplam ipsius CV; Sit autem CV, minus segmentum ipsius YV, secta extrema ac media ratione. Erit & Cγ, minus segmentum lateris cubi YZ, secti extrema ac media ratione; composita vero ex Yβ, γZ, hoc est, recta Cκ, (qua dupla fuit ostensa ipsius YC, ideoque compòsita ex YC, γZ, æqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione Cγ, esse latus Dodecaedri,* b *& Cκ, seu Cθ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendat angulum pentagoni β9κ, vel β4θ.*

a 15. quinti dec.

b 8. quinti dec.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus; Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundẽ cubũ descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi YZ, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Yβ, γZ, quam constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim YZ, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8 propos. huius lib. c *Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris YZ, secti extrema ac media ratione: Erit βθ, existens quoque maius segmentum eiusdem lateris YZ, & æqualis duabus Yβ, γZ, simul, vt iam demon-*

c 8. terti dec.

structuimus, latus Dodecaedri cubo lateris YZ, circumscripti.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IN prima enim figura recta connectens puncta β, δ, in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θκ, oppositi, æqualis est recta VX, (quod & βV, δX, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

a 33. pri

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrum describere.

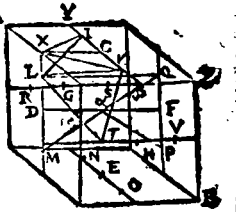
CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium centra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquam inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo eiusdē cubi octo angulis substernuntur. Connectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; b & anguli contenti, recti, quod XC, parallela sit ipsi AY; c erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoque erit ad lineas XI, XK; Ac propterea, cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, trianguli LXK, & anguli contenti, recti; d æquales erunt bases LI, LK. Rursus e quoniam quadratum rectæ

b 9. pri
c 4. pri.
d 4. pri.
e 47. pri

LI,

LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum vero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Aequale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale est tribus quadratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ CI, (a Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdem quadrati rectæ CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoque quadrati rectæ CI; Ac propterea, cū eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectæ KI, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarum LI, IK, ideoque & rectæ ipsæ æquales. Aequilaterum igitur est triangulum IKL, lateri cubi AG, subtractum.

a 4. tertij dec.



NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triangula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam vero latera reliquorum octo triangulorum, octo angulis cubi supposito rum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, commune est triangulo IKL; & latus KT, triāgulo TVK; & latus TL, triāgulo LMT; perspicuū est, ea quoq; esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli oēs duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositione sequentes.

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

a33.pri b47.pri c29.pri

DVCTA enim recta LQ, a qua lateri cubi DF, parallela est, & aequalis, quod & DL, FQ, parallelae sint, & aequales; b manifestum est, quadratum diametri QM, aequale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrum descriptum est, c cum angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, rectus sit.

II.

BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, se se in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineae nimirum DF, CE, GH, cum coniungant centra basium cubi oppositarum, aequales sunt lateribus cubi, seseque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta αP. Quoniã latera αF. FQ, trianguli αFQ, aequalia sunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, d aequales erunt rectae αQ, αP. Eademque ratione aequales erunt omnes rectae e x α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

d 4.pri.

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

e15.5 n f2.quartidec.

CVM enim CI, sit maius segmentum rectae CY, sitque vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad βY, duplam ipsius CY; erit quoque KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi βY. Si enim alia recta, quam KI, esset maius segmẽtum rectae βY, esset βY, ad illam rectam, vt CY, ad CI, hoc est, vt βY, ad KI, diuersam ab illa recta, quod est absurdum.

ICO-

IIII.

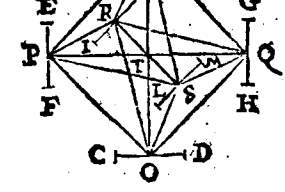
ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppositorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter se aequalia, angulosque alternos habentia aequales ex 4. propos. lib. 1. quae quidem in centro conueniũt. Quare qualibet latera opposita parallela erunt; a Atque adeò circa, & triangulorum plana, per ipsa latera parallela ducta, inter se erunt parallela. a 15. undecimi.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icosaedro Octaedrum describere.

EXPONANTVR dati Icosaedri, cui inscribendum est Octaedrum, sex latera opposita, AB, CD, EF, GH, IK, LM, quorum bifarias sectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales se se in centro T, bifariã, & ad angulos rectos secãtes, per ea, quæ in scholio propos. præcedentis ostensa sunt; ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ, OP, OR, OS, OQ, PR, PS, QR, QS, constituentes octo triangula SNP, SPO, SOQ, SQN, RNP, RPO, RQO, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia sunt lateribus TN, TP, triãguli TNP, (cum sint rectarum æqualium dimidia) angulosque continent rectos, vt dictũ est; b Aequales erunt bases NS, NP: Eodemq; modo reliquę omnes lineę æquales erunt & hisce duabus, & inter se. Octo ergo dicta triangula æquilatera sunt, & inter se æqualia; Ideoque Octaedrum constituunt. Quod in Icosaedro descri-



b 4. p.

ptum

ptum est, cum eius anguli resideant in bifariis sectionibus sex laterum Icosaedri oppositorum. In dato itaque Icosaedro Octaedrū descripsimus. Quod faciendū erat.

COROLLARIVM.

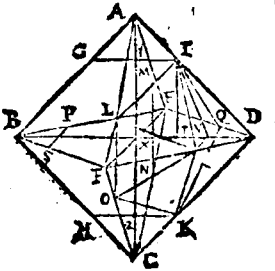
SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoque est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.

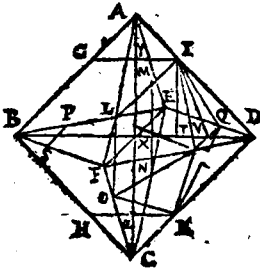
DATVM Octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit ABCDEF. Cum a quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur a singulis bina non proxima, sed sibi e regione respondentia, hoc est, quæ ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt BA, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, AE; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nam a quolibet angulo sumenda sunt tantum duo latera; at vero latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdem angulos A, C, iam sumpta fuere,) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati EBFD; (Nam latera EA, EC; FC, FA, quadrati AECF, iuxta eosdem angulos E, F, iam accepta sunt,) quæ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam linearum confusionem. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt enim tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum

acce-



acceptum est, pyramidem constituunt; alia autem duo sunt in duobus lateribus duorum triangulorum octaedri, quæ habent commune illud latus, in quo punctum acceptum est. Vt quia punctum acceptum est R, in latere DF, quod cum tribus DE, DA, DC, pyramidem cõstituit in vertice D, est cõmune triangulis octaedri DFA, DFC; propterea ex R, ad quinque puncta hõrum quinque laterum ductæ sunt lineæ rectæ, & sic de cæteris. Post hæc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, se se in centro X. secantibus bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quarum AC, BD, secant rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturque recta IV, agaturque IT, parallela ipsi YX. Quoniam ergo latera DQ, DI, triãguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI, triãguli DRI; (Sũt n. DQ, DR, minora segmẽta rectarũ æqualium DE, DF,) & angulos cõprehendunt æquales, nẽpe triangulorum Octaedri ADE, ADF; a Erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cũ sit, b vt BG, ad GA, ita DI, ad IA; c erit GI, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR, ipsi EF, parallela; d Ac proinde vt DI, ad IA, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media rõne. Rursus quia est vt AX, ad XD, ita AY, ad YI, (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & AY, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmentum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualem; ideoque GI, rectam, bifariam in Y, similiterque QR, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, trianguli DQR, (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosque comprehendant rectos, nempe quadratorum ABCD, DEBF; e Aequales erũt bases GI, QR. Eadem ratione his æquales ostendẽtur rectæ

a 4. pri.
b 2. quarti decimi.
c 2. sex.
d 4. sex.
e 4. pri.



ctæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum subtendunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in singulis videlicet quadratis binos oppositos, complectunturque duo segmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus segmentum ipsius XA, ostensum, maius est segmentum maioris segmenti XY, diuisi extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 3. lib. 13. Est autem XY, rectæ XV, æqualis, (cum ambæ sint maiora segmenta æqualium rectarum XA, XD,) [a] & YI, rectæ XT; erit XT, maius segmentum ipsius XV, & idcirco TV, segmentum minus eiusdem XV. Quare [b] quadrata rectarum XV, totius, hoc est, ipsius IT, (cum & recta IT, æqualis sit ipsi XY) & TV, minoris segmenti, [c] tripla sunt quadrati rectæ XT, maioris segmenti; Atque adeo quadratum rectæ IV, [d] æquale existens quadratis rectarum IT, TV, triplum est eiusdē quadrati rectæ XT, hoc est, rectæ RV, quæ æqualis est ipsi XT, seu ipsi YI, ex demonstratis, cum RV, YI, dimidia sint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipsi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarum IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: [e] At quadratis rectarum IV, VR, æquale est quadratū rectæ IR, [f] quod anguli IVR, IVQ, comprehensi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & subtensi basibus æqualibus IR, IQ, æquales sint, ideoque recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum est quadrati rectæ VR; Ac propterea cum eiusdem quadrati rectæ VR, quadruplum quoque sit per scholium propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ QR; Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipsæ æquales: Erat autem IQ, ipsi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum est IQR. Non secus demonstrabimus, æquilatera esse triangula similem situm cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN,

[a] 3. 4. pri
[b] 34. pri
[c] 4. terÿdec.
[d] 47. pri
[e] 47. pri
[f] 8. pri.

QMN,

QMN;atque adeo triangulo IQR,æqualia,cum latera omnium sint æqualia inter se. quod tamèn hac etiam ratione demonstrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus subtendat angulum rectũ quadrati comprehensum duobus segmentis minoribus laterum octaedri;duo vero reliqua subtendant duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum contentos singulos duobus segmentis laterũ Octaedri,maiore& minore: Erunt latera vnius trianguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8.lib.1.Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ,GI,subtendentia angulos rectos QDR,GAI,quadratorum DEBF, ABCD,compre hensos minoribus segmentis DQ,DR;AG, AI, æqualia sunt.Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ,IAL,triãgulorum æquilaterorum ADE,ADF,quorum ille cõtinetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore;hic vero segmentis AL, AI, maiore & minore quoque.Nõ secus latera IR,GL, æqualia erũt. Aequalia igitur sunt trianguli IQR,GIL, per corollariũ propos.8.lib.1.Atqui IQR,ostensum est esse æquilaterũ; Ergo & GIL,æquilaterum est.Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur,reliqua octo triangula octo basiqus Octaedri impositа,videlicet GMP,in AEB; HNP, in BEC;KNQ,in CED;IMQ in AED;GLS,in AFB; HOS,in BFC;KOR,in CFD;ILR,in AFD, æquilatera quoque esse,& prædictis æqualia, cum horum latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triangula, quorum quina in singulis sectionibus laterum octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi,(vt vides in quinque RQI,RIL,RLO, ROK, RKQ, solidum angulum R,componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum,cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant, In dato itaque Octaedro,&c. Quod faciendum erat.

CO-

COROLLARIVM. I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentũ, alterius vero minus ſit propè angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe minoris ſegmenti. Cum enim in triangulo æquilatero ADE, maius ſegmentum lateris AD, ſit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, oſtenſa
[a] 47. pri æqualis rectæ G I, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti AI, a cum quadratum rectæ G I, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perſpicuum eſt, & rectam I Q, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris AI.

COROLLARIVM II.

RVRSVS ſit, cum octo Icoſaedri baſes collocatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. Suſcipiatur namque Octaedri ſuperioris triangulum AED, in quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri IMQ, ſirque C, centrum trianguli A E D, ex quo rectæ educantur CA, CE, CD: CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, A M, trianguli CAM, æqualia ſunt lateribus CE, EQ, trianguli C E Q, (quod hæc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) angulosque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. oſtendimus: Erunt baſes C M, CQ, æquales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, C Q. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

COROLLARIVM III.

NON difficile eſt denique ex dictis colligere, idem centrum eſſe Octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, centro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunque duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis X G, X O, ad angulos G, & O: cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia ſint lateribus X F, F O, trianguli XFO, (Nam XA, XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FO, ſegmenta minora laterum æqualium Octaedri ſectorum extrema ac media ratione) angulosque complectantur æquales, ſemirectos videlicet: (cum AC, EP, diametri ſint quadratorum ABCD, EAFC: ac proinde, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. angulos
[b] 4. pri. quadratorum bifariam ſecent.) ſ b Æquales erunt & baſes XG, XO. Eodemque argumento oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icoſaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque eſt Icoſaedri.

IN

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

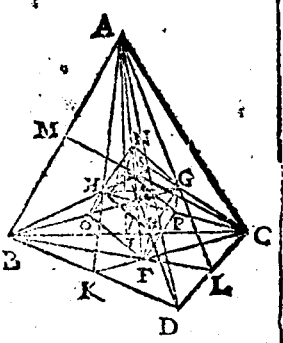
a INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrum; b & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumque erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concentricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem centris octo basium Octaedri, reliquos autem duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis sex angulis Octaedri supponûtur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur, quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

a 16. quinti decimi.
b 5. quinti decimi.

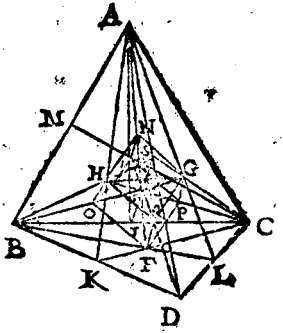
PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data pyramide cubum describere.

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectæ educantur AEF, BEG, CEH, DEI, ũquæ cadent in centra basi; oppositarũ F, G, H, I, eruntq perpendiculares ad easdem bases BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc cẽtra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secãtes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariã, & ad angulos rectos, ex schol. prop. 12. lib. 13. in pũctis K, L, M, S,



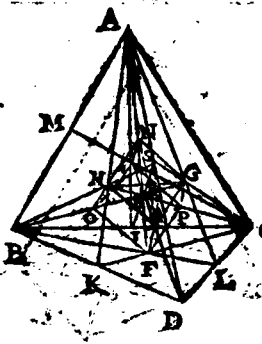
c 15. quarti decimi.



T. Secentur quoque rectæ ex solidis angulis per centrum B, demissæ AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorũ quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris, inquam, basium ipsam lineã, in qua punctum est, circũstantium, ita vt relinquatur cẽtrum illius basis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis coniungantur, vt N, cum G, H, I; O, cum F, H, I; P, cum F, G, I; & Q, cum F, G, H. Dico solidum NF, contentum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubum esse. Cum enim latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sint lateribus AF, FL, trianguli AFL, (quod FK, FL, cum perpendiculares sint ad BD, CD, ex centro F, ductæ ostendant æquales distantias rectarum æqualium BD, CD, a centro F,) angulosque contineant rectos, ex a 4. pri. 3. defin. lib. 11.ª Aequales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (sunt. n. AH, AG, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABD, ACD,) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; b Aequales erunt bases NH, b 4. pri. NG. Haud secus ostendentur æquales rectæ QG, QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si enim recta ducatur FT, cum latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK, (Sunt namque FT, FK, distantiæ rectarum æqualium BC, BD, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualium ABC, ABD;) angulosque contineant æquales: c Aequa- c 4. pri.

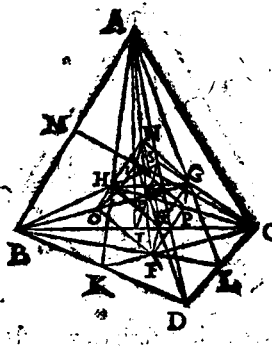
les

les erunt baſes NI, N H, &c. Sunt igitur ſex dicta quadrilatera, æquilatera. Oſtendamus iam, ipſa plana eſſe atque rectangula, vt tandē quadrata eſſe concludamus, atque adeo componere cubum N F.



ASSVMATVR quadrilaterū NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, oppoſita ſunt, hoc ē, non coeuntia in in aliquo pūcto; ſi eorum puncta media S, & T, coniungantur recta S T, erit ea diameter octaedri in pyramide deſcripti, vt cōſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ reſpondet puncto H, illius, & punctum T, puncto E, cum & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non coeuntia B C, AD. Quocirca cum idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit S T, per E, centrum pyramidis, æqualeſque erunt B S, E T, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia B S, C S, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13, [a] erunt H S, G S, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium B S, C S. Quare latera B S, C S, trianguli B S C, [b] proportionaliter ſecātur, atque idcirco H G, parallela eſt lateri B C, ſecatque latera T S, C S, trianguli T S C, (quod quidem pars eſt trianguli B S C,) proportionaliter; ideoque & R S, tertia pars eſt ipſius S T; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ S E. Rurſus [c] quia D I, perpendicularis eſt ad triangulum A B C, erit E I, tertia pars ſemidiametri D E, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur D E, talium 1. erit E I, ac proinde talium 4. recta D I, ideoque eius dimidium D Q, earundem partium 2. Quam ob rem reliqua E Q, talium partium erit 1. atque idcirco E Q, tertia pars erit ipſius D E. Eadem ratione E N, tertia pars erit ipſius A E; Ac propterea, cum latera D E, A E, trianguli A E D, proportionaliter ſecentur,

a 18. quartidecimi.
b 2. ſex.
c 15. quartidecimi.



a 2. sex. a recta N Q, parallela erit lateri AD, secabitque latera ES, ED, trianguli D E S, (quod quidem pars est trianguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum E Q, sit tertia pars ipsius D E; tertia pars erit E R, ipsius S E; Ac proinde S R, duæ tertiæ partes eiusdem S E. Quoniam igitur vtraque H G, N Q, ex S E, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur S E, a rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipsæ HG, NQ, in

b 2. vndecimi. eodem sese puncto intersecabunt. b Quare in eodem sunt plano, propterea que & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ; Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

CVM ostensa sit H G, ipsi B C, parallela, atque adeo triangulum SHG, simile triangulo SBC, ex coroll. propos.

c 2. sex. 4. lib. 6. c Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC: Est autem SH, tertia pars ipsius SB: Igitur & HG, tertia pars erit lateris BC. Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; N H, Q H;

d 8. pri. d Æquales erunt quatuor anguli, H N G, N G Q, G Q H, Q H N. Quocirca cum ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad propos. 3 2. lib. 1. recti erunt, ideoque quadratum erit N Q. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent, qui ideo pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in basibus

fariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat.

ALITER. In data pyramide describatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex propos. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. ([a] cum enim rectæ E G, E H, parallelæ sint rectis BC, BD; [b] erunt quoque triangula E G H, B C D, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas quatuor reliquas bases octaedri perpendiculares, ex scholio propos. 14. lib. 11. Quare cum prædictæ bases abscindant ex pyramide pyramides similes toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum basium, quemadmodū & in centra basium totius pyramidis cadunt; [c] Et quia dicta quatuor bases octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc est, bifariam; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi statuantur in medijs punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonstratio docuit. Constat ergo cubum in pyramide esse descriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 2. sex.
[b] 15. vn decimi.
[c] 17. vn decimi

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem esse centrum pyramidis, & cubi in ea descripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum sint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad bases demissarum, per E, centrum pyramidis transeunt.

COROLLARIVM II.

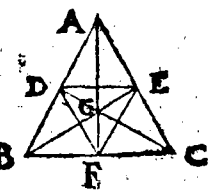
INFERTVR quoque rectam, quæ coniungit bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi in pyramide descripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum basis GNHQ, ducta dimidium sit lateris cubi, vt constat: Recta RS, dupla ipsius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, ostensa sit tertia pars ipsius ST; perspicuum est, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias sectiones laterum oppositorum pyramidis AD, BC, transire per centrum pyramidis, triplamque esse lateris cubi RS.

LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demõstrabimus. Sit primũ pyramis ABCD, cuius oĩa sex latera bifariã secẽtur in E, F, G, H, I, K; & ex L, cẽtro Pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in cẽtra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Cõiunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniam latera LM, ME, trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi à cẽtro L, per lẽma 2. propos. 14. lib. 14;) ideo propterea eorum distãtiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, a centris M, & N, circulorum æqualiũ) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11. [4. pri.] *Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademq;*

ratione biſce æquales erunt, & inter ſe rectæ LG, LH, LI, LK. *Quare cum anguli Octaedri in pyramide deſcripti conſtituantur in punctis E, F, G, H, I, k, vt ex 2. propoſ. huius lib. conſtat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos ſint æquales. Cum igitur & L, centrum fuerit pyramidis; Idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea deſcripti.*

SIT deinde in baſe pyramidis ABC, baſis octaedri DEF, quæ ſecabit illius latera bifariam, vt patet ex propoſ. 2. huius lib. ſit autem G, centrum trianguli ABC, a quo ad angulos vtriuſque baſis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia ſunt, angulosque continent æquales, nimirum ſemiſſes angulorum æqualiũ trianguli æquilateri;

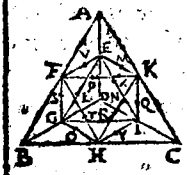


erunt & baſes GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum eſt trianguli DEF. quod eſt propoſitum. a 4. ſex.

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATAE Pyramidi ABCD, b inſcribatur octaedrum EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina ſumantur ex ſingulis angulis ſibi reſpondentia, hoc eſt, in angulos oppoſi b 2. *quartidecimi.*



tos quadratorũ octaedri cadẽtia, vtin propoſ. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q. &c. deſcriptum erit Icoſaedrum in dicto octaedro, vt conſtat ex propoſ. 16. huius lib. habens omnes duodecim angulos in duodecim præfatis ſectionibus duodecim laterũ octaedri. Cum ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſium Pyramidis ſint ducta; manifeſtum eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſiũ pyramidis conſtitui, ternos ſcilicet in ſingulis, quod & terna latera octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nã in baſi ABC, exiſtunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE: In BDC, latera GH, HI, IG: in ADC, denique latera IK, KE, EI, Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor baſes MXQ, RQY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, vt conſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data pyramide Dodecaedrum deſcribere.

a 19 qn tidec. PYRAMIDI datæ a inſcribatur Icoſaedrum, b & in hoc Dodecaedrũ habens viginti ſuos angulos in centris viginti baſium Icoſaedri: Factumque erit quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, vt in præcedenti propoſ. diximus: cõſiſtent quatuor anguli Dodecaedri dicto icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earũ centris. Sunt enim dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, vt conſtat ex 2. coroll. propoſ. 16. huius lib. Deinde c quia cubus Dodecaedro inſcri

b 5. qn tidec.

c 8. quin tidec.

ptus

pens octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, [a]quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictum est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictum Dodecaedrum descriptum esse dicetur in pyramide proposita, etiamsi non proprie. Quam ob rem in data Pyramide Dodecaedrum descripsimus. quod faciendum erat.

[a] 18. quintidecimi.

PROBL. 21. PROBOS. 21.

x iii.

IN dato solido regulari sphæram describere.

EX centro sphæræ datum solidum complectentis ad singulas bases perpēdiculares demittātur, quæ ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Qua propter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies conuexa, singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinquē solidorū regularium in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersū viginti inscriptiones; vnū duntaxat Dodecaedrū improprie describitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide describitur, vt ex propos. 19. huius lib. est manifestum. Num, vt proprie solidum aliquod in

solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti constitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt desin. 31. lib. 11. exposuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

CAETERVM inter omnia quinq; solida regularia, vnū octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscepit inscripta: a In octaedro enim describitur Icosaedrum consistuens duodecim suos angulos in duodecim pūctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secantur. Deinde b Icosaedro imponitur Dodecaedrum, quod eidem octaedro inscriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Posit hac in Dodecaedro c describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, eorum basiū octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. d Denique in cubo Pyramis includitur: quare ideo in octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

a 16. Quintidecimi.
b 5. quintidec.
c 8. quintidec.
d 1. quintidec.

NEQVE vero præterēūdum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. e Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, f conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido cōstat, sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoque cubum atque pyramidem, cum sphæra illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

e 1. quintidec.
f 8 quintidec.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: in centris quidem, basiū Icosaedri propos. 5. 11. & 12. In cētris vero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesve quinque solidorum regula-

rium

rium, unius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliquarum quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20. In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, quam arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM.

Quo varia solidorum regularium sibi mutuo inscriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, a Francisco Flussate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

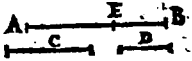
VEMADMODVM libro 14. tradita sunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem sphæra descriptarum, quarum quidem descriptionem libro 15. exposuit Euclides; ita etiam Franciscus Flussas Candalla hoc lib. 16. inter se comparat eosdem figuras regulares sibi mutuo inscriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inscriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit, vt imperfecta quodammodo videri possit tractatio hæc quinque corporum regularium, si liber hic decimussextus non adiungatur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus describatur,

& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione, triplicata.

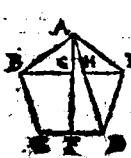
LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quam habet AE, maius segmentum ad EB, minus. Cũ enim, vt in scholio vltimæ propos. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusque in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadem sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadem sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demonstratis in scholio propos. 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circumscripti ad D, latus Dodecaedri eidem cubo inscripti, vt AE, maius segmentum ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatã lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrũ lateris D, proportionem quoque habet triplicatam maioris segmenti AE, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, a recta BE, subtendente angulū A, secari in G, extrema ac media ratione.



Ducta enim recta AD, quę secet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD, ex scholio prop. 8. lib. 13. est parallela, [a] secabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: [b] Atqui A D, in H, secta est extrema ac media ratione, estque maius segmentum DH. Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 2. sex.

[b] 18. ter tijdoc.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac

media

media ratione, & latera ipsa bifariam secantur angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit ABC, cuius latera secentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, constituentes GHI, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli ABC, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas suis sectionibus producere triangulum Icosaedri GHI, hoc est, rectam BK, transire per puncta G, I; & rectam CL, per puncta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipsi BC, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FBC, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEG, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo ABC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis est rectæ FH, maiori segmento rectæ FE, seu DF, ipsi æqualis: (Est enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualium a laterum eiusdem trianguli comprehensos; a ideoque æqualia sint.) b Est autem & NH, æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, c propterea quod FH, DF, parallelæ sunt rectis AB, BC, seu NO. Igitur recta NO, composita ex NH, tota, & HO, maiori segmento, d secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cũ tres parallelæ BC, NO, DF, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonstrauimus ad propos. 4. lib. 6. secet easdem similiter; liquido constat, ipsam AM, transire per puncta G, H. Haud secus ostendemus BK, per puncta G, I; & CL, per puncta H, I, transire, si per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB; Atque idcirco rectæ

a 4. pri.
b 34. pri.
c 2. sexti
d 5. ver. ij. dec.

BK,

BK, CL, AM, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri GHI.

AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectæ FE, cuius maius ſegmentum fuit FH, hoc eſt, FO, illi æqualis; Erit quoque FO, maius ſegmentũ rectæ AF; a ac proinde tota AO, ſecta in F, extrema ac media ratione: b Eſt autẽ vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL, ſegmenta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia vero c vt AQ, maius ſegmentum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius ſegmentum; Et eſt AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus ſegmentum erit lateris AB, ac reliqua BP; ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta BR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AB, ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum R, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, ſecabit extrema ac media ratione, atq; adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nihilum maiore & minore ſegmento ſingulos, d æqualia inter ſe ſunt; erit triangulum PQR, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI: (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela ſit lateri CL, ſecabuntur PQ, LC, in eaſdem rationes, ex ijs, quæ ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulũ ACL, in quo FH, parallela eſt lateri AL, e ſecans proportionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ, bifariam ſecatur in G. Eademque eſt ratio de reliquis QR, RP.) Ac propterea triangulum Icoſaedri GHI, inſcripti eſt triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera baſis pyrami-

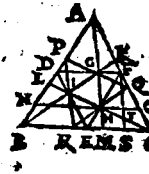
dis ex-

a 5. tertij decimi.
b 2. ſexti.
c a. quartidec.
d 4. pri.
e 2. ſexti.

dis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G,H,I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro in scripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, est æquale, recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. a Cum igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; b sitque MS, ipsi GF, æqualis, ob parallelogrammū GS: Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DF: Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales sint: erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC, in S, secta erit extrema ac media ratione. Deinde c quia FE, FS, similiter secantur: secatur autem FE, extrema ac media ratione, secabitur & FS: in T, extrema ac media ratione; maiusque segmentum erit FT, recta d æqualis existens lateri Icosaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.



a 2. sex

b 34. pr

c 2. sex

d 34. pr

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cuius latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GH, basim Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero PQR,

cuius

cuius anguli latera trianguli A B C, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera PQ, QR, RP, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in propos. præcedenti demonstratum est. Dico AP, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI. Cum enim PQ, dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2. & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectæ HI. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. a Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis: si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, b cum diametro potentia sit commensurabile, c Quare minus segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti Apotome erit: Atque adeo d cum minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile: (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri.) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 10. lib. 10. Apotome.

a 13. ter. 5. dec.
b 6. ter. 5. dec.
c 6. ter. 5. dec.
d 9. dec.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptæ diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 13. Sit autem

tem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptæ.

RVRSVS, quia rectæ coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectæ coniungentis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos. 4. lib. 6. [a] Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti. [a] 2. sex.

DENIQVE [b] quia diameter sphæræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cum diameter octaedri coniungat centra bassum oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum. [b] 14. ter tijdec.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

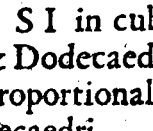
LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quę potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; [c] existat denique latus cubi dimidium potentia lateris pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius, segmentum rectæ esse quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum. [c] 5. sexti decimi.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus denique Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse, proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum enim ex iis, quæ in propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.



THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti; (ostensum enim est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiam esse partē lateris Pyramidis BC,) 220. sex Et quadrata proportionem habeant laterū duplicatam: Erit quadratum lateris Pyramidis noncuplū quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cū noncupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare cū quadratum diametri basis cubi duplū sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratum lateris cubi 1: quadratū eiusdem basis diametri sit 2. quadratum lateris pyramidis

18. Quam-

18. Quamobrem latus Pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrum inscribitur, vt docuimus in scholio propos. vlt. lib. 15.[a] Erit latus pyramidis potētia octodecuplū lateris cubi sibi, & Dodecaedro inscripti: Huius autem lateris cubi extrema ac media ratione secti maius segmentū est, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide descripti, in quo nimirū cubus est descriptus. Igitur latus pyramidis potētia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti. Quod demonstrandum erat. [a] 18. sexti decimi.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuisi.

VT enim constat ex propos. 16. lib. 15. recta coniungens duas sectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentium prope minora segmenta, (qualis fuit ibi recta GI, subtendens angulum rectum GAI, minoribus segmentis AG, AI, comprehensum;) latus est Icosaedri in octaedro descripti. Quare,[b] cum hoc ipsum latus Icosaedri possit duo illa minora segmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris segmenti. Si in octaedro ergo Icosaedrum describatur, &c. Quod erat demonstrandum. [b] 47. pri

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.

SIT vna sex pyramidum octaedri ABCDE, cuius basis quadratū ABCD, triangula vero ad E, vertigem, ABE, EBC, CED, DBA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelæ. Quod si coniungantur rectæ FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quoniam autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: Atqui vt EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partium 3. cõtinet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propterea quadratū lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirū KLMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati HI, descriptum; b cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.

a 2. sexti

b 33. pri

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentum latus dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. propos. 13. lib. 15. inscribuntur que Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidem octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius seg-

men-

mentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem octaedro inscripti, cuius quadruplum sesqui alterum potentia esse ostendimus latus octaedri.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti.

QVONIAM Icosaedri in cubo descripti sex latera, opposita in sex basibus cubi collocata sunt, quorum bifarias sectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt constat ex propos. 14. lib. 15. eiusque scholio: Et in bifariis sectionibus dictorum sex laterum Icosaedri residunt sex anguli octaedri in Icosaedro descripti, ex propos. 15. eiusdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icosaedro descripti æqualem esse lateri cubi, in quo Icosaedrum describitur. Quare, cum per ea, quæ ad propos. 14. lib. 15. ostendimus, latus Icosaedri sit maius segmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuisi; Erit quoque idem latus Icosaedri maius segmentum diametri octaedri in illo Icosaedro descripti. a Atqui diameter sphæræ, seu octaedri dupla est potentia lateris octaedri. Igitur latus Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, quæ potentia dupla est lateris octaedri in Icosaedro descripti. Quod ostendendum erat.

a 14. ter tij dec.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus rectæ lineæ diuisæ extrema ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quã

minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. Minus segmentum lateris cubi extrema ac media ratione secti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionem habeat duplicatam proportionis totius lineæ ad maius segmentum, vel maioris segmenti ad minus, (quod tota linea, maius segmentum, atque minus, sint tres rectæ continue proportionales:) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

PRAETEREA, cum constet ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. maius segmentum lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestum est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmentum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoque conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratum ABCD, triangula autem ad verticem E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra F, G, H, I, quæ rectis iungantur FG, GH, HI, IF, quadratum cubi in octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniam vero pyramis in cubo descripta, describitur quoque in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. exposuimus;

Estque

Estque latus pyramidis in cubo descripte diameter basis cubi, vt cõstat ex propos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, sesquialterũ esse lateris Pyramidis GI, Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæq; EK, EL, sesquialtere erũt rectarũ EG, EI, per coroll. propos. 18. lib. 14.[a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferẽs, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum EGI, simile triangulo EKL. Quare erit vt EK, ad KL, ita EG, ad GI, & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI, ideoque cum EK, sesquialterã sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI.[b] Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris Pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

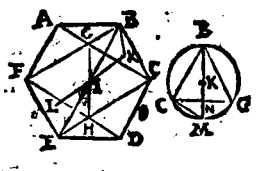
[a] 2. *sex.*

[b] 33. *pri*

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplũ quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrum I; triangula vero opposita & parallela, per coroll. 4. propos 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex centro I, ad planum BCG, perpendicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per scholium propos. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, vt con-



ſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit KL, diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, tranſiens per I, centrum Icoſaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, tranſeat, erit I, quoque centrum cubi inſcripti, ideoq; IK, IL, ſemidiametri æquales: Coniuncta autem KB, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis, erit an[a] 47. pri gulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri BI, vt in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis, & KL. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris BK, KI, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, ([b] quod triplum eſt quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri Icoſaedri BE, remanet quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris Icoſaedri BC. Deſcribatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extenſaque BK, vſque ad M, quæ ſecet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta perpendicularis eſt ad CG, per ea, quæ oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. [c] erit recta BC, potentia ſeſquitertia rectæ BN: Vt aũt BC, ad BN, ita eſt BM, ad BC; quod BC, ſit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. [d] cum angulus BCM, rectus ſit in ſemicirculo exiſtens. Recta igitur BM, potentia quoque ſeſquitertia eſt rectæ BC; Ac propterea quadratum diametri BM, ſeſquitertium eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

[b] 15. ter tij dec.

[c] 12. quarti decimi.

[d] 31. ter

CO-

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrum Icosaedri binas rectas posse, diametrum, scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmentũ est rectæ lineæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti, a duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex propos. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones coniungentis diuisæ extrema ac media ratione minus segmẽtum latus Dodecaedri, ex coroll. 4. propos. 17 lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum, esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris octaedri in eo descripti, cum huiusmodi recta coniungat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum, est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. tertij dec.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodẽ Icosaedro describantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. eademque sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidem circundantis: b Potest autem diameter sphæræ sesquialterũ

b 13. tertij dec.

lateris

lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius lib. demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circundantis, ex coroll. propos. 15. huius lib. potest & suii ipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basim Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

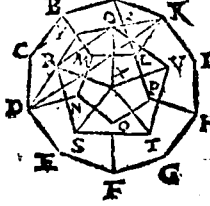
LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ductæ, atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partē eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem positæ.

SIT dimidium Dodecaedrum contentum sex pentagonis ABMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Constituta sunt igitur quinque triangula Icosaedri in Dodecaedro descripti componentia angulum solidū X, in centro pentagoni LMNOP, vt ostensum est in demonstratione propos. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in communem basim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos secant latus BM, per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. conuenient in puncto Y. Quod si subtendatur recta AL, angulo K, secabitur a perpendicularis

a 2. sexti dec.

KY,

K Y, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita esse latus Dodecaedri LM, ad latus Icosaedri sibi inscripti QR, vt KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtensa enim recta DK, quæ, per demonstrata in scholio propos. 13. lib. 15. latus est cubi, in quo Dodecaedrum propositū describitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus segmentum ipsius DK, si extrema ac media ratione secetur, ex eodem scholio propos. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter secantur in R, & Q; (sunt enim RD, QK, semidiametri circulorū æqualium æquales; necnon & YR, YQ, distantiæ nimirū rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [a] parallela erit QR, ipsi DK; Ideoque triangulum YRQ, triangulo YDK, simile per coroll. propos. 4. lib. 6. [b] Quam ob rem erit, vt DK, & KY, ita QR, ad QY, [c] Vt autem DK, tota ad totam KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q. & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.



a 2. *sex.*

b 4. *sex.*

c 2. *quartidecimi.*

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusque eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; a reliqua quoque recta pars rursum

ſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cuius centrum F; & ſuper quinq; latera pẽtagoni quinque triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex ijs, quæ in propoſ. 16. lib. 13. ſunt demõſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inſcribatur A H I. Quoniam igitur arcus ABC, AED, æquales ſunt, cum quilibet duas quintas partes totius circumferentiæ contineat, ſecnon & duo arcus ABH, AEI, cum ſint tertiæ partes eiuſdem circumferentiæ; erunt reliqui arcus H C, I D, æquales; propterea quæ rectæ HI, CD, parallelæ, per ſcholium propoſ. 27. lib. 3. Ad quas ex centro F, perpendicularis deducatur FKL, [a] ſecans rectas H I, C D, bifariam in K, & L; coniunganturque rectæ F C, F D. Suſcipiantur inſuper triangulorum æquilaterorum GBC, GCD, cẽtra N, & O, per quæ rectæ ducantur GNP, GOL, diuidentes, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. latera oppoſita BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos. Itaque recta GO, in punctum L, in quo diuiſa eſt CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt conſtat ex demonſtratis in propoſ. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Denique B P, dimidium lateris Icoſaedri ſecetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori ſegmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur CR. Dico reliquam QR, æqualem eſſe lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri HI, ſecetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione ſecta faciat maius ſegmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propoſitionis 2. lib. 14.) ſit autem maiori ſegmento FK, æqualis recta KM, per coroll. propoſ. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ de

[a] 3. tert.

monſtra-

monſtrauimus ad propoſ.1.lib.13. maius ſegmentũ KM, rectum quoque in L, a minori ſegmento KL, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectã FL, minore dimidiæ ſuiipſius ſegmento LM. Quoniam vero iuncta PL, eſt latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABCDE, deſcripti, idemque centum F, ha bentis, ex ſcholio vltimo lib.4. ideoque ſimilis illi; erunt triangula FCD, FPL, (ſi recta duceretur FP,) ſimilia, per ſcholium propoſ.20.lib 6.b Quare vt FC, ad CD, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc eſt, ſibi æqualis FM, excedit rectam FL, minore ſegmento dimidii ipſius FM, nempe minore ſegmẽto rectæ KM, vt oſtendimus. Recta igitur CD, vel ſibi æqualis BC, excedet quoque rectam LP, minore ſegmento dimidii ipſius BC, nimirum minore ſegmento rectæ BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rurſus quia GP, GL, proportionaliter ſecantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplę ſint ipſarum NP, OL, per coroll. propoſ.18.lib.14.) a parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, ſimile, ex coroll. propoſ.4.lib.6.b Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Eſt autem GP, ipſius GN, ſeſquialtera, per coroll. propoſ.18. lib.14. Quare & PL, hoc eſt, ſibi æqualis CQ, ſeſquialtera erit ipſius NO; Ac proinde, cum CQ, ſeſquialtera quoq; ſit rectæ QR. (Nam qualium partium 3. eſt CQ, talium 1. eſt CR, per conſtructionem; Ac propterea earundem 2.QR,) æqualis erit QR, ipſi NO, lateri Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. Si dimidium itaque lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 2.ſex.

b 4.ſex.

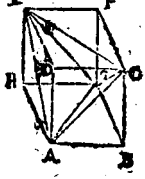
THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt.

IN cubo AF, deſcripta ſit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum eſſe Cum enim inſcriptam pyramidem æquilateram circumſtent quatuor pyramides fun-

datæ

datæ ſuper quatuor baſes ipſius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus non reſident



quatuor anguli pyramidis æquilateræ inſcriptæ: (Nam ſuper baſin ACE, fundatur pyramis ACED; ſuper baſin AEG, pyramis AEGH; ſuper baſin CEG, pyramis CEGF; & ſuper baſin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales ſunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis ſimilibus æqualibusque & multitudine & magnitudine. Quælibet enim conſtat tribus æqualibus & ſimilibus triangulis, dimidiis ſcilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inſcriptæ.) Sit autem cubus cuiuslibet harum pyramidum ſextuplus; (Nã exempli cauſa, pyramis ABCG. baſim habens ABC, dimidium baſis cubi BD, altitudinem vero eandem, quam cubus, rectã videlicet BG, tertia pars eſt, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. priſmatis eandem baſin, & altitudinem habentis. a Cum igitur cubus duplus ſit eiuſmodi priſmatis, quod & baſis cubi dupla ſit baſis priſmatis; manifeſtũ eſt pyramidem A B C G, ſextam partem eſſe cubi, propterea que cubum pyramidis illius eſſe ſextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumſtantes, quatuor eſſe ſextas partes, id eſt, duas tertias partes cubi; Ac proin de reliquâ pyramidé æquilateram ACEG, cubo inſcriptá eiuſdé cubi tertiã eſſe partẽ. Cubus igitur ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

a 32. vndecimi.

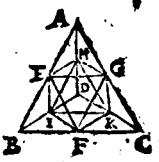
ALITER. Cum cubus, & in eo deſcripta pyramis eadem ſphæra comprehendantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15. b Cubus vero triplus ſit pyramidis in eadem ſphæra deſcriptæ, vt demonſtratum eſt; perſpicue colligitur, cubũ triplũ eſſe ſibi inſcriptæ pyramidis, ſiquidem hæc in eadẽ ſphæra, in qua cubus, continetur.

b 32. quartidec.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, descriptum sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidem octaedri esse duplam. Cũ enim octaedrũ circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, vt propos. 3. lib. 15. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD: (quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum cõtineantur triangulis similibus, æqualibusque numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualiq, nẽpe dimidia laterum æqualium eiusdẽ pyramidis ABCD, ex constructione propos. 2. lib. 15.) a Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum, (cum octupla proportio, sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidum, triplicata: vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidiũ pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.



a 8. *duodecimi.*

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos.

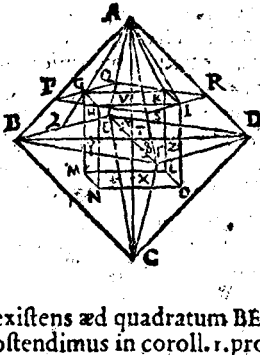
a 20. sextidec. 3. lib. 15. a Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, b & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

b 21. sextidec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basium octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterum. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, L, M, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratũ constituentes PQRS, vt in propos. 4. lib. 15. est demonstratum; c quod quidem parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 15. Est autem V, centrum quadrati PQRS; d (cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secent rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. e Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia sunt quadratis re-



c 15 vn decimi.

d 17. vn decimi.

e 47. pri

ctarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti
int, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ
AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ,
propterea que & rectæ ipsæ VP, VQ, æquales. Non aliter
ostendemus & hisce, & inter se æquales esse rectas VR,
VS. Quare V, centrum est quadrati PQRS. Igitur & cen-
trum erit quadrati GHIK,
in illo descripti, per scholium
vltimum lib. 4. Secantur enim
latera PQ, QR, RS, SP,
bifariam in G, K, I, H,
vt constat ex demonstra-
tis in propos. 4. lib. 15.
Eodem argumento conclu-
demus X, centrum esse ba-
sis L M N O; Nec non &
alias diametros ductas BD,
EF, per Y, Z, α, β, centra re-
liquarum basium transire. Du
cta iam recta Aγ, per G, centrū trianguli æquilateri ABE;
erit AG, dupla ipsius Gγ, per coroll. propos. 18. lib. 14. a 17. vn
Cum ergo plana PR, BD, parallela secent rectas Aγ, AT, decimi.
proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipsius VT. Eo-
dem modo dupla probabitur CX, ipsius XT; Ac proinde
cū æquales AT, CT, similiter secentur in V, & X; æquales
erunt AV, CX; nec non VT, XT. Recta igitur VX, commu-
gens centra basium cubi oppositarum, bifariam secatur
in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam se-
centur in T, erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. pro-
pos. 15. lib. 13. rectæ centra basium cubi oppositarum
connectentes se se bifariam secent in centro. Iam vero
quoniam VX, ipsius VT, dupla est; dupla autem fuit &
AV, eiusdem VT; æqualis erit AV, ipsi VX, nempe altitu-
dini cubi Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, Ak,
AH, tertia pars est cubi, seu prismatis GO, per coroll. 1.
propos. 7. lib. 12. cum vtriusque eadem sit basis GI, & alti
tudines æquales AV, VX; b Est autem pyramis PQRSA, b 6. vnde-
pyramidis GHIKA, dupla, quod & basis PQRS, dupla sit decimi.

basis GHIK, illi inscriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, similes existentes, per defin. 9. lib. 11. (*cum triangula huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.*) [a] proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB, lateris AP, sesquialterum, quod & recta Aγ, [b] proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidem PQRSA, vt 27. ad 8. *hæc enim* proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionem habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quã 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, talium 12. esse cubum GO, iam demonstratũ est. (Nã numerus 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

[a] 8. duodecimi.
[b] 2. sex.

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atque cubi sibi inscripti. Ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent. Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, quam videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

[c] 11. sexti decimi.

THEOR.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

QVONIAM vt ostendimus ad finem lib. 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; [a] Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplam sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quam 27. ad 2. hoc est, tredecuplam sesquialteram. Ac propterea, octaedrum sibi inscriptæ pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 23. sexti. [b] 20. sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

IN pyramide ABCD, cubus intelligatur descriptus: Dico pyramidem cubi esse noncuplam. Assumantur enim G, H, centra duarum basium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, per quę ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Connexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ sint rectarum HS, GS, ex coroll. propos. 18. lib. 14. ac proinde proportionaliter secentur B S, C S, [c] parallelæ erunt BC, HG, & per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulum HGS, triangulo B C S, simile. [d] Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutando, vt BC, ad HG, ita CS, ad GS: [e] Est autem CS, ipsius G S, tripla. Igitur & B C, tripla erit ipsius H G. Quoniam autem latus pyra-

[c] 2. sexti. [d] 4. sexti. [e] 18. quarti-decimi.

midis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos. 1. lib. 15. demonstratum est; Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentium diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuum est ex demonstratis in propos. 18. lib. 15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, commune larus AD, habentium diameter fuit basis G NHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABCD, circumscribentis; GH, vero diameter basis cubi in eadem pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Est enim vt diameter vnius; quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio vtraque sit potentia dupla: Permutando ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus. Vel sic. Quadratum diametri vnius quadrati ad ipsum quadratum est, vt quadratum diametri alterius quadrati ad ipsum quadratum, cum vtrobique sit proportio dupla.) [a] Igitur erit quoque diameter ad latus, vt diameter ad latus. Ergo permutando, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat aut BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoque, latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem, triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia, [b] proportionem habent laterum homologorum, triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi ABDC, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1. 3. 9. 27. videre licet. Quam ob rem, [c] cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

[a] 22. sex

[b] 33. vn decimi.

[c] 20. sex decimi.

THEO-

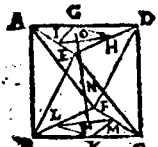
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

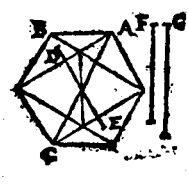
IN octaedro ABCDEF, concipiatur descriptum Icosaedrum. Dico octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Cũ enim vt ex demonstratis in propos. 16. lib. 15. liquet, octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri reponantur; sint duæ bases Icosaedri GHI, KLM, in duabus basibus oppositis octaedri ADE, BCF; atque ex N, centro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim vtriusque est centrum, per coroll. 3. propos. 16. lib. 15.) ad basim ADE, perpendicularis ducatur NO, cadens in centrum O, trianguli ADE, seu circuli ipsum ambientis, ex coroll. lemm. 1. propos. 10. lib. 14. quod quidem O, centrum quoque est trianguli GHI, per coroll. 2. propos. 16. lib. 15. Cum ergo plana opposita ADE, BCF, parallela sint; ex coroll. 4. propositionis 14. lib. 11. Recta NO, producta perpendicularis quoque erit, per scholium propositionis 14. lib. 11. ad planum BCF, in eiusque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo est & octaedri & Icosaedri sibi inscripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est NO, dimidium altitudinis octaedri? Similiterque Icosaedrum in 20. pyramides



æquales eiusdem altitudinis NO: Est autem prisma triplũ pyramidis eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Erit prisma, cuius basis AD E, & altitudo O N, æquale tribus pyramidibus octaedri: At verõ prisma, cuius eadem basis ADE, altitudo autem O P, dupla altitudinis O N, duplum, est prismatis, cuius basis eadem A D E, altitudo vero ON, per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius basis ADE, & altitudo O P, æquale est sex pyramidibus octaedri: Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit & tertia pars prismatis super basim ADE, & sub altitudine OP, cõstituti; prisma videlicet, cuius basis tertia pars est triãguli ADE, altitudo vero eadem OP. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basem ADE. & sub altitudine OP; cum per ea, quæ docuimus ad propos. 7. lib. 12. prismata eiusdem altitudinis inter se sint, vt bases. Quare duo prismata, quorum vnius basis ADE, & altitudo OP, alterius aũt basis tertia pars basis ADE, & altitudo eadẽ OP, æqualia sunt octaedro ABCDEF. Nõ secus demonstrabimus prisma, cuius basis GHI, altitudo vero OP, æquale esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea q; triplũ huius prismatis, nẽpe prisma, cuius basis tripla sit basis GHI, altitudo autẽ eadem OP, æquales esse 12. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiam partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem G H I, & sub altitudine O P, constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo vero eadem O P; Atque idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit trianguli GHI, altitudo autem O P, alterius vero basis tertia pars basis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia, sint per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, cõtinentes, (cum vnius basis sit ADE,

nem-

nempe tres tertiæ partes ipſius A D E, complectens, alterius vero baſis tertia pars ipſius A D E,) ad baſes priſmatum Icoſaedro æqualium decē tertias partes trianguli GHI, comprehendentes;(cum vnius baſis tripla ſit trianguli GHI, nimirū nouē tertias partes ipſius GHI,cōtinēs,alteriusvero baſis tertiapars ipſius GHI,) Sint aūt vt quatuor tertiæ partes triāguli ADE,ad decē partes tertias triāguli GHI,[a]ita



a 15. h

duæ tertiæ partes ipſius ADE, nēpe dimidiū quatuor tertiarū,ad quinq; tertias partes ipſius GHI,hoc eſt,ad dimidiū decē tertiarū:Et vt duæ tertiæ partes ipſius ADE, ad quinque tertias partes ipſius GHI,ita quoque ſint,per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ.22. lib.5. ſex tertiæ partes ipſius A D E,(hoc eſt, duæ baſes octaedri triplum duarum tertiarum vnius baſis conſtituentes, cum ſex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipſius GHI,(id eſt,ad quinque baſes Icoſaedri, triplum quinque tertiarum vnius baſis complectentes,cum quindecim tertias complectantur,)erunt quoque duo illa priſmata,octaedro æqualia,hoc eſt,ipſummet octaedrum,ad duo hæc priſmata Icoſaedro æqualia,nempe ad ipſummet Icoſaedrum, vt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quocirca octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet,quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadē cū in Icoſaedro ſphæra deſcripti,& ex proportione triplicata eius,quæ

habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icosaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat centra basium oppositarum, diameter autem eius sit AC; & F, sit latus Icosaedri, & G, latus cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti. Dico proportionem Icosaedri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icosaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectam DE. Cum enim, ex demonstratis propos. 5. lib. 15. Dodecaedrum in Icosaedro descriptum statuat angulos suos in centris basium Icosaedri, atque adeo oppositos angulos in centris basium oppositarum; Erit DE, diameter dodecaedri in Icosaedro ABC, descripti; cum copulet angulos ipsius oppositos in D, & E, centris basium Icosaedri oppositarum residentes. Propositis iam tribus magnitudinibus, Icosaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri AC, hoc est, in eadem sphæra, in qua Icosaedrum ABC, descripto, cum vtriusque eadem sit diameter; & Dodecaedro diametri DE, intra Icosaedrum videlicet, ABC, constructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icosaedri ABC, ad tertiam, videlicet ad Dodecaedrum diametri DE, sibi inscriptum, componetur ex proportionibus primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, nimirum ex proportionibus Icosaedri ABC, ad dodecaedrum diametri AC, in eadem sphæra cum ipso descriptum, & Dodecaedri eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icosaedro ABC, descriptum. Cum ergo Icosaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem sphæra compreheusum, sit vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi; (a Nam Dodecaedrum diametri AC, ad Icosaedrũ ABC, eiusdẽ diametri

a 11. quartidecimi.

est,

est, vt G, latus cubi ad F, latus Icosaedri. Conuertendo igitur erit Icosaedrum ABC. ad Dodecaedrū diametri AC, vt F, latus Icosaedri ad G, latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiusdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri DE, in Icosaedro videlicet ABC, descriptum, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrū DE, id est, ad rectam centra basium Icosaedri oppositarum coniungentem, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Manifestum est, proportionem Icosaedri ABC, ad sibi inscriptum Dodecaedrum diametri DE, componi quoque ex proportione F, lateris Icosaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE. Quare Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositā, &c. Quod erat demonstrandū.

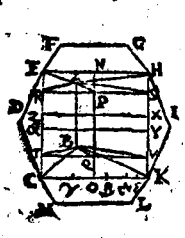
THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

QVONIAM ex demonstratis propos. 8. lib. 15. quatuor latera basis cubi in Dodecaedro descripti subtendunt quatuor angulos quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus conuenientium; sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, secundum latus idem commune AB, alia autem duo AEFGH, BCMLK, secun-

dum

dum angulos EAH, CBK. His vero pentagonis inscriptũ
sit quadratum cubi ECKH, super quod consistat pars Do
decaedri cubum circumscribentis, solidum scilicet CB-
KHAE, constans quinque planis CBK, EAH, ABCE, AB-
14. pri. KH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, a triangula sunt æ-
qualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia sint late-
ribus pentagoni AB, AH, angulosque comprehendant æ-
quales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, AB-
KH, trapezia sunt æqualia quoque: (cum enim & penta-
gona ABCDE, ABKIH, per hypothesin, & triangula ex ip
sis ablata CDE, HIK, b æqualia existant; æqualia erunt &
b 4. pri. reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique est
basis cubi inscripti ECKH. Simili modo reperientur alia
quinque solida huic similia, & æqualia, per 10. defin. lib.
11. super reliquas quinque cubi bases; ita vt Dodecaedrũ
superet cubum sibi inscriptum sex huiusmodi solidis. Dico
igitur hunc totum excessum ex sex illis solidis cubum
inscriptum circumstantibus conflatum, æqualem esse pa-
rallelepipedo, cuius quidem basis deficit a CEHK, basi
cubi, rectangulo contento sub latere cubi CK, tertiaque
parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; at vero al-
titudo ab altitudine, seu latere cubi, minore segmẽto eius
lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus exi-
stit. Sectis enim lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iun-
ctaque recta NO, quæ parallela est lateri pentagoni AB,
& in quam cadunt perpendiculares AP, BQ, demissæ in
planum EK, vt constat ex demonstratis propos. 17. lib. 13.



(Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP,
BQ, huius figuræ lineas LN, VX, VR,
XS, figuræ propos. 17. lib. 13.) Erit
vtraque recta AB, PQ, maius segmen
tum lateris cubi NO, vel HK, & vtra
que AP, BQ, æqualis dimidio lateris
pẽtagoni AB, seu maioris segmẽti la-
teris cubi, vt liquet ex eadẽ propos.
17. lib. 13. Ac propterea si per P, Q, du
cantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK,
parallelæ; erunt quoque RT, SV, maiora segmenta late-

rum

rum EC, HK; atque adeo ER, CT, simul, & HS, KV, simul minora eorundem laterum segmenta. Ductis deinde rectis AR, AS; BT, BV, constituantur duæ pyramides BRSHA, CTVKB, quæ per coroll. propos. 6. lib. 12. æquales inter se erunt, cum & earum bases ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales sint; consistentque extra solidum ABTVSR. [a] Quoniam autem AS, ipsi BV, & AR, ipsi BT, æqualis est, & parallela, cum coniungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, [b] parallela erunt plana triangulorum ARS, BTV, atque adeo inter se æqualia, ex coroll. propos. 8. lib. 11. cum latera vnius lateribus alterius sint æqualia. Quare solidum ABTVSR, contentum duobus aduersis triangulis æqualibus, similibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrammis RV, AT, AV, prisma est, ex definitione.

IAM vero, cum ostensum sit rectas HS, KV, minus segmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriusque HS, & KV; & ipsius VX, minoris segmenti lateris HK, duas tertias partes contineat VY, tertia vero pars sit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales sunt ostensæ; [c] vtriusque vero earum dupla est pyramis super basem TX, & sub eadem altitudine PA, vel QB, constituta, [d] quod & basis TX, dupla sit basis CV, vel RH; Aequalis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB, simul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet prismatis, cuius basis eadem TX, & altitudo eadem QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis sit ipsi VX, vt demonstrauimus in scholio propos. 7. lib. 12. Item eiusdem prismatis, cuius basis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes continet prisma, cuius basis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. [e] quod & basis TY, duas partes tertias complectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB;

[a] 33. pr
[b] 15. vi decimi
[c] 6. du decimi
[d] 1. sext
[e] 1 sex

Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum contentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoque a base cubi deficientem rectangulo αX, contento sub latere cubi αY, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata, æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autē duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadem altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pēntagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases a base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis a base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorū, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmenti lateris cubi, tertiæ sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: ita vt Cβ, maius segmentum, & βK, minus bifariam in γ, δ; atque ex βK, abscindatur βε, æqualis ipsi βγ, seu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel Cε, dimidia pars maioris segmenti Cβ, æ-

qualis sit ipsi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βK, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio maioris segmenti; quia βK, maior est, quam dimidium maioris segmenti Cβ. Cum enim sit, vt CK, ad Cζ, ita Cζ, ad ζK; sit autem CK, minor, quam dupla ipsius Cζ, quod Cβ, sit ipsius maius segmentum; erit quoque Cζ, minor, quam dupla ipsius ζK, hoc est, erit βK, maior, quam dimidium ipsius Cβ. Quoniam igitur est, vt tota CK, ad maius segmentum Cβ, ita maius segmentum Cβ, ad minus βK; erit quoque vt CO, dimidia ipsius CK, ad Cγ, vel βε, dimidiam ipsius Cβ, ita Cγ, vel ζε, ad βδ, dimidiam ipsius ζK; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentū Cγ, vel βε, & minus ζδ. Quare & ζδ, minus segmentum secabit βε, maius segmentum extrema ac media ratione, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. eritque maius segmentum ζδ, minus autem δε; Ac propterea rursus δε, minus segmentum secabit rectam δK, maiori segmento ζδ, æqualem, extrema ac media ratione, minusq; segmentum erit εK. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmento εK, rectæ δK, vel sibi æqualis rectæ βδ, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmentum minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo dodecaedrum excedit sibi inscriptum cubum, a base cubi deficere rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; altitudinem vero, ab altitudine cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Quocirca Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, &c. Quod erat demonstrandum. 215. 5.

COROLLARIVM.

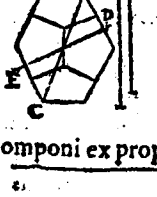
VNDE elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit. Al-

terius

terius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. Nam si prius parallelepipedū addatur illi parallelepipedo, quo cubum a Dodecaedro superari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, basin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero a latere cubi deficit minore segmēto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus est segmentum, hoc est, altitudine posterioris parallelepipedi. Quare si confecto iam parallelepipedo adiungatur posterius parallelepipedum, compositum erit parallelepipedum prorsus æquale cubo intra Dodecaedrum descripto, siquidem & basis, & altitudo parallelepipedi, æqualis est & basi & altitudini cubi. Atque ideirco, vt Dodecaedrum cubi inscripti duplum existat, desunt prædicta duo parallelepipeda, cum his accedentibus ad excessum Dodecaedri supra cubum inscriptum, constituatur parallelepipedum cubo inscripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonstratum est.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quā habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.



IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At vero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diame-

tri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in centris basium oppositarum; erit recta DE, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrum ABC, collocato describetur, cum eandem habeant diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icosaedro eiusdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, descripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro ABC, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll. propos. 17. lib. 12. a Dodecaedrum vero diametri DE, ad Icosaedrum eiusdem diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro ABC, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri ABC, ad Icosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter DE, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri AC, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppositarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

a 11. quarti decimi.

THEOR.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorũ vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentum eius lineæ, quę dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadem pyramide est descriptus, vt ad finem lib. 15. tradidimus; Cubus autem pyramidis, in qua describitur, nona pars est. a cum pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla cõtineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cũ Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta

a 2 c. sex 7. ideci.

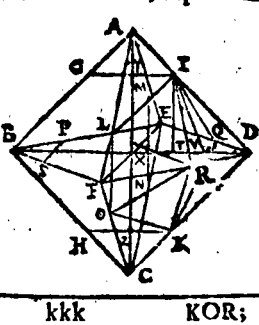
duo

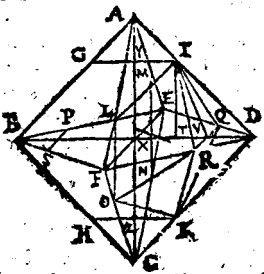
duo parallelipeda addãtur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est; &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrũ Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptũ est Icosaedrum, sit ABCDEF, repetita figura propos. 16. lib. 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrum inscriptum componentia esse IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia eius latera extrema ac media ratione; Item rectam IT, perpendicularem ad BD, æqualem esse maiori segmento XY, semidiametri AX. Dico octaedrum ABCDEF, superare Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri QR, altitudo vero IT, maius segmentum semidiametri AX. Cum enim in quatuor basibus octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulum solidum octaedri D, constituentibus positæ sint quatuor bases Icosaedri IMQ, ILR, KNQ,





KOR; remanebunt iuxta angulum solidum D, in eisdem quatuor basibus octaedri quatuor triangula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus si accedant duo triãgula Icosaedri QIR, KQR, & commune triãgulum DQR, constituentur duæ pyramides super communem basem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter se æquales, per coroll. propos. 5. lib. 12. cum earum altitudo sit recta eadem IT, maius videlicet segmentum semidiametri octaedri. (Nam quemadmodum AX, secta est a recta GI, in Y, extrema ac media ratione, ita quoque secta est CX, a recta HK, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR, [a] erit ea æqualis rectæ ZX, maiori segmento semidiametri CX, hoc est, ipsi IT.) Quæ quidem pyramides extra Icosaedrũ in octaedro descriptum consistunt. Simili modo prope singulos reliquos quinque angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se, & dictis duabus æquales extra Icosaedrum prædictum: ita vt Octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidium est quadrati lateris DQ; (Cũ DQ, DR, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumque contineant rectum.) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR, æquale est tribus pyramidibus earum duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo;

[a] 34. pri

vel

vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ Q R; & altitudo I T, quadruplum quoque est trium illarum pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidum quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrũ ambientes; Aequale quoque erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ Q R, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo I T, maius segmentum semidiametri A X, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptum; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demonstratis propos. 19. lib. 15. conflet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidem Pyramidi esse inscriptum: a octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, nempe rectæ Q R, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri, recta videlicet I T, seu Y X: Fit, vt octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (b quod Pyramis dupla sit sibi inscripti octaedri) superet duplum Icosaedri in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta Y Z, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum G I, H k. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata a nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit.

a 31. sextidec.

b 21. sextidec.

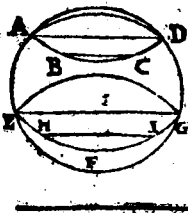
DE QVINQVE CORPORVM Regularium descriptione in data sphæra, ex Pappo Alexandrino.

QVONIAM Euclides libro 13. quinque corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde vero eadem à sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; nõ erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cum eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam constructio illa ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosij demonstrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere censeri possumus; quippe cum propositiones sphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commodè ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. Incitandis autem Theodosij propositionibus sequamur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli ABCD, EFG; sitque primum in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda sit diameter parallela. Ducatur, vt in scholio propos. 18. lib. 11. docuimus, per diametrum AD, planum rectum ad circulum ABCD, [a] faciens in sphæra superficie circulum AEG D. Quoniam igitur circulus AEGD, circulum ABCD, bifariam, & ad angulos rectos secat; erit circulus AEGD, maximus, trãsibitque per



a I. 1. Theod.

polos

polos circuli ABCD, ex schol. propos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG, a cum parralleli eosdem polos habeant; b ideoque eum bifariam secabit. Communis ergo sectio EG, eius diameter erit; c qua cum sit ipsi AD, parallela, patet propositum.

a 11. 2. Theod.
b 15. 1. Theod.
c 16. undecimi.

DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, nō sit eius diameter, cui ducenda sit diameter parallela in circulo EFG. d Ducatur ipsi BC, per centrum circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime ostendimus. Quoniam igitur vtraque BC, EG, eidem AD, parallela est, ex constructione, e ipsa quoque BC, EG, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.

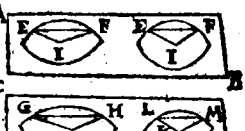
d 31. primi.
e 9. undecimi.

EADEM ratione recta BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, à diametro EG, diuersa, quæ ipsi BC, æqualis sit, si modo BC, maior non sit diametro EG. Nam si in circulo EFG, ducatur ipsi BG, parallela HI, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

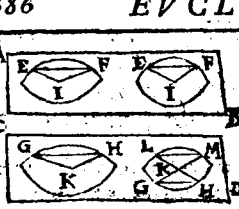
LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt.

IN planis parallelis AB, CD, descripti sint duo circuli, in quibus recta EF, GH, primum parallela sint, ad easdem partes centrorum I, K, auferanturque arcus similes EF, GH, ac eandem inuagantur ad centra rectæ EI, FI, GK, HK. Dico tam EI, GK, quam FI, HK, parallelas esse. Quoniam enim arcus EF, GH, similes sunt, erunt anguli I, K, æquales, ex scholio propos. 22. lib. 3. f Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.



f 32. primi



a 5. pri. a *Cum ergo tam illi, quam hi, sint inter se æquales; erit tam angulus E, angulo G, quam angulus F, angulo H, æqualis. Quoniam igitur in planis parallelis rectæ EF, GH, parallelæ sunt, & rectæ EI, GK, ad easdem partes planiper EF, GH ductæ efficiunt cum ipsis æquales angulos E, G; erunt ex ijs, quæ in scholio propos. 16. lib. 11. demonstrauimus, EI, GK, parallelæ. Eademque ratione FI, HK, parallelæ erunt.*

DEINDE sint EF, GH, parallelæ, non ad easdem partes centrorum I, K. Dico tam EI, HK, quam FI, GK, esse parallelas. Productis enim GK, HK, iungatur recta LM. Et quia latera GK, HK, lateribus LK, MK, sunt æqualia, b *anguloque ad verticem K, æquales continent;* c *erunt & bases GH, LM, & anguli H, L, æquales, & anguli G, M.* d *Igitur arcus GH, LM, æquales sunt,* e *& rectæ GH, LM, inter se parallelæ. Ac proinde cum utraque EF, LM, ipsi GH, sit parallela,* f *erit & EF, LM, parallela inter se. Quia igitur EF, LM, parallelæ sunt & scindantes, ad easdem partes centrorum arcus similes EF, LM; (Nam cum arcus GH, sit arcui EF, similis, erit quoque arcus LM, qui arcui GH, æqualis est, eidem arcui EF, similis.) erunt tam EI, LK, hoc est, EI, HK, quam FI, MK, hoc est, FI, GK, parallelæ. Quod est propositum.*

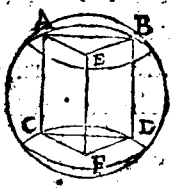
b 14. pri
c 4. pri.
d 28. ter
e 27. pri
f 9. vn-decimi.

LEMMA III.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema pũcta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares.

IN

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, in quibus sint duæ rectæ æquales & parallelæ A B, C D, ad easdem partes centrorum, quarum extrema iunguntur ad easdē partes rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, æquales quoque esse, ac parallelas, et ad plana circulorum perpendiculares. Quoniam enim AB, CD, parallelæ sunt; a erunt AC, BD. in eodem cum ipsis plano. Quare cū AB, CD, sint etiā æquales; b æquales quoque erunt ac parallelæ AC, BD, quod est primum.



a 7. undecimi
b 33. pri

EX centris deinde E, F, ductis rectis EA, EB, FC, FD, iunctaque recta EF; erunt eam AE, CF, quam BE, DF, parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autem & æquales ob circulorum æqualitatem. c Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales. d Quoniam vero circuli AB, CD, paralleli circa eosdem polos sunt, e recta per eorum polos ducta transibit per eorundem centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorundē recta erit. Quocirca recta EF, eorum centra coniungens, per eorum polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur transire, minimum recta per eorum polos extensa, quod est absurdū. Haberent enim illæ rectæ segmentū commune EF. f Igitur EF, ad plana circulorum AB, CD, recta est: g Ac propterea et utraque AC, BD, ipsi EF, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.

c 33. pri
d 1. 2. Theod.
e 11. 1. Theod.
f 12. 1. Theod.
g 8. undecimi.

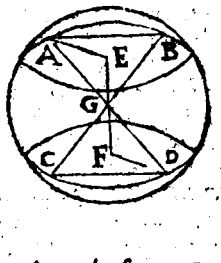
HAEC demonstratio locum etiam habet, quando parallelæ AB, CD, sunt circulorum diametri, sed tunc EA, EB, FC, FD, erunt partes diametrorum, ut patet.

LEMMA IIII.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes cē trorum: rectæ harum parallelarum extrema

puncta non ad eaſdem partes coniungẽtes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales; Rectę vero earundẽ parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, & in ijs duæ rectæ parallelæ & æquales AB, GD, non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad eaſdem partes iungantur rectis AD, BC. Dico rectas AD, BC, in centro ſphæræ ſe interſecare, idcoque diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales. Quoniam enim AB, CD, parallelæ ſunt; a erunt AB, BC, in eodem cum ipſis plano; ac proinde ſe mutuo interſecabunt, vt in puncto H: quod dicu. eſſe centrum ſphæræ. Connectantur enim circulorum centra E, F, rectis EA, EG; FD, FG. b Et quia anguli AGB, GGD, ad verticem æquales ſunt: c Item eam alterni anguli BAD, CDA: quum alterni ABC, DCB; æquiangula erũt triangula ABG, CDG. d Igitur erit vt AB, ad BG, ita DC, ad CG: Item vt AB, ad AG, ita DC, ad DG. Cùm ergo AB, CD, ponantur æquales, e erunt quoque tam BG, CG, quam AG, DG, inter ſe æquales. Rurſus quia AE, DF, ſemidiametri æqualium æqualium æquales ſunt; ſunt autem ex 2. lemmate & parallelæ, f idcoque anguli alterni EAD, FDA, æquales; erunt duo latera EA, AG, duobus lateribus FD, DG, æqualia, angulumque comprehendens æquales. g Igitur & baſes EG, FG, & anguli AGE, DGF, æquales ſunt.

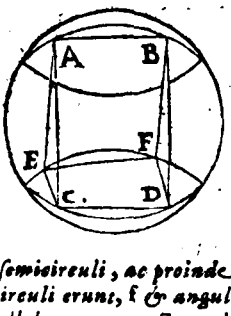


a 17. undecimi.
b 15. pri
c 29. pri
d 4. pri.
e 14. quæ
f 29. pri
g 4. pri.

Et

a Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallela AE, DF; b & EG, FG, in eodem plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum constituta, propter aequales angulos AGE, DGF, vt ex Procle ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphaerae transibit, vt in praecedenti lemmate demonstrauimus, c perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, aequales sint ostensa, erit G, centrum sphaerae, d propterea quod circuli aequales AB, CD, aequaliter a centro sphaerae absunt; inaequaliter vero abessent, si centrum sphaerae in recta EF, diceretur aliud punctum quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphaerae sunt, & inter se propterea aequales. quod est primum.

SED iam puncta extrema parallelarum aequalium AB, CD, ad easdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & aequales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallelae & aequales, e manifestum est, cum extrema puncta parallelarum aequalium coniungat: Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpendiculares CE, DF, iungantur que EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, semicirculi erunt, f & anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, recta CD, EF, aequales sunt, g ideoque & AB, EF, parallelae erunt, & aequales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectae erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramque EC, EA, & ad vtramque FD, FB; vt ostendimus, h perpendicularis erit & ad pla-



a 7. vn
decim
b 2. vn
dec mi

c 10. 1
Theod.
d 6. 1
Theod.

e 3. pri

f 31. ter

g 9. vn
decimi.

h 4. vn
decimi.

num

num trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: [a] ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallela, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.

a 8. undecimi.

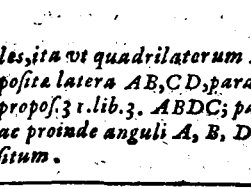
LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelæ, rectę earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erũt: Et si parallelę fuerint æquales, coniungentes non solum æquales, sed & parallelæ erunt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis AC, BD, Dico AC, BD, æquales esse. Quia enim parallelæ sunt AB, CD, [b] erunt AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano, [c] fiat in sphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ sint AB, CD; erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales: [d] ideoque & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod si parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo opposita latera AB, CD, parallela, & æqualia; erit ex scholio propos. 31. lib. 3. ABDC; parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.

b 7. undecimi.

c 1. 1. Theod.



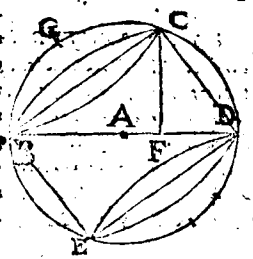
d 29. ter

LEM-

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentiâ sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximum BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. propos. 1. lib. 1. Theod. Secta autem BD, in F, vt BF, ipsius FD, dupla sit; erit BD, talium partium 3, qualium BF est 2. ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoque FC, ad BD, perpendiculari, iungatur recta BC, DC, ductaq; DE, ipsi BC, parallela, connectatur recta BE. a *Et quoniam semiduo anguli BCD, EDC, quâ duo BED, CBE, duobus rectis æquales sunt;* b *estque tam BCD, quam BED, rectus; erit quoq; & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex scholio propos. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum est;* c *ideoque recta BC, DE, æquales sunt. Diuiso iam arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, diuisus bifariâ in G, quod ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales sint. Polo igitur G, & interuallis GB, GE, circulus in superficie sphæræ describantur transeuntes per C, D, ob æqualitatem tam arcuum GB, GC, quam GE, GD;* d *qui paralleli erunt, cum eosdem habeant polos.* e *Et quia circulus maximus BCDE, per polos secat circulos BC, ED, bifariam; erunt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cum æquales sint ostensa, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentiæ sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continuè proportionales sunt; erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum ex BD, ad quadratum ex BC. Est autem BD, ipsius*



a 29. pri

b 31. ter

c 34. pri

d 2. 2. Theod.

e 15. 1. Theod.

BF,

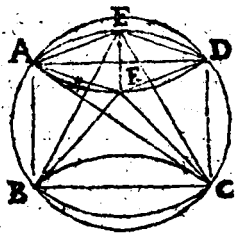
BF, sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex BD, quadrati ex BC, atque adeo & quadrati ex DE, sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ BD, vtriusque diametri BC, DE, potentia sesquialtera est. quod est propositum.

HIS demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data sphæra Pyramidem describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, æquales, & paralleli, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur ABCD, a *qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis communes sectiones faciet diametros AD, BC. Ducatur in circulo AD, alia diameter EF, secans AD, ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur EB, EC, FB, FC. Dico EBCF, esse pyramidem, hoc est, quatuor triangula EBC, ECF, CFE, EFB, esse æquilatera et æqualia. Iunctis enim rectis AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; erit AC, diameter sphæræ, ex lemmate 4. & AB, DC, æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique AEDF, quadratum erit in circulo AD, descriptum, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex constructione quadratum ex diametro sphæræ AC, sesquialterum est quadrati ex AD, diametro circuli; si ponatur quadratum ex AC, 3. erit quadratum ex AD, 2. Cum ergo quadratum ex AC,* b *æquale sit quadratis ex AD, DC, quod angulus ADC, rectus sit, ex*



a 15. 1. Theod.

b 47. pri

defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex DC, 1. ac proinde quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. Aequalia ergo sunt quadrata ex DC, DF; a quibus cum aequale sit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; erit quadratum ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea que quadrato ex AD, aquale. Recta igitur CF, recta AD, hoc est, ipsi BC, aqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem BC, aqualis; ideoque BCF, triangulum est aquilaterum. a 47. pri

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum; est autem, ex scholio propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: aqualia erunt quadrata ex DC, DE: b quibus cum aquale sit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Aequalia ergo sunt quadrata ex CE, AD, propterea que recta CE, recta AD, hoc est, rectis BC, EF, aqualis est, atque adeo & recta CF, quae ipsi BC, ostensa est aqualis. Triangulum igitur CEF, aquilaterum etiam est, & ipsi BCF, aquale, ob laterum aqualitatem. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse aquilaterum, & ipsis BCF, FCE, aquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum aquilaterum esse, & aliis tribus aquale: quippe cum latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint aqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphara descripta, cum eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphara consistant, quod est propositum. b 47. pri

COROLLARIVM.

HINC sequitur, diametrum sphaerae potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphaera descriptae. Nam latus pyramidis est aequale diametro AD, vt ostendimus, & ex constructione diameter sphaerae potentia est sesquialtera diametri AD.

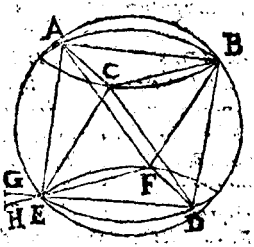
PRO-

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data sphæra octaedrum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales & parallèli ABC, DEF, ita vt sphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia sit sesquialtera.

a 2. quarti. *a Describatur autem triangulo æquilatero ABC, in circulo ABC, ductatur per primum lemma, recta AB, in circulo*



DEF, parallela & æqualis DE, ad diuersas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo DEF, describendi, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero DEF, erunt singula eius latera singulis lateribus trianguli ABC, æqualia & parallela: æqualia quidem, ob latera AB, DE, æqualitatem; parallela vero, ex schol. propos. 16. lib. 11. Cũ enim parallelæ sint AB, DE, & anguli ABC, DEF, æquales; productis rectis DE, FE, ad G, H, erunt quoque anguli ABC, GEH, æquales. Cum ergo parallelæ sint AB, GE, & BC, EH, ad easdem partes plani per AB, GE, ductæ; erunt quoque BC, HE, hoc est, BC, EF, parallelæ, ex illo scholio propos. 16. lib. 11. Eadem ratione parallela erit DF, ipsi AC. Connectantur denique AE, EC, CD, DB, BF, FA, vt in figura. Dico AD, octaedrum esse, hoc est, octo triangula ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera esse, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus sphæræ, rectæ AB, DE, æquales sunt & parallelæ ad diuersas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ AD, BE, (quas tamen confusionis vitandæ gratia non duximus) diametri sphæræ, & rectæ AE, BD, æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipsas AB, DE, b Quadratum igitur ex BE, duobus quadratis ex BD, DE, æquale erit: Posito autem quadrato ex diametro sphæræ BE, 6. quadratum ex DE, est 3. (Nam cum per constructionem dia-

b 47. pri

meter

meter sphæra potẽti a sit sesquialtera diametri circuli DEF: posito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At posito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris triãguli æquilateri DE, est 3. quod ex coroll. 1. propos. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex BD, est 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia sunt, & recta ipsæ DE, BD, æquales. Est autem DE, ipsi AB, per constructionem, & BD, ipsi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, constituentq; quadratum ABDE, cum anguli ad A, B, D, E, recti sint ex eodem 4. lemmate.

RVRSVS quia BC, EF, parallelæ sunt & æquales ad diuersas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ BE, CF, non ad easdem partes, diametri sphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ BF, CE, æquales inter se, atque ad BC, EF, perpendiculares, eritque rursus, vt prius, quadratum BCEF. Non aliter ostendemus, ACDF, quadratum esse; cum iunctæ rectæ AD, CF, sint quoque sphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, BE, CF, constructa sint super latera æqualia AB, BC, CA, nimirum super latera trianguli æquilateri, cum AB, latus sit quadrati AD; & BC, quadrati BE; & CA, quadrati CF; erũt omnia triãgula octo ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est AD, ex defin. 27. lib. 11. & in data sphæra descriptum, cum eius anguli solidi A, B, D, E, C, F, sphæræ superficiem attingant. quod est propositum.

COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, sphæræ diametrum potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demonstratũ enim est, quadratum ex BE, diametro sphæræ duplum esse quadrati ex DE, latere octaedri.

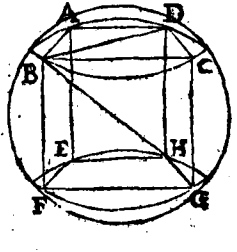
PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data sphæra cubum describere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data sphæra duo circuli æquales ac paralleli ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia sit sesquialtera diameter sphæræ. a Descripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD, du-

a 6. quarti.

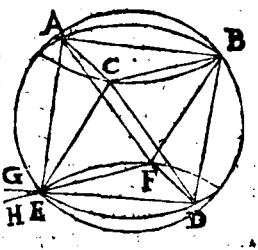
catur



catur per 1. lemma recta AD, in circulo EFGH, parallela EH, & æqualis ex eadem parte centrorum, qua latus quoque erit quadrati in circulo EFGH, descripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato EFGH, erunt singula eius latera singulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterum AD, EH, æqualitatem: parallela vero, ex scholio propos. 16. lib. 11. Nam quia parallelæ sunt AD, EH, sunteq; anguli æquales ADC, EHG, nimirum recti; erunt quoque DC, HG, parallelæ, cum sint ad easdem partes plani per AD, EH, ducti, & sic de cæteris. Iungantur denique ad easdem partes centrorum rectæ AE, BF, CG, DH, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter se parallelæ. Dico AG, esse cubum, hoc est, sex quadrilatera ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, esse quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis BH, BD, erit ex lemmate 4. BH, diameter sphæræ; at BD, diameter circuli ABCD, quippe quæ diameter sit quadrati circulo inscripti. Quoniam igitur per constructionem, quadratum ex BH, sesquialterum est quadrati ex BD; quadratum autem ex BD, quadrati ex BC, duplum, ex scholio propos. 47. lib. 1. si statuatur quadratum ex BH, 3. erit quadratum ex BD, 2. & quadratum ex DC, 1. atque adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC, triplū erit. Rursus quia quadratum ex BH, est 3. & quadratum ex
47. pri BD. 2.ª estque quadratum ex BH, æquale quadratis ex BD, DH, quod angulus BDH, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex DH. 1. Quadratum igitur ex BH, triplum est quadrati ex DH, Fuit autem idem quadratum ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DH, ac proinde rectæ DC, DH, æquales. b Cum ergo oppositis lateribus GH, CG, æquales sint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH.

Eadem

Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata ostendētur: Sed & AC, EC, quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se aqualia, ob laterum aqualitatem. Cubus igitur est AG, ex defin. 25 lib. 11. & in data sphæra descriptus, cum eius anguli solidi A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.



COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ BH, triplum esse quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque est, eundem circulum comprehendere & quadratum cubi, & triāgulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ æqualis est circulo ABC, figuræ antecedeutis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 21.

PROBL. 4. PROPOS. 4.
IN data sphæra Icosaedrum describere.

REPERIATVR a *recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti: Fiatque ex coroll. propos. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiusdam linea, ad cuius inuentionem, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Descripto maximo circulo in sphæra data,* b *accōmodetur in eo recta, quæ inuentæ semidiametri sit dupla, cum hæc recta minor sit diametro sphæræ, siue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam si per eam rectam planum ducatur rectum ad circulum illum maximum,* c *faciet id circulum ABC, in sphæra*

a 12. sex

b 1. qn.

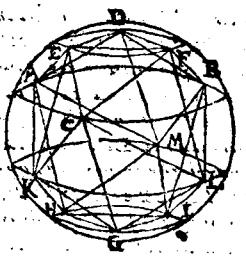
c 1. 1. Theod.

cuius semidiameter, ex constructione, potentia subtripla est recta initio inuenta. Deinde [a] inueniatur rursus recta linea, ad quam ita se habeat data sphæra diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti; Fiatque vt 3. ad 1. ita per coroll. propos. 6. lib. 10. quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in sphæra describatur priori circulo ABC, parallelus; quod fiet, si in eodem illo circulo maximo accōmodetur recta aqualis duplæ semidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex ijs, quæ ad propos. 1. lib. 4. demonstrauimus, & per eam rectam planum extendatur priori circulo parallelum, hoc est, ad dictam circulum maximum rectum, ex scholio propos. 28. lib. 11. Nam per idem scholium, planum hoc erit circulo ABC, parallelum, [a] faciatque in sphæra circulum DEF, cuius semidiameter semidiametro inuentæ aqualis est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæræ alij duo aquales ac parralleli describantur GHI, KLM, quod facile fiet, si illorum diametris aquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c. [c] Descripto autem in circulo DEF, triangulo aquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ aqualis sit vni lateri trianguli aquilateri in circulo ABC, descripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & aqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri parallela HI, & aqualis ipsi EF, hoc est, lateri trianguli aquilateri in circulo GHI, descripti. Completis ergo triangulis aquilateris ABC, KLM, GHI, erunt singula latera singulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipsi DF; at BC, MK, GI, ipsi DE, quod probabitur ex scho-

12. sex

[a] 1. 1. Theod.

[c] 2. quar



lio

lio propos. 16. lib. 11, vt in problemate secundo ostendimus parallelas esse BC, EF, ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notauimus. Postremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum aquilaterorum ad victimora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ, videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF; ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex qualibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico DG, esse Icosaedrū, hoc est, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. esse aquilatera, & aqualia. Quod vt demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16. lib. 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.

SIT igitur in sphæra descriptum Icosaedrum DG, duodecim angulos statuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinque recta DE, DA, DM, DB, DF. aquales sunt, cum sint latera triangulorum aquilaterorum aqualium; si ex polo D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eius latera sint aqualia, vtpote latera Icosaedri; erit illud pentagonum etiam aquiangulum, ex ijs, qua ad finem lib. 4. demonstrata sunt a nobis. Eadem ratione pentagonum aquilaterum, & aquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas aquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icosaedri inter se aqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinque latera Icosaedri aqualia KH, KG, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinque Icosaedri aqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas aquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque aquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas aquales LB, LB, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque

rectas aquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinque aquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinque latera Icosaedri aqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEK, ob quinque Icosaedri latera aqualia CG, CL, CF, CE, CK, ita vt 12 pentagona aquilatera, equiangulaque inter se aqualia constituantur. Quoniam vero recta subtendens angulum pentagoni aquilateri, & aquianguli opposito lateri aquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus; erit iuncta recta AB, ipsi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipsi DF, parallela in pentagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipsi DE, in pentagono DECLB. a Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallella sunt, b faciuntque circulos parallelos in sphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipsi HI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipsi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipsi GH, in pentagono LBMHG: Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipsi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipsi EF, in pentagono GLFEK. c Igitur EF, HI, cum sint eidem iuncta AB, vel KL, parallela, inter se parallelæ sunt; Eademque ratione DE, GI, cum sint eidem iuncta BC, vel KM, parallela, inter se parallelæ erunt; propterea que plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra DEF, ABC, KLM, GHI, parralleli inter se sunt: & tam circuli DEF, GHK, inter se æquales, ob triangula æquilatera in illis descripta æqualia, quam circuli ABC, KLM, inter se etiã æquales, ob triangula æquilatera æqualia in ipsis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL, LM, MK, constituuntur: quippe cum latera hæc sint recta subtendentes angulos pentagonorum æqualium.

a 15. undecimi.

b 1. Theod.

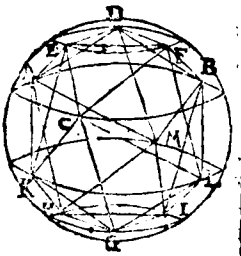
c 9. undecimi.

QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad easdem partes extremæ K, B, parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus BAK, rectus ex 4. lemmate, quod KA, connectat ad easdem partes extremæ K, A, earundem parallelarum; d erit quadratum diametri KB, æquale duo-

d 47. primi

bus

bus quadratis ex AB, AK. Rursus quia in pentagono EAMBF, recta iuncta AB, angulum AMB, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit AB, iuncta ad EF, vel AK, ipsi EF, aequalem, vt hexagoni latus ad latus decagoni:



Atque idcirco a cum latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum: erit diameter sphæra KB, (qua ambas AB, AK, potest, vt ostendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus est hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni Quare sphæræ diameter KB, ad iunctam AB, proportionem habet, quam pentagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad EF, eam, quam latus pentagoni habet ad latus decagoni: b Ac proinde cum tam AB, latus trianguli aquilateri in circulo DEF, potentia triplũ sit semidiametri sui circuli, erũt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis aquales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla est semidiametri initio inuentæ, minorem esse diametro sphæræ, vt supra diximus.

a 10. tertij dec.

b 12. tertij dec.

HIS demonstratis facili negotio concludemus, solidam figuram a nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadant in terna pũcta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæræ diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus

decagoni in eodem illo in circulo. Nam descripto Icosaedro D G, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphæræ KB, ad EF, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triãgulum isosceles constituant: a ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni:

20. pri

COROLLARIVM.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad iunctam AB, ex constructione: erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctum AB. b Est autem latus hexagoni in circulo ABC, (hoc est, semidiameter) potentia subtriplum rectæ iunctæ AB, quod AB, sit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo ABC, descripti.

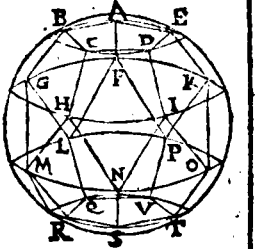
b 12. ter 13. dec.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propos. ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ita vt semidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, sint potentia subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorum FGHIK, LMNOP, potentia sint subtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo ABCDE, pentagono ABCDE, æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri CD, ad easdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & æqualis lateri pentagoni

eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Recta autem HI, ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic eandem LP, ad easdem centrorum partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis, (quorum tamen latera, vt confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus.) erunt singula latera



eorum singulis lateribus pentagoni ABCDE, parallela, eo ordine, quo lateri CD, parallela ducta sunt: quod demonstrabitur, vt in probl. 2. ostendimus parallelas esse BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erit ipsi BC, &c. Postremo ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides esse emissas. Dico AS, Dodecaedrum esse, hoc est, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPkE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera esse æquiangula, & æqualia. Quod vt ostendatur, demonstrandum prius est, Dodecaedrum in sphæra descriptum (posse autem in data sphæra Dodecaedrum describi, docuit Euclides propos. 17. lib. 13) suos 20. angulos statuere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, quinos videlicet in singulis circulis, atque in eo situ, quo eadem 20. puncta notauimus.

SIT ergo in sphæra descriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos statuens in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, k, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos 8. lib. 13. demonstrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri

DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipsi AE, in pentagono AEKPF; & FG, ipsi AB, in pentagono ABGLF; & sic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FK, parallelæ sunt; a erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelum erit planum per FG, GH, ductum, quod hæc recta rectis AB, BC, sint parallelæ. Igitur ex scholio propos. 16. lib 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter se parallela sunt, cum eidē plano pentagoni ABCDE, sint parallela; atque adeo, ex eodem scholio, cum conueniant in recta FG, vnum planum efficient. Non aliter ostendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG; cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Planæ igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in sphæra b efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemque modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos efficient QRSTV, LMNOP, Eruntque tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL, c quæ omnes æquales sunt, cum subtendāt angulos æquales in pentagonis æqualibus.

DEINDE quia ex scholio propos. 8. lib 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ sunt in pentagonis OHNID, BGMHC; d erunt quoque ipsæ iunctæ ND, MB, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant. e Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ iunctæ NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quod vtraque lateri DI, sit parallela. f Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus est, cum ille ducatur per rectas NM, NO, hic vero per rectas BD, CE, quibus

a 15. vndecimi.

b 11. Theod.

c 4. pri.

d 9. vndecimi.

e 33. primi

f 15. vndecimi.

bus illa parallela sunt ostensa. Non secus ostendentur paralleli circuli Q R S T V, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.

RVRSVS quoniam iuncta recta EF, OV, cum ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, aquidistent, [a] parallela sunt; nec non & inter se aequales, quod angulos aequales in pentagonis aequalibus subtendant, [b] erunt & recta iuncta FO, FV, parallela & aequales. Quadrilaterum ergo EFVO, in uno plano est, [c] cum EF, OV, in eodem sint plano cum parallelis EO, FV. Est autem & in circulo, [d] propterea quod planum, in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur ex ijs, quæ ad propos. 31. lib. 3. demonstrauimus, cum in eo quadrilatero opposita latera aequalia sint, quadrilaterum rectangulum est EFVO; ac proinde cum omnia latera aequalia sint, subtendentia angulos aequales in pentagonis aequalibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum potest lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, recta iuncta FG, quod aequales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagonorum aequalium; ideoque qualium partium 1. statuetur quadratum rectæ F G, talium 2. erit quadratum rectæ F O, & ambo quadrata simul earundem partium 3. Quibus [e] cum æquale sit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter sphæræ est; (Nam cū æquales sint iunctæ FG, ON, subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelas, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter sphæræ.) erit quoque quadratum diametri sphæræ 3. qualium 1. est quadratum rectæ FG. hoc est, quadratum diametri sphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit. [f] Est autem & quadratum lateris trianguli æquilateri triplum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratū diametri sphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris trianguli ad quadratum lateris hexagoni; [g] atque adeo vt diameter sphæræ ad rectam F G, ita latus triāguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt au-

Diam. sphæræ	Latus pentag.
Recta F G.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

a 9. undecimi.
b 33. pri
c 7. undecimi.
d 1. 1. Theod.
e 47. pri
f 12. tertij dec.
g 22. sex

tem

tem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quod FG, sit latus pentagoni. Igitur ex aqualitate perturbata erit, vt diameter sphæra ad latus trianguli aquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in apposita formula apparet. Cum ergo in figura precedentis propos. sit quoq; vt diameter sphæra ad latus triãguli, hoc est, ad iunctã rectã AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ aqualis.

PRAETEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta F G, subtendens angulum pentagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pentagoni in circulo ABCDE, ita latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus trianguli in circulo ABCDE; erit quoque vt latus trianguli in circulo FGHIK, ad latus triãguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæra ad latus trianguli in circulo FGHIK, ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo cum pentagono descripti, vt proxime demonstratum est. Igitur ex aquo erit, vt diameter sphæra ad latus trianguli in circulo ABCDE, ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo cũ pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura precedentis propos. sit quoque, vt diameter sphæra ad EF, latus trianguli in circulo DEF, ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterque circulus DEF, GHI, figuræ antecedentis propos. vtrique circulo ABCDE, QRSTV, huius figuræ aqualis. Quare circuli ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac descripsimus.

Diam. sphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE,	Lat. decagoni.

QVIBVS demonstratis, nullo negotio probabimus, solidam figuram A S, a nobis descriptam esse Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum ABCDE, omnes eius anguli solidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus DEF, figuræ antecedentis propos. æqualis est circulo ABCDE, figuræ huius propos. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 5.

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri:

SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonstranimus, facile etiam ostendemus, si omnia quinque corpora regularia in una eademque sphæra describantur, maximum omnium esse Dodecaedrum: Deinde Icosaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro esse maius. Ex quæ constabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora construxisse, cum post Tetraedrum statim octaedrum, non autem cubum, constituerit. Ita enim semper a minoribus ad maiora progressus est. Sed prius alia nonnulla demonstranda sunt. Hinc ergo exordiamur.

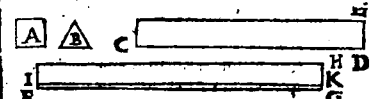
I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis esse maiora. Sit enim rectangulum C E, cuius unum latus C D, octuplum sit lateris quadrati A, & latus D E,

lateri

l ateri eiusdem quadrati æquale: Eritque rectangulum CE, *o*ctuplum quadrati A, 2a cum sit, vt CD, ad latus quadrati A, ita rectangulum C E, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cuius vnum latus FG, decuplũ sit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpẽdiculari ex vno angulo trianguli ad eius basem demissa, hoc est, altitudini triãguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnũ latus est vigecuplum lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipsi GH, hoc est, altitudini trianguli B, *b* vigecuplũ est triãguli B; Ei autem triangulo rectangulo æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. rectangulum FH, quippe cum basis FG, dimidium sit basis illius trianguli; erit quoque rectangulũ FH, vigecuplum trianguli B. Probandum igitur est, rectangulũ FH, maius esse rectangulo C E. *c* Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus DE, potentia sesquitertium est eius perpendicularis, hoc est, lateris GH: Latus autem F G, ad latus C D, potentia proportionem habet, quam 25. ad 16. quod F G, sit 10. & C D, 8. hoc est, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Est enim maior proportio 25. ad 16. supernoncupartiens sextasdecimas, quam 4. ad 3. sesquitertias, quod maior sit fractio $\frac{9}{16}$. quam $\frac{1}{3}$. *d* Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK, eritque maior quoque proportio DE, ad H K, quam ad G H; *e* ac proinde maior erit G H, quam HK. Ducta ergo KI, ipsi FG, parallela, erit vt IK, ipsi FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK. *f* Igitur erit IH, rectangulum rectangulo CE, æquale: ideoque EH, maius, quam CE. Quod est propositum.



I I.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

Quo-

a QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæræ descriptæ superficiei cubi in ea sphæra descripti æqualia sunt: Duo vero eadem quadrata æqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæra descriptis, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæræ æqualia quoque esse superficiei cubi eiusdem sphæræ. Quod est propositum. a 20. quartidecimi.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis e centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim octaedri, & cubi ducta.

NAM b quia latus octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumque solidum ita intra sphæram constituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius sit parallelum, longius a centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis e centro sphæræ ad basim Icosaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basim Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis sit perpendiculari cubi; c quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, ideoque æqualiter a centro distent; erit quoque perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum. b 18. tertiidec. c 21. quartidecimi.

IIII.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVO-

QVONIAM viginti triangula aquilatera super semidiametro sphæra maiora sunt octo quadratis ex eadem sphæra semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demonstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis aquilateris super semidiametro sphæra constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæra maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo maiora sunt octo quadratis ex sphæra semidiametro descriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulo ante demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE COMPARATIONE SOLIDITATUM quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo; Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro, quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, a vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum: b est autem latus cubi latere Icosaedri maius; maius quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basim cubi demissa, vt in 3. theoremate præ-

a 11. duarti decimi.
b 18. ter ij dec.

præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est; Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri consentum, maius solido, quod sub perpendiculari ex eodē centro sphæra in vnam basim cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 14. demonstrauimus, illud solidum Icosaedro sit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icosaedrum, quam cubus. Quod est propositum.

I I I.

CVBVS Octaedro maior est.

QVONIAM est, [a] *vt latus cubi ad semidiametrum sphæra, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius. (Nam* [b] *cum latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæra; erit latus cubi multo maius semidiametro sphæra.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.*

a 27. quartidecimi.
b 18. ter tydæ.

I I I I.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

QVONIAM basis octaedri minor est basi Tetraedri, [c] *quod basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæra centro ad vnam basim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri maior,* [d] *cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex cētro sphæra in vnam basim Octaedri cadente, & tertia parte superficiei octaedri, maius est solido cōtento sub perpēdiculari ex eodē centro sphæra in vnā basim Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex scholio*

c 14. quartidecimi.
d 14. quartidecimi.

propos.

propos. 20. lib. 14. illud solidum octaedro sit aquale, hoc vero Tetraedro erit quoque Octaedrum Tetraedro maius: Quod est propositum.

a 22. quartidecimi. *ALITER. Quoniam est,* a *vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Tetraedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrū. Igitur ex aqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam* b *quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem tripla;* c *ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit lateri Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.*

b 18. ter. vidaci.

c 10. qn.

d 17. quartidecimi. *ALITER.* d *Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectangulum sub linea potente $\frac{2}{6}\frac{7}{4}$ quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{8}{9}$ lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quod eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.*

e 32. quartidecimi. *ALITER.* e *Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri. (Nam* f *cubus ad octaedrū est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphæræ, quod & tota diameter, qua cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam.) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod est propositum.*

f 27. quartidecimi.

EODEM prorsus ordine se mutuo superant conuexa superficies eorundem corporum Regularium; hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri. Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cu-

bi:

bi: Conexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies connexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

QVONIAM enim a est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus Icosaedri maius, b vt supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.

a 9. quartidecimi.
b 18. tertiidec.

SVPERFICIEM vero Icosaedri maiorem esse superficie Cubi, demonstratum est paulo ante theoremate quarto ante comparationem soliditatum quinque corporum Regularium.

DEINDE c quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphaerae: Est autem latus cubi semidiametro sphaera maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoque superficies cubi superficie Octaedri maior.

c 27. quartidecimi.

DENIQVE d quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie.

d 14. quartidecimi.

VIDES igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam superficiem, at eo minus latus. Nam e vt supra demõstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius vero superficies atque soliditas, vt hic demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius vero conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrũ in eadem sphaera describantur, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuo superant, f vt supra ostensum est, ita contrario ordine eorundem superficies conuexa, atque soliditates se mutuo superant, vt hoc loco demonstrauimus.

e 18. tertiidec.

f 18. tertiidec.

CAETERVM pretereundum non est hoc loco id, quod à Pappo demonstratum est lib. 4. Mathematicarum collectionum, soliditates videlicet quinque corporum Regularium,

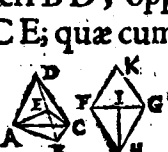
si Isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphæra constructa, longe aliter se habere, quam a nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore paucierum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrum maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius sit.

INVENTIO ANGVLI inclinationis duarum basium cuiuscunque solidi regularis, vnius ad alteram, ex Isidoro Hyspsiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT pyramis ABCD, cuius latere BD, bifariam secto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppositis rectæ ducantur AE, & CE; quæ cum perpendiculares sint ad BD,



def. pri. communem sectionem planorum ABD, CBD, in quibus existunt. (a Sunt enim in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales, &c.) angulum inclinationis AEC, basium ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exibebimus in quolibet plano, hac ratione. Assumatur FGH: triangulum æquilaterum super rectam FG, lateri pyramidis æqualem constrn

ctum

ctum, atque idcirco triangulo cuicũque pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum ABD, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad FG, conſtituatur ſuper FG, triangulum FGK, habens vtrumque latus FK, Gk, æquale perpendiculari HI, hoc eſt, vtrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem eſſe angulo inclinationis AEC, baſium ABD, CBD. Cũ enim latera kF, kG, æqualia ſint lateribus EA, EC; & baſis FG, baſi AC: a Aequales erunt anguli FkG, AEC. Dico inſuper angulum inclinationis ACE, acutum eſſe. b Cum enim latus AD, vel illi æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectę AE, CE: ideoque earundem partium 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cum in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

a 8. pri.

b 12. quarti decimi.

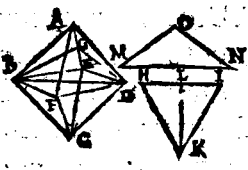
COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt AE, CE, subtendanturque a lateribus pyramidis; quale fuit AC; & omnes erunt inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & latera pyramidis eosdem subtendentia sint æqualia.

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri basium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis ABE, ADE, commune, bifariamque sectum in G, rectæ ducãtur BG, DG, quæ cum perpendiculares sint ad AE, communem sectionem, planorũ ABE, ADE, in quibus existũt, [a] (quod in triangulis BGA, BGE, anguli ad G, æquales sint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis basium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum super rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cui cunque octaedri propositi, triangulo



a 6. pri.

scilicet

ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta KL, perpendiculari ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri deſcripti, triangulum OMN, habens vtrumque latus MO, NO, perpendiculari kL, æquale, hoc eſt, vtrique perpendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales ſint. Dico angulum MON, æqualem eſſe angulo inclinationis BGD, baſium ABE, ADE. Cum. n. latera OM, ON, æqualia ſint lateribus GB, GD; & baſis MN, baſi BD; [a] Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico præterea, angulum inclinationis BGD, eſſe obtuſum. [b] Cū enim diameter octaedri BD, dupla ſit potētia lateris AB: [c] latus vero AB, potentia ſeſquitertium rectæ BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. quadratum rectæ BG; ideoque ambo ſimul quadrata rectarū BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius eſt quadratis ſimul laterum GB, GD; Ac propterea angulus BGD, obtuſus erit, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 2. oſtendimus.

[a] 8. pri.

[b] 14. tertij dec.

[c] 12. quarti dec.

COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris, cuiusmodi est BD; a omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illę perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes sint æquales.

a 8 pri.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus ABCDEFGH, in quo secetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; b quæ cum æquales, ac parallelæ sint lateribus EF, EH, (quod & kF, IE, inter se, necnon & IE, LH, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoque c angulos rectos ad latus DE, efficiant, continebunt kIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ Ik, IL, parallellę existentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, d angulum kIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, constituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt

b 33. pri.

c 29. pri.

d 10. vndec.

modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.

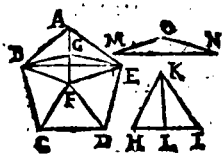
COROLLARIVM I.

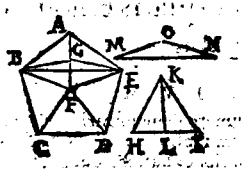
QVOCIRCA, cum eadem argumẽto demonstrari possit, quarumlibet duarum basium cubi angulum inclinationis esse rectum: perspicue concluditur, omnes inclinationes basium cubi æquales inter se esse.

IIII.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Icosaedri, vnius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis ABCDEF, vna ex 12. pyramidibus Icosaedri, cuius basis pentanũ ABCDE, ex quinque Icosaedri lateribus compositũ, vertex autem F. Diuiso itaq; latere AF, bifariam in G, ducantur ex triãgulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentiũ, angulis B, & E, lateri AF, oppositis rectæ BG, EG, quę cum ex demonstratis in probl. 2. huius scholij, perpendiculares sint ad AF, cõmunem sectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent BGE, angulum inclinationis basium ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Acci-





piatur triangulum æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatum, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendicularis, construatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens vtrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtrique perpẽdiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; [a] Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB; [b] erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemque modum AE, maior erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si

[a] 8. pri.

[b] 19. pri.

itaque

itaque recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelligatur poni; cadet angulus A, extra triangulum MON, ita vt rectæ AB, AE, rectas OM, ON; prorsus includant.[a] Angulus ergo O, maior erit angulo BAE: At hic obtusus est (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintã. Obtusus ergo erit, cum recto sit maior) Multo igitur magis obtusus erit angulus MON, hoc est, sibi æqualis BGE. [a] 21. pri

COROLLARIVM.

NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationũ contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, EG, subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE: [b] omnes inter se erunt æquales, quod & illę omnes perpendiculares, quę ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehentos, [c] æquales erunt. [b] 8. pri. [c] 4. pri.

V.

ANGVLVM inclinationis duarum basium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM per ea, quæ ostendimus in propos. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro descripti subtendant quatuor angu-

los

los quatuor basium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; sint huiusmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia, duo quidem ABCDE, AHIKB, secundū idem latus commune AB; alia autem duo AEFGH, BCMLk, secundum angulos EAH, CBk. His porro pentagonis inscriptum sit quadratū cubi ECkH, cuius quatuor latera subtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiso autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pētagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, secantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cum rectæ EC, HK, ipsi AB, sint parallelæ, ex scholio propos. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis basium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte construemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem constituatur pentagonum æquilaterum & æquiāgulum QRSTV, hoc est, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipsi ABCDE, æquale, cu-

ius angulo T, recta ſubtendatur VS,[a] æquá- [a] 4. pri
lis exiſtens rectæ EC, cum & latera TV, TS, lateribus DC, DE, æqualia ſint, angulóſque contineant æquales. Diuiſa deinde recta QR, bifariam in X, ducatur a puncto X, ad QR, perpendicularis XY; proptereaque perpendicularis ad VS, cum VS, ſit parallela ipſi QR, ex ſchol. propoſ. 8. lib. 13. Ac poſtremo ſuper recta VS, triangulum fabricetur VZS, habens vtrumque latus ZV, ZS, perpendiculari XY, æquale. Dico angulum VZS, æqualem eſſe angulo inclinationis ONP. Ductis enim rectis NE, NH, VX; cum latera EA, AN, æqualia ſint lateribus HA, AN: Item lateribus VQ, QX, angulóſque comprehendant æquales; [b] Aequales erunt & baſes NE, NH, VX, & angu- [b] 4. pri.
li ANE, ANH, QXV; ideoque & reſidui ex rectis, anguli videlicet ENO, HNP, VXY, æquales erunt. Quoniam igitur anguli ENO, EON, trianguli ENO, æquales ſunt angulis HNP, HPN, trianguli HNP; nec non & angulis VXY, VYX, trianguli VXY; (ſunt.n. EON, HPN, VYX, oſtẽſi recti.) Et latus NE, lateribus NH, VX, æquale demonſtratũ; [c] Aequalia erunt reli- [c] 26 pri
qua latera NO, OE, reliquis lateribus NP,

PH;

PH; Item lateribus XY, YV. Quare rectæ ZV, ZS, æquales existentes ipsi XY, rectis NO, NP, æquales erunt. Iam vero, quia
[a] 33. pri OE, PH, æquales sunt, ac parallelæ; [a] erit quoque recta coniuncta OP, æqualis & parallela ipsi EH, ideoque æqualis ipsi EC, hoc est, rectæ VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia
[b] 8. pri. sint; basis item VS, basi OP; [b] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, esse obtusum. Nam ducta recta Bα, ipsi NO, parallela; cum sit quoque NB, ipsi Oα, parallela, ex scholio propos. 8. lib. 13. Parallelogrammũ erit NOαB, [c] ideoque
[c] 34. pri recta Bα, ipsi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppositum angulo
[d] 29. pri CαB, qui rectus est, ([d] æqualis nimirum interno CON,) maius est latere Bα, hoc est, recta NO, vel vtraq; ZV, ZS, quæ ipsi NO, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, rectas ZV, ZS, includãt

omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior est angulo pentagoni T: Hic vero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis: quales sunt NO, NP, subtendanturque a rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certe, quæ rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni EAH, subtendit, æqualis: a Erunt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint: nec non & rectæ illæ omnes, quę eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales. a 8. pri.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

REGESTVM

a b c d e f g h i k l m n o p q r ſ t u x y z

aa bb cc dd ee ff gg hh ii kk ll mm nn oo pp qq rr ſs tt uu xx yy zz

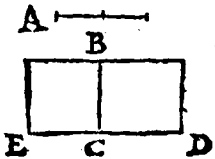
aaa bbb ccc ddd eee fff ggg hhh iii kkk lll mmm

Omnia ſunt integra folia.

R O M Æ,
Apud Aloyſium Zannettum. MDCIII.

SVPERIORVM PERMISSV.

Pagina 432. pro figura ibi posita reponatur hæc.



1 d9 66 B