Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

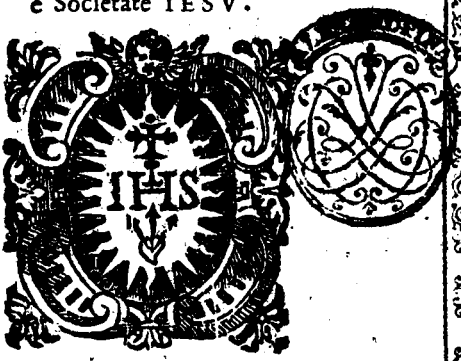
EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV.

Acceſſit LIBER XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, accuratisq; ſcholijs illuſtrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum acceſſione poſt primam editionem locupletati.

Auctore

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI e Societate IESV.



ROMAE,
Apud Aloyſium Zannettum. MDCIII.

PERMISSV SVPERIORVM

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO

D. CAROLO EMMANVELI SABAVDIAE DVCI

CHRISTOPHORVS CLAKIVS E Societate Iesu S. P. D.

CRIPSERAM superioribus annis in elementa Geometrica Euclidis, id est, in initia disciplinarum Mathematicarum commentarios: quorum omnibus iam distractis exemplaribus, cum alia essent recudenda, volui etiam dare operam, vt locupletiores multo, atque vberiores ederentur. quod Dei beneficio successit. Sic enim se res habet, quod te non fugit, Dux Serenissime, quemadmodum nihil est simul inuentum, & perfectum, sic nemo est, qui a principio in qualibet re scribenda, aut exponenda possit omnia peruidere: multa apparent iterum ac sepius cogitanti, quæ

aciem quamlibet acutam ante fugiebant. Recte hoc quoque Euripides, vt pleraque omnia, Sapientiores solent esse posteriores cogitationes. cum quo congruit, & cohæret vulgatum illud prouerbiũ, quod Publio tribuitur, Discipulus est prioris posterior dies. Itaque, cum priorem editionem sumerem postea in manus, multa esse animaduerti, quæ si adderentur, non pauca ex Archimedis, Apollonij, Ptolemæi, aliorumque inuentis videbantur melius explicari posse: si videlicet e pronunciatis, ac theorematis Euclideis alia quoque necterentur. Quod ipsum etsi tunc etiam præstiti, multo tamen nunc feci copiosius: interijciens ea scilicet, quæ vel vtilia, vel necessaria fore censui ad aliorum, vt dixi, auctorum cognitionem. Addidi inter cætera, vt specimen dem alicuius rerum, quæ hoc volumine accesserunt, demonstrationem Geometricam, eamque apertissimam axiomatis vndecimi, quod proponitur ab Euclide: cum ea, quam allatam scimus a Proclo, mutila esse atque imperfecta videatur. Descriptionẽ item omnium figurarum, quæ rectilineæ æqualium laterum & angulorum appellantur, in circulo. Rationem præterea & breuem, nec obscuram circuli quadrandi: rem, vt scis, tum a veteribus, tum a recentioribus sic expetitam, vt multorum in ea conatus magis apparuerit, quam effectus. Effeci autem hoc (nisi fallor) ita accurate, ac subtiliter, vt tam perfecte approbetur quadratum æquale circulo, quam exquisite rectilinea figura quælibet ad quadratum æquale

circulo.

circulo, quam exquisite rectilinea figura quilibet ad quadratum æquale ab Euclide dirigitur: immo (vt loquar aliquid audacius) aliquanto perfectius: cum ad quadrandum circulum paucioribus linearum ductibus sit opus, quam ad figuram rectilineam plurimorum angulorũ, via, & ratione quadrandam, vt aperte docebitur libro sexto. Ad nonum denique librum adieci numerorum fractorum demonstrationes clarissimas, aliaque nonnulla, quæ nunc quidem non numero, quod ea mihi volo ad ipsamet loca, quibus explicabuntur, plena atque integra reseruari. Laborem igitur hunc meum, qualiscumque est, cum iterum essem daturus in vulgus, nemini arbitratus sum rectius, quam tibi, Dux Seremissime, dedicari posse. Primum quidem quod cum superiorem illam editionẽ sub Emmanuelis Phi liberti clarissimi Ducis patris tui nomine apparere voluerim, stulte fecissem, si posteriorem hãc alij, quam tibi, qui eius es & ditionis, & humanitatis, & pietatis hæres, eiusque imago corporis, atque animi, consecrassem: Deinde uero quod in hoc sequebar Archimedis exemplum: qui nemini opera sua iudicabat inscribenda, nisi ei, qui intelligens talium rerum, ac peritus fuisset. Quod cũ ita sit, quid ni hoc tibi potissimum deberetur donum, (si tamen donum dicendum est id, quod qui dat, uidetur accepisse) quem Ioannes Baptista Benedictus scientissimus rerum Mathematicarum ita testatur excellere in his artibus, illa præcipue in parte, quæ principes uiros, atque ex-

cellentes Imperatores decet, ut ea, quæ pertinent ad instruendos exercitus, oppidaque munienda, per te ipse implere possis. Neque uero hæc postrema fuit causa, etsi postremo in loco ponitur: ut tibi, aliisque, quorum in manus hæc scripta peruenerint, hac saltem ratione ostenderem, ita tibi obligatam esse Societatem nostram uniuersam, ut iure tibi omnia mea opera, & labores uindicare possis. Accipe tu hoc, quod tibi offertur, Princeps inuictissime: quod etsi paruum alicui uideatur, atque exile, non dubito tamen futurum, quin ubi tuam istam attigerit dexteram fortitudine fideque præstantem, plurimum sit accepturum uel magnitudinis, uel gratiæ. Vale. Cal. Sept. MDLXXXIX.

QVAE PRAECIPVE *prima editioni addita sint.*

I.

DEMONSTRATIO Geometrica Axiomatis vndecimi Euclidis, [Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemque partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.] multo euidentior, quam ea, quam Proclus affert. *Ad propos. 28. lib. 1.*

II.

DIVISIO lineæ rectæ in quotuis æquales partes, per solas priores 40. propos. lib. 1. absque ope proportionum sexti lib. *Ad propos. 40. lib. 1.*

III.

QVO pacto construenda sint triangula amblygonia, & Oxygonia, vt in numeris apperere possint, quæ ab Euclide demonstrata sunt propos. 12. & 13. lib. 2. *Ad propos. 12. & 13. lib. 2.*

IIII.

RESPONSIO ad Apologiam Iacobi Peletarii, de angulo contactus. *Ad propos. 16. lib. 3.*

V.

CONSIDERATIO pulcherrima de figuris planis æquilateris, atque æquiangulis intra circulum, & extra circulum descriptis: Num scilicet, omnis æquilatera sit æquiangula etiam, & omnis æquiangula sit quoque

æquilatera. *Ad finem lib. 4.*

VI.

TRACTATIO copiosissima de proportionibus, & tribus præcipuis proportionalitatibus, Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica. *Ad defin. 4. lib. 5.*

VII.

PVLCHRA contemplatio, cur Euclides in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit. *Ad defin. & lib. 5.*

VIII.

DESCRIPTIO inflexæ cuiusdam lineæ facillima, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium describitur: circulus quadratur: angulus rectilineus in quotuis partes æquales distribuitur: Cuilibet arcui circuli recta æqualis exhibetur, & contra; Et denique alia scitu iucundissima perficiuntur. *Ad finem lib. 6.*

IX.

QVO pacto pleraque theoremata libri 7. demonstrentur quoque de numeris fractis, sive ipsis adhæreant numeri integri, sive non. *Ad propositiones lib. 7.*

X.

MINVTIARVM, sive numerorum fractorum demonstrationes clarissimæ. *Ad finem lib. 7.*

XI.

DE Proportionum compositione; quo videlicet modo Additio, Subtractio, Multiplicatio

ac Diuiſio fieri debeat: aduerſus quoſdam Recentiores. *Ad finem lib. 9.*

XII.

DESCRIPTIO quinque corporum Regularium in data ſphæra, ex Pappo Alexãdrino, & quidem facilior, quam ea, quam nobis tradidit Euclides. *Ad finem lib. 16.*

XIII.

COMPARATIO Soliditatum, & ſuperficierum conuexarum, eorundem quinque corporum Regularium inter ſe. *Ad finem lib. 16.*

Cætera quæ paſſim hiſce commentariis adiecta ſunt non pauca, quæ in alijs editionibus deſunt, cuiuſmodi eſt præſertim accuratior inuentio vltimorũ punctorum Quadratricis per lineas perpendiculares, non autem per obliquas linearum interſectiones, &c. diligens Lector nullo negotio notabit.

PRO-

PROPOSITIONES OMNIVM XVI. Librorum, quarum eas, quæ in lib. 5. 14. 15. & 16. Euclidis non sunt, quamuis in numerum propositionum relatæ sint, alio charactere expressimus.

PRIMI LIBRI.

1
VPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum constituere.

2 AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

3 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

4 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique, habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.

5 ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim, sunt, anguli inter se sunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se æquales erunt.

6 SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: Et sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

7 SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus ini-

tio ductis rectis lineis habentes.

8 SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia; habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

9 DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

10 DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

11 DATA recta linea, à puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

12 SVPER datam rectam lineam infinitam, a dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.

13 CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit: Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

14 SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdē partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint: in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

15 SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

16 CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior est.

17 CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.

18 OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

19 OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

20 OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.

21 SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint: hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

22 EX tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum constituere. Oportet autē

duas

duas reliqua esse maiores omnifariam sumptas: quoniam vniuscuiusque trianguli duo latera omnifariam sumpta reliquo sunt maiora.

23 AD datam rectam lineam, datumque in ea punctũ, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum constituere.

24 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

25 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

26 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: Et reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

27 SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: Parallelæ erũt inter se illæ rectæ lineæ.

28 SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

29 IN parallelas rectas lineas recta incidens linea: Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externũ interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes; duobus rectis æquales facit.

30 QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

31 A dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

32 CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis: Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

33 RECTAE lineæ quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt: Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

34 PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso & latera, & anguli: Atque illa bifariam secat diameter.

35 PARALLELOGRAMMA super eadem basi, & in eisdem parallelis cõstituta, inter se sunt æqualia.

36 PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

37 TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

38 TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

39 TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta: Et in eisdem sunt parallelis.

40 TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta: Et in eisdem sunt parallelis.

41 SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis: Duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

42 DATO triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

43 IN omni parallelogrammo, complementa eorum, quæ circa diametrum sunt, parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.

44 AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale, parallelogrammũ applicare, in dato angulo rectilineo.

45 AD datam rectam lineã, dato rectilineo æquale parallelogrammũ cõstituere, in dato angulo rectilineo.

46 A data recta linea quadratum describere.

47 IN triangulis rectangulis, quadratum, quod a latere

rectum

rectum angulum subtendente describitur, æquale est eis, quæ a lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.

48 SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

SECVNDI LIBRI.

1 SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

2 SI recta linea secta sit vtcunque; Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota fit, quadrato.

3 SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato.

4 SI recta linea secta sit vtcunque; Quadratum, quod a tota describitur, æquale est & illis, quæ a segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

5 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod a dimidia describitur, quadrato.

6 SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adiiciatur: Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, vna cum quadrato a dimidia, æquale est quadrato a linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tan-

quam

quam ab vna, descripto.

7 SI recta linea secetur vtcunque; Quod a tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

8 SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum eo, quod a reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod a tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato.

9 SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

10 SI recta linea secetur bifariam, adiiciatur autem ei in rectum adiuncta quæpiam recta linea: Quod a tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod a composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

11 DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod a reliquo segmento fit, quadrato.

12 IN amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit a latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt a lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

13 IN oxygoniis triangulis, quadratum a latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis, quæ fiunt a lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa acutum angulum, in quod perpendicula-

cularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum.

14 DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

TERTII LIBRI.

1 DATI circuli centrum reperire.

2 SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint: Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

3 SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet: Et ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

4 SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent non per centrum extensæ: Sese mutuo bifariam non secabunt.

5 SI duo circuli sese mutuo secent, non erit illorum idem centrum.

6 SI duo circuli sese mutuo interius tangant, eorum non erit idem centrum.

7 SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

8 SI extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur, aliarum autem propinqui-

quior ei, quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est: Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ.

9 SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales: Acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

10 CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

11 SI duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra: Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

12 SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

13 CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

14 IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro: Et quæ æqualiter distant a centro, æquales sunt inter se.

15 IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior.

16 QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: Et semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

17 A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

18 SI circulum tangat recta quæpiam linea, a centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

19 SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à conta-

ctu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

20 IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

21 IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se æquales.

22 QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

23 SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad eadem partes.

24 SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

25 CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

26 IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

27 IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

28 IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineę æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

29 IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectę lineæ subtendunt.

30 DATAM peripheriam bifariam secare.

31 IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

32 SI circulum tetigerit aliqua recta linea, a contactu autem producatur quædam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentē facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmētis cōsistunt, angulis.

33 SVPER data recta linea describere segmentū circu

li, quod capiat angulũ æqualẽ dato angulo rectilineo.

34 A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

35 SI in circulo duę rectæ lineæ sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

36 SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctũ, & conuexã peripheriam assumpta comprehenditur rectangulũm, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

37 SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat, sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

QVARTI LIBRI.

1 IN dato circulo rectã lineã accõmodare æqualẽ datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior.

2 In dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

3 CIRCA datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

4 IN dato triangulo circulum inscribere.

5 CIRCA datum triangulum circulum describere.

6 IN dato circulo quadratum describere.

7 CIRCA datum circulum quadratum describere.

8 IN dato quadrato circulum describere.

9 CIRCA datum quadratum circulum describere.

10 ISOSCELES triangulum constituere, quod habeat vtrũque eorũ, qui ad basin sũt, angulorũ, duplũ reliqui.

11 IN dato circulo Pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

12 CIRCA datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.
13 IN dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribere.
14 CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.
15 IN dato circulo hexagonum & æquilaterum, & æquiangulum inscribere.
16 IN dato circulo quintidecagonum, & æquilaterum, & æquiangulum describere.

QVINTI LIBRI.

1 SI sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices: quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.
2 SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ: Erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ.
3 SI sit prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo sumptarū vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autē quartæ.
4 SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secūdæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptę fuerint.
5 SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius.
6 SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: Et reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

7 AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

8 INAEQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationẽ habet, quam minor: Et eadẽ ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem.

9 QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

10 AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est; Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

11 QVAE eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem.

12 SI sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

13 SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartã, maiorẽ rationem habuerit, quam quinta ad sextam. Prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

14 SI prima ad secundam eandem habuerit rationem quam tertia ad quartam; prima vero, quam tertia, maior fuerit; Erit & secunda maior, quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

15 PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur.

16 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint; Et vicissim proportionales erunt.

17 SI compositæ magnitudines proportionales fuerint; hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

18 SI diuisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque compositæ proportionales erunt.

19 SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se

habuerit ad ablatum: Et reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

20 SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima quam tertia, maior fuerit; Erit & quarta quam sexta, maior. Quod si prima quam tertia fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: Sin illa minor, hæc quoque minor erit.

21 SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima, quam tertia, minor fuerit; Erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

22 SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 SI sint tres magnitudines, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autē perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

24 SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam, eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

25 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.

26 SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

27 SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.

28 *SI prima ad secũdam habuerit maiorem proportionẽ, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.*

29 *SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam: Habebit quoque dividendo prima ad secundam, maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.*

30 *SI composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam.*

31 *SI sint tres magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam: Item secunda priorũ ad tertiã maior, quã secunda posteriorũ ad tertiã: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam.*

32 *SI sint tres magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam prima posteriorum ad secundã: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiã.*

33 *SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.*

34 *SI sint quotcunque magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad primã posteriorum, quam secunda ad secundam; & hæc maior, quam tertia ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorẽ proportionem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quã prima priorum ad primam posteriorum, maiorem denique etiam quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.*

SEXTI LIBRI.

1 TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

2 SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea: hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint: quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

3 SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: Basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera: Recta linea, quæ a vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.

4 AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

5 SI duo triangula latera proportionalia habeant, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.

6 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.

7 SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.

8 SI in triangulo rectangulo ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: Quæ ad perpendicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

9 A data recta lineæ imperatam partem auferre.

10 DATAM rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.

11 DVABVS datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire.

12 TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

13 DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

14 AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

15 AEQVALIVM, & vnũ vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnũ angulum vni æquales habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

16 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis cõprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

17 SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod a media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod a media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.

18 A data recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.

SI-

19 SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

20 SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.

21 QVAE eidem rectilineo sunt similia; & inter se sunt similia.

22 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similerque descripta, proportionalia erunt. Et si à rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint; ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

23 AEQVIANGVLA parallelogramma inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur.

24 IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, parallelogramma & toti, & inter se sunt similia.

25 DATO rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.

26 SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum: hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.

27 OMNIVM parallelogrammorum secundum eandē rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterq; positis ei, quod a dimidia describitur: maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

28 AD datam lineam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrāmo dato. Oportet autē datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

29 AD datam rectā lineam, dato rectilineo æquale parallelogrāmum applicare excedēs figura parallelogrā

ma,

ma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

30 PROPOSITAM rectam lineam terminatam, extrema ac media ratione secare.

31 IN rectangulis triangulis, figura quæuis a latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter positę a lateribus rectum angulum continentibus describuntur.

32 SI duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum cõposita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

33 IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra consistunt.

SEPTIMI LIBRI.

1 SI duobus numeris inęqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad assumpta sit vnitas: qui principio propositi sunt numeri, primi inter se erunt.

2 DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

3 TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

4 OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

5 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul uterque vtriusque simul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

6 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterque vtriusque simul eędem partes erit, quæ vnus unius.

7 SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati:

Et reliquus reliqui eadē pars erit, qualis totus totius

8 SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

9 SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſſim, quæ pars eſt, aut partes primus tertii, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti.

10 SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædē partes: Et viciſſim, quæ partes eſt primus tertii, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars.

11 SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

12 SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

13 SI quatuor numeri proportionales ſint; Et viciſſim proportionales erunt.

14 SI ſint quotcunque numeri, & alii illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

15 SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſſim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum.

16 SI duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

17 SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quā multiplicati.

18 SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

19 SI quatuor numeri proportionales fuerint: qui ex primo, & quarto fit numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecūdo & tertio fit, numero. Et ſi qui ex primo, & quarto

ſit,

fit, numerus æqualis fuerit ei, qui ex secundo, & tertio fit, numero: ipsi quatuor numeri proportionales erũt.

20 SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur. Et si qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui à medio describitur: ipsi tres numeri proportionales erunt.

21 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandẽ cum eis rationem habentes, mãior quidem maiorem, minor vero minorem.

22 SI fuerint tres numeri, & alii ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

23 PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

24 MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

25 SI duo numeri primi inter se fuerint: qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

26 SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit.

27 SI duo numeri primi inter se fuerint; Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit.

28 SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint: Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

29 SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque seipsum fecerit aliquẽ: Et geniti ex ipsis primi inter se erit. Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt; Et semper circa extremos hoc eueniet.

30 SI duo numeri primi inter se fuerint; Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit. Et si vterque simul ad vnum aliquẽ illorum primus fuerit; Etiã qui in principio, numeri primi inter se erunt.

31 OMNIS primus numerus, ad omnẽ numerum, quem

non

non metitur, primus est.
32 SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquē; genitū aũt ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: Is etiam vnum eorũ, qui in principio metietur.
33 OMNEM compositum numerum aliquis primus numerus metitur.
34 OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.
35 NVMERIS datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.
36 DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur numerum.
37 SI duo numeri numerum quempiã metiantur. Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.
38 TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.
39 SI numerum quispiam numerus metiatur; Ille quē metitur, partem habebit à metiente denominatam.
40 SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus à parte denominatus.
41 NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

OCTAVI LIBRI.

1 SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorum primi inter se fuerint: Ipsi minimi sunt omnium eandē cum eis ratione habentiũ.
2 NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.
3 SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis ratione habentium: Illorum extremi sunt inter se primi.
4 RATIONIBVS datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.
5 PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.
6 SI sint quotcunque numeri deinceps proportiona-

les, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam vllum metietur.

7 SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, primus aũt extremũ metiatur; is etiã metietur secundũ.

8 SI inter duos numeros medii cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij cõtinua proportione cadunt numeri, tot & inter alios eandẽ cũ illis habẽtes rationẽ medij cõtinua proportione cadẽt.

9 SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac unitatem medij cõtinua proportione cadent.

10 SI inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrũque ipsorum & vnitatem deinceps medii continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

11 DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus. Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

12 DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri. Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

13 SI sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum faciat aliquos: qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et si numeri primum positi multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipsi quoque proportionales erunt; & semper circa extremos hoc eueniet.

14 SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

15 SI cubus numerus cubum numerũ metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur: & cubus cubum metietur.

16 SI quadratus numerus quadratũ numerum non metiatur

tiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

17 SI cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus vnius latus alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur; neque cubus cubum metietur.

18 DVORVM similium planorũ numerorum vnus medius proportionalis est numerus. Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

19 DVORVM similium solidorum numerorum duo medii proportionales sunt numeri. Et solidus ad solidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

20 SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus, Similes plani erunt illi numeri.

21 SI inter duos numeros duo medii proportionales cadant numeri: Similes solidi sunt illi numeri.

22 SI tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus; Et tertius quadratus erit.

23 SI quatuor numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit cubus: Et quartus cubus erit.

24 SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus; & secundus quadratus erit.

25 SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus; & secundus cubus erit.

26 SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

27 SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

NONI LIBRI.

1 SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo

tuo faciant quendam: Productus quadratus erit.

2 SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum: similes plani erunt.

3 SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem Productus cubus erit.

4 SI cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

5 SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum: Et multiplicatus cubus erit.

6 SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

7 SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans quempiam faciat: Factus solidus erit.

8 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes: Septimus vero cubus simul & quadratus, & quinque intermittentes omnes.

9 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatē, sit quadratus: Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus: Et reliqui omnes cubi erunt.

10 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatē, non sit quadratus; neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

11 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

12 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimum metiuntur, iidem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

13 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, primus sit;

Maximum nullus alius metietur, preter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

14 SI minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

15 SI tres numeri deinceps proportionales fuerint minimi omnium eandē cum ipsis rationē habentium: Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erunt.

16 SI duo numeri, primi inter se fuerint: Nō erit, vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

17 SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; Non erit, vt primus secundum, ita vltimus ad alium quēpiā.

18 DVOBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

19 TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

20 PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum.

21 SI pares numeri quotcunque componantur; Totus par erit.

22 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

23 SI impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: Et totus impar erit.

24 SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

25 SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

26 SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

27 SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

28 SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

29 SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

30 SI impar numerus parem numerum metiatur: Et illius dimidium metietur.

31 SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

32 NVMERORVM a binario duplorum, vnusquisque pariter par est tantum.

33 SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

34 SI par numerus neque a binario duplus fit, neque dimidiū habeat imparē: Pariter par est, & pariter impar.

35 SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

36 SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit Perfectus.

DECIMI LIBRI.

1 DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiore auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quam dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quædam magnitudo, quę minor erit proposita minore magnitudine.

2 SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

3 DVABVS magnitudinibus commēsurabilibus datis, maximam earum communem mensuram inuenire.

4 TRIBVS magnitudinibus commensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

5 COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

6 SI duæ magnitudines inter se proportinem ha-

beant, quam numerus ad numerum: Commensurabiles erunt magnitudines.

7 INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quã numerus ad numerũ.

8 SI duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

9 QVAE a rectis lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata: inter se proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: & latera habebunt longitudine commensurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata: inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

10 SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis: Et tertia quartæ commensurabilis erit: Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis: Et tertia quartæ incommensurabilis erit.

11 PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

12 QVAE eidem magnitudini sunt commensurabiles: & inter se sunt commensurabiles.

13 SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

14 SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

15 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus possit, quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi commensurabilis longitu

dine; Et tertia tanto plus poterit, quam quarta, quantū est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si prima tanto plus possit, quam secunda, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit, quam quarta, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

16 SI duæ magnitudines cōmensurabiles cōponantur: Et tota magnitudo vtriq; ipsarum commēsurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarū cōmēsurabilis fuerit: Et quæ a principio magnitudines cōmēsurabiles erūt.

17 SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur: Et tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit: Et quæ a principio magnitudines, incommensurabiles erunt.

18 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrāmum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat: Maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata: In partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

19 SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ aūt parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrāmum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incōmēsurabiles longitudine ipsā diuidat: Maior tātō plus poterit quā minor, quantū est quadratū rectæ lineæ sibi longitudine incōmēsurabilis. Quod si maior tātō plus possit quā minor, quantū est quadratū rectæ lineæ sibi longitudine incōmēsurabilis, quartæ autē parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrāmū ad maiorē applicetur deficiens figura quadrata: In partes lō-

gitudine incommensurabiles ipsam diuidet.
20 QVOD sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis lineis secundum aliquem prædictorum modorum,continetur rectangulum,Rationale est.
21 SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinē efficit Rationalem,& ei,ad quam applicatum est,longitudine commensurabilem.
22 Quod sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Irrationale est: Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.
23 QVOD a Media fit,ad Rationalem applicatum,latitudinem efficit Rationalem,& ei,ad quam applicatum est,longitudine incommensurabilem.
24 MEDIAE commensurabilis,Media est.
25 QVOD sub Mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum,Medium est.
26 QVOD sub Mediis potentia tantum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum,vel Rationale est,vel Medium.
27 MEDIVM non superat Medium Rationali.
28 MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles,quæ Rationale comprehendant.
29 MEDIAS inuenire potentia tantum commensurabiles,quæ Medium contineant.
30 INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi cōmensurabilis.
31 INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi lōgitudine incōmēsurabilis.
32 INVENIRE duas Medias potentia tantū cōmēsurabiles, quæ Rōnale contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.
33 INVENIRE duas Medias potētia solū cōmēsurabiles, quę Mediū cōtineāt, ita vt maior plus possit, quā minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cōmēsurabilis

IN-

34 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quę faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale: Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

35 INVENIRE duas rectas lineas potentia incōmensurabiles, quæ faciant commpositum quidem ipsarum quadratis, Medium: Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale.

36 INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis, Medium, & rectangulum sub ipsis contentum, Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

37 SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

38 SI duæ mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Rationale contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis prima.

39 SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant: tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Mediis secunda.

40 SI duæ rectæ lineæ potentia incōmensurabiles cōponantur, quæ faciant compositum quidē ex ipsarū quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

41 SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

42 SI duæ rectę lineę potentia incommensurabiles componantur, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

43 QVAE ex binis nominibus, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
44 QVAE ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
45 QVAE ex binis Medijs secunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
46 MAIOR ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
47 RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
48 BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.
49 INVENIRE ex binis nominibus primam.
50 INVENIRE ex binis nominibus secundam.
51 INVENIRE ex binis nominibus tertiam.
52 INVENIRE ex binis nominibus quartam.
53 INVENIRE ex binis nominibus quintam.
54 INVENIRE ex binis nominibus sextam.
55 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.
56 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis prima appellatur.
57 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.
58 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ vocatur Maior.
59 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta: Recta linea spatium potes Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.
60 SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta: Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.
61 QVADRATVM eius, quæ est ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex bi-

nis nominibus primam.

62 QVADRATVM eius, quæ est ex binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

63 QVADRATVM eius, quæ ex binis Mediis secunda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

64 QVADRATVM Maioris ad Rationalē applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

65 QVADRATVM eius, quæ Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

66 QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

67 EI, quæ est ex binis nominibus, lōgitudine cōmensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atq; ordine eadē.

68 EI, quæ est ex binis Medijs, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atq; ordine eadem.

69 MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

70 RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

71 BINA Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est.

72 SI Rationale & Medium componantur: quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

73 SI duo Media inter se incommensurabilia componantur: duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex binis Mediis secunda, vel bina Media potens.

74 SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

75 SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

76 SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

77 SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositū quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

78 SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis cōtinetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

79 SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

80 APOTOMAE vna tantum congruit recta linea Rationalis potentia solū commensurabilis existens toti.

81 MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

82 MEDIAE Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

83 MINORI vna tantum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium.

84 EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tātum congruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale.

85 EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum

tum cõgruit recta linea potentia incõmensurabilis existens toti,& cũ tota faciens & cõpositum ex ipsarũ quadratis Mediũ,& quod sub ipsis continetur,Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

86 INVENIRE primam Apotomen.

87 INVENIRE secundam Apotomen.

88 INVENIRE tertiam Apotomen:

89 INVENIRE quartam Apotomen.

90 INVENIRE quintam Apotomen.

91 INVENIRE sextam Apotomen.

92 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima:Recta linea spatium potens Apotome est.

93 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda:Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

94 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia:Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

95 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta:Recta linea spatium potens,Minor est.

96 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quinta: Recta linea spatium potens est, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

97 SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta:Recta linea spatium potens est, quæ cum Medio Medium totum efficit.

98 QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum,latitudinem facit Apotomen primam.

99 QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalẽ applicatum, latitudinẽ facit Apotomen secundã.

100 QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatũ,latitudinẽ facit Apotomen tertiã.

101 QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum,latitudinem facit Apotomen quartam.

102 QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit,ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

103 QVADRATVM eius,quæ cũ Medio Mediũ totũ effi

cit,

cit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen sextam.

104 RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis, & ipsa Apotomę est, atque ordine eadem.

105 RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine eadem.

106 RECTA linea Minori commensurabilis, & ipsa Minor est.

107 RECTA linea cõmensurabilis ei, quæ cũ Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totum efficiens est.

108 RECTA linea cõmẽsurabilis ei, quę cũ Medio Mediũ totũ efficit, & ipsa cũ Medio Mediũ totũ efficiens est.

109 MEDIO a Rationali detracto: Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

110 RATIONALI a Medio detracto; aliæ duę Irrationales fiunt, vel Medię Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

111 MEDIO a Medio detracto, quod sit incommensurabile toti: reliquæ duæ Irrationales fiũt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cũ Medio Medium totum efficiens.

112 APOTOMĘ non est eadẽ, quæ ex binis nominibus.

113 QVADRATVM Rationalis ad eam quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus eius, quę est ex binis nominibus, & in eadem proportione: & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quẽ ea, quæ est ex binis nominibus.

114 QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quę ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomę nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundẽ habet ordinẽ, quẽ ipsa Apotome.

115 SI spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quę ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomę, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

116 A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem.

117 PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

VNDECIMI LIBRI.

1 RECTAE lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædam vero in sublimi.

2 SI duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque Triangulum omne in vno est plano.

3 SI duo plana se mutuo secent; communis eorum sectio est linea recta.

4 SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit.

5 SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat; Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

6 SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint anguios; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

7 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet puncta; Illa linea, quæ ad hęc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano.

8 SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

9 QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque sunt inter se parallelæ.

10 SI duæ rectæ lineæ se mutuo tãgentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non autem in eodẽ plano: Illæ angulos æquales comprehendent.

11 A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

12 DATO plano à puncto, quod in illo datum est, ad

rectos angulos rectam lineam excitare.

13 DATO plano, à puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad easdem partes.

14 AD quæ plana, eadem recta linea recta est: Illa sunt parallela.

15 SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistētes plano; Parallela sunt, quę per illa ducūtur, plana.

16 SI duo plana parallela plano quopiam secentur; cōmunes illorum sectiones sunt parallelæ.

17 SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; in easdem rationes secabuntur.

18 SI recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erunt.

19 SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos; communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

20 SI solidus angulus tribus angulis planis contineatur: Ex his duo quilibet vt vt assumpti tertio sunt maiores.

21 OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

22 SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores, comprehendant autem ipsos rectælineæ æquales: fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas cōnectentibus triangulum cōstituatur.

23 EX tribus angulis planis, quorum duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

24 SI solidum parallelis planis contineatur: aduersa illius plana, parallelogramma sunt similia, & æqualia.

25 SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

26 AD datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

47. A data recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

28 SI solidum parallelepipedũ plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidũ ab ipso plano.

29 SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineę in ijsdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

30 SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

31 SOLIDA parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine: æqualia sunt inter se.

32 SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine: inter se sunt, vt bases.

33 SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

34 AEQVALIVM solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur. Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur: Illa sunt æqualia.

35 SI fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique, in sublimibus autem lineis quælibet sumptæ fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; à punctis vero, quæ in planis à perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

36 SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto à media linea solido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto.

37 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint. Et solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

38 SI planum ad planum rectum fuerit, & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum perpendicularis ducta fuerit. In communem sectionē cadet planorum ducta perpendicularis.

39 SI solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint, per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

40 SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorū hoc quidem habeat basin parallelogrammum, illud vero triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipsa prismata.

DVODECIMI LIBRI.

1 QVAE in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata.

2 CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata.

3 OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; & in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

4 SI fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarum vtraque diuisa & in duas pyramides æquales inter se & similes toti; & in duo prismata æqualia: Ac eodem modo diuisa sit vtraque pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat: Erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ

in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

5 SVB eadem altitudine existētes pyramides, & triāgulares habentes bases: inter se sunt, vt bases.

6 SVB eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases; inter se sunt, vt bases.

7 OMNE prisma triangularem habens basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se triangulares bases habentes.

8 SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorū larerum ratione.

9 AEQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases, & altitudines. Et quarū pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases, & altitudines: illæ sunt æquales.

10 OMNIS conus tertia pars est cylindri eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.

11 SVB eadem altitudine existentes coni, & cylindri, inter se sunt, vt bases.

12 SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

13 SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelis: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

14 SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt, vt altitudines.

15 AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines; illi sunt æquales.

16 DVOBVS circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum, & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulū.

17 DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

18 SPHAERAE inter se sunt in triplicata ratione suarum diametrorum.

TERTII DECIMI LIBRI.

1 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur: maius segmentum assumēs dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.

2 SI recta linea *suiipsius segmenti quintuplum possit*: Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

3 SI recta linea secundum extremā & mediam rōnem secetur: minus segmentum assumens dimidiam maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati.

4 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur: Quod a tota, quodque a minore segmento, simul utraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur, quadrati.

5 SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ a principio, recta linea.

6 SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentum Irrationalis linea est, quæ uocatur Apotome.

7 SI pēragoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sint, æquales fuerint: Aequiangulum erit ipsum pentagonum.

8 SI pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

9 SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur; Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

10 SI in circulo pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

11 SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Minor.

12 SI in circulo triangulum æquilaterum describatur: Trianguli latus potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

13 PYRAMIDEM constituere, & data sphæra complecti, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

14 OCTAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit dupla lateris ipsius octaedri.

15 CVBVM constituere, & sphæra complecti, qua & priores figuras, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

16 ICOSAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras, & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

17 DODECAEDRVM constituere, & sphæra complecti, qua & prædictas figuras, & demonstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome.

18 LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

QVARTIDECIMI LIBRI.

1 QVAE ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

2 SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur; ipsæ similiter secabuntur, in easdem scilicet proportiones.

3 SI in circulo pentagonū æquilaterū describatur: quæ ex

latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

4 *SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione: maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.*

5 IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum, eidem sphæræ inscriptorum.

6 SI ex centro circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad unum latus pentagoni: Erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

7 SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli: Erit quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Icosaedri superficiei æquale.

8 RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æqui lateri in eodem circulo descripti, æquale est dicto pentagono.

9 SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

10 SI recta linea secetur extrema ac media ratione: Erit vt recta potens id, quod à tota, & id, quod a maiori segmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

11 DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.

12 *LATVS triāguli aquilateri potētia sesquitertiā est lineæ perpēdicularis ab vno angulo ad latus oppositū deductæ.*

13 *SI sphæra diameter fuerit Rationalis: Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.*

14 *SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem sphæræ inscribantur: Erit basis Tetraedri sesquitertia basis octaedri; superficies aũt Octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri.*

15 *RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in sphæra descripti per centrũ sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, eſtque perpendicularis ad dictam basim.*

16 *OCTAEDRVM in sphæra descriptũ diuiditur in duas pyramides æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque eſt quadratum subduplum quadrati diametri ſphæræ.*

17 *TETRAEDRVM sphæræ impoſitum ad Octaedrum in eadem sphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea pótente vigintiſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ.*

Vel vt Campanus habet.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad octaedrum in eadem ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quæ potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarũ partiũ lateris Tetraedri, & ſub linea ſuperquinteuparticte vigeſimas ſeptimas partes earundẽ triũ quartarũ partiũ lateris Tetraedri contentũ, ad quadratũ diametri ſphæræ.

18 *LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſim oppoſitam demiſſa, tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex cẽtra trianguli ad eandem baſim deducitur.*

19 *SI Octaedrũ ſphæra inſcribatur: Erit ſemidiameter ſphæræ potentia tripla eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſin quamcunque Octaedri ducitur.*

20 *DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphæra collocati; Perpendicularis autem a centro ſphæræ in vtiquã baſin cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi.*

21 *IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & Octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.*

22 *SI Octaedrum, atque Tetraedrum eidem sphæra inscribantur: Erit Octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.*

23 *SI recta linea proposita potuerit totam aliquam lineã sectam extrema ac media ratione, & maius eius segmentum; Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum: Erit maius segmentum prioris linea latus Icosaedri, minus aũt segmentum posterioris linea latus Dodecaedri eius sphæra, cuius recta linea proposita diameter existit.*

24 *SI latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum rectæ linea extrema ac media ratione sectæ: Poterit latus Icosaedri in eadem sphæra descripti duplum minoris segmenti.*

25 *SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur: Erit recta linea, qua potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus Octaedri eius sphæra, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.*

26 *SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum linea rectæ extrema ac media ratione sectæ: Latus Icosaedri eidem sphæra inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.*

27 *CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt superficies cubi ad Octaedri superficiem: Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæra.*

28 *SI sint quatuor linea rectæ continue proportionales, nec non & alia quatuor, ita vt sit eadem antecedens omniũ: Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.*

29 *QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.*

30 *SI Cubus, & Tetraedrum in eadem sphæra describantur: Erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri; vt*

Latus Tetraedri ad lineã perpendicularem, quæ ex uno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppositum deducitur.

31. LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, siue altitudinis ipsius; Axis uero, siue altitudo Tetraedri potentia sesquiterria est lateris: cubi in eadē sphæra descripti.

32. CVBVS triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti.

QVINTIDECIMI LIBRI.

1 IN dato cubo pyramidem describere.
2. IN data Pyramide Octaedrum describere.
3 IN dato cubo Octaedrum describere.
4 IN dato Octaedro cubum inscribere.
5 IN dato Icosaedro Dodecaedrum inscribere.
6 IN dato Octaedro pyramidem describere.
7 IN dato Icosaedro cubum describere.
8 IN dato Dodecaedro cubum describere.
9 IN dato Dodecaedro Octaedrum describere.
10 IN dato Dodecaedro pyramidem describere.
11 IN dato Icosaedro cubum describere.
12 IN dato Icosaedro Pyramidem describere.
13 IN dato cubo Dodecaedrum describere.
14 IN dato cubo Icosaedrum describere.
15 IN dato Icosaedro Octaedrum describere.
16 IN dato Octaedro Icosaedrum describere.
17 IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.
18 IN data pyramide Cubum describere.
19 IN data pyramide Icosaedrum describere.
20 IN data Pyramide Dodecaedrum describere.
21 IN dato solido regulari sphæram describere.

SEXTIDECIMI LIBRI.

1 SI in Dodecaedro cubus describatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum: Erit proportio Dodecaedri exteriores ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectalinea diuisa extrema ac media ratione, tripli-

2 *LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur à recta illum angulum subtendenti, extrema ac media ratione.*

3 *SI ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ opposita latera secantes extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius; Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.*

4 *MINVS segmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione secti duplum est potentia lateris Icosaedri in ea Pyramide descripti.*

5 *LATVS cubi potentia dimidium est lateris pyramidis in eo descripta: Latus vero pyramidis duplum est longitudine lateris Octaedri sibi inscripti: Latus denique cubi duplū est potentia lateris sibi inscripti Octaedri.*

6 *LATVS Dodecaedri maius segmentum est recta, quę potentia est dimidia lateris pyramidis sibi inscripta.*

7 *SI in cubo describatur & Icosaedrum, & Dodecaedrū; Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cuai, & Dodecaedri.*

8 *LATVS pyramidis potentia octodecuplum est lateris cubi in ea descripti.*

9 *LATVS pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri in pyramide descripti.*

10 *SI in octaedro Icosaedrum describatur: Erit latus Icosaedri potentia duplum minoris segmenti lateris Octaedri extrema ac media ratione diuisi.*

11 *LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti.*

12 *LATVS Icosaedri maius segmentum est eius rectæ extrema ac media ratione sectæ, qua potentia dupla est lateris Octaedri in Icosaedro descripti.*

13 LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipso descripti prō portionem habet duplicatam eius, quam habet maius segmentum ad minus recta linea diuisæ extrema ac media ratione: Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem recta linea.

14 LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscripti pyramidis.

15 SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo descripti, relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

16 LATVS Dodecaedri minus segmentum est recta linea extrema ac media ratione diuisa, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

17 DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris pyramidis in eo descripta sesquialterum.

18 LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus sē habet, vt minus segmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositum ducta, atque extrema ac media ratione diuisæ, ad partem eiusdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiusdem posita.

19 SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusq; eius segmentū a toto latere Icosaedri subiatum, a reliqua quoque recta pars rursum tertia detracta, Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

20 CVBVS sibi inscripta pyramidis triplus est.

21 PYRAMIS sibi inscripti Octaedri dupla est.

22 CVBVS sibi inscripti Octaedri sextuplus est.

23 OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

24 OCTAEDRVM sibi inscripta pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

25 PYRAMIS sibi inscripti cubi noncupla est.

26 OCTAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases Octaedri ad quinque bases Icosaedri.

27 ICOSAEDRVM ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem, habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadē cū Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam contra basium Icosaedri oppositarum coniungentem.

28 DODECAEDRVM excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, at vero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit.

29 DODECAEDRVM ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionē habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam contra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

30 DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmenti lateris eiusdē cubi, altitudo denique a latere eiusdē cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit: Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

31 OCTAEDRVM excedit sibi descriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri Octaedri extrema ac media ratione sectæ.

INDEX PROBLEMATVM Ac Theorematum, quæ præter propositiones in sexdecim libris Euclidis contentas in hisce commentariis demonstrantur.

IN PRIMO LIBRO.

1 REGVLAM *pro lineis rectis ducendis examinare, num recta sit, nec ne.* Ad defin. 4.

2 ANGVLVM *rectilineum examinare, num rectus sit, an obtusus, vel acutus.* Ad defin. 12.

3 NORMAM *pro angulis rectis constituendis examinare, num accurate fabricata sit.* Ad def. 12.

4 CIRCVLVS *bifariam a diametro secatur.* Ad def. 18.

5 CIRCVLVS *a linea per centrum non transeunte secatur in partes inæquales, maiorque est ea, in qua centrum.* Ad defin. 18.

6 DVAE *rectæ lineæ non habent vnum & idem segmentum commune.* Ad Axioma 10.

7 DVAE *rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur amba, necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt.* Ad Axioma 11.

8 OMNES *anguli recti sunt inter se æquales.* Ad Axioma. 12.

9 DVAE *rectæ lineæ spatium non comprehendunt.* Ad axioma. 14.

10 SVPER *data recta linea terminata triangulum Isosceles, & Scalenum constituere.* Ad propos. 1.

11 OMNE *triangulum æquilaterum est etiam æquiangulum.* Coroll propos. 5.

12 OMNE *triangulum æquiangulum est etiam æquilaterum.* Coroll. propos. 6.

13 SI *trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basin fiant æquales: Et duo latera illa æqualia inter se erunt.* Ad propos. 6.

14 *SI duo triangula baſes habuerint æquales, & angulos ſuper baſes conſtitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, utrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis ſubtẽdũtur, angulosque reliquos hiſce lateribus incluſos, æquales.* Ad propoſ. 8.

15 *SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus vtrumque vtrique æqualia, habuerint uero & baſim baſi æqualem: æquiangula inter ſe erunt, & æqualia.* Coroll. propoſ. 8.

16 *DVAE lineæ rectæ ſe mutuo ſecantes efficiunt ad punctum ſectionis quatuor angulos quatuor rectis æquales.* Coroll. 1. propoſ. 15.

17 *QVILIBET anguli circa vnum & idẽ punctum conſtituti, quatuor rectis ſunt æquales.* Coroll. 2. propoſ. 15.

18 *SI ad aliquam rectam lineam, ad eiuſque ſignum, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes ſumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint: ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi inuicem erunt.* Ad propoſ. 15.

19 *SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppoſitos inter ſe æquales fecerint: Erũtqualibet duæ lineæ æquerſa in rectum ſibi, & continuum coniunctæ.* Ad propoſ. 15.

20 *AB vno puncto ad eandem lineam rectam non poſſunt duci plures lineæ rectæ, quam duæ inter ſe æquales.* Ad propoſ. 16.

21 *AB vno puncto ad eandẽ lineã rectam non poſſunt duci plures lineæ perpẽdiculares, quã vna.* Ad propoſ. 17.

22 *IN omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, aut obtuſus, reliqui ſunt acuti.* Coroll. 1. propoſ. 17.

23 *SI linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum obtuſum, & acutum alterum: Linea perpendicularis ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demiſſa cadit ad partes anguli acuti.* Coroll. 2. propoſ. 17.

24 *OMNES tres anguli in triangulo æquilatero, & duo ſupra baſin in Iſoceles, ſunt acuti.* Coroll. 3. propoſ. 17.

25 *OMNES tres anguli in triangulo Scaleno ſunt inæquales.* Coroll. propoſ. 18.

26 *OMNIVM rectarum ex quouis puncto ad rectam quam*

cunque ductarum, ea quæ perpendicularis est, minima existit. Coroll. propos. 19.

27 SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansque angulum recta linea ad basim ducta in partes inæquales ipsam diuidat: Latera illum angulū continentia inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cum minori. Ad propos. 19.

28 SI trianguli duo latera inæqualia fuerint; Linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basim in partes inæquales, maiusque segmentum erit prope maius latus. Ad propos. 19.

29 SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basim bifariam quoque secet: Erunt duo latera angulum continentia æqualia. Quod si latera æqualia fuerint, basim etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit. Ad propos. 19.

30 IN triangulo aliquo duci possunt duæ rectæ vnæ quidē ab extremo lateris, altera vero a puncto prope alterum extremum eiusdem lateris, intra triangulum concurrentes, quæ maiores sint duobus lateribus trianguli. Ad propos 21.

31 SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod uni æqualium angulorum subtenditur: ipsa æqualia inter se erunt. Coroll. propos. 26.

32 IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum vel basim bifariam, perpendicularis est ad basim; Et si quidem angulum bifariam diuidat; secabit quoque basim bifariam; si vero basim secet bifariā, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra, Linea perpendicularis ad basim ducta diuidit & basim, & angulum bifariam. Ad propos. 26.

33 TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuidit vel basim, vel angulum bifariam, habet duo latera dictum angulū

com-

comprehendentia æqualia. Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur, si vero angulus bifariam secetur, basis quoque diuidetur bifariam. Ad propos. 26.

34 *SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, semper magis ac magis inter se distabunt, omnemque finitam magnitudinem ipsarum, distantia excedet.* Ad propos. 28.

35 *SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.* Ad propos. 28.

36 *SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniunguntur: Erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.* Ad propos. 28.

37 *SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur: Efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum.* Ad propos. 28.

38 *SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutũ: duæ illæ rectæ minus semper inter se distabũt ad eas partes, vbi est angulus acutus, ex altera vero parte semper inter se magis distabunt.* Ad propos. 28.

39 *SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq; partes angulos duobus rectis minores faciat: Duæ illæ rectæ lineæ in infinitũ productæ sibi mutuo incidẽt ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.* Ad propos. 28. Estque axioma 13. Hæ porro quatuor vltimæ propositiones demonstrantur ex solis 28. propositionibus Euclidis, nulla adhibita proprietate parallelarum.

40 *PARALLELOGRAMMVM constituere, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraque angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis*

neis

neis æqualia. Ad propos. 31.

41 *A dato pũcto extra datã rectam lineam, rectam lineam ducere, quæ cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem.* Ad propos. 31.

42 *A dato puncto in extremo linea recta, ad ipsam, licet non producatur, ante produci non possit, perpendicularem lineam excitare.* Ad propos. 31.

43 *A dato puncto in extremo fere plani, & extra lineam rectam, ad ipsam rectam, lineam perpendicularem demittere.* Ad propos. 31.

44 *SI ab vno angulo trianguli linea recta extra triangulum ducatur faciens externum angulum æqualem duobus internis, & oppositis: illa linea erit in directum ipsi lateri constituta.* Ad propos. 32.

45 *OMNES anguli figuræ cuiusuis rectilineæ, sunt æquales bis tot rectis, quota ipsa est inter figuras rectilineas.* Ad propos. 32.

46 *OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis æquales sũt bis tot rectis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.* Ad propos. 32.

47 *SI singula latera figuræ cuiusuis rectilineæ producantur versus eandem partem; omnes anguli externi æquales sunt quatuor tantum rectis.* Ad propos. 32.

48 *SI pentagoni singula latera producantur in vtram que partem, ita vt qualibet duo extra pentagonum coeant: efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solum rectis.* Ad propos. 32.

49 *TRES anguli cuiuslibet trianguli simul sumpti æquales sunt tribus angulis cuiusuis alterius trianguli simul sumptis.* Coroll. 1. propos. 32.

50 *IN triangulo Isoscele, si angulus a lateribus æqualibus comprehensus fuerit rectus, erit vterque æqualium angulorum supra basem semirectus; si vero obtusus, minor semirecto, si denique acutus, maior semirecto.* Coroll. 2. propos. 32.

51 *QVILILIBET angulus trianguli æquilateri continet duas tertias partes vnius recti, vel vnam tertiam partem duorum rectorum.* Coroll. 3. propos. 32.

52 *SI ab uno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constituantur duo triangula scalena, quorum vnumquodque habet vnum angulum rectum prope perpendicularem, alium vero perpendiculari oppositum æqualem duabus tertijs partibus unius recti, reliquum denique æqualem tertiæ parti vnius recti* Coroll. 4. propos. 32.

53 *ANGVLVM rectum in tres angulos æquales diuidere* Ad propos. 32.

54 *OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.* Ad propos. 34.

55 *OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.* Ad propos. 34.

56 *OMNE quadrilaterum habens, omnes angulos rectos, est parallelogrammum.* Ad propos. 34.

57 *IN quadrato & Rhombo anguli oppositi bifariam secantur a diametro.* Ad propos. 34.

58 *IN altera parte longiori, & Rhomboide, anguli oppositi non bifariam secantur a diametro.* Ad propos. 34.

59 *IN quadrato, & altera parte longiori, duæ diametri sunt inter se æquales.* Ad propos. 34.

60 *IN Rhombo, et Rhomboide, duæ diametri non sunt inter se æquales.* Ad propos. 34.

61 *IN omni parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt.* Ad propos. 34.

62 *OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.* Ad propos. 34.

63 *RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum quoque bifariam. Et recta linea diuidēs parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariā.* Ad propos. 34.

64 *A quouis dato puncto lineam rectā ducere, quæ parallelogrammum datum secet bifariam.* Ad propos. 34.

65 *INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam data linea æqualem collocare, quæ cū altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui li*

neis

neis datis continetur, minores esse duobus rectis. Ad propos. 34.

66 IN aliquo triangulo constitui possunt intra ipsum duo recta a duobus punctis basis, aequales duobus lateribus. Ad propos. 34.

67 IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, si quidem fuerit aequilatera & aequiangula, duo qualibet latera opposita parallela inter se sunt. Ad propos. 34.

68 PARALLELOGRAMMA aequalia super eandem basim, ad easdemque partes constituta, inter easdem sunt parallelas. Ad propos. 35.

69 PARALLELOGRAMMA aequalia super bases aequales, & ad easdem partes constituta, inter easdem sunt parallelas. Et parallelogramma aequalia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basem, super aequales bases sunt constituta. Ad propos. 36.

70 SI duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inaequales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et cõtra, si duo parallelogramma sunt inaequalia inter easdem parallelas, basis maioris maior erit. Ad propos. 36.

71 TRIANGVLA, quorum duo latera vnius aequalia sint duobus lateribus alterius, vtrumque utrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, si quidem ambo simul duobus sint rectis aequales, aequalia sunt. Si uero duobus sint rectis maiores, minus illud est, quod maiorem habet angulum; si denique sint minores duobus rectis, maius illud erit, quod maiorem angulum habet. Ad propos. 37.

72 SI a quouis angulo trianguli linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secabit. Ad propos. 38.

73 A puncto quouis dato in vno latere trianguli proposíti lineam rectam ducere, qua bifariam secet triangulum datum. Ad propos. 38.

74 LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri est parallela. Ad propos. 39.

75 OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bi-

fariam diuiditur, parallelogrammum est. Ad propos. 39.

76 *TRIANGVLA aqualia inter eadem parallelas, si non eandem habuerint basem, super aquales bases erunt constituta.* Ad propos. 40.

77 *SI duo triangula inter eadem parallelas habeant bases inaquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra, si duo triangula sint inaqualia inter eadem parallelas, basis maioris maior erit.* Ad propos. 40.

78 *TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum opposita bases aquales sint, sunt inter se aqualia. Et trapezia aqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas aquales.* Ad propos. 40.

79 *TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super eadem basi, quorum opposita bases sint inæquales, inaqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est. Et trapezia inaqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inaquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.* Ad propos. 40.

80 *TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super aqualibus basibus, quorum opposita bases sint aquales, aqualia sunt. Et trapezia aqualia in eisdem parallelis, & super aqualibus basibus, habent bases oppositas aquales.* Ad prop. 40.

81 *TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super aqualibus basibus, quorum opposita bases sint inaquales, inaqualia sunt, maiusque est illud, cuius basis maior est. Et trapezia inaqualia in eisdem parallelis, & super aqualibus basibus, habent oppositas bases inaquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.* Ad propos. 40.

82 *SI in triangulo linea recta uni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensque alterutram parallelarum bifariam, dimidit quoque alteram bifariam.* Ad propos. 40.

83 *DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes aquales secare.* Ad propos. 40.

84 *SI triangulum duplam habuerit basim, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo: triangulum parallelogrammo aquale est.* Ad propos. 41.

85 *SI parallelogrammum & triangulum aquales habuerint*

rint baſes, in eiſdemque fuerint parallelis: duplum erit parallelogrammum trianguli. Ad propoſ. 41.

86 *SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint baſem, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta: Erunt ipſa in eiſdem parallelis. Et ſi parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eiſdemque parallelis: Erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem.* Ad propoſ. 41.

87 *SI triangulum & trapezium ſuper eadem baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij ſit baſis trianguli: Erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea trapezij baſis ſit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.* Ad propoſ. 41.

88 *TRAPEZIVM habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt trianguli, quod baſem habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppoſiti.* Ad propoſ. 41.

89 *DATO* parallelogrammo æquale triangulum conſtituere, *in dato angulo rectilineo.* Ad propoſ. 42.

90 *SI* parallelogrammum diuiſum fuerit in quatuor parallelogramma, *ita vt ex illis duo aduerſa ſint æqualia: conſiſtent reliqua duo circa diametrum.* Ad propoſ. 43.

91 *AD datam rectam lineam, dato* parallelogrammo *conſtituere æquale triangulum, in dato angulo rectilineo.* Ad propoſ. 44.

92 *DATIS duobus rectilineis inæqualibus, exceſſum maioris ſupra minus inquirere.* Ad propoſ. 45.

93 *LINEARVM æqualium æqualia ſunt quadrata. Et quadratorum æqualium æquales ſunt lineæ.* Ad propoſ. 46.

94 *TRES numeros inuenire, ita vt quadrati numeri duorum quadrato numero reliqui ſint æquales.* Ad propoſ. 47.

95 *SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum a diametro deſcriptum, duplum erit prædicti quadrati.* Ad propoſ. 47.

96 QVADRATVM diametri figura altera parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium. Ad propos. 47.

97 SI fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia: Erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. Ad propos. 47.

98 DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis. Ad propos. 47.

99 PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. Ad propos. 47.

100 PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. Ad propos. 47.

101 PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata. Ad propos 47.

102 COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire. Ad propos. 47.

103 SI ex angulo a duobus lateribus inæqualibus trianguli comprehenso ad basin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum: Secabitur basis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, si basis à perpendiculari secetur non bifariam: Erunt duo latera inæqualia, maiusque illud erit, quod maiori basis segmento adiacet. Ad propos. 47.

104 IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrämo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum recta ducta ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctū, in quo conueniūt latera parallelogrammorū lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producātur. Ad propos. 47.

105 *TRIANGVLORVM comparationes in primo libro demonſtratas explicare.* Ad finem lib. 1.

106 *QVANDO duo latera unius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia ſunt, utrumque utrique, & unus angulus uni angulo, qui uni æqualium laterum opponitur; baſes æquales eſſe nequeunt, niſi quando angulus in utroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus vel eſt minor recto, vel non minor recto.* Ad finem lib. 1.

107 *QVANDO duo latera unius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia ſunt, utrumque utrique; & unus angulus uni angulo, ita vt unus uni æqualium laterum, & alter alteri opponatur: nihil colligi poteſt.* Ad finem lib. 1.

108 *QVANDO duo latera unius trianguli duobus lateribus alterius trianguli æqualia ſunt, utrumque utrique, & angulus in uno triangulo illis lateribus comprehenſus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur uni illorum laterum: nihil poteſt inferri.* Ad finem lib. 1.

IN SECVNDO LIBRO.

1 *IN omni parallelogrammo, ſi unus angulus duntaxat detur rectus, reliqui etiam tres recti erunt.* Ad defin. 1.

2 *SI fuerint duæ rectæ lineæ, ſecenturque amba in quotcunque ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis unius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis.* Ad propoſ. 1.

3 *SI ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturque amba vtcunque: Rectangulum comprehēſum ſub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, et dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo ſub reliquis partibus cōprehenſo.* Ad propoſ. 1.

4 *SI linea recta ſecetur in quotcunque ſegmenta: Qua-*

dratum, quod a tota sit, aquale est eis, qua sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis. Ad propos. 2.

5 *PARALLELOGRAMMA circa diametrum quadrati sunt quadrata.* Ad propos. 4.

6 *DIAMETER cuiusuis quadrati diuidit eius angulos bifariam.* Ad propos. 4.

7 *SI linea recta fuerit dupla linea recta, quadratum ex illa descriptum, quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.* Ad propos. 4.

8 *NVMERVM quadratum inuenire, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat. Et vicissim quadratum numerum reperire, a quo datus quiuis numerus subtractus relinquat numerum quoque quadratum.* Ad propos. 4. 5. 6. & 8.

9 *SI tres linea habeant proportionalitatem Arithmeticam; Rectangulum sub extremis contentum, una cum quadrato excessus, aquale est quadrato medie.* Ad propos. 6.

10 *SI recta linea in partes inaquales secetur: Earum partium quadrata aqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur, una cum quadrato eius linea, qua maior pars superat minorem.* Ad propos. 7.

11 *IN omni triangulo obtusangulo, linea perpendicularis ducta ex quouis acutorum angulorum ad latus oppositum, cadit in ipsum latus ad partes anguli obtusi protractum.* Ad propos. 12.

12 *SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, obtusus est.* Ad propos. 12.

13 *SI in triangulo quadratum unius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hac linea ad latus productū perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.* Ad propos. 12.

14 *AMBLYGONIA triangula constituere laterum commensurabilium, in quibus segmentum inter angulum obtusum, & perpendicularem commensurabile etiam sit lateribus.* Ad propos. 12.

15 *SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.* Ad propos. 13.

16 *SI in triangulo quadratū vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hac demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.* Ad propos. 13.

17 *TRIANGVLA commensurabilium laterum constituere, in quibus segmentum inter perpendicularem, quæ in basem cadit, eisdem lateribus commensurabilia quoque sint.* Ad propos. 13.

18 *SI in triangulo a quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum bifariam: erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorū quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum uero ex dimidiato latere describitur.* Ad propos. 13.

19 *AREAM cuiusque trianguli latera habentis nota inuenire.* Ad propos. 13.

20 *DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdē: Inuenire latus ipsius quadrati.* Ad propos. 14.

21 *DATIS duobus excessibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli supra utrumque latus: Inuenire latera ipsius rectanguli.* Ad propos. 14.

IN TERTIO LIBRO.

1 *SI in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineā bifariam, & ad angulos rectos secet: in secante est centrum circuli.* Coroll. propos. 1.

2 *LINEA recta, qua circulum tangit, ita vt eum non secet; in vno tantum puncto ipsum tangit.* Coroll. propos. 2

3 *IN triangulo aquilatero, vel Isoscele, recta secans basem bifariam, ad basem perpendicularis est. Et perpendicularis ad basem, secat basem bifariam.* Coroll. propos. 3.

4 *DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentia exterioris recta ducatur interioris circumferentiam secans: Erunt eius segmenta inter vtramque circumferentiam posita, inter se aqualia.* Ad propos. 3.

5 *SI intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidē maxima sit, vna verò minima; & reliquarum alia sint inaquales, alia aquales: Maxima quidem per centrum trāsibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidem erunt maxima propinquiores; aquales autem ab eadem maxima, vel minima aqualiter distabunt.* Ad propos. 7.

6 *SI in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus, tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusque extra eundem cadet.* Ad propos. 13.

7 *RECTA linea a diametri circuli extremitate ad angulos rectos ducta ipsum circulum tangit. Hinc facile per datum punctum in circunferentia duci poterit linea circulum tangens.* Coroll. propos. 16.

8 *DIGRESSIO de angulo contactus aduersus Iacobum Peletarium.* Ad propos. 16.

9 *QVOTLIBET anguli contactus aquales simul sumpti, minores sunt quouis angulo acuto rectilineo.* Ad prop. 16.

10 *ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera vero infinite minui: & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.* Ad propos. 16.

11 *TRANSITVR a minori ad maius, vel cōtra, & per omnia media: & tamen non per aquale. Ité reperitur maius hoc, & minus eodē: & tñ nō aquale.* Ad propos. 16. & 31.

12 *PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterum includat, rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.* Ad propos. 17.

13 *PER datum punctum describere circulum, qui alium tangat siue interius, siue exterius.* Ad propos. 17.

14 *CIRCVLVM, qui duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium, tangat, describere.* Ad propos. 17.

15 *LINEAE rectæ, quæ circulũ secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.* Ad propos. 17.

16 *DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis: erunt omnes rectæ lineæ interiorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamque in punctis contactuum secabuntur.* Ad propos. 18.

17 *IN circulo spatium ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cum fuerit eadem peripheria basis spatij & anguli.* Ad propos. 20.

18 *SI a duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales. Circulus per duo illa puncta, & alterutrũ illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.* Ad propos. 21.

19 *SI in quadrilatero anguli qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales: circulus, qui per tres quoscũque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; atque adeo circa ipsum quadrilaterum circulus describi potest.* Ad propos. 22.

20 *SI ex æmicirculis, aut circulis, segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.* Ad propos. 24.

21 *ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistunt, similes sunt.* Ad propos. 22.

22 *SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti,*

similes. Ad propos. 22.

53 *SI duo aut plures circuli se mutuo tangãt interius in uno puncto, a quo duæ aut plures rectæ educantur: erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcunque lineam, & punctum contactus intercepti, similes*. Ad propos. 22.

24 *SI unum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis*. Ad propos. 22.

25 *SEGMENTA circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, sunt similia*. Ad propos. 24.

26 *IN æqualibus circulis inæquales anguli inæqualibus peripheriis insistunt, maior maiori, & minor minori, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant*. Ad propos. 26.

27 *IN æqualibus circulis anguli, qui inæqualibus peripheriis insistunt, sunt inter se inæquales, maior, qui maiori, & minor, qui minori, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant*. Ad propos. 27.

28 *DVÆ rectæ linea, quæ in eodẽ circulo æquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, sunt parallelæ. Et contra, duæ lineæ parallelæ in eodem circulo arcus æquales intercipiunt*. Ad propos. 27.

20 *LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit*. Ad propos. 27.

30 *ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti: acutus vero arcui quadrante minori: & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistẽs rectus est: insistens vero arcui quadrante minori, acutus: & arcui quadrante maiori, obtusus*. Ad propos. 27.

31 *RECTA linea e centro circuli ducta, secansque aliam rectam nõ per centrũ ductam bifariam, secabit et arcum, cui hæc recta subtenditur, bifariam. Et contra, si secet & arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam*. Ad propos. 27.

32 *SI in circulo, ductis duabus diametris se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eique ex una*

parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrumque quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proxima parallela recta ducatur conueniens cum diametro producta: Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis una cum diametro, qua producta est, simul sumptis, æqualis. Ad propos. 27.

33 *IN æqualibus circulis inæquales rectæ lineæ inæquales peripherias auferunt, maior quidem maiorem, & minor minorem, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo: At vero si de segmentis circuli maioribus sermo habeatur, maior minorem, & minor maiorem.* Ad propos. 28.

34 *IN æqualibus circulis, inæquales peripherias inæquales rectæ lineæ subtendunt, maiorem quidem maior, & minorem minor, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo: At vero si de segmentis semicirculo maioribus loquamur, minorem maior, & maiorem minor.* Ad propos. 29.

35 *CIRCVLI, e quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.* Ad propos. 29.

36 *EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.* Ad propos. 29.

37 *EX circulis inæqualibus linea recta, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.* Ad propos. 29.

38 *RECTÆ lineæ, quæ ex quibuscunque binis circumferentias similes inæquales auferunt, inæquales sunt.* Ad propos. 29.

39 *SI in diametro circuli præter centrum punctum sumatur, ab eoque in peripheriam duæ rectæ non in easdem partes cadentes efficiant ad diametrum angulos æquales: Rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abscindent æquales. Et si lineæ sint æquales, constituent ad diametrum angulos æquales, abscindentque æquales arcus. Si denique arcus æquales abscindant, erunt rectæ illæ æquales, constituentque ad diametrum angulos æquales.* Ad propos. 29.

40 *SI in diametro circuli præter centrum sumatur punctum*

ctum quodpiam, in quo ad easdem partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui a minori portione diametri remotior est. Ad propos. 29.

41 *ANGVLVS trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est.* Coroll. propos. 31.

42 *SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus: Et segmentum, cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius: cuius uero angulus est recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.* Ad propos. 31.

42 *SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus illud circulus describatur: transibit necessario circulus ille per angulum rectum.* Ad propos. 31.

43 *A dato puncto extra circulum, rectam lineam ducere, qua datum tangat circulum.* Ad propos. 31.

44 *SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta ejiciatur, a puncto vero, vbi hac recta a posteriori circulo secatur, ducatur recta vtcunque; secabitur eius portio intra priorem circulum a circumferentia posterioris bifariam.* Ad propos. 31.

45 *QVADRILATERVM in circulo descriptum, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum, hoc est, vel quadratum, vel altera parte longius.* Ad propos. 31.

46 *SI linea recta ducta ad extremitatem linea circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis: Linea ducta circulum tanget.* Ad propos. 32.

47 *SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo: describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per qualibet tria puncta earum extrema descriptus,*

per

per quartum quoque punctum transibit. Ad propos. 35.

48 *SI a puncto quouis extra circulum assumpto plurima linea recta circulum secantes ducantur: Rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus inter se sunt aqualia.* Coroll. 1. propos. 36.

49 *DVAE rectæ lineæ ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangant, inter se sunt aquales.* Coroll. 2. propos. 36.

50 *AB eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum possunt duæ linea, quæ circulum tangant.* Coroll. 3. propos. 36.

51 *SI duæ rectæ aquales ex puncto quopiam in cõuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, altera quoque circulum tanget.* Coroll. 4. propos. 36.

52 *SI a puncto aliquo binæ linea rectæ finitę egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis prope punctum comprehensa sint aqualia; describi poterit per extrema puncta aliorum segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.* Adpropos. 36.

53 *DATIS duabus rectis sine aqualibus, siue inaqualibus, alteri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, et adiuncta comprehensum, quadrato alterius sit aquale.* Ad propos. 36.

54 *SI a puncto extra circulum dato duæ linea rectæ circulum tangentes ducantur, aut duæ linea vsque ad conuexam peripheriam inter se aquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli iecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam. Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit* Ad propos. 37.

IN QVARTO LIBRO.

1 *IN dato circulo rectam lineam accommodare aqualem datæ rectæ linea, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.* Ad propos. 1.

IN

2 *IN omni triangulo, si circulus inscribatur, duo quilibet latera superãt reliquum recta linea, cuius quadratũ quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quod si angulus comprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositum diametro circuli triangulo inscripti.* Ad propos. 4.

3 *SI circulo circa triangulũ descripto, centrũ intra triangulum cadat, triangulum est acutangulum: Si vero in vnum latus trianguli, rectangulum: Si denique extra triangulum, obtusangulum.* Coroll. propos. 5.

4 *CENTRVM circuli circa triangulum acutangulum descripti intra triangulum cadit: circa rectangulum vero, in latus recto angulo oppositum: circa obtusangulum denique, extra triangulum.* Coroll. propos. 5.

5 *PER data tria puncta non in vna recta linea existentia circulum describere.* Ad propos. 5.

6 *SI circa datum circulum describatur quadratum, & in eodẽ circulo quadratum inscribatur. Erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum.* Ad propos. 9.

7 *IN triangulo Isoscele, cuius vterque angulorum aequalium reliqui duplus est: Angulus aqualibus lateribus comprehensus, quinta pars est duorum rectorum, vterlibet autem aqualium, dua quinta partes. Item ille duas quintas partes vnius recti continet, vterlibet autem horum quatuor quintas partes.* Coroll. propos. 10.

8 *SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est: Isosceles triangulũ, cuius basis maiori segmento aqualis est, vtrumus vero laterum aqualium ipsi data linea aquale, habet vtrũlibet angulorum aqualium duplum reliqui.* Ad propos. 11.

9 *ANGVLVS pentagoni aquilateri, & aquianguli complectitur tres quintas partes duorum rectorum, vel sex quintas vnius recti.* Coroll. propos. 11.

10 *SVPER data recta linea terminata Pentagonum aquilaterum, & aquiangulum constituere.* Ad propos. 11.

11 *SI in circulo quacunque figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: Hæ perpendiculares constituent aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam.* Coroll. propos. 12.

12 *IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est: Recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contra, recta linea diuidens angulum bifariam secat quoque latus oppositum bifariam. Si vero numerus angulorum est par, Recta linea ex quouis angulo ad oppositũ angulũ ducta, secat utrumque angulum bifariam: Et contra, Recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumque bifariam quoque diuidit.* Ad propos. 12.

13 *LATVS hexagoni æquale est semidiametro circuli, in quo describitur.* Coroll. propos. 15.

14 *ISOSCELES triangulum oxygonium constituere, cuius tertium latus vtrouis æqualium maius sit.* Ad propos. 15.

15 *SI in circulo ab eodem puncto inscribantur duo latera duarum figurarũ æquilaterarum, & æquiangularũ: Cõtinebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterũ. Continebit autem figura inscribenda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates sunt in numero, qui ex multiplicatione denominatorum producitur.* Ad propos. 16.

16 *OMNIS figura æquilatera circulo inscripta, æquiangula quoque est: at non omnis figura æquilatera circulo circumscripta necessario æquiangula quoque est, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar, vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum ab eo, vel sextum, octauum, decimum, &c.* Ad propos. 16.

17 *OMNIS figura æquiangula circulo circumscripta, est etiam æquilatera: at non omnis figura æquiangula*

circulo inscripta, necessario aquilatera quoque est, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima aqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vnò eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum ab eo, vel sextum, octauum, decimum, duodecimum, &c. Ad propos. 16.

18 *IMPARIVM laterum figuræ inscribuntur in circulo beneficio Isoscelium triangulorum, quorum anguli æquales ad basem multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Parium vero laterum figura inscribuntur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli ad basim æquales, multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt angulorum.* Ad propos. 16.

19 *FIGVRAM quamcunque aquilateram, & aquiangulam in circulo practice describere, sine ope triangulorum Isoscelium prædictorum.* Ad propos. 16.

30 *FIGVRAM quamcunque aquilateram, & aquiangulam supra datam rectam practice describere.* Ad propos. 16.

21 *LATERA pentagoni, & decagoni in circulo describendorum, vna eademque opera inuenire.* Ad propos. 16.

22 *SI bifaria sectiones laterum figuræ æquilateræ, & aquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque, & aquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.* Ad propos. 16.

23 *INTER omnes figuras æquilateras, & aquiangulas, solum triangulum, quadratum, & hexegonum, locum replere possunt.* Ad propos. 16.

IN QVINTO LIBRO.

1 *TRACTATVS de proportionibus, & Proportionalitatibus copiosissimus.* Ad defin. 4.

2 *ANGVLVM curuilineum angulo rectilineo exhibere æqualem.* Ad defin. 5.

3 *CVR Euclides in defin. 6. & 8. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, per earum aque multiplicia definierit.* Ad defin. 8.

4 *NVMERVS integer cum fractione in se multiplicatus producit necessario numerum integrum cum fractione.* Ad defin. 8.

5 *SI quatuor magnitudines fuerint proportionales, & conuertendo proportionales erunt.* Coroll. propos. 4.

6 *AEQVALES magnitudines ad æquales eandem habent rationem.* Ad propos. 7.

7 *QVAE eidem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem.* Ad propos. 11.

8 *SI prima ad secundam eãdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, minorem rationem habuerit, quã quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.* Ad propos. 13.

9 *SI prima ad secundam maiorem habuerit rationẽ, quã tertia ad quartã, tertia autem ad quartam maiorem habuerit quam quinta ad sextam: Prima quóque ad secundam multo magis maiorem rationem habebit quam quinta ad sextam.* Ad propos. 13.

10 *SI prima ad secundam minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam multo magis minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.* Ad propos. 13.

11 *SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, ha quoque per Diuisionem rationis conuersam proportionales erunt.* Ad propos. 17.

12 *SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, ha quoque per Diuisionem rationis contrariam proportionales erunt.* Ad propos. 17.

13 *SI diuisæ magnitudines proportionales fuerint, ha quoque per compositionem rationis conuersam proportionales erunt.* Ad propos. 18.

14 *SI diuisæ magnitudines proportionales fuerint, ha quoque per compositionem rationis contrariam proportio-*

nales erunt. Ad propoſ. 18.

15 *SI quatuor magnitudines fuerint proportionales: Et quo que per conuerſionem rationis proportionales erunt.* Coroll. propoſ. 19.

16 *SI prima ad ſecundam eãdem habuerit rationem, quã tertia ad quartam: Habebũt etiam aque multiplices prima ac tertia ad ſecundam, & quartam, eandem rationẽ: Item aque multiplices ſecunda, & quarta ad primam, & tertiam, eandem rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt ſecunda & quarta ad aque multiplices prima & tertia: Item prima ac tertia ad aquemultiplices ſecunda & quarta, rationem habebunt eandem.* Ad propoſ. 22.

17 *SI dua magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detracta quadam habeant ad eaſdem eandem proportionem: Et reliqua ad eaſdem eandem proportionem habebunt.* Ad propoſ. 24.

18 *SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima et minima maiores erũt, quã dupla reliquæ.* Ad propoſ. 25.

19 *SI prima ad ſecundam habuerit minorem proportionẽ, quã tertia ad quartam habebit conuertendo ſecunda ad primam maiorem proportionem, quam quarta ad tertiam.* Ad propoſ. 26.

20 *SI prima ad ſecundam habuerit minorem proportionẽ, quam tertia ad quartam: habebit quoque viciſſim prima ad tertiam, minorem proportionem, quam ſecunda ad quartam.* Ad propoſ. 27.

21 *SI prima ad ſecundam habuerit minorem proportionẽ quam tertia ad quartã: habebit quoque compoſita prima cũ ſecunda ad ſecũdam, minorem proportionem, quã compoſita tertia cum quarta ad quartam.* Ad propoſ. 28.

22 *SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quã compoſita tertia cũ quarta ad quartã, habebit quoq; diuidendo prima ad ſecũdam minorẽ proportionẽ, quã tertia ad quartã.* Ad propoſ. 29.

23 *SI compoſita prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit minorem proportionem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuerſionẽ rationis pri-*

ma cum secunda ad primam, maiorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam, Ad propos. 30.

24 *Si sint tres magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque minor proportio prima priorum ad secundam, quã prima posteriorum ad secundam: Item secunda priorum ad tertiam minor, quam secunda posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio prima priorũ ad tertiã, quã prima posteriorũ ad tertiã.* Ad propos. 31.

25 *Si sint tres magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque minor proportio prima priorum ad secundam, quã secunda posteriorum ad tertiam: Item secunda priorum ad tertiam minor, quam prima posteriorum ad secundã: Erit quoque ex æqualitate, minor proportio prima priorũ ad tertiã, quã prima posteriorũ ad tertiã.* Ad propos. 32.

26 *Si fuerit minor proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum minor proportio quam totius ad totum,* Ad propos. 33.

IN SEXTO LIBRO.

1 *PROPOSITIS quotcunque quantitatibus, proportio prima ad vltimam componitur ex proportionibus omnibus intermedijs.* Ad defin. 5.

2 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.* Ad propos. 1.

3 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.* Ad propos. 1.

4 *TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt altitudines: æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant.* Ad propos. 1.

5 *LINEA recta, quæ parallela ducitur vni lateri cuiuslibet trianguli, auferet triangulũ toti triangulo simile.* Coroll. prop. 4.

6 *SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineam, duæ parallelæ inter se ad easdem partes educantur, ita vt proportionem habeant eandem, quam recta inter ipsas, & alterũ extremũ punctum inclusa: Recta coniungens extremũ vnius*

earum cum extremo prioris lineæ, trāsibit per extremum alterius lineæ. Ad propos. 4.

7 *SI ex duobus punctis cuiuslibet rectæ duæ parallelæ educantur in diuersas partes, habentes eandem proportionē, quam segmenta rectæ inter parallelas conterminas, & aliquod idem punctum intra, datam rectam: Rectæ coniungens extrema puncta parallelarum transibit per dictum punctum intra rectam.* Ad propos. 4.

8 *SI in triangulo quouis uni lateri parallela recta agatur, & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud in easdem rationes.* Ad propos. 4.

9 *RECTA perpendicularis, quæ in rectangulo triāgulo ab angulo recto in basim demittitur, est media proportionalis inter duo basis segmenta: Item latus utrūlibet angulū rectum ambiens, medium proportionale est inter totam basim, & illud segmentum basis, quod dicto lateri adiacet.* Coroll. propos. 8.

10 *DATAM rectam lineam in partes quotcunque æquales diuidere.* Ad propos. 10.

11 *DATAM rectam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcunque datam.* Ad propos. 10.

12 *SI duæ rectæ lineæ secētur in binis punctis proportionaliter: Erūt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.* Ad propos. 10.

13 *SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmetica proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se, quas illa, proportiones habeant: Erunt quoque partes huius lineæ Arithmetice proportionales.* Ad propos. 10.

14 *SI duæ linea inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoque excessus priorum ad excessum posteriorē, ut priorum linearum una ad unā posteriorū.* Ad propos. 10.

15 *LINEAM rectam datam, vel numerū, in quotuis partes Arithmetice proportionales secare.* Ad propos. 10.

16 *QVOTLIBET lineas continue proportionales in data ratione inuenire.* Ad propos. 11.

17 *INTER duas rectas, duas medias proportionales practice inuenire.* Ad propos. 11.

18 *DATIS duabus rectis lineis, duas alias in eadem cum illis proportione inuenire.* Ad propos. 12.

19 *TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.* Ad propos. 12.

20 *RECTA linea, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, media est proportionalis inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt.* Ad propos. 13.

21 *DATA recta linea, aliam rectam (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.* Ad propos. 13.

22 *RECTA linea qualibet est media proportionalis inter quæuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale.* Ad propos. 17.

23 *SECTA linea recta in duas partes vtcunque, alterutrarum earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continue proportionales.* Ad propos. 17.

24 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmitica proportionalitate inuenire.* Ad propos. 17.

25 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.* Ad propos. 17.

26 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.* Ad propos. 17.

27 *DATIS duabus rectis lineis, medium proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire, aliter, quam propos. 13. factum est.* Ad propos. 17.

28 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propos. 11. factum est.* Ad propos. 17.

29 *DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire, aliter, quam propos. 11. factum est.* Ad propos. 17.

30 *DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.* Ad propos. 17.

31 *DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.* Ad propos. 17.

32 DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. Ad propos. 17.

33 QVANDO duo numeri proportionē habent dupla maiorem, nō potest illis adiungi tertius maior in proportionalitate Harmonica. Ad propos. 17.

34 EX datis quibusuis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales, quorū extremi eādem proportionē habeant, quam dati duo numeri, reperire. Ad propos. 17.

35 TRES numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi proportionem habeāt datam, & medius sit dato numero aqualis. Ad propos. 17.

36 DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire. Ad propos. 17.

37 DATIS duobus numeris, minorem extremum in proportionalitate Harmonica inuenire. Ad propos. 17.

38 DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire. Ad propos. 17.

39 PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus siue aqualibus, siue inaqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo & tertio semel; ac tertius semel, sunt Geometrice proportionales. Ad propos. 17.

40 PROPOSITIS tribus terminis siue aqualibus, siue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; ac denique tertius semel, sunt Arithmetice proportionales. Ad propos. 17.

41 PROPOSITIS tribus terminis siue aqualibus, siue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel; ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel; & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coacernata, Harmonice proportionales sunt. Ad propos. 17.

42 A data recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, expeditius, quam ab Euclide factum est. Ad propos. 18.

43 SI tres recta linea proportionales fuerint: erit vt prima ad tertiam, ita triangulum super primam descriptum ad

triangulum super secundæ simile, similiterq; descriptum: Item ita triangulum super secundæ ad triangulum super tertiam simile, similiterque descriptũ. Coroll. propos. 19.

44 *SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erit vt prima ad tertiam, ita polygonum super primæ descriptum ad polygonum super secundam similiterque descriptum: Item ita polygonum super secundam ad polygonum super tertiam simile, similiterque descriptum.* Coroll. propos. 20.

45 *POLYGONA similia, æquilatera & æquiangula diuiduntur in similia triangula, & numero æqualia, ductis è centris circulorum ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis.* Ad propos. 20.

46 *SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius. Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplũ erit lateris huius.* Ad propos. 20.

47 *ÆQVALIA rectilinea similia, similiterq; descripta, cõstituta sunt super æquales rectas lineas.* Ad propos. 22.

48 *SI fuerint tres rectæ lineæ proportionales: erunt & rectilineæ similia, similiterq; descripta ab eis, proportionalia. Et si a tribus rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ proportionales erunt.* Ad propos. 22.

49 *TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent: proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositã.* Ad propos. 23.

50 *PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.* Ad propos. 23.

51 *PROPORTIONEM minorẽ ex minore auferre.* Ad pp. 23

52 *TRIANGVLA, quæ vnũ angulũ vni angulo æqualem habent, eãdem proportionẽ habent, quam rectangula, quæ sub latetibus æqualem angulum comprehendentibus continentur.* Ad propos. 23.

53 *PARALLELOGRAMMA inter se æquiangula, eandẽ habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorũ æqualẽ angulũ cõtinẽtibus cõprehẽsa.* Ad propos. 23.

54 *TRIANGVLA & parallelogrãma in se proportionẽ habent compositam ex proportione basium, & proportione*

altitudinum. Ad propos. 23.

55 *DATIS duobus parallelogrãmis æquiãgulis, sed nõ similibus: ex quouis illorũ alteri simile resecare.* Ad prop. 24.

56 *DATO parallelogrammo, describere aliud maius, aut minus simile illi, similiterque descriptum.* Ad propos. 24.

57 *SI ad rectam lineam applicetur parallelogrammũ deficiens quadrato ipsum applicatum æquale est rectangulo quod sub segmentis linea per applicationem factis continetur.* Ad propos. 28.

58 *SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis trianguli lateribus describuntur, figuris similibus, similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.* Ad propos. 31.

59 *SECTOR ad sectorem est, vt angulus ad angulum.* Coroll. 1. propos. 33.

60 *Angulus in centro circuli ita est ad quatuor rectos, vt arcus illi subtensus ad totam circumferentiam. Et contra. Ita se habent quatuor recti ad angulum in centro, vt tota circumferentia ad arcum illi angulo subtensum.* Coroll. 2. propos. 33.

61 *SIMILIA circulorum segmẽta, hoc est, in quibus anguli sunt æquales, eandem proportionem habent ad integras circumferentias circulorum.* Ad propos. 33.

62 *SI duo aut plures circuli ex eodem centro describãtur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur: erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti, similes.* Ad propos. 33.

63 *AEQVALES* recta linea ex circulis inæqualibus auferũt arcus inæquales, maiorq; est arcus minoris circuli, et ĩt maior, q̃ vt similis sit arcui circuli maioris. Ad prop. 33

64 *A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamẽ, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum.* Ad propos. 33.

65 *DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.* Ad propos. 33.

66 *TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.* Ad propos. 33.

67 *DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.* Ad propos. 33.

68 *DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterq; descripta cuicunq; rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcunque.* Ad propos. 33.

69 *DATO rectilineo duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuinis rectilineo similia sint, similiterque descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.* Ad propos. 33.

70 *DVOBVS datis rectilineis æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuinis rectilineo dato.* Ad propos. 33.

71 *SI in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint: Erũt segmenta vnius segmẽtis alterius reciproca.* Ad prop 33.

72 *SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoq; in circulum cadant duæ rectæ lineæ circulum secantes: Erunt totæ & segmenta extra circulum reciproca. Quòd si ab eodem puncto linea ducatur, quæ circulum tangat: Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectã, quæ circulum secet, & eius segmentũ exterius.* Ad propos. 33.

73 *SI duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, & à duobus earum terminis perpendiculares sibi mutuò demittantur: Erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera vero inter sectionem, & prioris lineæ assumptæ perpendicularem interijcitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciproca.* Ad propos. 33.

74 *IN parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelæ se mutuò secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.* Ad propos. 33.

75 *OMNE quadrilaterum à duabus diametris se mutuò secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.* Ad propos. 33.

76 *IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat basem extrema ac media ratione, tria latera sunt continuè proportionalia. Et si tria latera trianguli rectanguli sunt continuè proportionalia, perpendicularis ab basem ex angulo recto demissa secat*

basem

baſem extrema ac media ratione. Ad propoſ 33.

77 *A dato puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, qua triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum proportionem datam.* Ad propoſ. 33.

78 *IMPERATAM partem ex triangulo auferre per lineam rectam, qua à quouis dato puncto lateris ducitur.* Ad propoſ. 33.

79 *DATO rectilineo ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, maius vel minus, ſecundum proportionem datam.* Ad propoſ. 33.

80 *IN dato triangulo quocunque quadratum deſcribere.* Ad propoſ. 33.

81 *INTRA datum quadratum, aliud quadratum deſcribere in data proportione. Oportet autem datam proportionem dupla non eſſe maiorem.* Ad propoſ. 33.

82 *SI ad diametrum circuli in extremis punctis dua perpendiculares excitentur, & ab eiſdem extremis per unũ idemque punctum circumferentiæ, dua alia recta circulum ſecantes ducantur, occurrentes duabus perpendicularibus: Erit rectangulum comprehenſum ſub vtralibet ſecantium, & eius ſegmento interiore, quadrato diametri æquale.* Ad propoſ. 33.

83 *SI in circulo dua diametri ſeſe ad rectos angulos ſecãt, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque ſecans circumferentiam, & alteram diametrum ſiue productam, ſiue non productam: Erit rectangulum comprehenſum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum verò inter idem punctũ extremum, & circumferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum deſcripto.*

VEL VNIVERSALIVS.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro terminorum diametri dua rectæ ducantur, vna ad eius inter-

sectionem in circumferentia, altera vero vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum sub segmentis huius posterioris linea, quorum vnum sit inter praedictum terminum, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam, aquale quadrato prioris recta inter eundem terminum, & circferentiam, seu perpendicularem intercepta. Ad propos. 33.

84 *DATO circulo, & duobus punctis sine extra circulum, siue intra, dummodo neutrum sit in circumferentia: per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnum punctũ circumferentia, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illa recta circumferentiam secant, parallela sit recta data duo puncta connectenti.* Ad propos. 33.

85 *QVADRATRICEM lineam describere.* Ad finem lib. 6.

86 *SI ex centro per quauis puncta linea Quadratricis recta ducantur vsque ad circumferentiam Quadrantis ex eodem centro descripti, et ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & alia recta eidem basi parallela: Erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti, perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.* Ad finem lib. 6.

87 *DATVM arcum circuli in datam proportionem dividere.* Ad finem lib. 6.

88 *ANGVLVM quemuis rectilineum in duos angulos data tam habentes proportionem partiri: atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes aquales distribuere.* Ad finem lib. 6.

89 *ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum aqualium ad reliquum habeat proportionem datam.* Ad finem lib. 6.

90 *OMNES figuras aquilateras in circulo describere.* Ad finem lib. 6.

91 *SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit: erunt arcus Quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continue proportionales.* Ad finem lib. 6.

92 *RECTAM cuilibet arcui circuli, ex quo Quadratrix descripta est, aqualem reperire.* Ad finem lib.6.

93 *SI basis Quadratricis statuatur semidiameter alicuius circuli: Erit eius latus Quadranti eiusdem circuli aqualis.* Ad finem lib.6.

94 *SI dua recta eandem proportionem habeant, quam basis Quadratricis ad eius latus, minor autem fiat semidiameter alicuius circuli; erit maior aqualis Quadranti eiusdem circuli.* Ad finem lib.6.

95 *DATO circulo quadratum aquale constituere.* Ad finem lib.6.

96 *DATO quadrato circulum aqualem describere.* Ad finem lib.6.

97 *RECTILINEO cuicunque circulum aqualem: Et circulo figuram rectilineam aqualem constituere, qua dato rectilineo cuicunque similis sit, & similiter descripta.* Ad finem lib.6.

98 *DATAE rectae linea circumferentiam circuli reperire aqualem.* Ad finem lib.6.

99 *DATIS duobus circulis inaqualibus, datoque arcui in uno eorum: ex altero arcum aqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.* Ad finem lib.6.

IN SEPTIMO LIBRO.

1 *SI duobus numeris inter se primis propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nunquam reliquus metietur precedentem, quoad assumpta sit unitas.* Ad propos. 1.

2 *SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Detractio ad unitatem usque non perveniet, sed ad numerum, qui precedentem detractum metiatur.* Ad propos. 1.

3 *NVMERVS duos numeros metiens, metitur quoque ma-*

ximam eorum mensuram communem. Coroll. propos. 2.

4 *PROPOSITIS duobus, aut pluribus numeris, explorare, an sint inter se primi, nec ne.* Ad propos. 2.

5 *NVMERVS tres numeros, vel plures metiens, metitur quoque maximam eorum mensuram communem.* Ad propos. 3.

6 *SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus alterius numeri eadem pars: Et simul vtraq; vnitas, vel vnitas, & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.* Ad propos. 5.

7 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorum eadem pars: Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.* Ad propos. 5.

8 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorũ æqualium numero, singuli singulorum æque multiplices: quàm multiplex est unius vnus numerus, tam multiplices erũt & omnes omnium.* Ad propos. 5.

9 *SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eadem partes: Et omnes omnium simul eadem partes erunt, quæ vnus vnius.* Ad propos. 6.

10 *SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.* Ad propos. 7.

11 *SI primus secundum æqualiter contineat, atque tertius quartum, eandemque insuper partem, vel partes: Erit e contrario secundus primi eadem pars, aut partes, quæ quartus tertij. Et si fuerit primus secundi eadem partes quæ tertius quarti: Continebit è contrario secundus primum æqualiter, atque quartus tertium, eandemque insuper partem vel partes.* Ad propos. 11.

12 *QVAE proportiones numerorum eidem proportioni eadem sunt, inter se quoque sunt eadem.* Ad propos. 14.

13 *SI numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent: Habebunt producti numeri easdem rationes, quas numeri multiplicati, vel multiplicantes.* Ad propos. 18.

14 *SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum: qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero. Et si, qui ex primo & quarto fit numerus, maior fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum.* Ad propos. 19.

15 *SI maior fuerit proportio primi ad secundum, quàm secundi ad tertium: maior fiet numerus ex primo in tertiū, quam ex secundo in se. Et si maior numerus fiat ex primo in tertium, quam ex secundo in se: maior erit proportio primi ad secundū, quā secundi ad tertiū.* Ad propos. 20.

16 *QVOTLIBET numeri minimi in continuatione suarū proportionum, siue eadem sint, siue diuersæ proportiones, metiuntur aque totidem alios numeros, qui easdem cum eis proportiones habent, primus primum, secundus secundum, tertius tertium, &c.* Ad propos. 21.

17 *SI quatuor numeri proportionales sint: Et conuertendo proportionales erunt.* Ad propos. 22.

18 *SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.* Ad propos. 22.

19 *SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.* Ad propos. 22.

20 *SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conuersionē rationis proportionales erunt.* Ad propos. 22.

21 *SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartū: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.* Ad propos. 22.

22 *SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habent.* Ad propos. 22.

23 *SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum, habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem ra-*

tionem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto. Ad propos. 22.

24 *SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem: Habebunt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad aliū illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales. Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.* Ad propos. 22.

25 *QVOTCVNQVE numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi.* Ad propos 24.

26 *NVMERVS, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque est primus.* Ad propos. 30.

27 *SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit cōpositus: is etiā ad vnum eorū, qui in principio, cōpositus erit.* Ad propos. 32

28 *MAXIMA mensura quotlibet numerorum metitur ipsos per numeros, qui minimi sunt eandem proportionem cum ipsis habentium.* Coroll. propos. 35.

29 *DVOS minimos numeros inuenire, qui eandem habeāt proportionem, quam quotcunque numeri dati continue proportionales.* Ad propos. 35.

30 *SI duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, vel minor maiorem, producitur minimus numerus, quem illi metiantur.* Coroll. propos. 36.

31 *SI tres, vel plures numeri numerum quempiam metiantur: metietur quoque eundem minimus numerus, quem illi metiantur.* Coroll. propos. 38.

32 *MINIMVS numerus, quem quotlibet numeri metiuntur, minimus est, habens partes à numeris metientibus denominatas.* Ad propos. 41.

33 *NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt quelibet pars subsequentem partem continet.* Ad propos. 41.

IN OCTAVO LIBRO.

1 *SI tres numeri minimi sint continue proportionales: erit extremi eorum quadrati: Si autem fuerint quatuor, erunt cubi, &c* Coroll. 1. propos. 2.

2 *EXTREMI numeri proportionalium quotcunque secundum doctrinam propos 2. inuentorum, in data ratione minimorum, inter se primi sunt.* Coroll. 2. propos. 2.

3 *DVO numeri minimi in data ratione, metiuntur omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione.* Coroll. 3. propos. 2.

4 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi nõ sit multiplex: neque alius quisquam ullius multiplex erit.* Ad propos. 6.

5 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero secundum metiatur: et quicunque alius quemlibet sequentium metietur. Si primus autem secundi sit multiplex: et quicunq; alius cuiuslibet sequentium multiplex erit.* Ad propos. 6.

6 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur: neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.* Ad propos 6.

7 *SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur: metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex: primus quoque secundi multiplex erit.* Ad propos. 7.

8 *INTER numeros dupla proportiones, vel superparticularis, vel superbipartientis, non potest cadere numerus medius proportionalis.* Ad propos. 8.

9 *MVSICVM interuallum, quod Diapason appellatur, bifariam secari non potest in duas proportiones aquales. quod etiam de Tono dicendum est.* Ad propos. 8.

10 *DIAMETER quadrati cuiusuis lateri eiusdem est incommensurabilis.* Ad propos. 8.

11 *SI numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceperint omnes producti continue proportionales ab vnitate.* Ad propos. 9.

12 *SI quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales: secundus ab vnitate in se multiplicatus producit tertium, & ex eodem in hunc sit quartus, & ex eodem in hunc quintus, & sic de cæteris.* Ad propos. 10.

13 *SI sint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium: habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab vnitate; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.* Ad propos. 10.

14 *SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam, &c.* Ad propos. 10.

15 *SI inter duos numeros, & alium numerum assumptum, cõtinue proportionales ceciderint numeri: quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.* Ad propos. 10.

16 *INTER duos quadratos numeros cadit numerus medius proportionalis in continua proportione lateris ad latus.* Ad propos. 11.

17 *NVMERVS medius proportionalis inter duos quadratos, & vterque ipsorum quadratorum, compositi inter se sunt.* Ad propos. 11.

18 *INTER duos cubos cadunt duo numeri medij proportionales in continua proportione lateris ad latus.* Ad propos. 12.

19 *DVO numeri medij proportionales inter duos cubos, & vterus ipsorum cuborum, inter se compositi sunt.* Ad propos. 12.

20 *SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi sit multiplex: & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex, & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi nō sit multiplex: neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex: neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.* Ad propos. 17.

21 *INTER duos similes planos cadit medius proportionalis in ratione laterum homologorum, per quæ medius proportionalis inquiritur.* Ad propos. 18.

22 *NVMERVS medius proportionalis inter duos planos similes, & vterus ipsorum planorum, sunt inter se compositi.* Ad propos. 18.

23 *INTER duos similes solidos cadunt duo medij proportionales in proportione laterum homologorum, per quæ medij proportionales inquiruntur.* Ad propos. 19.

24 *DVO numeri medij proportionales inter duos solidos similes, & vterus ipsorum solidorum, inter se sunt compositi.* Ad propos. 19.

25 *DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.* Ad propos. 19.

26 *PROPORTIO cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum, exhiberi nullo modo potest in duobus numeris quadratis.* Coroll. propos. 24.

27 *NVMERI in dupla proportione vel quintupla proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* Coroll. propos. 24.

28 *PROPORTIO cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, reperiri non potest in duobus numeris cubis.* Coroll. propos. 25.

29 *NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.* Ad propos. 26.

30 *PLANI numeri non similes, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum.* Ad propos. 26.

31 *NVMERI, qui proportionem habent quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.* Ad propos. 27.

32 *NVLLI numeri habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, sunt similes plani, vel solidi.* Ad propos. 27.

33 *DVO quiuis numeri primi, non sunt similes plani, vel solidi.* Ad propos. 27.

34 *DVO quicunque numeri inter se primi, qui quadrati non sint, vel cubi (quamuis numerorum primus sit) plani similes non sunt, vel solidi.* Ad propos. 27.

35 *DVO numeri plani, vel solidi similes, quorum minor sit Primus, minor maiorem numerat.* Ad propos. 27.

36 *DVO numeri inter se primi, quorum minor Primus sit, non possunt esse plani, vel solidi similes.* Ad propos. 27.

37 *DVOS numeros planos, vel solidos non similes inuenire.* Ad propos. 27.

IN NONO LIBRO.

1 *SI duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.* Ad prop. 2.

2 *SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus: Et reliquus quadratus erit.* Ad propos. 2.

3 *SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus: Reliquus nō quadratus erit.* Ad propos. 2.

4 *SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem, Productus non quadratus erit.* Ad propos. 2.

5 *SI cubus numerus non cubum numerum multiplicans faciat aliquem, Factus non cubus erit.* Ad propos. 5.

6. *SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum: Et multiplicatus non cubus erit.* Ad propos. 5.

7 *SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet maior numerus acceptus tantum distabit ab assumpto quouis minore, quantum ab vnitate abest is numerus, per quem minor maiorem metitur.* Ad propos. 11.

8 *SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: quilibet illorum seipsum multiplicans producit numerum, qui tantum ab eo distet in numeris proportionalibus, quantum ipse ab vnitate. Minor vero quiuis maiorem quempiam multiplicans producit numerū, qui tantum à maiore distat, quantum minor ab vnitate.* Ad propos. 11.

9 *NVLLVS numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, aut minor proximum vnitati non metiēs, metiri potest vltimum, vel quemuis maiorum in proportionalibus numeris.* Coroll. propos. 12.

10 *SI quotcūque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandē rationē habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel extrā ad alterum erit cōpositus.* Ad propos. 14.

12 *PRIORA 10. theoremata secundi libri in numeris demonstrare.* Ad prop. 15.

13 *NVLLVS numerus secari potest in duas partes ita, vt qui fit ex toto in vnam partem, quadrato maioris partis aqualis sit.* Ad propos. 24. & 29.

14 *SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorum reliqui omnes simul compositi, erunt primi.* Ad propos. 15.

15 *PROPOSITIS quotcunque numeris continue proportionalibus, an ipsis possit alius proportionalis adiungi; considerare.* Ad propos. 19.

16 *SI sint quatuor numeri proportionales, sed non deinceps quorum primus & tertius primi inter se sint, fieri non po-*

reſt, vt detur alius, ad quem ita ſe habeat quartus, ſicut ſecundus ad tertium. Ad propoſ. 19.

17 *PRIMIS numeris quotcunque propoſitis, inuenire aliũ primum numerum ab illis diuerſum.* Ad propoſ. 20.

18 *IMPAR numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus, facit imparem.* Ad prop. 23.

19 *SI par numerus parem, aut ſeipſum multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.* Ad propoſ. 28.

20 *IMPAR numerus in ſe multiplicatus, imparem gignit.* Coroll. propoſ. 29.

21 *IMPAR numerus numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.* Ad propoſ. 29.

22 *IMPAR numerus numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.* Ad propoſ. 29.

23 *NVMERVS impar, qui ad aliquem numerum primus eſt; Primus quoque eſt ad eius duplum, quadruplum, octuplum, & ſic deinceps per proportionem duplam progrediendo.* Coroll. propoſ. 31.

24 *NVMEROS omnes pariter tantum pares inuenire.* Ad propoſ. 32.

25 *NVMEROS omnes pariter tantum impares inuenire.* Ad propoſ. 33.

26 *NVMEROS omnes, qui & pariter pares ſint & pariter impares inuenire.* Ad propoſ. 34.

27 *QVOTCVNQVE numerorum continue proportionalium, quorum primus, ſecundus, & vltimus noti ſunt, ſummam inuenire.* Ad propoſ. 35.

28 *NVMEROS omnes perfectos, & eorum partes aliquotas inuenire.* Ad propoſ. 36.

29 *QVOLIBET numero per duos quoſuis numeros diuiſo; Erunt duo bi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.* Ad propoſ. 36.

30 *QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiſo: Erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales.* Ad propoſ. 36.

31 *QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo; Erunt Quotientes conuerſo ordine*

in eadem proportione continue proportionales. Ad propoſ. 36.

32 *SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus: Erit vt ſumma priorum ad quẽlibet eorum, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet:* Ad propoſ. 36.

33 *SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus: Summa priorum per ipſos diuiſa ſigillatim facient eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.* Ad propoſ. 36.

34 *SI ſumma quotuis numerorum continue proportionaliũ per eos ſigillatim diuidatur, & Quotientum ſumma per ipſos Quotientes: & horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes. & ſic deinceps in infinitum: Procreabuntur alternis ſemper iidem primi Quotientes ordine conuerſo.* Ad propoſ. 36.

35 *SI ſumma quotuis numerorum continue proportionaliũ per eos ſigillatim diuidatur: Erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi Quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.* Ad propoſ. 36.

36 *SI ſumma quotuis numerorum cõtinue proportionaliũ, quorum numerus ſit impar, per eos ſigillatim diuidatur: Erit ſumma omnium Quotientum numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix eſt medius terminus.* Ad propoſ. 36.

37 *NVMEROS quotcunque in data ratione continue proportionales reperire, quorum omnium ſumma æqualis ſit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuſuis duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant.* Ad propoſ. 36.

38 *DVOS numeros in data proportione reperire, quorum ſumma æqualis ſit numero producto ex vno in alterum.* Ad propoſ. 36.

39 *MINVTIARVM, ſiue numerorum fractorum proprie*

rates, operationesque varias demonstrare. Ad finem lib. 9.

40 *PROPORTIONVM compositionem, contra quosdam Recentiores, explicare.* Ad finem lib. 9.

IN DECIMO LIBRO.

1 *SI duabus magnitudinibus incommensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua precedentem metietur.* Ad propos. 2.

2 *SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quadam reliqua precedentem.* Ad propos. 2.

3 *MAGNITVDO metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.* Coroll. propos. 3.

4 *AN quotlibet magnitudines proposita sint commensurabiles, necne, considerare.* Ad propos. 3.

5 *MAGNITVDO metiens quotlibet magnitudines, metitur & maximam earum mensuram communem.* Coroll. propos. 4.

6 *SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadē ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines, & numeri.* Ad propos. 4.

7 *MAGNITVDINES commēsurabiles proportionem habent eandem, quam numeri, per quos earum communis mensura maxima ipsas metitur.* Ad propos. 5.

8 *LINEAM rectam invenire, ad quam ita se habeant quævis alia data recta linea, vt numerus ad numerum: Item rectam, ad cuius quadratum ita se habeant quadratum alterius data recta, vt numerus ad numerum.* Coroll. propos. 6.

9 *SI sint quotvis quantitates continuæ proportionales, & alia totidem continuæ quoque proportionales, sitque vt prima illarum ad vltimā, ita prima harum ad vltimā:*

Brit & vt prima illarum ad secundam, ita prima harum ad secundam. Ad propos. 8.

10 *RECTAE lineæ, quæ longitudine sunt commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.* Coroll. propos. 9.

11 *DIAMETER quadrati cuiusuis lateris eiusdem incommensurabilis est.* Ad propos. 9.

12 *DVOS numeros planos inuenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad numerum quadratum.* Ad propos. 10.

13 *QVOTLIBET numeros inuenire, quotum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.* Ad propos. 10.

14 *RECTA media proportionalis inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vtrilibet illarum incommensurabilis est longitudine & potentia.* Ad propos. 11.

15 *SI sint duæ magnitudines incommensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis: erit & reliqua eidem commensurabilis.* Ad propos. 12.

16 *QVAE incommensurabilibus sunt commensurabiles: & inter se incommensurabiles erunt.* Ad propos. 14.

17 *DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor. Item datis duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas potest.* Ad propos. 14.

18 *SI tota magnitudo ex duabus composita commensurabilis sit alteri ipsarum: eadem & reliquæ commensurabilis est.* Coroll. propos. 16.

19 *SI tota magnitudo ex duabus composita, incommensurabilis sit alteri ipsarum: eadem & reliqua incommensurabilis est.* Coroll. propos. 17.

20 *DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.* Ad propos. 17.

21 *DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulũ sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamẽ maius non sit, quam quadratum à dimidia linea descriptum.* Ad propos. 17.

22 *SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata: Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.* Ad propos. 17.

23 *QVOTCVNQVE lineas Rationales longitudine inter se commensurabiles inuenire.* Ad propos. 19.

24 *RATIONALES lineæ non solum expositæ Rationali, sed etiam inter se sunt commensurabiles.* Ad propos. 19.

25 *SI sint duæ rectæ lineæ, erit vt prima ad secundã, ita quadratum, quod fit à prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primã, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.* Ad propos. 19.

26 *SPATIVM Rationali spatio commensurabile, & ipsum Rationale est.* Ad propos. 19.

27 *RECTA linea potens spatium Irrationale, Irrationalis est.* Ad propos. 21.

28 *DVAS, aut plures quotcunque lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire.* Ad propos. 21.

29 *PROPOSITIS quotcunque Rationalibus lineis potentia solum commensurabilibus, inuenire adhuc aliam, quæ omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum.* Ad propos. 21.

30 *LINEA media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Irrationalis est, quæ vocatur Media.* Ad propos. 22.

31 *OMNE spatium Medium æquale est cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, si ipsum sub talibus iam non contineatur.* Ad propos. 22. & 23.

32 *SPATIVM Medio spatio commensurabile, Medium est.* Ad propos. 24.

33 *DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles:*

Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire. Ad propos. 24.

34 *RECTANGVLVM sub duabus Medijs longitudine & potentia incommensurabilibus contentum, neque Rationale est, neque Medium, sed æquale alteri cuipiã rectangulo, quod continetur sub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.* Ad propos. 26.

35 *RATIONALE superat Rationale Rationali.* Ad propos. 27.

36 *DVOS numeros planos similes inuenire.* Ad propos. 29

37 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.* Ad propos. 29.

38 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum excessus sit numerus quadratus.* Ad propos. 29.

39 *DVOS numeros quadratos inuenire, quorum excessus non sit numerus quadratus.* Ad propos. 29.

40 *DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.* Ad propos. 29.

41 *DVOS numeros inuenire, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum.* Ad propos. 29.

42 *SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris. Et vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum maioris.* Ad propos. 31.

43 *SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.* Ad propos. 32.

44 *SI recta linea secetur in duas partes inæquales: erit vt vna pars ad alteram, ita rectangulum sub tota & illa parte, ad rectangulum sub tota & hac altera parte contentum.* Ad propos. 33.

45 *SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, vna autẽ secetur bifariam: erit rectangulum sub ipsis contentum, duplum rectanguli, quod sub inæqua linea, & dimidia parte lineæ sectæ continetur.* Ad propos. 33.

46 *FIERI* potest, *vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale.* Ad propos. 34.

47 *DVO spatia Rationalia Rationale spatium componunt.* Ad propos. 34.

48 *INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.* Ad propos. 36.

49. *QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.* Ad propos. 38.

50. *SI recta linea non bifariam secetur, erit compositum ex quadratis partium maius quam rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius linea, qua maior pars minorem superat.* Ad propos. 39.

51 *SI recta linea in partes inæquales secetur, & rursus in alias partes inæquales: erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partium minus inæqualium simul.* Ad propos. 42.

52 *SI recta linea secta sit vtcunque: erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata. Itē rectangulum contentum sub tota, & vna parte, medium proportionale inter quadratum totius linea, & quadratum dicta partis.* Ad propos. 54.

53 *EI, quæ est ex binis nominibus, potentia tantum commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, sed non semper ordine eadem.* Ad propos. 67.

54 *EI, quæ est ex binis Mediis, potentia tantum commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.* Ad propos. 68.

55 *RECTA linea, quæ ex binis nominibus, & reliqua Irrationales per compositionē factæ ipsam subsequentes, neque ipsi Mediæ, neque inter se eadem sunt.* Ad propos. 73.

56 *RECTA linea media proportionalis secundum Analogiam Arithmeticā inter duo nomina cuiusuis linea Irrationalis, quæ per compositionē fit, est quoque Irrationalis eadē illi, inter cuius nomina media existit.* Ad propo. 73

57 *SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.* Ad propos. 74.

58 *SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis prima, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome prima.* Ad propos. 75.

58 *SI à maiori nomine eius, qua ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Media Apotome secunda.* Ad propos. 76.

60 *SI à maiori nomine linea Maioris minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.* Ad propos. 77.

61 *SI a maiori nomine eius, qua Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.* Ad propos. 78.

62 *SI a maiori nomine eius, qua bina Media potest, minus nomen auferatur: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autē cum Medio Medium totum efficiens.* Ad propos. 79.

63 *SI idem excessus sit inter primam magnitudinem & secundam, qui inter tertiam magnitudinem & quartam: erit vicissim idem excessus inter primam magnitudinem & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam: Ac proinde Quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habent quoque vicissim Arithmeticam Analogiam.* Ad propos. 79.

64 *RECTA linea Apotome potentia tantum commensurabilis, & ipsa Apotome est, sed non semper ordine eadem.* Ad propos. 104.

65 *APOTOME, & cætera ipsam consequentes Irrationales linea per detractionem facta, neque ipsi Media, neque inter se sunt eadem.* Coroll. propos. 112.

66 *FIERI potest, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus.* Coroll. prop. 115.

67 *NON solum linea, sed magnitudines etiam plana, ac solida incommensurabiles esse possunt.* Ad propos. 117.

IN VNDECIMO LIBRO.

1 *A puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur.* Ad propos. 13.

2 *SI fuerint duo plana parallela: Rectæ lineæ, quæ ad*

vnum eorum recta fuerit, ad reliquũ quoque recta erit. Ad propos. 14.

3 *DATO plano, per datum punctum, quod in eo non sit, parallelum planum ducere.* Ad propos. 15.

4 *QVAE eidem plano parallela, & inter se sunt parallela: Vel si concurrunt, vnũ planũ efficiunt.* Ad propos. 16.

5 *SI in planis parallelis duo anguli sint aquales, & linea vna vnius anguli, linea vni alterius anguli parallela: Erit quoque altera linea alteri linea parallela, si modo ducta sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti.* Ad propos. 16.

6 *SI duo, aut plures linea recta in vno plano existentes secentur quotuis lineis parallelis: Segmenta illarum linearum inter parallelas proportionalia erunt.* Ad propos. 17.

7 *DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas: parallela sunt. Et duorũ planorum parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterũ ad idem rectum.* Ad propos. 18.

8 *PER rectam in plano quouis datam, planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum.* Ad propos. 18.

9 *SI Prisma quodcunque secetur plano aduersis planis parallelis, erit vt basis ad basem, ita solidum ad solidum.* Ad propos. 25.

10 *SI Prisma quodcunque secetur plano aduersis planis parallelo: sectio est figura aqualis, & similis planis oppositis.* Coroll. propos. 25.

11 *SOLIDA parallelepipeda aqualia super eandem basim, siue insistentes linea in eisdem collocentur rectis, siue non: in eadem sunt altitudine.* Ad propos. 30.

12 *SOLIDA parallelepipeda aqualia super aquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda aqualia in eadem altitudine, super aquales sunt bases, si non habuerint basim eandem.* Ad propos. 31.

13 *SI solida parallelepipeda inter se sunt, vt bases: ipsa erunt sub eadem altitudine.* Ad propos. 32.

14 *SI fuerint quatuor linea recta proportionales continue: vt est prima ad quartum, ita erit parallelepipedum su-*

per primam descriptum, ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundã. Coroll. propos. 33.

15 PRISMATA, quorum bases sunt triangula super eandem basim, vel æquales, & in eadem altitudine, sunt inter se æqualia. Ad propos. 34.

16 PRISMATA, quorum bases sunt triangula, sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases. Ad propos. 34.

17 PRISMATA similia, quarum bases sunt triangula, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Ad propos. 34.

18 PRISMATVM æqualium, quorum bases sunt triangula, bases & altitudines reciprocantur. Et quorum prismatum triangulares bases habentium bases & altitudines reciprocantur, illa sunt æqualia. Ad propos. 34.

19 SI fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ æquales insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique: Erunt a punctis extremis linearum sublimium ad plana angulorum primo positorum demissæ perpendiculares inter se æquales. Coroll. propos. 35.

20 SI parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto: Erunt tres rectæ lineæ continuæ proportionales. Ad propos. 36.

21 SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterque descripta ex eis, proportionalia. Et si tria solida parallelepipeda, quæ & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia: & ipsæ tres rectæ lineæ proportionales erunt. Ad propos. 37.

22 SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si prismata triangulares bases habentia, quæ & similia, similiterque describuntur, fuerint proportionalia: Et ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt. Ad propos. 37.

23 SI fuerint tres rectæ proportionales, erunt & prismata triangulares bases habentia, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia. Et si tria prismata

triangulares baſes habentia, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribantur, fuerint proportionalia: Et ipſa tres rectæ lineæ proportionales erunt. Ad propoſ. 37.

24 *IN omni parallelepipedo diametri ſe mutuo bifariam ſecant in vno puncto.* Coroll. propoſ. 39.

25 *SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrũ: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.* Ad propoſ. 39.

IN DVODECIMO LIBRO.

1 *CIRCVLVS ad circulum eſt, vt polygonum in illo deſcriptum ad polygonum ſimile in hoc deſcriptum.* Coroll. propoſ. 2.

2 *SI pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes: ipſæ erunt ſub eadem altitudine.* Ad propoſ. 5.

3 *PYRAMIDES triangulares eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtituta: ſunt inter ſe æquales. Et pyramides triangulares æquales ſuper eandẽ, vel æquales baſes eandem habent altitudinem. Item pyramides triangulares æquales, eandemque habentes altitudinem: baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem.* Coroll. propoſ. 5.

4 *PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes: eandem habent altitudinem.* Ad propoſ. 6.

5 *PYRAMIDES eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes quaslibet, vel ſuper eandem conſtituta: ſunt inter ſe æquales. Et pyramides æquales ſuper æquales baſes quaslibet, vel ſuper eandem conſtructæ: eandem habent altitudinem. Item pyramides quarumlibet baſium æquales, eandemque habentes altitudinem: æquales habent baſes, ſi non habuerint eandem.* Coroll. propoſ. 6.

6 *PYRAMIS qualibet tertia pars eſt priſmatis, quod eandem habet & baſem, & altitudinem: Siue, Priſma quodlibet triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim, & altitudinem.* Coroll. 1. propoſ. 7.

7. PY-

7. *PYRAMIS qualibet tertia pars est Prismatis, quod aqualem habet & basem, & altitudinem, licet basis vnius plura vel pauciora latera contineat, quam basis alterius.* Ad propos. 7.

8 *PRISMATA sub eadem altitudine, quascunque habeant bases: inter se sunt, vt bases. Et prismata quarumcunque basium, si inter se sint, vt bases: sub eadem sunt altitudine.* Ad propos. 7.

9 *PRISMATA eiusdem altitudinis super eandem, vel aquales bases quascunque: inter se sunt aqualia. Et Prismata aqualia super aquales bases quascunque, vel super eandem: in eadem sunt altitudine.* Coroll. 2. propos. 7.

10 *PYRAMIDES similes, quarum bases plura latera, quãtria, continent: proportionem habent homologorum laterum triplicatam.* Coroll. propos. 8.

11 *PRISMATA similia quarumcunque basium: proportionem habent laterum homologorum triplicatam.* Ad propos. 8.

12 *PYRAMIDES multangula similes diuiduntur in pyramides triangulares similes, & numero aquales, & homologas totis.* Ad propos. 8.

13 *PRISMATA multangula similia diuiduntur in prismata similia triangulares bases habentia, & numero aqualia, & homologa totis.* Ad propos. 8.

14 *PYRAMIDVM aqualium quascunque bases habentium, reciprocantur bases, atque altitudines. Et quarum pyramidum quascunque bases habentium, reciprocantur bases, atque altitudines; illa sunt aquales.* Ad propos. 9.

15 *PRISMATVM quorumlibet aqualium reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum prismatum bases, atque altitudines reciprocantur, illa inter se sunt aqualia.* Ad propos. 9.

16 *OMNIS conus siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni, & cylindri.* Ad propos. 10.

17 *CONI, & cylindri sub eadem altitudine, siue ambo*

sint

sint recti, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus: inter se proportionem habent, quam bases. Ad propos. 11.

18 *SI coni & cylindri inter se sint, vt bases: ipsi sub eadem altitudine erunt.* Ad propos. 11.

19 *CONI, & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel aquales bases constituti, siue ambo sint recti, siue scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus: inter se sunt aquales.* Coroll. propos. 11.

20 *CONI, & cylindri aquales super eandem, vel aquales bases in eadem sunt altitudine. Et coni, ac cylindri aquales in eadem altitudine super aquales bases sunt, si non habuerint eandem.* Coroll. propos. 11.

21 *CONI, & cylindri scaleni similes, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.* Ad propos. 12.

22 *CONI, & cylindri scaleni super aqualibus basibus, vel etiam si vnus sit rectus, & alter scalenus: inter se sunt, vt altitudines.* Ad propos. 14.

23 *SVPER aqualibus basibus prismata, parallelepipeda, & pyramides: inter se sunt, vt altitudines.* Ad propos. 14.

24 *CONI, & cylindri tam recti, quam scaleni: Item prismata, parallelepipeda & pyramides, si sint, vt altitudines. bases habent aquales.* Ad propos. 14.

25 *CONORVM, & cylindrorum aqualium, siue ambo scaleni sint, siue vnus rectus, & alter scalenus: bases & altitudines reciprocantur. Et quorum conorum, & cylindrorum, siue ambo sint scaleni, siue vnus rectus & alter scalenus, bases & atiltudines reciprocantur: illi sunt aquales.* Ad propos. 15.

26 *SI duobus circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum aquilaterum, & parium laterum inscribatur minorem circulum non tangens, & ab extremitate vnius lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum perpendicularis ducatur: hæc nullo modo circulum minorem tangit, sed extra ipsum cadit.* Coroll. propos. 16.

27 *DVO polyedra similia in duabus sphæris descripta, proportionem habent triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri.* Coroll. propos. 17.

18 *SPHAERA ad sphaeram est, vt polyedrum in illa descriptum, ad polyedrum in hac descriptum.* Coroll. propos. 18.

IN TERTIODECIMO LIBRO.

1 *SI recta inaequaliter secetur, & minus segmentum assumens dimidium maioris segmenti quintuplum possit eius, quod à dimidia maioris segmenti describitur, quadrati: Recta illa linea secta erit extrema & media ratione.* Ad propos. 3.

2 *SI recta linea inaequaliter secetur, sitque quadratum totius, una cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti: Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.* Ad prop. 4.

3 *SI recta linea extrema ac media ratione secetur: tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Et si recta linea inaequaliter secetur, totaque assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod à maiori segmento describitur, quadrati. Recta illa linea extrema & media ratione secta est.* Ad propos. 4.

4 *SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus: erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & minus segmentum est illa linea, quae prioris lineae minus segmentum erat.* Ad propos. 5.

5 *SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineae.* Ad propos. 5.

6 *SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis: Erit minus segmentum Apotome:* Ad propos. 6.

7 *RECTA, quae angulum Pentagoni aequilateri, & aequianguli subtendit, parallela est opposito lateri.* Ad propos. 8.

8 *SI latus hexagoni in quopiam circulo descripti secetur extrema & media ratione: maius illius segmentum est la-*

tus decagoni in eodem circulo descripti. Ad propos. 9.

9 SI linea diuisa extrema ac media ratione, maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli: erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli: Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli, erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli. Ad propos. 9.

10 LINEA recta, qua ex centro circuli ducta diuidit arcum quempiam bifariam, diuidit quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Coroll. 1. propos. 10.

11 DIAMETER circuli ex angulo quouis pentagoni in eo descripti ducta, & arcum, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtendit, & latus ipsum oppositum bifariam, & ad angulos rectos. Coroll. propos. 10.

10 IN dato circulo latera pentagoni, & decagoni vna eademque opera inuenire. Ad propos. 10.

11 DIAMETER circuli potentia est sesquitertia lateris trianguli aequilateri in eo circulo descripti. Coroll. 1. propos. 12.

12 SI in circulo triangulum aequilaterum describatur: Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque vicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur à latere opposito. Ad propos. 12.

13 SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quae sit media proportionalis inter segmenta linea: Sumi circulus circa illam lineam rectam descriptus, transibit per extremum punctum linea perpendicularis. Ad propos. 13.

14 DIAMETER sphara potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basem pyramidis in ea sphara constructa descripti. Coroll. 1. propos. 13.

15 LINEA perpendicularis ex centro sphara ad planum basis pyramidis in ea sphara cõstructa demissa, sexta pars est diametri sphara, & tertia pars semidiametri. Coroll. 2. propos. 13.

16 ALTITVDO pyramidis in sphara descripta, duas tertias partes diametri sphara continet. Coroll. 2. prop. 13.

17 IN Octaedro tres diametri se mutuo ad angulos rectos secant in centro sphaerae: nec non & tria quadrata ex lateribus Octaedri composita se mutuo ad angulos rectos secant. Coroll. 1. propos. 14.

18 OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes, & equales, quarum basis communis est quadratum ex Octaedri lateribus compositum. Coroll. 2. propos. 14.

19 SI Tetraedrum, et Octaedrum in eadem sphaera describãtur; erit Tetraedri latus potentia sesquitertium lateris Octaedri. Coroll. 3. propos. 14.

20 BASES Octaedri oppositae, sunt parallelae. Coroll. 4. propos. 14.

21 OMNES diametri cubi sunt inter se aequales, seseq; mutuo bifariam secant in centro sphaerae: nec non & rectae lineae, quae centra basium cubi oppositarum coniũgunt, bifariam in eodem centro diuiduntur. Coroll. 1. propos. 15.

22 POTENTIA diametri sphaerae aequalis est potentijs laterum Tetraedri, & cubi simul sumptis. Coroll. 2. prop. 15.

23 DIAMETER sphaerae potentia est quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri pentagonum constituentia ambientis. Coroll. 1. propos. 16.

24 DIAMETER sphaera composita est ex latere hexagoni, hoc est, ex Semidiametro, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli, qui circa quinque Icosaedri latera describitur. Coroll. 2. propos. 16.

25 ICOSAEDRI latera opposita, sunt parallela. Coroll. 3 propos. 16.

26 SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum est latus Dodecaedri in eadem sphaera cum cubo descripti. Coroll. 1. propos. 17.

27 LATVS cubi aequale est lineae rectae subtendenti angulũ pentagoni Dodecaedri eadem sphaera comprehẽsi. Coroll. 2. propos. 17.

28 SI recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum est latus Dodecaedri, maius segmentum est latus cubi eiusdem sphaerae. Coroll. 2. propos. 17.

29 IN Dodecaedro sunt sex latera, quorum bina opposita

sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos, à tribus lineis rectis aqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Coroll. 3. propos. 17.

30 *SI recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione: maius segmentum est latus cubi, minus vero latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi,* Coroll. 4. propos. 17.

31 *PRAETER quinque corpora regularia, qua Euclides hoc lib. 13. cõstruxit, nullũ aliud dari potest.* Ad prop. 18

32 *QVOTNAM latera, & angulos quoduis Regularium solidorum contineat.* Ad propos. 18.

33 *CVBVS, & Octaedrum: Item Icosaedrum, & Dodecaedrum, reciproca sunt, quod ad numerum basium, & angulorum solidorum attinet: Solum Tetraedrum cum nullo reciprocatur, sed tot bases habet, quot angulos solidos.* Ad propos. 18.

IN QVARTODECIMO LIBRO

1 *LINEA perpendicularis ducta ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, secat arcum, quem dicta hæc linea subtendit, bifariam.* Coroll. 1. propos. 1.

2 *LINEA perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta, aqualis est vtrique linea simul, & ei, qua ex centro ad latus trianguli aquilateri eidem circulo inscripti ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni.* Coroll. 2. propos. 1.

3 *LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum eandem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni aquilateri, & equianguli ad latus ipsius pentagoni.* Ad propos. 2.

4 *SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione: maius segmentum aquale est perpendiculari ex eodem centro ad latus trianguli aquilateri ducta, minus vero aquale est dimidio lateris decagoni in eodem circulo descripti.* Ad propos. 2.

5 *SI in sphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inscribantur: quadratum lateris cubi, & quadratum lateris Dodecaedri, utraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.* Coroll. propos. 3.

6 *SVPERFICIES cuiuslibet Dodecaedri ad superficiē cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum cōtentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus.* Coroll. propos. 7.

7 *SI ex centro circuli triangulī Tetraedri, vel Octaedri, sine quadratum cubi circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus. Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidē sumptū sexies, superficiei Tetraedri: In Octaedro vero, & cubo, duodecies sumptum, superficiei Octaedri, & cubi æquale.* Ad propos. 7.

8 *RECTANGVLVM comprehensum sub perpendiculari ab angulo trianguli Icosaedri ad vnū eius latus ducta, & sub quinque sextis partibus lateris cubi eidem sphæra, in qua Icosaedrum inscripti, æquale est pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.* Coroll. propos. 8.

9 *QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæra, eandem habent latera cubi, & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.* Ad propos. 10.

10 *SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habet eandem proportionem, quam latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 6. huius lib. sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.* Ad propos. 10.

11 *SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.* Ad propos. 10.

12 *SI planum sphæram secans trāsierit per centrum, efficietur circulus idem centrum habens, quod sphæra: Si verò planum secans per sphæra centrum non transierit, efficietur*

circulus habens aliud centrum quam sphæra, illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Coroll. propos. 10.

13. *CIRCVLI in sphæra æquales æqualiter distant à centro sphæræ. Et circuli æqualiter distantes à centro sphæræ, æquales sunt.* Ad propos. 10.

14 *EADEM proportio est lateris cubi ad latus Icosaedri, quæ superficiei Dodecaedri ad superficiē Icosaedri: Et linea potentis totā quamcunque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad lineam potentem totam eandem, & minus segmentum illius. Et Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ.* Coroll. propos. 11.

15 *LINEA perpendicularis ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissa secat & angulum, & latus bifariam.* Coroll. propos. 12.

16 *OMNE triangulum æquilaterum, cuius latus sit Rationale, est superficies Media.* Coroll. propos. 13.

17 *LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad basem oppositā ducta sesquialtera est eius, quæ inter centrum trianguli, & dictum angulum interijcitur: Hæc autem inter centrum trianguli, & dictum angulum interiecta dupla est eius perpendicularis, quæ ex centro trianguli, ad basem eiusdem ducitur.* Coroll. propos. 18.

18 *SOLIDVM, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale est cubo. Vel solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale est cubo.* Coroll. propos. 20.

19 *SOLIDVM, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basem ducta, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est propositæ corpori regulari.* Ad propos. 20.

20 *LINEÆ perpendiculares coniungentes centra circulorum, qui bases oppositas tam cubi, quam Octaedri in eadem sphæra circumscribunt, inter se æquales sunt.* Coroll. propos. 21.

21 *ALTITVDO Octaedri ad altitudinem Tetraedri eiusdem sphæræ est, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri.* Coroll. prop. 22.

22 *DIAMETER sphæræ ad latus Tetraedri est, vt latus Octaedri ad latus cubi eiusdē sphæræ.* Coroll. propos. 22.

23 *SI linea quauis recta secetur extrema ac media ratione, at alia linea potētia huius sesquialtera sit latus Octaedri: maius segmētum eris latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum describitur.* Coroll. propos. 25.

24 *SI in triangulo aquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppositum: quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis est inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale est ipsi triangulo.* Coroll. propos. 29.

25 *DIAMETER sphæræ potentia est dupla sesquiquartæ axis Tetraedri, seu altitudinis ipsius; atque adeo diameter longitudine est sesquialtera axis, vel altitudinis Tetraedri.* Coroll. 1. propos. 31.

26 *AXIS, seu altitudo Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti est, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam.* Coroll. 2. propos. 31.

27 *PRISMA eandem habens & basem, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto.* Coroll. propos. 32.

IN QVINTODECIMO LIBRO.

1 *SI in Tetraedro Octaedrum inscribatur, diuidetur Tetraedrum bifariā tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant.* Coroll. propos. 2.

2 *RECTAE lineæ centra basium cubi oppositarum connectentes se mutuo & bifariam, & ad angulos rectos secant.* Coroll. propos. 3.

3 *IDEM est centrum Tetraedri, ac sibi inscripti Dodecaedri.* Coroll. propos. 5.

4 *SI Tetraedrum Octaedro inscribatur, erunt quatuor bases Tetraedri octo basibus Octaedri parallela, singula videlicet binis oppositis.* Coroll. 1. propos. 6.

5 *SI in Octaedro Tetraedrum inscribatur; recta, qua centra basium Octaedri oppositarum coniungit, sesquialtera est axis Tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo Tetraedri ad basim oppositam deducta.* Coroll. 2. propos. 6.

6 *RECTA subtendens vnam angulum pentagoni aquilateri; & equianguli, parallela est opposito lateri.* Coroll. propos. 8.

7 *DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum inscribitur.* Ad propos. 13.

8 *SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti.* Ad propos. 13.

9 *LATVS cubi aquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.* Ad propos. 13.

10 *RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens, aqualis est lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.* Ad propos. 13.

11 *DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.* Ad propos. 14.

12 *BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis aqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad anguios rectos secantibus.* Ad propos. 14.

13 *SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.* Ad propos. 14.

14 *ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita sunt inter se parallela.* Ad propos. 14.

15 *IDEM est centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti.* Coroll. propos. 15.

16 *SI duo latera trianguli aquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmentum, alte-*

rius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum: Recta connectens dictas sectiones duplum potest minoris segmenti. Coroll.1.propos.16.

17 *SI in Octaedro Icosaedrum describatur, collocabuntur octo bases Icosaedri in octo basibus Octaedri, idemque erit centrum basis Octaedri, & basis Icosaedri.* Coroll. 2. propos. 16.

18 *IDEM centrum est Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri.* coroll.3.propos.16.

19 *IDEM est centrum pyramidis, & cubi in ea descripti.* Coroll. 1. propos.18.

20 *RECTA coniungens bifarias sectiones oppositorum laterum pyramidis, transit per centrum pyramidis, triplaq; est lateris cubi in pyramide descripti.* Coroll.2.prop.18.

21 *IDEM est centrum pyramidis, & Octaedri in ea descripti.* Ad propos. 18.

IN SEXTODECIMO LIBRO.

1 *LATVS Icosaedri Octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ diuisæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo basis Octaedri ductæ secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione.* Coroll.propos.3.

2 *LATVS Icosaedri in pyramide descripti, est Apotome.* Coroll. propos.4.

3 *LATVS Octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in ipso descripti, vel eius rectæ extremæ, ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri Octaedro inscripti.* Coroll.propos.11.

4 *DIAMETER Icosaedri binas rectas potest, diametrũ scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis.* Coroll.propos.15.

5 *IDEM centrum est Octaedri, atque cubi sibi inscripti.* Coroll.1.propos.23.

6 *OCTAEDRVM ad sibi inscriptum cubum eandem habet rationem, quam eorum latera quadrata habent.* Coroll.2. propos.23.

7 DODECAEDRVM a duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est aequalis, latitudo autem tertiæ partis minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit: Alterius vero & longitudo & latitudo lateri cubi aequalis est, altitudo autē minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit: ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint aequales. Coroll. propos. 18.

8 PYRAMIS excedit duplum Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifurias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Coroll. propos. 31.

9 DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, datoque in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam. Ad finem lib. 16.

10 SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ parallelæ abscindant arcus similes: erunt duæ rectæ coniungētes extrema vnius rectæ cum centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cum centro coniungunt. Ad finem lib. 16.

11 SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad easdem partes centrorum: Rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque, & parallelæ sunt, & ad plana circulorum perpendiculares. Ad finem lib. 16.

12 SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad easdem partes centrorum: Rectæ harum parallelarū extrema puncta non ad easdem partes coniungentes, in centro sphæræ se intersecāt, ac proinde diametri sphæræ erūt, & inter se æquales: Rectæ vero earundem parallelarum extrema puncta ad easdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter se sunt, et cum parallelis rectos angulos constituunt. Ad finem lib. 16.

13 *IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.* Ad finem lib. 16.

14 *IN data sphæra Pyramidem aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

15 *IN data sphæra Octaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

16 *IN data sphæra cubum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

17 *IN data sphæra Icosaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

18 *IN data sphæra Dodecaedrum aliter, quam ab Euclide factum est, describere.* Ad finem lib. 16.

19 *SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera: erũt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul.* Ad finem lib. 16.

20 *OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descriptæ, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.* Ad finem lib. 16.

21 *SI Octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpendicularis e centro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim Octaedri, & cubi ducta.* Ad finem lib. 16.

22 *SI cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur: superficies Icosaedri superficie cubi maior est.* Ad finem lib. 16.

23 *DODECAEDRVM Icosaedro in eadem sphæra maius est.* Ad finem lib. 16.

24 *ICOSAEDRVM cubo in eadem sphæra maius est.* Ad finem lib. 16.

25 *CVBVS Octaedro in eadem sphæra maius est.* Ad finem lib. 16.

26 *OCTAEDRVM Tetraedro in eadem sphæra maius est.* Ad finem lib. 16.

27 *SVPERFICIES conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri in eadem sphæra: Et superficies Icosaedri maior superficie cubi: Et superficies cubi maior*

superficie Octaedri: Superficies denique Octaedri maior superficie Tetraedri. Ad finem lib. 16.

28 *ANGVLVM inclinationis duarum basium cuiuscunque corporis regularis inuenire.* Ad finem lib. 16.

29 *OMNES inclinationes basium cuiuscunque corporis regularis, aquales inter se sunt.* Ad finem lib. 16.

ITAQVE in Codicibus Gracis habentur in primo libro propositiones 48: *In secundo*, 14. *In tertio*, 37. *In quarto*, 16: *In quinto*, 25: *In sexto*, 33: *In septimo*, 41: *In octauo*, 27: *In nono*, 36: *In decimo*, 117: *In undecimo*, 40: *In duodecimo*, 18: *In tertiodecimo*, 18: *In quartodecimo*, 11: *In quintodecimo*, 5: *Atque in uniuersum*, 486.

PROPOSITIONES vero addita, in quinto libro, 9: *In quartodecimo*, 21: *In quintodecimo*, 16: *In sextodecimo*, 31: *Atque omnes numero*, 77.

IN scholijs denique, & corollarijs demonstrantur propositiones in primo libro, 108: *In secũdo*, 21: *In tertio*, 54: *In quarto*, 23: *In quinto*, 26: *In sexto*, 99: *In septimo*, 33: *In octauo*, 37: *In nono*, 40: *In decimo*, 67: *In undecimo*, 25: *In duodecimo*, 28: *In tertiodecimo*, 33: *In quartodecimo*, 27: *In quintodecimo*, 21: *In sextodecimo*, 29: *Quæ omnes conficiunt numerum* 671.

IN uniuersum ergo 1234. *propositiones in nostro Euclide demonstrantur.*

IN EVCLIDIS ELEMENTA PRAEFATIO.

SI QVIS forte miratur, cur post tot præclarissimos in Euclidis Elementa Geometrica Commentarios ab egregijs, & in primis Mathematicarum rerum peritis Scriptoribus editos, nouas adhuc ipsi commentationes conscripserimus; is facile sibi persuadebit, non temere id à nobis esse factum, si consilij nostri rationem cognouerit. Cum enim longa diuturnaq. experientia nobis esset perspectum, atque exploratum, eam esse vtilitatem, atque adeo necessitatem horum elementorum, vt frustra quisquam se speret sine ipsorum præsidio, acutissimas, subtilissimasq. Archimedis, Apollonij, Theodosij, Menelai, Ptolemæi, cæterorumq. illustrium Mathematicorum demonstrationes posse percipere; vehementer dolebamus, tam insignem & illustrem auctorem à ple-

risque omnino negligi, à perpaucis vero pro dignitate tractari, ita vt vix hoc nostro seculo reperiantur, qui sedulam operam, ac studium in perdiscendis his elementis ponant; ob eam potissimum, vt arbitror, causam, quod difficultate rerum, quas tractant, atque obscuritate deterreantur, nullumq, habeant hac in re ducē, quem sibi citra erroris periculum sequendum proponant. Extant quidem Commentarij Campani, ac Theonis in singulos Euclidis libros sane eruditi, qui satis esse possint cuiuis ad facile consequendam horum elementorum doctrinam: Sed alter secutus in omnibus est traditionem Arabum, qui magna ex parte Euclidis ordinem, ac methodum peruerterunt, verbaq. propositionum eiusdem locis non paucis immutarunt, vt verus germanusq. auctoris sensus perdifficile possit intelligi, id quod maxime in 10. lib. perspicitur: Alter (Theonem intelligo) pene in numeris mendis, vitijsq. incuria librariorum ita est depranatus, & propter notas Græcas, quæ in eius demonstranionibus adhibentur, obscuras illas ac male expressas adeo impeditus, vt magnam difficultatem inexercitatis ingenijs, perplexitatemq. gignat. Quo fit, vt Euclidem sine maximo labore ac studio nemo percipiat. Iam si alij ad nostram vsque memoriam maius aliquod studium operamq. in hoc munus interpretandi Euclidis elementa contulerunt, hi vel sex priores tantum libros exposuerunt: vel si qui in vniuersum Euclidem Commentarios edide

runt,

runt, hi persæpe, relictis antiquorum demonstrationibus certissimis, proprias alias, ac nouas confinxerunt, quæ plerunq. non tam firmæ sunt, neque rem ipsam simpliciter & absolute conficiunt; præsertim quòd modo è propositionibus voces quasdã perperam detrahunt, modò alias inepte apponunt, modo denique nonnullas temere immutant, vt merito de vero proprioq. Euclidis sensu dubitare quis possit. Qua tamen in re Federicum Commandinum Vrbinatem, Geometram non vulgarem excipio, qui nuper Euclidem Latine redditum in pristinum nitorem restituit, paucis locis exceptis, in quibus nõ parum à vero aberrauit, vt suo loco monebimus. Quæ cum ita sint, resq. ac scientia tam præclara digna sit, quæ ope, studio, industria ab ijs adiuuetur, qui aliquid ad hoc momenti afferre possunt, post diuturni temporis in rebus Mathematicis operam collocatam; faciendum putauimus, vt lucubrationes nostras ac vigilias studiosis harum rerum nonnihil (nisi fallimur) subsidij allaturas in publicum ederemus. Accessit editionis causa altera: Nam cum Euclides, propter singularem vtilitatem, instar enchiridij, manibus semper debeat circumgestari, neque vnquam deponi ab his, qui fructum aliquem serium ex hoc suaui Matheseos studio capere volunt, in eoq. progredi; id vero in hunc diem, exemplaribus omnibus maiore forma impressis, necdum factum videamus; hoc nostra editio certe, si nihil aliud attulerit commodi, atque

emolumenti. Sunt enim hi noſtri Commentarij in vniuerſum Enclidem conſcripti commodiore nunc forma, quam vulgo cæteri, (id quod magnopere à nobis, qui nos audierunt, efflagitabant,) volumineque editi, vt facile iam queant, nulloque negotio, e loco in locum, cum res tulerit, ferri atque portari. Nunc quo modo, via, ac ratione res tota à nobis pertracte tur, quidq. in hac interpretatione præſtitum ſit, paucis accipe. Demonſtrationes aliorum, maxime Theonis, quas quidem ipſius eſſe Euclidis, non leuibus argumentis adducti cum pleriſque aſſeueramus, & Proclus etiam teſtatur, breuiores, quantum per rei difficultatem licuit, vel certe planiores, quando illud non potuimus, dilucidioresq. reddere conati ſumus. Non enim illas nude, ac totidem verbis, quot erant ſcriptæ, propoſuimus. Etenim ea eſt interdum illarum breuitas, vt illud accidat, quod ab elegantiſsimo Poeta dictum eſt: *Breuis eſſe laboro, obſcurus fio.* Interdum etiam cum breuius, atque ſuccinctius efferri poſſint, magna, ob longiorem, quàm ſatis eſt, ſermonem, affertur moleſtia legenti. Quare vtrumque vitantes, eas, velut μεταφρασικῶς, atque ad eum fere modum tradidimus, quem, cum publicè Euclidem interpretaremur, obſeruauimus; hac etiam re auditorum deſiderio, & voluntati, quantum eſt in nobis, ſatisfacere cupientes. Ita enim, noſtra ſententia, Euclides facilius à ſtudioſis, ijs prætertim, qui ceu tyrones, hæc Mathematica ſtudia nunc primum auſpi

cantur, ac maiore voluptate, vtilitateq. cognoscetur. Præter hæc adiunximus multis in locis varia problemata, ac theoremata scitu non iniucunda, neque à scopo Geometriæ aliena, quæ partim ex Proclo, Campano, alijsq. auctoribus decerpsimus, partim proprio (vt aiunt) Marte, assiduisq. meditationibus ipsi confeci mus. Data insuper in hoc diligens opera, vt definitiones Euclidis, præsertim obscuriores, & quæ aliquid visæ sunt habere difficultatis, (in quas plurimi, tanquam in scopulos quosdam incidentes, à recto cursu deflexerunt, & in errores varios atque absurdos, prorsusq. ab instituto disciplinæ abhorrentes dilapsi sunt,) dilucide atque perspicue, quoad eius fieri potuit, explicarentur; id, quod harum artium studiosi facile iudicabunt: Quæ res cum in ampliorem magnitudinem excresceret, quam vt vnius libri spatijs, hac præsertim forma commode includi possent, in duas partes totam tractationem diuisimus. Altera sex prioribus libris continetur: altera nouem reliquos, vna cum decimosexto ad comparationes quinque corporum regularium pertinente, quæ ex Francisco Flussate Candalla, vt Elementa hæc Geometrica euaderent perfectiora, adijcere voluimus, complectitur.

BENIGNO LECTORI.

QVONIAM superiorem editionem Elementorum Euclidis non ingratam fuisse Mathematicarum disciplinarum studiosis intelleximus, exhibemus tibi benigne Lector, alteram editionem priore illa multo locupletiorem: in qua scilicet varia tum problemata, tum theoremata, quæ rebus Mathematicis magnum adiumentum allatura, longo vsu, atque experientia comprobauimus, & quæ in priore editione desunt, adiecimus, plurimaq. loca subobscura clarioribus notis illustrauimus. Addidimus præterea nouam demonstrationem vndecimi axiomatis Euclidis, (quod in hisce Commentarijs est tertiumdecimum) quo vult, Si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq. partes angulos duobus rectis minores faciat, duas illas rectas lineas in infinitum productas, coituras tandem ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores: addidimus, inquam, nouã demon-

strationem à nobis nuper inuentam, quam non iniucundam studioso Lectori futuram speramus, quod eo principio tota doctrina de lineis parallelis, quæ immensa propemodum est, atque infinita, nitatur. Quanquam enim idem illud principium Arabes quoque olim demonstrasse iam pridem acceperam: quia tamen eorum demonstrationem diu ac diligenter quæsitam videre mihi non licuit, (nondum enim ex Arabica in Latinam linguam conuersa est) coactus sum banc meo, vt aiunt, Marte excogitare, vt nullus in eo principio tam necessario iam dubitationi locus esset. Neque enim Procli demonstratio, quam ad propos. 28. lib. 1. Euclidis de re eadem affert, omni ex parte absoluta, ac Geometrica censeri potest; cuius rei causa eodem loco à nobis explicata est. Deinde ex Pappo Alexandrino inscriptiones omnium figurarum regularium in circulo, beneficio lineæ certæ quadam ratione inflexæ, perfecimus: quod ante à Mathematicis desiderabatur. Ex quo eadem linea via quædam & ratio ad circulum quadrandum (res tot seculis à doctissimis viris exagitata) conficitur: quod suo loco docebitur. In definitionibus porrò quinti libri aperte ostendimus, cur Euclides magnitudines proportionales & improportionales per æquemultiplicium habitudinem describere coactus sit. Postremo (vt alia omittam) omnes operationes fractionum vulgarium, quæ in Arithmetica practica declarari solent, Geometrice demonstrauimus. Hæc fere præcipua sunt, quæ

hac posteriore editione ad Commentarios nostros in Euclidem accesserunt. Cætera vel theoremata, vel problemata, quibus editio hæc posterior priorem superat, quæ sane plurima sunt, & Euclidis propositionibus sparsim inserta, inter legendum facile comperies, si vtramque editionem cum altera conferens attentius paulo considerabis. Nunc quia hæc Euclidis elementa ostium atque aditum ad omnes alias disciplinas Mathematicas reserant, ac patefaciunt, operæ pretium fore duximus, antequam ad ipsa interpretanda aggrediamur, paucis commemorare, vndenam Mathematicæ disciplinæ hoc nomen acceperint: quæ sit earum diuisio: à quibus primum ortæ, & per quos deinde singulæ fuerint excultæ: quanta sit illarum præstantia atque vtilitas; & si qua sunt alia rei nostræ opportuna.

IN DISCIPLINAS MATHEMATICAS PROLEGOMENA.

MATHEMATICAE DISCIPLINAE cur sic dictæ sunt.

DISCIPLINAE Mathematicæ, quæ quidem circa quantitatem versantur omnes, nomen acceperunt à dictione Græca μάθημα, siue μάθησις, quæ significant disciplinam, seu doctrinam. Cur autem hæ artes de quantitate agentes nomen disciplinæ, vel doctrinæ inter reliquas omnes solæ sint adeptæ, duas potissimum causas apud probatos scriptores inuenio. Pythagorei enim, atque Platonici existimantes, animas rationales certo quodam ac determinato numero contineri, easq. de corpore in corpus migrare, (quod tamen Christiana fides falsum esse perspicue docet) testantur, eas nomen doctrinæ, siue disciplinæ obtinere, quod maxime ex ipsis nanciscamur recordationem, reminiscentiamq. illius scientiæ, quæ anima nostra, (vt eorum est error) antequam corpus informaret, erat prædita. Quod quidem facili, ac familiari quodam exemplo comprobare nititur Plato in dialogo, qui Menon inscribitur, vbi Socratem introducit puerum quendam interrogantem Geometrica quædam de quadrati dimensione, ad quæ licet in principio responderit, vt puer, gradatim tamen ascendens, eo deductus est, vt responderit id, quod tandem dicturus fuisset, si diutissime perdidicisset Geometriam. Alijs autem placet, ideo has artes præ cæteris nomen scientiæ, & doctrinæ sibi vendicare, quòd solæ modum rationemq. scientiæ retineant. Procedunt enim semper ex præcognitis quibusdã principijs ad conclusiones demonstrãdas, quod proprium est

munus

munus, atque officium doctrina, siue disciplina, vt & Aristoteles 1. Posteriorum testatur; neque vnquam aliquid non probatū assumunt Mathematici, sed quandocunque aliquid docere volunt, si quid ad eam rem pertinet eorum, qua ante docuerunt, id sumunt pro concesso, & probato: illud vero modo explicant, de quo ante nihil scripeum est. Quod quidem alias artes, disciplinasve non semper obseruare videmus, cū plerunque in confirmationem eorum, qua ostendere volunt, ea, qua nondum sunt explicata, demonstratave adducant.

DISCIPLINARVM MATHEMATICARUM diuisio.

PYTHAGOREI, quos deinde secuti sunt omnes propemodum Mathematici, atque Philosophi non pauci, Mathematicas disciplinas vniuersas in quatuor partes distribuerunt, Arithmeticam, Musicam, Geometriam, atque Astronomiam. Cum enim omnis quantitas, circa quam versantur, sit vel discreta, sub qua omnes numeri, vel continua, sub qua omnes magnitudines comprehenduntur, & vtraque tam secundū se, quàm comparatione alterius possit considerari; visum fuit illis consentaneum quatuor praedictas facultates instituere, qua vtramque quantitatem, produplici consideratione diligenter contemplarentur. Itaque Arithmetica agit de quantitate discreta secundum se, inquirendo & accuratè explicādo omnes numerorum proprietates, ac passiones. Musica tractat eandem quantitatem discretam, siue numerum comparatum cum alio, quatenus nimirum sonorum concentus respicit, atque harmoniam. Geometria de magnitudine, siue quātitate continua, secundum se quoque, vt immobilis existit, disputat. Astronomia denique eandem magnitudinē, vt est mobilis, considerat; qualia sunt caelestia corpora, prout continuo motu cientur. Ad has autem quatuor scientias Mathematicas, quarum Arithmetica & Geometria pura, Musica verò atque Astronomia mixta dicuntur, omnes alia quouis modo de quantitate agentes, qualis est Perspectiua, Geographia, & cetera huiusmodi, vel facile, vt ad capita, à quibus dependent, reduci possunt.

ALIA ratione à Gemino antiquo Geometra, & ab a-

liis,

lijs, vt auctor est Proclus in Commentarijs, quos in primum Euclidis librum edidit, Mathematica disciplina diuiduntur. Quam quidem diuisionem, quoniam eleganter, copioseque docet, ad quænam sese extendant Mathematica disciplina, ferme ad verbum ex Proclo iuxta interpretationem Francisci Barocij Patricij Veneti excerptam hic subijcere statui. Volunt itaque prædicti auctores, scientiarum Mathematicarum quasdam in intellectilibus duntaxat ab omni materia separatis, quasdam vero in sensilibus, ita vt attingant materiam sensibus obnoxiam, versari. Prioris generis statuunt duas longe primas, præcipuasq. scientias, Arithmeticam & Geometriã: In posteriori vero genere constituunt sex, Astrologiam, Perspectiuam, Geodasiam, Canonicam, siue Musicam, Supputatricem, atque Mechanicam. Astrologiam dicunt esse eam facultatem, quæ de mundanis ediſſerit motibus, de corporum cœlestium magnitudinibus, figuris & illuminationibus, à terra q. distãtijs, ac de alijs huiusmodi rebus. Huius rursum tres constituũtur partes; Gnomonica, quæ in horarũ dimensione, positu gnomonũ exercetur: Metheoroscopica, quæ elevationum differentias, siderumq. reperit distantias, necnon multa alia & varia Astrologica perdocet theoremata: & Dioptrica, qua planetarum, cæterarumq. stellarum distantias huiusmodi Dioptricis dignascit instrumentis. Perspectiuam aiunt à Geometria gigni, atque vti radijs visorijs, tanquam lineis, & angulis, qui ex hisce constituuntur oculorum radijs. Diuiditur autem in eam, quæ proprio nomine dicitur Perspectiua, quæ quidem reddit causam earum apparentiarum, quæ aliter, quam sint, sese nobis offerre solent, ob eorum, quæ sub visum cadunt, alios situs & distantias, vt parallelarum coincidentia, vel quadratorum, tanquam circulorum, aspectionis: Et in vniuersam specularem, qua circa varias, multiplicesq. versatur refractiones: Nec non in eam, qua Sciographice, hoc est, vmbrarum designatrix appellatur, qua ostendit, qua ratione fieri possit, vt ea, quæ in imaginibus apparent, haud inconcinna, vel deformia ob designatorum distantias, altitudinesq. videantur. Geodasiam appellant eam scientiam, qua res quantas metitur, vt materialium rerum aceruos

tan-

tanquam conos; & puteos, tanquam cylindros. Quod quidem non assequitur intellectilibus rectis lineis, vt Geometria, sed sensilibus tantum, interdum quidem certioribus quodam pacto, vt radijs Solaribus; interdum vero crassioribus, vt spartis & perpendiculo. Diuiditur hac, vt Geometria, in eam partem, qua plana, & in eam, qua solida dimetitur. Canonicam, siue Musicam, vocant eam scientiam, qua apparentes concentuum considerat rationes, sensusq. vbique vtitur adminiculo; & qua (vt Plato inquit) talis existit, vt menti aures ipsas praposuisse videatur. Supputatrix eadem apud ipsos est, qua apud nos Arithmetica practica. Hac enim numeros considerat, nõ vt in intellectilibus, sed vt sunt in sensilibus ipsis. Mechanica denique qua in cognitione rerum sensilium, materiaq. coniunctarum consistit, apud ipsos multiplex est. Quadam enim est instrumentorum effectrix, qua ὀργανοποιητικὴ vocatur, eorum, inquam, qua gerendis sunt bellis idonea, qualia sane Archimedes etiam fertur construxisse, Syracusas terra mariq. obsidentibus resistentia. Quadam mirabilium prorsus rerum effectrix, quae θαυματοποιητικὴ, dicitur; quippe qua alia quidem spiritibus maximo cum artificio construit, quemadmodum etiam Ctesibius, atque Heron operantur, alia autem ponderibus, quorum motus quidem inæquilibrium, status verò æquilibrium esse causam censendum est, vt Timaeus etiam determinauit; alia vero neruis, spartisq. animatas conuolutiones, ac motus imitantibus. Quadam est æquilibrantium omnino, & eorum, qua centroponderantia vocantur, cognitio. Quadam denique spherarum effectrix, qua σφαιροποιΐα appellatur, ad cælestium circumuolutionũ imitationẽ, qualem Archimedes etiã fabricatus est. Atque, vt vno verbo dicã, omnis, qua materiã mouẽdi vim habet. Hæ igitur sunt disciplinæ Mathematicæ apud antiquos. Militarẽ autẽ artem, eã inquã, qua ad instruendas, coordinandasq. pertinet acies, quam Graeci τακτικὴν vocant, vnam aliquam ex Mathematices partibus dicendam esse non censent, vt quidam alij voluere, sed vti eam volunt modo quidem arte supputandi, vt in enumerandis legionibus; modo vero Geodæsia, vt in diuidendis, dimetiendisq. castrametationi spatijs in campo.

Quem-

Quemadmodum neque Historicam, neque medendi artem Mathematices partem vllam esse dicunt, licet sæpenumero tum Historici, tum etiam Medici Mathematicis vtantur theorematibus; Rerum quidem gestarum scriptores, vel climatum situs referendo, vel vrbium magnitudines, & diametros, vel ambitus, circuitusue colligendo: Medici vero quamplurimas res in arte sua huiusce modi vijs dilucidando. Num vtilitatem, qua in Medicinam ab Astrologia peruenit, ipse etiam Hippocrates ostendit, ac fere omnes, qui cunque aliquid de opportunis temporibus, locisq. dixere. Eadem sane ratione ille etiam, qui acicbus instruendis operam accommodat, Mathematicis quidem vtetur theorematibus, nec tamen ob hoc erit Mathematicus, quamuis interdum quidem volens eam, qua numerosa est, pauciſſimam ostendere multitudinem, castra suosq. exercitus ad figuram circuli formet; interdum vero ad figuram quadranguli, vel quinquanguli, vel alterius cuiusdam multanguli, vbi plurimã apparere cupit. Hac igitur fere sunt, qua nobis antiqui Mathematici de harum scientiarũ partitione reliquerunt.

INVENTORES MATHEMATICArum disciplinarum.

OMNES disciplinas Mathematicas à varijs & diuersis auctoribus ortum originemq. duxisse, perspicue historia testantur: Imo vero singulas nequaquam summam adeptas esse perfectionem statim ab initio, sed paulatim eas ab imperfectis ad perfectiora processisse, memoria quoque proditum est. Arithmetices enim inuentores primi creduntur Phœnices, propter frequẽtes mercaturas, atque commercia, vt auctor est Proclus. Quam mirum in modum postea Pythagoras, eiusq. successores, necnon Aegyptij, Graci denique atque Arabes amplificarunt, varijsq. problematis, atq. theorematis illustrarunt. Musicam deinde à Mercurio primum esse inuentam, multi scriptores tradunt, quam ipse postea Orpheo insigni Musico commẽdauit, atque concredidit; Hic autem Thamyri & Lino. Linus vero Herculi, & sic succes-

sionibus

sionibus continuis per alios Musicos praclaros ad nostra vsque tempora manauit. Geometria vero, auctore Proclo, ab Aegyptijs reperta est, ortumq. habuit ab agrorũ dimensione. Cum enim anniuersaria Nili inundatio agrorum terminos, ac limites ita confunderet, vastaretq. vt nemo agrum digno scire posset suum, cœperunt Aegyptij animos ad rationem mensurandorum agrorum applicare, vt hoc modo cuilibet, quod suum erat, redderetur. Qua quidem ratio agros metiendi, quanquam tunc temporis adhuc rudis admodum fuerit, ac impolita, ab ipso tamen officio Geometria est appellata. γεωμετρέομαι *enim, siue* γεωμετρέω *idem significat, quod terram metior. Caterum paulatim deinde Geometria cœpta est expoliri, & non contenta suis finibus, sese ad corpora etiã cælestia dimetienda conuertit, traditq. principia vniuersa Astronomiæ, Perspectiuæ, Cosmographiæ, & alijs disciplinis quamplurimis, quæ ex ipsa, veluti radice, dependent. Hanc Thales Milesius ex Aegypto in Graciã primus transtulisse fertur: Deinde eam insignes Philosophi ac Mathematici plurimis acutissimisq. demonstrationibus locupletarũt, atque exornarunt: Inter quos hi sunt præcipui ex veteribus: Pythagoras, Anaxagoras Clazomenius, Hippocrates Chius, Plato, Oenopides, Zenodorus, Brito, Antipho, Theodorus, Theætetus, Aristarchus, Eratosthenes, Architas Tarentinus, Euclides, Serenus Hypsicles Alexandrinus, Archimedes Syracusius, Apollonius Pergæus, Theodosius Tripolita, Mileus Romanus, qui & Menelaus, Theon Alexandrinus, Ptolemæus, Eutocius Ascalonita, Pappus, Proclus, & alij pene innumeri, quos omnes longum esset recensere. Astronomiã denique non pauci ab Atlante primum inuentam esse autumant: Vnde ob eximiam, qua primus inter mortales præditus erat, Astronomiæ cognitionem, exortam esse volunt fabulam, illum suis humeris cælum sustinere. Alij putant Chaldæos diuturna obseruatione (quod etiam Cicero affirmat in libro de Diuinatione) siderum scientiam adinuenisse. Alij Aegyptios primos huius scientiæ faciunt inuentores: Alij Assyrios: Alij denique gloriam hanc, & laudem Babylonijs esse deferendam, censent. Hac autem in scientia, vt est præstantissima, ita quoque maxime illustres auctores cla-*

ruerunt,

uerunt, quod non est huius loci declarare. Caterum praeiuis hisce quatuor disciplinis Mathematicis inuentis, reliqua omnes de quantitate quouis modo agentes, facile ex ipsis tanquam riuuli ex fonte, deriuata sunt, atque deducta.

NOBILITAS ATQVE PRAESTANTIA Scientiarum Mathematicarum.

QVONIAM disciplina Mathematica de rebus agunt, quae absque vlla materia sensibili considerantur, quamuis re ipsa materia sint immersae; perspicuum est, eas medium inter Metaphysicam, & naturalem scientiam obtinere locum, si subiectum earum consideremus, vt recte à Proclo probatur, Metaphysices etenim subiectum ab omni est materia seiunctum, & re, & ratione: Physices vero subiectum & re, & ratione materia sensibili est coniunctum: Vnde cum subiectum Mathematicarum disciplinarum extra omnem materiam consideretur, quamuis re ipsa in ea reperiatur, liquido constat, hoc medium esse inter alia duo. Si vero nobilitas, atque praestantia scientia ex certitudine demonstrationum, quibus vtitur, sit iudicanda; haud dubie Mathematica disciplina inter caeteras omnes principem habebunt locū. Demonstrant enim omnia, de quibus suscipiunt disputationem, firmissimis rationibus, confirmantq., ita vt vere scientiam in auditoris animo gignant, omnemq prorsus dubitationem tollant: Id quod alijs scientijs vix tribuere possumus, cum in eis saepenumero intellectus multitudine opinionum, ac sententiarum varietate in veritate conclusionum iudicanda suspensus haereat, atque incertus. Huius rei fidem aperte faciunt tot Peripateticorum secta, (vt alios interim Philosophos silentio inuoluam) quae ab Aristotele, veluti rami è trunco aliquo, exorta, adeo & inter se, & nonnumquam à fonte ipso Aristotele dissident, vt prorsus ignores, quidnam sibi velit Aristoteles, num de nominibus, an de rebus potius disputationem instituat. Hinc fit, vt pars interpretes Graecos, pars Latinos, alij Arabes, alij Nominales, alij denique Reales, quos vocant, (qui omnes tamen Peripateticos se esse gloriantur) tanquam ductores sequantur. Quod quam longe à Mathematicis demon-

stratio-

strationibus absit, neminem latere existimo. Theoremata enim Euclidis, caterorumq; Mathematicorum, eandem hodie, quam ante tot annos, in scholis retinent veritatis puritatem, rerum certitudinem, demonstrationum robur, ac firmitatem. Huc accedit id, quod Plato ait in Philebo, seu dialogo, qui de summo bono inscribitur; Eam scientiam esse digniorem, praestantioremque, qua magis synceritatis, veritatisque est amans. Cum igitur disciplina Mathematica veritatem adeo expetant, adament, excolantque, vt non solum nihil, quod sit falsum, verum etiam nihil, quod tantum probabile existat, nihil denique admittant, quod certissimis demonstrationibus non confirment, corroborentque, dubium esse non potest, quin eis primus locus inter alias scientias omnes sit concedendus.

VTILITATES VARIAE MATHEMAticarum disciplinarum.

NON solum vtiles, verumetiam necessaria admodum censeri debent disciplina Mathematica cum ad alias artes perfecte perdiscendas, tum ad rem etiam publicam recte instituendam, & administrandam. Neque enim ad Metaphysicam, vt eleganter ostendit Proclus, vlli patet aditus, nisi per Mathematicas disciplinas. Nam si a rebus sensibilibus, quas Physicus considerat, ad res ab omni materia sensibili secretas, seiunctasque, quas contemplatur Metaphysicus, vires, acumque nostri intellectus attollere absque vllo medio tentemus, nosmetipsos excaecabimus, non secus, ac ei contingit, qui e carcere aliquo tenebricoso, in quo diu latuit, in lucem Solis clarissimam emittitur. Quamob rem, antequam a rebus physicis, qua materia sensibus obnoxia sunt coniuncta, ad res Metaphysicas, qua sunt ab eadem maxime auulsa, intellectus ascendat, necesse est, ne harum claritate offundatur, prius eum assuefieri rebus minus abstractis, quales a Mathematicis considerantur, vt facilius illas possit comprehendere. Quocirca recte Diuinus Plato Mathematicas disciplinas erigere animum, & ad diuinarum rerum contemplationem exacuere mentis aciem

affirmat. Quantum vero emolumenti hæ disciplinæ ad sacras literas rectè percipiendas, interpretandasq. conferant, multis pulcherrime nobis exponit B. Augustinus lib. 2. cap. 16. de Doctrina Christiana, demonstrans, numerorum inscitia multa non intelligi à multis, quæ translate, ac mysticè posita sunt in Scripturis. Cuius rei exempla nō pauca in medium adducit, eandemq. sententiam longe post pluribus verbis repetit eodem libro, capite 37. Hoc idem docet D. Hieronymus tomo 1. Epist. 5. asserens magnam ineſſe numeris vim, ad multa mysteria in Scripturis intelligenda: Quo item loco. Geometriam magnam afferre Theologis vtilitatem perhibet. Rursum B. Augustinus loco iam citato, capite 16. quem paulo ante retuli, testatur, Musicam perneceſſariam esse doctori Christiano, subiungens paulo post, cap. 19. Theologos debere etiam Geographia diligenter esse instructos. Quod non ignorans Diuus Gregorius Nazianzenus, summis laudibus Diuum Basilium Præceptorem ſuum extollit, quòd in Astrologia, Geometria, numerorum cognitione, cæterisq. scientijs Mathematicis, fuerit non mediocriter versatus. Non parum etiam conducunt hæ artes ad philoſopkiam naturalem, moralem, Dialecticam, & ad reliquas id genus doctrinas, artesq. perfectè acquirendas, vt perſpicue docet Proclus. His adde, quod omnia volumina antiquorum philoſophorum, maxime Aristotelis, & Platonis, quos merito duces nobis ſequendos ad bene rectèq. philoſophandum proponimus, eorumq. fere omnium interpretum cum Græcorum, tum Latinorum, exemplis Mathematicis ſunt referta, ea potiſſimum de cauſa, vt ea, quæ alioquin multis obſtructa difficultatibus videbantur esse, per exempla huiuſmodi clariora, magisq. perſpicua fierent; quæ procul dubio nulla ratione percipiet is, qui ſcientiarum Mathematicarum omnino eſt expers. Quid? quòd olim nemo auſus esset celeberrimum Diuini Platonis gymnaſium frequentare, qui prius optime Mathematicis diſciplinis non fuiſſet exornatus? Vnde pro foribus Academiæ hoc ſymbolū dicitur pinxiſſe, ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. Immo vero idem Plato in Philebo, omnes diſciplinas ſine Mathematicis viles esse non dubitauit aſſerere. Qua de cauſa in 7. de

Rep. præcipit, Mathematicas disciplinas primo omnium esse addiscendas, propter varias, ac multiplices earum vtilitates, (vt copiosè scribit) non solum ad reliquas artes rectius percipiendas, verum etiam ad Remp. bene administrandam: Cuius ego rei multa exempla cum præteriti temporis, tum nostræ ætatis, si id necesse foret, in medium possem adducere. Ibidem clarissimis verbis affirmat, præcipue Arithmeticos natura ad omnes doctrinas aptos esse, idoneosq., adeo vt etiamsi nullam aliam nobis ha scientiæ afferrent vtilitatem, (cum tamē infinita propemodum alia commodæ ex ipsis percipiamus) perdiscendas tamen omni studio eas esse statuat, quod ingenium, mentemq. ad reliquas artes omnes capessendas aptiorem reddant, & acutiorem: Quod quidem experientia ipsa magistra facile comprobatur. Videmus enim eos, quorum ingenium facile, & nullo negotio hisce disciplinis accommodatur, fructus non exiguos ex alijs scientijs percipere: Contra vero eos, qui ad hasce facultates idonei minime reperiuntur, prorsus ad cæteras esse ineptos. Quare iure optimo Plato tam frequenter in suis operibus iterum atque iterum harum disciplinarum vtilitatem nobis inculcat, atque commendat; præsertim in 7. de Rep. in Epinomide, seu Philosopho, in Timæo, vbi Mathematicas disciplinas omnis eruditionis ingenua vium appellat, & plerisque alijs in locis, quibus nunc enumerandis breuitatis memor de industria supersedeo. Ad has omnes vtilitates accedit maxima iucunditas, atque voluptas, qua cuiusque animus his artibus colendis, exercendisq. perfunditur. Sunt enim hæ præcipuæ ex septem artibus liberalibus, in quibus non solum ingenui adolescentes, verum etiam nobiles viri, principes, reges, ac imperatores ad honestissimam, maximeq. liberalem oblectationem animi, quam summa etiam cum vtilitate coniunctam pariunt, diu multumq. versari solebant. Quorum exemplum multos adhuc nostra hac ætate imitari conspicimus. Testatur, magnam animi voluptatem ex his artibus percipi, Diuinus Plato in 7. de Rep. vbi audacter dicit, & non temere confirmat, oculum animæ, qui ab alijs studijs excæcatur, defoditurq., à Mathematicis tantum disciplinis recreari, excitariq. rursus

ad

ad eius, quod est, contemplationem. Omitto plurima alia testimonia Platonis, aliorumque grauissimorum Philosophorum, quibus harum disciplinarum vtilitas cum necessitate, & delectatione coniuncta, atque praestantia abunde potest comprobari.

EVCLIDIS ATQVE GEOMETRIAE commendatio.

QVISNAM fuerit Euclides horum elementorum institutor, (vt aliquid etiam de auctore, quem nobis interpretandum proposuimus, deq. Geometria vniuersa, in medium proferamus) & quo tempore floruerit, non satis conuenit inter scriptores. Multi enim, vt testatur vulgata elementorum Euclidis secundum Campanum, & Theonem editio, atque eorundem inscripito, existimant, eum fuisse philosophum illum Megaris natum, quod oppidum Isthmo adiacet, Socratisq. auditorem, qui sectam instituit à se dictam Megaricam, quæ alio nomine Dialectica appellabatur, eo quod sectatores illius interrogando, respondendoq. (quod proprium est munus Dialecticorum) libros conscriberent. De quo multa sunt in Diogene Laertio de vitis philosophorum: Scribit & de hoc Cicero Quæst. Acad. lib. 2. vbi ait. Post Euclides Socratis discipulus Megareus, à quo ijdem illi Megarici dicti, qui id bonum solum esse dicebant, quod esset vnum, & simile, & idem, & semper. Fauet his auctoribus non parum id, quod Valerius Maximus octauo lib. scribit, nimirum à Platone, qui Socratis etiam discipulus fuit, conductores aræ sacræ de modo, & forma eius secum sermonem conferre conatos, ad Euclidem Geometram ire iussos. Verum si Proclo nobili scriptori, & alijs auctoribus antiquis credendum est, Euclides hic noster iunior fuit illo Megareo, floruitq. tempore Ptolemæi primi, qui Aegypto, post Alexandri Magni mortem, Olympiade 115. & ante Christum natum anno 319. cœpit imperare, vt Ioannes Lucidus refert. Quod quidem verius esse crediderim, hoc maxime adductus argumento, quod Diogenes Laertius omnia opera Euclidis illius Megarici diligentissime enumerans, nullam

prorsus faciat mentionem huius celeberrimi voluminis de Geometricis elementis conscripti, in quo perpetuam, & nunquam morituram famam sibi comparauit Euclides, & gloriam. Neque enim putandum est, Diogenem in monumentis philosophorum exercitatissimum, hoc tam insigne opus vel scientem voluisse praterire, vel ab Euclide suo esse compositum ignorasse. Itaque Euclides noster, Geometra acutissimus, ab illo Megareo Philosopho longe alius est, qui cum in doctrina Academicorum esset summa cum laude versatus, animum totum ad Mathematicas disciplinas transtulit; in quibus ita excelluit, vt concordi omnium iudicio principem inter Mathematicos sibi locum iure optimo vendicarit. Scripsit autem volumina ad rem Mathematicam spectantia non pauca, in quibus eximia eius diligentia, admirandaq. doctrina facile elucet: qualia sunt eius Optica, Catoptrica, Elementares institutiones ad Musicam capessendam pertinentes, Phanomena, atque Datorum liber, opus de Diuisionibus, quod nonnulli suspicantur esse libellum illum acutissimum de Superficierum diuisionibus, Machometo Bagdedino ascriptum, qui nuper Ioannis Dee Londinensis, & Federici Commandini Vrbinatis opera in lucem est editus. Conscripsit item Conica elementa, auctore Proclo, qua tamen ad nos nondum peruenere, & alia id genus opuscula. Maxime verò hoc volumen Elementorum Geometricorum, numquam omnium consensione satis laudatum, tam mirabili ordine, tantaq. eruditione contexuit, vt nullus vnquam eorum, qui similia conscripserunt elementa, (conscripserunt autem, vt ait Proclus, non pauci) par illi extiterit, nedum ipsum superarit. In quo quidem, vt summum ingenij acumen demonstrauit, ita non omnia, qua ad rem Geometricam pertinent, in vulgus edenda, sed ea duntaxat, qua visa sunt esse necessaria, atque vtilia ad communem omnium vtilitatem, argumentis & rationibus firmissimis censuit esse comprobanda. Caterum, quanta sit horum Euclidis Elementorum Geometricorum, ac proinde vniuersa Geometriæ prastantia, atq. vtilitas, partim ex ijs, qua ante scripsimus, partim ex ijs, qua nunc dicemus, non obscure perspici potest. Dicuntur enim Geometrica elementa, eam

ob causam, quod sine ipsis nullum opus Mathematicum possimus aggredi, ne dicam fructum aliquem inde percipere. Omnes siquidem Mathematicarum rerum scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Theodosius, &c. in suis demonstrationibus vsurpant hæc Euclidis elementa, tanquam principia omnibus iam diu perspecta, atque demõstrata. Quamobrem sicut is, qui legere vult, elementa literarum discit prius, & illis assidue repetitis vtitur in vocibus omnibus exprimendis, sic qui alias disciplinas Mathematicas desiderat sibi reddere familiares, elementa hæc Geometrica plene ac perfectè calleat prius necesse est. Ex his etenim elemetis, veluti fonte vberrimo, omnis latitudinum, longitudinum, altitudinum, profunditatũ, omnis agrorum, montium, insularũ dimensio, atque diuisio, omnis in cælo per instrumenta siderum obseruatio, omnis horologiorum sciotericorum compositio, omnis machinarum vis, & ponderum ratio, omnis apparentiarum variarum, qualis cernitur in speculis, in picturis, in aquis, & in aere variè illuminato, diuersitas manat. Ex his, inquam, elementis machina totius huius mundanæ est inuentum medium, atque centrum; inuenti cardines, circa quos perpetuo conuertitur, orbis denique totius explorata figura, ac quantitas. Ostenditur atque demonstratur vnius huius scientiæ vi cæli vniuersi, siderumq. perennis conuersio, ortus, occasus, abitus, reditus, ascensus, descensus, diei ac noctis, temporumq. toto anno per omnem terrarum situm, & mundi inclinationem, varietas. Coniunctiones item planetarum, oppositiones, aspectusq. varij tam expedite cognoscuntur, vt & loca illorum in cælo, & eclipses, seu Solis ac Lunæ defectiones certissime, antequam fiant, in omne posterum tempus à Mathematicis prædici queant. Hoc denique ingens Dei, & Naturæ opus, mundum, inquam, totum, mentis nostræ oculis, munere ac beneficio Geometriæ subiectum conspicimus. Addit Geometriam hominibus plurima, quæ penitus incredibilia esse videntur, omniumq. fidem superant, perspicua facere, credibiliaq. esse ostendere: Quale est illud, quod de Archimede Syracusio testantur historiæ. Cùm enim Hieron Syracusarum Rex nauem, quam Ptolemæo Aegyptiorum Regi mittere statuerat, tanta esset molis fabricatus, vt

eam omnes vnà Syracusij à loco dimouere minime valerent: Archimedes Geometra peritissimus, vnius Geometriæ viribus fretus Regi promisit, se effecturum, vt ipsam solus Rex absque vllo labore subduceret. Quod cum præstitisset, in conspectu omnium Rex stupefactus exclamasse perhibetur; Ab hac die, quidquid dixerit Archimedes, illi credendum est. Non dissimile huic videtur mihi esse pulcherrimum illud factū, quod idem Archimedes ope Geometriæ gessit Syracusis, quando corona ex auro argentoq. confecta, quā Rex summo studio fabricari iusserat, non dissoluta, singula auri & argenti pondera, qua inter se aurificis fraude ac dolo commista erant, subtilissime offendit. Neque silētio præteriri debet, eundem Archimedem robori ac efficaciæ demonstrationum Geometricarum innixum sæpenumerò iactitasse, si haberet terram aliam, in qua pedem figeret, hanc nostram, quam incolimus, è loco se commouere posse. Pari ratione, datis viribus quibuscunque, pondus quodcunque se posse mouere. Et alia id genus, non solùm ab Archimede, verum etiam ab alijs præclaris, & illustribus Geometris patrata esse, memoriæ proditum est. Tantum denique nomen vna hæc Geometria Archimedi peperit, vt Marcellus Romani exercitus imperator, contra quem diu Syracusanam vrbem defenderat Archimedes, machinis quibusdam per Geometricas demonstrationes adinuentis, & constructis, in expugnata vrbis direptione, ac cæde ciuium vnius Archimedis saluti publico edicto cauerit: quem vbi contra imperium suum & voluntatem à gregario quodam milite interfectum cognouit, vehementer doluit, eumq. honorem mortuo habuit, quem viuo habere non potuit. Cuius sepulchrum Cicero à se, cum in Sicilia Quæstoris officio fungeretur, repertum esse, mirandum in modum gloriatur. Vnde mirari nemo debet, cur in summo semper honore apud Græcos fuerit Geometria. Accedit quoque ad præstantiam vtilitatemq. Geometriæ, quod cum demonstrationes Geometricæ sint maximè illustres, nemo sine ipsis satis perspiciet, qua sit vis demonstrationum, nemoq. eisdem destitutus perfectus erit artifex methodi. Quod quidem ingenuè fatetur Galenus insignis Philosophus, ac Medicorum princeps, in libro, quem de libris propriis inscri-

pſit.

pſit. Is enim inſtructiſsimus rebus Dialecticis, cum ſcholas Peripateticorum ac Stoicorum ſui temporis percurriſſet omnium, & præcepta mira cum animi ardore ſtudioq. arripuiſſet, nihil fere ab ipſis audiſſe ſe teſtatur, quod ad demonſtrationis cognitionem pertineret; quinimò pleraque eorum, quæ tradiderant, ab illis in controuerſia poſita, nonnulla etiam naturali rationi pugnantia reperiſſe. Ita vt ad Pyrrhoniorum fere (erant Pyrrhonij Philoſophi, qui nihil decernebant, ſed de omnibus dubitabant) haſitantiam deuenturus fuerit, niſi Arithmetica, Geometria, Dialecticaq. (quibus artibus ab auis & patre fuerat inſtitutus) eſſet cognitione ſcientiaq. reuocatus. Vnde ſuadet, ſequendos eſſe characteres illos Arithmeticos, & linearum demonſtrationes. Plato etiam cum ob alias, tum ob eam etiam cauſam diſcendam eſſe Geometriam dixit, quòd eius cognitio maxime ſit vtilis, vt alia artes facilius & rectius percipiantur. Poſtremo eſt hæc ſumma laus Geometriæ, omnibusq. modis prædicanda, quòd nõ hæſit in exiguis & inferioribus hiſce machinis, à quibus originem traxit, ſed euolauit in cælum vſque, & humanas mentes humi abiectas in illam rurſus cæleſtem ſedem inuexit, & admirandam mundi huius fabricam, eiusq. adminiſtrationem & gubernationem noſtro intellectui ſubiecit.

DIVISIO GEOMETRIAE & elementorum Euclidis.

GEOMETRIA diuiditur in Planorum contemplationem, quæ generali vocabulo Geometria dicitur, & in doctrinam Solidorum, quam proprio ac peculiari nomine Stereometriam appellant Mathematici. Nam Geometria vniuersè ſibi hunc ſcopum proponit, vt plana, aut ſolida vel conſtituat, vel conſtituta inter ſe comparet, aut diuidat. Neque vero mirum alicui videri debet, quod cum tria ſint genera magnitudinum, linea, ſuperficies, & corpus, ſolum de duobus poſterioribus extent propria contemplationes, vt di-

ximus, non autem de lineis, vel etiã punctis. Non, inquam, debet videri mirum, quoniam, vt ait Proclus, Geometria potissimum circa figuras versatur, qua in planis duntaxat, vel etiam solidis consistunt omnes. Non enim puncta, vel linea figuram vllam constituunt sine planis, aut solidis, ac proinde necesse non erat, propriam de punctis, & lineis scientiam instituere; Superficiebus vero, siue planis, & corporibus, solidisve maxime conueniebat, vt proprias nanciscerentur tractationes. Volens igitur summus harum rerum artifex Euclides in hisce elementis perfectam, & omnibus numeris absolutam tradere cognitionem rerum Geometricarum, in prioribus sex libris agit de planis, in posterioribus verò quinque de solidis acutissime disputat, eorumq. proprietates maxime illustres peruestigat. Quoniam vero cum res omnes Geometricæ, tum præsertim solida illa quinque regularia, quæ corpora Platonica dici solent, perfecte tractari non poterant, absque linearum commensurabilium, atque incommensurabilium notitia; Immo vero quam plurima magnitudines sub mensuram cadere nulla ratione absque earundem linearum cognitione possunt, cum earum latera sæpenumero sint talia, vt ea communis & nota mensura data metiri nequeat, vt liquido constat iis, qui aliquando demonstrationes Geometricas in opus contulerunt, atque vsum: idcirco vt hisce elementis Geometricis complecteretur omnia documenta ad magnitudinum intelligentiã, dimensionemq. requisita, Stereometriæ sua præposuit decimum librum, in quo subtiliter & copiose de huiusmodi lineis disserit. Intelligens rursum Euclides, neque hanc tractationem linearum commensurabilium & incommensurabilium sine numerorum cognitione posse consistere, ante decimũ librum agit de numerorum passionibus, easq. copiose & diligenter tribus libris, qui hunc antecedunt, est persecutus. Quamobrem totum hoc volumen elementorũ Geometricorum quindecim libris comprehensum (quorum quidem priores tredecim sine vlla controuersia Euclidi ascribuntur ab omnibus; posteriores vero duo à nonnullis Hypsiclis Alexandrini esse creduntur) secari recte poterit in quatuor partes, ita vt prima pars contenta sex prioribus libris agat de planis; Secun-

da tres sequentes complectens, passiones numerorum persequetur; Tertia, quam solus decimus constituit liber, de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusq. disputet; Quarta denique reliquis quinque libris absoluta scientiam solidorum, siue corporum complectatur. Prima pars rursum triplex est; Nam in prioribus quatuor libris agitur de planis absolute, inuestigando eorum aequalitatem & inaequalitatem: In quinto vero libro de proportionibus magnitudinum in genere disputatur: In sexto denique proportiones figurarum planarum discutiuntur. Quid vero Euclides in singulis alijs libris pertractet, proprijs in locis exponemus.

QVID PROBLEMA, QVID THEOREMA, quid Propositio, & quid Lemma apud Mathematicos.

DEMONSTRATIO omnis Mathematicorum diuiditur ab antiquis scriptoribus in Problema, & Theorema. Problema vocant eam demonstrationem, qua iubet, ac docet aliquid constituere. Vt si quis conetur demonstrare, supra lineam rectam finitam posse triangulum aequilaterum constitui, appellabitur huiusmodi demonstratio problema, quoniam docet, qua ratione triangulum aequilaterum constitui debeat supra rectam lineam finitam. Dictum est autem hoc genus demonstrationum Problema, ad similitudinem problematis Dialectici. Sicut enim apud Dialecticos problema dicitur quaestio illa, cuius vtraque pars contradictionis (vt ipsi loquuntur) est probabilis, qualis haec est quaestio; An totum distinguatur realiter à suis partibus simul acceptis: Sic etiam quaesitum illud apud Mathematicos, quo aliquid iubent construere, & cuius contrarium effici etiam potest, problema appellatur. Vt si quis proponat se demonstraturum, supra lineam rectã finitam triangulum aequilaterum posse constitui, efficiet problema, quia & triangulum non aequilaterum, nempe Isosceles, vel scalenum, supra eandem lineam constitui potest. Pari ratione, qui instituit angulum rectilineum secare bifariam, problema nobis exhibet, propterea quod angulus idem diuidi po-

teſt in partes non æquales. Eſt tamen diſcrimen non paruum inter Dialecticorum & Mathematicorum problema. Nam in problemate Dialectico vtrauis pars contradictionis ſuſcepta confirmatur tantum probabiliter, ita vt intellectus cuiuſque ambigat, vtranam illius pars vera ſit: In Mathematico vero, quamcunque quis partem elegerit, eam firma demonſtratione, ita vt nihil omnino dubij ſit reliquum, comprobabit. Si enim Geometra ſtatuat ex puncto quolibet lineæ rectæ propoſitæ lineam perpendicularem educere, efficiet vtique hoc ipſum ratione conſtanti, & euidenti: Eodem modo dicendū eſt, ſi ex eodem puncto velit educere lineam non perpendicularem. Theorema autem appellant eam demonſtrationem, quæ ſolum paſſionem, aliquam, proprietatemve vnius, vel plurium ſimul quantitatum perſcrutatur. Vt ſi quis optet demonſtrare, in omni triangulo tres angulos eſſe æquales duobus rectis, vocabunt talem demonſtrationem Theorema, quia non iubet, aut docet triangulum, aut quippiam aliud conſtruere, ſed contemplatur tantummodo trianguli cuiuslibet conſtituti paſſionem hanc, quòd anguli illius duobus ſint rectis æquales. Vnde à contemplatione ipſa, hæc demonſtratio theorema dicitur. In theoremate fieri nulla ratione poteſt, contradictionis vtraque pars vera vt ſit. Si enim quis demonſtret, omnes angulos trianguli cuiuslibet duobus eſſe rectis angulis æquales, nullo poterit modo fieri, vt inæquales quoque ſint duobus rectis. Eadem ratio in aliis theorematibus eſt intelligenda. Itaque vt vno verbo dicam, quæſitum illud Mathematicum conſtruere aliquid docens, cuius etiam oppoſitum poteſt effici, Problema: Illud vero, quod nihil docet conſtruere, & cuius pars oppoſita perpetuo falſa exiſtit, Theorema appellatur. Vnde ſi quis proponeret in modum problematis, ſe in ſemicirculo velle angulum rectum conſtituere, irridendus omnino eſſet, & Geometriæ prorſus ignarus iudicandus; quoniam omnes anguli in ſemicirculo conſtituti ſunt recti, vt demonſtrabitur libro 3. propoſitione 31. Quamobrem theorema hoc, & non problema dicendum erit. Cæterum tam problema, quàm theorema dici conſueuit apud Mathematicos Propoſitio, propterea quod vtrumque aliquid nobis proponit, vt

in

in exemplis adductis constat. Hac ideo dixerim, vt studiosus lector non miretur, quando reperiet in Euclide, Apollonio, & cæteris Mathematicis, propositionum alias dici problemata, alias theoremata. Elementa enim Euclidis Geometrica, & Apollonij Conica, (vt aliorum interim volumina taceam) constant partim problematibus, partim theorematibus. Demonstrationes problematum semper concludunt his fere verbis: Quod faciendum erat; Theorematum vero hisce: Quod ostendendum, vel demonstrandum erat; habita nimirum ratione finis vtriusque. In quolibet autem problemate, ac theoremate plures demonstrationes continentur, & non vna tantum, quamuis vltimus syllogismus demonstrationis solùm concludat id, quod in initio demonstrandum proponitur, vt declarabimus in prima Euclidis propositione, & in cæteris omnibus manifestum erit.

QVONIAM verò ad demonstrationes problematum atque theorematum sæpenumero requiruntur alia quædam theoremata, vel problemata minus principalia, & quæ facile ex ijs, quæ prius demonstrata sunt, intelligi possunt; inseruntur interdum à Geometris huiusmodi theoremata, & problemata problematibus, atque theorematibus, de quibus præcipue agitur, vt breuius demonstrari possint. Vocant autem illa Lemmata, propterea quòd solum assumuntur ad alias demonstrationes; non autem de illis præcipua disputatio instituitur, quemadmodum de alijs. Itaque Lemma dici potest demonstratio, seu constructio illius, quod ad demonstrationem alicuius theorematis, vel problematis principalis assumitur, vt demonstratio expeditior fiat, ac breuior.

QVAENAM SINT PRINCIPIA apud Mathematicos.

CVM omnis doctrina, omnisq. disciplina ex præexistente cognitione, vt auctor est Aristoteles, atq. ex assumptis, & cõcessis quibusdã principijs suas demonstret conclusiones; Nulla autẽ scientia ex eiusdem Aristotelis, aliorumq. Philosophorũ sententia sua principia demonstret; habebunt vtique & Mathematica disciplina sua principia, ex

quibus positis, & concessis sua problemata ac theoremata confirment. Horum autem tria tantummodo genera apud Mathematicos reperiuntur. In primo reponuntur omnes definitiones, quas nonnulli cum Aristotele suppositiones, vt vult Proclus, appellant. His autem vocabula artis explicantur, ne in tractatione ipsa, nominum ambiguitate, aut obscuritate circumuenti in paralogismos incidamus Secundum genus complectitur Petitiones, siue Postulata, quae quidem adeo clara sunt, & perspicua in illa scientia, qua in manibus habetur, vt nulla indigeãt confirmatione, sed auditoris duntaxat assensum exposcant, ne vlla sit in demonstrando hasitatio, aut difficultas. Ad tertium genus referuntur Axiomata, seu communes animi notiones, quae non solum in scientia proposita, sed etiam in omnibus alijs ita manifesta sunt, & euidentia, vt ab eis nulla ratione dissentire queat is, qui ipsa vocabula recte perceperit. Atque his principijs recte mihi videtur accommodari posse id, quod in Metaphysicis scribit de primis principijs Aristoteles: A ianua quis aberrabit? Vt praclare à Cicerone, Pronunciata, siue Effata appellentur. Euclides igitur hoc in volumine Geometricorum Elementorũ praemittit ante demonstrationes suarum conclusionum omnia haec principia, vt ex ipsis, qua quidẽ facile à quouis intelliguntur, deducat admiranda theoremata, quibus nemo vnquam assensum praberet, nisi certa ac euidenti ratione confirmarentur. Vnde hoc etiam nomine summis laudibus efferenda est Geometria, omnibusq. seculis praedicanda, quod ex tam exiguis initijs cuilibet quantumuis rudi & ignaro notissimis, & quidem perfacilibus progrediatur ad theoremata primo aspectu ab omni sensu humano, & intellectu remota, quae tamen omnia miro ordine, ac methodo facili, demonstrationibusq. certissimis ita confirmat, vt nihil omnino dubij in eis relinquatur. Porrò in huiusce modi principijs tradendis hic ordo ab Euclide seruatur, vt in ipso quidem introitu scientia proponat principia toti Geometriae communia, in alijs autem deinde libris, vbi res postulat, ea exponat principia, quae propriè, & peculiari quadam ratione, ad materiam illorum subiectam videntur spectare. Neque vero omnia principia Geometri-

ca

ca ab Euclide in his elementis sunt explicata, sed multa reliquit lectori disquirenda; quæ tamen ex ijs, quæ tradidit, sine magno labore ac studio percipi possunt, & intelligi. Verum ne in hac quoque parte defuisse videamur rerum Mathematicarum studiosis, adiunximus varijs in locis ad principia ab Euclide posita, ex probatis auctoribus alia nonnulla, quorum ignoratione maxime cursum demonstrationum arbitrati sumus retardari posse: Sed iam ad expositionem ipsam Principiorum Euclidis accedamus.

EVCLIDIS ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

I.

PVNCTVM est, cuius pars nulla est.

TOTVS hic primus liber in eo positus est, vt nobis tradat ortus proprietatesque triangulorum, tum quod ad eorum angulos spectat, tum quod ad latera: qua quidem inter se comparat interdum, interdum vero vnumquodque per se inspicit, & contemplatur. Nam aliquando ex lateribus trianguli angulos considerat, aliquando vero ex angulis latera, secundum æqualitatem atque inæqualitatem, rimatur. Idemq. variis rationibus inquirit in duobus quandoque triangulis inter se collatis. Deinde aperit nobis parallelarum proprietates, parallelogrammorumq. contemplationem aggreditur, tum inter se, tum etiam, vt cum triangulis inter easdem parallelas constitutis conferuntur. Vt

autem

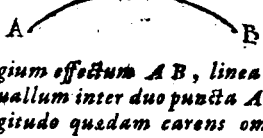
autem hæc omnia rectius, & commodius exequatur Euclides, docet diuisionem anguli rectilinei, & lineæ rectæ in partes æquales, constitutionem lineæ perpendicularis, quo pacto angulus angulo fiat æqualis, & alia huiusmodi. Itaque vt vno verbo rem totam complectar, in primo libro traduntur, ex Procli sententia, rectilinearum figurarum maxime prima, ac præcipua, triangula inquam, atque parallelogramma. Ante omnia vero Euclides more Mathematicorum rem propositam exorditur à principijs, initio facto à definitionibus, quarum prima punctum explicat, docens illud dici punctum in quantitate continua, quod nullas habet partes. Quæ quidem definitio planius ac facilius percipietur, si prius intelligamus, quantitatem continuam triplices habere partes, vnas secundum longitudinem, alteras secundum latitudinem, & secundum profunditatem altitudinemue alteras; quanquam non omnis quantitas omnes has partes habet, sed quædam vnicas tantum secundum longitudinem; quædam duplices, ita vt illis adijciat partes etiam latitudinis; quædam denique præter duplices has partes, tertias quoque altitudinis, siue profunditatis continet. Quantitas enim omnis continua aut longa solùm est, aut longa simul, & lata, aut longa, lata, atque profunda. Neque aliam dimensionem habere potest res vlla quanta, vt recte demonstrauit Ptolemæus in libello de Analemmate, opera Federici Commandini Vrbinatis nuper in pristinam dignitatem restituto, necnon, vt ait Simplicius, in libello de Dimensione, qui quidem, quod sciam, adhuc nondum est excusus. Itaque quod in quantitate continua, siue magnitudine existit, intelligiturq. sine omni parte, ita vt neque longum, neque latum, neque profundum esse cogitetur, (vt nimirum excludamus animam rationatem, Nunc vel Instans temporis, & vnitatem, quæ etiam partes non habent) id appellatur ab Euclide, & à Geometris punctum. Huius exemplum in rebus materialibus reperiri nullum potest, nisi velis, extremitatem punctum alicuius acus acutissimæ, similitudinem puncti exprimere; quod quidem omni ex parte verum non est, quoniam ea extremitas diuidi potest, & secari infinite, punctum

ctum verò indiuiduum prorsus debet existimari. Denique in magnitudine id concipi debet esse punctum, quod in numero vnitas, quodq. in tempore instans. Sunt enim & hæc concipienda indiuidua.

II.

LINEA verò, longitudo latitudinis expers.

DEFINIT hic lineam, primam speciem magnitudinis, quam dicit esse quantitatem longam duntaxat, non autem latã, intellige neque profundam. A qua enim quantitate excluditur latitudo, ab eadem etiam necessario profunditas remouetur, non autem contra. Lineam autem hanc, siue longitudinem absque latitudine, non absurde concipere, intelligere q. poterimus ex termino loci alicuius partim illuminati, & partim obumbrati. Finis enim, seu terminus communis lucidi, & omumbrati, longitudo quædam est, ad longitudinem ipsiusmet luminis, & vmbræ extensa, carens omni latitudine. cum sit limes vtriusque. Mathematici quoque, vt nobis inculcent veram lineæ intelligentiam, imaginantur punctum iam descriptum superiore definitione, e loco in locum moueri. Cum enim punctum sit prorsus indiuiduum, relinquetur ex isto motu imaginario vestigium quoddam longum omnis expers latitudinis. Vt si punctum A, fluere intelligatur ex A, in B, vestigium effectum A B, linea appellabitur, cum vero interuallum inter duo puncta A, & B, comprehensum sit longitudo quædam carens omni latitudine, propterea quod punctum A, omni priuatum dimensione, eam efficere nulla ratione potuerit. Hinc factum est, vt alij dixerint, lineam nil esse aliud, quam puncti fluxum: Alij vero, magnitudinem vno contentam interuallo. Potest enim linea vnico tantum modo, vtpote secundum longitudinem secari, atque diuidi.



III.

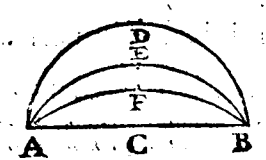
LINEAE autem termini, sunt puncta.

DOCET, quanam sint extrema linea cuiusuis, seu termini, dicens lineam terminari, siue claudi vtrinque punctis; Non quod omnis linea terminos habeat; quomodo enim linea infinita terminos assignare poterimus? qua etiam ratione in linea circulari extremum aliquod deprehendemus? Sed quod linea quælibet habens extrema, in suis extremitatibus puncta recipiat. Vt superior linea A B, extrema habet puncta A, & B. Idemq. in omnibus lineis terminatis, ac finitis intelligendum est, ita vt earum extremitates sola esse puncta cogitemus.

IV.

RECTA linea est, quæ ex æquo sua interiacet puncta.

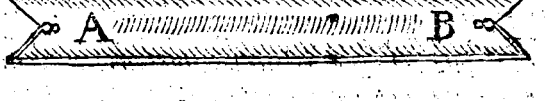
TRIPLEX omnino est linea apud Mathematicos, recta, circularis, quam & curuam dicunt, & mixta, siue composita ex vtraque. Ex his describit hoc loco Euclides lineam rectam, quam dicit esse eam, qua æqualiter inter sua puncta extenditur, hoc est, in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum reperitur. Hanc nobis ad viuum exprimit filum aliquod tenue summa vi extentum: In eo enim omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior, sed omnes æquabiliter inter extremos fines posita progrediuntur. Proclus hanc definitionē exponens ait, tunc demū lineam aliquā ex æquo sua interiacere puncta, quando æquale occupat spatiū ei, quod inter sua situm est puncta extrema. Vt linea A C B, dicetur recta, quoniam tantum occupat præcisè spatium, quanta est distantia puncti A, à puncto B: Linea vero A D B, A E B, A F B, non dicentur rectæ, cum maiora obtineant spatia, quam sit



extremorum punctorum A, & B. Sic etiam vides omnia puncta lineæ A C B, inter quæ est punctum C, æqualiter inter extrema A, & B, iacere, iuxta Euclidis definitionem; quod non cernitur in alijs lineis, quoniam puncta D, E, F, subsultans ab extremis A, & B. Pluto rectam lineam perpulchre sic definit: Linea recta est, cuius media obumbrant extrema. Vt in linea A C B, si punctum C, aut quodvis aliud medium, vim haberet occultandi, & A, extremum virum illuminandi, impedimento vtique esset C, punctum interiectum, ne B, extremum alterum ab A, illuminaretur. Rursus oculus in A, existens extremo, non videret aliud extremum B, ob interiectum punctum C; quod quidem non contingit in lineis non rectis, vt perspicuum est in lineis A D B, A E B, A F B. Archimedes vero ait, lineam rectam esse minimam earum, quæ terminos habent eosdem; qualis est A C B, comparata cum A D B, A E B, A F B. Si enim A C B, non esset minima earum, quæ eosdem terminos A, & B, possident, non ex æquo interiaceret sua puncta, sed ea potius linea, quæ minor diceretur, quam A C B. Campanus denique describens rectam lineam, vocat eam brevissimam ex vno puncto in aliud extensionem. Quemadmodū autem Mathematici per fluxum puncti imaginarium concipiunt describi lineam, ita per qualitatem fluxus puncti qualitatem lineæ descriptæ intelligunt. Si namque punctum recta fluere concipiatur per brevissimum spatium, ita vt neque in hanc partem, neque in illam deflectat, sed æquabilem quendam motum, atque incessum teneat, dicetur linea illa descripta, Recta: Si vero punctum fluens cogitetur in motu vacillare, atque hinc inde titubare, appellabitur linea descripta, mixta: Si denique punctum fluens in suo motu non vacillet, sed in orbem feratur vniformi quodam motu, atque distantia à certo aliquo puncto, circa quod fertur, vocabitur descripta illa linea, circularis. Itaque si duo puncta moueantur similibus prorsus motibus, ita vt semper æquali-

ter inter se differunt, describuntur ab ipsis duæ lineæ similes, hoc est, si una earum fuerit recta, erit & altera recta: si vera una fuerit curua, erit & altera eodem omnino modo curua, &c. Lineas non rectas, quas omnes obliquas dici possunt, non definit hoc loco Euclides, sed circularem exponet definitione decimaquinta, mistam prorsus omittens, quod ea in hoc elementis Geometricis nullum habeat vsum. Sunt autem plurima genera linearum mistarum: quædam enim sunt vniformes, quædam difformes. Vniformium rursus aliæ sunt in plano, aliæ in solido. In plano sunt Hyperbole, Parabole, Ellipsis, de quibus agit copiosissime Apollonius in conicis elementis; linea Conchoideos, de qua Nicomedes; linea Helica, de qua Archimedes in libro de lineis spiralibus tractationem instituit, & alia huiusmodi. In solido, seu superficie curua sunt alterius generis linea helica, quam ea ab Archimede descripta, qualis est illa, quæ circa cylindrum aliquem conuoluitur; nec non ea, quæ circa conum existit, vel etiam quæ circa sphæram, cuiusmodi sunt spiralia, quas Sol describit ab ortu in occasum, vt in sphæra docuimus. Difformium autem infinitas est numerus, quas non est opus hic recensere. Ex his constat, duas tantum esse lineas simplices, rectam, & circularem, omnes autem alias, quæcunque sunt, mistas appellari, quod ex illis componantur. Vnde ingeniose concludit Aristoteles, in libro de Cælo, iuxta triplicem lineam, tres tantum esse motus, duos quidem simplices, rectum & circularem, tertium vero mistum, siue ex illis duobus compositum.

Sed quoniam lineas rectas regula ducere solemus, docemus, qua ratione regulam propositam examinare possimus,



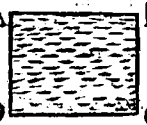
num linea per illam descripta recta sit, nec ne. Sit ergo regula A B, secundum cuius latus C D, recta C D, describatur ex puncto C, in punctum D. Deinde conuertatur re-

gula, vt manente eadem parte superiore, punctum C, statuatur in D, & punctum D, in C: & secundum idem latus regulæ CD, recta ducatur ex eodem puncto C, in punctũ D. Nam si posterior hac linea priori omni ex parte congruet, dubitari non debet, quin regula A B, in lineis rectis ducendis fidere possimus: Si vero non congruet omni ex parte, latus illud CD, perfecte rectum non erit, sed corrigendum erit diligentius.

V.

SVPERFICIES est, quæ longitudinem, latitudinemq. tantum habet.

POST lineam, quæ est prima quantitatis continuæ species, vnicamq. habet dimensionem, definit superficiem, quæ secundam magnitudinis speciem constituit, additq. primæ dimensioni secundum longitudinem, alteram secundum latitudinem. Nam in superficie reperiuntur non solum longitudo, vt in linea, verum etiam latitudo, sine tamen omni profunditate. Vt quantitas A B C D, inter lineas A B, BC, C D, D A, comprehensa, considerataq. secundum longitudinem A B, vel D C, & secundum latitudinem A D, vel B C, omnis expers profunditatis, appellatur superficies. Hanc nobis refert latitudo extrema cuiusque corporis, si ab ea omnis soliditas intellectu auferatur. Non incongrue etiam, vt ait Proclus, imaginem quasi expressam superficiei nobis exhibent vmbræ corporum. Ha enim. cum interiorem terræ partem penetrare non possint, longæ tantum erunt, & latæ. Mathematici vero, vt nobis eam ob oculos ponant, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri: Vestigium enim relictum ex ipso motu erit quidem longum, propter longitudinem lineæ, latum quoque propter motum, qui in transuersum est factus; nulla vero ratione profundum esse poterit, cum linea ipsum describens omni careat profunditate; quare superficies dicetur. Vt si linea A B, fluat versus D C, efficietur superficies



ABCD. Alij describentes superficiem dicunt, eam esse corporis terminum: Alij vero, magnitudinem duobus constantem internallis. Potest enim superficies diuidi, & secari duobus modis, vno quidem secundum longitudinem, altero vero secundum latitudinem.

VI.

SVPERFICIEI autem extrema, sunt lineæ.

NON dissimilis est hac definitio superiori, qua termini linea fuere explicati. Vult enim extremitates superficiei esse lineas, quemadmodum linea fines extitere puncta. Vt superioris superficiei A B C D, extrema sunt linea A B, B C, C D, D A. Eodemq; modo in quacunque altera superficie, qua extrema habet, lineas cogitare oportet in extremitatibus: Non autem in superficie infinita, vel etiam spharica, qua corpus spharicum circundat. Potest etiam superficies aliqua claudi, & terminari vnica tantum linea, qualis est circularis superficies, vt dicemus in definitione circuli.

VII.

PLANA superficies est, quæ ex æquo suas interiacet lineas.

HAEC quoque definitio similitudinem quandam descriptionis linea recta gerit. Superficies enim, qua ex aquo lineas suas interiacet, ita vt media partes ab extremis sursum, deorsumue subsultando, non recedant, appellabitur plana: qualis est superficies perpoliti alicuius marmoris, in qua partes omnes in rectum sunt collocata, ita vt nihil habeat incisum angulis, nihil anfractibus, nihil eminens, nihil lacunosum: In hac enim partes intermedia cum extremis aqualem adepta sunt situm, nec vlla est alia sublimior, humiliorue, sed omnes aquabiliter protenduntur. Alij superficiem planam definiunt, dicentes eam esse, cuius partes media obumbrant extrema: Vel esse minimam, siue breuissimam omnium, qua eadem habent extrema: Vel cuius

omnibus partibus recta linea accommodari potest, vt placet Heroni antiquo Geometræ. Vt superficies A B C D, tum demum plana dici debet, quando linea recta A E, circa punctum A, immobile circumducta, ita vt nunc eadem sit, quæ A B, nunc eadem, quæ A F, nunc eadem, quæ A G, & nunc eadem, quæ A H, nihil in superficie offendit depressum, aut sublatum, sed omnia puncta superficiei à linea recta tanguntur, & quodammodo radantur. Quod si minima superficiei particula alijs humilior à linea recta non tangeretur, vel ipsa linea recta libere non posset circumduci, propter aliquem tumorem, seu eminentiam in superficie occurrentem, iam non posset nuncupari plana. Itaque vt sit plana, requiritur vt omnibus modis possit recta linea commensurari, hoc est, vt ei applicari possit recta linea secundum A B, & A F, & denique secundum omnes partes. Hac autem superficies sola erit ea, quam imaginari, & intelligere possumus describi ex motu lineæ rectæ in transuersum, qui super duas alias lineas rectas conficitur. Vt si linea recta A B, per duas rectas A D, B C, feratur, efficietur superficies perfecte plana, iuxta omnes definitiones. Non enim difficile erit huic superficiei traditas descriptiones accommodare. Solent Mathematici superficiem planam frequenter appellare planum, ita vt quando loquuntur de plano, intelligenda semper sit superficies plana. Cæteræ omnes superficies, quibus non omni ex parte accommodari potest linea recta, qualis est superficies interior

alicuius fornicis, vel exterior alicuius globi, columnæve rotundæ, vel etiã coni, &c. appellantur curuæ, & non planæ. Quamuis enim superficiei columnæ rotundæ, seu cylindri, secundum longitudinem adaptari possit linea recta, tamen secundum latitudinem minime poterit. Idemque dicendum est de alijs. Superficies autem curua duplex est, conuexa videlicet, vt exterior superficies sphæræ, vel cylindri; & concaua, vt interior fornicis, siue arcus alicuius. Quoniam vero omnium harum

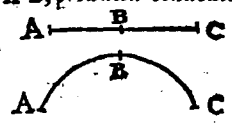
contemplatio pertinet ad Stereometriam, idcirco Euclides hoc primo libro solum planam nobis explicauit, de qua est disputaturus prioribus sex libris.

VIII.

PLANVS vero angulus, est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

DECLARAT, quidnam sit angulus planus, dicens: Quandocunque duæ linea in plana aliqua superficie inuicem concurrunt, & non in directum constituuntur, efficitur ex huiusmodi concursu, seu inclinatione vnius ad alteram, angulus, qui dicitur planus, propterea quod in plana constituatur superficie. Verbi gratia, quia duæ lineæ AB, AC, concurrunt in A, & non iacent in directum, ideo efficiunt angulum A, planum in eadem existentē superficie, in qua duæ illæ lineæ constituuntur. Dicuntur autem duæ lineæ non in directum iacere, quando altera earū versus concursum protensa non coincidit cum altera, sed vel secat, vel certe statim post punctum concursus ab ea recedit. Quod dixerim propter angulum contactus, qui fit, quando duo circuli se contingunt, vel etiam, quando linea recta circulum tangit. Protracta enim recta linea post punctum contactus, quanquam non secet circulum, tamen statim post illud ab eo seiungitur. Eodem pacto circularis illa linea secundum propriam dispositionem, ac formam extensa recedit a recta tangente, quamuis eam non secet. Vnde vere est angulus constitutus in illo contactu: qua de re plura scribemus in propositionem 16. tertij lib. contra Iacobum Peletarium, qui contendit, eam non esse angulum. Quod si duæ lineæ se mutuo tangant incedentes in directum, ita vt alterutra producta congruat sibi alteri, non fiet vllus angulus ex illo concursu, cum nulla sit inclinatio, sed

amba vnam integram lineam constituent. Vt quia recta A B, producta conuenit cum recta B C, non efficietur angulus in B. Sic etiam non fiet angulus in B, ex lineis curuis A B, B C, quia alterutra secundum suam inflexionem, & obliquum ductum extensa, cum altera coincidit. Quare in directum dicentur iacere. Itaque vt linea recta efficiant angulum, necesse est, vt post concursum productæ se mutuo secent: Curua autem linea, vel quarum altera curua, altera vero recta existit, angulum constituere vere possunt, etiamsi non se mutuo intersecent; sufficit enim, quod sese contingant, ita vt statim post contactū altera ab altera separetur, quemadmodum & ante eundem semota cernuntur. Consistit autem anguli cuiusuis quantitas in sola inclinatione, non in longitudine linearum; linea etenim longius excurrentes non augent suam inclinationem, igitur neque anguli magnitudinem. Sunt & alia duo genera angulorum, quorum prius solidos comprehendit, de quibus Euclides differit in Stereometria, quique in corporibus existunt; Posterius vero spharales, qui in superficie sphæra constituuntur ex circulorum maximorū circunferemijs, & de quibus copiose agitur in sphæricis elementis Menelai. Horum autem omnium explicatio in alium locum a nobis reijcitur, cum hic de solis planis angulis sit futurus sermo.

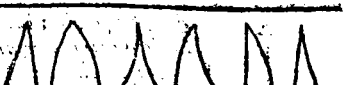


IX.

CVM autem, quę angulum continent lineæ, rectæ fuerint, rectilineus ille angulus appellatur.

ANGVLVS omnis planus conficitur aut ex lineis duabus rectis, qui quidem rectilineus dicitur, & de quo solum hic agit Euclides: aut ex duabus curuis, quem curuilineum vocare licet; aut ex vna curua & altera recta, qui non inepte mixtus appellatur. Ex hisce porro lineis posunt

sunt curuilinei anguli tribus variari modis, & mixti duobus, pro varia inclinatione, seu habitudine linearum curuarum, vtpote secundum connexum, & concauum, ceu in propositis angulis plane, & aperte perspicitur: Rectilineus vero variari non potest ratione inclinationis, habitudinis ve linearum, nisi maiorem, vel minorem inclinationem variam velimus dicere habitudinem, quod est absurdum; cum hoc modo augeatur tantum angulus rectilineus, aut diminuatur, quod & aliis cōmune est, non autē ita varietur, vt aliud constituat genus.



X.

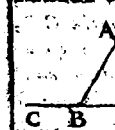
CVM vero recta linea super rectam consistens lineam eos, qui sunt deinceps, angulos æquales inter se fecerit, rectus est vterque æqualium angulorum: Et quæ insistit recta linea, perpendicularis vocatur eius, cui insistit.

VSVS frequentissimus reperitur in Geometria anguli recti, & linea perpendicularis, nec non anguli obtusi, & acuti, propterea docet hoc loco Euclides, quisnam angulus rectilineus apud Geometras appelletur rectus, & quænam linea perpendicularis: In sequentibus autem duabus definitionibus explicabit angulum obtusum, & acutum. Non enim alius dari potest angulus rectilineus, præter rectum, obtusum, & acutum. Igitur si recta linea A B, recta C D, insistens efficiat duos angulos prope punctum B, (qui quidē ideo dicuntur a Mathematicis esse deinceps, quod eos eadē linea C D, protracta, prope idem punctum B efficiat) inter se æquales. quod tum demum fiet, quando recta A B, non magis in C, quā in D, inclinabit, sed æquabiliter recta C D, insistet, vocabitur vterque angulus B, rectus, & recta

A B, perpendicularis rectæ C D, cui insistit. Eadem ratione nominabitur recta C B, perpendicularis rectæ A B: quamvis enim C B, tantum faciat cum A B, unum angulum, tamen si A B, extenderetur in rectum & continuum versus punctum B, efficeretur alter angulus æqualis priori. Qua vero arte linea duci debeat efficiens cum altera duos angulos æquales, docebit Euclides propositione 11. & 12. huius primi libri. Itaque ut in Geometria concludamus angulum aliquem esse rectum, aut lineam, qua ipsum efficit, ad aliam esse perpendicularem, requiritur, & sufficit, ut probemus angulum, qui est ei deinceps, æqualem illi esse. Pari ratione, si dicatur aliquis angulus rectus, aut linea, qua ipsum constituit, perpendicularis ad aliam, colligere licebit, angulum illi deinceps æqualem quoque esse. Quando enim anguli, qui sunt deinceps, fuerint inter se æquales, nuncupatur utrque illorum rectus, & linea ipsos efficiens, perpendicularis, iuxta hanc 10. definitionem: quando autem non fuerint æquales, non dicitur quisquam illorum rectus, ut constabit ex sequentibus duabus definitionibus, & propterea neque linea eos constituens perpendicularis appellatur. Hac dixerim, ut videas, quidnam liceat ex hac definitione colligere in rebus Geometricis, & quemnam usum habeant apud Geometras descriptiones vocabulorum. Non enim magnæ laboris hæc quæ diximus, ad alias definitiones poterunt transferri.

XI.

OBTVSVS angulus est, qui recto maior est.



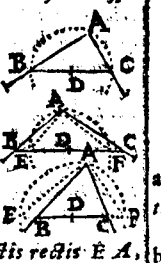
QVANDO recta A B, rectæ C D, insistens non fecerit angulos ad punctum B, æquales, & ab eam causam neutrum rectum, sed unum quidem recto maiorem, alterum vero minorem, dicitur maior angulus obtusus, qualis est angulus B, ad punctum G, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B C.

XII.

ACVTVS vero, qui minor est recto.

VT in præcedenti figura, minor angulus B, ad punctum D, vergens, qui continetur rectis lineis A B, B D, vocatur acutus. Itaque angulus rectus, vt ex dictis colligitur, nullam patitur varietatem, vt vnus altero maior, minorue detur, cum linea perpendicularis eum efficiens non debeat magis in vnam partem inclinare, quam in alteram: Obtusus vero, & Acutus augeri possunt, & minui infinitis modis; cum ab illa inflexibilitate linea perpendicularis infinitis etiam modis recta linea possit recedere, vt perspicuum est. Quoniam vero ad quemuis angulum planum constituendum concurrunt duæ lineæ, & aliquando in vno puncto plures existunt anguli, solent Mathematici, vt tollatur confusio, angulum quemlibet exprimere tribus literis, quarum media ostendit punctum, in quo lineæ conficiunt angulum; extremæ vero significant initia linearum, quæ angulum continent. Exempli gratia, in superiore figura angulum obtusum intelligunt per angulum A B C, acutum vero, per angulum A B D, quod diligenter est notandum, vt facile dignoscamus angulos, quorum mentio fit in demonstrationibus.

I AM vero proposito nobis angulo aliquo rectilineo, si experiri velimus, num rectus sit, an obtusus, acutusve, efficiemus id hoc modo. Contineant duæ rectæ A B, A C, angulum A. Ducta recta B C, vtcunque, quæ angulum subtendat, & diuisa bifariam in D, describatur ex D, vt centro ad interuallum D A, circumferentia circuli; quæ si per puncta B, C, transeat, a *erit angulus A, rectus, vtpote qui in semicirculo B A C, existat: si vero idem semicirculus rectam B C, secet in E, F, erit angulus B A C, obtusus; propterea quod, ductis rectis E A, F A,* b *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est,*



a 31. tertij.

b 31. tertij.

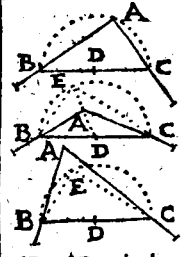
qui

qui quidem pars est anguli B A C. Si denique idem semicirculus rectam B C, productam secet in E, F, erit angulus

a 31. tertij. *B A C, acutus: propterea quod ductis rectis E A, F A,* a *angulus E A F, in semicirculo E A F, rectus est, qui quidem maior est angulo B A C.*

ALITER idem assequemur hoc modo. Describatur ex puncto D, quod rectam B C, dato angulo A, subtensam secat bifariam, semicirculus ad interuallum D B, vel D C: qui

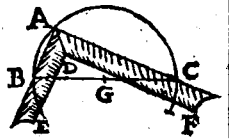
b 31. tertij. *si transeat per punctum A,* b *datus angulus erit rectus, vtpote qui in semicirculo existat. Si vero idem semicirculus transeat supra punctũ A, datus angulus erit obtusus. Ducta enim recta D A, secante circumferentiam in E, iungantur rectæ E B, E C;*



c 31. tertij. d 21. primi. *c eritq. angulus B E C, in semicirculo rectus. Cum ergo angulus B A C, datus* d *maior sit angulo BEC, erit angulus datus A, recto maior, hoc est, obtusus. Si denique semicirculus idem secet rectas A B, A C, erit datus angulus acutus. Sumpto namque puncto E, inter rectas A B, A C, in circumferentia, iungantur recta E B, E C;* e *eritq. angulus B E C, rectus in semi-*

e 31. tertij. f 21. primi. *circulo:* f *qui cum maior sit angulo dato A, erit datus angulus A, recto minor, id est, acutus. Non videatur autem mirum cuipiam, quod ad demonstrationem assumamus propositiones, quæ posterius demonstrantur ab Euclide; quod alienum esse videtur à puritate demonstrationum Geometricarum: Non videatur, inquam, mirum, quia cum id, quod hoc loco ostendimus, necessarium non sit ad sequentes demonstrationes, poterit commode differri, donec propositiones requisitæ sint demonstratæ. Satis est, vt praxis huiusce rei hoc loco intelligatur. Idem obseruabimus in nonnullis praxibus problematum. Eas enim proprijs in locis, quoad eius fieri poterit, proponemus, vt diuisionem anguli rectilinei in quotuis partes æquales eo in loco docebimus, vbi Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas æquales partes, &c. quanquam ad earum praxium demonstrationes necessaria sint propositiones posterius demonstratæ.*

FACILIVS idem cognoscemus beneficio normæ alicuius accuratè fabricatæ, qualem refert instrumentum ABC, constans duabus regulis AE, AF, ad angulum rectum in A, coniunctis. Nam si latus AB, huius normæ, rectæ AB, applicetur, cadente puncto A, in punctum A; si quidem & norma latus AC, rectæ AC, congruat, erit angulus A, rectus: si vero citra rectam AC, cadat norma latus AC, erit angulus A, obtusus: si denique latus normæ AC, vltra rectam AC, cadat, acutus erit angulus, vt perspicuum est.



ITA autem normam examinabimus, num accuratè sit fabricata, nec ne. Descripto semicirculo BAC, ex centro G, cuiusuis magnitudinis, ductaq. diametro BC, ponatur angulus A, in aliquo puncto circumferentiæ, vt in A, latusq. vnum normæ, vt AB, per B, punctum extremum diametri transeat. Nam si alterum tunc latus AC, per alterum punctum extremum C, transeat, rite fabricata erit norma ABC; [a] *quod tunc angulus BAC, in semicirculo BAC, rectus sit; si vero latus AC, non per C, transeat, emendanda erit norma; quia eius angulus A, tunc rectus non erit. Eadem ratione interiorem partem normæ examinabimus, si angulum D, circumferentiæ applicemus, & latera DE, DF, punctis extremis B, C, &c.*

[a] 31. tertij.

XIII.

TERMINVS est, quod alicuius extremum est.

TRES sunt termini iuxta hanc definitionem. Punctum enim terminus est, seu extremum lineæ: Linea superficiei: & superficies corporis. Corpus autem terminare amplius nihil potest, quod non reperiatur alia quantitas plures habens dimensiones, quam tres. Omne siquidem terminatum superat terminum suum vna dimensione, vt perspicuum est ex adductis exemplis.

FI-

XIIII.

FIGVRA est, quæ sub aliquo, vel aliquibus terminis comprehenditur.

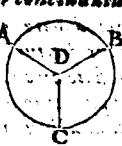
NON omnis quantitas terminos possidens Figura dici potest, ne lineam finitam figuram appellare cogamur: Sed ea solum magnitudines, quæ latitudinem habent, nempe superficies terminatæ, & quæ profunditatem adepta quoque sunt; vt solida finita, Figura nomine appellabuntur. Hæ enim proprie terminis comprehendi dicuntur. Nam linea finita non proprie dicitur punctis extremis comprehendi, cum puncta lineam non ambiant, sed potius punctis terminari dicitur. Itaque termini debent quantitatem, quæ figura dicitur, ambire, & non tantum terminare. Superficies quoque infinita, vel etiam corpus, cum nullis terminis comprehendatur, Figura vocari nulla ratione potest. Figura vnico comprehensa termino sunt, Circulus, Ellipsis, sphæra, sphæroides, & alia huiusmodi: Pluribus vero terminis inclusa figura sunt, Triangulum, Quadratum, Cubus, Pyramis, &c. Superficies terminatæ nuncupantur figura planæ: solida autem circunscripta, figura solida siue corporea. Porro quia formas, seu typos variarum figurarum inspicies quamplurimas in sequentibus, planarum quidem in prioribus 10. libris, solidarum vero in posterioribus quinque, propterea nulla hoc loco figura depingenda esse videtur.

XV.

CIRCVLVS, est figura plana sub vna linea comprehensa, quæ peripheria appellatur, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

DEFINIT hic circulum, figuram inter planas perfectissimam, docens figuram illam planam, quæ vnica li-

nea circumscribitur, ad quam lineam omnes rectæ lineæ ductæ ab vno puncto, quod intra figuram existit, sint æquales, vocari circulum. Vt si superficies, seu spatium concludatur vnica linea A B C, habueritq. hanc conditionem, vt ab aliquo puncto intus suscepto, vepote à D, omnes rectæ lineæ cadentes ad terminum A B C, quales sunt D A, D B, D C, inter se sint æquales, appellabitur talis figura plana, circulus, alias non. Qua vero ratione in circulo punctum illud medium reperiri debeat, docebit Euclides propositione 1. tertij lib. Adiungit quoque Euclides, lineam extremam circuli, qualis est A B C, appellari Peripheriam, seu, vt Latini exponunt, circumferentiam. Potest circulus etiam hac ratione describi. Circulus est figura plana, quæ describitur à linea recta finita circa alterum punctum extremum quiescens circumducta, cum in eundem rursus locum restituta fuerit, vnde moueri cœperat. Qua quidem descriptio persimilis est ei, qua ab Euclide sphæra describitur lib. 11. Vt si intelligatur recta A D, circa punctum D, quiescens moueri, donec ad eundem vadeat locum, à quo dimoueri cœpit, describet ipsa recta totum spatium circulare; punctum vero alterum extremum A, delineabit peripheriam A B C: Erit quoque punctum quiescens D, illud, à quo omnes lineæ cadentes in peripheriam sunt inter se æquales, propterea quod recta A D, circumducta, omnes lineas, quæ ex D, possunt educi ad peripheriam, æque metiatur. Igitur Ellipsis, quamuis figura sit plana vna linea circumscripta, tamen quia in ea non datur punctum, à quo ad ipsam lineam terminantem omnes rectæ lineæ sint æquales, circulus dici nequit.



XVI.

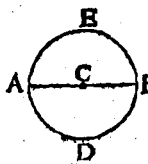
HOC vero punctum, centrum circuli appellatur.

DOCET, punctum illud intra circulum, à quo omnes lineæ rectæ ad circumferentiam ductæ sunt æquales, appellari centrum circuli; quale est præcedentis figuræ pun-

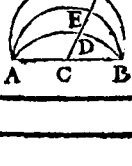
ctum D. Vnde perſpicuum eſt, polum alicuius circuli in ſphæra, à quo omnes recta ad peripheriam circuli cadentes ſunt æquales, vt ait Theodoſius in ſphæricis elementis, non dici debere centrum circuli, cum punctum illud, quod polus dicitur, exiſtat in ſuperficie ſphæræ, non autem in ſuperficie circuli; quatamen eſt neceſſario requiſita conditio, vt punctum aliquod centrum vocetur. Cæterum, vt punctum aliquod circuli dicatur centrum, ſatis eſt, vt ab eo tres duntaxat lineæ cadentes in peripheriam ſint æquales inter ſe, vt demonſtrat Euclides propoſitione 9. lib. 3. Hac enim ratione fiet, vt omnes aliæ ab eodem puncto emiſſæ inter ſe ſint æquales.

XVII.

DIAMETER autem circuli, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ex vtraque parte in circuli peripheriam terminata, quæ circulum bifariam ſecat.



SI in circulo ducatur recta linea A B, per centrum C, ita vt extrema eius A, & B, terminentur in peripheria, appellabitur ea circuli diameter. Non igitur omnis in circulo recta linea ducta diameter dicetur, ſed ea ſolummodo, quæ per centrum vſque ad peripheriam vtrinque extenditur. Vnde plures aſſignari poterunt in circulo diametri, vnum vero centrum duntaxat. Quod autem Euclides addit, circulum bifariam ſecari à diametro, perſpicuum ex eo eſſe poteſt, quod diameter per medium circulum, vtpote per centrum, ducitur. Hinc enim fit, vt propter directum diametri per centrum tranſitum, vtrinque



æquales circunferentiæ abſcindantur. Quod tamen Thaletem Mileſium hac ratione demonſtraſſe teſtatur Proclus. Concipiamus animo, portionem A D B, accommodari, & coaptari portioni reliquæ A E B, ita vt

diameter AB, communis sit utrique portioni: Si igitur circunferentia A D B, congruat penitus circunferentiæ AEB, manifestum est, duas illas portiones a diametro factas, esse inter se æquales, quandoquidem neutra alteram excedit: Si vero circunferentia A D B, non omni ex parte cadere dicatur super circunferentiam A E B, sed vel extra eam, vel intra, vel partim extra, partim intra; tunc ducta recta à centro C, secante circunferentiam A D B, in D, & circunferentiam A E B, in E, erunt duæ rectæ CD, C E, ductæ ex centro ad circunferentiam eiusdem circuli æquales, per circuli definitionem, cum tamen una sit pars alterius, quod est absurdum. Non ergo cadet una circunferentia extra aliam, vel intra, vel partim extra, partim intra, sed ambæ inter se aptabuntur, ideoq. æquales erunt. quod demonstrandum proponebatur.

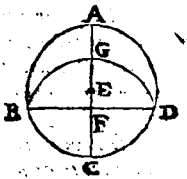
EX hac demonstratione constat, diametrum non solum circunferentiam, verumetiam totam aream circuli secare bifariam. Cum enim semicircunferentiæ sibi mutuo congruunt, vt ostensum est, congruent etiam superficies ipsa inter diametrum, & vtramque circunferentiam comprehensa, cum neutra alteram excedat. Quare æquales inter se erunt.

XVIII.

SEMICIRCVLVS vero est figura, quæ continetur sub diametro, & sub ea linea, quæ de circuli peripheria aufertur.

EXEMPLI gratia, in superiori circulo figura ADB, contenta sub diametro A B, & peripheria A D B, dicitur semicirculus, quia, vt in præcedenti definitione ostendimus, ea est dimidiata pars circuli. Eadem ratione erit figura A E B, semicirculus. Idem autem punctum C, diametrum secans bifariam, centrum est in circulo, & in semicirculo.

QVOD si rectæ lineæ B D, non transeat per centrum E, secabitur circulus ab ea non bifariam, sed in duas portiones inæquales B A D, B C D, quarum ea, in qua cen-



trum circuli existit, cuiusmodi est portio B A D, maior est, quam alia B C D, extra quam centrum E, reperitur. Esse autem portiones B A D, B C D, inaquales, ita probari potest. Concipiatur per centrum E, ducta diameter ad rectam B D, perpendicularis A G. Si igitur dictæ portiones dicantur esse æquales, & portio B C D, intelligatur moueri circa rectam B D, vt super portionem B A D, cadat, congruet illa portio huic, & recta F C, rectæ F A, congruet, ob angulos rectos ad F, qui omnes inter se æquales sunt ex defin. 10. cum sint sibi mutuo deinceps. Recta ergo F C, quæ nunc eadem est, quæ F A, maior erit, quam E A, pars ipsius F A. Cum ergo ipsi E A, sit æqualis E C, quod ambæ ducantur è centro ad circumferentiam, erit quoque F C, maior quam E C, pars quam totum, quod est absurdum. Non igitur portio B C D, portioni B A D, congruet, sed intra eam cadet, cuiusmodi est portio B G D, vt recta F G, eadem tunc existens, quæ F C, minor possit esse quam E A, vel E C. Si namque diceretur cadere extra, vt si circulus esset B C D G, cuius centrum E, & portio B C D, caderet extra B G D, qualis est portio B A D, esset rursus F A, eadem tunc existens, quæ F G, maior quam E G, hoc est, quam E C, atque ita pars F C, maior rursum foret tota E C. quod absurdum est. Ex quæ patet, portionem B A D, in qua centrum E, existit, maiorem esse reliqua portione B C D, cum hæc æqualis sit portioni B G D, quæ pars est portionis B A D. Cum enim ostensum sit, portionem B C D, circa rectam B D, circumductam non posse congruere portioni B A D, neque cadere extra, cadet omnino intra, qualis est B G D.

XIX.

RECTILINEAE figuræ sunt, quæ sub rectis lineis continentur.

POST definitionem circuli, traditurus iam Euclides

describi-

scriptiones variarum figurarum, explicat prius, quanam figura dicantur rectilineæ. De his enim potissimum sermo futurus est in hisce libris. Omnes igitur figuræ planæ, quæ undique rectis claudantur lineis, rectilineæ nuncupantur. Ex quo perspicuum est, figuras planas curvis lineis comprehensas, dici curvilineas: Eas vero, quæ partim curvis, partim rectis circumscribuntur, appellari mixtas. Varia autem nunc genera figurarum rectilinearum ab Euclide describuntur.

XX.

TRILATERAE quidem, quæ sub tribus.

AFFIRMANS Euclides, eas rectilineas figuras dici trilateras, quæ tribus rectis linvis circumscribuntur, aperte nobis innuit, quonam modo Triangulum definiri debeat. Cum enim in rectilineis figuris tot sint anguli, quot latera, seu recta linea, ex quibus constant, dicetur triangulum, figura tribus rectis lineis contenta, cuius omnes species iam iam adducentur.

XXI.

QVADRILATERAE vero, quæ sub quatuor.

EADEM ratione erit Quadrangulum, figura quatuor rectis lineis contenta, cuius variæ species mox subsequentur.

XXII.

MVLTILATERAE autem, quæ sub pluribus, quam quatuor, rectis lineis comprehenduntur.

QVONIAM species rectilinearum figurarum sunt

innumerabiles, propter infinitum numerorum progressum. Nam tres rectæ lineæ claudentes figuram efficiunt primam speciem, sub qua omnia triangula continentur; quatuor constituunt secundam, qua omnia quadrangula complectitur; quinque tertiam componunt speciem; sex quartam, atque ita deinceps infinito: Ideo Euclides, ne infinitatem hanc figurarum cogatur persequi, vocat omnes alias figuras rectilineas, qua pluribus, quam quatuor, rectis lineis circumscribuntur, generali vocabulo Multilateras; contentus denominatione trilaterarum figurarum, & quadrilaterarum, fortassis eam ob causam, quod præcipue in prioribus his libris de Triangulis, atque Quadrangulis sermo habeatur, & quod facile ad similitudinem harum duarum specierum cætera omnes à quolibet definiri possint. Quis enim ex dictis non colligat, figuram quinque lineis rectis contentam appellari quinquilateram, & sex lineis comprehensam sexilateram, atque reliquas eodem modo? Sic etiã dici poterunt huiusmodi figuræ quinquangula, sexangula, septangula, &c.

XXIII.

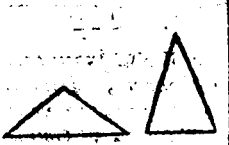
TRILATERARVM autem figurarum, Aequilaterum est triangulum, quod tria latera habet æqualia.

DESCENDIT iam ad singulas species triangulorum. Quia vero triangula diuidi possunt vel habita ratione laterum, vel angulorum, declarat prius species prioris diuisionis, quæ tres sunt duntaxat, quod tria latera tribus tantum modis sese possint habere. Aut enim omnia æqualia sunt; aut duo tantum, tertio existente vel maiore, vel minore; aut omnia inæqualia. Quando igitur omnia tria latera inter se æqualia sunt, dicitur triangulum Aequilaterum. Porro ex æqualitate omnium trium laterum trianguli æquilateri infertur, omnes tres eius angulos æquales quoque esse, ceu ad quintam propositionem huius libri demonstrabimus.

ISO-

XXIIII.

ISOSCELES autem est, quod duo tantum æqualia habet latera.



EX hac rursum æqualitate duorum laterum trianguli Isoscelis efficitur, duos angulos super reliquum latus etiam esse æquales, vt demonstrabit Euclides propos. 5. huius libri. Apposuimus autem duo triangula Isoscelia, quorum prius habet tertium latus vtrouis æqualium maius, posterius autem idem minus obtinet: ita vt duæ sint species trianguli Isoscelis; alterum, cuius tertium latus sit vtrouis æqualium maius, & alterum, quinz tertium latus vtrouis æqualium minus sit.

XXV.

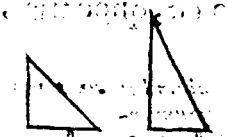
SCALENVM vero est, quod tria inæqualia habet latera.

HIC denique ex inæqualitate omnium laterum trianguli Scaleni colligitur omnium angulorum inæqualitas, vt ostendetur propos. 18. huius 1. lib. Porro ex his constat, eodem modo potuisse dividi triangulum in tres species, si æqualitatis angulorum ratio haberetur. Cum enim aut omnes tres anguli sint inter se æquales; aut duo tantum, tertio maiore, vel minore existente; aut omnes tres inæquales; erit omne triangulum vel æquiangulum, habens tres omnes angulos æquales: vel duorum tantum angulorum æqualium: vel omnium angulorum inæqualium; quorum primum videm Æquilatero, secundum vero Isoscelí, tertium denique Scalenо respondet triangulo. Caterum quanam arte construenda sint triangula huius partitionis super quauis data recta linea finita, trademus propos. 1. huius lib.

XXVI.

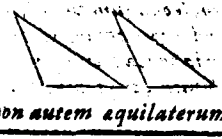
AD hæc etiam, trilaterarum figurarum, Rectangulum quidem triangulum est, quod rectum angulum habet.

NVNC exponit triangulorum species iuxta posteriorem diuisionem, habita ratione varietatis angulorum. Quia vero tria tantummodo sunt angulorum rectilineorum genera diuersa; (Omnis enim angulus rectilineus vel est rectus, vel obtusus, vel acutus, vt supra diximus,) sic vt tres quoque species triangulorum sub hac consideratione reperiantur. Nam aut vnus angulus trianguli est rectus, & ob eam rem reliqui acuti, vt ex 17. propos. 1. lib. constabit; aut obtusus, & ob eandem causam reliqui acuti, aut denique nullus rectus, nullusque obtusus, sed omnes acuti. Quando igitur triangulum aliquod habet angulum vnum rectum, vocatur ab Euclide, & aliis Geometris Rectangulum. Potest autem triangulum huiusmodi esse Isosceles, vel scalenum, vt hæ figura indicant, aequilaterum autem nulla ratione. Propter æqualitatem enim laterum essent per ea, quæ propos. 5. dicimus, omnes etiam anguli æquales, idoque, cum vnus concedatur rectus, omnes tres recti, quod pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.



XXVII.

AMBLYGONIVM autem, quod obtusum angulum habet.



TRIANGVLVM Amblygonium, siue obtusangulum esse quoq. potest vel Isosceles, vel scalenum, vt in his figuris cernitur, non autem æquilaterum, alias eadem ratione essent omnes

tres

tres anguli per 32. huius propos. 5. ostendemus æquales, ideoque cum unus ponatur obtusus, omnes tres obtusi. quod multo magis pugnat cum propos. 17. & 32. huius libri.

XXVIII.

OXYGONIVM vero, quod tres habet acutos angulos.

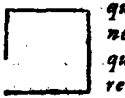
OMNE triangulum Oxygonium, siue acutangulum, potest esse vel æquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum, vt cernere licet in triangulis, quæ in speciebus prioris diuisionis spectanda exhibuimus, neque adem hic frustra repetantur. Ex dictis igitur palam fit, triangulum quodcunque æquilaterum, esse necessario Oxygonium. At omne triangulum tam Isosceles, quam Scalenum, esse vel Isosceles Oxygonium vel Amblygonium, vel Oxygonium, atque Isosceles habens vnum latus vtrouis æqualium maius, atq. Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium minus: Vnum sit tertiũ latus vtrouis æqualium maius, & tres species triangulorum æquilateri, quatuor vero Isosceles. & tres Scaleni atque duo inuniuersum octo triangulorum genera; æquilaterum, quod perpetuo Oxygonium esse diximus, Isosceles rectangulum, Isosceles Amblygonium, Isosceles Oxygonium habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Isosceles habens tertium latus vtrouis æqualium minus, Scalenum Oxygoniũ habens tertium latus vtrouis æqualium minus, Scalenum rectangulum, Scalenum Amblygoniũ, & Scalenum Oxygonium. Qua etiam hac licebit nominibus immutatis appellare, Rectangulũ Isosceles, Amblygonium Scalenum, Oxygonium Isosceles habens tertium latus vtrouis æqualium maius, Oxygonium Isosceles habens tertium latus vtrouis æqualium minus, & Oxygonium Scalenum. Quare perspicuum est, quamnam connexionem, similitudinem, affinitatem habeant inter se triangula vtriusque particulæ. Posse autem dari triangulum Isosceles Oxygonium, cuius dextrum latus æquale vtrumuis tertio sit minus, vt rectè animaduertit Franciscus Barocius in sua Cosmographia, ostendemus ad propos. 15. lib. 4. In omni porro trian-

triangulo, cuius duo quæcunque latera expressa nominantur, solet reliquum latus tertium à Mathematicis appellari Basis, siue illud in situ infimum occupet locum, siue supremum, &c. Hoc te breuiter monere volui, ne putares aliquid latere mysterij in basi trianguli, intelligeresq. quodlibet latus, omni discrimine remoto, basis nomine posse nuncupari.

XXIX.

QVADRILATERARVM autem figurarum, Quadratum quidem est, quod & æquilaterum, & rectangulum est.

POST figurarum trilaterarum species, exposuit iam singulatim quadrilateras figuras, recensendo quinque tantummodo earum genera, quorum quatuor priora regularia sunt, posterius autem, & quintum irregulare. Prima figura quadrilatera dicitur Quadratum, cuius quidem omnia



quatuor latera inter se æqualia existunt, omnesq. anguli recti. Itaque quadrangulum æquilaterum, & non rectangulum; vel contra, rectangulum, & non æquilaterum, nequaquam Quadratum appellabitur. Docebit autem Euclides propos. 46. huius lib. quonam modo construendum sit quadratum super recta linea proposita finita.

XXX.

ALTERA vero parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.

SECVNDA figura quadrilatera appellatur Altera parte longior, in qua quidem anguli sunt recti, at latera non sunt inter se æqualia, quamuis bina opposita inter se æqualia existant. Vt in altera parte longiori A B C D, latera A B, D C, inter se, & A D, B C,

inter

inter se quoque aqualia sunt, cum A B C D, propter angulorum rectitudinem, parallelogrammum sit, vt in hoc lib. ad propos. 34. ostendemus.

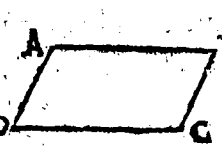
XXXI.

RHOMBVS autem, quæ æquilatera, sed rectangula non est.

H A E C figura tertia inter quadrilateras, quæ Rhombus dicitur, oppositas prorsus habet conditiones, & diuersas à conditionibus figuræ alterà parte longioris. Habet enim omnia latera æqualia, angulos vero non rectos, & inæquales, quamuis bini oppositi inter se æquales existant. Vt in Rhombo A B C D, anguli A, & C, inter se, & B, & D, quoque inter se æquales sunt, cum A B C D, propter æqualitatem laterum, parallelogrammum sit, ceu ad eundem propos. 34 huius libri demonstrabitur.

XXXII.

RHOMBOIDES verò, quæ aduersa & latera, & angulos habens inter se æquales, neque æquilatera est, neque rectangula.



E S T hæc figura, quæ Rhomboides vocatur, quadrato omni ex parte opposita. Nam neque eius latera omnia æqualia sunt, neque vllus angulus rectus, sed tamen latera bina opposita, qualia sunt A B, D C, & A D, B C, in Rhomboide A B C D, æqualia inter se, item anguli bini oppositi, quales sunt A, C, & B, D, inter se existunt æquales. Ha igitur quatuor figura quadrilatera dici possunt regulares; cætera verò omnes, quæcunque sint, irregulares.

XXXIII.

PRAETER has autem, reliquę quadrilateræ figuræ, trapezia appellentur.

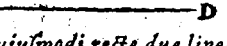
RELIQVAS omnes figuras quadrilateras, quæ à prædictis quatuor differunt, ita vt neque latera omnia æqualia, neque omnes angulos æquales, seu rectos, neque latera bina opposita; neque angulos binos oppositos habeant inter sese æquales, generali vocabulo Trapezia nominat: quæ quidem cum infinitis modis variari queant, ea certe irregularia nuncupabuntur. Possunt enim duo anguli esse recti, vel vnus obtusus, & alij acuti, vel duo obtusi, & alij acuti, &c. Eadem fieri potest quasi diuisio penes latera: Nam vel aliqua æqualia inter se sunt, vel nullum alteri est æquale, &c. Determinatas porro trapeziorum species nonnullas afferemus post definitionem linearum parallelarum, seu æquidistantium, & parallelogrammi.

XXXIIII.

PARALLELAE rectæ lineæ sunt, quæ cum in eodem sint plano, & ex vtraque parte in infinitum producantur, in neutram sibi mutuo incidunt.

VT dua, vel plures recta linea dicantur parallelæ, siue æquidistantes, non satis est, vt in quamcunque partem etiam spatio infinito, productæ nunquam ad vnum punctum coeant; sed necesse quoque est, vt in vna plana superficie existant. Multæ siquidem lineæ rectæ non existentes in eadem superficie plana productæ ad spatium infinitum, nunquam in vnum conueniunt, & tamen non sunt parallelæ dicendæ; quales sunt, exempli gratia, duæ rectæ lineæ in transuersum positæ in medio aere, & non se tangentes: Ita etenim nunquam coire possunt. Dicuntur autem duæ rectæ

linea in eadem existere plana superficie, quando superficies aliqua plana uni earum accommodata, sita vt omnia puncta illius tangat, & circa illam immobilem circumuoluta, alteri quoque accommodari potest secundum omnia eius puncta, quamuis re ipsa in duabus superficiebus diuersis reperiantur; Vt propositis duabus rectis lineis AB, CD, & superficies aliqua plana recta AB, applicetur, omnia eius tangens puncta, sita vt circa illa circumducta tangat quoque omnia puncta alterius rectæ CD; dicentur huiusmodi rectæ duæ lineæ in eadem superficie plana existere, alias non. Si igitur hæ duæ rectæ lineæ eadem non coeant, etiamsi infinite producantur tam ad partes A, C, quam ad B, D, appellabuntur parallelæ, siue æquidistantes. Caterum planius, perfectiusque intelliges in xi. lib. quo modo duæ rectæ lineæ, vel etiã plures in eadem dicantur superficie existere: Satis sit hoc loco breuiter admonuisse, recte ab Euclide vtramque conditionem esse positam in definitione linearum parallelarum. Debent enim in eodem existere plano, & producta in vtrãuis partem nunquam in vnum conuenire, quanquam hæc productio continuetur ad spatium infinitum. Quod si duæ rectæ lineæ per immensum aliquod spatium extensa non cõtinuantur coire, conflet tamen, eas tandem ex vna parte longius protractas in vnum punctum conuenturas, quamuis ex altera semper magis ac magis inter se distent, ac disiungantur, nequaquam appellandæ erunt parallelæ. Quotiescunque ergo duæ lineæ rectæ dicuntur a quopiam esse parallelæ, is necesse est concedat, illas in vna, eademq. superficie iacere, & nunquam posse coire. Similiter, si quis concludere velit, duas rectas lineas esse parallelas, hic demonstret prius oportet, eas in eodem existere plano, & in neutram partem productas coniungi posse. Qua in re non pauci videntur hallucinari, qui ex eo duntaxat conantur ostendere, aliquas rectas lineas esse parallelas, quod in neutram partem coeant, etiamsi infinite producantur, nulla facta prorsus mentione alterius conditionis, qua easdem lineas in eodem requirit existere plano.



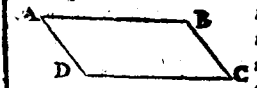
HIC finem imponit Euclides definitionibus primi libri. Quoniam vero hoc eodem libro mentio fiet figuræ, quæ Parallelogrammum, necnon earum, quæ complementa parallelogrammi dicuntur, necessarium esse duximus, duabus definitionibus adiunctis explicare, quid sit Parallelogrammum, & quæ sint parallelogrammi complementa, vt facilius demonstrationes percipiantur.

XXXV.

PARALLELOGRAMMVM

est figura quadrilatera, cuius bina opposita latera sunt parallela, seu æquidistantia.

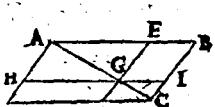
VT figura quadrilatera ABCD, si quidem latus AB, æquidistet lateri DC, & latus AD, lateri BC, nuncupatur Parallelogrammum. Sunt autem quatuor solum parallelogramma; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, & Rhomboides, quorum priora duo rectangula, quod omnes angulos habeant rectos, posteriora vero duo non rectangula vocantur, quod nullus in eis angulus existat rectus. Caterum, quatuor has figuras esse parallelogramma, ostendemus ad propos. 34. huius lib. Itaque possumus quadrilateras figuras, (vt & antiqui Geometræ) diuidere in Parallelogrammum, & Trapezium. Parallelogrammum rursus in rectangulum, & æquilaterum, quale est Quadratum: in nec rectangulum, nec æquilaterum, quale est Rhomboides; in rectangulum, sed non æquilaterum, qualis est figura altera parte longior: & in æquilaterum, sed non rectangulum, cuiusmodi est Rhombus. Trapeziorum quoque aliud quidem habet duo latera opposita parallela, alia vero minime; aliud autem nulla opposita latera habet parallela. Præterea illud prius vel habet duo illa latera, quæ non sunt parallela, inter se æqualia, diciturq. Trapezium Isosceles: vel inæqualia, Trapeziumq. Scalenum appellatur. Itaque ex



his omnibus septem genera figurarum quadrilaterarum constitui possunt; Quadratum, figura altera parte longior, Rhombus, Rhomboides, Trapezium Isosceles, Trapezium Scalenum, & Trapezium illud irregulare, in quo nulla latera sunt parallela.

XXXVI.

CVM vero in parallelogrammo diameter ducta fuerit, duæq. lineæ lateribus parallelæ secantes diametrum in vno eodemque puncto, ita vt parallelogrammum ab hisce parallelis in quatuor distribuatur parallelogramma; appellantur duo illa, per quæ diameter non transit, complementa; duo vero reliqua, per quæ diameter incedit, circa diametrum consistere dicuntur.



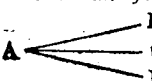
SIT parallelogrammũ ABCD, in quo diameter AC, & linea EF, secans diametrum in G, & parallela existens lateribus AD, BC. Item linea HI, secans diametrum in eodem puncto G, parallelaque lateribus AB, DC, existens. Qua cum ita sint, perspicuum est, parallelogrammum totum diuisum esse in quatuor parallelogramma, quorum quidem duo EBIG, GFDH, per qua diameter AC, non transit, vocantur à Gebmetris complementa, siue supplementa reliquorum duorum AEGH, GICF, qua dicuntur circa diametrum consistere, quippe cum per ea diameter transeat, vt videre est in presenti figura.

PETITIONES, SIVE POSTVLATA.

I.

POSTVLETVR, vt à quouis puncto in quoduis punctum, rectam lineam ducere concedatur.

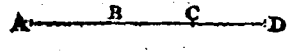
PRIMVM hoc postulatum planum admodum est, si recte considerentur ea, quæ paulo ante de linea scripsimus. Nam cum linea sit fluxus quidam puncti imaginarius, atque adeo linea recta fluxus directo omnino itinere progrediens, fit vt si punctum quodpiam ad aliud directo moueri intellexerimus, ducta sane sit à puncto ad punctum recta linea: Id quod prima hac petitione postulat Euclides, quemadmodum hic vides à puncto A, ductam esse rectam lineam ad punctum B; ab eodemq. aliam ad punctum C; Item aliam ad punctum D; & sic innumeras alias ab eodem puncto educi possunt ad alia atque alia puncta.



II.

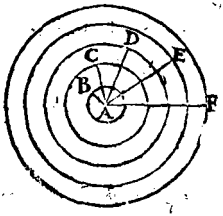
ET rectam lineam terminatam in continuum recta producere.

QVOD si punctum illud ferri adhuc cogitauerimus motu directo, & qui omnis inclinationis sit expers, producta erit ipsa recta linea terminata, & nunquam erit finis huius productionis, cum punctum illud intelligere possimus moueri ad infinitam distantiam. Sic linea recta AB, producta est primo in continuum ad punctum C. Deinde ad punctum D, &c.



III.

ITEM quouis centro, & interuallo circulum describere.



IAM vero, si terminatam rectam lineam cuiuscunque quantitatis mente conceperimus applicatam esse secundum alterum extremum ad quoduis punctum, ipsamque circa hoc punctum fixum circumduci, donec ad eum reuertatur locum, à quo dimoueri cœpit; describetur erit circulus, effectumq.. quod tertia petitio iubet. Exemplum habes in his quinque lineis AB, AC, AD, AE, AF, quæ singulæ circa centrum A, circumuolutæ singulos circulos describserunt iuxta quantitatem, seu interuallum ipsarum.

PRAETER hæc tria postulata, quibus Euclides contentus fuit, sunt multa alia æque facilia, e quibus duntaxat in medium proferre decreui illud, quod frequentius repetendum erit in progressu totius Geometriæ. Reliqua enim prudens lector ex se vel facile intelliget.

IIII.

ITEM quacunque magnitudine data, sumi posse aliam magnitudinem vel maiorem, vel minorem.

OMNIS enim quantitas continua per additionem augeri, per diuisionem vero diminui potest infinite: Vnde nunquam dabitur quantitas continua adeo magna, quin ea maior dari possit: neque tam parua, quin minor ea possit exhiberi. Hoc idem in numeris verum est, quod ad additionem pertinet. Nam quilibet numerus per continuam additionem vnitatis augeri potest infinite: quamuis in eius diminutione ad vnitatem indiuiduam deueniatur.

COMMVNES NOTIONES

siue Axiomata, quæ & Pronunciata dici solent, vel Dignitates.

I.

QVAE eidem æqualia, & inter se sunt æqualia. Et quod vno æqualium maius est, aut minus, maius quoque est, aut minus altero æqualium. Et si vnum æqualium maius est, aut minus magnitudine quapiam, alterum quoque æqualium eadem magnitudine maius est, aut minus.

FIERI nulla ratione potest, vt duæ quantitates inæquales, æquales sint alteri quantitati. Si enim minor illarum propositæ quantitati æqualis extiterit, excedet eandem necessario maior illarum. Et si maior æqualis fuerit propositæ quantitati, superabitur minor ab eadem. Quare recte colligitur, quantitates, quæ eidem quantitati æquales fuerint, inter se æquales quoque esse. Reliqua quoque partes Axiomatis à nobis adiecta, quod frequenti vsum habeant, clarissima sunt.

II.

ET si æqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt æqualia.

SI enim quantitates conflatæ, siue compositæ, inæquales forent, procul dubio maiori plus esset adiectum, quam minori, cum antea æquales extiterint. Quare ex additione æqualium quantitatum ad quantitates æquales, conficientur quantitates quoque æquales.

III.

ET si ab æqualibus æqualia ablata sint, quæ relinquuntur, sunt æqualia.

NAM si reliqua quantitates forent inæquales, à minore plus fuisset detractum, quam à maiore.

IIII.

ET si inæqualibus æqualia adiecta sint, tota sunt inæqualia. Et, si inæqualibus inæqualia adiecta sint, maiori maius, & minori minus, tota sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

QVIN & si æqualibus inæqualia adiecta sint, tota erunt inæqualia: quoniam maior quantitas addita æqualium, maiorem constituit quantitatem, quam minor alteri æqualium adiecta: quemadmodum & si inæqualibus æqualia adjiciantur, composita quantitas ex maiore, maior est, quam composita ex minore. Alteram partem huius Axiomatis nos adiecimus, propter frequentem eius vsum.

V.

ET si ab inæqualibus æqualia ablata sint, reliqua sunt inæqualia. Et si ab inæqualibus inæqualia ablata sint, à maiori minus, & à minori maius, reliqua sunt inæqualia, illud nimirum maius, & hoc minus.

SIC etiam, Si ab æqualibus inæqualia ablata sint, reliqua erunt inæqualia: quia maior quantitas ablata relinquet minorem quantitatem, quam minor; quemadmo-

dum residuum maioris maius est residuo minoris, si aqualia auferantur ab inaqualibus. Caterum Euclides non docet, quidnam simpliciter, & absolute gignatur ex additione quantitatum inaqualium ad quantitates inaquales, vel quid relinquatur post subtractionem inaqualium quantitatum ab inaqualibus quantitatibus; propterea quod nihil certo colligi inde potest, nisi quando maiori maius additur, & à maiori minus detrahitur, vt in secunda parte Axiomatis dictum est, quam notabilem eius vtilitatem adiecimus. Possunt enim composita quantitates, vel residua, esse & inaquales, & aquales. Si enim ad 7. & 5. addantur 4. & 3. efficientur 11. & 8. qua sunt inaqualia. Sic etiam si ex 7. & 5. detrahantur 2. & 1. relinquentur 5. & 4. qua sunt inaqualia. At vero, si ad 7. & 5. addantur 4. & 6. conficientur 11. & 11. qua aqualia sunt. Item si detrahantur 3. & 1. ex 7. & 5. remanebunt 4. & 4. qua aqualia quoque existunt.

PORRO in his omnibus pronunciatis, primo excepto, nomine aqualium quantitatum intelligenda est etiam vna & eadem multis communis. Si enim aqualibus idem commune adjciatur, tota fient aqualia. Et si ab aqualibus idem commune detrahatur, residua aquatia erunt. Et si inaqualibus idem commune adjciatur; vel eidem communi addantur inaqualia, tota fient inaqualia; & si ab inaqualibus idem commune detrahatur, vel ab eodem communi inaqualia auferantur, residua existent inaqualia.

VI.

ET quæ eiusdem duplicia sunt, inter se sunt æqualia. Et quod vnius æqualium duplum est, duplum est & alterius æqualium.

SIMILITER, qua eiusdem sunt triplicia, vel quadruplicia, vel quincuplicia, &c. inter se sunt aqualia. Si enim inaqualia forent, & maius eorum esset duplex, vel triplex, &c. alicuius quantitatis, deficeret vtique minus à duplici, vel triplici. &c. Quod si contra, minus esset duplex,

vel

vel triplex, &c. quantitatis cuiuspiam, excederet sane maius duplex ipsam; vel triplex, &c. Hoc autem & ex secundo axiomate comprobari potest, ad hunc modum. Si enim duæ quantitates æquales fuerint alicui tertiæ, & utrique tertiæ illa addatur, erunt compositæ duplices illius tertiæ, a *sed & inter se æquales, ob idem additamentum. Quod si rursum compositis eadem tertia adijciatur, erunt conflatæ triplices eiusdem tertiæ. Cum igitur* b *& æquales inter se, propter idem additamentum, existant; eademq; sit ratio in cæteris multiplicibus, perspicuum erit Axioma propositum. Secundam porrò partem huius Axiomatis nos apposuimus, quod non raro eius usus in rebus Geometricis requiratur.*

a 2. pron

b 2 pron

VII.

ET quæ eiusdem sunt dimidia, inter se æqualia sunt. Et contra, Quæ æqualia sunt, eiusdem sunt dimidia.

PARI ratione, quæ eiusdem sunt partes tertiæ, vel quartæ, vel quintæ, &c. inter se æqualia sunt.

IN his duobus pronuntiatis per eandem quantitatem, intelligi debent quantitates etiam æquales. Nam quæ æqualium duplicia sunt, vel triplicia, &c. inter se æqualia quoque sunt: Item, quæ æqualium sunt dimidia, vel tertia, vel quarta, &c. & inter se æqualia necessario existunt. Partem quoque secundam huiusce Axiomatis nos adiunximus, propterea quod non minus frequenter, quam prima, à Geometris usurpatur.

VIII.

ET quæ sibi mutuo congruunt, ea inter se sunt æqualia.

HOC est, duæ quantitates, quarum una superposita alteri, neutra alterum excedit, sed ambæ inter se congruunt, æquales erunt. Vt duæ lineæ rectæ dicentur esse æquales, quando una alteri superposita, ita quæ superponi-

tur, alteri tota congruit, ita vt eam nec excedat, nec ab ea excedatur. Sic etiam duo anguli rectilinei æquales erunt, quando vno alteri superposito, is qui superponitur, alterum nec excedit, nec ab eo exceditur, sed linea illius cum lineis huius prorsus coincidunt: Ita enim erunt inclinationes linearum æquales, quamuis linea interdum inter se inæquales existant.

E CONTRARIO, Quæ inter se sunt æqualia, sibi mutuo congruent, si alterum alteri superponatur. Intelligendum est autem, quantitates sibi mutuo congruentes, esse æquales, secundum id duntaxat, in quo sibi congruunt. Congruit autem longitudo longitudini tantum, superficies superficiei, solidum solido, linearum inclinatio inclinationi linearum, &c.

IX.

ET totum sua parte maius est.

CVM pars à toto ablata relinquat adhuc aliquid, ne totum ipsum auferatur; perspicuum est, omne totum sua esse parte maius.

IN sequentibus porro pronuntiatis interrumpitur ordo Euclidis, propterea quod duo alia axiomata hoc loco inferenda esse censuimus valdè necessaria, cùm ex ijs Axioma 12. quod Euclidi est decimum, demonstrari possit, vt ibi dicemus. In margine tamen numeros apposuimus ordini Euclidis respondentes.

X.

DVAE lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

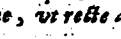
NON est difficile istud Axioma, si perfectè intelligatur natura rectæ lineæ. Cum enim linea recta directo semper itinere, nullam in partem deflectendo, producatur, fieri nulla ratione potest, vt duæ lineæ rectæ habeant vnam partem, quamuis minimam, communem, præter vnicum punctum, in quo se mutuo intersecant. Quod tamen breuiter Proclus ita demonstrat. Habeant, si fieri potest, duæ rectæ

AB, AC, partem communem AD. Ex centro autem D, & interuallo DA, a describatur circulus secans duas rectas propositas in punctis B, & C; b Erunt igitur duæ circunferentiæ AB, ABC, inter se æquales, (Sunt enim circunferentiæ semicirculorum æqualiũ, cum ADB, ADC, ponantur esse diametri) pars & totum, quod est absurdum. Non ergo duæ rectæ habent vnum & idem segmentum commune. Quod est propositum.

a 3. petit.

b 17. def.

POSSVNT tamen duæ lineæ rectæ commune habere segmentum, quando vnam & eandem rectam lineam constituunt. Vt in hac figura, rectæ AD, BC, commune habent segmentum CD, quia ambæ vnam rectam constituunt lineam AB.

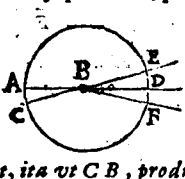


At vero quando duæ rectæ sunt diuersæ, quales fuere AB, AC, in superiori exemplo, non possunt possidere segmentum aliquod commune, vt recte à Proclo fuit demonstratum.

XI.

DVAE rectæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt.

HOC etiam Axioma ex natura lineæ rectæ pendet. Quod tamen ita demonstrabimus. Coeant duæ rectæ AB, CB, in B. Dico illas productas se mutuo secare in B, nempe CB, productam cadere in E, supra rectam AB, productam. Nam si CB, producta non cadit supra AB, productam, congruet cum AB, producta, ita vt transeat per D, atque ita duæ rectæ ABD, CBD, habebunt idem segmentum commune BD, quod in antecedenti axiomate ostensum est fieri non posse: vel certe infra AB, productam cadet, ita vt CB, produ-



cta cadat in F, ſitq. vna recta linea C B F. Centro igitur B, deſcribatur ad quoduis interuallum circulus A C F D, ſecans rectas A B, C B, productas in D, F. Quia ergo vtraque recta A B D, C B F, per centrum B, ducitur, erit tam A C D, quam C F, ſemicirculus, per defin. 18. ac proinde æquales erunt circumferentiæ A C D, C F. vt ad defin. 17. demonſtrauimus, totum & pars. Quod eſt abſurdum.

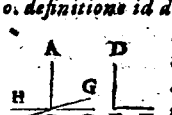
DVO proxima Axiomata ab Euclide non ponuntur, quia tamen neceſſaria ſunt ad aliorum Axiomatum probationes, ea hic inſeruimus. Tres autem ſequentia Euclidis ſunt.

X.

XII.

ITEM, omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

HOC axioma apertiſſimum eſſe cuilibet poteſt ex 10. definitione, qua angulus rectus deſcribitur; propterea quod inclinatio linearum angulum rectum conſtituentium augeri, minuiue nequit, ſed prorſus eſt immutabilis. Efficitur enim rectus angulus à linea perpendiculari, quæ quidem alteri lineæ rectæ ita ſuperſtat, vt faciat vtrobique angulos æquales, neque magis in vnam partem, quam in alteram inclinet. Ex quo fit, omnes angulos rectos æquales inter ſe eſſe, cum ſemper ſit eadem inclinatio, quamuis lineæ ſint inæquales interdum. Conatur tamen Proclus ex 10. definitione id demonſtrare hac ratione. Sint duo anguli recti A B C, D E F, quos dico eſſe inter ſe æquales. Si enim fieri poteſt, ſint inæquales, ſitq. A B C, maior. Si igitur mente concipiamus punctum E, applicari puncto B, & rectam D E, rectæ A B,



cadet recta E F, inter rectas A B, B C, qualis eſt B G, propterea quod angulus D E F, minor ponitur angulo A B C. a *Producatur C B, in rectum & continuum vſque ad H. Cum igitur angulus A B C, ſit rectus,* b *erit angulus A B H, illi deinceps æqualis, & rectus quoque: quare ma-*

a 2. petit.
b 10. def.

ior

ior etiam angulo ABC. [a] Producta autem GR, in rectum & continuum vsque ad I, cadet portio producta BI, infra CB, productam, vt in præcedenti Axiomate est demonstratum. Quare cum angulus ABG, ponatur rectus, [b] fiet angulus ABI, illi deinceps, æqualis. Quapropter angulus ABH, maior quoque erit angulo ABI, pars toto, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt duo anguli recti propositi, sed æquales. Quod est propositum: eademque est tactio in cæteris.

[a] 2. per.

[b] 10. def.

RECTE autem hoc loco monet Pappus, axioma istud non posse conuerti; non enim omnis angulus recto angulo æqualis rectus est, cum & curuilineus recto æqualis esse queat, vt in 5. lib. demonstrabimus, qui tamen non dicitur rectus, cum non sit rectilineus. Solus igitur angulus rectilineus æqualis angulo recto, rectus nuncupabitur: Et omnes anguli recti inter se æquales erunt, sine vlla exceptione.

XIII.

xj.

ET si in duas rectas lineas altera recta incidens, internos ad easdemq. partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

f

VT si in duas lineas rectas AB, CD, incidens alia recta EF, faciat duos angulos internos, & ex eadem parte BEF, DFE, minores duobus rectis, vult Euclides, illas tandem conuenturas esse ad aliquod punctum vnum, versus eam partem, in qua duo anguli minores existunt duobus rectis, vt appositum exemplum commonstrat. Ratio huius perspicua est, quoniam quando duo anguli interni, & ex eadem parte æquales sunt duobus rectis, duæ rectæ lineæ in neutram partem coire possunt, sed æquali

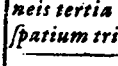
semper spatio protenduntur, vt propos. 28. huius lib. demonstrabitur. Quare si duo anguli interni, & ex eadem parte efficiuntur minores duobus rectis, necesse est ex ea parte dictarum linearum spatium coarctari, ex altera vero magis ac magis dilatari; ideoque eas conuenturas tandem esse aliquando in vnum punctum. Verum quia axioma hoc subobscurum videri solet tyronibus, immo a numero principiorum reijcitur à Gemino Geometra, Proclo, & alijs, quod non facile quinis ei assensum prabeat; præsertim cum reperiantur alia quadam linea, quarum spatium, licet semper magis ac magis coangustetur, (quemadmodum & in duabus rectis AB, CD, accidit, vt ad propos. 28. huius lib. demonstrabimus.) nunquam tamen in vnum punctum coeant, etiamsi infinitè producantur, vt constat ex elementis conicis Apollonij Pergæi, & ex linea conchili Nicomedis. Id circo pleniorem illius explicationem in scholium propos. 28. huius lib. differimus, vbi illud ex Procli sententia Geometrice demonstrabimus, vt firme, ac sine vlla dubitatione, tanquam verissimum, ad propositionis 29. huius lib. (vbi primum eius vsus incipit apparere) & ad aliarum propositionum demonstrationes possit assumi. Quod tamen nos aliter quam Proclus, & quidem magis Geometrice demonstrabimus, ita vt nullus dubitationi locus relinquatur.

xij.

XIIII.

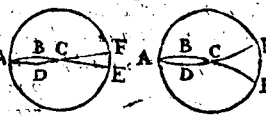
DVAE rectæ lineæ spatium non comprehendunt.

NVLLAM prorsus habet difficultatem hoc principium. Si enim duæ rectæ lineæ ex vna parte coeant ad efficiendum angulum, necessario ex altera parte semper magis ac magis disiungentur, si producantur, vt in exemplo proposito perspicuum est. Quare vt superficies, spatiumve quodpiam rectilineum ex omni parte concludatur, duabus rectis lineis tertia quædam adiungenda est. Ita enim conficietur spatium triangulare, seu figurarum rectilinearum primum.



Proclus

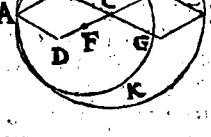
Proclus eamen demonstrat hoc principium, hoc modo. Si fieri potest, vt dua linea recta claudant superficiem, comprehendant dua recta ABC, ADC, superficiem ABCD, ita vt dua illa recta coeant in duobus punctis, A, & C.



Facto deinde centro C, a describatur circulus interuallo CA, b & producantur recta ABC, ADC, in rectum, & continuum vsque ad circumferentiam, eampe ad puncta, E, & F. Itaque quia recta ACE, ACF, transeunt per centrum C, c erunt semicirculi AE, AEF, inter se aequales, & idcirco circumferentia quoque AE, circumferentia AEF, aequalis erit, pars toti, quod fieri non potest. Non ergo recta dua linea spatium comprehendunt. Quod est propositum.

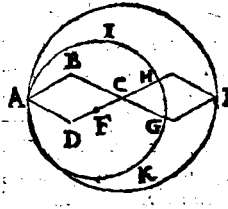
a 3. pet.
b 2. pet.
c 17. de fin.

SED quia forte assis aduersarius dicet, rectas ABC, ADC, productas caire iterum in aliquo puncto circumferentiae, vt in E, vel F, atque adeo non sequi, partem aequalem esse toti, demonstrabimus tunc idem Axioma hoc modo. Coeant ergo dua illa linea iterum, si fieri potest, in E. Sumpto puncto F, in recta ADC, vbicunque, erit AF, minor, quam FE, cum minor sit, quam AFC, hoc est, quam CHE, quia ipsi AFC, aequalis est, atque adeo multo minor, quàm FE. Circulus igitur ex F, ad interuallum FA, descriptus secabit rectam FE, in H, atque adeo CGE, in G. Quoniam igitur AFH, diameter circuli est, erit AIH, semicirculus, vt ad defin. 17. ostendimus: Portio autem AIG, quâ aufert recta ABG, & in qua centrum non est, semicirculo minor, vt ad defin. 18. demonstrauimus. Est ergo circumferentia AIG, minor quam AIH, totum quam pars, quod est absurdum. Quod autem minor sit portio AIG, semicirculo, ostendemus, vt supra. Nam ducta ex centro F, ad rectam ABG, perpendiculari, & circumuoluta portione AIG, circa rectam ABG, cadet circumferentia AIG, in-



tra circumferentiam AKG, ne pars maior sit quam totum, vt supra demonstrauimus.

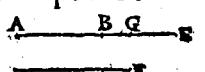
CONSTAT hoc etiam Axioma ex definitione lineæ rectæ. Cum enim recta linea sit breuissima extensio ab vno puncto ad aliud, duci poterit vnica tantum linea ab vno puncto ad aliud. Quare si A B C, recta est, non erit A D C, recta. Quod etiam patet ex definitione Platonis. Nam si A B C, est recta, obumbrabunt media illius extremitates eiusdem. Igitur media puncta linea A D C, non obumbrant extrema, cum visus per rectam A B C, feratur. Non ergo recta est A D C.



HIS Axiomatis ab Euclide positis adiungemus nos nonnulla alia ex alijs Geometris decerpta, non minus necessaria ad futuras demonstrationes Problematum atque Theorematum cùm Euclidis, tum reliquorum Mathematicorum, quàm ea, quæ nobis tradidit Euclides.

XV.

SI æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui æqualis.



HOC, & sequens pronunciatum desumpsit Proclus ex Pappo. Æqualibus itaque quantitatibus A B, C D, addantur inæquales B E, D F, sitq. B E, maior quàm D F. Et ex B E, auferatur B G, æqualis ipsi D F, vt sit G E, excessus, quo quantitas addita B E, superat quantitatem additam D F. Quoniam igitur æqualibus A B, C D, addita sunt æqualia B G, D F, 2 erunt tota A G, C F, æqualia. Quare constat, totam quantitatem A E, superare totam C F, eodem excessu G E, quo magnitudo D F, adiuncta à magnitudine adiuncta B E, superatur. Quod est propositum.

SI

XVI.

SI inæqualibus æqualia adiungantur, erit totorum excessus, excessui eorum, quæ à principio erant, æqualis.

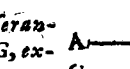
IN eadem figura, inæqualibus quantitatibus BE, DF, addantur æquales AB, CD. Et ex maiore BE, auferatur BG, æqualis ipsi DF, vt GE, sit excessus; quo quantitas BE, quantitatem DF, superat. Quoniam igitur æqualibus BG, DF, addita sunt æqualia AB, CD, [a] *erunt tota AG, CF, æqualia. Quamobrem tota quantitas AE, superabit totam CF, eodem excessu GE, quo maior quantitas proposita BE, minorem DF, superat. Quod est propositum.*

a 2. pron

XVII.

SI ab æqualibus inæqualia demantur, erit residuorum excessus, excessui ablatorum æqualis.

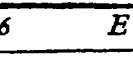
AB æqualibus AB, CD, auferantur inæqualia BE, DF. Sitq. EG, excessus, quo quantitas BE, superat quantitatem DF; ita vt BG, æqualis sit ipsi DF. Quia igitur ab æqualibus AB, CD, ablata sunt æqualia BG, DF, [b] *remanebunt AG, CF, æqualia. Perspicuum ergo est, residuum AE, superari à residuo CF, eodem excessu EG, quo magnitudo ablata BE, ablatam magnitudinem DF, superat. Quod est propositum.*



b 3. pron

XVIII.

SI ab inæqualibus æqualia demantur, erit residuorum excessus excessui totorum æqualis.



AB inaqualibus AB, CD, auferantur aqualia AE, CF. Sitq. BG, excessus, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD, ita vt AG, aqualis sit ipsi CD. Quoniam igitur ab aqualibus AG, CD, ablata sunt aqualia AE, CF, a remanebunt EG, FD, aqualia. Quare residuum EB, superabit residuum FD, eodem excessu BG, quo tota quantitas AB, superat totam quantitatem CD. Quod est propositum.

IN his quoque quatuor proxime positis pronunciatis, nomine quantitatum aqualium intelligenda est vna etiam sola quantitas multis communis. Si enim eidem communi inaqualia adijciantur, erit totorum excessus, adiunctorum excessui aqualis. Et si inaqualibus idem commune adiungatur, erit totorum excessus, excessui eorum, qua à principio erant, aqualis. Et si ab eodem communi inaqualia demantur, erit residuorum excessus excessui ablatorum aqualis. Et si ab inaqualibus idem commune dematur, erit residuorum excessus excessui totorum aqualis. Nam in numeris, si ad 6. addas 5. & 3. fiunt 11. & 9. quorum excessus est 2. idem qui ipsorum 5. & 3. Rursus, si ad 5. & 3. addas 6. fiunt 11. & 9. quorum excessus 2. idem est, qui ipsorum 5. & 3. Item si ex 8. demas 5. & 2. relinquuntur 3. & 6. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 5. & 2. Denique si ex 10. & 7. demas 3. relinquuntur 7. & 4. quorum excessus 3. idem est, qui ipsorum 10. & 7.

XIX.

OMNE totum æquale est omnibus suis partibus simul sumptis.

QVONIAM omnes partes simul sumpta constituunt totum, cuius sunt partes, manifesta est veritas huius axiomatis.

XX.

SI totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.

VT quia totus numerus 20. duplus est totius numeri 10; Et ablatus ex illo 6. ablati ex hoc 3. propterea reliquus illius 14. duplus etiam est reliqui huius 7. In vniuersum autem hoc demonstrabitur propos. 5. lib. 5. nimirum. Si magnitudo magnitudinis aque multiplex sit, atque ablata ablata, vt decupla, vel centupla, &c. & reliqua reliqua aque multiplex erit, atque tota totius.

COLLIGI potest ex dictis cum Proclo, & Gemino hoc discrimen inter postulata, & Axiomata, quod cum vtraque sint per se nota, & indemonstrabilia, illa naturam sapiunt Problematum, propterea quod aliquid fieri exposcant; hec vero, Theoremata imitantur, cum nihil fieri petant, sed solum sententiam aliquam notissimam proponant. Differt autem postulatum à problemate, quod constructio postulati non indigeat vlla demonstratione, problematis autem constructionem concedat nemo sine demonstratione, eo quod difficile aliquod nobis exhibeat construendum. Idem discrimen inter Axioma, & Theorema reperitur; Illud enim demonstrari non debet, hoc vero concedendum nulla est ratione, nisi demonstretur. Nam nemo huius propositionis desiderabit quis. Omnis trianguli tres anguli interni equales sunt duobus rectis. Idem iudicium habeto de reliquis Axiomatis, atque Theorematis, nec non de postulatis, problematisq.

CONSTAT quoque, Postulatorum alia propria esse Geometrie, qualia sunt illa tria, que Euclides nobis proposuit; quadam vero communia & Geometrie, & Arithmetice, cuiusmodi est hoc, Quantitatem posse infinite augeri. Tam enim numerus, quam magnitudo, per additionem augeri potest, ita vt numquã huius incrementi finis

reperiatur. Idem dices de Axiomatis, siue pronunciatis. Nam octauum, decimum, undecimum, duodecimum, tertium decimum, & quartum decimum soli Geometria conueniunt; Reliqua vero omnia adhibentur & ad demonstrationes Geometricas, & ad Arithmeticas. Quemadmodum enim magnitudines æquales ablata à magnitudinibus æqualibus, relinquunt magnitudines æquales, siue hæ magnitudines lineæ sint, siue superficies, siue corpora; ita quoque numeri æquales detracti è numeris æqualibus relinquunt numeros æquales, &c.

HÆC dicta à nobis sint de triplici hoc genere principiorum, nunc ad demonstrationes accedamus, ex quibus plenius, perfectiusq. principiorum omnium natura percipietur. Sunt enim plurima principia Mathematicorũ eiusmodi, vt plane non intelligantur, nisi prius eorũ vsus appareat in demõstrationibus; id quod satis te experientia docebit.

ANTEQVAM porro ad propositiones Euclidis interpretandas veniamus, paucis explicandum est, quemnam ordinem, ac modum in ipsis demonstrationibus simus secuti. Primum cuilibet propositioni duos numeros affiximus, quorum alter in margine depictus significat ordinem, quem Campanus ex traditione Arabum est secutus in Euclidis propositionibus, alter vero in ipsa propositionum serie descriptus refert dispositionem propositionum ex traditione Theonis, & quam adhuc obseruari cernimus in codicibus Græcis. Id vero eo consilio à nobis est factum: quoniam cum à quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani, ab alijs vero iuxta Theonis seriem citentur, maximeq. interdum duo hi interpretes inter se discrepent, in serie, atque ordine propositionum, id quod maxime in 6. 7, & 10. lib. perspicitur; necessarium esse duximus, vt vtriusque interpretis numerus apponeretur. Ita enim fiet, vt si quando numerus propositionum à Geometra quopiam citatus non respondet alteri interpreti, alteri saltem conueniat. Deinde ne cursus demonstrationum interrumperetur, citauimus principia, & propositiones Euclidis in margine, præfixa cuilibet citationi semper literula aliqua alphabeti, vel alio quouis signo, cui similis literula, seu signum respon-

det

det in demonstratione, vt facilius cognoscatur, ad quem locum qualibet citatio sit referenda. Porro citationes intelligenda sunt hoc modo.

1. def.	Prima definitio. & sic de alijs numeris, vt 4. def. 23. def. &c.
1. pet.	Prima petitio, vel primum Postulatum.
1. pron.	Primum pronunciatum, seu axioma, & ita de reliquis numeris, vt prius.
1. primi.	Prima propositio primi libri.
23. Vndec.	Vigesimatertia propositio vndecimi libri.
6. tertijd.	Sexta tertijdecimi libri.
9. sextid.	Nona sextidecimi libri.
13. duod.	Decimatertia libri duodecimi.
7. quind.	Septima libri quindecimi.
5. quartid.	Quinta libri quartidecimi, &c.

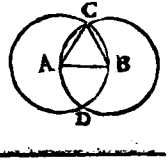
Ex his alia citationes à quolibet facile poterunt intelligi. Eadem enim in omnibus est ratio.

PROBLEMA I.
PROPOSITIO I.

SVPER data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constituere.

IN omni problemate duo potissimum sunt consideranda, constructio illius, quod proponitur, & demonstratio, qua ostenditur, constructionem recte esse institutam. Vt quoniam primum hoc problema iubet construere triangulũ æquilaterum super data recta linea terminata quacunque, ita vt linea recta proposita sit vnum latus trianguli, (Tunc enim figura dicitur constitui super recta linea, quando ipsa linea efficitur vnum figuræ latus) idcirco primum oportet construere ex principijs concessis triangulum aliquod, deinde demonstrare, ipsum ea ratione constructum, esse æquilaterum; hoc est, habere omnia tria latera inter se æqualia. Quod idem in alijs problematibus perspici potest. Hæc etiam duo reperiuntur fere in omni Theoremate. Sæpenumero enim vt demonstretur id, quod proponitur, construendum est, atque efficiendum prius aliquid, ceu manifestum erit in sequentibus. Pauca verò admodum sunt theoremata, quæ nullam requirant constructionem.

SIT igitur proposita recta linea terminata A B, super quam constituere iubemur triangulum æquilaterum. Centro A, & interuallo rectæ A B, [a] describatur circulus C B D: Item centro B, & interuallo eiusdem rectæ B A, alius circulus describatur C A D, secans priorem in



[a] 3. pet.

punctum

punctis C, & D. Ex quorum vtrouis, nempe ex C, [a] ducantur duæ rectæ lineæ CA, CB, ad puncta A, & B; Eritque super rectam A B, constitutum triangulum ABC, hoc est, figura rectilinea contenta tribus rectis lineis. Dico, hoc triangulum ita constructum necessario esse æquilaterum. Quoniam rectæ A B, A C, ducuntur ex centro A, ad circumferentiam circuli C B D, [b] erit recta A C, rectæ A B, æqualis: Rursus quia rectæ B C, B A, ducuntur ex centro B, ad circumferentiam circuli C A D, erit recta B C, rectæ B A æqualis. Tam igitur A C, quàm B C, æqualis est rectæ A B. [c] Quare & A C, B C, inter se æquales erunt, atque idcirco triangulum A B C, erit æquilaterum. Super data ergo recta linea terminata, &c. Quod faciendum erat.

[a] 1. pet.
[b] 15. def.
[c] 1. pron

SCHOLIVM.

VT autem videas, plures demonstrationes in vna propositione contineri, placuit primam hanc propositionem resoluere in prima sua principia, initio facto ab vltimo syllogismo demonstratiuo. Si quis igitur probare velit, triangulum A B C, constructum methodo pradicta, esse aquilaterum, vtetur hoc syllogismo demonstrante.

Omne triangulum habens tria latera aqualia, [d] est aquilaterum.
[d] 23. def

Triangulum A B C, tria habet aqualia latera.

Triangulum igitur A B C, est aquilaterum.

Minorem confirmabit hoc alio syllogismo.

Qua eidem aqualia sunt, [e] inter se quoque sunt aqualia.
[e] 1. pron

Duo latera A C, B C, aqualia sunt eidem lateri A B.

Igitur & duo latera A C, B C, inter se aqualia sunt.

Ac propterea omnia tria latera A B, B C, A C, aqualia existunt.

Minorem vero huius syllogismi hac ratione colliget.

Linea recta à centro ducta ad circumferentiam circuli, [f] inter se sunt aquales.
[f] 15. def.

Linea A B, A C, sunt ducta à centro A, ad circumferentiam C B D.

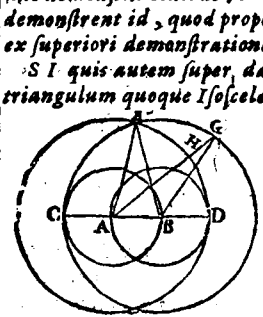
Sunt igitur linea A B, A C, aquales inter se.

Eademq; ratione erunt linea A B, B C, aquales, cum ducantur à centro B, ad circumferentiam C A D. Quamobrem minor precedentis syllogismi tota confirmata erit.

Non aliter resolui poterunt omnes alia propositiones non solum Euclidis, verum etiam caterorum Mathematicorum.

Negligunt tamen Mathematici resolutionem istam in suis demonstrationibus, eo quod brevius, ac facilius sine ea demonstrent id, quod proponitur, vt perspicuum esse possit ex superiori demonstratione:

SI quis autem super data recta desideret constituere triangulum quoque Isosceles, & scalenum, id cum Proclo in hunc modum efficiet. Sit recta linea A B, circa quam ex centris A, & B, describantur duo circuli, vti prius. a *Deinde producatur A B, in vtramq. partem ad circumferentias vsque ad puncta C, & D. Atque centro A, interuallo vero A D,* b *describatur circulus E D F. Item centro B, interuallo vero B C, circulus E C F, secans priorem in punctis E, & F. Ex quorum vtrolibet, nempe ex* c *E, ducantur ad puncta A, & B, duæ rectæ E A, E B. Factumq. erit super recta A B,* d *triangulum A B E; quod dico esse Isosceles, nimirum duo latera A E, B E, esse & aqualia inter se, & maiora latere A B. Cum enim recta A E, A D, ducantur è centro A, ad circumferentiam E D F,* e *erit A E, aqualis rectæ A D. Item cum recta B E, B C, ducantur è centro B, ad circumferentiam E C F,* f *erit B E, aqualis rectæ B C. Sunt autem rectæ A D, B C, aquales inter se, (vtraque enim A C, & B D, aqualis est rectæ A B; cum A B, A C, ex eodem centro A, ad circumferentiam ducantur; Item B A, B D, ex eodem centro B, ad circumferentiam quoque egrediantur.* g *Quare A C, B D, aquales inter se erunt. Addito igitur communi recta A B,* h *erit tota A D, toti B C, aqualis.)* i *Igitur A E, B E aquales quoque inter se erunt. Quod vero vtraque A E, B E,*



a 2. petit.
b 3. pet.
c 1. pet.
d 20. def
e 15. def
f 15. def
g 1. pron
h 2. pron
i 1. pron.

maior sit quam AB, perspicuum est, cum AD, aequalis ostensa ipsi AE, [a] maior sit, quam AB; Item BC, aequalis demonstrata ipsi BE, [b] maior quoque sit, quam AB. Constitutum igitur est super recta AB, Isosceles ABE, habens duo latera AE, BE, aequalia inter se, & maiora latere AB, quod faciendum erat. Atque haec est demonstratio Procli, aliorumq. interpretum Euclidis. [a] 9.pron [b] 9.pron

BREVIVS tamen videtur mihi posse demonstrari, triangulum ABE, esse Isosceles, hac ratione. [c] Quoniam AE, aequalis est rectae AD, & recta AD, est dupla rectae AB, propterea quod BA, BD, aequales inter se sunt; erit & AE, dupla rectae AB. Rursus [d] quia BE, aequalis est rectae BC, & BC, dupla est ipsius AB, propterea quod [e] AB, AC, aequales sunt inter se, erit & BE, dupla ipsius AB. Cum igitur utraque AE, BE, dupla sit eiusdem AB, erunt [f] AE, BE, inter se aequales, maioresq. propterea rectae AB. Isosceles ergo est triangulum ABE. [c] 15.def [d] 15.def [e] 15.def [f] 6.pron

IAM vero, si ex puncto A, [g] ducatur linea recta AG, ad circumferentiam EGF, quae non sit eadem quae AE, vel AD, secans circumferentiam EHD, in puncto H, & ex G, ad B [h] ducatur alia recta GB, [i] constitutum erit triangulum ABG, super recta AB, quod dico esse scalenum. [k] Quoniam AG, maior est quam AH: [l] Sunt autem AH, AE, ex centro A, ducta, inter se aequales; erit & AG, maior quam AE, hoc est, quam BE, quae ostensa est aequalis ipsi AE, igitur & maior erit AG, quam BG; [m] cum BG, sit aequalis ipsi BE. Est autem & BG, maior quam AB, propterea quod tota BC, aequalis ipsi BG, [n] maior est quam AB, pars. Omnia ergo tria latera trianguli ABG, inaequalia sunt, ideoq. scalenum est ex definitione; quod erat faciendum. [g] 1. pet. [h] 1.pet. [i] 20.def. [k] 9.prō. [l] 15. def [m] 15. def. [n] 9 pron

BREVIVS quoque ostendamus, triangulum AGB, esse scalenum, hac ratione. Quoniam tam [o] AH, AD, ex centro A, ducta, sunt aequales, quam BG, BC, ex centro B, ducta: Sunt autem AD, BC, ipsius AB, dupla, quod AB, utrique BD, AC, aequalis sit; erunt quoque AH, BG, ipsius AB, dupla, ac propterea maiores, quam AB. Cum ergo [p] AG, maior sit, quam AH, sive quam BG, scale- [o] 15.def [p] 9.pron

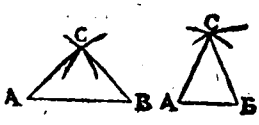
num erit triangulum A G B, habens latus A G, maximum; B G, medium, & A B, minimum.

PRAXIS.

CONABIMVR in singulis fere problematibus Euclidis tradere praxin quandam facilem, & brevem, qua effici possit id, quod Euclides pluribus verbis, atque lineis contendit construere; Idq. in ijs præsertim observabimus, quæ frequentiorem vsum habent apud Mathematicos, & in quibus praxis compendium aliquod secum videtur afferre.

ITAQVE triangulum æquilaterum ita facile constituetur super data recta A B. Ex centris A, & B, interuallo vero data recta A B, describantur duo arcus circulorum se intersecantes in puncto C, sive hoc infra lineam contingat, sive supra. Post hæc ducantur duæ rectæ A C, B C, ex puncto C, ad puncta A, & B; factumq. erit, quod proponitur. Cuius rei eadem est demonstratio cum superiori, si modo circuli essent integri, ac perfecti. Transirent enim necessario per puncta A, & B.

ISOSCELES ita confiyietur. Ex centris A, & B, interuallo vero maiore quam A B, si datam rectam esse velimus minus latus; vel minore, si eandem in latus maius eligamus, describãtur duo arcus secantes se in C. Postea ducantur rectæ A C, & B C, constructumq. erit Isosceles: quoniam A C, B C, æquales erunt, propter æquale interuallum assumptum, maius scilicet, aut minus, quam recta A B.



SCALENVM denique hoc modo fabricabitur super data recta A B. Ex centro B, interuallo vero maiore, quam B A, describatur arcus aliquis. Item ex centro A, interuallo vero adhuc maiore, quam prius assumptum, describatur alter arcus priorem secans in C. Deinde ducantur recta A C, B C; constitutumq. erit Scalenum,

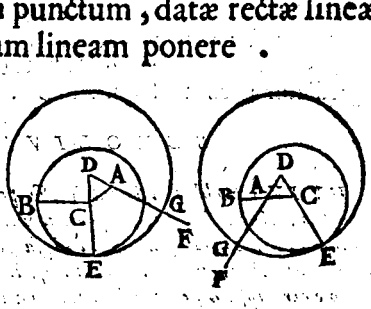
vt constet ex inaqualitate interuallorum, quæ assumpta fuerunt in constructione.

CAETERVM quo pacto triangulum constitui debeat habens tria latera æqualia tribus datis linois quibuscunque, singula singulis, latius explicabimus propos. 22. huius libri.

PROBL. 2. PROPOS. 2. ij.

AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

SIT punctū datum A, & data recta linea B C, cui aliam rectā æqualem ponere oportet ad punctum A. Facto alterutro ex tremo lineæ B C, nempe G, centro, [a] describatur circulus B E, interuallo rectæ B C. Et ex A, ad centrum C, [b] recta ducatur A C; (nisi punctum A, intra rectam B C, fuerit: Tunc enim pro linea ducta sumetur A C, vt secunda figura indicat.) Super recta vero A C, [c] constituatur triangulum æquilaterum A C D, sursum, aut deorsum versus, vt libuerit; cuius duo latera modo constituta D A, D C, versus rectam A G, [d] extendantur; D C, quidem oppositū puncto dato A, vsque ad circumferentiam in E; D A, vero oppositū centro C, quantumlibet in F. Deinde centro D, interuallo vero rectæ D B, per C, centrum transeuntis, [e] alter circulus describatur E G, secans rectam D F, in G. Dico rectam A G, quæ posita est ad punctum datum A, æqualem esse datæ rectæ B C. Quoniam D E, D G, ductæ sunt ex centro D, ad circumferentiam E G, [f] ipsæ inter se æquales erunt: Ablatis igitur D A, D C, æqualibus lateribus trianguli æquilateri A C D, [g] remanebit



a 3. petit
b 1. pet.
c 1. primi.
d 2. pet.
e 3. pet.
f 15. def.
g 3. prop.

a 15. def. A G, æqualis rectæ C E. Sed eidem C E, a æqualis est recta B C. (cum ambæ rectæ C B, C E, cadant ex centro C, ad circumferentiam B E.) Igitur rectæ A G, B C, quandoquidem vtraque æqualis est, ostensa rectæ C E, b 1. pron inter se æquales erunt. Ad datum igitur punctum, &c. quod erat faciendum.

QVOD si punctum datum fuerit in extremo datæ lineæ, quale est C, facile absoluetur problema. Si enim c 3. pet centro C, & interuallo C B, describatur circulus, ad 1. pet. cuius circumferentiam recta ducatur vtcunque C E, c 15. def erit hæc posita ad punctum datum C, æqualis datæ rectæ B C, cum vtraque & B C, & C E, ex eodem centro egrediatur ad circumferentiam B E.

SCHOLIVM.

HVIVS problematis varij esse possunt casus: vt ait Proclus. Aut enim datum punctum in ipsa data recta est positum, aut extra ipsam. Si in ipsa, erit vel medium extremorum eius, vel inter vtrumq. iacebit extremum. Si vero extra ipsam, erit vel è directo datæ lineæ, ita vt producta in rectum, & continuum per ipsum punctum transeat, vel non è directo, ita vt ab ipso ad datæ lineæ extremorum quoduis recta linea ducta cum data recta angulum efficiat; quo modo vel supra datum lineam erit constitutum, vel infra, vt manifestum est. In omnibus autem istis casibus semper eadem est constructio, & demonstratio. Quod si in constructione fiat triangulum A C D, super rectæ A C, Isoscles, eodem modo ostendemus, rectam A G, rectæ B C, æqualem esse.

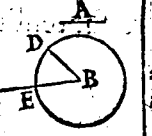
iij.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.

SINT

SINT duæ rectæ inæquales A, minor, & B C, maior, oporteatq. ex maiore B C, detrahere lineam æqualem minori A. Ad alterutrum extremorum lineæ maioris B C, nempe ad punctum B, a ponatur aliqua linea, quæ sit B D, æqualis minori A. Deinde centro B, interuallo autem B D, circulus b describatur secans B C, in E. Dico B E, detractam esse æqualem ipsi A. Quoniam B E, c æqualis est rectæ B D, & eidem B D, æqualis est recta A, per constructionem; d erunt A, & B E, inter se æquales. Duabus igitur datis rectis &c. quod erat faciendum.



a 2. primi.

b 3. petit

c 15. def

d 1. pron

QVOD si duæ rectæ datæ coniungantur in vno extremo, quales sunt B D, & B C, coniunctæ in extremo vtriusque B; describendus erit circulus ex B, ad interuallum minoris B D. Hic enim auferet B E, æqualem ipsi B D, vt constat ex definitione circuli.

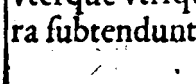
SCHOLIVM.

VARIOS etiam posse casus esse in hoc problemate, nemo ignorat, cum duæ lineæ inæquales datæ vel inter se distent, ita vt neutra alteram contingat; vel non, sed vel coniungantur ad vltimum extremum, vel se mutua secent, vel certe altera alteram suo extremo tangat dumtaxat, &c. de qua re lege Proclum hoc in loco.

THEOREMA 1. PROPOS. 4.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique; habeant vero & angulum angulo æqualem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basim basi æqualem habebunt: eritq. triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erũt,

vterque vtrique, sub quibus æqualia latera subtenduntur.



SINT duo triangula ABC, DEF, & vnius vtrumque latus AB, AC, æquale sit alterius vtrique lateri DE, DF, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; angulusque A, contentus lateribus AB, AC, æqualis angulo D, contento lateribus DE, DF. Dico basim BC, æqualem quoque esse basi EF; & triangulum ABC, triangulo DEF; & vtrumq. angulum B, & C, vtrique angulo E, & F, id est, angulos B, & E, qui opponuntur lateribus æqualibus AC, DF, inter se; & angulos C, & F, qui opponuntur æqualibus lateribus AB, DE, inter se quoque esse æquales. Quoniam enim recta AB, rectę DE, ponitur æqualis, fit, vt si altera alteri superponi intelligatur, collocato puncto A, in puncto D, [a] ipsæ sibi mutuo congruant, punctumq. B, in punctum E, cadat. Neque enim dicere quis poterit, partem rectæ AB, rectæ DE, congruere, & partem non, quia tunc duæ rectę haberent idem segmentum commune, [b] quod est impossibile. Quòd si quis dicat, posito puncto A, in D, cadere quidem punctum B, in E, sed rectam AB, cadere vel ad dextram, vel ad sinistram DE, claudent duæ rectæ lineę superficiem. [c] quod fieri non potest. Quare recta AB, rectæ DE, congruet, vt dictum est. Cum ergo angulus A, angulo D, ponatur æqualis, [d] congruet quoque alter alteri, hoc est, recta AC, rectæ DF, congruet, punctumq. C, in punctum F, cadet, ob æqualitatem rectarum AC, DF. Basis igitur BC, basi EF, congruet quoque: alias si supra caderet, aut infra, vt efficeretur recta EGF, vel EHF, claudérent duæ rectæ EF, EGF; vel EF, EHF, superficiem, (negare enim nemo poterit, tam EGF, quàm EHF, rectam esse, cum vtraq. ponatur esse eadem, quę recta BC.) quod est absurdum. Duæ enim rectæ superficiem [e] claudere non possunt. Quocirca [f] basis BC, basi EF, æqualis

[a] 8. pro mun.
[b] 10. pro mun.
[c] 14. pro mun.
[d] 8. pro mun.
[e] 14. pro mun.
[f] 8. pron.

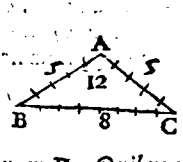
erit

erit; cum neutra alteram excedat; & triangulum A B C, triangulo D B F; & angulus B, angulo E; & angulus C, angulo F, æqualis, ob eandem causam, existet. Quare si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

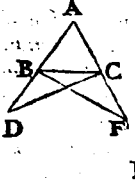
RECTE Euclides duas conditiones posuit in antecedenti huius theorematis, quarum prima est, vt duo latera vnius triãguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique; Secunda, vt angulus etiam vnius contentus illis lateribus æqualis sit angulo alterius contento lateribus, quæ istis sunt æqualia. Deficiente enim altera harum conditionum, neque bases, neque reliqui anguli poterunt vnquam esse æquales, vt probe hoc loco a Proclo demonstratur: Triangula vero ipsa licet possint esse æqualia, posteriore duntaxat conditione deficiente, vt ex scholio propos. 37. huius lib. constabit, tamen raro admodũ illud continget. Sint enim triangulorum A B C, D E F, anguli A, & D, æquales, nempe recti, & latera A B, AC, æqualia lateribus D E, D F, non quidem vtrumque vtrique, sed illa simul sumpta hisce simul sumptis, sitque A B, 3. A C, 4. vt ambo simul efficiant 7. At vero D E, sit 2. & D F, 5. vt ambo quoque simul 7. constituant. Quibus positis, erit basis B C, 5, & basis E F, radix quadrata huius numeri 29. quæ maior quidem est quã 5. minor autem, quam 6. Item area trianguli ABC, erit 6. area vero trianguli D E F. 5. Anguli denique super basim B C, inæquales erunt angulis super basim E F. Quæ quidem omnia ita esse, hic ostenderemus, nisi ad eorum demonstrationem requirerentur multa, quæ nondum sunt confirmata. Vides igitur omnia inæqualia esse, propterea quod non vtrumque latus vtriq. lateri æquale extitit in dictis triangulis A B C, D E F.

RVRSVS triangulorum A B C, D E F, latera A B, A C, aequalia sint lateribus D E, D F, vtrumque vtrique, sitq. vnumquodq. 5. anguli vero A, & D, contenti dictis lateribus inaequales, sitque A, maior quam D. Quibus concessis, erit basis B C, maior basi E F, vt propos. 24. huius libri ostendetur. Quòd si basim B C. ponamus esse 8. basim autem E F, 4. erit area trianguli A B C, 12. area vero trianguli D E F, radix quadrata huius numeri 84. qua maior quidem est quam 9. minor vero, quam 10. id quod notissimum est Geometris. Vt igitur duorum triangulorum & bases, & anguli, nec non triangula ipsa aequalia inter se sint, necesse est, vt vtrumque latus vnius aequale sit vtrique lateri alterius, & anguli quoque dictis lateribus contenti aequales existant, vt optime dixit Euclides.



THEOR. 2. PROPOS. 5.

ISOSCELIVM triangulorum, qui ad basim sunt, anguli inter se sunt aequales: Et productis aequalibus rectis lineis, qui sub basi sunt, anguli inter se aequales erunt.



SIT triangulum Isosceles A B C, in quo latera A B, A C, inter se sint aequalia. Dico angulos A B C, A C B, supra basim B C, aequales inter se esse: Item si latera aequalia A B, A C, producantur quantum libuerit, vsque ad puncta D, & E, angulos quoque D B C, E C B, infra basim eandem B C, esse aequales. Ex linea enim A E, productâ infinite [a] abscindatur A F, aequalis ipsi A D, [b] & ducantur rectae B F, C D. Considerentur

[3. primi.]
[1. peti.]

deinde

deinde duo triangula A B F, A C D. Quia ergo duo latera A B, A F, trianguli A B F, æqualia sunt duobus lateribus A C, A D, trianguli A C D, vtrumque vtrique, nempe A B, ipsi A C, ex hypothesi, & A F, ipsi A D, ex constructione; angulusq. A, contentus lateribus A B, A F, æqualis est angulo A, contento lateribus A C, A D, immo angulus A communis est vtrique triangulo: c Erit basis B F, æqualis basi C D; & angulus F, angulo D; & angulus A B F, angulo A C D; cum & priores duo, & posteriores opponantur æqualibus lateribus in dictis triangulis, vt patet. Rursus considerentur duo triangula B D C, C F B. Quoniam vero rectæ A D, A F, æquales sunt, per constructionem, fit vt, si auferantur ex ipsis æquales A B, A C, d & reliquæ B D, & C F, sint æquales. Quare duo latera B D, D C, trianguli B D C, æqualia, sunt duobus lateribus C F, F B, trianguli C F B, vtrumque vtrique, videlicet B D, ipsi C F, & D C, ipsi F B, vt probatum est. Sunt autem & anguli D, & F, contenti dictis lateribus æqualibus æquales, vt ostensum etiam fuit, Igitur erit angulus e D B C, angulo F C B, æqualis; & angulus B C D, angulo C B F. Tam enim priores duo, quam posteriores, æqualibus opponuntur lateribus, existuntq. supra communem basim B C, vtriusque trianguli B D C, C F B. Quod si ex totis angulis æqualibus A B F, A C D, (quos æquales esse iam demonstrauimus in prioribus triangulis) detrahantur anguli æquales C B F, B C D, (quos itidem in posterioribus triangulis modo probauimus esse æquales) f remanebunt anguli A B C, A C B, supra basim B C, æquales. Ostensum est autem in posterioribus triangulis, & angulos D B C, F C B, qui quidem sunt infra eandē basim B C, esse æquales. Igitur & anguli supra basim inter se, & anguli infra eandē inter se sunt æquales; Ac propterea Isoscelium triangulorū, qui ad basim sunt anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

c 4 prim

d 3. pron

e 4. primi.

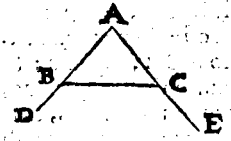
f 3. pron

SCHOLIVM.

HAEC propositio vera etiam est in triangulis æquilateris, cum in quolibet reperiantur duo latera inter se aqua-

lia,

lia, licet eam Euclides solis Isoscelibus triangulis videatur accommodasse. Existentibus enim duobus lateribus AB, AC, trianguli ABC, æqualibus; sive reliquum latus BC, ipsis quoque sit æquale, vt contingit in triangulo æquilatero, sive inæquale, vt in Isoscele accidit, necessario consequitur, & angulos supra basim inter se, & angulos infra eandem inter se quoque esse æquales, vt constat ex demonstratione prædicta. Solet autem theorema hoc tyronibus subdifficile, & obscuriusculum videri, propter multitudinem linearum, & angulorum, quibus nondum sunt assueti. Verumtamen, si diligenter theorematis præcedentis vis ac demonstratio ponderetur, non multo labore hoc, quod pro manibus habemus, à quolibet percipietur, si modo memor sit, illos angulos triangulorum probari æquales esse in antecedenti theoremate, qui æqualibus lateribus opponuntur: Quod quidem, quoniam Campanus non apposuit, causa fuit, vt confusa esse videatur, & inobscura eius demonstratio.



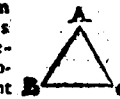
VERITAS porro huius theorematis, quoad vtrumque partem, facile quoque demonstrari potest per superpositionem, vt demonstrata fuit propositio 4. Sint enim rursum in triangulo ABC, duo latera æqualia AB, AC, quæ producantur quantumlibet vsque ad D, & E. Dico tam angulos ABC, ACB, supra basim BC, inter se æquales esse, quam angulos DBC, ECB, infra eandem basim. Si enim concipiamus mente triangulum ABC, triangulo ACB, (ita vt idem triangulum sit instar duorum) superponi, ita vt recta AB, rectæ AC, superponatur, cadet punctum B, in C, ob æqualitatem laterum AB, AC. Quo posito, cadet recta AC, super rectam AB, ob æqualitatem, sive identitatem anguli A; atque punctum C, in punctum B, incidet, propter æqualitatem laterum AC, AB. Quapropter angulus ABC, angulo ACB, & angulus DBC, angulo ECB, [a] *congruet, ac proinde tam illi, quam hi, inter se æquales erunt.*

[a] 28. prop.

CO-

COROLLARIVM.

Ex hac propositione quinta liquet, omne triangulum æquilaterum esse æquiangulum quoque: Hoc est, tres angulos cuiuslibet trianguli æquilateri esse inter se æquales. Sit enim triangulum æquilaterum A B C. Quoniam igitur duo latera A B, A C, sunt æqualia, [a] erunt duo anguli B, & C æquales. Item quia duo latera A B, B C, sunt æqualia, erunt & anguli C, & A, æquales. Quare omnes tres A, B, & C, æquales erunt. Quod ostendendum erat.

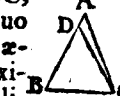


[a] 5. primi.

THEOR. 3. PROPOS. 6.

SI trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & sub æqualibus angulis subtensa latera æqualia inter se erunt.

IN triangulo A B C, sint duo anguli ABC, A C B, super latus B C, æquales. Dico duo latera illis opposita A B, A C, esse quoque æqualia. Si enim non credantur æqualia, existentibus nihilominus angulis dictis æqualibus, erit alterum maius altero; sit igitur A B, maius quam A C, si fieri potest: Et ex A B, [b] abscindatur in D, recta B D, æqualis rectæ A C, quæ minor dicitur esse, quam A B,) ducaturq. recta C D. Considerentur iam duo triangula A C B, D B C. In quibus cum duo latera A C, C B, trianguli A C B, æqualia sint duobus lateribus D B, B C, trianguli D B C, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi D B, (abscidimus enim ex A B, ipsi A C, concessu aduersarij, æqualem D B,) & C B, ipsi B C, cum sit vnum, & idem; Sint autem & anguli A C B, D B C, contenti dictis lateribus æquales, per hypothesin: [c] Erunt triangula A C B, D B C, æqualia, totum, & pars, quod fieri non potest. Non igitur erunt latera A B, AC, inæqualia, si anguli B, & C, super latus B C, æquales sunt, ne totum parti æquale esse concedamus: sed æqualia existent. Quare si trianguli duo anguli, &c. Quod demonstrandum erat.



[b] 3. primi.

[c] 4. primi.

SCHO-

SCHOLIVM.

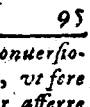
CONVERTIT hoc theorema primam partem præcedentis. Nam ibi demonstratum est, si duo latera trianguli inter sè æqualia fuerint, angulos, qui ad basim sunt, esse quoque æquales: Hic vero, si anguli ad basim sint æquales, latera quoque angulis illis opposita esse æqualia. Non autem mirum alicui debet videri, si Mathematici interdum conuertunt propositiones, ita vt nunc ex antecedente quopiam concesso colligant per demonstrationem consequens aliquod, nunc vero rursus ex consequente hoc concesso inferant per aliam demonstrationem antecedens illud, vt ab Euclide in hisce duabus proximis propositionibus factum esse conspicimus: Non debet, inquam, videri mirum, quoniam non semper in rebus Mathematicis reciprocantur antecedens & consequens. Nam in propositionibus necessarijs, quales sunt propositiones Geometricæ, potest interdum prædicatum esse vniuersalius subiecto, vt cum Dialectici loquamur. Quare tunc non poterit conuerti propositio. Nam necessaria est hac propositio; (Omnis homo est animal.) non tamen conuerti potest vniuersaliter, cum non omne animal sit homo. Ita quoque fieri potest in propositionibus Geometricis necessarijs: Cuius ego rei vnum duntaxat nunc exemplum tale in medium proferam. Demonstrat Euclides propos. 16. huius lib. Si trianguli cuiusuis vnum latus producatur, angulum externum maiorem esse duobus internis sibi oppositis; In qua quidem propositione nullo modo antecedens, & consequens reciprocantur. Non enim sequitur, si figuræ cuiusuis rectilineæ vno latere producto, angulus externus maior sit singulis internis oppositis, figuram illam esse triangulum, cum possit etiam esse quadrilatera figura, vt ad propos. 16. huius lib. ostendemus. Eodemq. modo multa alia propositiones conuerti nequeunt. Quam ob rem necesse est, vt prius demonstret Geometra, propositionem aliquam conuerti, hoc est, antecedens, & consequens illius reciprocari, antequam ex consequente concesso colligat antecedens. Non conuertit autem Euclides omnes propositiones,

qua

quæ conuerti possunt, sed eas duntaxat, quarum conuersione maxime indiget: Nos tamen dabimus operam, vt fere omnes illas conuertamus, quæ aliquam videbuntur afferre vtilitatem.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propositione, omne triangulum æquiangulum, id est, cuius omnes anguli sunt æquales, esse æquilaterum. Quod quidem conuersum est corollarij quintæ propositionis, vt liquet. Sint enim triangulí A B C, tres anguli æquales. Dico ipsum esse æquilaterum. Cum enim duo anguli B, & C, sint æquales, a erunt latera A B, A C, æqualia. Rursus cum duo anguli A, & B, sint æquales, erunt quoque latera A C, B C, æqualia, & idcirco omnia tria latera A B, B C, A C, æqualia. Quod ostendendum erat.



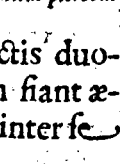
a 6. primi.

EX PROCLO.

LICEBIT nobis etiam conuertere secundam partem quintæ propositionis, hoc modo.

SI trianguli cuiuslibet productis duobus lateribus, anguli infra basim fiant æquales, & duo latera illa æqualia inter se erunt.

Trianguli enim A B C, productis lateribus A B, A C, ad D, & E, fiant anguli D B C, E C B, infra basim B C, æquales. Dico latera A B, A C, esse quoque inter se æqualia. Ex C E, quantumlibet producta b abscindatur C F, æqualis ipsi B D, & ducantur rectæ B F, F D, D C. Considerentur deinde triangula D B C, F C B. In quibus cum latera D B, B C, æqualia sint lateribus F C, C B, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B C, ipsi C B, quod sit vnum & idem: sint autem & anguli D B C, F C B, dictis lateribus contenti æquales, per hypothesim: c erunt & bases C D, B F, & anguli B C D, C B F, super has bases, cum opponantur æqualibus lateribus B D, C F, æquales. Ablatis igitur hisce angulis æqualibus B C D, C B F, ex angulis F C B, D B C, per hypothe-



b 3. primi.

c 4. primi.

sin,

[a] 3. pron

sin æqualibus;[a] *remanebunt anguli F C D, D B F, æquales. Considerentur rursus triangula D B F, F C D. In quibus quoniam latera D B, B F, æqualia sunt lateribus F C, C D, vtrumque vtrique, nempe D B, ipsi F C, per constructionem, & B F, ipsi C D, vt modo ostensum est; Sunt autem & anguli contenti dictis lateribus D B F, F C D, æquales, vt etiam*

[b] 4. primi.

fuit nuper demonstratum:[b] *Erit angulus B D F, super basim D F, trianguli D B F, æqualis angulo C F D, super eandem basim F D, trianguli F C D. Hi enim æqualibus lateribus opponuntur. Cum igitur in triangulo A D F, duo anguli A D F,*

[c] 6. primi.

A F D sint æquales, vt nunc ostendimus,[c] *erunt latera A D, A F, æqualia. A quibus si rectæ B D, C F, per constructionem,*

[d] 3. pron

æquales demantur,[d] *remanebunt A B, A C, latera trianguli A B C, æqualia. Quod erat ostendendum.*

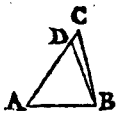
THEOR. 4. PROPOS. 7.

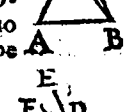
SVPER eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non constituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemq. terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes.

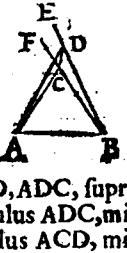
SVPER recta A B, constituantur ad punctum quoduis C, duæ rectæ lineæ A C, B C. Dico super eandem rectam A B, versus partem eandem C, non posse ad aliud punctum, vt ad D, constitui duas alias rectas lineas, quæ sint æquales lineis A C, B C, vtraque vtrique, nempe A C, ipsi A D, quæ eundem habent terminum A; & B C, ipsi B D, quæ eundem etiam terminũ possident B. Sint enim, si fieri potest, rectæ A C, A D, inter se, & rectæ B C, B D, inter se etiam æquales. Aut igitur punctum D, erit in alterutra rectarum A C, B C, ita vt recta A D, in ipsam rectam A C vel B D, in ipsam B C, cadat; aut intra triangulum A B C; aut extra. Sit primo punctum D, in altera rectarum

A C,

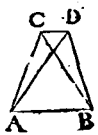
AC, BC, nempe in AC, vt AD, sit pars ipsius AC. Quoniam igitur rectæ AC, AD, eundem terminum A, habentes dicuntur æquales, erit pars AD, toti AC, æqualis. Quod fieri non potest. Sit deinde punctum D, intra triangulum ABC, & ducta recta CD, producantur rectæ BC, BD, vsque ad E, & F. Quoniã igitur in triangulo ACD, ponuntur latera AC, AD, æqualia [a] erunt anguli ACD, ADC, super basim CD, æquales; [b] Est autem angulus ACD, minor angulo DCE; nempe pars toto: Igitur & angulus ADC, minor erit eodem angulo DCE. Quare angulus CDF, pars ipsius ADC, multo minor erit eodem angulo DCE. Rursus, quia in triangulo BCD, latera BC, BD, ponuntur æqualia, [c] erunt anguli CDF, DCE, sub basi CD, æquales. Ostensum autem fuit, quod idem angulus CDF, multo sit minor angulo DCE. Idem ergo angulus CDF, & minor est angulo DCE, & eidem æqualis, quod est absurdum. Sit postremo punctum D, extra triangulum ABC. Aut igitur in tali erit loco, vt vna linea super alteram cadat, vt in priori figura, dummodo loco D, intelligas C, & loco C, ipsum D; ex quo rursus colligetur pars æqualis toti, quod est absurdum. Aut in tali erit loco, vt posteriores duæ lineæ ambiant priores duas, ceu in posteriori figura, si modo loco D, iterum intelligas C, & D, loco C. Quo posito, in idem absurdum incidemus, nempe angulum DCF, & minorem esse angulo CDE, & eidem æqualem, vt perspicuum est. Aut denique punctum D, ita erit extra triangulum ABC, vt altera linearum posteriorum, nempe AD, secet alteram priorum, vt ipsam BC. Ducta igitur recta CD, cum in triangulo ACD, latera AC, AD, ponantur æqualia, [d] erunt anguli ACD, ADC, supra basim CD, æquales: Ac proinde [e] cum angulus ADC, minor sit angulo BDC, pars toto, erit & angulus ACD, minor







[a] 5. primi.
[b] 9. pron
[c] 5. primi.
[d] 5. primi.
[e] 9. pron



nor eodem angulo BDC. Quare multo minor erit angulus BCD, pars anguli ACD, angulo eodem BDC. Rursus, cum in triangulo BDC, latera BC, BD, ponatur æqualia, [a] erunt anguli BCD, BDC, super basim C D, æquales: Est autem iam ostensum, angulum BCD, multo esse minorem angulo BDC. Idem igitur angulus BCD, & minor est angulo BDC, & eidem æqualis, quod est absurdum. Non ergo æquales sunt inter se AC, AD, & inter se quoque BC, BD. Quare super eadé recta linea, duabus eisdem rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 5. prim

SCHOLIVM.

FIERI potest, vt dua linea AD. BD, æquales sint duabus AC, BC, vtraque vtrique, vt AD. ipsi BC, & B D, ipsi AC. vt vltima figura indicat. Verum hoc modo non egrediuntur ab eodem puncto linea illa, quæ sunt æquales inter se, vt constat. Sola enim AC, AD, eundem limitem possident A; Item BC. BD, eundem B; optimeq. demonstratum fuit ab Euclide, fieri non posse, vt AC, AD, inter se sint æquales, ita vt BC, BD, quoque inter se æquales existant. Recte igitur in propositione apposita sunt hæc verba: eosdemq. terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. Rursus possunt esse dua linea simul sumpta AD, BD, æquales duabus lineis AC, BC, simul sumptis, vt in eadem figura perspici potest: Sed hoc non ostendit Euclides fieri non posse. Dixit enim non posse vtramque vtrique esse æqualem, &c.

Eadem ratione possunt ex A, & B, infra AB, basim trianguli ABC, hoc est, ad contrarias partes, duci dua linea recta A D, BD, conuenientes ad aliquod punctum, ita vt AD, exiens è puncto A, æqualis sit ipsi AC; & BD, egrediés ex B, æqualis ipsi BC, vt perspicuum est in apposita figura. Non igitur sine causa adiecit Euclides: ad easdem partes. Denique esse poterunt dua linea AC, AD, æquales inter se. eundem terminum A, possidentes; Sed hoc posito, fieri nulla ratione poterit, vt re-

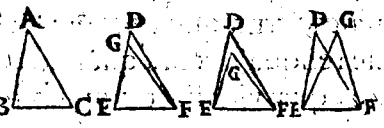
liqua

liqua dua BC, BD, terminum habentes eundem B, inter se quoque sint æquales, vt in hac figura apparet, & ab Euclide est demonstratum. Appositè igitur dictum est in propositione, duabus eisdem rectis lineis alia dua rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, &c. Quare vt plane scopus Euclidi in hac propositione proposítus intelligatur, diligenter singula verba propositionis sunt ponderanda.

THEOR. 5. PROPOS. 8. viij.

SI duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, vtrumque vtrique, æqualia, habuerint vero & basim basi æqualem: Angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt.

SINT duo latera AB, AC, trianguli ABC, duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, æqualia, vtrumque vtrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; sit autem & basis BC, basi EF, æqualis. Dico angulum A, æqualem esse angulo D, quorum videlicet vterque dictis lateribus continetur. Nam si mente intelligatur basis BC, superponi basi EF, a neutra excedet, altera, sed punctum B, congruet puncto E, & punctum C, puncto F, cum hæ bases ponantur æquales inter se. Deinde si triangulum ABC, cogitetur cadere super trian- a 8. pron



gulum DEF, cadet punctum A, aut in ipsum punctum D, aut aliò. Si punctum A, in ipsum punctum D, cadat, congruent sibi mutuo triangulorum latera, cum ponantur

æqualia; Ac propterea [a] angulus A, æqualis erit angulo D, cum neuter alterum excedat. Quod si punctum A, aliò dicatur cadere, vt ad G, quomodocumque id contingat, hoc est, siue in latus ED, siue intra triangulum EDF, siue extra, vt in figuris apparet; erit perpetuo EG, (quæ eadem est, quæ BA,) æqualis ipsi ED; & FG, (quæ eadem est, quæ CA) æqualis ipsi FD, propterea quod latera vnius trianguli æqualia ponuntur lateribus alterius. Hoc autem fieri non posse, iamdudum [b] demonstratum est, cum tam rectæ EG, ED, termiuum eundem E, quam rectæ FG, FD, eundem limitem F, possideant. Non igitur punctum A, cadet aliò quam in punctum D: ac propterea angulus A, angulo D, æqualis erit. Quare si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 8. pron

[b] 7. primi.

SCHOLIVM.

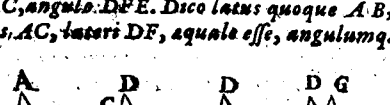
VT vides, hæc propositio conuertit primam partem propositionis quartæ. Sicut enim ibi ex æqualitate angulorum, qui lateribus æqualibus continentur, collecta fuit basium æqualitas; ita hic ex æqualitate basium concludit Euclides æqualitatem angulorum, qui lateribus æqualibus comprehenduntur. Possumus eodem modo ex prima, & tertia parte conclusionis quartæ propositionis inferre totum antecedens eiusdem, ita vt theorema proponatur in hãc formam.

SI duo triangula bases habuerint æquales, & angulos super bases constitutos æquales, vtrumque vtrique: Habebunt quoque reliqua latera æqualia, vtrumque vtrique, quæ videlicet æqualibus angulis subtenduntur, angulosq. reliquos hisce lateribus incluſos æquales.

SIT

SIT enim basis BC, æqualis basi EF, & angulus B, angulo E, angulusq. C, angulo DFE. Dico latus quoque AB, lateri DE, & latus AC, lateri DF, æquale esse, angulumq. A, angulo D.

Nam si basis basi superponatur, a congruent sibi mutuo extrema



a 8. pro.

earum, nec non & lineæ angularum æqualium. Quare omnia sibi congruent, propterea que omnia inter se æqualia erunt. Verum hoc idem theorema a nobis propositum, quod quidem magis proprie conuertere videtur quartam propositum, quod quidem magis proprie conuertere videtur quartam propositionem, quam illud Euclidis, aliter demonstrabit Euclides in prima parte propositionis 26. vt eo loco monebimus.

COROLLARIVM.

PORRO ex antecedente huius octauæ propositionis non solum colligi potest, angulos lateribus æqualibus contentos æquales esse, verum etiam reliquos angulos, qui ad bases constituuntur, vtrumque vtrique, vt angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Primum totum triangulum toti triangulo, vt constat ex eadem superpositione vnius trianguli super alterum. Nam sibi mutuo congruent & dicti anguli, & tota triangula. vt perspicuum est. Quod etiam ex quarta propos. colligi poterit, postquam demonstratum fuerit, angulos æqualibus comprehensos lateribus æquales esse. Inde enim fiet, cum latera quoque sint æqualia, & reliquos angulos, & tota triangula esse æqualia, vt in propos. 4. demonstratum est.

EX PROCLO.

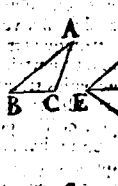
PHILONIS familiares hoc idem theorema octauum ostendunt demonstratione affirmatiua, hac ratione. Posito enim eodem antecedente, superponi intelligatur basis BC, basi EF, ita vt triangulum ABC, cadat in diuersas partes, & non super triangulum DEF, quale est triangulum AEF. Aut igitur duo latera, nempe DF, FA, constituunt vnam lineam rectam, quod quidem euenire, si duo anguli G, & F, recti extiterint; aut non. Si constituant vnam lineam

Directam, velut DA, ita propositum concludetur. Quoniam in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur aequalia (est enim tum AE, recta eadem, quæ AB, quæ per hypothesin recta DE, aqualis est) [a] erunt anguli A, & D, super basin AD, æquales, quod erat ostendendum. Si vero neque DF, FA, neq. DE, EA, lineam rectam conficiant; ducatur ex D, ad A, linea recta DA, quæ vel cadet intra triangula, vel extra. Cadat primum intra, quod quidem accidet, quando anguli ad E, & F, fuerint acuti. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, DE, æqualia ponuntur, [b] erunt duo anguli EAD, EDA, æquales ad basin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, æqualia sint per hypothesin, erunt duo anguli FAD, FDA, super basin DA, æquales. Si igitur hi æquales illis æqualibus adiuncti, [c] fient toti anguli EAF, EDF, æquales. Quod erat ostendendum. Cadat deinde recta DA, extra triangula, quod demum fiet, quando anguli ad F, fuerint obtusi. Quoniam igitur in triangulo AED, duo latera AE, DE, ponuntur æqualia, [d] erunt anguli EAD, EDA, æquales super basin DA. Eadem ratione, cum duo latera AF, DF, in triangulo AFD, sint per hypothesin æqualia, erunt anguli FAD, FDA, super basin DA, æquales. His ergo à prioribus ablatis, [e] remanebunt anguli EAF, EDF, æquales. Quod demonstrandum proponebatur.

a 5. pri.

b 5. pri.

c 2. prop.



d 5. pri.

e 3. prop.

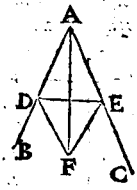
PROBL. 4. PROPOS. 9.

DATVM angulum rectilineum bifariam secare.

SIT dividendus rectilineus angulus BAC, bifariam, hoc est, in duos angulos æquales. In recta AB, sumatur

quod-

quodcunque punctum D, & rectæ A D, a secetur ex AC, recta AE, æqualis, ducatur que recta DE. Deinde super DE, b constituatur triangulum æquilaterum DFE, & ducatur recta AF, diuidens angulum BAC, in angulos BAF, CAF. Dico hos angulos inter se esse æquales. Cum enim latera DA, AF, trianguli DAF, æqualia sint lateribus EA, AF, trianguli EAF, vtrumque vtrique, quod DA, ipsi BA, per constructionem, sit æquale, & AF, commune; Sit autem & basis DF, basi EF, æqualis, propterea quod triangulum DFE, constructum est æquilaterum: c Erit angulus DAF, angulo EAF, æqualis, ideoque angulus BAC, diuisus bifariam, quod erat faciendum.



a 3. pri.

b 1. pri

c 8. pri.

SCHOLIVM.

QVOD si loco trianguli æquilateri constituamus triangulum Isosceles, nihilominus idem demonstrabimus. Id quod etiam in proximis tribus propositionibus, quæ sequuntur, fieri potest.

PRAXIS.

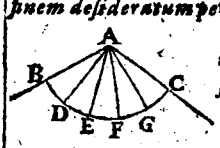
DICTO sit in angulus quilibet rectilineus, vt BAC, bifariam secandus, hoc modo. Ex cæro A, circino aliquo abscindantur rectæ æquales AD, AE, cuiuscunque magnitudinis. Ex circino non variato (possis tamen ipsum variare, si velles) ex vtroris D, & E, describantur duo vtrinque secantes sese in F. Recta igitur ducta AF, secabit angulu BAC, bifariam. Si enim ducerentur rectæ DF, EF, essent hæ æquales, nempe semidiametri circulorum æqualium. Vnde vt prius demonstrabitur, angulum DAF, æqualem esse angulo EAF. Non descripsimus autem dictas lineas, vt nuda praxis haberetur: Id quod in aliisquoq. praxibus, quoad eius fieri poterit, obseruabimus,

ne linearum multitudo tenebras nobis effundat, pariatque confusionem.

QVOD si quando angulus rectilineus brevissimis lineis contentus, & in extremo alicuius plani positus, diuidendus sit bifariam, describemus ex D, & E, duos arcus sese mutuo intersecantes in F, supra angulum A, quia infra puncta D, & E, spatium deest, in quo describi possint. Recta enim ex F, per A, vsque ad B, ducta secabit angulum A, bifariam, vt prius, vt in apposita figura apparet.

SCHOLIVM.

HINC aperte colligitur, angulum rectilineum quemuis diuidi posse etiam in 4 angulos aequales, in 8. in 16. in 32. in 64. & ita deinceps, semper procedendo per augmentum duplex. Nam postquam angulus quilibet rectilineus in duos aequales angulos fuerit diuisus, si horum vterque itexum bifariam secetur, habebimus 4. angulos aequales; Quod si singuli rursus diuidantur bifariam, obtinebimus 8. angulos aequales, & sic deinceps; Non docuis autem Euclides vsquad, quanam ratione angulus rectilineus in quotuis partes aequales possit diuidi, quia id à nemine vsque ad illum diem fuerat demonstratum. Ex Pappo tamen Alexandrino nos id docebimus, beneficio cuiusdã lineæ curuæ, vel inflexæ, ad finem lib. 6. Interim vero, si quis angulum rectilineum quãcunque propositum in quotuis partes aequales diuidere desideret rudi, vt dicitur, Minerua, vti eum necesse erit circino, vt quasi attentando, & sæpius repetendo praxim ipsam ad finem desideratum perueniat; hoc nimirum ratione. Sit angulus rectilineus B A C, diuidendus in 5. angulos aequales. Ex A, centro describatur arcus circuli B C, ad quodcunq. interuallum, secans rectas A B, A C, in B, & C. Deinde hic arcus beneficio circini (eius crura modo dilatando magis, modo restringendo, donec debitam habeant distantiam) diuidatur



in

in tot partes aquales, in quot angulus propositus est dividendus, vt in exemplo proposito in quinq. partes in punctis D, E, F, G. Si namque ad hæc puncta ex A, recta ducantur lineæ, diuisus erit angulus B A C, in quinque æquales angulos. Cum enim circino sumpta sint æqualia intervalla BD, DE, &c. si ducantur rectæ BD, DE, &c. erunt hæ omnes inter se æquales. Quare erunt duo latera B A, A D, trianguli B A D, a æqualia duobus lateribus E A, A D, trianguli E A D, vtrumq. vtrique, cum omnia ex centro egrediantur ad circumferentiam vsque. Basis autem B D, basi quoque D E, vt dictum fuit, æqualis est: b Angulus igitur B A D, angulo E A D, æqualis existet; Eademque ratione demonstrabitur, angulum E A D, angulo E A F, æqualem esse, & sic de cæteris. Breuius autem colligetur, omnes angulos ad A, esse inter se æquales, ex 27. propos. tertij lib. propterea quod circumferentiæ BD, DE, &c. acceptæ sunt omnes æquales inter sese. Nemo vero miretur, quod praxes exhibeamus interdum, quarum demonstrationes ex sequentibus propositionibus pandent. Hoc enim, vt supra ad defin. 10. diximus, eo consilio facimus, vt quoad eius fieri potest, singula propriis in locis tractentur, diuisio nimirum anguli rectilinei cuiusuis in quotlibet partes æquales eo in loco, in quo Euclides docet diuisionem eiusdem anguli in duas partes æquales. Et diuisio lineæ rectæ in quotuis partes æquales, vbi eandem diuidit Euclides bifariam, & ita de singulis. Neque enim ad praxes huiusmodi requiruntur semper sequentes demonstrationes, sed solum, vt probetur recte esse per ipsas effectū, quod imperabatur. Quamobrem is, qui non contentus nuda praxi demonstrationem requirit, poterit regredi ad praxin quamlibet, postquam demonstrationes ad eam necessarias diligenter perceperit. Nam semper propositiones illas, quæ ad hanc rem debent adhiberi, citabimus in demonstrationibus nostrarum praxium; quemadmodum & in proxima praxi citauimus propositionem 27. tertij libri.

a 15. def.

b 8. pri.

PRO-

x

PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATAM rectam lineam finitam bifariam secare.

SIT recta finita A B, diuidenda bifariam, id est, in duas partes æquales. [a] Describatur super A B, triangulum æquilaterum A B C, cuius angulus C, per rectam C D, [b] diuidatur bifariam; rectaque C D, rectam A B, secet in D. Dico rectam A B, bifariam esse diuisam in D. Quoniam duo latera A C, C D, trianguli A C D, æqualia sunt duobus lateribus B C, C D, trianguli B C D, vtrumque vtrique, nempe A C, ipsi B C; cum sint ambo latera trianguli æquilateri, & C D, est commune; Est autem & angulus A C D, angulo B C D, æqualis, per constructionem: [c] Erit basis A D, basi B D, æqualis. Datam ergo rectam A B, bifariam secuimus in D, quod facere oportebat.

a 1. pri.

b 9. pri.

c 4. pri.

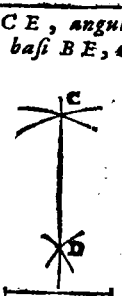
PRAXIS.

EX centro A, ad quodvis internallum, quod tamen dimidium lineæ A B, excedat, describantur duo arcus, vnus supernè, alter inferne; Et ex centro B, eodem internallum omnino alij duo arcus delineentur, qui priores secent in C, & D. Recta enim ducta C D, secabit rectam A B, in E, bifariam. Si enim ex A, & B, ad C, & D, ducantur quatuor rectæ, erunt hæ omnes inter se æquales, cum ex centris ad circumferentias æqualium circulorum cadant; Nam arcus circulorum descripti sunt eodem internallo. Quoniam igitur latera A C, C D, æqualia sunt lateribus B C, C D, vtrumque vtrique, & basis A D, basi B D, d erit angulus A C D, angulo B C D, æqualis. Rursus quia latera A C, C E, æqualia sunt lateribus B C,

d 8. pri.

C E,

CE, vtrumque vtrique, & angulus ACE, angulo BCE, vt ostensum fuit; a erit basis AE, basi BE, æqualis. a 4. primi.



IAM vero si linea bifariam diuidenda posita sit in extremo plani cuiuspiam, ita vt infra ipsam locus non sit, in quo commodè duo arcus sese intersecantes possint describi; descriptis supra eam duobus arcubus sese intersecantibus in C, describemus ad easdem partes alios duos arcus sese intersecantes mutuo in D, siue hoc fiat infra punctum C, vt in apposita figura, siue supra C. Nam recta per C, D, educta secabit rectam AB, bifariam in E.

SCHOLIVM.

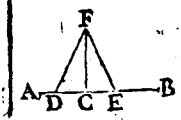
PERSPICVVM est, eodem modo diuidi posse eandem lineam rectam AB, in 4. partes æquales, & in 8. in 16. in 32. &c. sicuti in propositione præcedenti diximus de diuisione anguli rectilinei. Qua vero ratione quauis recta linea proposita diuidenda sit in quotcunque partes æquales, vberrime trademus ad propos. 40. huius lib. Idemque longe facilius postea efficiemus ad propos. 10. lib. 6. vbi varias, & non iucundas praxes in medium adducemus. Ibi enim videtur esse proprius huic rei locus, cum huiusmodi praxes fere omnes per linearum proportiones facilius demõstrentur. Neque vero vnquam diuisione linea in plures, quã in duas partes æquales, ad eum locum vsque indigebimus.

PROBL. 6. PROPOS. 11. xj.

DATA recta linea, a puncto in ea dato, rectam lineam ad angulos rectos excitare.

RECTA linea data sit AB; & in ea punctum C,

a quo



a 3. pri.
b 1. pri.

a quo iubemur erigere super A B, lineam ad angulos rectos, seu perpendicularem. A puncto C, sumatur recta C D, [a] cui æqualis auferatur C E. Deinde super D E, [b] constituatur triangulum æquilaterum D E F, atque ex F, ad C, ducatur recta F C, quam dico esse perpendicularem ad A B. Quoniam latera D C, C F, trianguli D C F, æqualia sunt lateribus E C, C F, trianguli E C F, vtrumque vtrique, nempe D C, ipsi E C, per constructionem, & C F, commune; Est vero & basis D F, basi E F, æqualis, ob triangulum æquilaterum: [c] Erunt anguli ad C, contenti dictis lateribus, æquales. [d] Quare dicetur vterque rectus, atque adeo F C, recta, ad A B, perpendicularis. Data igitur recta linea a puncto in ea dato, &c. Quod faciendum erat.

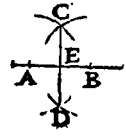
c 8 pri.
d 10. def.

PRAXIS.

EX puncto C, abscindantur vtrinque linea æquales C D, C E, & ex D, & E, describantur duo arcus secantes sese in F. Recta namque ducta F C, erit perpendicularis. Demonstratio eadem est, quæ Euclidis, si modo ducantur recta D F, E F, quæ æquales erunt, propter æquales circulos ex D, & E, descriptos, qui se intersecant in puncto F. Quod si punctum datum in linea recta fuerit extremum, producenda erit linea in rectum & continuum, ad partes puncti dati, vt ex illo erigatur secundum praxim datam linea perpendicularis. Vt si linea data fuerit A C, & punctum datum C, extremum; protrahenda erit A C, in B, & sumenda æquales C D, C E, &c. Si vero ad aliquam lineam constituenda sit linea perpendicularis, non quidem in puncto assignato, sed vtcunque, id efficietur hac methodo. Ex duobus punctis A, & B, quibuscunque linea proposita describantur tam superne, quam inferne duo arcus sese intersecantes in C, & D. Nam

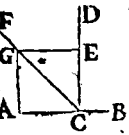
recta

recta ducta CD, erit perpendicularis ad AB, hoc est, faciet duos angulos ad E, rectos, seu aequales. Quod non aliter probabis, quam supra praxim, qua lineam in duas aequales diuisimus partes, demonstrauimus. Nam per 4. propos. erunt anguli ad E, aequales, quippe qui super aequales bases AE, BE, consistunt, opponanturque aequalibus lateribus AC, BC, qua ex C, ad puncta A, & B, ducerentur.



EX PROCLO.

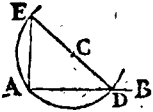
SI punctum in linea datum, fuerit extremum, & linea commode produci nequiuerit, poterimus ex puncto dato educere lineam perpendicularem, linea non producta, hac ratione. Sit recta AB, & punctum A. Ex C, puncto quolibet intra lineam educatur perpendicularis CD, vt docuit Euclides; & [a] abscindatur CE, aequalis ipsi AC: Deinde [b] diuidatur angulus C, bifariam, ducta recta CF: Et ex E, rursus, vt docuit Euclides, educatur EG, perpendicularis ad CD, secans rectam CF, in G. Ducta enim recta GA, perpendicularis erit ad AB. Quoniam cum latera AC, CG, trianguli ACG, aequalia sint lateribus EC, CG, trianguli ECG, vtrúque vtriq., & anguli hisce lateribus contenti aequales quoque, per constructionẽ: [c] Erunt anguli A, & E, oppositi communi lateri CG, aequales; Sed E, est rectus per constructionem; igitur & A, rectus erit, [d] ideoq. AC, ad AB, perpendicularis.



a 3. primi.
b 9. primi.
c 4. primi.
d 10. def

SCHOLIVM.

BREVIVS lineam perpendicularem eri gemus ex puncto dato, siue extremũ illud sit, siue non, hoc modo. Sit data linea AB, punctumq. in ea A. Ex centro C, extra lineam assumpto, vbi libuerit, (dummodo



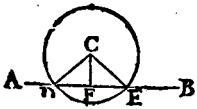
recta

recta AB, producta cum ipso non conueniat) interuallo vero accepto vsque ad A, describatur arcus circuli secans AB, in D. Et ex D, per C, recta ducatur secans arcum in E. Recta enim ducta EA, erit perpendicularis ad AB. Nam angulus A, est rectus, cum sit in semicirculo DAE, vt ostendemus propositione 31. lib. 3.

ALIAM praxim, quando punctum datum est in extremo linea, inuenies in scholio propos. 31. huius lib.

xij. ## PROBL. 7. PROPOS. 12.

SVPER datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non est, perpendicularem rectam deducere.



SIT recta AB, interminatæ quantitatis, & extra ipsam punctum C, à quo oporteat lineam perpendicularem deducere ad rectam AB. Centro C, interuallo vero quolibet circulus describatur secans AB, in D, & E. (quoniam interuallum assumptum tantum esse debet, vt transcendat rectam AB; alias eam non secaret) [a] Diuisa autem recta DE, bifariam in F, ducatur recta CF, quam dico perpendicularem esse ad AB. Si enim ducantur CD, CE, erunt duo latera DF, FC, trianguli DFC, æqualia duobus lateribus EF, FC, trianguli EFC, vtrumque vtrique, per constructionem; est autem & basis CD, basi CE, æqualis, cum hæ sint ex centro C, ad circumferentiam. Quare [b] erit angulus DFC, angulo EFC, æqualis, & propterea vterque rectus. Ducta est igitur CF, perpendicularis, quod faciendum erat.

[a] 10. primi.

[b] 8. primi.

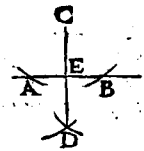
SCHOLIVM.

PROBE apposuit Euclides hanc particulam infinitam. *Si enim linea esset finita, non posset semper à puncto dato ex-*

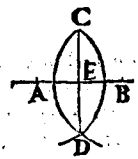
tra

tra ipſam perpendicularis ad eam deduci. Vt ſi linea finita eſſet BE, & punctum C, non poſſet ex C, deſcribi circulus ſecans BE, in duobus punctis, quare neque ex C, perpendiculis duci ad B E. Hac igitur de cauſa vult Euclides, rectam datam eſſe infinitam, hoc eſt, non habere magnitudinem determinatam, vt ſaltem ad ipſam productam perdendicularis poſſit deduci. Ita enim fiat hic, ſi BE, producatur, donec circulus ex C, deſcriptus ſecet totam BA, productam in D, & E, &c.

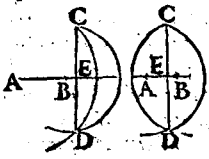
PRAXIS.



CENTRO facto C, & interuallo quouis eodem, deſcribantur duo arcus ſecantes rectam datam in A, & B. Deinde ex A, & B, eodem q. interuallo, vel alio, ſi placuerit, alij duo arcus deſcribantur ſecantes ſe in D. Nam ducta recta CD ſecans AB, in E, erit perpendicularis ad AB. Demonſtratio huius operationis non differt à demonſtratione tradita in praxi propoſitionis 10. *Nam anguli ad E, erunt recti, cnempe inter ſe æquales.* 24. primi.



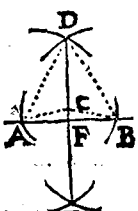
IDEM efficiemus hoc modo. Ex quouis puncto A, in linea data, & interuallo quolibet vſque ad C, aſſumpto, arcus circuli deſcribatur: Deinde ex quolibet alio puncto B, interualloq. vſque ad idem C, alius arcus deſcribatur priorem ſecans in C, & D; Eritq. ducta recta CD, ſecans AB, in E, perpendicularis ad AB. Demonſtratio eadem eſt, quæ prior.



Non eſt autem neceſſe, vt interuallum BC, æquale ſit interuallo AC, vt in hac figura apparet: Facilior tamen erit, & breuior operatio, ſi idem ſemper interuallum accipiatur.

QVOD ſi punctum C, fuerit nimis vicinum rectæ AB, ita agendũ erit. Centro C, ad quoduis interuallum ſecetur recta A B, in

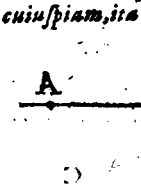
duobus punctis A, B. ex quibus ad maius interuallum quodcunque, quam AC, vel BC, bini arcus tam supra, quam infra describantur, se intersecantes in D, E. Nam ducta recta DCF, quæ producta necessario per punctum E, transibit, perpendicularis erit ad rectam AB, in F. Quod ita demonstrabimus, ductis rectis AD, BD, AC, BC. Quoniam duo latera DA, DC, trianguli ACD, duobus lateribus DB, DC, trianguli BCD, æqualia sunt, nec non & bases AC, BC, æquales sunt, [a] erunt anguli ad D, æquales. Quare cum duo latera DA, DF, triãguli ADF, duobus lateribus DB, DF, trianguli DBF, æqualia sint, contineantq. angulos ad D, æquales, vt ostendimus; [b] erunt anguli ad F, æquales, ac proinde recti, &c.



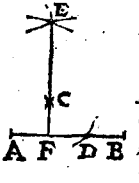
a 8. primi

b 4. primi.

IAM vero si punctum datum sit iuxta extremum plani cuiuspiam, ita vt linea data non possit produci, ita agemus. Ex puncto quouis B, quod è regione dati puncti C, videatur quasi esse positum, hoc est, fere in extremitate lineæ datæ AB, describantur duo arcus supra, & infra lineam AB, ad interuallum BC. Deinde ex puncto A, aliquantum remoto à puncto accepto B. (Quo autem magis distabunt inter se puncta A & B, eo commodius puncta interfectionũ arcuum cognoscentur) alij duo arcus ad interuallum AC, describantur, secantes priores in C, & D. Nam recta CD, perpendicularis erit ad datam rectam AB.



SI autem puncto non prope extremum plani, in quo linea est, dato, linea sit in extremo plani, vt duo arcus infra lineam commode se interfecare non possint, siue punctum datum C, sit propinquum lineæ AB, siue non, absoluemus problema hoc modo. Ad interuallum AC, vbicumque punctum A, sumatur, describatur ex C, arcus secans rectam AB, in D; atque ex A, D, duo arcus describantur versus punctum C, se inter-

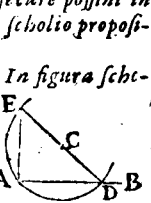


secantes

secantes in E. Recta namque ex E, per C, ducta secans AB, in F, perpendicularis erit ad AB, vt supra demonstratum est, quando punctum C, erat prope lineam AB.

QVO vero modo nos gerere debeamus, quando & punctum datum est iuxta vnum extremum plani, & linea data prope alterum extremum, ita vt neque lineam producere liceat, neque duo arcus commode se intersecare possint in D, infra datam rectam AB, docebimus in scholio propositionis 31. huius lib.

VERVM hoc etiam efficiemus hoc modo. In figura scholij propos. 11. sit ad rectam AB, ex puncto E, deducenda perpendicularis ad extremum quodammodo lineæ. Ducta vtcunque recta ED, [a] secetur bifariam in C; & centro C, per E, arcus circuli describatur secans rectam datam in A. Quòd si non secet, producenda erit, donec ab arcu secetur. Recta enim EA, erit ad AB, perpendicularis; [b] cum angulus A, sit in semicirculo rectus.



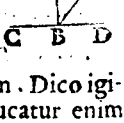
[a] 11. pri.

[b] 31. tertij.

THEOR. 6. PROPOS. 13. [f] xiij.

CVM recta linea super rectam consistens lineam angulos facit, Aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficiet.

RECTA linea AB, consistens super rectam CD, faciat duos angulos ABC, ABD. Si igitur AB, fuerit perpendicularis ad CD, [c] erunt dicti anguli duo recti. Si vero AB, non fuerit perpendicularis, faciet vnum quidem angulum obtusum, alterum vero acutum. Dico igitur ipsos duobus esse rectis æquales. [d] Educatur enim BE, ex B, perpendicularis ad CD, vt sint duo anguli EBC, EBD, recti. Quoniam vero angulus rectus EBD, [e] æqualis est duobus angulis DBA, ABE; [f] erunt, appositio communi angulo recto EBC, duo recti EBD, EBC, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Rursus quia [g] angulus



[c] 10. def.

[d] 11. pri

[e] 19. prō 2. pron

[f] 19. prō

a 2. pro num. ABC, duobus angulis ABE, EBC, æqualis est; a erunt, appositio cómuni angulo ABD, duo anguli ABC, ABD, tribus angulis DBA, ABE, EBC, æquales. Sed eisdem his tribus ostendimus, æquales etiam esse duos rectos EBD, EBC; quæ autem eidem æqualia, b inter se sunt æqualia. Duo igitur anguli ABC, ABD, æquales sunt duobus rectis EBD, EBC. Cum ergo recta linea super rectā consistens lineam, &c. Quod ostendere oportebat.

b 1. prop.

SCHOLIVM.

VIDETVR hæc propositio pendere ex communi quadam animi notione. Quo enim angulus ABC, superat rectum angulum EBC, eo reliquus angulus ABD, superatur ab angulo recto EBD. Nam sicut ibi excessus est angulus ABE, ita hic defectus est idem angulus ABE. Quocirca anguli ABC, ABD, duobus rectis æquales esse comunicuntur: siquidem tantum vnus eorum supra rectum acquirit, quantum alter deperdit.

xiiij.

THEOR. 7. PROPOS. 14.

SI ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

AD punctum C, lineæ rectæ AB, in diuersas partes ductæ sint duæ rectæ CD, CE, facientes cum AB, duos angulos ACD, ACE, vel rectos, vel duobus rectis æquales. Dico ipsas CD, CE, inter se esse constitutas in directum, ita vt DCE, sit vna linea recta. Si enim non est recta DCE; producta DC, ad partes C, in directum, & continuum cadet aut supra CE, vt sit re-

cta

cta DCF, aut infra CE, vt sit recta DCG. Si cadit supra, cum AC, consistat super rectam DCF, [a] fient duo anguli ACD, ACF, duobus rectis æquales; Ponuntur autem & duo anguli ACD, ACE, æquales duobus rectis; [b] & omnes recti sunt inter se æquales. Quare duo anguli ACD, ACF, duobus angulis ACD, ACE, erunt æquales, Ablato igitur communi angulo ACD, [c] remanebunt anguli ACF, ACE, inter se æquales, pars & totum, quod est absurdum. Non igitur recta DC, producta cadet supra CE; Sed neque infra cadet; Eadem enim ratione probarentur anguli ACE, ACG, æquales. Igitur DC, producta eadem efficietur, quæ CE; propterea que, si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

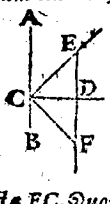
a 13. primi.
b 12. prænun.
c 3. prom

SCHOLIVM.

EST hæc propositio præcedentis conuersa. In ea enim probatum fuit, si DCE, sit recta, angulos ACD, ACE, duobus esse rectis æquales, In hac vero demonstratum est, si dicti anguli sint duobus rectis æquales, rectas DC, EC, esse vnam lineam rectam.

EX PROCLO.

RECTE Euclides addidit in propositione hac (& non ad easdem partes.) Quoniam vt ait Porphyrius, fieri potest, vt ad punctum aliquod lineæ datæ ad easdem partes duæ lineæ ducantur, facientes cum data duos angulos duobus rectis æquales, quæ tamen non constituant vnam lineam, eo quod non ad diuersas sint ductæ partes. Sit enim punctum C, in linea AB, datum. Ducatur CD, [d] perpendicularis ad AB, [e] diuidaturque rectus angulus ACD, bifariam per rectam CE. Deinde ex D, quolibet puncto rectæ CD, [f] ducatur DE, perpendicularis ad CD, secans rectam CE, in E. Producta autem ED, ad partes D, [g] sumatur DF, æqualis rectæ DE. & ducatur recta FC. Quo-



d 11. primi.
e 9. primi.
f 11. primi.
g 3. primi.

niam igitur latera ED, DC, trianguli EDC, æqualia sunt lateribus FD, DC, trianguli FDC, vtrumque vtrique, & anguli D, ipsis contenti æquales, nempe recti; [a] *erit basis EC, basi CF, æqualis, & angulus ECD, angulo FCD. Sed angulus ECD, dimidium est recti. (Est enim rectus ACD, diuisus bifariam.) Igitur & FCD, dimidium erit recti. Quare CF, cum AC, facit angulum AGF, constantem ex recto, & dimidio recti; Facit autem CE, cum eadem AC, angulum ACE, dimidium etiam recti. Duo igitur anguli ACF, ACE, quos ad easdem partes faciunt rectæ CF, CE, cum AB, æquales sunt duobus rectis: Et tamen CF, CE, non sunt vna linea recta, propterea quod non sunt ducta ad diuersas partes, sed ad easdem.*

[a] 4. primi.

XV. THEOR. 8. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, angulos ad verticem æquales inter se efficient.

SECENT se duæ rectæ AB, CD, in puncto E, vtcunque. Dico angulos, quos faciunt ad verticem E, inter se esse æquales, angulum videlicet AED, angulo BEC, & angulum AEC, angulo BED. Quoniam recta DE, consistit super rectam AB, [b] erunt duo anguli AED, DEB, æquales duobus rectis. Rursus quia recta BE, super rectam CD, consistit, erunt eadé ratione duo anguli CEB, BED, duobus rectis æquales. Cum igitur [c] omnes recti anguli inter se sint æquales; erunt duo anguli AED, DEB, duobus angulis DEB, BEC, æquales. Dempto igitur communi angulo DEB, [d] remanebit angulus AED, angulo BEC, æqualis. Eadem ratione confirmabitur, angulos AEC, BED, inter se æquales esse. Nam duo anguli AEC, CEB, [e] qui duobus sunt rectis æquales, æquales erunt duobus quoque angulis DEB, BEC, qui duobus rectis sunt æquales. Ablato igitur angulo communi BEC, [f] remanebunt anguli AEC, BED, æquales inter se. Si igi-

[b] 13. primi.
[c] 12. pronun.
[d] 3. pron.
[e] 13. primi.
[f] 3. pron.

tur

tur duæ rectæ lineæ se mutuo secuerint, &c. Quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM I.

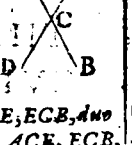
EVCLIDES colligit ex demonstratione huius theorematis, (ex sententia Procli, quoniam alia exemplaria hoc corollarium nō habent) duas lineas rectas se mutuo secantes efficere ad punctum sectionis quatuor angulos quatuor rectis angulis æquales. Nam in demonstratione ostensum fuit, tam duos angulos AED, DEB, quam duos AEC, CEB, duobus esse rectis æquales, per 13. propos. Omnes igitur quatuor anguli ad E, constituti æquipollent bis duobus rectis angulis. Quare quatuor rectis æquales existunt.

COROLLARIVM II.

EADEM ratione colligemus, omnes angulos circa vnum & idem punctum constitutos, quotcunque fuerint, quatuor duntaxat rectis angulis æquales esse. Si enim ex E, aliæ lineæ quotlibet educantur, diuidentur solummodo illi quatuor anguli ad E, constituti in plurimas partes, a quæ omnes simul sumptæ totis suis adæquantur. Cum ergo illi quatuor anguli æquales sint quatuor rectis, ex 1. corollario, erunt quo que omnes alij simul sumpti quatuor tantum rectis æquales. Ex quo perspicuum est, omne spatium punctum aliquod in plano circumstans, æquialere quatuor rectis angulis, vt multi auctores asserunt; quia omnes anguli, qui circa illud punctum constitui possunt, quatuor sunt rectis angulis æquales. Simili modo constat, quotlibet lineas rectas se inuicem secantes, facere ad punctum sectionis angulos æquales quatuor rectis. a 19. prō

EX PROCLO.

SI ad aliquam rectam lineam, ad eiusq. signum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes sumptæ, angulos ad verticem æquales fecerint, ipsæ rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt.

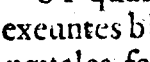


EX puncto C, rectæ AB, in diuersas partes egrediantur duæ rectæ CD, CE, facientes angulos ACE, BCD, inter se æquales: Vel etiam duos ACD, BCE. Dico duas CD, CE, efficere vnam lineam rectam. Quoniam enim angulus ACE, æqualis est angulo ECD; addito communi angulo BCE, b *erunt duo anguli ACE, ECB, duobus angulis DCB, BCE, æquales: Sed* c *anguli ACE, ECB, sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo DCB, BCE, duo-* b 2. pron c 13. pri

a 14. pri. *bus erunt rectis æquales. Quamobrem CD, CE, a erunt linea una recta. Hoc autem, vt vides, conuersum est propositionis decimaquintæ.*

EX PELETARIO.

SI quatuor rectæ lineæ ab vno puncto exeuntes binos angulos oppositos inter se æquales fecerint, erunt quælibet duæ lineæ aduersæ in rectum sibi, & continuum coniunctæ.



EX puncto A, quatuor lineæ ductæ AB, AC, AD, AE, faciant duos angulos oppositos BAE, CAD, inter se æquales: Item duos BAC, DAE, inter se æquales. Dico tam BA, AD, facere vnam lineam rectam, quam CA, AE. Quoniam æquales sunt anguli BAE, CAD, si æquales illis addantur

b 2. prænum. *anguli BAC, DAE, b erunt duo anguli BAE, BAC, æquales duobus angulis CAD, DAE. Tam ergo illi, quam hi, dimidium sunt quatuor angulorum circa punctum A, consistentium: At hi quatuor æquales sunt quatuor rectis, per 2. coroll. præcedentis propos. Igitur duo anguli BAE, BAC,*

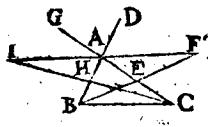
c 14. pri *æquales sunt duobus rectis; c atque adeo CA, AE, vnam efficient lineam rectam. Eodem pacto ostendetur, duas BA, AD, vnam rectam efficere lineam. Nam eadem ratione erunt duo anguli BAE, EAD, æquales duobus angulis DAC, CAB. Quare, vt prius, concludetur propositum. Peletarius autem demonstrat hoc idem ratione ducente ad id, quod fieri nequit. Nos tamen demonstrationem nostram ostensiuam eius demonstrationi iure optimo præposuimus.*

xvj. ## THEOR. 9. PROPOS. 16.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito, maior est.

TRIAN-

TRIANGVLI ABC, latus BA, producatur ad D. Dico angulum externum DAC, maiorem esse interno, & opposito ACB, itemq. maiorē interno, & opposito ABC. Diuidatur [a] enim AC, bifariam in E; & ex B, per E, extēdatur recta BEF, ita vt EF, [b] abscissa sit æqualis rectæ EB; ducaturq. recta FA. Quoniam igitur latera CE, EB, trianguli CEB, æqualia sunt lateribus AE, EF, trianguli AEF, vtrumq. vtrique, per constructionem; Sunt autem & anguli ad E, dictis lateribus comprehensi, [c] inter se æquales, cum sint circa verticem E, & oppositi: Erit [d] basis CB, æqualis basi AF, & angulus ECB, angulo EAF; Est autem angulus DAC, externus maior angulo EAF, totum videlicet parte. Igitur & externus angulus DAC, maior erit interno, & oppositō angulo ACB. Quod si latus CA, producatur ad G; & AB, diuidatur bifariam in H; extendaturq. recta CHI, vt HI, æqualis sit rectæ HC, & ducatur recta IA: demonstrabitur eadem prorsus ratione, angulum exteriorem GAB, maiorem esse interno & oppositō angulo ABC; Est autem [e] angulus DAC, angulo GAB, æqualis, cum lineæ BD, CG, se mutuo secent in A. Igitur & angulus DAC, maior erit interno & oppositō angulo ABC. Est autem idem angulus DAC, maior quoque ostēsus angulo interno & oppositō ACB. Cuiuscunque ergo trianguli vno latere producto, &c. Quod demonstrandum erat.



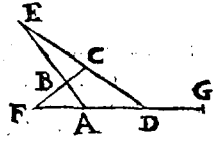
[a] 10. primi.
[b] 3. primi.
[c] 15. primi.
[d] 4 prim.
[e] 15. pri

SCHOLIVM.

NON dixit Euclides, angulum externum DAC, maiorem esse angulo BAC, interno, qui sibi est deinceps; sed solum magnitudine superare vtrumlibet ACB, ABC, internorum, sibiq. oppositorum: quoniam externus angulus æqualis potest esse angulo interno sibi deinceps, quando scilicet externus rectus est. Tunc enim necessario is, qui sibi est deinceps, rectus quoque erit: Potest & esse minor, quando nimirum est acutus. Hoc enim posito, angulus illi deinceps obtusus erit. Solum ergo, quando obtusus erit externus, superabit in-

ternum sibi deinceps; Hic enim necessario acutus existet. Quæ omnia facile colliguntur ex propos. 13. per quam anguluſ externus, & internus illi deinceps, æquales sunt duobus rectis.

ID vero, quod in scholio propos. 6. huius libri nos demonstraturos recepimus, nimirum hanc propos. non posse conuerti; cum & vno latere figura quadrilatera producto, exterior angulus quilibet interno, & oppositio possit esse maior; hac ratione absoluemus.

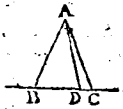


SIT figura quadrilatera ABCD, cuius angulus BAD, obtusus, & ABC, rectus constituatur, hac vtmen lege, vt rectæ AB, DC, productæ ad partes B, & C, in puncto E, necnon & rectæ DA, CB, ad partes A, & B, in puncto F, coeant. Quod quidem fiet, si constituatur triangulum ADE, obtusangulum, & producta DA, versus A, ducatur ex quouis puncto F, ad AE, perpendicularis FB, secans latus DE, in C. Dico, si AD, producatur ad G, angulum externum CDG, maiorem esse quilibet eriũ internorum BAD, ABC, BCD, sibi oppositorum. Cum enim ADE, triangulum sit, a erit angulus externus EDG, maior interno opposito DAE. Rursus cum DAB, obtusus a 16. pri *maior sit recto ABC, maior quoque multo erit EDG, ipso ABC. Postremo, quia & in triangulo CDF, b angulus ex-*

b 16. pri *ternus CDG, maior est interno, & opposito FCD; manifestum est, in quadrilatero ABCD, exterioum angulum CDG, maiorem esse internis, & oppositis BAD, ABC. BCD. Quam obrem propositio hac 16. conuerti nequit, quippe cum eius antecedens, & consequens non reciprocentur, vt demonstratum est.*

EX PROCLO.

SEQVITVR ex hac propositione, ab eodem puncto ad vnam eandemque lineã rectam non posse duci plures lineas rectas, quam duas inter se æquales. Si enim fieri potest, ducantur ex A, ad lineam BC, tres lineæ rectæ æquales AB, AC, AD. Quoniam igitur lateva AB, AC,

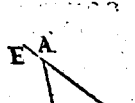


sunt æqualia, [a] *erunt anguli ACB, & ABC, æquales super basim BC. Rursus quia latera AB, AD, sunt æqualia,* [b] *erunt anguli ADB, & ABD, super basim BD, æquales. Quare cum uterque angulus ACD, & ADB, æqualis sit angulo ABC,* [c] *erit angulus ADB, æqualis angulo ACD, externus interno opposito, quod est absurdum, cum per hanc 16. propos. externus interno maior sit. Non ergo plures lineæ rectæ, quam duæ, inter se æquales, ex A, ad BC, possunt duci. Quod est propositum.*

[a] 5. pri.
[b] 5. pri.
[c] 1. pron

THEOR. 10. PROPOS. 17. xvij.

CVIVSCVNQVE trianguli duo anguli duobus rectis sunt minores, omnifariam sumpti.



Sit triangulum ABC; Dico duos angulos ABC, & ACB, minores esse duobus rectis; Item duos CBA, & CAB; Itemque duos BAC, & BCA. Producantur enim duo quæuis latera; nempe CB, CA, ad D, & E. Quoniam igitur [d] angulus ABD, externus maior est interno & opposito angulo ACB; si addatur communis angulus ABC, [e] erunt duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis ABC, ACB: [f] Sed ABD, ABC, æquales sunt duobus rectis. Igitur ABC, ACB, minores sunt duobus rectis. Eadē ratione erunt anguli CBA, & CAB, minores duobus rectis. Nam cum angulus externus ABD, [g] maior sit angulo CAB, interno, & opposito; [h] erunt, appositio communi angulo ABC, duo anguli ABD, ABC, maiores duobus angulis CAB, CBA. Cum ergo [i] duo illi duobus rectis sint æquales, erunt hi alij duo duobus rectis minores. Non secus ostendemus, duos BAC, BCA, duobus esse rectis minores. Cum enim angulus externus BAE; [m] maior sit interno & oppositio angulo BCA; si apponatur communis angulus BAC, [n] erunt duo anguli BAE, BAC, duobus angulis BCA, BAC, maiores: ac proinde cum illi duo [o] sint duobus rectis æquales, e-

[d] 16. pri mi.
[e] 4. pron
[f] 13. pri mi.
[g] 16. pri mi.
[h] 4. pron
[i] 13. pri.
[m] 16. pri mi.
[n] 4. pron
[o] 13. pri.

runt

runt duo hi minores duobus rectis. Cuiuscunque igitur trianguli, &c. Quod erat demonstrandum.

EX PROCLO.

HINC perspicuum est, ab eodem puncto ad eandem rectam lineam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quam vnam. Si enim fieri posset, ducantur ex A, ad rectam BC, duæ perpendiculares AB, AC. Erunt igitur in triangulo ABC, duo anguli interni B, & C, duobus rectis æquales, cum sint duo recti, quod est absurdum. [a] *Sunt enim quilibet duo anguli in triangulo quocunque assumpti minores duobus rectis. Non ergo plures perpendiculares, quam vna, ex A, ad BC, deduci possunt. Quod est propositum.*

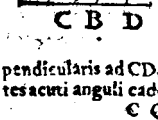
[a] 17. primi.

COROLLARIVM I.

CONSTAT etiam ex his, In omni triangulo, cuius vnus angulus fuerit rectus, vel obtusus, reliquos esse acutos, ceu monuimus defin. 26. huius lib. Cum enim per hanc propos. duo quilibet anguli sint duobus rectis minores, necesse est, si vnus fuerit rectus, vel obtusus, quemcunque reliquorum esse acutum, ne duos angulos in triangulo rectos, aut duobus rectis maiores esse fateamur.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex hac propos. si linea recta cum alia recta angulos inæquales faciat, vnum acutum, & obtusum alterum, lineâ perpendicularem ex quouis eius puncto ad aliam illam rectam demissam cadere ad partes acuti anguli. Faciat enim recta AB, cum recta CD, angulos inæquales, nempe ABD, acutum, & ABC, obtusum, demittaturq. ex puncto A, quocunque ad CD, perpendicularis AD. Dico AD, cadere ad partes anguli acuti ABD. Nam si non cadit ad partes acuti anguli ABD, cadat si fieri potest, ad partes anguli obtusi ABC. Igitur duo anguli ABC, ACB, obtusus & rectus, in triangulo ABC, maiores sunt duobus rectis; [b] sed & duobus rectis sunt minores, quod est absurdum. Non ergo ex A, perpendicularis ad CD, deducta cadit ad partes anguli obtusi. Quare ad partes acuti anguli cadet.



[b] 17. primi.

COROLLARIVM III.

PARI ratione fit ex hac propos. manifestum, omnes angulos trianguli æquilateri, & duos angulos trianguli Isoscelis supra basin, esse acutos. Nam [c] cum & quilibet duo in triangulo æquilatero, & duo in Isoscele supra basin sint inter se æquales; [d] sintque simul iam illi duo, quâ hi duobus rectis minores: erit quilibet illorum recto minor, hoc est, acu-

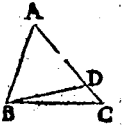
[c] 5. primi. [d] 17. primi.

tus.

tus. Si enim rectus foret, aut obtusus, essent ambo vel duobus rectis æquales, aut maiores.

THEOREMA 11. PROPOS. 18. xix.

OMNIS trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

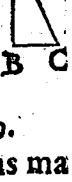


IN triangulo ABC, sit latus AC, maius latere AB. Dico angulum ABC, subtensum a maiori latere AC, maiorem esse angulo ACB, qui a minori latere AB, subtenditur. Nam ex AC, [a] auferatur AD, æqualis ipsi AB, & ducatur recta BD. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia sunt per constructionem, [b] erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem [c] angulus ADB, maior angulo ACB. Igitur & angulus ABD, maior erit angulo ACB. Quamobrem cum [d] angulus totus ABC, maior adhuc sit angulo ABD; erit angulus ABC, multo maior angulo ACB. Eadem ratione, si latus AC, maius ponatur latere BC, ostendes angulum ABC, maiorem esse angulo BAC; si nimirum ex CA, abscindatur linea æqualis ipsi CB, &c. Quare omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit; Quod demonstrandum erat.

[a] 3. pri.
[b] 5. pri.
[c] 16. pri.
[d] 9. prop.

COROLLARIUM.

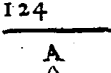
EX hoc sequitur, omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales, vt monuimus defin. 15. huius lib. Sit enim triangulum Scalenum ABC, cuius maximum quidem latus AC, minimum autem BC, & medium locum habens AB. Dico eiusdem omnes angulos inæquales esse. Cum enim latus AC, ponatur maius latere AB, erit per hanc propos. angulus B, angulo C, maior. Eadem ratione maior erit angulus C, angulo A, quandoquidem & latus AB, latere BC, maius ponitur. Sunt igitur omnes tres anguli inæquales, maximus quidem B, minimus vero A, & C, medium locum inter vtrumque tenens.



THEOR. 12. PROPOS. 19. xviij.

OMNIS trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

IN

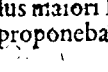


IN triangulo ABC, angulus B, maior sit angulo C. Dico latus AC, subtendens maiorem angulum B, maius esse latere AB, quod angulum minorem C, subtendit. Si enim latus AC, maius non est latere AB, erit vel æquale illi, vel minus. Si dicatur AC, æquale esse ipsi AB, [a] erit angulus B, æqualis angulo C; Est autem & maior per hypothesin, quod est absurdum. Si vero AC, minus esse dicatur latere AB, erit angulus B, subtensus a minori latere AC, minor angulo C, subtenso a maiore latere AB; Ponitur autem maior, quod magis est absurdum. Cum igitur AC, latus neque æquale sit lateri AB, neque minus eo, erit maius. Eadem ratione probabitur, latus AC, maius esse latere BC, si angulus B, maior esse concedatur angulo A. Omnis ergo trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur; Quod demonstrandum proponebatur.

[a] 5. pri.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex hac propos. omnium rectarum ex quouis puncto ad rectam quamcunque ductarum, eam, quæ perpendicularis est, esse minimam. Ducantur enim ex puncto A, ad rectam BC, quotcunque lineæ AD, AE, AF, & aliæ, quarum AD, sola sit perpendicularis ad BC, & nulla alia, cum ex eodem puncto ad eandem rectam sola vna perpendicularis duci possit, vt ex Proclo ad propos. 16. demonstrauimus. Dico omnium minimam esse AD. Nam in triangulo AED, cum duo anguli ADE, AED, [b] sint duobus rectis minores, ponaturque ADE, rectus; erit AED, acutus. Quare [c] maius erit latus AE, latere AD. Eodem modo ostendemus, omnes alias rectas maiores esse recta AD: ac proinde perpendicularis AD, omnium erit minima.



[b] 17. pri.
[c] 19. pri.

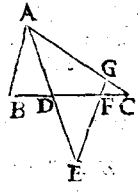
EX PROCLO.

POSSVMVS hoc idem theorema ostendere affirmatiua demonstratione, sine adminiculo præcedentis, si tamen prius demonstretur hoc sequens theorema.

SI trianguli angulus bifariam sectus fuerit, secansq. angulum recta linea ad basin ducta in partes inæquales ipsam diui-

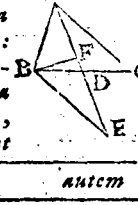
dat; Latera illum angulum continentia, inæqualia erunt, & maius quidem illud, quod cum maiori basis segmento coincidit, minus vero, quod cum minori.

TRIANGVLI ABC, angulus BAC, diuidatur bifariam per rectam AD, quæ secet basin BC, in partes inæquales, maiusque segmentum sit DC. Dico latus AC, maius esse latere AB. Producatur enim AD, ad E, [a] vt sit DE, æqualis ipsi AD. Deinde ex maiori segmento DC, auferatur recta DF, æqualis minori segmento DB, & per F, ex E, extendatur recta EFG. Quoniam igitur latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia sunt lateribus ED, DF, trianguli EDF, vtrumque vtrique, per constructionem; sunt autem & [b] anguli ADB, EDF, dictis lateribus contenti æquales: [c] Erunt bases AB, & EF, æquales, & angulo BAD, angulus FED, æqualis: Est vero & angulus CAD, angulo BAD, æqualis, per hypothesin: Igitur [d] anguli CAD, GEA, trianguli AGE, æquales erunt; [e] ideoque latera AG, EG, æqualia erunt. Est autem recta AC, maior quam AG: quare & AC, maior erit, quam EG. Et quia EG, maior est, quam EF, erit & AC, multo maior, quam EF. Cum igitur demonstratum sit rectam EF, æqualem esse rectæ AB, erit AC, latus maius latere AB, quod erat ostendendum.



[a] 3. pri.
[b] 15. pri.
[c] 4. pri.
[d] 1. pron
[e] 6 pri.

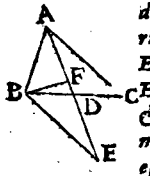
HOC ostenso theoremate, ita propositio 19. demonstrabitur. In triangulo ABC, angulus ABC, maior sit angulo C. Dico latus AC, maius esse latere AB. Diuisa enim recta BC, (super quam constituti sunt dicti anguli inæquales) bifariã in D: ex A, per D, extenda tur recta ADE, [f] vt sit DE, æqualis ipsi AD: ducaturque recta EC. Quoniam igitur latera AD, DC, trianguli ADC, æqualia sunt latetibus ED, DB, trianguli EDB, vtrumq. vtrique, per constructionem, & sunt



[f] 3. pri.
[g] 15. pri.

autem

autem & anguli ADC, EDB, dictis comprehensi lateribus
a4. primi. æquales: a Erunt bases AC, & BE, æquales, angulusq. ACD, angulo EBD, æqualis: Et quia angulus ACD, ponitur esse minor angulo ABC, erit & angulus EBD, minor eodem angulo ABC. Ideoque angulus ABE, per rectam BD, diuidetur in partes inæquales. Si igitur bifariam secetur per rectam BF, cadet BF, supra ED, eo quod angulus ABD, maior sit angulo EBD. Quia vero EF, b maior est, quam ED, & ED, posita est æqualis ipsi AD, erit EF, maior, quam AD c. Sed adhuc AD, maior est, quam AF. Multo igitur maior erit EF, quam AF. Itaque quia recta BF, diuidens angulum ABE, bifariam, secat basin AE, inæqualiter in F, estq. maius segmentum EF, minus autem AF; erit per theorema à Proclo proxime demonstratum, latus BE, maius latere AB. Ostensum est autem BE, æquale esse lateri AC. Igitur & AC, latus latere AB, maius erit. Quod erat demonstrandum.



b9. pron
c9. pron

SCHOLIVM.

HAEC propositio 19. conuersa est propositionis 18. vt perspicuum est. Campanus autem duarum istarum propositionum ordinem prorsus inuertit, ita vt ea, quæ apud nos est 18. apud ipsum sit 19. & contra. Quarum vtramque ostendit ducendo ad id, quod fieri nequit, cum tamen Euclides propositionem 18. directe, & ostensiue confirmauerit, vt ex dictis liquido constat.

POTERIMVS quoque theorema à Proclo demonstratum conuertere, hoc modo.

SI trianguli duo latera inæqualia fuerint, linea recta bifariam diuidens angulum ipsis contentum, secabit basin in partes inæquales, maiusq. segmentum erit prope maius latus.

DVO latera AB, AC, trianguli ABC, sint inæqualia; AC, maius, & AB, minus. Recta autem AD, diuidens

angu-

angulum BAC, bifariam, secet basin BC, in D. Dico segmentum DC, maius esse segmento DB. Si enim non est maius, erit vel æquale, vel minus. Si dicatur esse æquale; producatur AD, ad E, a ut DE, æqualis sit ipsi DA, ducaturque recta EC. Quoniam igitur latera AD, DB, æqualia sunt lateribus ED, DC, utrumque utrique; AD, videlicet ipsi ED, per constructionem, & DB, ipsi DC, per hypothesin aduersarij. Sunt autē & b anguli ad D, dictis lateribus contēti æquales: c erit basis AB, basi EC, æqualis & angulo BAD, angulus CED. Positus autem est & angulo BAD angulus CAD, æqualis. Igitur & anguli CED, CAD, æquales erunt. d Ideoq. latus AC, lateri EC, æquale. Cum igitur ostensum sit, lateri EC, æquale esse quoque latus AB, e erunt latera AC, AB, æqualia; quod est absurdum, quia AC, maius ponebatur, quam AB. Non erit igitur segmentum DC, segmento DB, æquale. Quod si DC, dicatur esse minus, & DB, maius; erit per theorema Procli, latus AB, maius latere AC. Ponebatur autem minus, quod multo magis est absurdum. Non igitur minus erit DC, quam DB. Quare erit necessario maius.

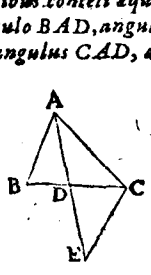
a 3. primi.

b 15. primi.

c 4. primi.

d 6. primi.

e 1. pra.

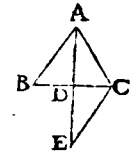


EODEM modo demonstrari poterit hoc theorema.

SI trianguli angulum recta linea bifariam diuidens, basin bifariam quoque secet, erunt duo latera angulum continentia inter se æqualia: Quod si latera æqualia fuerint, basin etiam bifariam secabit linea recta, quæ angulum bifariam diuidit.

PRIMVM recta AD, secans angulum BAC, bifariam diuidat quoque basin BC, in D, bifariam. Dico latera AB, AC, inter se æqualia esse. Hoc autem demonstrabimus eadem ratione, qua in præcedenti theoremate ostensum fuit, latus AC, æquale esse lateri AB, si DC, segmentum segmento

DB,



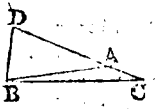
DB, æquale ponatur, dummodo figuram eodem modo construas. Cum enim latera AD, DB, æqualia sint lateribus ED, DC, [a] *& anguli ad D, dictis lateribus contenti æquales,* [b] *erunt bases AB, EC, æquales, & angulus CED, angulo BAD, hoc est, angulo CAD, æqualis. Quare* [c] *AC, æquale erit ipsi EC, hoc est, ipsi AB.*

DEINDE sint latera AB, AC, æqualia, & recta AD, secans basin EC, in D, diuidat angulum BAC, bifariam. Dico segmentum DC, æquale esse segmento DB. Cum enim latera AD, AB, æqualia sint lateribus, AD, AC, vtrumque vtrique, & anguli quoque ad A, contenti dictis lateribus æquales per hypothesin, [d] *erunt bases ED, DC, æquales.*

a 15. primi.
b 4. pri.
c 6 pri.
d 4. pri.

THEOR. 13. PROPOS. 20.

OMNIS trianguli duo latera reliquo sunt maiora, quomodocunque assumpta.



SIT triangulum ABC. Dico quælibet eius duo latera, nempe AB, AC, simul maiora esse reliquo latere BC. Producatur vnum ex illis, vt CA, vsque ad D, [e] sitq. recta AD, æqualis alteri lateri non producto AB, & ducatur recta DB. Quoniam igitur duo latera AB, AD, æqualia inter se sunt, per constructionem, [f] erunt anguli ABD, ADB, æquales inter se: Est autem angulus ABD, [g] maior angulus CBD. Igitur & angulus CBD, maior erit angulo ADB. In triangulo ergo CBD, latus CD, oppositum maiori angulo CDB, [h] maius erit latere BC, quod minori angulo CDB, opponitur. Cum igitur duo latera AB, AC, simul æqualia sint ipsi CD, (si enim æqualibus AB, AD, commune addatur AC, [i] fient tota æqualia; nimirum linea composita ex AB, AC, & linea composita ex AD, AC,) erunt quoque latera AB, AC, simul maiora latere BC. Eodem modo demonstrabitur, quælibet alia duo latera maiora esse reliquo. Quare omnis trianguli duo latera reliquo sunt ma-

e 3. primi.
f 5. primi.
g 9. pron
h 19. primi.
i 2. pron.

iora,

iora, &c. Quod demonstrandum erat.

EX PROCLO.

ALITER hoc theorema à familiaribus Heronis, & Porphyrij demonstratur, nullo latere producto, hac ratione. Sit probandum duo latera AB, AC, trianguli ABC, maiora esse latere BC. Diuidatur angulus BAC, illis lateribus contentus [a] *bifariam per rectam AD. Quoniã igitur trianguli CDA, latus CD, protractum est ad B,* [b] *erit angulus externus BDA, maior interno & opposito CAD. Igitur & maior angulo BAD. Quare in triangulo ABD, latus AB, maiori angulo ADB, oppositum* [c] *maius erit latere BD, quod minori angulo BAD, opponitur. Eadem ratione ostendetur, latus AC, maius esse, quam CD, quia angulus CDA,* [d] *maior est angulo BAD, hoc est, angulo CAD, &c. Quamobrem duo latera AB, AC, maiora erunt latere BC. Eademq. est ratio quorumcunque duorum laterum, si angulus ipsis comprehensus bifariam secetur.*

[a] 9. pri.

[b] 16. pri

[c] 19. pri

[d] 16. pri.

THEOR. 14. PROPOS. 21. xxj.

SI super trianguli vno latere, ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interius constitutæ fuerint; hæ constitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt, maiorem vero angulum continebunt.

IN triangulo ABC, super extremitates B, & C, lateris BC, intra triangulum constituantur duæ rectæ lineæ BD, CD, in puncto D, concurrentes. Dico BD, CD, simul minores esse duobus lateribus BA, CA, simul; At vero angulum BDC, maiorem angulo BAC. Producatur enim altera linearum interiorum, nempe BD, ad punctum E, lateris CA. Quoniam igitur in triangulo BAE, duo latera BA, AE, [c] maiora sunt latere BE, si addatur com-

[c] 20. primi.

mune EC,[a] erunt BA, AC, maiora, quam BE, EC. Rursus quia in triangulo CED, duo latera CE, ED, [b] maiora sunt latere CD; si commune apponatur DB,[c] erunt CE, EB, maiora, quam CD, DB. Ostensum vero iam fuit, AB, CA, maiora esse, quam BE, EC. Multo igitur maiora, erunt BA, CA, quam BD, CD, quod primo proponebatur. Præterea, quoniã angulus BDC,[d] maior est angulo DEC, externus interno; & angulus DEC, angulo BAC, maior quoque est, eandem ob causam. Erit angulus BDC, multo maior angulo BAC; quod secundo proponebatur. Si igitur super trianguli vno latere, ab extremitatibus, &c. Quod erat ostendendum.

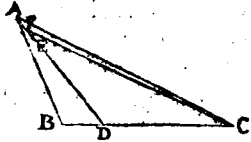
a 4. pron
b 20. pri
c 4. pron
d 16. pri

SCHOLIVM.

QVAM recte Euclides dixerit, duas illas lineas intra triangulum constitutas, duci debere ab extremitatibus vnius lateris, aperte intelligi potest ex eo, quod mox ex Proclo demonstrabimus; in triangulis videlicet rectangulis, vel etiam amblygonijs, intra triangulum constitui posse duas lineas super vnum latus circa angulum rectum, vel obtusum, quarum quidem vna ab extremitate dicti lateris, altera vero à quouis puncto prope aliud extremum lateris eiusdem educitur, qua maiores sint reliquis duobus trianguli lateribus. Item in triangulis scalenis eodem modo super maximum latus duas rectas intra triangulum constitui posse, qua minorem comprehendant angulum, &c.

EX PROCLO.

SIT triangulum habens exempli gratia angulum ABC, obtusum. Dico ab extremo C, & à quouis puncto, nempe à D, prope aliud extremum B, lateris BC, duci posse duas lineas intra triangulum ad aliquod punctum, qua maiores sint duobus lateribus BA, AC. Ducatur enim recta DA. Et quoniam in triangulo ABD, duo anguli ABD, ADB, c *minores sunt duobus rectis. Ponitur autem ABD, maior recto, nempe obtusus; erit ADB, minor recto, ideoque minor angulo ABD.*



c 16. pri

Quare

Quare latus AD, [a] minus erit latere AB. Ex DA, [b] abscindatur recta DE, aqualis recta AB. Et reliqua linea AE, [c] bifariam diuidatur in F. Si igitur ab extremo C, ad F, recta ducatur CF, erunt duæ lineæ rectæ constitutæ CF, DF, intra triangulum maiores duobus lateribus BA, AC. Quoniam enim in triangulo AFC, duo latera AF, FC, [d] maiora sunt latere AC. Est autem recta AF, ipsi FE, aqualis, per constructionem; erunt CF, FE, maiores quoque latere CA. Si igitur aqualia addantur ED, & AB, fient rectæ CF, FD, [e] maiores lateribus CA, AB. Quod est propositum. Quod si ad F, ex B, extremo recta duceretur, essent duæ rectæ constitutæ CF, BF, minores duobus lateribus CA, AB, vt Euclides demonstrauit.

[a] 19. primi.
[b] 3. primi.
[c] 10. primi.
[d] 20. primi.
[e] 4. prox.

RVRSVS sit triangulum scalenum ABC, cuius latus maximum BC, minimum AB. Ex BC, [f] auferatur BD, aqualis rectæ AB, & ducatur AD, recta, ad cuius punctum quodlibet, vt ad E, ab extremo C, recta ducatur CE. Constituta igitur erit intra triangulum duæ linea CE, DE, quæ minorem angulum comprehendunt eo, quem efficiunt duo latera AB, AC. Cum enim duo latera BA, BD, aqualia sint, [g] erunt duo anguli BAD, BDA, aquales: Sed BDA, angulus [h] maior est angulo CED. Maior igitur erit & angulus BAD, angulo CED. Quare multo maior erit totus angulus BAC, angulo CED. Quod est propositum. Recte igitur Euclides monuit, duas lineas intra triangulum constitutas educi debere ab extremis punctis vnius lateris, vt minores quidem sint duobus reliquis trianguli lateribus, maiorem vero complectantur angulum. Alias enim propositio vera non esset, vt iam est demonstratum.

[f] 3. primi.
[g] 5. pri.
[h] 16. pri.

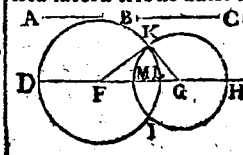
VERVM de constitutione duarum linearum intra triangulum, quæ maiores sint, vel aquales duobus lateribus, plura ostendemus ex Pappo ad propos. 34. huius lib.

PROBL. 8. PROPOS. 22. xxij.

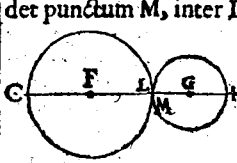
EX tribus rectis lineis, quæ sint tribus datis rectis lineis æquales, triangulum con-

ſtituere. Oportet autem duas reliqua eſſe maiores omnifariam ſumptas: quoniam vniuſcuiuſque trianguli duo latera omnifariam ſumpta reliquo ſunt maiora.

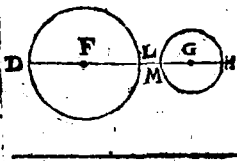
TRES lineæ rectæ datæ ſint A, B, & C, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, (Alias ex ipſis non poſſet conſtitui triangulum, vt conſtat ex propoſ. 20. in qua oſtenſum fuit, duo quæuis latera trianguli reliquo eſſe maiora.) oporteatq. conſtruere triangulum habens tria latera tribus datis lineis æqualia. Ex aſſumpta recta



a 3. primi. quauis DE, infinitæ magnitudinis a abſcindatur recta DF, æqualis rectæ A: Et ex reliqua FE, recta FG, æqualis rectæ B; & ex reliqua GE, recta GH, æqualis rectæ C. Deinde centro F, interuallo vero FD, circulus deſcribatur DIK. Item centro G, interuallo autem GH, alius circulus deſcribatur HIK, qui neceſſario priorem ſecabit in punctis I, & K, (cum enim duæ FD, GH, maiores ponantur recta FG; ſi ex FE, ſumatur recta FL, æqualis ipſi FD: & ex GD, recta GM, æqualis ipſi GH, cadet punctum M, inter L, & D. Si namque M, caderet in



L, punctum, eſſent GL, FL, hoc eſt, GH, & FD, æquales rectæ FG: Si vero M, caderet inter G, & L, eſſent eædem duæ FL, GM, hoc eſt, DF, GH, minores recta FG, quorum vtrumque eſt contra hypotheſin. Id quod ex appoſitis figuris apparet) ex quorum quolibet, nimirum ex K, ducantur ad puncta F, G, rectæ KF, KG, factumque erit triangulum FGK, cuius latera dico æqualia eſſe datis rectis A, B, & C.

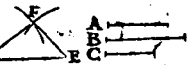


b 15. def. Cum enim recta FK, b æqualis ſit

rectæ FD, & recta A, per constructionem eidem F D, æqualis; [a] erit latus FK, rectæ A, æquale. Rursus quia, GK, æqualis est ipsi GH, & recta C, eidem GH; erit quoque latus GK, rectæ C, æquale: Positum autem fuit per constructionem, reliquum latus FG, reliquæ rectæ B, æquale. Omnia igitur tria latera FK, FG, GK, tribus datis rectis A, B, C, æqualia sunt. Constituimus ergo ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, triangulum: Quod faciendum erat. [a] 1. pro.

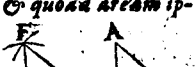
PRAXIS.

SVMATVR recta DE, æqualis cuicunque rectarum datarum, nempe ipsi B, quam nunc volumus esse basin. Deinde ex D, ad interuallum rectæ A, arcus describatur: Item ex E, ad interuallum rectæ C, alter arcus secans priorem in F. Si igitur ducantur rectæ DF, EF, factum erit triangulum habens tria latera æqualia tribus datis lineis. Erit enim latus DF, æquale rectæ A, propter interuallum ipsius A, assumptum: & latus EF, ipsi C, propter assumptum interuallum C: DE, vero latus, acceptum est rectæ B, æquale, ab initio.



SCHOLIVM.

HAC arte cuicunque triangulo proposito alterum prorsus æquale & quoad latera, angulosq. & quoad aream ipsius, constituemus. Sit namque triangulum quodcunque ABC, cui æquale omni ex parte est construendum. Intelligo eius latera, tanquam tres lineas rectas datas AB, BC, CA, quarum quælibet duæ maiores sunt, reliqua. Deinde sumo rectam DE, æqualem uni lateri, nempe BC; & ex D, interuallo lateris AB, arcum describo, item alium ex E, interuallo reliqui lateris CA, qui priorem secet in F, &c.



[b] 20. primi.

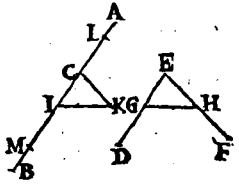
PROBL. 9. PROPOS. 23. xxiij.

AD datam rectam lineam, datumq. in ea punctum, dato angulo rectilineo æqua-

lem angulum rectilineum constituere.

DATA recta sit AB, datumque in ea punctum C, & datus angulus DEF. Oportet igitur ad rectam AB, in punctо C, angulum constituere æqualem angulo B. Sumantur in rectis ED,EF,duo puncta vtcunque G,H,quæ recta GH, connectantur: Deinde [a] constituatur triangulum C I K, habeus tria latera æqualia tribus rectis E G, G H, H E, ita vt C I, æquale sit ipsi EG; & CK, ipsi EH; & I K, ipsi G H. (Quod facile fiet, si C I, sumatur æqualis ipsi E G, & CL, ipsi EH,& IM, ipsi GH. Deinde ex cētris C,& I, interuallis vero C L, & I M, circuli describantur secantes sese in K, &c.) Dico angulum C, æqualem esse angulo E. Quoniam enim duo latera CI, CK, æqualia sunt duobus latеribus EG, E H, vtrumque vtrique, & basis IK, basi G H, per constructionem; [b] erit angulus C,angulo E,equalis. Effecimus igitur angulum ad C,æqualem angulo E, &c. Quod facere oportebat.

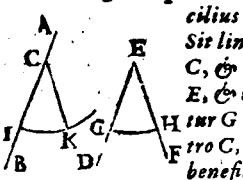
[a] 22.primi.



[b] 8. pri.

PRAXIS.

NON differt huius problematis praxis ab illa, quam in præcedēte problemate tradidimus; propterea quod triangulum constituere oportet æquale alteri triangulo, vt angulus dato angulo æqualis exhibeatur, vt perspicuum est. Facilius tamen hac arte problema efficies. Sit linea data A B, punctumque in ea C, & angulus datus E. Centro igitur E, & interuallo quouis arcus describatur G H: Eodemq; interuallo ex centro C, arcus describatur I K, sumaturq. beneficio circini arcus I K, arcui G H, æqualis. Recta enim ducta C K, faciet angulum ad C, æqualem angulo E. Nam si ducerentur rectæ I K, G H, essent ipsa æquales. propterea quod circino non variato vtrumq. distantiam I K, G H, accepimus. Cum ergo & duo latera



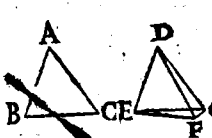
IC, CK, æqualia sint duobus GE, EH, ob æqualia interualla, quibus arcus sunt descripti; erunt anguli ICK, GEH, æquales. [a] 8. pri.

CAETERVM qua ratione ex puncto extra datam rectam proposito recta duci possit, quæ cum data recta angulum constituat dato angulo rectilineo æqualem, docebimus ad propos. 31. huius lib.

THEOR: 15. PROPOS. 24. xxiiij.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, angulum vero angulo maiorem sub æqualibus rectis lineis contentum: Et basin basi maiorem habebunt.

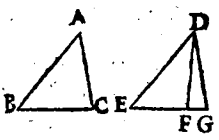
DVO latera AB, AC, trianguli A B C, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, vtrumque vtrique, nempe AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Angulus vero A, maior sit angulo EDF. Dico basin BC, maiorem esse basi EF. Ad lineã enim D E, ad eiusque punctum D, [b] constituatur angulus EDG, æqualis angulo A; (cadetque recta D G, extra triangulum DEF, cum angulus EDF, minor ponatur angulo A) ponaturq. DG, æqualis ipsi DF, hoc est, ipsi A C. Ducta deinde recta EG, cadet ea aut supra rectam E F; aut in ipsam, aut infra ipsam. Cadat primum supra E F, ducaturque recta F G. Quia ergo latera A B, AC, æqualia sunt lateribus DE, DG, vtrumque vtrique, & angulus A, æqualis angulo EDG, per constructionem; [d] Erit basis BC, basi EG, æqualis. Rursus quia duo latera DF, DG, inter se sunt æqualia; [e] erunt anguli DFG, DGF, æquales: Est autem angulus DGF, [f] maior angulo EGF. Igitur & angulus DFG, eodem angulo EGF, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo EGF. In triangulo igitur EFG



[b] 23. primi.
[c] 3. pri.
[d] 4. pri
[e] 5. pri.
[f] 9. prõ.

a 19. primi.

a maius erit latus E G, latere E F. Est autem ostensum E G, æquale esse ipsi B C. Maior igitur erit quoque BC, quam E F. Quod est propositum.



b 4. pri.

CADAT deinde EG, in ipsam E F. Et quia rursus, vt prius, basis EG, b æqualis est basi BC: &

c 9. pron

EG, c maior quam EF, erit & BC, maior, quam EF, quod est propositum.

CADAT tertio EG, infra E F, producanturque rectæ DF, DG, vsque ad H, & I, & ducatur recta FG. Erit autem rursus, vt prius, d basis EG, basi BC, æqualis. Deinde quia duo latera DF, DG, æqualia sunt inter se, per cōstructionem, e erunt anguli

d 4. pri.

e 5. pri.

f 9. pron

GFH, FGI, infra basin FG, æquales: Est autē angulus FGI, f maior angulo FGE. Igitur & angulus G F H, eodem angulo FGE, maior erit. Quare multo maior erit totus angulus EFG, eodem angulo FGE. In trian-

g 19. primi.

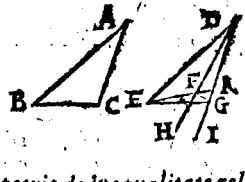
gulo ergo EFG, g maius erit latus EG, latere EF. Est autem ostensum EG, æquale esse ipsi BC. Maior igitur erit quoque B C, basis basi E F. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

SI quis forte roget, cur in 4. propositione Euclides ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrumque vtrique, & anguli contenti dictis lateribus æquales, concluserit non solum æqualitatem basium, verum etiam triangulorum, & reliquorū angulorum; hic autem ex eo, quod duo latera vnius trianguli æqualia sint duobus lateribus alterius trianguli, vtrūque vtrique, anguli vero lateribus illis comprehensi inæquales, colligat tantum inæqualitatem basium, non autem triangulorum, & reliquorum angulorum: Huic respondendum est, necessario id ab Euclide peritissimo Geometra esse factum. Nam ex antecedente huius theorematis semper

con-

consequitur basium inaequalitas, ita vt basis illius trianguli, cuius angulus contentus lateribus assumptis est maior, superet basin alterius, cuius angulus minor existit, vt demonstratum est; non autem necesse est, triangulum illud maius hoc esse. Vt enim clarissime ex Proclo demonstrabimus ad propos. 37. huius primi libri, Triangulum maiorē habens angulum aliquando aquale est triangulo minorem habenti angulum, aliquando vero minus eodem, & aliquādo maius. Non igitur potuit in vniuersum inferri, ex eo, quod angulus vnius trianguli maior est angulo alterius, triangulum etiam maius esse, cum modo aquale sit, modo minus, & modo maius. Idem dici potest de angulis reliquis. Nam in prima figura huius theorematis angulus ABC, minor est semper angulo DEF; cum angulus DEG, (qui aqualis est per 4. propos. angulo ABC,) [a] maior sit eodem angulo DEF, pars toto. In secunda autem figura, existit quidē angulus ABC, angulo DEF, aqualis, per 4. propos. At vero angulus ACB, minor est angulo DFE, cum angulus DFE, [b] maior sit angulo DGF. externus interno, & opposito; & angulus DGE, aqualis sit angulo ACB. In tertia denique figura angulus ABC, maior quidem est angulo DEF, propterea quod angulus DEG, (aqualis existens per 4. propos. angulo ABC,) [c] maior est eodem angulo DEF, totum parte. Sed angulus ACB, minor est angulo DFE. Nam si recta EF, producatur secans rectam DG, in K, fiet angulus DFE, [d] maior angulo DKE, externus interno; Est autem & angulus DKE, maior adhuc angulo DGE, externus quoque interno, & opposito. Multo igitur maior erit angulus DFE, angulo DGE, qui per 4. prop. aqualis est angulo ACB. Quod etiam constat ex 2. parte propos. 21. Nam interiores linea DF, EF, continēt angulum maiorē angulo DGE, quē exteriores lineæ DG, EG, continent. Quare neque certi quicquam colligi potuit de inaequalitate reliquorum angulorum, cum modo vnus altero sit maior, modo minor, & modo aqualis.



a 29. pron

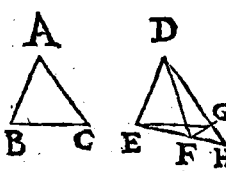
b 16. pri.

c 9. pron

d 16. primi.

QVO.

[a] 17. primi. QVONIAM verò in triangulo DEF, duo anguli E, F, [a] semper minores sunt duobus rectis, erit necessario saltē alter eorum acutus. Si igitur ad partes acuti anguli (vt in 1. figura ad partes anguli D F E, in 2. vero & 3. ad partes anguli DEF.) fiat angulus EDG, aqualis angulo A, & reliqua fiant, vt in propos. dictum est, cadet semper ducta recta E G, supra punctum F. Nam cum angulus DFE, acutus sit, [b] erit vi deinceps, producto latere E F, obtusus. Producta ergo recta DG, secante latus EF, productum in H, [c] maior erit recta DH, latere DF, cum opponatur angulo obtuso in triangulo DFH; ac proinde recta E G, auferens D G, aqualem ipsi DF, cadet necessario supra F. Si namque vel per F, transiret, vel infra caderet, abscinderet ex DG, maiorem lineam latere DF; nimirum vel D H, vel maiorem, quam D H. Hoc si obseruetur, satis erit primus casus propositionis. qua fortassis causa fuit, vt Euclides apud Theonem primo casu contentus fuerit.

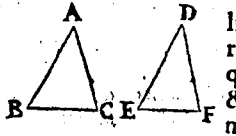


[b] 13. primi.

[c] 19. primi.

XXV. THEOREMA 16. PROPOS. 25.

SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrumque vtrique, basin vero basi maiorem: Et angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.



DVO latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF, vtrúque vtrique, hoc est, A B, ipsi DE, & AC, ipsi DF; Basis autem B C, maior sit base E F. Dico angulum A, maiorem esse angulo D. Si enim non est angulus A,

maior

maior angulo D, erit vel æqualis, vel minor. Si dicatur esse æqualis, cum etiam duo latera circa A, æqualia sint duobus circa D, vtrumque vtrique, per hypothesin; [a] erit & basis BC, æqualis basi EF; quod est absurdum; Ponitur enim basis BC, basi EF, maior: Si vero angulus A, dicatur esse minor angulo D; erit, propter æqualitatē laterum circa istos angulos, basis EF, [b] maior basi BC; quod magis est absurdum, cum EF, ponatur esse minor quam BC. Quare angulus A, cum neque possit æqualis esse angulo D, neque minor, erit maior. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, &c. Quod erat ostendendum.

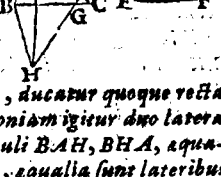
a 4. pri.

b 24. primi.

SCHOLIVM.

THEOREMA hoc conuersum est precedentis. In eo enim ex maiori angulo demonstratum est, basin illi respondentem esse maiorem: In hoc autem ex maiori basi ostensum fuit, angulum illi respondentem maiorem esse. Differunt autem plurimum hæc duo theoremata, nempe 24. & 25. ab illis, quæ explicata sunt propos. 18. & 19. Nam in 19. demonstratum est, in vno eodemq. triangulo maiori angulo maius latus respondere: At in 24. idem ostensum fuit in duobus diuersis triangulis, quorum duo latera vnius æqualia sunt duobus lateribus alterius &c. Idemq. discrimen reperies inter propos. 18. & 25.

MENELAVS Alexandrinus, vt ait Proclus, demōstrat hoc idem theorema ostensiue, hac ratione. Positis eisdem triangulis, ex basi maiore BC, c abscindatur recta BG, æqualis basi minori EF. Fiat quoque angulus GBH, d æqualis angulo DEF, e & sit BH, æqualis ipsi BA, atque adeo ipsi DE. Ducta autem recta linea AH, ducatur quoque recta per G, ex H, secans AC, in I. Quoniam igitur duo latera BA, BH, æqualia sunt, f erunt anguli BAH, BHA, æquales. Rursus quia latera BG, BH, æqualia sunt lateribus EF, ED, vtrumque vtrique, & angulus GBH, æqualis an-

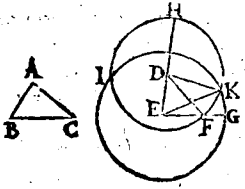


c 3. pri.
d 23. primi.
e 3. pri.
f 5. pri.

gulo

[a] 4. pri.. gulo DEF, per constructionem: [a] erit basis HG, basi DF, atque adeo ipsi AC, aqualis, angulusque GHB, angulo
[b] 9. pron EDF. Et quoniam recta HI, [b] maior est quam HG, qua est ostensa aqualis ipsi AC, erit quoque maior HI, quam AC:
[c] 9. pron Sed AC, [c] maior est adhuc, quam AI. Multo ergo maior
[d] 18. pri. erit HI, quam AI. Quare angulus IAH, [d] maior erit angulo IHA. Additis igitur duobus angulis BAH, BHA, qui
[e] 4. pron ostensi sunt aquales, fiet [e] totus angulus BAC, toto angulo BHG, maior: Sed angulus BHG, demonstratus fuit aqualis angulo D. Maior igitur etiam erit angulus BAC, angulo D, quod est propositum. Quòd si quando contingat, rectam AH, cadere extra triangulum, auferendi erunt anguli aquales BAH, BHA, &c. vt reliquus fiat angulus BAC, maior reliquo angulo BHG. Quando autem recta AH, per punctum B, transit, nihil addendum erit, aut demendum, vt perspicuum est.

HERON autem idem ex eodem Proclo hoc modo demonstrat. Positis eisdem triangulis, producatur basis minor EF, ad G, vt sit EG, [f] aqualis basi maiori BC. Deinde
[f] 3. pri. centro D, interuallo autem DF, describatur circulus, producaturq. ED, ad H, in circunferentiam. Quoniã igitur DH,



[g] 15. def. [g] est aqualis ipsi DF, erit quoque DH, aqualis ipsi AC. Additis igitur aqualibus DE, AB,
[h] 2. pron [h] fient AC, AB, simul aquales toti HE: Sed AC, AB, [i] simul
[i] 20. pri. maiores sunt, quam BC, atque adeo quam EG. Igitur & HE, maior erit, quam EG. Quare circulus descriptus ex centro E, & interuallo EG, intersecabit rectam EH, atque adeo circunferentiam prioris circuli in I, & K, punctis: ad K, autem ducantur recta DK, EK. Et quoniam duo latera AB, AC, aqualia sunt duobus lateribus DE, DK, vtrumque vtrique, (est enim DK, aquale ipsi DF, per definitionem circuli: DF, autem positũ est aquale lateri AC.) & basis BC, basi EK, aqualis: (cum EK aqualis sit ipsi EG, per definitionem circuli: EG, vero recta per constructionem facta sit aqualis basi BC.)

Erit

[a] Erit angulus BAC, angulo EDK, aqualis: Sed angulus EDK, maior est [b] angulo EDF. Quare et angulus A, angulo EDF, maior existet. Quod est propositū. Atq. hac demonstratio generalior est priore, cum omnibus casibus conueniat. a 8. pri. b 9. pron

THEOR. 17. PROPOS. 26. xxvj.

SI duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint. vtrumque vtrique, vnumq. latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, seu quod vni æqualium angulorum subtenditur: & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, vtrumque vtrique, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.

SINT duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales duobus angulis E, & EFD, trianguli DEF, vterq. vtrique, hoc est, B, ipsi E, & C, ipsi EFD; Sitque primo latus BC, quod angulis B, & C, adiacet, lateri EF, quod angulis E, & EFD, adiacet, æquale. Dico, reliqua quoq. latera AB, AC, reliquis lateribus DE, DF, æqualia esse, vtrumq. vtrique, hoc est, AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, ea nimirum, quæ æqualibus angulis subtenduntur; reliquumq. angulum A, reliquo angulo D. Si enim latus AB, non est æquale lateri DE, sit DE, maius, a quo [c] abscindatur recta linea EG, æqualis rectæ lineæ AB, ducaturq. recta GF. Quoniã igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus GE, EF, vtrũq. vtrique, & anguli B, & E, æquales per hypothesin: [d] Erit angulus C, æqualis angulo EFG. Ponitur autẽ angulus C, æqualis angulo EFD. Quare & angulus EFG, eidẽ angulo EFD, æqualis erit; pars toti; Quod est absurdum. Non est igitur latus AB, inæquale lateri DE, sed

c 3. pri.

d 4. pri.

æquale

æquale. Quamobrem, cum latera AB, BC, æqualia sint lateribus DE, EF, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales; a erunt & bases AC, DF, & anguli reliqui A, & D, æquales. Quod est propositum.

a 4. primi.

SINT deinde latera AB, DE, subtendentia æquales angulos C, & EFD, inter se æqualia. Dico rursus reliqua latera BC, CA, reliquis lateribus FF, FD, esse æqualia, vtrumque vtrique, hoc est, BC, ipsi EF, & CA, ipsi FD; reliquumq. angulum A, reliquo angulo D, æqualem. Si enim latus BC, non est æquale lateri EF, sit EF, maius; b ex quo sumatur recta EG, æqualis ipsi BC, ducaturq. recta DG. Quoniam igitur latera AB, BC, æqualia sunt lateribus DE, EG, vtrumque vtrique, & anguli contenti B, & E, æquales, per hypothesin; c Erit angulus C, angulo EGD, æqualis: Ponitur autem angulus C, angulo EFD, æqualis; Igitur & angulus EGD, angulo eidem EFD, æqualis erit, externus interno, & opposito, quod est absurdum. d Est enim maior. Non ergo est latus BC, lateri EF, inæquale. Quocirca, vt prius, colligetur institutum ex 4. propos. huius libri. Si duo igitur triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

b 3. primi.

c 4. prim

d 16 primi.

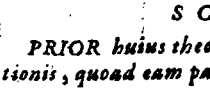
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonstratione huius theorematis, tota etiam triangula, quoad areas, esse æqualia. Nam si latera AB, BC, lateribus DE, EF, æqualia sint, vt ostensum fuit, contineantq. ex hypothesi angulos æquales B, E, e erunt tota quoque triangula æqualia inter se.

e 4. pri.

SCHOLIVM.

PRIOR huius theorematis pars conuersa est 4. propositionis, quoad eam partem, in qua ex æqualitate laterum, & angulorum ipsis contentorum, collecta fuit æqualitas basium, & angulorum super bases. Nam in priori parte huius theorematis ex æqualitate basium BC, EF, & angulorum super has bases, demonstratum est, reliqua latera vnius trian-

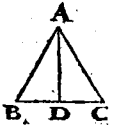


guli

guli reliquis lateribus æqualia esse, reliquumq. angulum reliquo angulo, &c. Quod quidem alia nos ratione iam demonstrauimus ad propositionem octauam huius lib. quem modum eo loco monuimus.

HOC loco demonstrandum est theorema quoddam admodum necessariũ, & perutile rebus Geometricis, videlicet.

IN triangulo æquilatero, siue Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenso ducta, diuidensq: vel angulum, vel basin bifariam, perpendicularis est ad basim, & si quidem angulum bifariam diuidat, secabit quoque basin bifariam. Si vero basim secet bifariam, diuidet quoque angulum bifariam. Et contra; linea perpendicularis ad basin ducta diuidit & basin, & angulum bifariam.



SINT in triangulo ABC, duo latera aqualia AB, AC, diuidatq. primum recta AD, angulum A, bifariam. Dico rectam AD, esse ad BC, perpendicularem, secareq. basin BC, bifariam. Cum enim duo latera AB, AD, duobus lateribus AC, AD, sint æqualia, angulosq. æquales contineant, ex hypothesi, [a] erunt & bases BD, CD, æquales, & anguli ad D, atque adeo recti. [a 4. primi.]

DIVIDAT deinde recta AD, basin BC, bifariam. Dico rectam AD, ad BC, perpendicularem esse, & angulum A, secare bifariam. Cum enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sint, & basis AB, basi AC, ex hypothesi, [b] erunt quoque anguli ad D, æquales, atque adeo recti, ac proinde ex coroll. propos. 8. huius lib. & anguli ad A, æquales erunt. [b 8. primi.]

SED iam recta AD, sit ad BC, perpendicularis. Dico & basim BC, & angulum A, secari bifariam. [c] Erunt enim [c 5. primi.]

anguli

anguli B,C, supra basin BC, æquales. Itaque quoniam duo anguli D,B, trianguli ABD, duobus angulis D,C, trianguli ACD, æquales sunt, vterque vtrique, latusq. AD, æqualibus oppositum angulis B,C, commune; [a] erunt & reliqua
a 26. primi. latera BD,CD, æqualia, & reliqui anguli ad A, æquales. Quod erat demonstrandum.

SED & hoc theorema verum est.

TRIANGVLVM, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad basim perpendicularis diuiditvel basim,vel angulum bifariam,habet duo latera dictum angulum comprehendentia æqualia: Et si quidem basis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam secabitur:si vero angulus bifariam secetur,basis quoque diuidetur bifariam.

IN eodem triangulo ABC, sit AD, ad BC, perpendicularis, diuidatq. primum basin BC, bifariam. Dico & latera AB, AC, esse æqualia, & angulos ad A, æquales. Quoniam enim duo latera BD, DA, duobus lateribus CD, DA, æqualia sunt, angulosq. comprehendunt æquales, nempe rectos; [b] erunt quoque & bases AB, AC, & anguli ad A, æquales. quod est primum.
b 4. pri.

SECET deinde perpendicularis AD, angulum A, bifariam. Dico & latera AB, AC, æqualia esse, & rectas BD, CD. Quoniam enim duo anguli D, A, trianguli ABD, duobus angulis D, A, trianguli ACD, æquales sunt, latusque AD, illis adiacens, commune; [c] erunt quoque & latera
c 26. pri AB, AC, & latera BD, CD, æqualia. Quod est secundum.

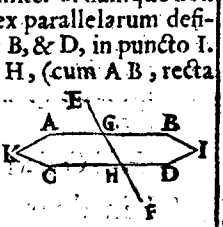
xxvij. THEOR. 18. PROPOS. 27.

SI in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se

fecerit:

fecerit: parallelæ erunt inter se illæ rectæ lineæ.

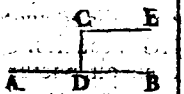
IN duas rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat angulos alternatim AGH, DHG, inter se æquales. Dico lineas AB, CD, esse parallelas. Si enim non sunt parallelæ, coibunt tandem, si producantur infinite. Si namque non coirent vnquam, parallelæ essent, ex parallelarum definitione. Conueniant ergo ad partes B, & D, in puncto I. Quoniam igitur triangulum est G I H, (cum A B, recta continuata sit, item recta CD, vsque ad punctũ I;) & angulus AGH, positus est æqualis angulo DHG; erit externus angulus AGH, æqualis interno, & opposito D H G; quod est absurdum; [a] quoniam externus interno maior est. Quod si AB, CD, coire dicantur ad partes A, & C, in puncto K, erit rursus eadem ratione angulus externus DHG, æqualis interno, & opposito AGH, quod est absurdum. Non igitur coibunt lineæ AB, CD. Quare parallelæ erunt. Eodem modo, si ponantur anguli alterni BGH, CHG, æquales, demonstrabitur, lineas AB, C D, esse parallelas. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 16. pri

SCHOLIVM.

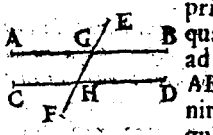
NECESSE est, vt lineæ, quæ dicuntur parallelæ, in eodem existant plano. vt ex definitione constat. Quare non satis est, duos angulos alternos æquales inter se esse, vt duæ lineæ probentur esse parallelæ, nisi ponatur, eas in vno, eodemq. existere plano. Fieri enim potest, vt linea recta incidens in duas rectas non in eodem plano existentes, faciat alternos angulos æquales. Sit enim C D, perpendicularis ad AB, rectam, quæ in subiecto plano existit; & ex C, in alio plano, ad CD, ducatur alia perpendicularis C E, ita vt punctum E, intelligatur in sublimi. Quo posito, perspicuum est, rectam CD, incidentem in rectas CE, AB, facere duos angulos, ECD, ADC, al-



ternos æquales, cum sint recti; & eamen CE, AB, non sunt parallelæ, quod non in eodem existant plano. Non apposuit autem Euclides in propositione hanc conditionem; in eodem plano existentes: sicut neque in subsequentibus; quoniam cum in prioribus sex libris agatur de planis duntaxat, ut supra diximus, omnia intelligenda sunt necessario in eodem plano existere. In undecimo vero libro, & alijs, qui ipsum sequuntur, manebit semper, lineas aliquas in eodem esse plano, vel in diuersis planis, quia in illis libris differitur de solidis, in quibus diuersa plana considerari possunt. Quod idem dicendum est de punctis extra lineas, & superficies, &c.

xxviij. **THEOR. 19. PROPOS. 28.**

SI in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes, æqualem fecerit; Aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales: Parallelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.



IN duas rectas AB, CD, recta incidens EF, faciat primo externum angulum EGA, æqualem angulo interno, & opposito ad easdem partes GHC. Dico rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim angulo EGA, æqualis ponitur angulus GHC; & eidem angulo EGA, [a] æqualis est angulus HGB; [b] erunt anguli alterni GHC, HGB, æquales. Quare lineæ AB, CD, [c] parallelæ erunt. Idem ostendetur, si angulus externus EGB, æqualis ponatur interno GHD.

a 15. primi.
b 1. pron
c 27. pri

DEINDE faciat recta EF, angulos internos ex eadem parte, nempe AGH, CHG, duobus rectis æquales. Dico rursus rectas AB, CD, esse parallelas. Quoniam enim anguli AGH, CHG, duobus rectis æquales

ponun-

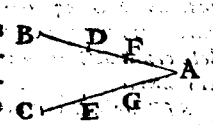
ponuntur; Sunt autem & anguli AGE, AGH, [a] duobus rectis æquales; Erunt duo anguli AGH, CHG, duobus angulis AGE, AGH, æquales. Ablato igitur communi angulo AGH, remanebit angulus AGE, externus angulo CHG, interno, & oppositio ad easdem partes æqualis. Quare vt iam ostensum est, erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Idem ostendetur, si duo anguli BGH, DHG, duobus rectis ponantur æquales. Si igitur in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 13. primi.

SCHOLIVM.

IAMDVDVM pronunciatum tertium decimum à Principiorum numero reiecimus. Cum igitur sequens propos. 29. cum multis alijs illi ita innitatur, vt sine eius auxilio demonstrari nequeat, aperæ pretium erit illud hoc loco, ex hactenus demonstratis theorematibus, atque problematibus, quæ ex eo nulla ratione dependent, Geometrica demonstratione confirmare, vt in expositione dicti Axiomatis polliciti sumus. Primo autem loco demonstrationem Procli afferemus. Deinde idem nos pronunciatum magis accurate, atque euidentius demonstrabimus. Proclus igitur, antequam illud demonstret, duo præmittit. Primum est.

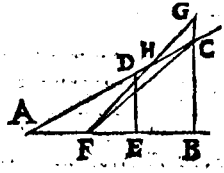
SI ab vno puncto duæ rectæ lineæ angulum facientes infinite producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedet.



EXEANT à puncto A, duæ rectæ AB, AC, facientes angulum A. Quoniam igitur puncta D, & E, plus inter se distant, quam F, & G. Item puncta B, & C, plus quam D, & E, & ita deinceps, si producantur vltra rectæ lineæ AB, AC, perspicuum est, extrema earum puncta infinito spatio inter se distare, si infinite ipsæ producantur. Si enim non infinito spa-

tio distarent, augeri posset eorum distantia: igitur & lineæ ipsæ ultra produci, quod est absurdum, cum ponantur infinite iam esse productæ. Quare si dictæ lineæ AB, AC, producantur infinite, ipsarum distantia excedet omnem finitum distantiam. Hoc pronunciato vsus est & Aristoteles lib. 1. de cælo, vbi demonstrauit, mundum non esse infinitum.

QVOD autem rectæ AB, AC, quo longius protrahantur, eo magis inter se distent, (Hoc enim Proclus sine demonstratione assumpsit, cum dixit puncta D, & E, in proxima figura plus inter se distare, quam F, & G, Item B, & C, plus quam D, & E, &c.) hac ratione demonstrabimus. Demittantur ex punctis C, D, vtcunque in rectam AC, acceptis, ad AB, perpendiculares CB, DE, quæ distantias punctorum C, D, à recta AB, metientur, cum sint minimæ omnium rectarum ex C, D, ad AB, ductarum, vt in coroll. propos. 19. ostendimus. Dico CB, maiorem esse, quam DE; ac proinde plus distare rectam AC, à recta AB, in puncto C, remotiore, quam in puncto propinquiore D. Si enim CB, non est maior, quam DE, erit vel æqualis, vel minor. Sit primum æqualis, & recta AE, abscindatur æqualis BF, ita vt punctum F, cadat vel inter A, & E, vel in E, vel denique inter E, & B, ducaturq. recta FC. Quoniam igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq. continent æquales, videlicet rectos: a erunt & bases AD, FC, & anguli



a 4. primi.

DAE, CFB, inter se æquales. Igitur externus angulus CFB. interno DAE, æqualis erit; b quod est absurdum. Vel cum externus angulus CFB, interno DAE, æqualis sit, c parallelæ erunt AC, FC, quod etiam absurdum est, cum in C, concurrant.

b 16. primi.

c 27. primi.

SIT deinde CB, minor quam DE, si fieri potest, & producta BC, fiat BG, ipsi DE, æqualis, iungaturq. recta FG. Quia igitur duo latera AE, ED, trianguli AED, duobus lateribus FB, BG, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq. continent æquales, puta rectos: d erunt & bases AD, FG, &

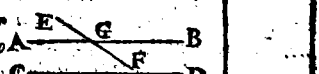
d 4. pri.

anguli

anguli EAD, BFG, inter se æquales. Igitur externus angulus BFG. interno EAD, æqualis erit, quod est absurdum. Vel cum externus angulus BFG, interno EAD, æqualis sit, erunt AC, FG, inter se parallelæ, quod absurdum est, cum se mutuo secent in H. Quocirca BC, ipsa ED, maior erit, cum neque æqualis, neque minor esse possit, vt demonstratum est. a 27. primi.

SECVNDVM, quod Proclus præmittit, huiusmodi est.

SI duarum parallelarum rectarum linearum alteram secet quædam recta linea, reliquam quoque productam secabit.

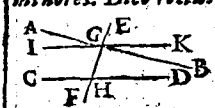


SINT duæ parallelæ AB, CD, & recta EF, secet ipsam AB, in G. Dico rectam EF, si producatur, secturam esse quoque ipsam CD. Quoniam duæ rectæ GB, GF, in puncto G, angulum faciunt, si producantur infinite, excedent omnem finitam distantiam; igitur & distantiam, qua parallela AB, à parallela CD, distat, cum hæc distantia sit finita, alias enim non essent lineæ parallelæ. Quare quando distantia GB, à GF, maior iam fuerit ea, quæ inter parallelas est, necesse est rectam GF, productam secuisse rectam CD. Nam quamdiu GF, continebitur inter duas parallelas, minori distantia à GB, remouebitur, quam CD, ab eadem GB, vt constat. His igitur ita expositis, facile demonstrabitur hoc theorema, quod est apud Euclidem, seruiturque eius in pronunciatum.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdem q. partes, angulos duobus rectis minores faciat; Duæ illæ rectæ lineæ infinite productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

IN rectas AB, CD, incidens recta EF, faciat internos

anguios ad partes B, & D, vt BGH, DHG, duobus rectis minores. Dico rectas AB, CD, coire ad easdem partes B, & D. Quoniã enim duo anguli BGH, DHG, minores ponuntur esse duobus rectis: Sunt autẽ duo anguli DHG, DHF, a duobus rectis æquales: Erũt duo ãguli DHG, DHF, maiores duobus angulis DHG, BGH. Ablato ergo communi angulo DHG, remanebit angulus DHF, b maior angulo BGH. Si igitur ad rectam FG, & ad punctum G, c constituatur angulus KGH, æqualis angulo DHF, cadet GK, supra GB, & secabit q. producta rectam AB. Quoniam igitur in duas rectas IK, CD, recta incidens EF, facit angulum externum DHF, æqualem interno, & oppositò KGH, c Erant rectæ IK, CD, parallelæ. Secat autem recta AB, ipsam IK, in G. Producta igitur secabit quoque ipsam CD, vt demonstratum est. Quare AB, cum CD, conuenient ad partes B, & D, nimirum in puncto L. quod est propositum.



a 13. primi.

b 5. prox & 23. primi.

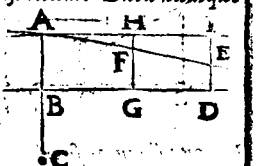
c 11. prõ.

c 28. primi.

HAC ergo ratione conatur Proclus Axioma tertium decimum demonstrare. Sed quoniam principium, quod primo loco præmisit, æque dubium & obscurum esse videtur, atque illud Axioma, afferemus nos demonstrationem magis accuratam, si prius doceamus, in quo difficultas, siue obscuritas principij illius à Procle assumpti consistat. Quemadmodum igitur ex Procli, & aliorum Geometrarum sententia, sine demonstratione concedendum non est, duas rectas, quæ semper sibi mutuo sunt propinquiores, tandem aliquando concurrere, licet sit verissimum, cuiusmodi sunt duæ rectæ, in quas recta incidens facit internos duos angulos ex eadem parte duobus rectis minores, quorum vnus rectus sit, & alter acutus: Hæ enim sibi mutuo appropinquant ad eas partes, vbi duo illi anguli duobus rectis minores existunt, vt mox demonstrabimus. Quemadmodum, inquam, concedendum hoc sine probatione non est, propterea quod dari possunt in eodem plano duæ lineæ, vna recta, & altera inflexa, nimirum vel Hyperbole, vel linea concheideos, sibi semper mutuo magis ac magis appropinquantes, quæ tamen nunquam coeant, licet in infinitum amba producantur.

quorum

quorum illud ab Apollonio Pergæo, hoc vero à Nicomede demonstratum est: Ita quoque non videtur sine demonstratione admittendum esse, (quamquam verissimum sit) duas rectas lineas angulum efficientes omnem finitam magnitudinem excedere, si in infinitum producantur ambæ, licet semper magis ac magis inter se distent, vt nos supra demonstrauimus. Nam exhiberi possunt duæ lineæ in eodem plano angulum comprehendentes, recta vna, & altera inflexa, quæ conchoideos appellatur à Nicomede, semper magis ac magis inter se distantes, quarum tamen distantia data quamcunque rectam lineam nunquam superet, aut exæquet, licet ambæ extendantur in infinitum. Data namque sit recta AB. Dico describi posse lineam rectam, & inflexam, quarum vna ab altera semper magis recedat, distantiam tamen earum nunquam æqualem esse rectæ AB, aut maiorem, quantumuis producantur ambæ. Producta enim



recta AB, quantumlibet vsque ad C, ducatur per B, ad AC, perpendicularis BD; & polo C, interuallo autem AB, describatur linea conchoideos AE, inflexa nimirum tuæa, quæ rectæ ED, sit quidem semper propinquior, nunquam tamen cum ea conueniat, vt à Nicomede traditur. Deinde per A, excitetur recta AI, ad AC, perpendicularis, a quæ ipsi BD, parallela erit. Postremo ex duobus punctis HI, vtcunque in recta AI, acceptis demittantur ad BD, perpendiculares HG, ID, b quæ parallelæ, c atque adeo æquales inter se erunt, angulosque d constituent ad H, I, rectos. Admittantur enim nunc, vt propositum ostendamus, omnes demonstrationes Euclidis, ac si ex axiomate 13. non penderent, aut etiamsi pendeant ex eo, concedantur tamen, perinde ac si axioma illud iam sit demonstratum ante propos. 29. huius lib. vbi primum vsus illius apparere incipit, vti vere à nobis mox ante propos. 29. demonstrabitur. Itaque quoniam FG, maior est, quam ED, vt Nicomedes demonstrauit, erit FH, reliqua minor, quam reliqua EI. Magis ergo inter se distabunt lineæ AI, AE, in punctis I, E, quam in punctis H,

a 28. primi.
b 28. primi.
c 34. primi.
d 29 primi.

F; atque ita semper eas probabimus magis ac magis distare, si longius protendantur. Distantia nihilominus semper minor erit, quam recta AB, hoc est, quam perpendicularis ex recta AI, ad rectam BD, demissa, cum inflexa linea AE, ad rectam BD, numquam perueniat, vt demonstratum est à Nicomede.

SCHOLION principium illud Procli in lineis rectis esse verissimum, & quod facili negotio, si omnes demonstrationes Euclidis, quæ ex axiomate 13. pendent, concedantur, demonstrari possit hoc modo. Contineant duæ rectæ AB, AC, angulum A, & data sit recta D, cuiusuis magnitudinis. Dico distantiam rectarum AB, AC, in infinitum productarum excedere magnitudinem D. Nam ex quouis puncto E, in recta AB, sumpto demittatur ad AC, perpendicularis EF, quæ si maior fuerit, quàm D, constat propositum: si vero nõ est maior, sumatur eius multiplex proxime maior, quàm D, nempe G. Sumpta autem AB, ipsius AE, ita multiplici, vt multiplex est G, ipsius EF, demittatur ex B, ad AC, perpendicularis BC, quam dico maiorem esse data recta D.

Quoniam enim a est, vt AB, ad BC, ita AE, ad EF, (quod ex coroll. propos. 4. lib. 6. Eucl. triangula ABC, AEF, similia sint, ob rectas BC, EF, quæ b parallela sunt.) Et permutando, vt AB, ad AE, ita BC, ad EF: erit ita multiplex BC, ipsius EF, vt multiplex est AB, ipsius AE, hoc est, vt multiplex est G, ipsius EF. Cum ergò BC, & G, æque multiplices sint ipsius EF, ipsæ erunt inter se æquales. Est autem, ex constructione, maior G, quàm D. Igitur & BC, distantia puncti B, à puncto C, maior erit, quàm recta D, data, quod est propositum.

a 4. sexti.

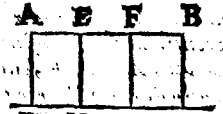
b 28. primi.

VERVM demonstratio hæc sine proprietatibus linearum parallelarum, quæ axiomate illo 13. nituntur, vim nullam habet, ac proinde principium illud Procli assumi non potest ad illud axioma 13. demonstrandum, ne principium in eo demonstrando petatur. Quæ cum ita sint, sedulò dedimus operam, vt illud ipsum Euclidis axioma demonstraremus

ex ijs solum, quæ ante propos. 29. primi libri demonstrata sunt. Ante enim propos. 29. usus illius axiomatis apud Euclidem nullus est. Id quod in Euclide quodam Arabico factum etiam esse accepi, sed nunquam facta mihi est copia demonstrationem illam legendi, etsi obnixe illud iterum atque iterum ab eo, qui eum Euclidem Arabicum possidet, flagitaui. Quare hanc, quæ sequitur, excogitauimus. Primum autem præmittenda quoque sunt nonnulla, quæ licet ad id, quod proponimus, demonstrandum requirantur necessario, multo tamen euidentiora sunt ac faciliora axiomate illo Euclidis, ita vt omni dubitatione exclusa, firmam eis assensum præbere possimus. Primum sit huiusmodi.

I.

LINEA, cuius omnia puncta à recta linea, quæ in eodem cum ea plano existit, æqualiter distant, recta est.



VT si omnia puncta lineæ AB, à recta DC, æqualiter distent, hoc est, omnes perpendiculares, quales sunt AD, EH, FG, BC, ad DC, demissa æquales sint, (perpendicularis enim qualibet, cum sit omnium ex eodem puncto ad rectam DC, ductarum minima, ex coroll. propos. 19. huius lib. distantiam puncti, à quo ducta est, metitur.) erit AB, linea recta. Hoc autem ex defin. lineæ rectæ liquido constare potest. Nam si omnia puncta lineæ AB, æqualiter distant à recta DC, ex æquo sua interiacebit puncta, hoc est, nullum in ea punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel huc, atque illuc deflectendo subsultabit, nihilq. in ea flexuosum reperietur, sed æquabiliter semper inter sua puncta extendetur, quemadmodum recta DC. Alioquin non omnia eius puncta æqualem à recta DC, distantiam haberent, quod est contra hypothesin. Neque vero cogitatione apprehendi potest, aliam lineam præter rectam, posse habere omnia sua puncta à recta linea, quæ in eodem cum illa pla-

no

ne existat, æqualiter distantia. Est sane principium hoc, ex quo solo concesso, una cum iis, quæ vsque ad propos. 29. huius lib. allata sunt, Axioma 12. demonstrabimus, adeo clarè, vt lumine naturali cognitum sit, nemoque sana mentis illud negare possit. Aut certe citra omnem controuersiam est eiusmodi, vt longe facilius ei quilibet assentiatur, quàm illi axiomati 12. Euclidis.

IDEM prorsus in linea circulari contingit. Nam etiam linea inflexa circularem lineam ambiens, cuius omnia puncta æqualiter à circulari distant, id est, à quo omnes rectæ in circularem lineam ad æquales angulos incidentes æquales sunt, circularis quoque est; ita vt naturam circularis linea, à qua æquali semper distantia abest, induat: quemadmodum linea æqualiter semper à recta linea distans, naturam lineæ rectæ, cui semper æquidistat, induit, propterea quòd recta est, vt diximus. Quòd autem inflexa illa linea circa lineam circularem sit quoque perfectè circularis, facile ostendemus, si prius demonstremus, rectam ex centro circuli ductam efficere cum circumferentia angulos binis æquales; & contra, rectam, quæ æquales cum circumferentia angulos constituat, per centrum transire. Sit igitur circulus ABCDEF, cuius centrum G. Dico rectam GC, ex centro ductam efficere tam angulos internos GCB, GCD, quàm externos ICB, ICD, inter se æquales. Producta enim

IG, vsque ad A, si semicirculus ABC, circa diametrum AC, intelligatur circumuerti, congruet is semicirculo AEC, cum semicirculi eiusdem circuli sint inter se æquales. Quod si quis dicat, vnum semicirculum alterum intersecare, ducenda erit recta linea ex centro G, secans vtramq; circumferentiam, colligendumque partem toti esse æqualem, nimirum semidiametrum vsque ad interiorem circumferentiam, semidiametro ad exteriorem vsque circumferentiam ducta, quod absurdum est. Anguli igitur ad C, tam interni, quam externi inter se congruant,

ac

ac proinde æquales erunt. Efficiat iam recta HAK, æquales angulos ad A. Dico eam per centrum transire. Si enim non transeat, ducatur ex centro G, ad A, recta GA, quæ ex proximè demonstratis angulos GAB, GAF, constituet æquales. Non ergo æquales sunt KAB, KAF. Quod est contra hypothesin.

HOC ostenso, ambiat inflexa linea HLIMNO, circularem lineam ABCDEF, omniaq. eius puncta ab hac æqualiter absint, id est, omnes rectæ ab ea linea in circularem lineam cadentes, efficientesq. angulos æquales, sint inter se æquales, cuiusmodi sunt HA, LB, IC, MD, NE, OF. Ha enim cum, vt demonstratum est, per centrum transeant, erunt omnium ex punctis H, L, I, M, N, O, in conuexam peripheriam cadentium, minimæ; (Hoc enim demonstratū est ab Eucl. propos. 8. lib. 3. quæ solum ex propositionibus, quæ 20. huius lib. antecedunt, pendet, vt iure optimo huc transferri possit) atque adeo earum distantias à subiecta linea circulari metientur. Dico lineam HLIMNO, esse circularem. Cum. n. omnes illæ, vt proxime ostendimus, per centrum G, transeant; si æqualibus HA, OF, addantur æquales AG, FG, erunt totæ HG, OG, æquales; eademq. ratione omnes aliæ ex linea inflexa HLIMNO, ad G, ductæ æquales erunt & rectis HG, OG, & inter se. Ex defin. circuli igitur linea inflexa circularis est. Quod erat demonstrandum. Ex hoc primo, quod præmisimus, sequitur secundum: videlicet.

II.

SI recta linea super aliam rectam in transuersum moueatur, constituens in suo extremo cum ea angulos semper rectos, describet alterum illius extremū lineam quoque rectam.

VT si in priore figura recta AD, ad DC, perpendiculo moueatur in transuersum super rectam DC, constituens

cum

cum ea in D, semper rectos angulos, hoc est, non titubans, aut vacillans, sed aequabiliter semper incedens, describet extremum A, rectam quoque lineam, nempe AB. Constat hoc ex eo, quod primo loco praemisimus; propterea quod omnia puncta linea AB, descripta aequaliter à recta DC, distant, nimirum per rectam AD. Ex quo fit, ipsam lineam rectam esse, cum, vt ibi dictum est, eius media ab extremis non subsultent, sed aequaliter inter ipsa iaceant, quippe cum nullum eorum magis aut minus a recta CD, abscedat sursum, aut deorsum vergendo, quam aliud. Patet hoc etiam ex ijs, quae ad definitionem linea recta scripsimus. Cum enim duo puncta D, A, similibus prorsus motibus ferantur, (quod recta AD, in suo motu non titubet, aut vacillet, sed puncta D, A, aeque velociter incedant, aequaliterq. semper inter se distent.) describent vtique lineas similes, vt in eadem definitione docuimus. Cum ergo punctum D, rectam DC, describat, erit quoque linea AB, quam punctum A, describit, recta. Neque vero imaginari quis poterit, si linea recta in transuersum moueatur vniformiter sine vlla titubatione huc atque illuc, duo puncta eius extrema describere duas differentes inter se lineas; sed qualem vnum extremum describit, talem quoque ab altero extremo describi necesse est, propter vniformem illum, aequabilemque motii vtriusque puncti extremi. Est principium hoc aeque clarum, & euidens, atque antecedens.

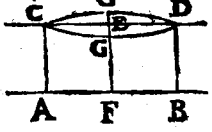
CONTINGIT autem idem omnino in circulari linea. Nam eodem pacto recta linea super lineam circularē in transuersum fluens aequabiliter, constituens nimirum in suo extremo cum circulari aequales semper angulos, non vacillando, aut deflectendo huc atque illuc, circularem lineā altero suo extremo describit, ita vt naturam circularis lineae subiectae, à qua aequaliter semper distat, linea illa descripta induat: quemadmodū linea recta AD, super rectā DC, in transuersum fluens aequabiliter, cōstituens nimirū cum ea in suo extremo D, angulos semper rectos, ita vt nusquā declinet, huc atq, illuc deflectēdo, aut titubando, lineā rectā AB, altero extremo A, delineat: adeo vt linea descripta AB, naturam induat recta lineae subiectae DC, a qua aequaliter sem-

per

per recedit. Rectam autem, qua super lineam circularem in transuersum fluit aquabiliter, describere altero suo extremo lineam quoque circularem, facile demonstrabimus. Moueatur enim in figura posteriore recta H A, in transuersum super peripheriam ABCDEF, equabiliter, faciens semper in extremo A, cũ ea angulos equales. Dico lineã HLIMNO, ab altero extremo H, descriptam esse quoque circularem. Cum enim recta H A, in omni situ motus illius imaginarij faciat equales angulos cum peripheria ABCDEF, sit vt ea producta in centrum G, cadat, vt supra ostendimus. Quare additis rectis equalibus H A, OF, ad rectas equales AG, FG, fient tota recta H G, OG, & omnes alia, inter se equales: ac propterea ex defin. circuli HLIMNO, circumferentia circuli erit. Quod ostendendum erat. Hinc sequitur tertium.

III.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineę erigantur inter se ęquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demissa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis.



SINT ad rectam A B, erecta dua perpendiculares AC, BD, inter se equales: Et ducta recta CD, demittatur ex quolibet eius puncto E, ad AB, perpendicularis EF. Dico EF, vtrique A C, B D, esse equalem. Si namque equalis non est, erit vel maior, vel minor. Abscissa ergo equali FG, si intelligatur recta AC, moueri in transuersum per rectam AB,

faciens

faciens cum ea angulos semper rectos, describat punctum C, lineam rectam per G, transeuntem, vt supra ostensum est, qualis est CGD. Dua ergo rectæ CED, CGD, superficiem claudent. Quod est absurdum. Aequalis igitur est E F, vtrique AC, BD. Quod erat ostendendum. Ex hoc quartum, quod sequitur, demonstrabimus.

IIII.

SI ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter se æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur, efficiet hæc recta cum vtraq. perpendiculari angulum rectum.

SINT ad rectam AB, erectæ duæ perpendiculares AC, BD, æquales inter se, ducaturq. recta CD. Dico vtrumque angulum C, D, rectum esse. Secta namque recta A B, bifariam in E, excitetur in E, ad AB, perpendicularis EF, iunganturq. rectæ A F, B F. Quoniam igitur duo latera A E, EF, trianguli A E F, duobus lateribus B E, E F, trianguli

BEF, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq. continent æquales, puta rectos, a erunt quoq. & bases AF, BF, & tam anguli FAE, FBE, quam AFE, BFE, inter se æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis FAE, FBE, ex rectis æqualibus CAE, DBE, reliqui erunt æquales anguli CAF, DBF. Itaque cum duo latera CA, A F, trianguli CAF, duobus lateribus D B, B F, trianguli DBF, æqualia sint, angulosq. complectantur æquales, vt ostendimus, b erunt quoque & bases CF, DF, & tam anguli C, D, quam C F A, DFB, inter se æquales. Si ergo æqualibus angulis C F A, DFB, addantur anguli AFE, BFE, ostensi æquales, fient toti anguli CFE, DFE, æquales, ac proinde recti; Quin vero perpendicularis EF, vtrique AC, BD, æqualis est, vt proxi-

a 4. pri.

b 4. pri.

mo theoremate oſtendimus, erunt duæ rectæ AC, EF, ad AE, perpendiculares, inter ſe æquales. Quare, vt de angulis C, D, proximè probatum eſt, anguli C, & EFC, æquales inter ſe erunt. Eſt autem EFC, oſtenſus rectus. Igitur & C, rectus erit, ac proinde & angulus D, qui oſtenſus eſt ipſi C, æqualis.

CAETERVM angulos C, D, rectos eſſe, demonſtrabimus alio modo, hoc prius theoremate præmiſſo.

SI in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectum, & cum altera ex eadem parte acutum, duæ illæ rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera vero parte ſemper inter ſe magis diſtabunt.

RECTA linea AB, in rectas AC, BD, incidens faciat angulũ ABD, rectum, & BAC, acutum. Dico rectas AC, BD, minus ſemper inter ſe diſtare verſus C, D, productas; magis vero, ſi verſus E, F, producantur. [a] *Ducatur enim ex B, ad AC, perpendicularis BG, qua ex coroll. 2. propoſ. 17. huius lib. ad partes acuti anguli BAC, cadet. ac propterea angulus GBD, pars recti anguli ABD, acutus erit. Demiſſa ergo ex G, ad BD, perpendicularis GH, cadet quoque ad partes anguli acuti GBD, ex eodem coroll. angulusq. propterea HGC, pars recti anguli BGC, acutus erit. Rurſus ergo ducta perpendicularis HI, ad AC, per idem coroll. ad partes acuti anguli HGC, cadet, ideoq. angulus IHD, pars recti anguli GHD, acutus erit. Atque ita deinceps in infinitum, ſi ex I, ad BD, perpendicularis IK, ducatur, & ex K, perpendicularis KC, ad AC, & ex C, ad BD, perpendicularis CD, &c. eadem omnes ad partes angulorum acutorum*

[a] 12. primi.

vna

una post aliam. Quoniam igitur in triangulo ABG, angulus BAG, acutus est, & AGB, rectus [a] erit recta AB, maior
[a] 19. pri. quam BG: & in triangulo BGH, recta BG, angulo recto GHB, oppositæ, maior quam GH; & in triangulo GHI, recta GH, maior quam HI: Atque ita deinceps erunt semper recta, quæ ipsi AB, propiores sunt, maiores ijs, quæ remotiores sunt, & nunquam finis erit huius decrementi perpendicularium. Quapropter recta AC, in G, minus distabit à recta BD, quam in A, & in I, minus quam in G, & in C, minus quam in I, &c. quandoquidem perpendiculares AB, GH, IK, CD, &c. quæ ordinatim decrescunt, vt ostendimus minimæ sunt omnium à punctis A, G, I, C, in rectam BD, cadentium, vt ex coroll. propos. 19. huius lib. liquet, ac proinde eorundem punctorum distantias ab eadem recta BD, metiuntur. Constat ergo, rectas AC, BD, ad partes C, D, productas continenter fieri minus inter se distantes, quod est primum.

DVCATVR rursus [b] ex A, ad AC, perpendicularis
[b] 11. pri. AL, quæ angulū obtusum BAE, partietur in rectum EAL, & acutum LAB, hoc est, cadet inter AB, & AE; erit q. angulus ALB, acutus, cum ambo ABL, ALB, [c] sint duobus rectis minores, atq. ABL, rectus sit: ac proinde angulus ALF, obtusus erit. Eadem ratione perpendicularis LM, ex L, ad
[c] 17. pri. BF, ducta cadet inter LA, LF, faciet que angulum LMA, acutum, & LME, obtusum: Item perpendicularis MN, ex M, ad AE, erecta cadet inter ML, ME, angulumque MNB, acutum, & MNF, obtusum constituet. Atque ita deinceps in infinitum, si ex N, ad BF, perpendicularis erigatur NO, & ex O, ad AE, perpendicularis OP, & ex P, ad BF, perpendicularis PE, & ex E, ad AE, perpendicularis EF, &c. diuident omnes figillatim angulos obtusos, vna post aliam. Quoniam igitur in triangulo ABL, angulus ABL, rectus
[d] 19. pri. est, & ALB, acutus [d] erit AL, recta maior, quam AB, & in triangulo ALM, recta LM, angulo recto LAM, oppositæ, maior quam AL; atque in triangulo LMN, recta MN, recto angulo MLN, oppositæ, maior quam ML: atque ita deinceps erunt semper rectæ, quæ ab AB, longius absunt, maiores ijs, quæ propinquiores sunt, in infinitum. Quamobrem recta

AE,

AE, in M, magis à recta BF, distabit, quam in A, & in O, magis, quam in M, & in E, magis, quam in O, &c. quandoquidem perpendiculares AB, ML, ON, EF, &c. quas ordinatim augeri ostensum fuit, minimè sunt omnium ex punctis A, M, O, E, in rectam BF, cadentium, &c. Liquido ergo constat, rectas AC, BD, ad partes E, F, productas continenter fieri magis inter se distantes, quod est secundum. Quod si proteruus quispiam vellet contendere, rectam AL, quæ ad AC, perpendicularis est, non concurrere cum DB, producta, constabit multo magis id, quod demonstrandum proponitur. Nam linea DB, vltra punctum B, multo magis à recta CA distabit, quam in puncto B, quandoquidem AL, ad AC, perpendicularis in infinitum producta non concurrit cum DB, cum tamen GB, ad eandem AC, perpendicularis cum DB, concurrat in B, &c.

HAEC cum ita sint, nullo negotio demonstrabimus, in superiori figura angulos C, D, esse rectos. Nam si angulus C, verbi gratia, non dicatur esse rectus, erit vel acutus, vel obtusus. Sit primum acutus. Quoniam ergo recta CA, in rectas AB, CD, incidens efficit angulum CAB, rectum, & C, acutum, minus semper inter se distabunt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, hoc est, perpendiculares ex CD, in AB, demissæ ordinatim minores fient, quam CA, vt proximè demonstratum est. Minor ergo est perpendicularis DB, quam CA, quod est absurdum, cum ponatur æqualis. Non igitur acutus est angulus C. Eadem ratione neque angulus D, acutus erit. Sit deinde angulus C, obtusus. Quia igitur recta CA, in rectas CD, AB, incidens facit angulum CAB, rectum, & B, obtusum, magis semper inter se distabunt rectæ CD, AB, ad partes D, B, productæ, hoc est, perpendiculares ex CD, in AB, demissæ continenter augebuntur, vt proximè ostendimus. Maior ergo est perpendicularis DB, quàm CA, quod est absurdum, cum æqualis ponatur. Non igitur obtusus est angulus C. Eadem ratione neque angulus D, obtusus erit. Sed neque acutus est ostensus. Rectus igitur vterque est, quod erat ostendendum.

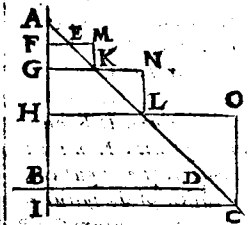
EX his demonstratis, facilè iam Axioma 13. demonstrabimus hoc modo.

V.

SI in duas rectas lineas altera recta incidens internos, ad easdemq. partes angulos duobus rectis minores faciat, duæ illæ rectæ lineæ in infinitum productæ sibi mutuo incident ad eas partes, vbi sunt anguli duobus rectis minores.

HOC est Axioma 13. apud Euclidem in nostris communibus; apud alios est vndecimum, quod demonstrandum suscepimus. Incidens ergo recta AB, in rectas AC, BD, faciat internos, ad easdemq. partes angulos ABD, BAC, duobus rectis minores. Dico rectas AC, BD, ad partes C, D, productas coire. Sit enim primum alter angulorum, nempe ABD, rectus, & alter BAC, acutus. Sumpto in recta AC, punctoquolibet E, [a] ducatur ex eo ad rectam AB, perpendicularis EF, & recta AF, aqualis accipiatur FG, & GH, aqualis ipsi AG, & HI, ipsi AH, ita vt AG, ipsius AF, & AH, ipsius AG, & AI, ipsius AH, dupla sit. Et quoniam si recta AF, abscindatur continue aquales recta ex AB, aliqua tandem pars vltra B, punctum cadet, quod finita recta AB, per continuam ablationem vnius eiusdemq. quantitatis absumatur tandem, quandoquidem linea AF, ita multiplicari potest, (quod fit sumendo ipsi in AB, continenter partes aquales) vt tandem aliquando finitam lineam AB, superet. Id quod Euclides frequenter assumit in lib. 5. & alijs sequentibus, vbi datis duabus magnitudinibus inaqualibus proportionem inter se habentibus, iubet plerunque minorem ita multiplicari, donec maiorem superet. Fit vt multo magis, si ipsi AF, aqualis abscindatur FG, & toti deinde AG, non autem soli AF, aqualis auferatur GH: Item toti AH, non autem soli AF, vel

[a] 12. primi.



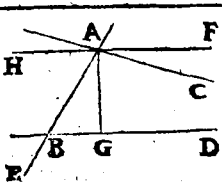
AG,

AG, æqualis dematur HI, & sic deinceps, cadat tandem pars aliqua vltra punctum B. Statuatur ergo punctum I, terminans tertiam duplam in dato exemplo, existere vltra punctum B. Accipiatur quoque in recta AC, recta EK, ipsi AE, & KL, ipsi AK, & LC, ipsi AL, æqualis, ita vt tot sint partes in recta AC, quot in recta AI; ducanturque rectæ KG, LH, CI, producanturq. vna cum EF, vt EM, KN, LO, ipsis EF, KG, LH, fiant æquales, ac tandem rectæ iungantur MK, NL, OC. Itaque quoniam duo latera KE, EM, trianguli KEM, duobus lateribus AE, EF, trianguli AEF, per constructionem æqualia sunt, vtrumque vtrique, [a] anguloq. ad verticem E, continent æquales, [b] erit & basis MK, basi AF, & angulus M, angulo F, æqualis. Est autem & FG, eidem AF, æqualis, & angulus F, rectus, ex constructione. Igitur & MK, FG, [c] æquales inter se erunt, & angulus M, quoque rectus. Quare cum ad FM, excitatæ sint duæ perpendiculares æquales FG, MK, erit per antecedens theorema, angulus G, rectus. Rursus ergo, quia duo latera LK, KN, trianguli LKN, duobus lateribus AK, KG, trianguli AKG, æqualia sunt, ex constructione, [d] anguloq. comprehendunt æquales ad K, verticem, [e] erit & basis NL, basi AG, & angulus N, angulo G, æqualis. Est autem & GH, ex constructione, eidem AG, æqualis, & angulus G, rectus, vt proxime demonstratum est. Igitur & NL, GH, inter se [f] erunt æquales, & angulus N, quoque rectus. Quocirca per præcedens theorema, erit etiam angulus H, rectus. Eadem ratione ostendemus angulum I, rectum esse: atque ita deinceps, si plures essent partes rectæ AB. Est autem & angulus B, per hypothesin rectus. Igitur rectæ IC, BD, [g] parallelæ sunt: ac propterea BD, producta rectam AC, secabit supra punctum C; atque adeo in puncto illo sectionis rectæ AC, BD, coibunt. Quod erat demonstrandum.

a 15. primi.
b 4. primi.
c 1. pron
d 15. primi.
e 4. pri.
f 1. pron
g 28. primi.

SIT deinde vnus angulorum ABD, BAC, rectus, sed ABD, quidem acutus, & BAC, vel acutus etiam, vel obtusus. Quia igitur duo anguli ABD, BAC, duobus rectis [h] minores sunt: sunt autem duo anguli ABD, DBE, duobus rectis æquales: erunt hi duo illis duobus maiores. Ablato ergo communi ABD, maior erit reliquus DBE, reliquo

h 13. pri.



23. pri BAC. [a] Constituatur in A, ad rectam AB, angulus BAF, angulo DBE, æqualis: Cadetq. recta AF, supra rectam AC, cum AF, maiorem angulum cum AB, constituat, quàm AC. Quia igitur externus angulus DBE, interno
b 28. pri BAF, ex eadem parte opposito æqualis est, [b] erunt rectæ AF, BD, inter se parallelæ. Demittatur quoque ex A, ad BD,
c 12. pri [c] perpendicularis AG, qua ex coroll. 2. propos. 17. huius lib. ad partes acuti anguli ABD, cadet: Eritq. angulus quoque GAF, rectus. Nam si acutus esse dicatur, efficiet recta AG, in rectas AF, BD, incidens angulum AGD, rectum, & GAF, acutum. ac proinde, vt proxime demonstrauimus, rectæ AF, BD, ad partes F, D, productæ coibunt tandem: Quod est absurdum. Ostensa enim sunt parallelæ. Si autem angulus GAF, dicatur esse obtusus, erit GAH, acutus. Quare ex proxime demonstratis, coibunt rectæ AF, BD, ad partes H, B, productæ, quod est absurdum, cum parallelæ sint ostensæ. Non est ergo angulus GAF, acutus, aut obtusus. Igitur rectus, ac proinde eius pars GAC, acutus. Quoniam igitur recta AG, in rectas AC, BD, incidens facit angulum G, rectum, & GAC, acutum, concurrent rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ, vt proxime demonstrauimus. Sic igitur recta AB, in rectas AC, BD, incidens faciat duos angulos minores duobus rectis, neutrum tamen angulorum ABD, BAC, rectum, ipsæ rectæ AC, BD, ad partes C, D, productæ conuenient. Quod erat ostendendum. Quod si quando accidat, rectam AC, existere inter AB, & perpendicularē AG, liquido constat, rectas AC, BD, coire, quòd tunc AC, basem BG, trianguli ABG, secaret. Quod vt facilius capias, ducere poteris rectam AC, inter AB, AG.

QVAMVIS autem, concesso principio nostro, optime à nobis demonstratum sit tertium decimum hoc Axioma, & à Proclo etiam, si eius principium difficilius quidem, quam nostrum, admittatur, vt iure optimo inter theoremata, & non inter principia possit connumerari; tamen ne ordinem Euclidis in quoquam immutemus, vtemur eo in omnibus

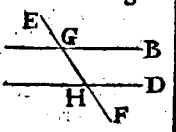
propo-

propositionibus, quarum demonstrationes ex ipso pendent, tanquam pronunciato. Sed iam ad seriem propositionum Euclidis reuertamur.

THEOR. 20. PROPOS. 29. xxix.

IN parallelas rectas lineas recta incidés linea; Et alternatim angulos inter se æquales efficit; & externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem; & internos, & ad easdem partes, duobus rectis æquales facit.

IN parallelas AB, CD, recta incidat EF. Dico primum, angulos alternos AGH, DHG, inter se esse æquales. Si enim non sunt æquales, sit alter, nempe AGH, maior. Quoniam igitur angulus AGH, maior est angulo DHG, si addatur communis angulus BGH, [a] erunt duo AGH, BGH, maiores duobus DHG, BGH: At duo AGH, BGH, [b] æquales sunt duobus rectis. Igitur duo DHG, BGH, minores sunt duobus rectis. Quare cum sint interni, & ad easdem partes, B, & D, [c] coibunt lineæ AB, CD, ad eas partes, quod est absurdum, cum ponantur esse parallelæ. Non est igitur angulus AGH, maior angulo DHG: Sed neque minor. Eadem enim ratione ostenderetur, rectas coire ad partes A, & C. Igitur æquales erunt anguli alterni AGH, DHG. Eademque est ratio de angulis alternis BGH, CHG.



[a] 4. pron
[b] 13 pri.
[c] 13. pro nun.

DICO secundò, angulum externum AGE, æqualem esse interno, & ad easdem partes opposito CHG. Quoniam enim angulo BGH, æqualis est alternus CHG, vt ostensum est; & eidem BGH, [d] æqualis est angulus AGE. Erunt anguli AGE, CHG, [e] inter se quoque æquales. Eodem modo demonstrabitur, angulum BGE, æqualem esse angulo DHG.

[d] 15. pri.
[e] 1. pron.

DICO tertiò, angulos internos ad easdé partes, AGH,

CHG, æquales esse duobus rectis. Quoniam enim ostensum fuit, angulum externum AGE, æqualem esse angulo
a 2.pron CHE, interno; si addatur communis AGH, a erunt duo
b 13.pri. AGE, AGH, duobus CHG, AGH, æquales: Sed duo AGE, AGH, b æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo anguli CHG, AGH, æquales duobus rectis erunt. Eodem modo anguli BGH, DHG, duobus erunt rectis æquales. In parallelas ergo rectas lineas recta incidens linea, & alternatim angulos, &c. Quod erat demonstrandum.

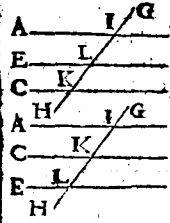
SCHOLIVM.

CONVERTIT autem hoc præsens theorema duo
XXX. præcedentia theoremata, vt perspicuum est.

THEOR. 21. PROPOS. 30.

QVAE eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, eidem rectæ EF, parallelæ. Dico & ipsas AB, CD, esse inter se parallelas. Quoniã enim omnes hæ lineæ in eodem ponuntur esse plano, (Nam propos. 9. vndecimi libri agetur de lineis in diuersis planis) ducta recta GH, secabit omnes, nimirum AB, in I; CD, in K; & EF, in L. Quia igitur AB, ponitur parallela
c 29.pri. ipsi EF, c erit angulus AIL, alterno FLI, æqualis. Rursus
mi. quia CD, ponitur etiam parallela ipsi EF, d erit angulus DKI, eidem angu-
d 29.pri. lo FLI, nempe internus externo, vel
mi. externus interno, æqualis. Quare anguli AIL, DKI, e æquales inter se quo
e 1.pron. que erunt. Cum igitur sint alterni, f
27.pri. erunt rectæ AB, CD, parallelæ inter se. Quæ igitur eidem rectæ lineæ parallelæ, & inter se sunt parallelæ. Quod demonstrandum erat.



SCHOLIVM.

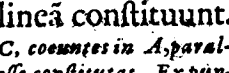
QVOD si quis dicat, duas rectas AI, BI, parallelas esse rectæ CD, & tamen ipsas non esse parallelas; Occurrendum est, duas AI, BI, non esse duas lineas, sed partes tantũ

vnius

vnius linea. Concipiendum enim est animo, quas libet parallelas infinite esse productas; Constat autem AI, productam coincidere cum BI. Quamobrem propositio hac generalius ita poterat proponi.

QVAE eidē rectę lineę parallelæ, & inter se sunt parallelæ: vel certe, quando inter se coeunt, vnam eandemq. lineā constituunt.

SINT enim duæ rectæ AB, AC, coeuntes in A, parallelæ ipsi DE. Dico illas in rectum esse constitutas. Ex puncto enim A, ducatur recta AF, secās DE, in F, vtcūque. Quoniam igitur AB, DE, sunt parallelæ, [a] erunt anguli alterni BAF, AFE, æquales. Addito ergo cōmuni angulo CAF, [b] erunt duo anguli ad A, æquales duobus angulis CAF, AFE. Sed hi duo [c] æquales sunt duobus rectis, cū sint interni inter duas parallelas AG, DE. Igitur & duo anguli ad A, duobus erūt rectis æquales; ac propterea [d] in rectū erūt constituta ipsa AB, AC. Quod erat propositum.

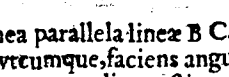


[a] 29. primi.
[b] 2. pron
[c] 29. primi.
[d] 14. primi.

PROBL. 10. PROPOS. 31. xxxj.

A Dato puncto, datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

EX puncto A, ducenda sit linea parallela lineæ BC. Ducatur ex A, ad BC, linea AD, vtcumque, faciens angulum quemcunque ADB; Cui ad A, [e] æqualis constituatur EAD. Dico rectam EA, extensam ad F, quantumlibet, parallelam esse ipsi BC. Cum enim anguli alterni ADB, DAE, æquales sint, per constructionē, [f] Erunt rectæ BC, EF, parallelæ. A dato igitur puncto, datæ rectæ lineæ, &c. Quod erat faciendum.



[e] 23. primi.
[f] 27. pri.

SCHOLIVM.

DEBET autem punctum datum in tali esse loco sitū extra lineam datam, vt hac producta cum illo non conueniat. Quod quidem aperte colligitur ex ipsa constructione

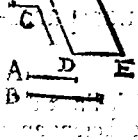
problematis. Nam ex puncto dato ducenda est linea facies angulum aliquem cũ linea data, qui fieri non posset, si punctum in directum iaceret cum ipsa linea data. Quemadmodum autem ab vno, eodemq. puncto ad eandem rectam non plures perpendiculares, quam vna, ducuntur, vt ostendimus propos. 17. ex Proclo; ita etiam per idem punctum, data recta plures parallelas, quam vna, duci nequeunt. Si enim duæ ducerentur, conuenirent ipsæ in puncto illo eodem, quod

a 30. primi. *est absurdum, cum sint parallelæ inter se, propterea quòd vni & eidem, cui parallelæ dicuntur duci, sunt parallelæ.*

EX hoc porro problemate, & illo, quod propos. 23. continetur, facili negotio constituemus parallelogrammum, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraq. angulum illum comprehendentia datis duabus rectis lineis æqualia.

SINT enim data recta A, B, oporteatque constituere parallelogrammum habens angulum æqualem dato angulo rectilineo C, lateraque circa illum angulum rectis A, B, æqualia. Sumpta recta DE, quæ recta A, sit æqualis,

b 23. pri. *fiat angulus EDF, angulo C,* c 3. pri. *& recta DF, recta B, æqualis. Deinde per E,* d 31. primi. *agatur recta EG, ipsi DF, parallela, & per F, recta F G, ipsi DE, parallela secans EG, in G. Quoniam ergo & latera DF, EG, & DE, FG, parallela sunt, ex constructione,* e 35. def. *parallelogrammum erit DEGF. Quod cum ex constructione, habeat angulum D, angulo dato C, æqualem, & latera DE, DF, circa dictum angulum D, datis rectis A, B, æqualia; factum erit, quod proponitur.*

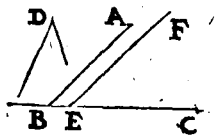


PARI ratione ex hoc problemate, & propos. 23. ducemus a puncto extra datam rectam lineam proposito lineæ rectæ, qua cum data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem, vt ad propos. 23. polliciti sumus.

SIT enim datum punctum A, extra rectam BC, & datus angulus rectilineus D, oporteatq. ex A, ad rectam BC, ducere lineam rectam, qua cũ ea angulum dato angulo D, æqualẽ comprehendat. Sumpto quolibet puncto E, in linea

BC,

BC, [a] constituatur in eo angulus CEF, angulo D, æqualis. Si igitur recta EF, per datum punctum A, transeat, factū erit, quod iubetur. Si vero non transeat per A, [b] ducatur per A, recta AB, ipsi EF, parallela secans BC, in B. Dico angulum ABC, angulo D, æqualē esse. Cum enim parallelæ sint, AB, EF, [c] erit angulus CEF, externus interno ABC, ex eadem parte opposito æqualis. Cū ergo & angulus D, angulo E, per constructionem sit æqualis, [d] æquales inter se erunt anguli ABC, & D. quod est propositum.



a 23. primi.
b 31. primi.
c 29. primi.
d 1 prō.

NON videtur autem alienum ostendere hoc loco, recte Euclidem propos. 26. vt demonstraret æqualitatem laterū in duobus triangulis, ex æqualitate duorum angulorum, & vnius lateris, præcepisse, latus illud vel adiacere debere angulis æqualibus, vel certe subtendere angulum æqualem. Nam nisi altera harum conditionum adsit, nihil colligetur.

SIT enim triangulum ABC, sintque latera AB, AC, latere BC, maiora. Abscindatur BD, æqualis ipsi BC, [e] ducaturq. DE, ipsi AC, parallela, [f] eritque angulus BED, angulo C, æqualis. Quare duo anguli B, C, trianguli ABC, duobus angulis B, E, trianguli DBE, æquales sunt, vterque vtrique, latusq. BC, lateri DB, æquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus æqualia non sint. Est enim BE, minus, quam BC, atque adeo neque lateri AC, neque lateri AB, æquale esse potest; quod hæc latera maiora ponantur latere BC. Causa huius rei est, quod latus BC, in triangulo ABC, adiacet angulis dictis, at latus DB, in triangulo DBE, opponitur vni angulorum dictorum, nimirum angulo DEB, qui angulo C, æqualis est.

e 31. pri.
f 29. pri.

SIT rursus triangulum FGH, sintque iterum latera FG, FH, latere GH, maiora, & FH, maius quam FG. Abscindatur HI, ipsi FG, æqualis, [g] ducaturque IK, ipsi FG, paralle-

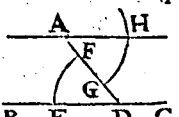
g 31. pri

[a] 29. primi. rallela: [a] eritq. angulus HKI, angulo G, aqualis. Sunt ergo duo anguli H, G, trianguli FGH, duobus angulis H, K, trianguli IKH, aquales, vterque vtrique, latusq. FG, lateri IH, aquale; cum tamen reliqua latera reliquis lateribus aqualia non sint. Est enim HK, minus, quam HG, atque adeo neque lateri HG, neque lateri FH, aquale esse potest; quod latus FH, maius etiam ponitur, quàm GH. Ratio huius rei est, quod latus FG, in triangulo FGH, opponitur angulo H, at latus IH, opponitur angulo K[a], in

[b] 18. primi. triangulo IKH, qui non ponitur aqualis angulo H, sed angulo G. est aqualis, [b] qui maior est angulo H, propterea quod latus FH, maius posuimus latere FG. Distulimus hanc demonstrationem hunc in locum, propter linearum parallelarum proprietates, ex quibus pendet.

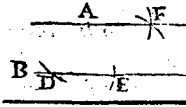
PRAXIS.

SIT ducenda parallela ipsi BC, per punctum A. Ducatur recta AD, vtcunque ad BC, & ex D, & A. ad idem internallum quodlibet describantur duo arcus ad diuersas partes, vnus ad partes B, alter ad partes C. Deinde beneficio circini arcui EF, abscindatur ex arcu altero arcus GH, aqualis. Si igitur



[c] 27 primi. ex A, per H, recta ducatur, [c] erit hac parallela ipsi BC. Nam alterni anguli EDF, HAG, sunt aquales, vt constat ex praxi propos. 23. &c.

ALIO modo ducetur per idem punctum A, datum linea parallela linea datæ BC, hac arte. Ex centro A, ad quoduis internallum describatur arcus secans BC, in puncto D; & eodem internallo ex D, sumatur punctum E, in eadem recta BC. Deinde eodem internallo ex A, & E, de-

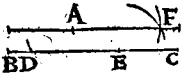


scribantur duo arcus secantes sese in F. Nam ducta recta AF, erit parallela recta BC. Quoniam enim propter idem internallum assumptum

recta

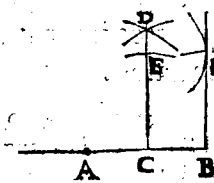
recta AF, æqualis est recta DE; & recta AD, recta EF, si ducerentur hæ lineæ; erit AF, oppositæ DE, parallela, vt postea demonstrabimus propos. 34.

QVOD si punctum A, vicinum fuerit rectæ BC, commodius hac lege parallela optata ducetur. Ex A, sumatur punctum D, in BC, ad quoduis interuallum; Et ex quouis puncto eiusdem rectæ BC, nempe E, quodtamen aliquantulum distet à puncto D, (Quo enim maior fuerit distantia inter D, & E, eo facilius, & accuratius parallela ducetur) eodem interuallo arcus describatur ad partes A. Deinde ex A, interuallo DE, alter arcus describatur secet priorem arcum in F. Recta namque ducta AF, erit parallela rectæ BC, vt prius; quia recta AF, æqualis est rectæ DE, ob idem interuallum; & recta AD, rectæ EF, si hæ rectæ ductæ essent, &c.



SED longe facillimam rationem ducendi parallelam alicui lineæ per datum punctũ tradidimus in nostro Astrolabio, lib. 1. lemmate 4.

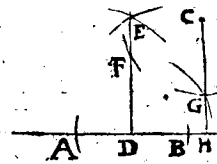
EX his facile ducemus ex puncto extremo alicuius lineæ perpendicularem lineam ad ipsam datam lineam, etiamsi linea produci non possit, quod in scholio propos. 11. promisimus. Sit enim recta AB, ex cuius extremo puncto B, educenda sit ad eam perpendicularis. Sumpto puncto quouis C, abscindatur rectæ CB, æqualis CA, & ex A, & B, ad quoduis interuallum duo arcus describantur secantes sese in D, ducaturq; recta DC, quæ ad AB, perpendicularis erit, vt ad propos. 11. scripsimus. Deinde per B, ducatur ipsi CD, parallela, hoc modo, secundum praxim huius 31. propositionis proxime explicatam. Ex CD, abscissa recta quantacunque CE, describatur ex B, ad interuallum CE, arcus, quem in F, secet alius arcus ex E, ad interuallum CB, descriptus, ducaturq; recta BF. Hac namque ipsi CD, parallela erit, vt ex praxi huius propos. 31. liquet, Igitur



cum

a 29. primi. *cum angulus A C D, æqualis sit interno C B F; sit autem A C D, rectus, erit & C B F, rectus, ac proinde B F, ad A B, perpendicularis erit.*

SIMILITER si data sit recta A B, & punctum extra ipsam C, in extremo fere plani, in quo recta illa iacet, ducemus ex C, ad A B, perpendicularem, neque producta linea, neque extenso plano infra rectam A B, vt polliciti sumus ad propos. 12. hoc modo. Sumpto puncto D, vtcunque in linea A B, abscindantur vtrinque inter se æquales D A, D B, & ex A, & B, ad quoduis internallum duo arcus describantur secantes sese in E, ducaturq. recta E D, quæ ex praxi propos. 11. ad A B, perpendicularis erit. Deinde per C, ducatur ipsi D E, parallela, hoc modo, secundum praxim huius propos. 31. Ex dato puncto C, ad quoduis internallum describatur arcus secans rectam D E, in F: eodemq. internallo ex D, versus C, alius arcus describatur, quem in G, intersecet alius arcus ex C, ad internallum D F, delineatus. Recta namque ducta ex C, per G, secans A B, in H, parallela erit rectæ D E, ex praxi huius propos. 31. Quare, vt proxime scripsimus, C H, ad A B, perpendicularis erit, sicuti & E D, ad eandem perpendicularis est.



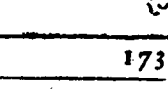
xxxij. ## THEOR. 22. PROPOS. 32.

CVIVSCVNQVE trianguli vno latere producto: Externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et trianguli tres interni anguli duobus sunt rectis æquales.

PRODVCATVR in triangulo A B C, latus B C, ad D. Dico primò, angulum externum A C D, æqualem b 31. primi. esse duobus internis, & oppositis simul A, & B. b Ducatur enim ex C, linea C E, parallela rectæ A B. Quoniam

igitur

igitur recta A C, incidit in parallelas A B, C E, [a] erunt anguli alterni A, & ACE, æquales. Rursus, quia recta BD, in easdem parallelas incidit, [b] erit angulus externus D C E, æqualis interno B. Additis igitur æqualibus ACE, & A, [c] fiet totus ACD, (qui ex duobus DCE; ACE, componitur) duobus A, & B, simul æqualis. Quod est propositum.



[a] 29. primi.
[b] 29. primi.
[c] 2. pron.

DICO secundò, tres angulos internos eiusdem trianguli A, B, & ACB, duobus esse rectis æquales. Cum enim externus angulus ACD, vt ostensum fuit, æqualis sit duobus internis A, & B; si addatur communis ACB, [d] erunt duo anguli ACD, ACB, æquales tribus A, B, & ACB. Sed duo ACD, ACB, [e] æquales sunt duobus rectis. Igitur & tres interni A, B, A C B, duobus sunt rectis æquales. Quare cuiuscunque trianguli vno latere producto, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 2. pron.
[e] 13. pri.

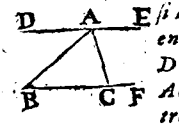
SCHOLIVM.

CVM demonstratum sit propos. 16. angulum externum cuiusuis trianguli maiorem esse vtrolibet interno, & opposito, hic autem, eundem externum eisdem internis simul esse æqualem, perspicuum est, alterutrum internorum, & oppositorum superari ab externo, reliquo interno angulo opposita. Vt in triangulo proposito angulus A, internus superatur ab angulo externo ACD, angulo B, interno: Et angulus B, internus superatur ab eodem externo angulo ACD, angulo A, interno, quandoquidem angulus ACD, duobus angulis A, & B, est ostensus hoc loco æqualis. Rursum, quia demonstratum est propos. 17. duos angulos cuiuslibet trianguli quomodocunque sumptos, duobus esse rectis minores, hic vero omnes tres duobus rectis æquales esse; manifestum est, duos à duobus rectis deficere, reliquo angulo trianguli. Vt in eodem triangulo, duo anguli A, & B, à duobus rectis deficiunt angulo ACB, &c.

OMNE porro triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, primi omnium, vt refert Eudemus, Pythagorei demonstrarunt hac ratione. Sit triangulum A B C, &

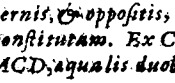
per

per punctum A, [a] ducatur recta BC, parallela DE. Quoniam igitur [b] anguli alterni DAB, & ABC, æquales sunt;



si addantur æquales EAC, & ACB, (sunt enim & hi alterni) [c] erunt duo anguli DAB, EAC, duobus ABC, ACB, æquales. Addito ergo cõmuni angulo BAC, [d] erunt tres anguli DAB, BAC, CAE, æquales tribus angulis ABC, BAC, ACB. Sed anguli DAB, BAC, CAE, æquales sunt duobus rectis, vt constat ex propos. 13. Igitur & in triangulo ABC, anguli ABC, BAC, ACB, duobus sunt rectis æquales, quod est propositum. Ex hoc autem facile concludemus, angulum externum ACF, si latus BC, sit protractum, æqualem esse duobus internis, & oppositis ABC, BAC. Quoniã enim anguli ABC, BAC, ACB, æquales sunt duobus rectis, vt ostensum fuit. [e] Sunt autem & anguli ACF. [e] Sunt autem & anguli ACF, ACB, duobus rectis æquales; Erunt anguli ABC, BAC, ACB, angulis ACF, ACB, æquales. Dempto igitur communi angulo ACB, [f] remanebit angulus ACF, duobus angulis ABC, BAC, æqualis.

FACILE etiam conuerti poterit prima pars propositionis Euclidis: Hoc est, si ab vno angulo trianguli linea recta ducatur, vt angulus externus æqualis sit duobus internis, & oppositis, illam lineam esse in directum ipsi lateri constitutam. Ex C, enim ducatur CD, recta, ita vt angulus ACD, æqualis duobus angulis ABC, BAC. Dico rectas BC, CD, in directum iacere. Cum enim angulus ACD, æqualis sit angulis ABC, BAC, si addatur communis angulus ACB,



[g] erunt anguli ACD, ACB, æquales angulis ABC, BAC, ACB: Sed ABC, BAC, ACB, [h] æquales sunt duobus rectis. Igitur & anguli ACD, ACB, duobus erunt rectis æquales. [i] Quare BC, CD, vnam lineam rectam constituunt.

a 31. primi.
b 29. primi.
c 2. pron
d 2. pri.
e 13. pri.
f 3. pron
g 2. pron
h 32. pri
i 14. pri.

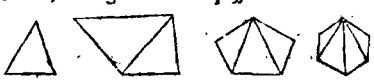
QVOT ANGVLIS RECTIS æquiualeant anguli omnes interni cuiuſcunq. figuræ rectilineæ.

DVOBVS modis ex hac propoſ. 32. colligemus, quotnam rectis angulis æquiualeant interni anguli figura cuiuslibet rectilineæ, quorum primus hic eſt.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiuſuis ſunt æquales bis tot rectis angulis, quota ipſa eſt inter figuras rectilineas.

HOC eſt, omnes anguli primæ figuræ rectilineæ æquales ſint bis vni recto, id eſt, duobus rectis; Anguli vero ſecundæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis duobus rectis, nempe quatuor rectis; Anguli autem tertiæ figuræ rectilineæ æquales ſunt bis tribus rectis, ſex videlicet rectis, Et ſic reliquis. Eum autem locum qualibet figura rectilinea obtinet inter figuras rectilineas, quem indicat numerus laterum, ſeu angulorum, dempto binario; quoniam duæ lineæ rectæ ſuperficiem non concludunt, vnde nec figuram conſtituunt, ſed cum minimum tres rectæ lineæ ad figuræ conſtitutionem requiruntur. Ex quo fit triangulum, quia habet tria latera, totidemque angulos, eſſe primam inter rectilineas figuras. Nam binario dempto ex tribus, relinquitur vnum. Sic erit figura habens 20. latera ſeu angulos, inter figuras rectilineas decimaoctaua, cum binarius ſubtractus ex 20 relinquat 18. Idem iudicium de aliis figuris eſt habendum. Itaque figura contenta 20. lateribus, cum ſit decimaoctaua, habebit 20. angulos æquiualentes 36. rectis angulis, nempe bis 18. angulis rectis, vt dictum eſt. Ita quoque omnes 10. anguli figuræ 10. lateribus contentæ, æquiualebunt 16. angulis rectis, cum talis figura ſit octaua inter rectilineas figuras. Hoc autem hac ratione demonſtrabitur. Omnis figura rectilinea in tot triangula diuiditur, quota ipſa eſt inter figuras, ſeu quot ipſa habet angulos lateraue, binario dempto. Nam à quouis angulo ipſius ad omnes angulos oppoſitos duci poſſunt lineæ rectæ, ſolum ad duos propinquos an-

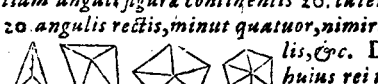
gulos non possunt duci. Quare in tot triangula distribuetur, quot ipsa habet angulos, demptis duobus illis angulis. Sic vides, triangulum non posse diuidi in alia triangula; quadrangulum vero in duo secari; quinquangulũ in tria; sexangulũ in quatuor, &c. Cum igitur anguli horum triangulorum constituant omnes angulos rectilineæ figuræ propositæ, & omnes anguli cuiuslibet trianguli æquales sint duobus rectis; perspicuum est, omnes angulos figuræ cuiusuis rectilineæ æquales esse bis tot rectis, quot triangula diuiditur, hoc est, quota ipsa est inter rectilineas figuras. Quod quidem manifeste perspectur in propositis figuris.



SECVNDVS modus, quo scitur valor angulorum cuiuslibet figuræ rectilineæ, hic est.

OMNES anguli figuræ rectilineæ cuiusuis, æquales sunt bis tot rectis angulis, demptis quatuor, quot ipsa continet latera, seu angulos.

HOC est, anguli cuiuslibet trianguli æquales sunt bis tribus rectis, demptis quatuor, nempe duobus rectis. Ita etiam anguli figuræ continentis 20. latera æquiualebunt bis 20 angulis rectis, minut quatuor, nimirum 36. rectis angulis, &c. Demonstratio autem huius rei talis est. Si à quouis puncto intra figuram assumpto ad omnes angulos recta linea ducantur, efficientur tot triangula, quot latera, angulosve figura ipsa continet. Cum igitur anguli cuiuscunque trianguli[a] æquales sint duobus rectis, erunt omnes anguli illorum triangulorũ æquales bis tot rectis, quot latera figuram ambiunt. At anguli eorundẽ triangulorum circa punctum intra figuram assumptũ consistentes non pertinent ad angulos figuræ rectilineæ propositæ, vt constat. Quare si hi auferãtur, erunt reliqui triangulorũ anguli constituẽtes angulos figuræ propositæ, bis quoq. tot rectis

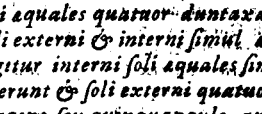


[a] 32. primi.

ctis aquales, demptis illis circa punctum assumptum cõstitutis, quot latera, vel angulos continet figura. Sunt autem omnes illi anguli, quotquot sint, circa dictum punctum existentes aquales 4. rectis tantummodo, vt colligimus ex propos. 15 Quamobrem anguli cuiusque figura bis tot rectis sunt aquales, ablatis quatuor, quot ipsa figura continet angulos, seu latera, quod est propositum.

EX hoc porro secundo modo liquet, si singula latera figura cuiusuis rectilinea producantur ordinatim versus eandē partem, omnes angulos externos aquales esse quatuor rectis. Nam quilibet externus, & illi deinceps internus, a aquantur duobus rectis; atque adeo omnes externi una cum omnibus internis aquales erunt bis tot rectis, quot latera, angulosve figura continet. Sunt autem & soli interni bis tot rectis aquales, minus quatuor, vt demonstrauimus. Si igitur interni auferantur, remanebunt externi quatuor tantum rectis aquales, qui nimirum desunt internis angulis, vt interni & externi simul bis tot rectos conficiant, quot latera figuram proposita ambiunt. Exemplum.

a 13. primi



In triangulo quouis, anguli interni & externi simul aquales sunt sex rectis. Cum igitur interni b duobus sint rectis aquales, erunt soli externi aquales quatuor duntaxat rectis. In quadrilatero, anguli externi & interni simul aquales sunt octo rectis. Cum igitur interni soli aquales sint quatuor rectis, vt ostendimus, erunt & soli externi quatuor etiam rectis aquales. In pentagono, seu quinquangulo, anguli interni & externi sunt aquales 10. rectis. Quoniam vero interni adaquantur sex rectis, vt demonstrauimus, remanebunt externi aquales quatuor tantum rectis. Quæ omnia in appositis figuris conspiciuntur. Eademq. est ratio in alijs omnibus figuris.

b 32. primi.

EX CAMPANO.

SI pentagoni singula latera producantur in partem vtrãque, ita vt quælibet duo

extra pentagonum coeant, efficientur quinque anguli ex lateribus coeuntibus æquales duobus solum rectis.

IN pentagono ABCDE, latera in vtramque partem producta coeant in punctis F, G, H, I, K. Dico quinque angulos F, G, H, I, K, æquales tantum esse duobus rectis. In triangulo enim BHK, cum latus HB, sit protractum ad F, [a] *erit externus angulus FBK, duobus internis, & oppositis H, K, æqualis. Eadem ratione in triangulo AIG, erit externus angulus FAG, æqualis duobus internis, & oppositis I, G. Quare duo anguli FBA, FAB, æquales sunt quatuor angulis G, H, I, K. Addito igitur communi angulo F,* [b] *erunt tres anguli A, B, F, trianguli ABF, æquales quinque angulis F, G H I K. Sed anguli A, B, F, trianguli ABF,* [c] *æquales sunt duobus rectis. Igitur & quinque anguli F, G, H, I, K, duobus sunt rectis æquales. Quod est propositum.*

[a] 32. primi.

[b] 2. prom

[c] 32. primi.

COROLLARIVM I.

EX hac propos. 32. colligitur, tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos æquales esse tribus angulis cuiusq. alterius trianguli simul sumptis: Quoniam tam illi tres, quam hi, d æquales sunt duobus angulis rectis. Vnde si duo anguli vnius trianguli fuerint æquales duobus angulis alterius trianguli, erit & reliquus illius reliquo huius æqualis, æquiangulaq. erunt ipsa triangula.

[d] 32 primi.

COROLLARIVM II.

CONSTAT etiam, in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus rectus fuerit, quemlibet reliquorum esse semirectum. Nam reliqui duo simul conficiunt vnum rectum, e cum omnes tres sint æquales duobus rectis: & tertius ille ponatur rectus. Quare f cum duo reliqui inter se sint æquales, erit quilibet eorum semirectus. At vero si angulus æqualibus lateribus contentus fuerit obtusus, quemlibet aliorum esse semirecto minorem. Reliqui enim duo simul minores erunt vno recto, &c. Si denique dictus angulus exiterit acutus, vtrumq. reliquorum maiorem esse semirecto. Quoniam reliqui duo simul maiores erunt vno recto, &c.

[e] 32. primi.

[f] 5. primi.

COROLLARIVM III.

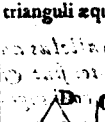
PERSPICVVM quoque est, quemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes vnius recti, vel tertiam partem duorum rectorum.

corum. Duo enim anguli recti, a quibus æquales sunt tres anguli trianguli æquilateri, diuisi in tres angulos, faciunt duas tertias partes vnius recti. a 32. primi.

COROLLARIVM IIII.

LIQVET etiam, si ab vno angulo trianguli æquilateri perpendicularis ad latus oppositum ducatur, constitui duo triangula scalena, quorum vnumquodq. habet vnum angulum rectum prope perpendicularem; alium duas tertias partes vnius recti, illum scilicet, qui est, & angulus trianguli æquilateri; reliquum denique tertiam partem vnius recti.

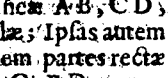
SCHOLIVM.



PORRO ex tertio corollario depromi potest methodus, qua angulus rectus in tres angulos æquales diuidatur. Sit enim angulus rectus ABC. Super rectam AB, b constituatur triangulum æquilaterum ABD. Et quia per corollarium 3. angulus ABD, facit duas tertias partes anguli recti ABC; erit angulus CBD, pars tertia eiusdem recti. Diuiso igitur angulo ABD, c bifariam, per rectam BE, erit vterq. angulus ABE, EBD, tertia quoque pars recti. Quare rectus angulus ABC, diuisus est in tres angulos æquales. Quod est propositum. b 1. primi. c 9. primi.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxiij.

RECTAE lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas ad partes easdem coniungunt; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.



SINT rectæ lineæ AB, CD, æquales, & parallelæ; Ipsas autem coniungant ad easdem partes rectæ AC, BD. Dico AC, BD, æquales quoque esse, & parallelas. Ducatur enim recta AD. Quoniam igitur AD, incidit in parallelas AB, CD, d erunt anguli alterni BAD, CDA, æquales. Quare cum duo latera BA, AD, trianguli BAD, æqualia sint duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrum- d 29. primi.

que vtrique, & anguli quoque dictis lateribus inclusi æquales; [a] erunt bases B D, A C, æquales; & angulus A D B, angulo D A C, æqualis. Cum igitur hi anguli sint alterni inter rectas A C, B D, [b] erunt A C, B D, parallelæ: Probatum autem iam fuit, easdem esse æquales. Rectæ ergo lineæ, quæ æquales, & parallelas lineas, &c. Quod erat demonstrandum.

a 4. pri.

b 27. primi.

SCHOLIVM.

DIXIT Euclides, lineas æquales, & parallelas ad easdem partes debere coniungi, vt ipsa coniungentes sint & æquales & parallelæ: Nam si ad partes diuersas coniungerentur, vt ad A, & D. Item ad B, & C, neque coniungentes lineæ essent parallelæ vnquam, sed perpetuo se mutuo secarent, neque essent æquales, nisi raro admodum, vt ex sequenti propositione constabit.

xxxiiij.

TEOR. 24. PROPOS. 34.

PARALLELOGRAMMORVM spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso & latera, & anguli; atque illa bifariam secat diameter.

SIT parallelogrammum ABCD, quale definiuimus definitione 35. Dico latera opposita AB, DC, inter se esse æqualia, nec non latera opposita AD, BC. Item angulos oppositos B, & D, æquales inter se esse, nec non & angulos oppositos D A B, & D C B: Denique ductam diametro AC, parallelogrammum ipsum bifariam secari. Cum enim AB, D C, sint parallelæ, [c] erunt anguli alterni BAC, DCA, æquales. Rursus quia AD, BC, sunt parallelæ, [d] erunt & anguli alterni B C A, D A C, æquales. Itaque cum anguli BAC, BCA, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis D C A, D A C, trianguli A D C, vterque vtrique, & latus AC, dictis angulis adiacens, commune vtrique triangulo; [e] erit recta AB, æqualis oppositæ rectæ DC, & recta BC, oppositæ rectæ A D,

c 29. primi.

d 29. pri

e 26. pri

quod

quod est primum. Erit rursus eadem de causa angulus B, angulo D, æqualis. Et quia si æqualibus angulis BAC, DCA, addantur æquales anguli DAC, BCA, toti quoque anguli B A D, BCD, [a] fiunt æquales; constat secundum, angulos nimirum oppositos esse æquales. Quoniam vero duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumq. vtrique, & angulus B, angulo D, æqualis, vt iam ostendimus; [b] erunt triangula ABC, CDA, æqualia, ideoque parallelogrammum ABCD, diuisum erit bifariã a diametro AC, quod tertio loco proponebatur. Parallelogrammorũ igitur spatiorum æqualia sunt inter se, quæ ex aduerso, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. prã.

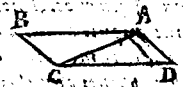
b 4. pri.

SCHOLIVM.

APPOSITE dixit Euclides, solummodo parallelogramma a diametro diuidi bifariam, non autem & angulos. In Quadrato enim, & Rhombo duntaxat anguli etiã bifariam diuiduntur a diametro; At in figura Altera parte longiori, & in Rhomboide in partes inæquales. Quæ omnia perspicua erunt, si prius ostenderimus, quatuor hasce figuras, Quadratum, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma. Hoc autem demonstrabimus tribus sequentibus theorematibus, quorum primum est.

OMNE quadrilaterum habens latera opposita æqualia, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, latera opposita AB, DC, æqualia; Item opposita latera AD, BC. Dico ABCD, esse parallelogrammum; hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas; Itemque lineas AD, BC. Ducta enim diametro AC, erunt duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia duobus lateribus CD, DA, trianguli CDA, vtrumque vtrique, & basis AC, communis. Igitur [c] erit angulus B, angulo D, æqualis. Rursus quia latera AB, BC, æqualia sunt lateribus CD, DA, vtrumque vtrique, & an-



c 8. pri.

a 4. pri. guli B, D, ostensi æquales; erit angulus BAC, angulo DCA, alterno æqualis, & angulus BCA, alterno angulo
b 27. primi. DAC. Quare b erunt AB, & DC, parallelæ; Item AD, & BC, quod est propositum.

HINC constat, Rhombum, & Rhomboidem esse parallelogramma; quoniam oppositorum eorum latera sunt inter se æqualia, vt manifestum est ex eorum definitionibus. Rectangulum autem quadratum, parallelogrammum erit, quod latera opposita habeat æqualia. Sunt autem omnia quatuor eius latera inter se æqualia, per eius definitionem. Conuertit autem hoc theorema primam partem propositionis 34. vt patet.

Secundum theorema tale est.

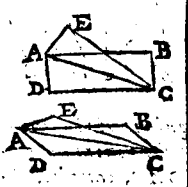
OMNE quadrilaterum habens angulos oppositos æquales, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, anguli oppositi A, & C, æquales: Item oppositi anguli B, & D. Dico ABCD, esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas: Itemq. lineas AD, BC. Nam si æqualibus angulis A, & C, addantur æquales anguli B, & D:
c 2. pron c erunt duo anguli A, & B, duobus angulis D, & C, æquales, & idcirco anguli A, & B, dimidij facient quatuor angulorum A, B, C, & D. Cum igitur hi quatuor æquales sint quatuor rectis, vt ad propos. 32. demonstrauimus, erunt duo A, & B, duobus rectis æquales. Quare
d 28. primi. AD, BC, d parallelæ sunt. Eadem ratione erunt AB, DC, parallelæ. Erunt enim duo quoq. anguli A, & D, duobus angulis B, & C, æquales, &c. Quod est propositum. Ex hoc etiam manifestum est, Rhomboidem esse parallelogrammum, cum eius anguli oppositi æquales sint, per definitionem. Similiter quadratum, & altera parte longius. Sunt enim eorum anguli oppositi æquales, cum sint recti, ex eorum definitionibus.

HOC theorema conuertit secundam partem propositionis 34. vt constat. Tertia autem pars non potest conuerti. Nam & trapezium aliquod bifariam secari potest a diametro, & tamen non est parallelogrammum. Si enim altera

parte

parte longius, vel Rhomboides ABCD, quod parallelogrammum esse ostensum est: in quo, ducta diametro AC, constituatur super AC, triangulo ABC, aequale triangulum AEC, inverso ordine, ita vt latus CE, sit aequale lateri AB, & AE, ipsi CB, vt in scholio propos. 22. docuimus: fiatque trapezium AECD.



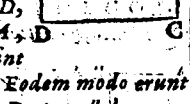
Quoniam vero triangulum ABC, triangulo ADC, aequale est, a quod diameter AC, bifariam secet parallelogrammum DB: erit & triangulum AEC, triangulo ADC, aequale: Ac proinde trapezium AECD, bifariam diuidetur a diametro AC. a 34. primi.

QVOD si quadrilaterum aliquod diuidatur bifariam ab vtraq; diametro, illud parallelogrammum erit; vt ostendemus ad prop. 39. Quod quidem in nullo trapezio fieri potest.

Tertium Theorema huiusmodi est.

OMNE quadrilaterum habens omnes angulos rectos, est parallelogrammum.

SINT in quadrilatero ABCD, omnes quatuor anguli recti. Dico ipsum esse parallelogrammum: hoc est, lineas AB, DC, esse parallelas: Itemque AD, BC. Quoniam enim duo anguli A, & B, aequales sunt duobus rectis, cum sint duo recti: b erunt AD, BC, parallelae. Eodem modo erunt AB, DC, parallelae: atque adeo ABCD, parallelogrammum, quod est propositum. b 28. primi.

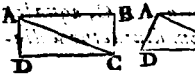


HINC rursum constat, Quadratum, & altera parte longius, esse parallelogramma, cum eorum anguli omnes existant recti, vt liquet ex eorum definitionibus.

HIS in hunc modum demonstratis, Quadratum scilicet, Altera parte longius, Rhombum, & Rhomboidem, esse parallelogramma, facile ostendemus, angulos Quadrati, & Rhombi, bifariam secari a diametro: Angulos vero figurae Altera parte longioris, & Rhomboidis, non bifariam, vt pau

lo ante monuimus. Sit enim Quadratum, vel Rhombus ABCD, in quo diameter AC. Quoniam igitur duo latera BA, AC, trianguli BAC, equalia sunt duobus lateribus DA, AC, trianguli DAC, vtrumque vtrique, & basis BC, basi DC, (sunt enim hæ figuræ æquilaterę) a erunt anguli BAC: DAC, æquales. Quare Angulus BAD, diuiditur bifariam. Eadem modo demonstrabimus, reliquos angulos bifariam secari a diametro.

a 8. pri.

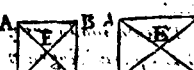


SIT rursus Altera parte longius, vel Rhomboides ABCD in quo diameter AC, sitque maius latus AB. Quoniam igitur in triangulo ABC, latus AB, maius est latere BC, b erit angulus BCA, maior angulo BAC: Est autem angulus BCA, c æqualis angulo DAC, alterno: quod BC, AD, parallelæ sint. (Est enim ABCD, æstimatum esse parallelogrammum.) Igitur & angulus DAC, maior erit angulo BAC. Atque propterea angulus BAD, inæqualiter diuiditur a diametro AC. Eadem est ratio aliorum angulorum. Quamobrem appositè Euclides in tertia parte huius propositionis dixit, solum parallelogrammum bifariam a diametro secari, non autem & angulos.

b 18. primi.

c 29 primi.

EODEM fere pacto ostendemus, duas diametros in Quadrato, & Altera parte longiore æquales esse; At verò in Rhombo, & Rhomboide inæquales; maiorem quidem eam, quæ angulos acutos, minorem verò eam, quæ obtusos angulos diuersis. Sit enim quadratum, vel altera parte longius ABCD, in quo diametri AC, BD, quas dico esse æquales. Cum enim duo latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus AB, AD, trianguli BAD: vtrumque vtrique, & angulus ABC, angulo BAD, quia vterque rectus: d erit basis AC, basi BD, æqualis: Ac proinde diametri in quadrato, & figura altera parte longiore æquales sunt.



d 4. pri.

SIT rursus Rhombus, vel Rhomboides, ABCD, in quo

dia-

diametri AC, BD; sitq. angulus BAD, maior; ABC, minor. Non enim æquales sunt, quia alias, vterque esset rectus, cum ambo æquales sint duobus rectis; quod est absurdum, & contra definitiones Rhombi, & Rhomboidis. Dico diametrum BD, maiorem esse diametro AC. Quoniam enim duo latera AB, AD, trianguli BAD, æqualia sunt duobus lateribus AB, BC, trianguli ABC, vterque vtrique, & angulus BAD, angulo ABC, maior existit; b erit basis BD, maior basi AC. quod est propositum. Ex quo manifestum est, cur in propositione 33. Euclides asseruerit, eas tantum lineas, quæ coniungunt parallelas æquales ad easdem partes, æquales esse, vt ibidem annotauimus. Nam in Rhombo, & Rhomboide rectè AC, BD, inæquales sunt, licet coniungant parallelas æquales AB, DC: quia non ad easdem partes ipsas coniungunt, vt perspicuum est.

IN omni tamen parallelogrammo diametri se mutuo bifariam diuidunt. Cum enim duo anguli EAD, EDA, trianguli AED, c æquales sint alternis angulis ECB, EBC, trianguli BEC, vterque vtrique, & latus AD, æquale lateri BC, opposito in parallelogrammo ABCD, quorum vtrumque æqualibus adiacet angulis; d erit & AE, recta recta CE, & recta DE, recta EB, æquales. Quare vtraque diuisa bifariam diuiditur in puncto E.

HVIVS autem, quod modo diximus, conuersum etiam demonstrabimus, videlicet

a 29. primi.

b 24. primi.

c 29. primi.

d 34. primi.

e 26. primi.

OMNE quadrilaterum, in quo diametri se mutuo bifariam diuidunt, parallelogrammum est.

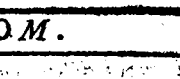
IN quadrilatero enim ABCD, diametri AC, BD, se mutuo bifariam diuidant in E. Dico ABCD, parallelogrammum esse. Cum enim latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sint lateribus CE, ED, trianguli CED, & anguli contenti ad ver-

a 29. primi.

ticem

a 15. primi. b 4. primi. c 27. primi

vicem E, a æquales quoque; b eruntq; & bases AB, CD, æquales, & angulus ABE angulo alterno CDE, æqualis. c Quare recta AB, CD, parallela sunt. Eadem ratione parallelæ ostendentur AD, CB. Parallelogrammum ergo est ABCD.

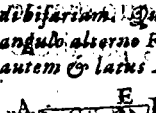


HAC QVE, si quis expedire parallelogrammum describere velit, ducat duas lineas AC, BD, vtcunque se in E, intersecantes, & quamquam BE, EC, inter se, quam EB, ED, inter se æquales abscindat, constituens ductæ AB, BC, CD, DA, parallelogrammum, vt hic demonstratum est. Quod si anguli ad E, sint recti, & omnes quatuor rectæ EA, EC, EB, ED, inter se æquales, constitutum parallelogrammum erit quadratum, propterea quod octo anguli ad A, B, C, D, sint semirecti, vt facile demonstrabitur per 5. & 32. huius.

NVNC quoque referri potuit hoc theorema.

RECTA linea secans diametrum parallelogrammi bifariam quomodocunque, diuidit parallelogrammum bifariam quoque: & recta linea diuidens parallelogrammum bifariam quouis modo, secat quoque diametrum bifariam.

IN parallelogrammo ABCD, diametrum AC, bifariam secet recta EF, in puncto G. Dico parallelogrammum diuidi bifariam. Quoniam enim angulus EAG, d æqualis est angulo alterno FCG, & e angulus EGA, angulo FGC. Est autem & latus AG, lateri CG, æquale, per hypothesin, quamobrem æqualibus angulis adiacebit; erunt & latera EG, FG, æqualia. Quare cum latera AG, GE, æqualia sint lateribus CG, GF, & anguli quoque contenti æquales; g erunt triangula AGE, CGF, æqualia. Addito igitur communi quantitate BCGE, h erit triangulum ABC, trapezio BCFE, æquale. Sed triangulum ABC,



d 29. primi. e 15. primi. f 26. primi. g 4. primi. h 2. prop.

dimidium

a dimidium est parallelogrammi ABCD. Igitur & trapezium dimidium erit eiusdem parallelogrammi, ideoq. recta EF, parallelogrammum bifariam secat. a 34. pri

SECET iam EF, parallelogrammum bifariam; Dico & diametrum AC, bifariam secari in G. Si enim diameter AC, non bifariam dividitur in G, b dividatur bifariam in alio puncto, vt in H, per quod ducatur recta EHI. Erit ergo, vt iam demonstrauimus, EICB, trapezium dimidium parallelogrammi ABCD, atque adeo aquale trapezio EFCB, quod etiam dimidium ponitur eiusdem parallelogrammi, pars toti, quod est absurdum. Diuiditur igitur AC, bifariam in G, & non in alio puncto, quod erat propositum. b 1. pri

HINC facile colligitur, si in latere aliquo parallelogrammi cuiusque punctum signetur, vel etiam intra parallelogrammum, vel extra, quod tamen non sit in diametro, nisi ipsum secet diametrum bifariam; qua ratione ab illo puncto linea duci debeat, qua parallelogrammum bifariam secet. Si enim diameter ducatur, & à puncto dato per medium punctum diametri recta ducatur, factum erit, quod proponitur. Vt si punctum sit E, in latere AB, ducenda est recta EF, per G, punctum, in quo diameter AC, bifariam diuiditur; & sic de alijs punctis.

DEMONSTRAT quoque hic Peletarius problema non inuentum, videlicet.

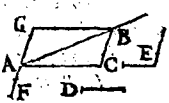
INTER duas lineas rectas infinitas angulum facientes, lineam rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum altera illarum faciat angulum cuiuis angulo dato æqualem. Oportet autem hunc angulum datum, & eum, qui lineis datis continetur, minores esse duobus rectis.

DVAE recta infinita AB, AC, contineant angulum BAC, sitq. data recta finita quacunque D, & angulus datus E, hac lege, vt duo anguli E, & BAC, minores sint duo-

bus

bus rectis. Oportet igitur inter rectas AB, AC, collocare rectam æqualem quidem rectæ D, cum alterutra vero illarum, nimirum cum AC, facientem angulum æqualem angulo dato E. a Fiat angulus CAF, æqualis angulo E, & producta FA, ad G, b sit AG æqualis rectæ D; & per G, c ducatur GB, parallela ipsi AC, secans AB, in B. Deinde per B, ducatur BC, parallela ipsi AG, secans AC, in C. Dico rectam BC, collocatam inter rectas AB, AC, æqualem esse rectæ D, angulumq. BCA, angulo E. Cum enim parallelogrammũ sit per constructionem, ACBG, d erit recta BC, rectæ GA, æqualis: At GA, æqualis est, per constructionem, rectæ D. Igitur & BC, rectæ D æqualis erit. Rursus quia angulus BCA, angulo alterno CAF, æqualis est; & eidem angulo CAF, æqualis est, per constructionem, angulus E; erunt anguli E, & BCA, æquales. Quod est propositum. Caterum ex constructione manifestum esse cuilibet potest, cur duo anguli dati minores esse debeant duobus rectis. Nam alias non fieret triangulum ABC, si anguli BAC, & BCA, æquales essent duobus rectis, vel maiores, vt constat ex propos. 17. vel 32.

a 23. pri
b 3. pri.
c 31. pri
d 34. pri
e 29. pri



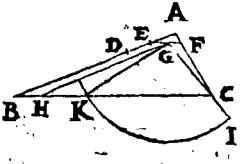
SCHOLIVM. II.

NON alienum erit à nostro instituto, adjicere quædam hoc loco ad lineas intra triangulum constitutas pertinentia, quæ à Pappo Alexandrino lib. 3. Mathematicarum collectionum demonstrantur: quemadmodum facturos nos recepimus ad prop. 21. Primũ igitur in omni triangulo, quod non sit æquilaterũ, vel Isosceles habens basim vtrauis latere minorem, non solum à duobus punctis basis constitui possunt duæ rectæ intra triangulum, quæ simul sumptæ maiores sint duobus lateribus simul sumptis, vt à Proclo in triangulis rectangulis, vel obtusangulis ostensum est ad propos. 21. sed etiam æquales.

SIT enim primum triangulum ABC, habens latus AB, latere AC, maius; sitq. BD, dimidium vtriusque lateris AB, AC, simul: Sumpto autem inter A, D, puncto E, vtcunque, agatur EF, ipsi BC, parallela; & ex quouis puncto G,

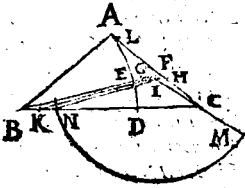
lateri

lateri AB, parallela ducatur GH, rectaque iungatur GC, Et quoniam EA, AF, [a] maiores sunt, quam EF: Item CF, FG, maiores, quam GC: erunt EA, AC, FG, simul maiores, quam EF, GC, simul: ablataque communi FG, erunt EA, AC, simul maiores, quam EG, GC, simul: ac proinde multo maiores, quam GC, sola. Producatur ergo GC, fiatque GI, ipsis EA, AC, simul aqualis. Quia vero BE, maior est, quam vtraque EA, AC, simul, quod BE, superet BD, dimidium vtriusque BA, AC, simul, at EA, AC, simul deficiant à dimidio earundem, nimirum ab vtraque DA, AC, simul: erit quoque BE, maior, quam GI, qua ipsis EA, AC, simul est aqualis. Cum igitur [b] ipsi BE, aqualis sit GH, in parallelogrammo BEGH: erit quoque GH, maior, quam GI. Si igitur centro G, & interuallo GI, circulus describatur, secabit is rectam GH, ac propterea & ipsam CH, prius secabit in K. Connectatur GK. Dico vtramque GH, GK, simul aqualem esse vtrique AB, AC, simul. Id quod ex constructione perspicuum est. Nam GH, ipsi BE, aqualis est, & GI, hoc est, GK, ipsis EA, AC, simul. Atque hoc infinitis modis fieri potest, prout punctum E, remotius a D, sumptum fuerit, & punctum G, a puncto E: hoc est, prout tam AD, quam EF, infinitis in punctis secari potest.

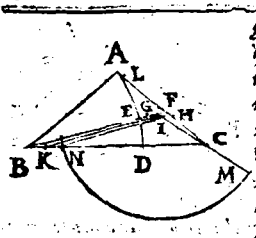


[a] 20. primi.

SIT deinde Isosceles ABC, habens basim BC, vtrouis latere maiorem. Descripto ex centro B, per A, arcu AD, secante rectam BC, in D, ducatur vtcunque recta BF, secans arcum in E, & latus AC, in F: & in EF, per quoduis punctum G, ipsi BC, parallela agatur GH, & per quodcunque eius punctum I, ipsi BF, parallela ducatur IK, rectaque iungatur



[b] 34. primi.



gatur I C: atque ipsi E G æqualis abscindatur A L: Erit igitur B G, ipsis A B, A L, simul æqualis, at L C, minor quàm B E, siue A B, & ob id multo minor, quàm B G. Et quia ipse B G, a æqualis est I K, in parallelogrammo B G I K: erit quoque I K, ipsis A B, A L, simul æqualis, maior autem, quam L C.

234. pri

Itaque b quia G F, F H, maiores sunt, quam G H: & H C, H I, maiores, quam I C: erunt G F, F C, H I, simul maiores, quam G H, I C: & ablata communi N I, erunt reliquæ G F, F C, simul maiores, quam G I, I C, simul: ac proinde apposita communi B G, fient B F, F C, simul maiores, quam B G, G I, I C, simul. Sed ipsis B F, F C, c minores sunt B A, A C, simul. Ergo multo maiores erunt B A, A C, simul, quam B G, G I, I C, simul. Cum ergo B G, ipsis B A, A L simul æqualis sit; erit reliqua L C, maior, quam reliquæ G I, I C, simul, ac proinde multo maior, quam I C, sola. Ponatur I M, (producta I C) ipsi L C, æqualis. Et quia I K, ostensa est maior, quam L C, hoc est, quam I M: si ex centro I, per M, arcus circuli describatur, secabit is rectam I K, ac proinde prius ipsam C K, secabit in N. Connectatur I N. Dico vtramque I K, I N, simul æqualem esse vtriquæ A B, A C, simul. Id quod ex constructione patet. Est namque I K, ipsis A B, A L, simul æqualis, & I N, hoc est, I M, ipsi L C, æqualis. Atque hoc infinitis modis fieri potest: cum B F, infinitis modis duci possit, & tam E F, quam G H, infinitis modis secari.

b 20. pri

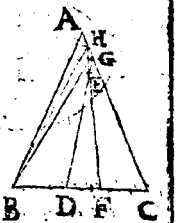
c 20. pri

CONSTAT autem, si intra eadem triangulum A B C, ducantur duæ rectæ, quæ rectas H G, G K, in priori triangulo, vel rectas K I, I N, in posteriori includant, eas maiores fore simul sumptas lateribus A B, A C, simul sumptis: quippe quæ d maiores forent rectis H G, G K, in priori triangulo, vel rectis K I, I N, in posteriori.

d 21. pri

AT vero in triangulo æquilatero, vel Isoscele habente basim vtrouis latere minore, nō posse intus constitui duas lineas maiores, vel æquales simul sumptas duobus lateribus ex-

mul sumptis, sed quascunque interiores esse minores, ita osten-di posse. In triangulo enim ABC, cuius duo latera AB, AC, aequalia, & basis BC, non maior, sed vel aequalis, vel minor; item vt angulus A, maior non sit, quam angulus B, vel C, [a] sed vel aequalis, vel minor: constituantur duae rectae DE, EF, vtcunque, quas dico minores esse simul sumptas duobus lateribus AB, AC, simul sumptis. Producatur enim DE, secans latus AC in G, iungaturq. recta GB. Quoniam igitur [b] duo anguli ABC, & C, aequales sunt, estque ABC, maior angulo GBC, erit quoque C, maior angulo GBC. Est autem & angulus GDB, angulo C, maior, [c] externus interno. Igitur multo maior erit angulus GDB, angulo GBC; [d] ac proinde latus GB, latere GD, maius erit. Quia vero [e] angulus BGA, maior est angulo C, externus interno; angulusq. C, vel aequalis est angulo A, vel maior, vt ostendimus: erit quoque angulus BGA, angulo A, maior. Quare [f] latus AB, latere GB, maius erit: Sed recta GB, ostensa est maior, quam GD, ac proinde multo maior, quam DE. Igitur latus AB, multo etiam maius erit, quam DE. Eadem ratione si FE, producatur secans AC, in H, iungaturq. recta HB, ostendemus latus AB, ac proinde & AC, maius esse, quam FE. Quocirca latera AB, AC, simul maiora sunt duabus rectis DE, EF, simul sumptis. Quod si FE, producta secaret latus AB, demonstrauemus eodem modo, latus AC, maius esse recta EF.



[a] 5. vel 18. pri.

[b] 5. primi.

[c] 16. primi.

[d] 19. primi.

[e] 16. pri.

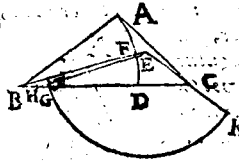
[f] 19. pri.

IAM vero, si admirabile videatur iis, qui Geometria iuuari sunt, in illis, quae diximus, triangulis duas pasſe lineas interiores, quae simul sumptae maiores sint, vel aequales duobus lateribus simul sumptis; admirabilius fuerit, intra eadem illa triangula constitui posse duas lineas, quarum singula singulis lateribus maiores sint, vel aequales. Sint ergo primum constituenda singula linea singulis lateribus maiores in triangulo ABC, cuius latus AB, minus non sit latere AC, at latus BC, vtrouis latere AB, AC, maius. Descripto ex centro B, areu circuli AD, sumatur quoduis

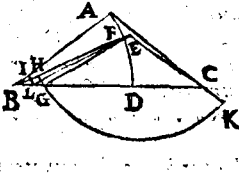
punctum

punctum E, inter arcum AD, & latus AC, ducaturq. recta BE, secans arcum in F; ita vt BE, maior sit, quam BE, hoc est, quam BA, iungaturq EC. Quia vero BE, EC, simul minores sunt, quam AB, AC, simul, estque BE, maior, quam AB, erit EC, multo minor, quam AC. Producta igitur EC, fiat EK, ipsi AC, aequalis, ac propterea minor, quam EB; describaturq. ex E, per K, arcus circuli, qui rectam EB, secabit, ac proinde & ipsam CB, prius secabit in G. Sumpto denique inter B, & G, quouis puncto H, iungatur recta EH, secans arcum in I: factumq. erit, quod proponitur. Nam BE, maior est, quam BA, & EH, maior, quam EI, hoc est, quam EK, vel AC.

21. primi.



DEINDE sint singula linea singulis lateribus aequales constituenda intra idem triangulum: fiatq. eadem constructio, dempta linea EH, sed arcus KG, secet rectam EB, in H. Et latus BA, latere AC, ponatur maius, eritq. BE, recta maior, quam AB, cum maior sit, quam BF, quae aequalis est ipsi AB. Sumpta igitur EI, aequali ipsi AB; cadet punctum I, inter B, & H; quandoquidem EB, maior est, quam AB, & EH, minor, quam AB. Ex E, per I, describatur arcus circuli secans BC, in L; iunganturq. recta EL, EG: factumq. erit, quod proponitur. Nam EL, ipsi EI, hoc est, ipsi AB, aequalis est, & EG, ipsi EK, hoc est, ipsi AC.

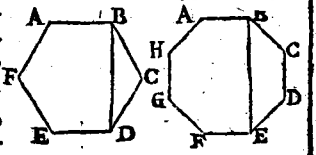


PRAETER hac demonstrat Pappus, ivxta eadem, quae diximus, triangula constitui posse duas rectas duobus lateribus maiores, & qua habeant ad eadem latera proportionem datam, qua tamen dupla proportione minor sit: quod incredibile cuipiam videri possit. Qua res hoc loco demonstrari non potest, cum ex proportionibus pendeat.

EX PROCLO.

IN omni figura rectilinea latera habente numero paria, si quidem fuerit æquilatera, & æquiangula: erunt duo quælibet latera oppositа, parallela inter sese.

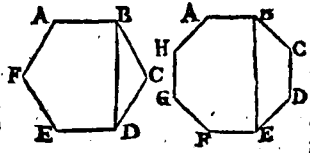
LATERA oppositа dicuntur illa duo, qua ex vtraq. parte latera habent æqualia numero: vt in hexagono ABCDEF, latera oppositа erunt AB, ED: quoniam tam ad partes A, & E, duo sunt latera, quam ad partes B, & D. In octogono vero ABCDEFGH, latera oppositа erunt AB, FE, quia tam ad partes A, & F, tria sunt latera, quam ad partes B, & E. Et sic in alijs figuris æquilateris parium laterũ, ex vtraque parte oppositorum laterum erunt tot latera, quot sunt in dimidio numero laterum, minus vno. Vt in quadrangulo erit vnum, in hexagono erunt duo, in octogono tria, in decagono quatuor, in figura 12. laterum quinque, &c. Dico igitur qualibet latera oppositа esse parallela; AB, nimirum ipsi ED, in hexagono; & AB, ipsi FE, in octogono, & sic de cateris. Connectantur enim duo extrema oppositorum laterum ad easdem partes linea recta, qualis est in hexagono BD, & in octogono BE. Et quoniam, vt ad 32. propos. demonstrauimus, sex anguli hexagoni æquales sunt octo rectis, erunt tres anguli B, C, D, eiusdem hexagoni æquales quatuor rectis, propterea quod omnes anguli ponuntur æquales; Sunt autem anguli BCD, CBD, CDB, trianguli BCD, a duobus rectis æquales. Reliqui igitur anguli ABD, EDB, duobus rectis æquales erunt. Quare b parallela erunt AB, & ED. Rursus quia octo anguli octogoni æquales sunt duodecim rectis, erunt quatuor eius anguli B, C, D, E, sex rectis æquales: Sunt autem quatuor anguli quadrilateri BCDE, æquales quatuor rectis. Igitur duo reliqui anguli ABE, FEB, duobus erunt rectis



a 32. pri

b 28. pri

a 28. primi.



æquales, [a] *atque adeo AB, FE, parallela erunt. Eodem modo demonſtrabitur, in omnibus alijs figuris huiuſmodi, angulos duos ad lineam rectam extrema oppoſitorum laterum coniungentem exiſtentes, duobus eſſe rectis æquales. Nam in decagono aufert ea linea pentagonum, cuius anguli æquales ſunt ſex rectis: At quinque anguli decagoni æquales ſunt octo rectis. Ablatis igitur ſex, relinquuntur duo recti. In figura æquilatera, & æquiangula duodecim laterum eadem linea abſcindet hexagonum, cuius anguli ſunt octo rectis æquales: At ſex anguli totius figuræ æquales ſunt decem rectis. Demptis igitur octo, remanent duo recti, &c.*

QVAMVIS autem omnis figura æquiangula parium laterum habeat latera oppoſita parallela, vt oſtendimus; tamen ſola quadrilatera figura latera oppoſita habens parallela, ab Euclide, & alijs Geometris parallelogrammum dici conſueuit, propterea que in definitionibus, Parallelogrammum diximus eſſe figuram quadrilateram, &c.

xxv.

THEOR. 25. PROPOS. 35.

PARALLELOGRAMMA ſuper eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.

INTER duas parallelas A B, C D. ſuper baſi C D, exiſtant duo parallelogramma C D E A, C D B F. (Dicuntur autem parallelogramma in eiſdem eſſe parallelis, quando duo latera oppoſita partes ſunt parallelarum, vt in exemplo propoſito cernitur.) Diço ipſa parallelogramma inter ſe eſſe æqualia, non quoad angulos & latera, ſed quoad aream, ſeu capacitatem. Cadat enim primo punctum F, inter A, & E. Quoniam igitur in pa-

ralle-

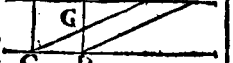
rallelogrammo CDEA, recta AE, [a] æqualis est rectæ CD, oppositæ; & eidem CD æqualis est FB, in parallelogrammo CDBF, oppositæ; Erunt AE, [b] FB, inter se æquales. Dempta igitur communi FE, [c] remanebit AF, ipsi EB, æqualis: [d] Est autem & AC, ipsi BD, oppositæ æqualis in parallelogrammo CDEA; [e] & angulus BED, angulo FAC, externus interno. [f] Quare triangulum FAC, triangulo BED, æquale erit. Addito igitur communi trapezio CDEF, [g] fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Quod est propositum.

a 34. primi.
b 1. pron
c 3. pron
d 34. primi.
e 29. primi.
f 4. pri.
g 2. pron

CADAT secundo punctum F, in punctum E. Dico rursus, parallelogramma CDEA, CDBE, æqualia esse. Erunt enim, vt prius, rectæ AE, EB, æquales, nec non & anguli BED, EAC; atque adeo [h] triangula BAC, BED, æqualia. Addito igitur communi triangulo CDE, [i] fient parallelogramma CDEA, CDBE; æqualia.

h 4. pri.
i 2. pron

CADAT tertio punctum F, vltra E, ita vt recta CF secet rectam DE, in G. Quoniam igitur, vt prius, rectæ AE, FB, sunt æquales; si communis addatur EF; [l] erit tota AF, toti EB, æqualis, necnon & anguli BED, FAC, æquales erunt; atque adeo [m] triangulum FAC, triangulo BED, æquale. Ablato ergo communi triangulo EGF, [n] remanebit trapezium AEGC, trapezio FGDB, æquale. Quocirca addito communi triangulo CDG, fiet totum parallelogrammum CDEA, toti parallelogrammo CDBF, æquale. Parallelogramma igitur super eadem basi, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.



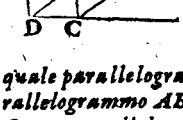
l 2. pron
m 4. pri.
n 3. pron

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS facile hanc propositionem, hoc modo.

Parallelogramma æqualia super eandē basin, ad easdemque partes constituta, erunt inter easdem parallelas.

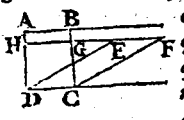
SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, CDEF, super eandem basin CD, & ad easdem partes. Dico rectam AB, productam in directum iacere ipsi EF, & proterea ipsa parallelogramma inter easdem esse parallelas. Alias enim AB, producta vel cadet infra EF, vel supra.



Cadat primo infra, qualis est AH. Erit igitur parallelogrammum CDGH, [a] *æquale parallelogrammo ABCD; Ponitur autem eidem parallelogrammo ABCD, æquale parallelogrammum CDEF. Quare parallelogramma CDEF, CDGH,* [b] *æqualia erunt, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet AB, infra EF.*

[a] 35. primi.

CADAT secundo AB, producta supra EF. Cadet igitur FE, protracta infra AB, Quare, vt prius, erunt parallelogramma ABCD, CDHG, æqualia. totum & pars, quod est absurdum. Idem absurdum consequeretur, si CF, DE, producerentur vsque ad AB, protractam. Eademque demonstratio conueniet omnibus casibus, qui occurrere possunt, hoc est, siue punctum E, sit vltra B, sine non, vt perspicuum est. Non ergo cadet AB, supra EF; sed nec infra, vt demonstratum est; ergo producta in directum iacet ipsi EF; ac proinde parallelogramma ABCD, CDEF, in eisdem sunt parallelis.



THEOR. 26. PROPOS. 36.

xxxvj.

PARALLELOGRAMMA super æqualibus basibus, & in eisdem parallelis constituta, inter se sunt æqualia.

SINT duo parallelogramma ACEF, GHDB, super æquales

æquales baſes CE, HD, inter eaſdem parallelas AB, CD. Dico ea eſſe æqualia. Connectantur enim extrema rectarum CE, GB, ad eaſdem partes lineis rectis CG, EB. Quoniam igitur recta CE, æqualis ponitur rectæ HD, & eidem HD, æqualis eſt GB, *in* parallelográmo GHDB, oppoſita; erunt CE, GB, æquales inter ſe: Sunt autem & parallelæ, per hypotheſin. Quare & CG, EB, ipſas coniungentes, parallelæ erunt, & æquales, ideoque CEBG, parallelogrammum erit. Itaque cum parallelogramma ACEF, GCEB, ſint inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin CE, erit parallelogrammũ ACEF, parallelogrammo GCEB, æquale. Rurſus quia parallelogramma GCEB, GHDB, ſunt inter eaſdem parallelas, & ſuper eandem baſin GB, erit quoque parallelogrammum GHDB, eidem parallelogrammo GCEB, æquale. Quare & parallelogramma ACEF, GHDB, inter ſe æqualia erunt. Parallelogramma igitur ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, &c. Quod oſtendendum erat.

a 34. primi.
b 1. pron
c 33. primi.
d 35. primi.
e 35. primi.
f 1. pron

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis duplex eſt, ad hunc modum.

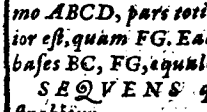
PARALLELOGRAMMA æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdem partes conſtituta, inter eaſdem ſunt parallelas: Et parallelogramma æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non eandem habuerint baſin, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta.

SINT primum duo parallelogramma æqualia ABCD, EFGH, ſuper baſes æquales BC, FG, & ad eaſdem partes conſtituta. Dico ea eſſe inter eaſdem parallelas, hoc eſt, AD, protractam coire in directum cum EH. Nam alias

cadet aut infra EH, aut supra. Quo posito sequitur, totum & partem esse aequalia, quemadmodum in conuersa praecedentis propositionis est dictum, & figura facile demonstrat. Intelligenda sunt autem bases aequales datae in eadem linea recta BG.

SINT secundo eadem parallelogramma aequalia inter easdem parallelas AH, BG. Dico bases BC, FG, esse aequales. Si enim altera, nempe BC, dicatur maior, [a] abscindatur

[a] 3. pri.
[b] 31. primi.
[c] 36. pri



BI, aequalis rectae FG, & [b] ducatur IK, parallela ipsi CD. Erit ergo parallelogrammum ABIK, [c] aequale parallelogrammo EFGH; & ideo parallelogrammo ABCD, pars toti, quod est absurdum. Non ergo BC, maior est, quam FG. Eadem ratione neque minor erit. Quare bases BC, FG, aequales sunt.

SEQVENS quoque theorema simile hinc demonstrabitur.

SI duo parallelogramma inter easdem parallelas habeant bases inaequales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra si duo parallelogramma sint inaequalia, inter easdem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in posteriori figura parallelogramma BD, FH, inter parallelas AH, BG, sitque basis BC, maior basi FG. Dico parallelogrammum BD, parallelogrammo FH, maius esse. [d] Auferatur enim recta BI, ipsi FG, aequalis, [e] ducaturque IK, ipsi AB, parallela. Erunt ergo [f] parallelogramma BK, FH, supra aequales bases BI, FG, aequalia. Cum igitur BD, [g] maius sit, quam BK, erit idem BD, maius, quam FH.

[d] 3. pri.
[e] 31. pri.
[f] 36. primi.
[g] 9. pron

SINT rursum parallelogramma BD, FH, inaequalia, & BD, maius. Dico basim BC, maiorem esse basi FG. Nam

si fo-

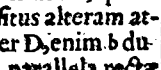
si foret æqualis, [a] *essent parallelogramma æqualia, quod est absurdum, cum BD, ponatur maius. Si autem esset minor, foret parallelogrammum FH, maius, quam BD, vt proxime ostendimus. quod multo magis est absurdum, cum BD, maius ponatur, quam FH. Basis ergo BC, cum neque æqualis sit ipsi FG, neque minor, erit maior, quàm FG, quod est propositum.*

a 36. pri

THEOR. 27. PROPOS. 37. xxxvij.

TRIANGVLA super eadem basi constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

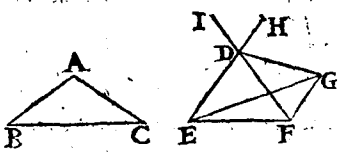
INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, sint constituta duo triangula ACD, BCD. (Dicitur autem triangulum inter duas esse parallelas constitutum, quando basis est pars vnius, & angulus oppositus alteram attingit.) Dico ea triangula esse æqualia. Per D, enim [b] ducatur DE, parallela rectæ AC, & DF, parallela rectæ BC. [c] Erunt igitur parallelogramma ACDE, BCDF, æqualia. Sunt enim super eandem basin CD, & inter eadem parallelas. Sed horum dimidia sunt triangula ACD, BCD; [d] quod AD, BD, diametri bifariam secent parallelogramma ACDE, BCDF. Igitur & triangula ACD, BCD, [e] æqualia erunt. Triangula igitur super eadem basi, &c. Quod erat demonstrandum.



b 31. pri
c 35. pri
d 34. pri
e 7. pron

SCHOLIVM.

CONVERSA huius propositionis demonstrabitur ab Euclide propos. 39. Porro ex hac propositione facile cum Proclo demonstrabimus, Triangula, quorum duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, & angulus vnius illis lateribus contentus maior angulo alterius, aliquãdo esse æqualia, & aliquãdo inæqualia: Id quod ad prop. 24. pollicitis sumus. Sint enim duo triã-



gula ABC, DEF, & latera AB, AC, aqualia lateribus DE, DF, & angulus A, maior angulo EDF, sintque primũ hi duo anguli duobus rectis aquales. Dico triangula esse aqualia. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I; fiatque angulus EDG, aqualis angulo A, versus angulum acutum DFE. Nam semper alter angulorum DEF, DFE, acutus erit b, cum ambo minores sint duobus rectis. c & recta DG, recta DF, seu AC; ducanturque recta EG, GF. cadetque semper EG, supra F, ob angulum acutum DFE, vt ad finem scholij propos. 24. ostendimus. Quoniam igitur duo anguli A, & EDF, ponuntur aquales duobus rectis, & angulus EDG, aqualis factus est angulo A, erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis aquales: Sunt autem & anguli EDG, GDH, d duobus rectis aquales. Igitur anguli EDG, EDF, angulis EDG, GDH, aquales erunt. Quare ablato communi angulo EDG, e remanebit angulo EDF, aqualis angulus GDH: Est autem eidem angulo EDF, f aqualis angulus HDI. Igitur & anguli GDH, HDI, aquales erunt; atque adeo angulus GDH, dimidium erit totius anguli GDI, Rursus quia latera DF, DG, sunt aqualia in triangulo DFG; g erunt anguli DFG, DGF, aquales; qui cum h aquales sint externo angulo GDI, erit vterliber eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, dimidium quoque esse eiusdem anguli GDI. i Quare anguli GDH, DGF, aquales erunt. Et quia sunt alterni inter EH, FG, l erunt EH, FG, parallelæ. Quamobrem m triangula DEG, DEF, aqualia erunt, cum habeant eandem basin DE, sintq. inter eosdem parallelas DE, FG. Quoniam vero triangulum DEG, n aquale est triãgulo ABC, propterea quod latera DE, DG, aqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, aqualis angulus EDG; erit & triangulũ ABC, triangulo DEF, aquale, q est propositum.

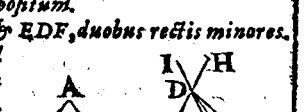
a 23. primi.
b 17. primi.
c 3. pri.
d 13. primi.
e 3. prom
f 15. primi.
g 5. pri.
h 32. pri
i 7. prom
l 27. pri
m 37. pr
n 4. pri.

SINT deinde anguli A, & EDF, duobus rectis maiores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum,

minus

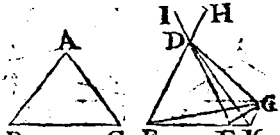
minus esse triangulo DEF. Producatur enim ED, ad H, & FD, ad I; [a] *fiatq. angulus EDG, equalis angulo A,* [b] *& recta DG, recta DF, seu AC, aqualis, ducanturque rectæ EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur maiores duobus rectis, erunt & anguli EDG, EDF, duobus rectis maiores: Sunt autē anguli EDG, GDH,* [c] *æquales duobus rectis. Igitur anguli EDG, EDF, maiores sunt angulis EDG, GDH. Quare ablato communi EDG, remanebit angulus EDF, maior angulo GDH. Quoniam vero anguli EDF, angulo HDI, æqualis est, erit quoque HDI, maior quam GDH; atque adeo GDH, minor, quàm dimidium anguli GDI. Rursus quia latera DG, DF, æqualia sunt:* [e] *erunt anguli DEG, DGF, æquales: qui cum sint* [f] *æquales externo GDI, erit uterque eorum, nempe DGF, dimidium anguli GDI: Ostensum est autem, angulum GDH, minorem esse dimidio eiusdem GDI. Quare DGF, maior erit, quam GDH. Abscindatur ex angulo DGF, angulus DGK,* [g] *æqualis angulo alterno GDH. Erit ergo GK,* [h] *parallela ipsi DE, secabitq. GK, rectam EF. Ducatur ex D, ad K, ubi GK, secat rectam EF, recta DK. Erit igitur triangulum DEG,* [i] *æquale triangulo DEK. Quoniam autem triangulum DEG,* [k] *æquale est triangulo ABC, propterea quod latera DE, DG, æqualia sunt lateribus AB, AC, & angulo A, angulus EDG, æqualis; erit & triangulum ABC, triangulo DEK, æquale. Cum igitur DEK,* [l] *minus sit triangulo DEF; erit quoque ABC, triangulum triangulo DEF, minus. Quod est propositum.*

SINT tertio anguli A, & EDF, duobus rectis minores. Dico triangulum ABC, quod maiorem habet angulum, maius esse triangulo DEF. Producatur ED, ad H, & FD, ad I; [m] *fiatq. angulus EDG, æqualis angulo A,* [n] *& recta DG, recta DF, seu AC; ducan-*



a 23. pri.
b 23. pri.
c 13. pri
d 15. pri
e 5. pri.
f 32. pri
mi.
g 23. pri
h 27. pri
i 37. pri.
k 4. pri.
l 9. pron
m 23. pri
n 3. pri.

turq. recta EG, GF. Quoniam igitur anguli A, & EDF, ponuntur minores duobus rectis, erunt quoque anguli EDG, EDF, duobus rectis minores. Sunt a autem anguli EDG, GDH, duobus rectis æquales. Igitur EDG, EDF, minores sunt, quam EDG, GDH; demptoq. communi EDG, remanebit EDF, minor, quam GDH. Est autem EDF, b æqualis ipsi HDI. Quare & HDI, minor erit, quam GDH; atque adeo GDH, maior est dimidio anguli GDI. Quoniam autem DGF, dimidium est eiusdem anguli GDI, vt iam supra ostensum fuit; erit GDH maior, quam DGF. Fiat igitur angulus DGK, c æqualis angulo GDH, ducta recta GK, quæ secabit rectam EF, protractam in K; & ducatur recta DK. Erit ergo, vt prius, GK, d parallela ipsi DE; e triangulumq. DEG, triangulo DEK, æquale: Est autem iterum DEG, f æquale ipsi ABC. Igitur & ABC, æquale est ipsi DEK. Quocirca cum DEK, g maius sit, quàm DEF; erit & ABC, maius, quam DEF. Quod demonstrandum erat.



a 13. pri.
b 15. pri.
c 23. pri
d 27. pri
e 37. pri
f 4. pri.
g 9. pron

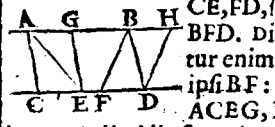
EX his perspicuum est, cur Euclides in propos. 24. solum collegerit inæqualitatem basium, non autem triangulorum, vt ibidem admonuimus.

xxxviij

THEOR. 28. PROPOS. 38.

TRIANGVLA super æqualibus basibus constituta, & in eisdem parallelis, inter se sunt æqualia.

INTER parallelas AB, CD, & super æquales bases CE, FD, sint constituta triangula ACE, BFD. Dico ipsa esse æqualia. h Ducatur enim EG, parallela ipsi AC, & DH, ipsi BF: Eruntque i parallelogramma ACEG, BFDH, æqualia. Cum igitur horum k dimidia sint triangula ACE, BFD; l erunt hæc



h 31. pri.
i 36. pri.
K 34. pri
l 7. pron

inter

inter se æqualia. Triangula ergo super æqualibus basibus, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSA huius ostendetur ab Euclide propos. 40.

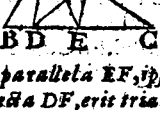
COLLIGITVR autem ex hac propositione, si à quovis angulo trianguli dati linea recta ducatur diuidens latus oppositum bifariam, triangulum quoque bifariam secari. Ducatur enim in triangulo ABC, ex angulo A, recta AD, diuidens bifariam latus BC, in D. Dico triangulum ABC, bifariam quoque secari. Si enim per A, ducatur parallela ipsi BC, erunt duo triangula ABD, ADC, inter easdem parallelas, & super æquales bases. a Quare æqualia erunt.

a 38. pri

EX PELETARIO.

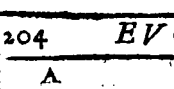
A puncto quouis dato in vno latere trianguli propositi lineam rectam ducere, quæ bifariam secet triangulum datum.

SIT triangulum ABC, & punctum datum D, in latere BC. Oportet igitur ex D, rectam lineam ducere, quæ bifariam diuidat triangulum. Quod si punctum D, diuidat latus BC, bifariam, recta DA, ducta ad A, diuidet triangulum bifariam, vt in hac scholio est ostensum: Si vero D, non diuidit BC, bifariam, b secetur BC, bifariam in E. Deinde ex D, ad angulum oppositum A, ducatur recta DA, & per E, c parallela EF, ipsi DA, secans AC, in F. Si igitur ducatur recta DF, erit triangulum diuisum bifariam à linea DF. Nam ductis rectis EA, d erunt triangula EFA, EFD, æqualia, cum sint super eandem basin EF, & inter easdem parallelas EF, AD. Addito igitur communi CFE, e erunt tota triangula AEC, CDF, æqualia: Est autem AEC, dimidium totius ABC, vt iam fuit ostensum. Igitur & CDF, dimidium est eiusdem trianguli ABC. quod erat probandum.



b 10. primi.
c 31. pri
d 38. pri
e 2. prom

QVOD



QVOD si punctum D, fuerit in altera medietate EC, eodem modo problema conficiemus: sed tunc triangulum abscindetur ad partes B, trapezium vero ad partes C, vt figura præsens satis indicat. Demonstratio autem eadem est, si in ea mutetur litera B, in C, & C, in B. Hoc tamen problema multo nos vniuersalius proponemus ad finem sexti libri.

xxxix. **THEOR. 29. PROPOS. 39.**

TRIANGVLA æqualia super eadem basi, & ad easdem partes constituta; & in eisdem sunt parallelis.

SINT duo triangula æqualia, ABC, DBC, super eandem basin BC, & ad easdem partes. Dico ipsa esse inter easdem parallelas constituta; hoc est, rectam ductam A D, parallelam esse ipsi BC. Si enim non est, [a] ducatur ex A, parallela ipsi BC, quæ vel cadet supra A D, vel infra. Cadat primum supra, qualis est AE, coeatq. cum BD, protracta in E, & ducatur recta EC. Quoniam igitur parallelæ sunt AE, BC, [b] erit triangulo ABC, triangulum EBC, æquale: Est autem per hypothesin, triangulum quoque DBC, æquale eidem triangulo ABC. Igitur [c] erunt triangula DBC, EBC, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra A D, qualis est A F; ducta recta FC, erunt eadē ratiocinatione triangula BFC, BDC, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Erit igitur AD, parallela ipsi BC. Quare triangula æqualia super eadem basi, &c. Quod ostendendum erat.

a 31. pri

b 37. pri

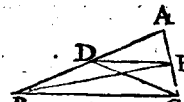
c 1. pron.

SCHOLIVM.

EX. his infert Campanus sequens hoc theorema.

LINEA recta secans duo trianguli latera bifariam, erit reliquo lateri parallela.

SECET linea DE, latera AB, AC, trianguli ABC, bifariam in D, & E. Dico DE, parallelam esse lateri BC. Cum enim triangula ADE, BDE, sint super aequales bases AD, DB, & inter easdem parallelas; (si per E, duceretur parallela ipsi AB) [a] erit triangulum BDE, triangulo ADE, aequale: Eadem ratione erit triangulum CED, eidem triangulo ADE, aequale. Quod etiam constat ex scholio praecedentis propos. Recta enim ED, secabit triangulum AEB, bifariam, & recta eadem DE, triangulum ADC, bifariam etiam, quod bases AB, AC, secta sint bifariam à recta DE, ex hypothesi. Igitur triangula DBE, ECD, [b] aequalia erunt: Habent autem eandem basin DE, & sunt ad easdem partes constituta. Quare [c] inter easdem erunt parallelas, & idcirco DE, BC, parallela erunt. Quod est propositum.



a 38. pri

b 1. pron

c 39. pri

ID autem, quod ad finem secundi theorematis in scholio propos. 34. polliciti sumus, facile ex hac propos. demonstrabimus. Videlicet.

OMNE quadrilaterum, quod ab vtraque diametro bifariam diuiditur, parallelogrammum est.

NAM quadrilaterum ABCD, diuidatur bifariam ab vtraque diametro AC, BD. Dico ipsum esse parallelogrammum. Cum enim triangula ADC, BDC, dimidia sint eiusdem quadrilateri ABCD, [d] ipsa inter se aequalia erunt. Quare cum eandem habeant basin DC, ad easdemq. partes sint, [c] ipsa in eisdem parallelis erunt; Atque idcirco rectae AB, DC, parallelae sunt. Non aliter ostendemus, parallelas esse AD, BC. Parallelogrammum igitur est ABCD. Quod est propositum.

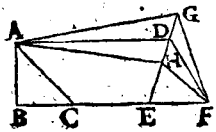
d 7. prō.

c 39. pri

xl.

THEOR. 30. PROPOS. 40.

TRIANGVLA æqualia super æqualibus basibus, & ad easdem partes constituta, & in eisdem sunt parallelis.



SINT duo triangula æqualia ABC, DEF, super bases æquales BC, EF, (quæ in eadem recta linea collocentur,) & ad easdem partes constituta. Dico ea esse in eisdem parallelis, hoc est, rectam ex A, ad D, ductam parallelam esse rectæ BF. Si enim non est, cadet parallela ipsi BF, per A, ducta vel supra AD, vel infra. Cadat primum supra, coeatq. cum ED, producta in G, & ducatur recta GF. Quoniam igitur parallelæ sunt AG, BF, [a] erit triangulum EFG, triangulo ABC, æquale: Ponitur autem & triangulum DEF, eidem triangulo ABC, æquale. Igitur [b] triangula DEF, GEF, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Quod si parallela ducta per A, cadat infra AD, qualis est AH; ducta recta HF, erunt eadem argumentatione triangula HEF, DEF, æqualia, pars & totum, quod est absurdum. Est igitur AD, parallela ipsi BF. Quare triangula æqualia super æqualibus basibus, &c. Quod erat demonstrandum.

a 38. pri

b 1. pron

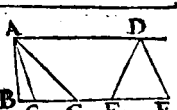
SCHOLIVM.

HAEC propositio conuertit uno modo propos. 38. Alio autem modo conuerti potest, quemadmodum propos. 36. conuertimus in eius scholio, nimirum.

TRIANGVLA æqualia inter easdem parallelas, si non eandem habuerint basim, super æquales bases erunt cõstituta.

SINT triangula æqualia ABC, DEF, inter parallelas AD, BF, & super bases BC, EF, quas dico esse æquales.

Si enim non sunt æquales, sit BC, maior. [a] *Abscissa ergo recta CG, æquali ipsi EF, & ducta recta GA;* [b] *erit triangulum AGC, triangulo DEF, æquale: Ponitur autem & triangulum ABC, eidem triangulo DEF, æquale: Igitur triangula AGC, ABC,* [c] *æqualia erunt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt bases BC, EF, sed æquales. Quod est propositum.*



[a] 3. primi.
[b] 38. primi.
[c] 1. pron.

SEQVENS etiam theorema facili negotio demonstrabitur.

SI duo triangula inter eadem parallelas habeant bases inæquales, illud, cuius basis maior est, maius erit. Et contra, si duo triangula sint inæqualia inter eadem parallelas, basis maioris maior erit.

SINT enim in proxima figura inter parallelas AD, BF, triangula ABC, DEF, sitq. basis BC, basi EF, maior. Dico triangulum ABC, maius esse triangulo DEF. Ablata enim recta CG, [d] *æquali ipsi EF, ductaq. recta AG;* [e] *erunt triangula AGC, DEF, supra æquales bases GC, EF, æqualia. Cum ergo* [f] *triangulum ABC, triangulo AGC, maius sit; erit idem triangulum ABC, maius quam DEF.*

[d] 3. primi.
[e] 38. primi.
[f] 9. pron

SINT rursus triangula ABC, DEF, inæqualia, & ABC, maius. Dico basin BC, basi EF, maiorem esse. Si enim dicatur æqualis, [g] *erit triangulum ABC, triangulo DEF, æquale. quod est absurdum, cum maius ponatur. Si vero credatur esse minor, erit triangulum DEF, maius triangulo ABC, vt proxime ostendimus, quòd multo magis est absurdum, cum ABC, ponatur maius, quam DEF. Recta igitur BC, maior erit, quam EF, cum neque æqualis sit ostensa, neque minor. Quod est propositum.*

[g] 38. pri

QVÆ porro hactenus de parallelogrammis, triangulisq. inter eadem parallelas constitutis demonstrata sunt,

facile

facile quoque demonſtrari poſſunt de trapezijs inter eaſdem parallelas deſcriptis, eodem ferme ordine, hoc modo.

I.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes inter ſe æquales ſint, ſunt inter ſe æqualia: Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, habent baſes oppoſitas æquales.

DICVNTVR trapezia in eiſdem eſſe parallelis, quando latera duo oppoſita parallela ſunt, partesq. ſunt earundem parallelarum.

INTER parallelas igitur *AB, CD*, ſuper eadem baſi *CD*, conſtituta ſint duo trapezia, *ACDE, FCDB*, quorum baſes oppoſita *AE, FB*, æquales ſint. Dico ipſa inter ſe eſſe æqualia. Ductis enim rectis *EC, FD*, [a] erunt tam triangula *ECD, FCD*, ſuper eadem baſi *CD*, & in eiſdem parallelis, inter ſe æqualia, [b] quam triangula *ACE, FDB*, ſuper æqualibus baſibus *AE, FB*, & in eiſdem parallelis. Si igitur æqualibus *ECD, FCD*, addantur æqualia *ACE, FDB*, [c] erunt tota trapezia *ACDE, FCDB*, inter ſe æqualia.

[a] 37. primi.

[b] 38. primi.

[c] 2. prom

SINT iam trapezia ACDE, FCDB, æqualia. Dico baſes oppoſitas AE, FB, æquales quoque eſſe. Erunt enim rurſus [d] *triangula ECD, FCD, æqualia. Si igitur ex trapezijs æqualibus auferantur,* [e] *æqualia erunt reliqua triangula ACE, FDB. Quare, vt in hoc ſcholio oſtendimus, baſes AE, FB, æquales erunt.*

[d] 37. primi

[e] 3. prom

II.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusq. eſt

illud

llud, cuius basis maior est; Et trapezia inæqualia in eisdem parallelis, & super eadem basi, habent bases oppositas inæquales, maiorque est illa, cuius trapezium maius est.

VT in eadem figura, si basis AE, dicatur esse maior base FB; Dico trapezium ACDE, maius esse trapezio FCDB.

a Erunt enim rursus triangula ECD, FGD, æqualia: At triangulum ACE, triangulo FDB, maius, vt in hoc scholio demonstrauimus. b Totum ergo trapezium ACDE, toto trapezio FCDB, maius erit.

a 37. primi.
b 4. pron.

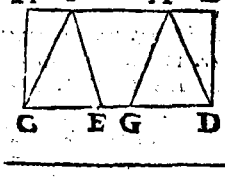
RVRSVS si trapezium ACDE, dicatur esse maius trapezio FCDB; Dico basim AE, basi FB, maiorem esse.

c Erunt enim rursus triangula ECD, FCD, æqualia. Quare reliquum triangulum ACE, reliquo triangulo FDB, d maius erit: ac proinde, vt in hoc scholio ostensum est, basis AE, maior erit base FB. Quod ostendendum erat.

c 37. primi.
d 5. pron.

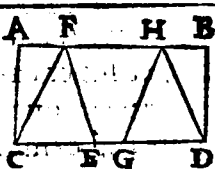
III.

TRAPEZIA in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, quorum oppositæ bases sint æquales, æqualia sunt: Et trapezia æqualia in eisdem parallelis, & super æqualibus basibus, habent bases oppositas æquales.



INTER parallelas AB, CD, super æquales bases CE, GD, constituta sint duo trapezia ACEF, HGDB, quorum bases oppositæ AF, HB, æquales quoque sint. Dico ipsa trapezia æqualia esse. Ductis namque FC, HD, e erunt tam triangu-

e 38. pri



la FCE, HGD, super æquales baſes CE, GD, quam ACF, BDH, super baſes æquales AF, BH, inter ſe æqualia. a Tota ergo trapezia æqualia erunt.

a 2. prop

SINT iam trapezia ACEF, HGDB, æqualia ſuper baſes æquales CE, GD. Dico baſes oppoſitas AF, BH, æquales quoque eſſe. b Erunt namque rurſus triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CF, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs æqualibus, reliqua triangula ACF, BDH, æqualia erunt; ac proinde, vt paulo ante in hoc ſcholio oſtendimus, baſes AF, BH, æquales erunt.

b 3. primi.

c 3. prop

IIII.

TRAPEZIA in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorum oppoſitæ baſes ſint inæquales, inæqualia ſunt, maiusq. eſt illud, cuius baſis maior eſt: Et trapezia inæqualia in eiſdē parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habēt oppoſitas baſes inæquales, maiorq. eſt illa, cuius trapezium maius eſt.

VT in eadem figura, ſi baſis AF, dicatur eſſe maior baſe HB, erit trapezium ACEF, trapezio HGDB, maius. d Erūt enim rurſum triangula FGE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, æqualia. At triangulum ACF, maius triangulo BDH, vt ſupra oſtenſum eſt, quod baſis AF, maior ponatur baſe BH, c Totum ergo trapezium ACEF, toto trapezio HGDB, maius erit.

d 38. primi.

c 4. prop

RVRSVS ſi trapezium ACEF, maius ponatur trapezio HGDB, erit baſis AF, baſe BH, maior. f Erunt enim rurſus triangula FCE, HGD, ſuper æquales baſes CE, GD, æqualia: quibus ablatis ex trapezijs inæqualibus, reliquum triangulum ACF, reliquo triangulo BDH, g maius

f 38. prim

g 5. prop

erit;

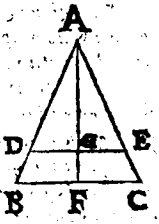
erit; ac proinde, vt in hoc scholio ostensum fuit, basis AF, basi BH, maior erit. Quod erat ostendendum.

PORRO non videtur hic omittendum theorema sequens, per quod facili negotio lineam rectã quamcunque in quotuis partes aequales diuidamus: quod nos in scholio propos. 10. huius lib. facturos hoc loco recepimus. Quamuis enim idem demonstrari possit, & quidem facilius, per proportiones linearum, vt lib. 6. ostendemus, iucundum tamen est intelligere, nullo labore idem absolui posse per propositiones hactenus demonstratas, sine proportionum adiumento. Theorema ergo est huiusmodi.

SI in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur: Recta ex angulo opposito ducta, diuidensq. alterutram parallelarũ bifariam, diuidit quoque alteram bifariam.

IN triangulo ABC, aquidistet DE, ipsi BC, & recta AF secet alterutram BC, DE, bifariam in F, vel G. Dico alterum quoque bifariam secari. Sint enim primum anguli ad F, recti. Quo posito, [a] & anguli ad G, recti erunt. Si igitur BC, diuiditur bifariam, diuidetur bifariam quoque angulus A, per ea, quae in scholio propos. 26. huius lib. demonstrauimus; ac proinde recta AG, ad basim DE, trianguli ADE, perpendicularis, diuidensq. angulum A, bifariam, diuidet bifariam quoque basim DE, vt ibidem ostendimus, quod est propositum.

a 29. pri

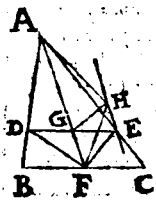


SI vero DE, ponatur diuidi bifariam, diuidetur, per idem scholium propos. 26. huius lib. angulus quoque A, bifariã; ac proinde recta AF, ad basim BC, perpendicularis, diuidensq. angulũ A, bifariã, basim quoque BC, bifariam secabit, quod est propositum.

SINT deinde anguli ad F, non recti, sed AFC, obtusus, & AFB, acutus. Quo posito, erit & AGE, obtusus, & AGD, acutus, [b] cum hi illis sint aequales, externi internis. Si igi-

b 29. pri

sur BC, diuiditur bifariam, [a] constituatur acuto angulo AGD, æqualis angulus AGH, [b] & recta GH, rectæ GD, æqualis, ducanturq. rectæ AH, HF, FD, FE. Quia igitur tam triangula tota ABF, ACF, ex scholio propos. 38. huius libri æqualia sunt, [c] quam triangula ablata DBF, ECF, ob æquales bases BF, CF; [d] erunt quoque reliqua triangula ADF, AEF, æqualia. Rursus quoniam duo latera AG, GD, trianguli AGD, duobus lateribus AG, GH, æqualia sunt, angulosq. comprehendunt æquales AGD, AGH, ex constructione, [e] erunt quoque triangula AGD, AGH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera DG, GF, duobus lateribus HG, GF, æqualia sunt, ex constructione, angulosq. continent æquales DGF, HGF, (cum enim per constructionem anguli AGD, AGH, æquales sint, erunt quoque reliqui duorum rectorum DGF, HGF, æquales.) [f] sunt enim tam AGD, DGF, quam AGH, HGF, duobus rectis æquales.) [g] erunt quoque triangula DGF, HGF, æqualia: [h] ac proinde & tota triangula ADF, AHF, æqualia erunt. Est autem eidem triangulo ADF, æquale ostensum triangulum AEF. Igitur & inter se [i] æqualia erunt triangula AHF, AEF: [k] ac propterea inter duas easdem erunt parallelas, hoc est, ducta recta EH, erit basi AF, communi parallela. Igitur [l] & triangula HGF, EGF, inter easdem parallelas, & super eadem basi FG, æqualia inter se erunt. Est autem triangulum HGF, triangulo DGF, ostensum æquale. Igitur triangula quoque DGF, EGF, æqualia inter se erunt; propterea q. basis quoque DG, basi GE, æqualis erit, vt in hoc scholio demonstratum est, quod est propositum.

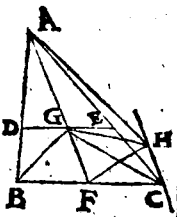


SI vero DE, ponatur bifariam diuidi, [m] constituatur angulo acuto AFB, æqualis angulus AFH; [n] & recta FH, rectæ FB, ducanturq. rectæ AH, HG, GB, GC. Quoniam igitur tam triangula AGD, AGE, ex scholio propos. 38. huius lib. æqualia sunt, [o] quam triangula DGB, EGC, ob æquales bases DG, EG; [p] erunt tota etiam triangula AGB, AGC, æqualia. Rursus quia duo latera AF, FB, duobus lateribus

AF,

a 23. primi.
b 3. pri.
c 38. primi.
d 3. pron
e 4. pri.
f 13. primi.
g 4. pri.
h 2. pron
i 1. pron
k 39. primi.
l 37. pri.
m 23. primi.
n 3. pri.
o 38. pri
p 2. pron

AF, FH, æqualia sunt, continentq. angulos æquales AFB, AFH, ex constructione; [a] *erunt triangula quoque AFB, AFH, æqualia. Pari ratione, quia duo latera GF, FB, duobus lateribus GF, FH, æqualia sunt, æqualesq. continent angulos GFB, GFH, ex constructione;* [b] *erunt quoque æqualia triangula GFB, GFH: quibus demptis ex æqualibus AFB, AFH,* [c] *æqualia erunt reliqua triangula AGB, AGH: Est autem eidem triangulo AGB, ostensum æquale triangulum AGC.* [d] *Igitur & triangula AGC, AGH, inter se erunt æqualia.* [e] *Quare & inter easdem parallelas erunt, hoc est, ducta recta CH, ipsi AF, parallela erit; ac proinde* [f] *æqualia inter se erunt triangula GHF, GFC. Fuit autem ostensum triangulum GHF, triangulo GBF, æquale.* [g] *Igitur & æqualia inter se erunt triangula GFC, GFB; ideoq. vt in hoc scholio demonstrauimus, & bases FC, FB, æquales erunt. Quod est propositum.*



a 4. primi.
b 4. pri.
c 3. pron
d 1. pron
e 39. primi.
f 37. primi.
g 1. pron

ALITER. Diuisa sit primum BC, bifariam in F. Dico & DE, bifariam esse diuisam in G. Si enim DG, GE, non sunt æquales, sit maior DG, ducanturq. recta FD, FE. Erit igitur per ea, quæ in hoc scholio demonstrauimus, tam triangulum ADG, triangulo AEG, quàm triangulum FDG, triangulo FEG, maius. [h] *Totum ergo triangulum ADF, toto triangulo AEF, maius erit: quibus si addantur triangula DBF, ECF,* [i] *quæ propter bases æquales BF, CF, æqualia sunt,* [k] *fiet totum triangulum ABF, toto triangulo ACF, maius; ac proinde, vt in hoc scholio monstrauimus, basis BF, basi FC, maior erit: Sed & æqualis ponitur. Quod est absurdum.* [l] *Bifariam ergo secta est DE, in G. Quod est propositum.*

h 4. pron
i 38. pri
k 4. prō.

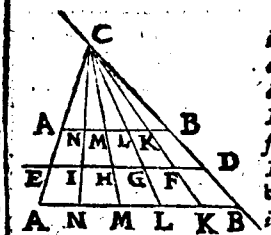
SIT iam DE, secta bifariam in G. Dico & BC, diuidi bifariam in F. Sin minus, [l] *diuidatur BC, in H, bifariam, ducaturq. recta AH, secans DE, in I. Quoniam igitur*

l 10. pri.

AH, secat BÇ, bifariam in H, secabit eadem ipsam DE, quoque bifariam in I, vt proxime ostendimus. Quod est absurdum, cum bifariam secta esse ponatur in G. Sequeretur enim partem toto esse maiorem. Nam si DI, aqualis est ipsi IE, tum IE, maior sit, quam GE, erit quoque DI, maior, quam GE, hoc est, quam DG, qua ipsi GE, aqualis ponitur. Diuiditur ergo BC, bifariam in F. Quod erat demonstrandum.

HOC ostenso theoremate, ad diuisionem linea recta in quotuis aquales partes iam veniamus.

DATAM rectam lineam finitam in quotlibet partes æquales secare.



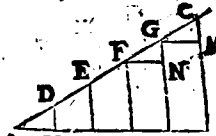
SIT data recta AB, secanda in quinque partes aquales. Per extremum punctum B, ducta recta BC, vtcunque, & assumpto in BC, puncto quocunque D, siue infra B, siue supra, [a] *ducatur per D, ipsi AB, parallela DE, in qua* [b] *abscindantur quinque partes inter se equales DF, FG, GH, HI, IE, hac tamen lege, vt existente puncto D, infra B, recta DE, ex quinque partibus aqualibus composita maior sit, quam data AB, minor vero, existente puncto D, supra B, vt nimirum recta AC, per alterum extremum A, & per E, ducta cum BD, concurrere possit in puncto aliquo, vt in C. A quo si per puncta F, G, H, I, recta ducantur, secta erit data recta AB, in quinque partes aquales BK, KL, LM, MN, NA. Quoniam enim in triangulo CBL, recta DG, ipsi BL, est parallela, vel in triangulo CDG, recta BL, ipsi DG: sectaque est DG, bifariam in F, secta quoque erit bifariam BL, in K, vt in proximo theoremate demonstrauimus. Eademq. ratione recta KM, in L, secta erit bifariam, quemadmodum & FH, in G, bifariam secta est. Sunt ergo tres partes BK, KL, LM, inter se aquales, sicuti tres DF, FG, GH, atque ita de cateris.*

[a] 31. pri

[b] 3. pri,

ALI-

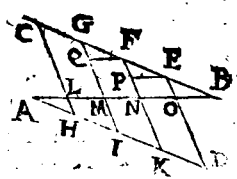
ALITER. Ad extremum A, linea AB, secanda in quinque partes aequales, constituatur angulus rectilineus quicunque A, & ex recta AC, [a] abscindantur quinque partes quantacunque inter se aequales AD, DE, EF, FG, GC: ductaq; recta CB, [b] agantur ei parallelae GL, FK, EI, DH. Dico rectam AB, sectam esse in quinque partes aequales. [c] *Ductis enim per G, F, ipsi AB, parallelis GM, FN,* [d] *quae inter se etiam parallelae erunt,* [e] *& ipsis BL, LK, aequales in parallelogrammis GB, FL;* [f] *erunt tam anguli FGN, GCM, externus & internus in parallelis GL, CB, quam anguli CGM, GFN, externus & internus in parallelis GM, FN, aequales inter se. Quoniam igitur duo anguli C, G, trianguli CGM, duobus angulis G, F, trianguli GFN, aequales sunt, uterque utrique, lateraq; illis adiacentia CG, GF, aequalia per constructionem,* [g] *erunt quoque latera GM, FN, aequalia: quae cum ostensa sint aequalia rectis BL, LK, erunt quoque BL, LK, inter se aequales. Eademq; ratione ostendemus KL, KI, aequales esse, necnon IK, HI, & HI, AH; ac propterea recta AB, in quinque aequales partes diuisa erit. Quod est propositum.*



a 3. pri.
b 31. pri.
c 31. pri
d 30. pri
e 34. pri
f 29. pri
g 26. pri

ALITER. Ad extrema puncta A, B, linea AB, in quinque partes aequales diuidenda constituantur duo aequales anguli in diuersas partes ABC, BAD. Et in utraque linea BC, AD, [h] *qua ob alternos angulos aequales A, B, parallela inter se sunt,* [i] *sumantur quatuor partes inter se omnino aequales, tot nimirum, una minus, in quot partes linea secanda est, cuiusmodi sunt BE, EF, FG, GC; AH, HI, IK, KD; iungantur; recta CH, GI, FK, ED,* [l] *qua inter se erunt parallelae, cum coniungant extrema parallelarum aequalium. Dico rectam AB, in quinque partes aequales sectam esse.* [m] *Ductis enim per E, F, ipsi AB, parallelis EP, FQ,* [n] *qua inter se quoque parallelae erunt,* [o] *& ipsis NO, MN,*

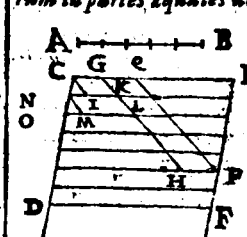
h 27. pri
i 3. pri.
l 31. pri
m 31. pri
n 30. pri
o 34. pri

les in parallelogrammis EN, FM: a 29.pri


erunt tam anguli EFP, FGQ, externus, & internus in parallelis FK, GI, quàm anguli GFQ, FEP, externus, & internus in parallelis QF, PE, inter se æquales. Itaque quoniam duo anguli G, F, trianguli FGQ, duobus angulis F, E, trianguli EFP, æquales sunt, vterque vtrique, lateraque illis adiacentia FG, EF, æqualia per constructionem, b erunt quoque latera FQ, EP, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis MN, NO, erunt etiam MN, NO, inter se æquales. Eademq. ratione æquales inter se erunt OB, NO, MN, LM, AL, propterea & recta AB, in quinque æquales partes diuisa erit. Quod est propositum. b 26.pri

PRAXIS hac breuius ita demonstrabitur, c Quoniam recta ED, FK, GI, GH, parallelæ sunt, quòd coniungant extrema æqualium & parallelarum; secabitur recta BL, in quatuor partes æquales, necnon & recta AO, vt in præcedenti praxi ostendimus. Omnes ergo quinque partes AL, LM, MN, NO, OB, æquales erunt. c 33.pri

ALITER. Paretur instrumentum diuisionibus linearum in partes æquales accommodatum, hoc modo. Ductis duabus parallelis satis magno spatio inter se distantibus CD, EF, d sumantur in vtraque parte omnino inter se æquales quotcunque, tot videlicet in vna, quot in altera, & modica quantitatis, punctaq; respondentia lineis rectis iungantur, e quæ parallelæ inter se erunt, cum coniungant extrema parallelarũ æqualium. Si igitur beneficio circini recta AB, in quinque diuidenda partes æquales transferatur ex quouis puncto G, vsq; ad punctũ H, ita vt quinq; spatia parallelarũ inter G, & H, includantur, diuisa erit ducta GH, ab illis parallelis d 3. pri. 33.pri



in

in quinque partes æquales, quibus partibus si in data AB, [a] *sumantur partes æquales, diuisa quoque erit AB, in quinque æquales partes. Sectam autem esse GH, in quinque partes æquales, ita demonstrabitur. Ductis ex C, N, ipsi GH, parallelis CI, NM,* [b] *quæ inter se quoque parallelæ erunt;* [c] *& ipsis GK, KL, æquales in parallelogrammis GI, KM; erunt* [d] *tam anguli CNI, NOM, externus & internus in parallelis NK, OL, quam anguli ONM, NCI, externus & internus in parallelis NM, CI, æquales inter se. Igitur cum duo anguli N, C, trianguli CNI, duobus angulis O, N, trianguli NOM, æquales sint, vterque vtrique, lateraque illis adiacentia CN, NO, æqualia, ex constructione,* [e] *erunt quoque latera CI, NM, inter se æqualia: quæ cum ostensa sint æqualia rectis GK, KL, erunt quoque GK, KL, inter se æquales. Eademque ratione omnes partes rectæ GH, ostendentur æquales: ac proinde recta GH, in quinque partes æquales erit diuisa.*

PRAXIS etiã hac breuius demonstrabitur, si hoc modo fiat. Sumptis quinque interuallis rectæ EF, ab E, vsq. ad P, transferatur recta AB, beneficio circini ex P, ad aliquod punctum rectæ CE, vt ad Q. Erit enim hac ratione ducta recta PQ, diuisa a parallelis in quinque partes æquales, vt in secunda praxi demonstratum est. Quare si partes rectæ PQ, quæ datæ rectæ AB, æqualis est, ex constructione, transferantur in datam rectam AB, diuisa quoque erit AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum.

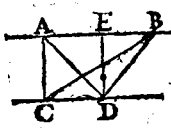
a 3. pri.
b 30. pri
c 34. pri
d 29. pri
e 26. pri

THEOR. 31. PROPOS. 41. xlj.

SI parallelogrammum cum triangulo eandem basin habuerit, in eisdemque fuerit parallelis, duplum erit parallelogrammum ipsius trianguli.

INTER parallelas AB, CD, & super basin CD, constituantur parallelogrammum ACDE, & triangulum

BCD.

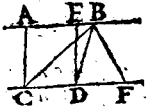


BCD. Dico parallelogrammum esse duplum trianguli BCD. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, erunt [a] triangula ACD, BCD æqualia; At parallelogrammum ACDE, duplũ est trianguli ACD; [b] quod triangula ACD, ADE, æqualia quoque inter se sint. Igitur & trianguli BCD, [c] duplum erit idem parallelogrammum ACDE. Quamobrem, si parallelogrammum cum triangulo, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 37. pri
[b] 34. pri
[c] 6. pron

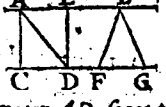
SCHOLIVM.

HINC sequitur, si triangulum duplam habuerit basin, fueritque in eisdem parallelis cum parallelogrammo, triangulum parallelogrammo æquale fore. Nam si basis CD, producatur ad F, vt sit DF, æqualis ipsi CD, ducaturque recta FB, erit triangulum BCF, duplum trianguli BCD, [d] quod triangula BCD, BDF, æqualia sint: Est autem & parallelogrammum ACDE, [e] duplum eiusdem trianguli BCD. [f] Igitur æqualia erunt triangulũ BCF, & parallelogrammum ACDE.



[d] 38. pri
[e] 41. pri
[f] 6. pron

IDEM hoc theorema Euclidis demonstrari potest eodem modo, si parallelogrammum, & triangulum æquales habuerint bases, & non eandem, fuerintque in eisdem parallelis, vt cernis in parallelogrammo ACDE, & triangulo BFG, quorum bases CD, FG, æquales sunt. Ducta enim diametro AD, in parallelogrammo, [g] erunt triangula ACD, BFG, æqualia. Cum igitur parallelogrammũ ACDE, duplum sit trianguli ACD: [h] quod diameter AD, secet parallelogrammum ACDE, bifariam: [i] erit quoque idem trianguli BFG, duplum. Eadem ratione, si basis FG, duplicaretur, & recta ad B, duceretur, fieret triangulum parallelogrammo æquale, quoniam triangulũ hoc esset duplum, etiam trianguli BFG, &c.

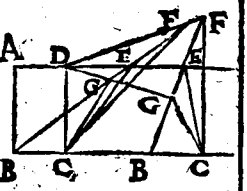


[g] 38. pri
[h] 34. pri
[i] 6. pron

CONVERSVM huius theorematis duplex est, hoc modo.

SI trianguli parallelogrammum duplum fuerit, eandemque habuerint basin, vel æquales, & ad easdem partes constituta; Erunt ipsa in eisdem parallelis. Et si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, in eisdemque parallelis: erunt bases æquales, si non sit eadem.

SIT parallelogrammum ABCD, duplum trianguli BFC, sive eandem habeant basin, sive æquales. Dico parallelam AD, productam cadere in E, punctum. Nam alias cadet aut supra E, aut infra. Vnde, vt in 39. vel 40. propos. ostendetur pars aqualis toti, vt & figura indicat. a *Nã erit quoque parallelogrammum ABCD, triangulo BFC, vel BGC, duplum.* b *Quare triangula EBC, FBC, vel triangula EBC, GBC, æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum.*



a 41. pri

b 6. prom

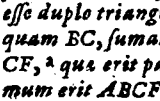
SIT deinde parallelogrammum ABCD, duplum trianguli EFG, in eisdemque parallelis. Dico bases BC, FG, esse æquales. Nam si altera, nempe BC, sit maior, abscissa æquali CH, & c ducta HI, parallela ipsi AB, demonstrabimus parallelogramma ABCD, IHCD, esse æqualia, totum & partem; (quia vtrumque duplum est trianguli EFG; illud quidem per hypothesin, hoc vero per 41. propos.) Quod est absurdum. Idem ostendemus, si basis FG, maior dicatur. Si enim abscindatur ipsi BC, æqualis FH, ducaturque recta HE, erunt triangula EFH, EFG, æqualia, pars & totum; (Nam vtrumque dimidium est parallelogrammi ABCD; Illud quidem per propos. 41. hoc vero per hypothesin.) Quod est absurdum.

c 31 pri.

EX PROCLO.

SI triangulum, & trapezium super eadem basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij sit basis trianguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli, erit trapezium maius duplo trianguli.

INTER. lineas parallelas AE, BC, sint constituta trapezium ABCD, & triangulum EBC, super basim BC, eandem, quasit tamen maior, quam altera linea AD, parallela in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, minus esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, minor ponatur quam BC, sumatur AF, aqualis ipsi BC, & ducatur recta a 33.pri *CF,* a *qua erit parallela ipsi AB; atque adeo parallelogrammum erit ABCF,* b *quod duplum est trianguli EBC. Quare trapezium ABCD, cum sit pars parallelogrammi, minus erit dupla eiusdem trianguli EBC. quod est propositum.* b 41.pri

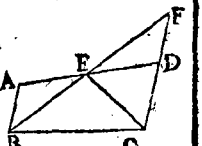


SINT rursus trapezium, & triangulum, vt prius, sed basis BC, sit minor, quam reliqua linea parallela AD, in trapezio dato. Dico trapezium ABCD, maius esse duplo trianguli EBC. Cum enim AD, maior sit, quam BC, abscindatur DF, aqualis ipsi BC, & ducatur recta BF, c *qua erit parallela ipsi CD; atque adeo parallelogrammum erit BCDF:* d *quod duplum est trianguli EBC. Quare totum trapezium ABCD, quod superat parallelogrammum BCDF, maius erit duplo eiusdem trianguli EBC. quod est propositum.* c 33.pri d 41.pri

IDEM concludetur, si trapezium, & triangulum constituta fuerint super aquales bases, ita tamen vt nunc quidem basis trapezij sit maior latere oppositio parallelo, nunc vero minor.

TRA-

TRAPEZIVM habens duo latera opposita parallela, duplum est trianguli, quod basin habet vnum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio puncto lateris oppositi.



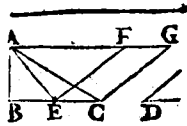
SIT trapezium ABCD, cuius duo latera opposita AB, DC, sint parallela, & super basin BC, constituatur triangulum EBC, verticem E, habens in medio puncto E, lateris AD. Dico trapezium ABCD, duplum esse trianguli EBC. Producatur enim vnum latus trianguli ad verticem, nempe BE, donec coeat cum CD, protracto in F. Et quia parallela sunt AB, CF, [a] *erunt anguli alterni BAE, FDE, aequales.* [b] *Sunt autem & anguli AEB, DEF, aequales, quippe qui ad verticem E; & latus AE, trianguli ABE, lateri DE, trianguli DEF, aequale, per hypothesin.* [c] *Igitur & reliqua latera AB, BE, reliquis lateribus DF, FE, aequalia erunt, vtrumque vtrique, & reliqui anguli ABE, DFE, aequales: atque ideirco triangula ABE, DFE, ex coroll. propos. 26. huius lib. aequalia erunt. Quare addito communi triangulo CDE,* [d] *erunt triangulo CEF, aequalia triangula simul ABE, CDE.* [e] *Est autem & triangulum BCE, eidem triangulo CEF, aequale, quod bases BE, EF, ostensa sint aequales, & ipsa triangula inter easdem sint parallelas, si per C, ducatur parallela ipsi BF.* [f] *Igitur triangulum CBE, aequale erit triangulis ABE, CDE; & propterea CBE, triangulum dimidium erit trapezij ABCD, quod est propositum.*

[a] 29. pri
[b] 15. pri
[c] 26. pri
[d] 1. pron
[e] 38. pri.
[f] 1. pron

PROBL. 11. PROPOS. 42. xlij.

DATO triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

DA-



DATVM triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo ABC, habens angulum æqualem angulo D. Diuidatur latus vnum trianguli, nempe B C, [a] bifariam in E, & [b] fiat angulus C E F, æqualis angulo D, prout libet, hoc est, siue angulus C E F, vergat ad partes C, siue ad partes B, prout magis videbitur expedire. Ducatur item per A, [c] recta A F, parallela ipsi B C, quæ secet E F, in F. Rursus per C, vel B, ducatur ipsi E F, parallela C G, occurrens rectæ A F, productæ in G. Eritque in angulo C E F, qui dato angulo rectilineo D, factus est æqualis, cõstitutum parallelogrammum C E F G, quod dico esse æquale triangulo ABC. Ducta enim recta E A; [d] quoniam parallelogrammum C E F G, duplum est trianguli A E C; & triangulum A B C, duplum eiusdem trianguli A E C, [e] quod triangula A E C, A B E, super æquales bases E C, B E, & in eisdem parallelis, sint æqualia. Erunt parallelogrammum C E F G, & triangulum A B C, [f] æqualia inter se. Cum igitur angulus C E F, factus sit æqualis angulo D, constat propositum. Quocirca dato triangulo, æquale parallelogrammum constituimus in dato angulo rectilineo. Quod erat faciendum.

[a] 10. primi.
[b] 23. primi.
[c] 31. primi.
[d] 41. primi.
[e] 38. primi.
[f] 6. prop.

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis facilima est ex ipsa constructione.

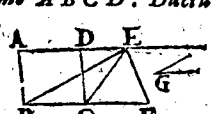
SVBIVNGIT autem hoc loco Peletarius subsequens problema, quod huius propos. conuersum est.

DATO parallelogrammo æquale triangulum constituere, in dato angulo rectilineo.

SIT datum parallelogrammum A B C D, & datus angulus G. Fiat angulus C B E, angulo G, æqualis, jungatq. recta B E, rectam A D, productam in E: Extendatur quoque B C,

ad

ad F, sitque C F, æqualis rectæ B C, & iungatur E F. Dico triangulum B E F. habens angulum E B F, angulo dato G, æqualem, æquale esse parallelogrammo A B C D. Ducta enim recta C E, [a] *erit parallelogrammum A B C D, duplum trianguli B C E, Item triangulum B E F, eiusdem trianguli B C E, duplum;* [b] *quod æqualia sint triangula E B C, E C F. Quare* [c] *æqualia inter se erunt parallelogrammum A B C D, & triangulum B E F. Quod est propositum.*



a 41. pri

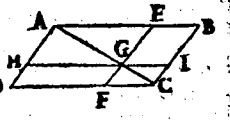
b 38. primi.

c 6. pron

PRAXIS quoque huius problematis Peletarij ex ipsa constructione perfacilis est.

THEOR. 32. PROPOS. 43. xliij.

IN omni parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum, sunt parallelogrammorum, inter se sunt æqualia.



IN parallelogrammo A B C D, sint circa diametrum A C, parallelogramma A E G H, C F G I, & cõplementa D F G H, E B I G, vt in 36. defin. diximus. Dico complementa hæc inter se esse æqualia. Cum [d] enim triangula A B C, C D A, æqualia sint; Itemque triangula A E G, G H A; si hæc ab illis demantur, [e] remanebunt trapezia C B E G, C D H G, æqualia: [f] Sunt autem & triangula C G I, C G F, æqualia. Quare si detrahantur ex trapezijs, [g] remanebunt æqualia complementa D F G H, E B I G. In omni igitur parallelogrammo, complementa, &c. Quod ostendendum erat.

d 34. pri

e 1. pron

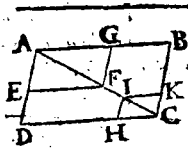
f 34. pri

g 3. pron

SCHOLIVM.

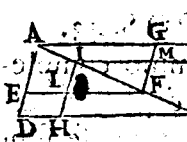
EODEM *modo hoc theorema demonstratur a Proclo,*

etiam



etiãsi duo parallelogramma circa diametrum non coniungantur in puncto G, sed vel vnum ab altero sit sectum, vel ambo se mutuo intersecent. Sit enim prius vnum ab altero distans, ita vt complementa sint figura quinquangula. Vt in parallelogrammo ABCD, circa diametrum AC, consistant parallelogramma AEFG, CHIK. Dico complementa DEFIH, BKIFG, esse aqualia. Cum enim a triangula ABC, CDA, aqualia inter se sint: Item triangula AEF, GHI, aqualia triangulis AGF, CKI: b erunt reliqua complementa DEFIH, BKIFG, aqualia. Quod est propositum.

a 34. primi.
b 3. pron



SECENT se iam mutuo parallelogramma AEFG, CHIK, circa diametrum consistentia, ita vt commune partem habeant ILFM. Dico adhuc complementa DELH, BGMK, esse aqualia. Cum enim c aqualia sint triangula ABC, CDA: Item triangula AFG, AFE: d erunt reliqua quadrilatera BCFG, DCFE, aqualia: Sunt e autem rursus aqualia triangula IFM, IFL. Igitur si hæc addantur, dictis quadrilateris, f erũt figura BCIMG, DCILE, aquales. Cum igitur & g aqualia sint triangula CIK, CIH: erunt reliqua complementa BGMK, DELH, etiam aqualia. Quod est propositum.

c 34. primi.
d 3. pron
e 34. primi.
f 2. pron
g 34. primi.
h 3. pron

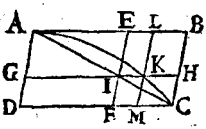
CONVERSVM quoque huius theorematis cum Peletario demonstrabimus, hoc modo.

SI parallelogrammum diuisum fuerit in quatuor parallelogramma, ita vt ex illis duo aduersa sint æqualia: consistent reliqua duo circa diametrum.

DVCTIS duabus rectis EF, GH, quæ sint parallelæ rectis BC, CD, seque secent in I, diuisum sit parallelogrammum ABCD, in quatuor parallelogramma, quorum aduersa duo BEIH, DFIG, sint æqualia. Dico reliqua duo AEIG,

CFIH,

CFIH, circa diametrum consistere, hoc est, diametrum a puncto C, ad punctum A, ductam transire per punctũ I. Si enim non transit, secet diameter CKA, rectam GH, in K, si fieri potest, & per K. ducatur LM, parallela ipsi BC. [b] *Erunt igitur complementa BHKL, DGKM, aequalia: Est* [c] *autẽ DGKM, maius quam DGIF. Quare & maius erit BHKL, quã DGIF. Cum ergo DGIF, aequale ponatur ipsi BEIH;* [d] *erit etiam BHKL, maius quam BEIH, pars quam totum. Quod est absurdum. Non ergo diameter AC, rectam GH, in K, secat, sed per punctum I, transit. Quod est propositum,*



[a] 31. primi.
[b] 43. primi.
[c] 9. primi.
[d] 1. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 44. xliiij.

AD datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

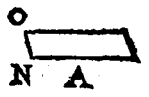
DATA recta linea sit A, datum triangulum B, & datus angulus rectilineus C. Oportet igitur constituere parallelogrammum æquale triangulo B, angulum habens æqualem angulo C, & vnum latus æquale rectæ A. Constituatur triangulo B, [e] æquale parallelogrammum DEFG, habens angulum EFG, angulo C, æqualem, producaturque GF, ad H, vt FH, sit æqualis rectæ A, & per H, [f] ducatur HI, parallela ipsi FE, occurrens DE, productæ in I. Extendatur deinde ex I, per F, diameter IF, occurrens rectæ DG, productæ in K; & [g] per K, ducatur KL, parallela ipsi GH, secans IH, protractam in L, producaturque EF, ad M. Dico parallelogrammum LMFH, esse id, quod quæritur. Habet enim latus FH, æquale datæ rectæ A, & angulum HFM, angulo dato C, æqualem, [a] quum angulus HFM, æqualis sit angulo EFG, qui fac-

[e] 42. primi.
[f] 31. primi.
[g] 31. primi.
[h] 15. primi.

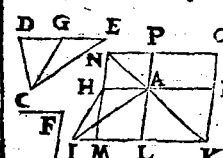
tus est æqualis angulo C: Denique parallelogrammum
[a] 43.pri L M F H, æquale est triangulo B, [a] cum æquale sit complemento D E F G, quod factum est æquale triangulo B. Ad datam igitur rectam lineam dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

QVOD si quis optet, lineam ipsam A, datam, esse vnũ latus parallelogrammi, non difficile erit transferre parallelogrammum F M L H, ad rectam A, ex ijs, quæ in scholio propos. 31. huius lib. docuimus. Si enim in N, extremitate rectæ A, fiat angulus æqualis angulo M F H, & sumatur recta N O, æqualis rectæ F M, compleaturque parallelogrammũ, ceu in dicto scholio traditum fuit, effectum erit, quod quæritur.



SED fortassis magis ex sententia Euclidis problema hoc conficiemus, si super ipsam rectam datam cõstruamus parallelogrammum, non autem super æqualem, cuiusmodi fuit recta F H, &c. Sit ergo rursus data recta A B, datum triangulum C D E, & datus angulus F, oporteatque super rectam A B, constituere parallelogrammum æquale triãgulo C D E, in dato angulo F, quod ita efficiemus. Secto vno latere trianguli, vt D E, bifariam in G, ductaque recta C G, secante ex scholio propos. 38. huius lib. triangulum C D E, bifariam, producatur recta A B, versus eam partem, vbi parallelogrammum construendũ debet habere angulum dato angulo F, æqualem, vt hic versus A, fiatque A H, æqualis ipsi E G, dimidio lateris D E. Deinde in A, [b] *constituatur angulus H A I, angulo E, æqualis, deorsum quidem, si parallelogrammum versus superiorem partem sit construendum, sursum vero, si versus inferiorem. Posita autem recta A I, æquali ipsi E C, iungatur recta H I. Et quia duo latera H A, A I, duobus lateribus G E, E C, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosque continent æquales;* [c] *erunt triangula A H I, E G C,*



[b] 23.pri

[c] 4. pri.

aqua-

aequalia, Post hac, [a] ducta per I, ipsi HB, parallela IK, [b] constituatur in A, versus hanc parallelam angulus HAL, angulo dato F, aequalis, secetque AL, rectam IK, in L. [c] Ducta quoque per H, ipsi AL, parallela HM, secante IK, in M, [d] erit parallelogrammum AHML, trianguli AHI, duplum: Est autem & triangulum CDE, trianguli EGC, duplum, quòd aequalia ostensa sint triangula EGC, DGC. Igitur cum aequalia sint demonstrata triangula AHI, EGC, & [e] ei ut aequalia parallelogrammum AHML, & triangulum CDE. Iam vero sumpta recta LK, data recta AB, aequali ducatur recta KA, producaturq. donec cum MH, producta coeat in N, & per N, agatur ipsi HB, parallela NO, donec in O, coeat cum KB, protracta, ac tandem LA, producatur usque ad P, in recta NO. Dico parallelogrammum ABOP, esse id, quod quaeritur. Est enim constitutum super datam rectam AB, habetque angulum BAP, dato angulo F, aequalem, [f] cum aequalis sit angulo HAL, qui angulo F, factus est aequalis. Deinde aequale est dato triangulo CDE, [g] cum aequale sit parallelogrammo AHML, quod triangulo CDE, ostensum fuit aequale.

a 31.pri
b 23.pri
c 31.pri
d 41.pri
e 7.pron
f 15.pri
g 43.pri

PRAXIS vero huius problematis à constructione ipsa non differt, nisi quod recta HI, duci non debet, neque recta CG. Ha enim propter demonstrationem tantum ductae sunt.

ADDIT hic aliud problema Peletarius, hoc modo.

AD datam rectam lineam, dato parallelogrammo cõstituere æquale triangulum in dato angulo rectilineo.

SIT data recta AB; datum parallelogrammum CDEF, & datus angulus L. Producatur CD, ad G, ut DG, aequalis sit ipsi CD, & iungatur GE, recta: Eritque triangulum CEG, parallelogrammo CDEF, aequale, ut demonstrauimus scholio propos. 41.[h] Fiat iam super data recta AB, parallelogram-

h 44.pri

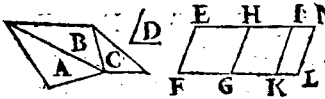
mum ABHI, æquale triangulo CEG, hoc est, parallelogrammo CDEF, habens angulum A, angulo L, æqualem; & producatur AI, ad K, vt sit IK, æqualis ipsi AI, iungaturque recta BK. Dico triangulum ABK, constitutum super datam rectam AB, habensque angulum A, æqualem dato angulo L; æquale esse dato parallelogrãmo CDEF. Cum enim triangulum ABK, æquale sit parallelogrammo ABHI, ex scholio propos. 41. quod æquale est constructum parallelogrammo CDEF, constat propositum.

PRAXIS huiusce problematis à constructione nõ differt; difficilisque non est, si adhibeantur præcedens praxis, qua triangulo ECG, parallelogrammum ABHI, super data recta AB, in dato angulo A, construatur.

PROBL. 13. PROPOS. 45.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo.

QVAMVIS Euclides proponat hoc problema absolute, non astringendo nos ad certam aliquam rectam lineam datam, vt in præcedenti propos. 44. fecerat; tamen quia in sequentibus frequenter vsurpatur in data recta linea, placuit ipsum proponere vna cum data recta linea. Sit ergo recta data EF; rectilineum A B C, & datus angulus D. Oportet igitur constituere ad datam rectam EF, parallelogrammum æquale rectilineo ABC, quod habeat angulum æqualem angulo D. Resoluatur rectilineũ in triangula A, B, & C. Deinde triangulo A, [b] æquale



parallelogrammum [c] constituatur EFGH, super rectam EF, habens angulum F, angulo D, æqualem. Itẽ super rectam G H, parallelogrammum G H I K, æquale triangulo B, habens angulum G, æqualem angulo D. Itẽ super rectam I K, parallelogrammum I K L M, æquale

[b] 44. pri.

trian-

triangulo C, habens angulum K, æqualem angulo D; Et sic deinceps procedatur, si plura fuerint triangula, in dato rectilineo: factumque erit, quod iubetur. Nam tria parallelogramma constructa, quæ quidem æqualia, sunt rectilineo dato ABC, conficiunt totum vnum parallelogrammum, quod sic demonstratur. Duo anguli EFG, HGK, [a] inter se sunt æquales, cum vterque æqualis sit angulo D. Addito igitur communi angulo FGH, erunt duo anguli EFG, FGH, [b] qui duobus rectis æquiualent, [c] æquales duobus angulis HGK, FGH, ideoque hi anguli duobus etiam rectis æquales erunt. [d] Quare FG, GK, vnam rectam lineam efficient. Eadem ratione ostendemus, EH, HI, vnam rectam lineam efficere, propterea, quod duo anguli EHG, HIK, æquales inter se sunt, (& cũ sint æquales oppositis angulis æqualibus EFG, HGK.) [f] & duo anguli HIK, IHG, duobus sunt rectis æquales, &c. Cum igitur EI, FK, sint parallelæ, [g] Itemque EF, IK, quod vtraque parallela sit rectæ HG; Parallelogrammum erit EFKI. Eodem modo demonstrabitur, parallelogrammum IKLM; adiunctum parallelogrammo EFKI, constituere totum vnum parallelogrammum EFLM. Ad datam ergo rectam lineam EF, dato rectilineo ABC, constituimus æquale parallelogrammum EFLM, habens angulum F, æqualem angulo D, dato. Quod erat efficiendum.

[a] 1. pron
[b] 29. pri.
[c] 2. pron
[d] 14. pri mi.
[e] 34. pri.
[f] 29. pri mi.
[g] 30. pri

SCHOLIVM.

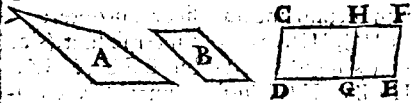
PARI ratione, propositis quotcunque rectilineis, constituemus illis parallelogrammum æquale; si omnia resoluantur in triangula, quibus æqualia parallelogramma exhibeãtur, singulis singula, per propos. 44. veluti factum est in hoc problemate. Nam cum omnia hęc parallelogramma efficiãt vnum parallelogrammum, vti hic demonstratum fuit, constitutum erit parallelogrammum æquale rectilineis propositis. Vt si quis intelligat duo rectilinea proposita AB, & C; Atque AB, resoluatur in triangula A, & B, singuliſq. triangulis A, B, C, singula parallelogramma EG, GI, IL, super rectas EF, HG, IK, iuxta artem huius problematis, æqualia constituantur, ex propos. 44. erit constructum parallelogram

mum totum EFLM, æquale duobus rectilineis A B, & C. Et sic de pluribus.

PRAXIS autem huius problematis ex praxi præcedentis propos. sæpius repetita petenda est.

H V C referri poterit problema vtilissimum ex Peletario, quod nos tamen alia ratione, & prouiari demonstrabimus in hunc modum.

DATIS duobus rectilineis inæqualibus, excessum maioris supra minus inquirere.



SINT data rectilinea A, & B, sitque A, maius. Oportet igitur indagare,

a 45.pri *qua magnitudine rectilineum A, superet rectilineum B.* a *Fiat parallelogrammum CDEF, in quocunque angulo D, æquale maiori rectilineo A. Et super rectam CD, parallelogrammum CDGH, in eodem angulo D, æquale rectilineo minori B. Quoniam igitur parallelogrammum CDEF, superat parallelogrammum CDGH, parallelogrämo EFHG, superabit quoque figura A, figuram B, eodem parallelogrammo EFHG. Quod est propositum.*

xlv. ## PROBL. 14. PROPOS. 46.

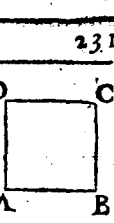
A DATA recta linea quadratum describere.

SIT data recta AB, super quam oporteat quadratum

b 11.primi. describere. Ex A, & B, educantur AD, BC, perpendiculares ad AB, sintque ipsi AB, æquales, & connectatur recta CD. Dico ABCD, esse quadratum. Cum enim anguli A, & B, sint recti, verum A D, B C, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis sit ipsi A B. Igitur d & AB, DC, parallelæ sunt & æquales, & ideo parallelogrammum est AB. D, in quo, cum A D, DC, CB, æquales sint

c 28.pri d 33.pri

ipsi AB, omnes quatuor lineæ æquales existunt: Sunt autem & omnes quatuor anguli recti, cum C, & D, æquales sint oppositis rectis A, & B. Quadratum igitur est ABCD, ex definitione; Ac proinde à data recta linea quadratum descripsimus. Quod faciendum erat.



a 34. pri

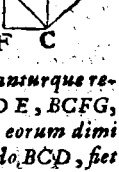
EX PROCLO.

LINEARVM æqualium æqualia, sunt quadrata: & quadratorum æqualium æquales sunt lineæ.

SINT primum rectæ AB, CD, æquales. Dico eorum quadrata ABEF, CDGH, æqualia quoque esse. Ductis enim diametris BF, DH, erunt duo latera BA, AF, trianguli BAF, duobus lateribus DC, CH, trianguli DCH, æqualia, utrumque utrique, cum ex definitione quadrati rectæ AF, CH, æquales sint rectis AB, CD. Sunt autem, & anguli A, & G, æquales, nempe recti. Igitur triangula BAF, DCH, æqualia erunt. Quæ cum sint dimidia quadratorum, erunt & quadrata tota æqualia. Quod erat propositum.

b 4. pri.
c 34. pri

SINT deinde quadrata ABDE, BCFG, æqualia. Dico lineas quoque ipsorum AB, BC, æquales esse. Coniungantur enim quadrata ad angulum B, ut rectæ AB, BC, in directum constituantur. Et quoniam anguli ABG, ABD, sunt recti, erunt & rectæ GB, BD, in directū conſtitutæ. Ducantur diametri AD, CG, iungaturque recta AG, CD. Quoniam igitur quadrata ABDE, BCFG, æqualia sunt, erunt & triangula ABD, BCG, eorum dimidia, æqualia. Adiuncto ergo communi triangulo BCD, fiet totum triangulum ACD, toti triangulo GDC, æquale. Quare triangula ACD, GDC, cum eandem habeant basin CD, ad easdemq. sint partes, & in eisdem sunt parallelis:



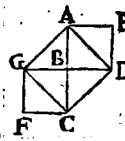
d 14. pri

e 39. pri

ideoque

ideoque parallela sunt AG, CD. Et quoniam, vt in scholio propos. 34. ostendimus, diameter in quadrato secat angulos quadrati bifariam, erunt anguli DAC, GCA, alterni semirecti, ideoque æquales. Quamobrem, a & parallela sunt AD, CG. Igitur parallelogrammum est ADCG: ac propterea b recta AD, CG, æquales. Quoniam ergo in triangulis ABD, BCG, latera AD, CG, æqualia sunt, & anguli, quibus ea latera adiacent, inter se etiam æquales, cum sint semirecti, vt in scholio propos. 34 ostensum fuit: erunt c reliqua latera æqualia, nempe AB, ipsi BC, &c. Quod est propositum.

a 27. pri
b 34. pri



c 26. primi.

SCHOLIVM.

POSSENT hæc omnia multo brevius probari per superpositionem quadrati vnius super aliud. Nam si lineæ sint æquales, si vna alteri superponatur, congruent ipsæ inter se. Cum ergo & anguli sint æquales, nempe recti, conuenient quoque ipsi inter se, ideoque totum quadratum toti quadrato congruet. Quod si quadrata sint æqualia, congruent ipsa inter se, propter æqualitatem angulorum. Igitur & lineæ: alias vnum quadratum alio maius esset.

PRAXIS autem huius problematis perfacilis est: Si namque ad datam rectam AB, in altero extremorum, vt in A, erigatur perpendicularis AD, ipsi datæ rectæ AB, æqualis, & ex B, & D, ad internallum eiusdem AB, duo arcus describantur sese in C, intersecantes, iungantur q. rectæ BC, DC, constructum erit quadratum. Nam ABCD, cum ex constructione sit figura æqualiū laterum, atque adeo latera opposita habeat æqualia, parallelogrammum erit, vt ad initium scholij propos. 34. demonstrauimus. Existante ergo angulo A, recto, d erunt & B, D, recti, necnon e & oppositus angulus C, &c.

d 29. pri.
e 34. pri

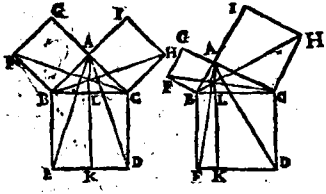
THEOR. 33. PROPOS. 47.

xlvj.

IN rectangulis triangulis, quadratum, quod à latere rectum angulum subten-

dente

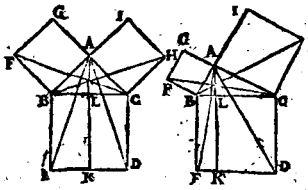
dente describitur, æquale est eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis.



IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, [a] describanturq. super AB, AC, BC, quadrata, ABFG, ACHI, BCDE. Dico quadratũ BCDE, descriptum super latus BC, quod angulo recto opponitur, æquale esse duobus quadratis ABFG, ACHI, quæ super alia duo latera sunt descripta, siue hæc duo latera æqualia sint, siue inæqualia. Ducatur enim recta AK, [b] parallela ipsi BE, vel ipsi CD, secans BC, in L, & iungantur rectæ AD, AE, CF, BH. Et quia duo anguli BAC, BAG, sunt recti, [c] erunt rectæ GA, AC, vna linea recta; eodemq. modo IA, AB, vna recta linea erunt. Rursus quia anguli ABF, CBE, sunt æquales, cum sint recti, si addatur communis angulus ABC, [d] fiet totus angulus CBF, toti angulo ABE, æqualis; similiterq. totus angulus BCH, toti angulo ACD. Quoniam igitur duo latera AB, BE, trianguli ABE, æqualia sunt duobus lateribus FB, BC, trianguli FBC, vtrumque vtrique, vt constat ex definitione quadrati: Sunt autem & anguli ABE, FBC, contenti hisce lateribus æquales, vt ostendimus; [e] Erunt triangula ABE, FBC, æqualia. Est autem quadratum, seu parallelogrammum ABFG, [f] duplum trianguli FBC, cum sint inter parallelas BF, CG, & super eandem basin BF: Et parallelogrammum BEKL. duplum trianguli ABE, quòd sint inter parallelas BE, AK, & super eandem basin BE. Quare [g] æqualia erunt quadratum ABFG, & parallelogrammum BEKL. Eadem ratione ostendetur, æqualia esse quadratum ACHI, & parallelogrammum CDKL. [h] Erunt enim rursus triangula ACD, HCB, æqualia, ideoq. eorum dupla, parallelogrammum videlicet

a 46. primi.
b 31. primi.
c 14. primi.
d 2. post.
e 4. primi.
f 41. primi.
g 6. post.
h 4. primi.

CDKL,



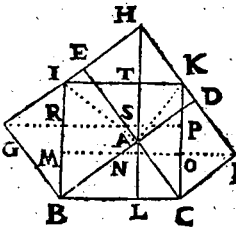
CDKL, & quadratum ACHI, æqualia erunt. Quamobrem totũ quadratum BCDE, quod componitur ex duobus parallelogrammis BEKL, CDKL; æquale est duobus quadratis ABFG, ACHI. In rectangulis ergo triangulis, quadratum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

FACILE ex theoremate isto quiuis intelliget, in triangulo amblygonio quadratum lateris obtuso angulo oppositi maius esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: In quouis autem triangulo quadratum lateris uni acutorum angulorum oppositi minus esse duobus quadratis simul aliorum duorum laterum. Nam si angulus coarctaretur donec fieret rectus, manentibus ijsdem lateribus eum ambientibus, euaderet latus oppositum minus: Si autem acutus angulus dilataretur, donec fieret rectus, manentibus ijsdem lateribus eum ambientibus, fieret latus oppositum maius, vt patet. Cum ergo quadratum lateris angulo recto oppositi æquale sit hic ostensum duobus quadratis simul aliorum duorum laterum; perspicuum est, quadratum lateris obtuso angulo oppositi esse maius duobus quadratis simul aliorum duorum laterum: quadratum vero lateris angulo acuto oppositi esse minus duobus quadratis simul duorum laterum reliquorum. Quanto autem illud maius sit, & quanto hoc minus, demonstrabit Euclides lib. 2. propos. 12. & 13.

QVONIAM vero theorema hoc pulcherrimum est, vtilitatesq; habet insignes, operæpretium iudicaui tentare, num illud alijs vijs demonstrari posset, variata aliquantulum constructione; quod Peletarius sine proportionibus fieri posse negauit. Sit ergo rursus triangulum ABC, cuius angulus BAC, rectus sit, productisq; lateribus BA, CA, ad partes anguli recti, fiant AD, AE, ipsis AC, AB, æquales; & per C, D, B, E, ipsis AB, AC, parallelæ agantur coeuntes in F, G.

Et



Et quia in parallelogrãmis CD, BE, [a] *tam latera DF, FC, oppositis lateribus AC, AD, quam latera EG, GB, lateribus oppositis AB, AE, æqualia sunt, erit vtrunque parallelogrammum æquilaterum: Sed & anguli omnes recti sunt.* [b] *Nam F, G, oppositis rectis DAC, EAB, æquales sunt, ideoq. recti: Anguli autem C, D, B, E, recti sunt, quod vteruis C, D, cum recto DAC, & vteruis, B, E, cum recto EAB,* [c] *æqualis sit duobus rectis. Quadrata ergo sunt CD, BE, laterum AC, AB. Productis etiam lateribus FD, GE, donec conueniant in H, erigantur in B, C, ad BC, perpendiculares BI, CK, secantes GH, FH, in I, K, iungaturq; recta IK. Et quia, si à rectis angulis IBC, ABG, auferantur communis angulus ABI, reliqui ABC, GBI, æquales sunt; sunt autem & recti anguli BAC, BGI, æquales; erunt duo anguli A, B, trianguli ABC, duobus angulis G, B, trianguli GBI, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera AB, GB, illis adiacentia æqualia, ob quadratum BE.* [d] *Igitur & tam latera BC, BI, quàm AC, GI, æqualia erũt, & reliqui anguli C, I, æquales. Non aliter in triangulis ABC, FKC, æqualia erunt tam latera BC, CK, quam AB, FK, & anguli B, K: propterea quod duo anguli A, C, trianguli ABC, duobus angulis F, C, triãguli FKC, æquales sunt: (cum A, F, recti sint) & duo anguli C, reliqui duorum rectorum, dempto communi [illegible] latera AC, CF, illis adiacentia æqualia, ob quadratum CD. Quare recta BI, CK, inter se etiam æquales erunt.* [e] *Cum ergo quoque sint parallelæ, & erunt etiam BG, IK, æquales, & parallela. Quadratum igitur est BCKI, lateris BC, cum quatuor eius latera sint æqualia, & anguli omnes recti, quod anguli I, K, oppositis rectis C, [illegible] sint. Dico ergo, quadratum CI, duobus quadratis BE, CD, æquale esse. Ducta enim ex H, per A, recta HTAL, ipsis BI, CK, parallela erit. Nam quia GE,* [h] *ipsi BA, æqualis est, & EH, ipsi AD, hoc est, ipsi GI, qua ipsi AC, siue AD, ostensa fuit æqualis, erit &, addita communi*

a 34. primi.

b 34. primi.

c 29. primi.

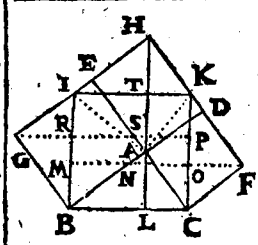
d 26. primi.

e 1. post.

f 28. primi.

g 33 primi.

h 34. primi.



[a] 33.pri. *EI, tota HI, toti GE, hoc est, ipsi AB, aequalis. Cum ergo HI, AB, sint etiam parallelae, [a] erunt quoque BI, AH, parallelae & aequales. Eodemq. modo AH, ipsi CK, parallela ostendetur, & aequalis. Quoniam igitur* [b] 35.pri *tam quadratum BE, parallelogrammo BH, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eidem parallelogrammo BH, super eandem basin BI, aequale est,* [c] 1.pron [d] 35.pri [e] 3.pron *erit quoque quadratum BE, parallelogrammo BT, aequale. Sic etiam quia tam* [d] *quadratum CD, parallelogrammo CH, super eandem basin AC, quam parallelogrammum CT, eidem parallelogrammo CH, super eandem basin CK, aequale est,* [e] *erit quoque quadratum CD, parallelogrammo CT, aequale. Totum ergo quadratum BCKI, ex duobus parallelogrammis BT, CT, compositum, duobus quadratis BE, CD, aequale est. Quod erat demonstrandum.*

ALITER. Loco rectae HTAL, iungantur duae rectae AI, AK, & [f] 41.pri *per A, ipsis BI, CK, parallela ducatur TAL. Quoniam ergo* [f] *tam quadratum BE, (ostendemus enim vt prius, BK, BE, CD, quadrata esse laterum BC, AB, AC.) trianguli ABI, super eandem basin AB, quam parallelogrammum BT, eiusdem trianguli ABI, super eandem basin BI, duplum est,* [g] 6.pron [h] 41.pri. [g] *erit quadratum BE, parallelogrammo BT, aequale. Pari ratione, quia* [h] *tam quadratum CD, trianguli ACK, super eandem basin AC, quàm parallelogrammum CT, eiusdem trianguli ACK, super eandem basin* 6.pron *CK, duplum est,* [i] *erit quoque quadratum CD, parallelogrãmo CT, aequale. Quam ob rem, vt prius, totũ quadratum BCKI, ex parallelogrammis duobus BT, CT, conflatũ, duobus quadratis BE, CD, aequale est. Quod erat ostendendum.*

ALITER. Loco rectarum HTAL, AI, AK, ducantur per F, G, ipsis BC, IK, parallelae FM, GP, secantes AB, CK, in N, O, & [i] 29.pri. *BI, CE, in R, S. Eritque BR, ipsi KO, aequalis. Quoniam enim* [i] *anguli O, R, recti sunt, & OKF, RBG, aequales, quod vterque angulo ABC, supra ostensus sit aqua-*

lis;

lis; erunt duo anguli O, K, trianguli FKO, duobus angulis R, B, trianguli GBR, æquales, vterque vtrique: Sunt autem & latera FK, BG, illis adiacentia æqualia, quod vtrumque supra sit ostensum ipsi BC, æquale. [a] *Igitur & latera KO, BR, æqualia erunt. Itaque quoniam* [b] *tam parallelogramma BCFN, BCOM, super eandem basin BC, quam parallelogramma BCSG, BCPR, super eandem basin BC, æqualia sunt., estq. parallelogrammum BCPR, parallelogrammo IKOM, æquale, ob rectas BR, KO, ostensas æquales; (Nam hinc fit, vt si vnum alteri superponatur, sibi mutuo congruant, propter laterum, angulorumque æqualitatem) erunt ambo parallelogramma BCFN, BCSG, toti quadrato BCKI, ex duobus parallelogrammis BCOM, IKOM, composito æqualia.* [c] *Cum ergo tam quadratum CD, parallelogrammo BCFN, super eandem basin CF, quàm quadratum BE, parallelogrammo BCSG, super eandem basin BG, æquale sit; erunt quoque ambo quadrata CD, BE, eidem quadrato BCKI, æqualia. Quod demonstrandum erat.*

a 26. pri
b 33. pri
c 35. pri

ATQVE in hunc modum alia demonstrationes excogitari poterunt. Video demonstrationem Euclidis simpliciorem esse, & magis expeditam, sed non iniucundum tamen est intelligere, variis demonstrationibus eandem veritatem posse confirmari.

INVENTIO porro admirabilis, atque pulcherrimi huius theorematis ad Pythagoram refertur, qui, vt scribit Vitruuius lib. 9. hostias Musis immolauit, quòd se in tam præclaro inuento adiuuerint. Sunt qui putent, eum immolasse centum boues: si tamen Proclo credendum est, vnum tantummodo obtulit. Fortasse autem Pythagoras, vt nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit; vt theorema hoc inuestigaret. Cum enim hos tres numeros 3. 4. 5. diligenter esset contemplatus, vidisseq. quadratum numerum maioris æqualē esse quadratis numeris reliquorum, composuit triangulum scalenum, cuius maximum latus diuisum erat in 5. partes æquales, minimum in 3. eiusdem magnitudinis, & reliquum in 4. Quo facto, considerauit angulū sub his duobus lateribus contentum, inuenitq. eum esse rectum. Idq. in quamplurimis alijs numeris, vt in 6. 8. 10. & 9. 12. 15. &c.

obſeruauit. Quare inquirendum eſſe iudicauit, num in omni triangulo rectangulo quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, reliquorum laterum quadratis æquale eſſet, quandoquidem omnia triangula, quorum latera habebant magnitudinem ſecundum dictos numeros, continebant vnum angulum rectum: Atque ita tandem mirabile hoc theorema maxima animi voluptate adinuenit, firmaq. ratione demonſtrauit. Quod tamen Euclides mirandum in modum amplificauit lib. 6. propoſ. 31. Vbi demonſtrauit, non ſolum quadratum lateris, quod recto angulo opponitur, æquale eſſe quadratis reliquorum duorum laterum; Verum etiam figuram quamlibet rectilineam ſuper latus recto angulo oppoſitum conſtructam, ſiue ea ſit triangulum, ſiue quadrangulum, &c. æqualem eſſe duabus figuris, quæ ſuper reliqua latera deſcribuntur, dummodo priori ſint ſimiles, ſimiliterq. deſcripta, vt ibidem oſtendemus.

CAETERVM quoniam mentionem facimus trium numerorum, quorum maximi quadratum æquale eſt quadratis reliquorum, non abs re fuerit, paucis explicare, quonam pacto huiuſmodi numeri inueniantur. Habitis igitur his tribus numeris 3. 4. 5. ſi duplicentur, habebuntur alij tres, 6. 8. 10. ſi ijdem triplicentur, exurgent alij tres 9. 12. 15. & ſi quadruplicentur, inuenientur hi tres 12. 16. 20. Atque ita reperientur quotcunque alij, ſi primi illi tres per quemcunque multiplicentur numerum. Traduntur tamen à Proclo duæ regulæ, quibus inueniuntur prædicti numeri, nulla habita ratione illorum trium. Prima aſcribitur Pythagoræ, & eſt huiuſmodi. Sumatur pro minimo quicunque numerus impar, vt 5. ex quo ita alios reperies. Ex quadrato numeri accepti, vt hic ex 25. reijce vnitatem. Nam reliqui numeri dimidium, videlicet 12. erit alter numerus, cui ſi addatur vnitas, exurget tertius numerus 13. Huius igitur quadratum æquale eſt quadratis aliorum. Quod ſi numerus impar acceptus fuiſſet 3. eſſent reliqui duo inuenti per hanc regulam 4. & 5. Secunda regula tribuitur Platoni, quæ talis eſt. Accipiatur numerus quicumque par, nempe 6. Ex huius dimidij quadrato, nimirum 9. detrahe vnum, eidemq. adde vnum, habebisq. reliquos duos nume-

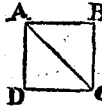
ros 8 & 10. primus autem est 6. nimirum numerus par acceptus. Hac regula si accipiatur par 10. reperientur alij duo 24. & 26.

COLLIGVNTVR ex celeberrimo hoc Pythagora inuento plurima scitu non iniucunda tam theoremata, quam problemata, è quibus visum est ea duntaxat in medium proferre, quæ vtilitatem magnam rebus Geometricis allatura credantur, initium hinc sumentes.

I.

SI in quadrato quouis diameter ducatur, quadratum à diametro descriptum duplum erit prædicti quadrati.

IN quadrato ABCD, ducatur diameter AC. Dico quadratũ diametri AC, duplũ esse quadrati ABCD. Cum n. in triangulo ABC, angulus B, rectus sit, [a] erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum AB, BC. Cum igitur quadrata linearum AB, BC, æqualia sint, quòd lineæ AB, BC, sint æquales; erit quadratum diametri AC, duplum cuiuslibet illorum, vt quadrati lineæ AB, hoc est, quadrati ABCD. Quod est propositum.

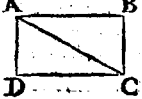


[a] 47. pri

II.

QVADRATVM diametri figuræ alterę parte longioris æquale est duobus quadratis laterum inæqualium.

IN altera parte longiori ABCD, ducatur diameter AC; & quia in triangulo ABC, angulus B, est rectus, [b] erit quadratum lateris AC, æquale duobus quadratis laterum inæqualium AB, BC. Quod est propositum.



[b] 47. pri

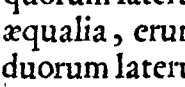
III.

SI fuerint duo triangula rectangula,

quorum

quorum latera rectis angulis opposita sint æqualia, erunt duo quadrata reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius.

TRIANGVLORVM ABC, DEF, anguli A, & D, sint recti, lateraq. opposita BC, EF, æqualia. Dico duo quadrata laterum AB, AC, simul sumpta æqualia esse duobus quadratis laterum DE, DF, simul sumptis.



Nam quadrata linearum BC, EF, æqualia inter se sunt, cũ & ipsa linea inter se ponantur æquales. Quadrato aũt lineæ BC, [a] *æqualia sunt quadrata linearum AB, AC. Et quadrato lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum AB, AC; Et quadrato lineæ EF, æqualia sunt quadrata linearum DE, DF.* [b] *Quadrata ergo rectarum AB, AC, quadratis rectarum DE, DF, æqualia sunt. Quod erat propositum.*

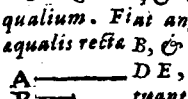
a 47. pri

b 1. pron

IIII.

DVOBVS quadratis inæqualibus propositis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia sint inter se, & simul sumpta æqualia duobus inæqualibus propositis simul sumptis.

SINT A, & B, latera duorum quadratorum inæqualium. Fiat angulus rectus DCE, sitque DC, recta æqualis rectæ B, & rectæ CE, rectæ A. Ducta deinde recta DE, coniungente duo puncta D, E, constituantur super ipsam duo anguli semirecti DEF, EDF, [c] *coeantq. rectæ DF, EF, in F. Quoniam igitur in triangulo FDE, anguli FDE, FED, æquales sunt;* [d] *erunt & latera DF, EF, æqualia, ideoque & quadrata*



c 13. prõ

d 6. pri.

eorun-

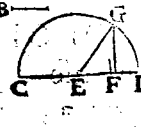
eorundem laterum æqualia. Dico iam, eadem quadrata linearum DF, EF, æqualia esse quadratis linearum A, & B, hoc est, quadratis linearum CE, & CD. Nam cum in triangulo DEF, anguli FDE, FED, faciant vnum rectum; [a] erit reliquus angulus F, rectus. [b] Quamobrem erunt quadrata linearum DF, EF, æqualia quadrato lineæ DE: [c] Sed eidem quadrato lineæ DE, æqualia sunt quoque quadrata linearum CD, CE. Igitur quadrata linearum DF, EF, [d] æqualia sunt quadratis linearũ DC, EC. Quod est propositum.

a 32. pri
b 47. pri
c 47 pri
d 2. pron

V.

PROPOSITIS duabus lineis inæqualibus, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor.

POTENTIA linea recta dicitur eius quadratum. Tantum enim quælibet recta linea posse dicitur, quantum est eius quadratum. Sint ergo duæ lineæ inæquales A, & B, oporteatq. cognoscere, quanto maius sit quadratum maioris lineæ A, quam minoris B. Ex quauis linea recta CD, sumatur CE, æqualis rectæ A, & EF, æqualis rectæ B. Deinde centro E, & interuallo EC, semicirculus describatur CGD; & ex F, ducatur FG, perpendicularis ad CD. Dico quadratum rectæ A, hoc est rectæ CE, sibi æqualis, maius esse, quam quadratum rectæ B, hoc est, rectæ EF, sibi æqualis, quadrato rectæ FG. Ducta enim recta EG, [e] erit eius quadratum æquale quadratis rectarum EF, FG, hoc est, quadratum rectæ EC, illi æquale, superabit quadratum rectæ EF, quadrato rectæ FG. Quod est propositum.



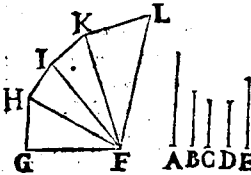
e 47. pri

VI.

PROPOSITIS quotcunque quadratis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale.

SINT latera quinque quadratorum A, B, C, D, B. Oporteatq.

[t] eatq. inuenire quadratum æquale omnibus illis quinque.



Fiat angulus rectus FGH, sitq. recta FG, æqualis rectæ A, & recta GH, rectæ B. Ducta deinde recta HF, fiat angulus rectus FHI, sitq. HI, æqualis rectæ C. Ducta rursus recta IF, fiat angulus rectus FIK, sitque IK, æqualis rectæ D. Ducta denique recta KF, fiat angulus rectus FKL, sitq. KL, æqualis rectæ E, ducaturq; recta FL. Dico quadratum rectæ FL, æquale esse quinque quadratis propositis. Quadratum enim rectæ FH, [a] æquale est quadratis rectarum FG, GH, hoc est, quadratis rectarum A, & B. Rursus quadratum rectæ FI, [b] æquale est quadratis rectarum FH, HI, & idcirco quadratis rectarum A, B, & C. Item quadratum rectæ FK, [c] æquale est quadratis rectarum FI, IK, ideoq; quadratis rectarum A, B, C, & D. Denique quadratum rectæ FL, [d] æquale est quadratis rectarum FK, KL, ac propterea quadratis rectarum A, B, C, D, & E. Quod est propositum.

47. pri

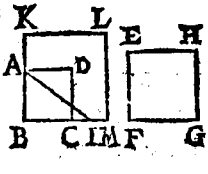
[b] 47. pri

[c] 47. pri

[d] 47. pri

VII.

PROPOSITIS duobus quadratis quibuscunque, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita vt tota figura composita sit etiam quadrata.



SINT duo quadrata ABCD, EFGH, propositumque sit quadrato ABCD, apponere figuram, quæ sit æqualis quadrato EFGH, &c. Sumatur recta BI, æqualis rectæ FG, lateri quadrati EFGH. Ducta autem recta AI, & producta recta BA, ad partes A; accipiatur BK, æqualis rectæ AI, perficiaturq;

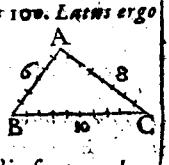
quadra-

quadratum BKLM. Dico figuram ADCMLK, quadrato ABCD, adiunctum, aequalem esse quadrato EFGH. Quoniam enim quadratum rectae AI, hoc est, quadratū BKLM, a aequale est quadratis rectarum AB, BI, hoc est, quadratis ABCD, EFGH: si auferatur commune quadratum ABCD, b remanebit figura ADCMLK, aequalis quadrato EFGH. Quod est propositum. a 47. pri b 3. pron

VIII.

COGNITIS duobus lateribus quibuscunque trianguli rectanguli, in cognitionem reliqui lateris peruenire.

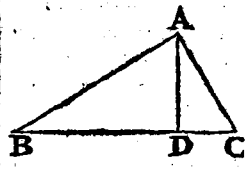
SIT angulus A, rectus in triangulo ABC, sintq. primum cognita latera AB, AC, circa angulum rectum, quorum AB, ponatur 6. palmorum, & AC, 8. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, nempe quadrati palmi 36. & 64. c aequalia sunt quadrato rectae BC; si illa coniungantur simul, efficietur hoc quadratorum palmorum 100. Latus ergo BC, continebit 10. palmos. Tantum enim est latus, seu radix quadrata 100. palmorum, vt perspicuum est apud Arithmeticos. Sint deinde cognita latera AB, BC, sitq. AB, 6. palmorum, & BC, 10. Quoniam igitur quadrata rectarum AB, AC, d aequalia sunt quadrato rectae BC; si quadratum rectae AB, quod continet palmos 36. detrahatur ex quadrato rectae BC, quod est palmorum 100. remanebit quadratum rectae AC, 64. palmorum. Latus ergo AC, continebit 8. palmos. Tanta enim est radix quadrata, seu radix 64. palmorum. Quod est propositum. Caeterum non semper hac arte inuenientur numeri rationales, quia non omnis numerus habet latus, radicemue quadratam, vt notum est apud Arithmeticos. Vnde latus inuentum sepenumero exprimi nequit, nisi per radicem quadam, quam vocant: Sed de his alias. c 47. pri



d 47. pri

IX.

SI ex angulo à duobus lateribus inæqualibus triangulo comprehenſo ad baſin perpendicularis ducatur cadens intra triangulum, ſecabitur baſis in partes inæquales, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, ſi baſis à perpendiculari ſecetur non bifariam, erunt duo latera inæqualia, maiusque illud erit, quod maiori baſis ſegmento adiacet.



CADAT primum in triangulo ABC, cuius latus AB, maius ſit latere AC, perpendicularis AD, ad BC, demiſſa intra triangulum, quod tum demum continget, quando vterque angulus B, C, acutus eſt, vt ex coroll. 2. propoſ. 17. conſtat. Dico ſegmentum BD, eſſe maius ſegmento CD;

a 47. pri *Quoniam enim* [a] *tam quadratũ ex AB, quadratis ex AD, BD, quam quadratũ ex AC, quadratis ex AD, CD, æquale eſt: Eſt autem quadratum ex AB, maius quadrato ex AC, quod latus AB, latere AC, ponatur maius; erunt quoque duo quadrata ex AD, BD, maiora duobus quadratis ex AD, CD: Et ablato communi quadrato recta AD; reliquum quadratum ex BD, reliquo quadrato ex CD, maius erit. Quare & recta BD, maior erit, quam recta CD. quod eſt primum.*

FACIAT deinde perpendicularis AD, ſegmentum BD, maius ſegmento CD. Dico latus AB, maius eſſe latere AC. Erit enim quadratum ex BD, quadrato ex CD, maius: Addito q. quadrato communi ex AD; duo quadrata ex BD, AD, duobus quadratis ex CD, AD, maiora erunt. Cum ergo [b] *tam quadratum ex AB, quadratis ex BD, AD, quam*

b 47. pri

quadra-

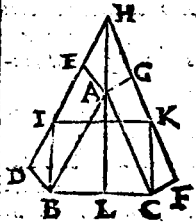
quadratum ex AC, quadratis ex CD, AD, æquale sit; erit quoque quadratum ex AB, quadrato ex AC, maius; propterea q. & latus AB, latere AC, maius erit. Quod est propositum.

ATQVE in hunc modum plurima alia ex inuento hoc Pythagoræ colligi possunt, quæ consulto, ne lectori molesti simus, hic omittēda censuimus, & in alium locū differenda.

THEOREMATE porro hoc Pythagoreo multo uniuersalius est illud, quod à Pappo demonstratur in omni triangulo, siue illud rectangulum sit, siue non, & de quibuscunque parallelogrammis super latera trianguli constructis tam rectangulis, quam non rectangulis, etiamsi non sint inter se æquiangula. Quod nos in formam theorematis redigentes, clarius hoc modo proposuimus, & meo iudicio generalius adhuc, quam Pappus.

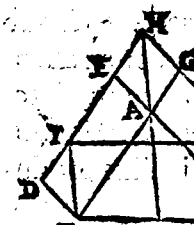
IN omni triangulo, parallelogramma quæcunque super duobus lateribus descripta, æqualia sunt parallelogrammo super reliquo latere constituto, cuius alterum latus æquale sit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera comprehendunt, ad punctum, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli opposita, si ad partes anguli illius producantur.

SIT triangulum quodcunque ABC, constituanturq. super latera AB, AC, parallelogramma quæcunque ABDE, ACFG, quorum latera DE, FG, quæ lateribus AB, AC, assumptis in triangulo opponūtur, producta ad partes anguli A, dictis lateribb. AB, AC, cōprehensi, conueniant in H, ducaturq. recta AH. Dico parallelogramma AD, AF, æqualia esse parallelogrammo super latus BC, descripto, cuius alterum



latus æquale sit, & parallelum rectæ AH. Producta enim HA, secet BC, in L, & per B, C, agantur BI, CK, parallelæ ipsi AH, iungaturq; recta IK. Quoniam igitur parallelogramma sunt BIHA, GKHA, erit vtraque BI, CK, ipsi AH, æqualis; atque adeo & inter se æquales erunt BI, GK; quæ cum sint etiam parallelæ, quòd eidem AH, parallelæ sint; erunt quoque BC, IK, parallelæ, & æquales. Quare parallelogrammum est BCKI, super latus BG, habens alterum latus BI, rectæ AH, æquale, & parallelum: Cui quidem æqualia ostendenda sunt parallelogramma AD, AF. Quia ergo æqualia sunt parallelogramma AD, ABIH, quòd eandem habeant basin AB, in eisdemq; sint parallelis AB, HD; Est autem ABIH, parallelogrammo IL, æquale, quòd illud cum hoc etiam eandem habeat basin BI, in eisdemq. sit parallelis BI, LH: Erit quoque AD, eidem IL, æquale. Non aliter ostendemus, AF, ipsi KL, esse æquale. Quare parallelogramma AD, AF, parallelogrammo BK, æqualia sunt. Quod est propositum.

a 34. pri
b 30. pri
c 33. pri
d 35. pri
e 35. pri



PAPPVS construit figuram aliter. Nam sumit rectas AC, AE; & AB, AG, in directum positas, ita vt parallelogramma AD, AF, sint equiangula, habentia angulos AED, AGF angulo BAC, f internos externo æquales, ceu hæc eius figura indicat. Sed nos vniuersalius rem proposuimus, vt manifestum est.

f 29. pri.

xlvij.

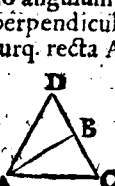
THEOR. 34. PROPOS. 48.

SI quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, æquale sit eis, quæ

à reli-

à reliquis trianguli lateribus describuntur, quadratis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.

DETVR triangulum ABC, sitq. quadratum lateris AC, æquale quadratis reliquorum laterum BA, BC. Dico angulum ABC, esse rectum. Ducatur hamque BD, perpendicularis ad BA, & æqualis rectæ BC, connectaturq. recta AD. Quoniam igitur in triangulo ABD, angulus ABD, rectus est, [a] erit quadratum rectæ AD, æquale quadratis rectarum BA, BD: Est autem quadratum rectæ BD, quadrato rectæ BC, æquale, ob linearum æqualitatem. Quare quadratum rectæ AD, quadratis rectarum BA, BC, æquale erit. Cum ergo quadratum rectæ AC, eisdem quadratis rectarum BA, BC, æquale ponatur, [b] erunt (quadrata) rectarum AD, AC, inter se æqualia, ac propterea & rectæ ipsæ AD, AC, æquales. Quoniam igitur latera BA, BD, trianguli ABD, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli ABC; & basis AD, ostensa est æqualis basi AC; [c] erunt anguli ABD, ABC, æquales: Est autem angulus ABD, ex constructione rectus. Igitur & angulus ABC, rectus erit. Si igitur quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur, &c. Quod demonstrandum erat.



a 47. primi.

b 1. prom.

c 8. primi.

SCHOLIVM.

CONVERSVM est autem theorema hoc, præcedentis theorematis Pythagorici, vt perspicuum est.

TRIANGVLORVM Comparationes.

NOVEM modis duo triangula inter se comparauit Euclides hoc libro. Primum

quando duo latera duobus lateribus æquatia sunt, vtrumq. vtrique, cótinentq. angulum angulo æqualem, a collegit æqualitatem basium, reliquorum angulorum, atque adeo totorum triangulorum.

a 4. pri.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, basisque basi æqualis, b intulit æqualitatem angulorum illis lateribus comprehensorum. Vbi nos concluſimus etiam æqualitatem reliquorum angulorum, totaque triangula probauimus esse æqualia.

b 8. pri.

TERTIO, cum duo latera duobus lateribus sunt æqualia, vtrumque vtrique, comprehendunt autem angulos inæquales, c ostendit basim maiori angulo oppositum esse maiorem base minori angulo oppoſita.

c 24. primi.

QVARTO, cum duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, at bases inæquales, d demonstrauit angulum maiori basi oppositum esse maiorem angulo minori basi oppoſito.

d 25. pri

QVINTO, quando duo anguli duobus angulis æquales sunt, vterque vtrique, &

vnum

vnum latus vni lateri æquale, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod vni æqualium angulorum opponitur, [a] probauit reliqua latera vnius reliquis lateribus alterius esse æqualia, & reliquum angulum reliquo angulo. Vbi nos docuimus sequi etiã, tota triangula esse æqualia. [a] 26. pri

SEXTO [b] demonstrauit, duo triãgula super eandem basin, & inter easdem parallelas constituta, esse æqualia. [b] 37. pri

SEPTIMO [c] ostendit, duo triangula super æquales bases, & inter easdem parallelas constituta, æqualia esse. [c] 38. pri

OCTAVO [d] docuit, duo triangula æqualia super eandem basim, & versus eandem partem constituta, esse inter easdem parallelas. [d] 39. pri

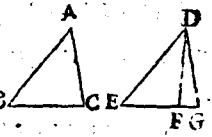
NONO denique [e] probauit, duo triãgula æqualia super æquales bases in eadem linea, in eandemque partem constituta, esse inter easdem parallelas. [e] 40. pri

ATQVE his modis argumentandi in duobus triangulis propositis vniuersa fere Geometria niti videtur, vt propterea diligenter memoriæ mandandi sint. Quemadmodum autem a propos. 26. in scholio propos. 31. excluſimus duas cõparationes, quando nimirum duo anguli duobus

angu-

angulis æquales sunt, & vnum latus vni lateri æquale, non quidem quod æqualibus adiacet angulis, vel quod vni æqualium angulorum opponitur in vtroque triangulo: sed quod in vno quidē angulis æqualibus adiacet, in altero vero vni æqualium angulorum opponitur: vel quod in vno opponitur vni æqualium angulorum, in altero vero alteri æqualium angulorum: Quemadmodum, inquam, duas hasce comparationes excluſimus, quod ex ijs non ſequatur reliquorum laterū æqualitas, vt in ſcholio propoſ. 31. demonſtrauimus: Ita quoque à propoſ. 4. excludendæ ſunt tres comparationes, ex quibus nullo modo inferri poteſt baſium æqualitas.

PRIMVM enim quando duo latera duobus lateribus æqualia ſunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, qui vni æqualium laterum opponitur, baſes æquales eſſe nequeunt; niſi quando angulus in vtroque triangulo alteri lateri æquali oppoſitus, vel eſt minor recto, vel non minor recto.



SIT enim Iſoſceles DFG, habens latera DF, DG, æqualia, & producta baſe GF, vſque ad E, iungatur recta ED, & triangulo DEG, æquale triangulum conſtruatur ABC, cuius latera AB, AC, lateribus DE, DG, æqualia ſint, & baſis BC, baſi EG. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DF, æqualia, vtrumque vtrique, angulique B, F, æqualibus lateri-

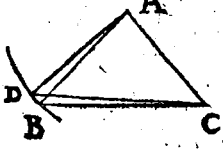
bus

bus AC, DF, oppositi æquales; & tamẽ basis BC, maior est base EF; quod BC, ipsi EG, æqualis sit. Ratio est, quod angulus C, acutus est, at DFE, obtusus. Nam cum [a] anguli DFG, & G, æquales sint; [b] & simul sumpti minores duobus rectis; erit vterque minor recto, ac proinde DFE, recto maior; quandoquidem [c] duo anguli ad F, æquales sunt duobus rectis. Quòd si duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DG, sint æqualia, angulusque B, angulo E, & vterque angulus C, G, vel minor recto, vel non minor; tum demũ sequitur, bases BC, EG, æquales esse, &c. Nam si basis BC, minor esset, quàm EG; si AB, ipsi DE, superponeretur, congrueret quidem BC, ipsi EG, propter æqualitatem angulorum B, E, sed punctum C, citra G, caderet, vt in F. Quia igitur latera DF, DG, æqualia sunt, quod DF, idem sit, quod AC, ipsi DG, æquale; [d] erunt anguli DFG, & G, æquales, ac propterea vterque minor recto; quod [e] ambo minores sint duobus rectis. Cum igitur, [f] duo anguli ad F, sint duobus rectis æquales, erit DFE, hoc est, C, quia DFE, non differt, recto maior. Non ergo vterq. angulus C, & G, minor est, aut non minor recto, sed G, quidem acutus, & C, obtusus, quod est contra hypothesin. Eodem modo, si basis BC, dicatur esse maior base EF, (positis lateribus AB, AC, æqualibus ipsis DE, DF, & angulo B, æquali ipsi E, & vtroque angulo C, & F, vel minore recto, vel nõ minore.) cadet punctum C, vltra F, vt in G; eritque rursus angulus quidem C, hoc est, G, acutus, &

[a] 5. pri.
[b] 17. pri
[c] 13. pri
[d] 5. pri.
[e] 17. pri
[f] 13. pri.

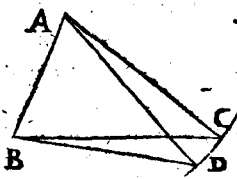
DFE, obtusus. quod est contra hypothesin.

DEINDE, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & vnus angulus vni angulo, ita vt vnus vni æqualium laterum, & alter alteri opponatur, nihil etiam colligi post. Nam sit triangulum ABC, cuius latus AB, maius sit latere AC. Erit a ergo angulus ACB, maior angulo ABC. a 18. pri



Fiat angulus ACD, angulo ABC, æqualis; cadetque CD, supra CB. Describatur quoque ex A, per B, arcus circuli secãs CD, in D, iungaturque recta AD. Sunt igitur duo latera AB, AC, duobus lateribus AD, AC, æqualia, vtrumque vtrique, & angulus ABC, lateri AC, oppositus, æqualis angulo ACD, lateri AD: opposito: Et tamẽ bases BC, DC, æquales nõ sunt. Si. n. æquales essent, essent tã duæ rectæ AB, AD, quã duæ CB, CD, æquales. b *quod est absurdum.* b 7. pri. *vel etiam, anguli BAC, DAC,* c *æquales essent, pars & totum. quod est absurdum.* c 8. pri.

POSTREMO, quando duo latera duobus lateribus æqualia sunt, vtrumque vtrique, & angulus in vno triangulo illis lateribus comprehẽsus, æqualis angulo, qui in altero triangulo opponitur vni illorum laterum, nihil etiam potest inferri. Sit namq. triangulum ABC, cuius vtrumq. latus AC,



CB,

CB, maius sit latere AB; & BC, maius, quam AC, Erit c ergo angulus BAC, maior angulo ABC. Si igitur fiat angulus ABD, angulo BAC, æqualis, cadet BD, infra BC. Describatur quoque arcus circuli ex A, per C, qui infra BC, cadet, secabitque BD, in D. Iuncta igitur recta AD, erunt duo latera AB, AC, duobus lateribus AB, AD, æqualia; vtrumque vtrique, angulusque BAC, illis lateribus AB, AC, comprehensus, æqualis angulo ABD, qui lateri AD, opponitur: Et tamen bases BC, BD, æquales non sunt. Alias tam rectæ AC, AD, quam BC, BD; æquales essent a quod est absurdum. Vel etiam, anguli BAC, BAD, æquales essent, totum & pars. quod est absurdum. c 18. pri.

a 7. pri.

b 8. pri.

RECTE igitur Euclides propos. 4. præcepit angulum illis lateribus comprehensum in vno triangulo debere esse æqualem angulo alterius trianguli, qui illis quoque lateribus comprehenditur: quandoquidem sine hac conditione nihil colligere licet, vt demonstrauimus.

FINIS ELEMENTI PRIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

I.

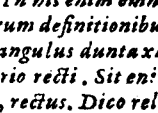
OMNE parallelogrammum rectangulum contineri dicitur ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulũ.

AGIT Euclides ſecundo hoc libro de potentijs linearum rectarum, inquirendo, quantæ ſint & quadratæ partium cuiuſuis lineæ rectæ diuiſæ, & parallelogramma rectangula ſub partibus eiuſdem lineæ diuiſæ comprehenſa, tam inter ſe, quam comparata cum quadrato totius lineæ, &c. Quod vt commodè exequatur, explicat prius duabus definitionibus duo ad ea, quæ demonſtranda ſunt, recte intelligenda maxime neceſſaria.

PRIORI definitione exponit, ſub quibus rectis lineis

conti-

contineri dicatur parallelogrammum quodcunque rectangulum: Et quid sit, parallelogrammum contineri sub duabus lineis rectis. Quod vt intelligatur, explicandum primũ est, Parallelogrammum illud dici rectangulum, cuius omnes anguli sunt recti. Cuius quidem duo tantum sunt genera. Quadratum, & Altera parte longius. In his enim omnes anguli sunt recti, vt perspicuum est ex eorum definitionibus. In omni porro parallelogrammo, si vnus angulus duntaxat detur rectus, erunt & reliqui tres necessario recti. Sit enim in parallelogrammo ABCD, angulus A, rectus. Dico reliquos tres angulos B, C, D, rectos quoque esse. Nam cum parallelæ sint AD, BC, [a] *erunt anguli A, & B, interni, duobus rectis æquales; At angulus A, rectus est, ex hypothesi. Igitur & B, rectus erit. Quoniã vero* [b] *quilibet suo opposito est æqualis, vt angulus A, angulo C, & angulus B, angulo D; erunt & anguli C, & D, recti.*



a 29. pri

b 34. pri

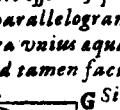
DICIT itaque Euclides, quodlibet parallelogrammum rectangulum contineri sub duabus rectis lineis, quæ vnum eius angulum rectum continent. Vt parallelogrammum rectangulum ABCD, contineri dicitur sub duabus lineis rectis AB, AD; vel sub AD, DC; vel sub DC, CB, vel denique sub AB, BC: quoniam qualibet huiusmodi duæ linea exprimunt totam parallelogrammi magnitudinem, vna quidem vt AB, vel DC, eius longitudinem, altera vero, vt AD, vel BC, eius latitudinem. Vnde expressis duabus lineis, quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota eius quantitas concipitur, intelligiturque, longitudo nimirum, atque latitudo. Accedit etiam, quod ex motu imaginario vnius linea in alterã huiusmodi parallelogrãmum conficitur. Si namq. animo concipiatur recta AB, deorsum secundum rectam AD, moueri in transuersum, ita vt semper angulum rectum cum AD, constituat, donec punctũ A, ad punctum D, & punctum B, ad punctum C, perueniat, describetur erit totum parallelogrammum ABCD. Idẽ fiet, si AD, ponatur moueri in transuersum secundum rectam AB, &c. Quamobrem iure optimo sub talibus duabus lineis rectis contineri dicitur parallelogrammum rectangulum.

ITA QVE parallelogrammum rectangulum; quod sub duabus rectis lineis contineri dicitur, erit illud, cuius duo latera circa vnum angulum rectum æqualia sunt duabus illis rectis lineis, vtrumque vtrique. Vt parallelogrammum rectangulum sub rectis E, & F, contentum, erit idem, quod parallelogrammum ABCD: quoniam latus AB, æquale est rectæ E, & latus AD, rectæ F.

E ——— F ———

PERSPICVVM autem est ex dictis, parallelogrammum rectangulum contentum sub duabus lineis æqualibus esse quadratum. Cum enim quælibet illarum linearum æqualium æqualis sit linea opposita, erunt omnia quatuor parallelogrammi rectanguli latera æqualia. Quare ex definitione quadrati, quadratum erit.

ITEM manifestum est, si dua recta linea alijs duabus rectis lineis æquales fuerint, vtraque vtrique, rectangulum parallelogrammum sub prioribus duabus comprehensum, æquale esse ei, quod sub duabus posterioribus comprehenditur, parallelogrammo rectangulo: quoniam & anguli, & latera vnius æqualia sunt & angulis, & lateribus alterius. Quod tamen facile hac etiam ratione demonstrari potest.



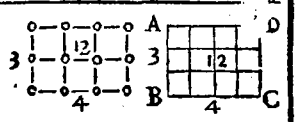
Sint rectæ AB, BC, æquales rectis DE, EF, vtraque vtrique. Dico parallelogrammum rectangulum ABCG, contentum sub AB, BC, æquale esse parallelogrammo rectangulo DEFH, contento sub DE, EF. Ductis etenim diametris AC, DF, cum latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sint lateribus DE, EF, trianguli DEF, & anguli B, & E, æquales, nempe recti; [a] erunt triangula ABC, DEF, æqualia. Eadem ratione æqualia erunt triangula AGC, DHF. Quare tota parallelogramma ABCG, DEFH, æqualia erunt.

[a] 4. pri.

HABET autem comprehensio hac parallelogrãmi rectanguli sub duabus rectis lineis angulum rectum continentibus, magnã affinitatẽ cum multiplicatione vnius numeri in alterum. Sicut enim ex multiplicatione 3 in 4 producitur numerus 12. qui in formã parallelogrammi constituitur, vnde & contineri dicitur sub 3. & 4. Ita quoq. parallelogrammũ

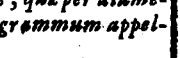
ABCD.

ABCD, cõprehẽsum sub duabus rectis AB, BC, quarũ illa sit 3. palmorum, hæc autem 4. constiat 12. palmis quadratis, qui quidem ex ductu



linea AB, 3. palmorum in lineam BC, 4. palmorum producuntur, vt figura indicat, notumq. est Arithmeticis, atque Geometris, demonstraturq. à Ioanne Regiomont. lib. 1. de triangulis, propos. 16. Hinc fit, vt nonnulli dicant, parallelogrammum rectangulum gigni ex ductu duarum linearum circa angulum rectum vnius in alteram. Vt proxime antecedens parallelogrammum ex ductu linea AB, in lineam BC, vel (quod idem est) ex ductu linea BC, in lineam AB. Idem enim parallelogrammum procreatur, siue minor linea in maiorem, siue maior in minorem ducatur: quemadmodum etiam idem producitur numerus, siue minor numerus in maiorem, siue maior in minorem ducatur, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 16. Tam enim ex multiplicatione 3. in 4. quam ex 4. in 3. producitur hic numerus 12.

OBITER quoque monendus mihi lector videtur, Euclidem in hoc secundo libro, & in alijs, qui sequuntur, parallelogrammum rectangulum appellare simpliciter rectangulum; quod etiam cæteri Geometræ obseruant, ita vt nomine rectanguli perpetuo intelligendum sit parallelogrammum rectangulum. Rursus, ne toties eadem li-

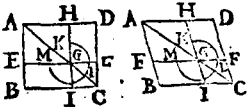


tera repetantur, solent Geometræ exprimere parallelogrammum tam rectangulum, quam non rectangulum duabus duntaxat literis, quæ per diametrum opponuntur. Vt appositum parallelogrammum appellant AC, vel BD.

II.

IN omni parallelogrammo spatio, vnumquodlibet eorum, quæ circa diametrum illius sunt, parallelogrammorũ, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

IN parallelogrammo ABCD, siue rectangulum illud sit, siue non, ducatur diameter AC, ex cuius puncto quolibet G, ducantur recta EF, HI, parallela lateribus parallelogrammi, ita vt parallelogrammum diuisum sit in quatuor parallelogrãma, quorũ duo EH, IF, dicũtur esse circa diametrum, alia vero duo BG, GD, complementa, vt manifestum est ex vltima definitione primi lib. Itaque figura composita ex parallelogrammo vtrolibet circa diametrum, vt ex IF, vna cum duobus complementis BG, GD, qualis est figura EBCDHGE, quam complectitur circunferentia KLM, dicitur Gnomon. Eadem ratione figura FDABIGF, composita ex parallelogrammo EH, circa diametrum, & duobus complementis BG, GD, Gnomon appellabitur.



SED iam ad propositiones secundi huius lib. veniamus, in quibus sane operæ pretium fuerit, multum laboris in eis exquisite intelligendis ponere, propter multiplicem earum vsum cum in rebus Geometricis, tum in humanis commercijs. Nam ex nonnullis harum propositionum demonstrantur regulæ illæ admirabiles Algebræ, quibus vix credo in disciplinis humanis præstantius aliquid reperiri, quippe cum miracula quædam numerorum (vt ita dicam) eruant tam abstrusa, ac recondita, vt facultas illa omnem captum humanum superare videatur, tanta nihilominus facilitate, atque voluptate, vt facilius videatur esse nihil. Ex alijs deinde propositionibus huius lib. elicuntur demonstrationes, quibus inter se adduntur, subtrahuntur, multiplicantur, atque diuiduntur numeri surdi, (quos dicunt) hoc est, qui nullo modo exprimi possunt; cuiusmodi sunt radices numerorum non quadratorum, aut non cubicorũ, quæ neque per Diuinã potentiã in numeris possunt exhiberi, & hæc res contradictionẽ implicet, vt Philosophi, atq. Theologi loquuntur. Quo quid admirabilius? Quis. n. credat, per demonstrationem sciri posse, quid producatur ex radice quadrata numeri 8. ad radicem quadratã num. 18. adiecta, cum vtraq; radix incognita sit, & nulla ratione exprimi queat, quòd

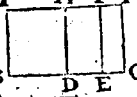
illa

illa paulo minor sit, quam 3. hæc vero paulo maior quam 4? Et tamen summa, quæ ex vtraque fit, colligitur ex vi propositionis 4. huius lib. radix quadrata numeri 50. quæ paulo maior est, quam 7. Præterea ex propos. 12. & 13. eiusdem huius lib. area, & quantitas cuiusuis trianguli exquisitissime cognoscitur, ex qua cognitione rursus dimensio omnium magnitudinum fluit, atque dimanat. Postremo vltima propos. huius lib. omnē figuram rectilineā licet irregularem, vel etiam plures, ad quadratum æquale mira facilitate reducit. Vt vere aureus dici mereatur hic liber, cum mole quidem sit perexiguus, vtilitates vero contineat prope infinitas.

THEOR. 1. PROPOS. 1. j.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, seceturque ipsarum altera in quotcunque segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub insecta, & quolibet segmentorum comprehenduntur, rectangulis.

SINT duæ rectæ A, & BC, quarum BC, secetur quomodocunque in quotlibet segmenta BD, DE, EC. Dico rectangulum sub A, & BC, comprehensum æquale esse omnibus rectangulis simul sumptis, quæ sub linea indiuisa A, & quolibet segmento comprehenduntur, nempe rectangulo sub A, & BD; Item sub A, & DE; Item sub A, & EC, comprehenso.



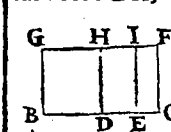
Rectangulum enim BF, comprehendatur sub A, & BC, hoc est, recta GB, æqualis sit rectæ A. Quod quidem fiet, si erigantur ad BC, duæ perdendiculares BG, CF, æquales rectę A, ducaturq. recta FG. Nam rectæ BG, CF, [a] parallelæ erunt, ob rectos angulos B, C: Sed & [b] æquales inter se sunt, quod vtraque rectæ A. æqualis ponatur. [c] Igitur erunt quoque GF, BC, parallelæ, & æquales inter se: ac

[a] 28. primi.
[b] 1. prom
[c] 33. pri

proinde rectangulum erit BF, contentum sub A, siue GB, & BC, ex defin. 1. huius lib. Deinde ex D, & E, ducantur rectæ DH, EI, parallelæ ipsi BG, vel CF. Itaque DH, EI, cum parallelæ sint ipsi BG, [a] inter se quoque parallelæ erunt. Rursus eædem, cum ex constructione parallelogramma sint BH, BI, [b] æquales erunt rectæ BG, ac propterea rectæ A. Quoniam igitur recta BG, æqualis est rectæ A, erit rectangulum BH, comprehensum sub insecta linea A, & segmento BD. Eadem ratione erit rectangulum DI, comprehensum sub A, & segmento DE. Item rectangulum EF, sub A, & segmento EC. Quare cum rectangula BH, DI, EF, æqualia sint toti rectangulo BF; perspicuum est, rectangulum comprehensum sub A, & BC, æquale esse rectangulis omnibus, quæ sub A, & segmentis BD, DE, EC, comprehenduntur. Si ergo fuerint duæ rectæ lineæ, secetur q. ipsarum altera, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 30. primi.

[b] 34. primi.



SCHOLIVM.

QVONIAM lib. 9. propos. 14. decem priora theoremata secundi huius libri, quæ Euclides lineis accommodat, in numeris etiam demonstrabimus, si diuidantur, vt linea; non abs re fuerit, breuiter numeris applicare ea, quæ pluribus verbis de lineis hic demonstrantur, præsertim cum multiplicatio numeri vnius in alterum respondeat ductui vnius lineæ in alteram, vt supra diximus. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque vt 6. & 10. diuidatur posterior in tres partes 5. 3. & 2. Dico 60. numerum productum ex 6. in 10. æqualem esse tribus numeris 30. 18. & 12. qui ex multiplicatione 6. in 5. & 3. & 2. gignuntur: id quod perspicuum est.

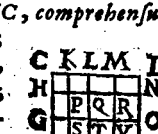
DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus duo alia theoremata, quæ iam sequuntur.

SI fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ambæ in quotcunque segmenta: Rectan-

gulum

gulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur rectangulis.

SINT duæ rectæ AB, AC, *rectum angulum A, continentes, quæ secentur in partes* AD, DE, EF, FB; AG, GH, HC. *Dico rectangulum sub rectis* AB, AC, *comprehensum æquale esse rectangulis, quæ sub* AD, AG; AD, GH; AD, HC: DE, AG; DE, GH; DE, HC: EF, AG; EF, GH; EF, HC: FB, AG; FB, GH; FB, HC, *continentur. Compleatur rectangulum* AI, *ducãturq.* DK, EL, FM; *parallelæ ipsi* AC, *vel* BI: *Item* HN, GO, *parallelæ ipsi* AB, *vel* CI; *quæ secent priores in* P, Q, R, S, T, V. *Quoniam igitur rectangulum* AS, *continetur sub* AD, AG; & GP, *sub* AD, GH; & HK, *sub* AD, HC; (a *quod recta* GS, HP; *ipsi* AD, *sint æquales:*) a 34. pri. *Item rectangula* DT, SQ, PL, *continentur sub* DE, AG; DE, GH; DE, HC; (b *quod* DS, SP, PK, *ipsis* AG, GH, HC, *æquales sint, &* ST, PQ, *ipsi* DE) *Et eadem ratione rectangula* EV, TR, QM, *continentur sub* EF, AG; EF, GH; EF, HC; *Necnon rectangula* FO, VN, RI, *sub* FB, AG; FB, GH; FB, HC; *perspicuum est, rectangulum sub* AB, AC, *æquale esse rectangulis sub singulis partibus* AD, DE, EF, FB, & *quolibet segmentorum* AG, GH, HC, *comprehensis. Quod est propositum.*

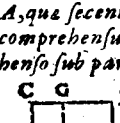


b 34. pri

SI sint duæ rectæ lineæ, secenturq. ambæ vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quę sub totis lineis, & dictis partibus mutuo

continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso.

SINT duæ rectæ AB, AC, angulum continentes rectum A, quæ secentur vtcunque in D, & E. Dico rectangulum comprehensum sub AB, AC, vna cum rectangulo comprehenso sub partibus AD, EC, æquale esse rectangulis contentis sub AB, EC; AC, AD; vna cum rectangulo sub DB, AE, comprehenso. Compleatur enim rectangulum AF, agaturq. per D, recta DG, ipsi AC, vel BF, parallela; necnon per E, recta EH, secans DG, in I, parallela ipsi AB, vel CF. Quoniam igitur rectangulum AF, æquale est rectangulis EF, DH, AI; si addatur commune EG, erunt rectangula AF, EG, nempe sub totis AB, AC, & partibus AD, EC, comprehensa, æqualia rectangulis EF, AG, DH, sub AB, EC; AC, AD; DB, AE, comprehensis æqualia. Quod est propositum.



IN numeris etiam hæc eadem perspicua sunt. Propositis enim duobus hisce numeris 10. & 8. quorum prior in tres partes, 2. 3. 5. posterior vero in duas, 3. 5. diuidatur; perspicuum est, 80. numerum productum ex 10. in 8. æqualem esse sex numeris 6. 10. 9. 15. 15. 25. qui producuntur ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 3. 5. efficiuntq. simul additi 80. vt volebat theoremæ 1. Federici.

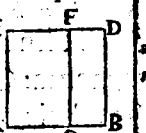
RVRSVS, si ijdem numeri secentur vtcunque, prior quidem in 3. 7 posterior autem in 2. 6. manifestum quoque est 80. numerum productum ex 10. in 8. vna cum 18. numero producto ex 3. in 6. æqualem esse tribus numeris 60. 24. 14. qui producuntur ex 10. in 6. & ex 8. in 3. & ex reliqua parte 7. in reliquam partem 2. cum vtrobique efficiantur 98. vt theorema 2. Federici optabat.

ij. THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmento-

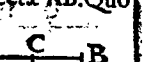
gmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod à tota fit, quadrato.

RECTA linea AB, diuidatur vtcunque in C, duas in partes. Dico duo rectangula comprehensa sub tota AB, & segmentis AC, CB, simul sumpta, æqualia esse quadrato totius lineæ AB. Describatur .n. AD, quadratum lineæ AB, & ex C, ducatur CF, parallela rectæ AE, vel BD, quæ [a] æqualis erit rectæ AE, hoc est, rectæ AB, cui æqualis est recta AE, ex definitione quadrati. Quoniam igitur recta AE, æqualis est rectæ AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Similiter erit rectangulum CD, comprehensum sub tota AB, & segmento CB. Quare cùm rectangula AF, CD, æqualia sint quadrato AD, perspicuum est, rectangula comprehensa sub AB, & segmentis AC, CB, æqualia esse quadrato lineæ AB. Si igitur recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 34. primi.

ALITER. Sumatur recta D, æqualis rectæ AB. Quoniam igitur AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub insecta D, & recta AB, hoc est quadratum rectæ AB, [b] æquale duobus rectangulis, quæ comprehenduntur sub D, insecta, hoc est, sub AB, & singulis segmentis AC, CB. quod est propositum.

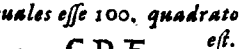


[b] 1. sec.

SCHOLIVM.

QVANQVAM Euclides secundum hoc theorema proponat de linea recta diuisa in duas tantummodo partes vtcunque, idem tamen eisdem medijs demonstrabitur, si linea diuidatur in quotcunque partes, vt ex his figuris manifestum est. In numeris uero idem perspicitur hoc modo. Numerus 10. diuisus sit in duas partes 7. & 3. Dico numeros 70. & 30. qui producuntur ex multiplicatione 10. in 7. & 3. a-

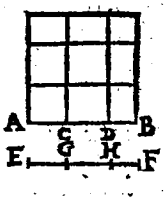
quales esse 100. quadrato ipsius numeri 10. vt manifestum est. Simili modo si numerus 10. diuidatur in plures partes 3. 2. 4. & 1. erunt numeri 30. 20. 40. & 10. geniti ex 10. in 3. 2. 4. & 1. æquales 100. quadrato ipsius numeri 10.



SIMILI modo demonstrat hoc loco Federicus Commandinus hoc theorema.

SI linea rectà secetur in quotcunque segmenta: Quadratum, quod à tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmẽtis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis.

SIT recta AB, diuisa in partes quotcunque AC, CD, DB. Dico quadratum ex AB, descriptum, æquale esse rectangulis, quæ sub singulis partibus AC, CD, DB, & quolibet segmentorum AC, CD, DB, comprehenduntur; hoc est, rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD; DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB, comprehensis. Sumpta enim recta EF, quæ æqualis sit ipsi AB, diuisaq. in partes EG, GH, HF, partibus AC, CD, DB, æquales. Erit ex ijs, quæ ad propos. 1. huius libri demonstrauimus, rectangulum sub AB, EF, hoc est, quadratum ipsius AB, æquale rectangulis sub AC, EG; AC, GH; AC, HF: CD, EG; CD, GH; CD, HF: DB, EG; DB, GH; DB, HF. Cum igitur partes AC, CD, DB, partibus EG, GH, HF, sint æquales; erit quoque quadratum ex AB, æquale rectangulis sub AC, AC; AC, CD; AC, DB: CD, AC; CD, CD; CD, DB: DB, AC; DB, CD; DB, DB. Quod est propositum.



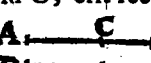
IN numeris idem est manifestum. Si enim numerus 10. diuidatur in 2. 3. 5. erit 100. quadratus totius æqualis his nouem numeris 4. 6. 10. 6. 9. 15. 10. 15. 25. qui ex singulis partibus 2. 3. 5. in quamlibet partium 2. 3. 5. procreantur, vt perspicuum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prædicto segmento describitur, quadrato.

LINEA recta AB, diuisa sit vtcunque in puncto C. Dico rectangulum comprehensum sub tota AB, & vtrouis segmento, vt AC, (siue hoc segmentum maius sit, siue minus) æquale esse rectangulo sub segmentis AC, CB, comprehenso, & quadrato prioris segmenti assumpti AC. Constituatur enim quadratum dicti segmenti AC, quod sit AD: & ex B, educatur BF, parallela ipsi AE, donec coeat cum ED, protracta in F. Quoniam igitur AE, recta rectæ AC, æqualis est, ex quadrati definitione; erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC. Rursus, quia recta CD, eadem ratione æqualis est rectæ AC; erit rectangulum CF, comprehensum sub segmentis AC, & CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale sit quadrato AD, & rectangulo CF; liquido constat, rectangulum sub AB, tota, & segmento AC, comprehensum esse æquale rectangulo comprehenso sub segmentis AC, CB, & quadrato prædicti segmenti AC. Itaque si recta linea secta sit vtcunque, &c. Quod erat ostendendum.

ALITER. Accipiatur recta D, æqualis segmento AC. Quoniam igitur recta AB, diuisa est in C, erit rectangulum comprehensum sub D, & AB, hoc est, sub AB, & AC,[a] æquale rectangulo sub D, & CB, hoc est, sub AC, CB, & rectangulo sub D, & AC, hoc est, quadrato segmenti AC. Quod est propositum.



[a] 1. sec.

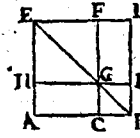
SCHO-

SCHOLIVM.

VT hoc theorema numeris accommodatur, sit numerus 10. diuisus in 7. & 3. Dico numerum 70. productum ex 10. in 7. aequalem esse numero 21. qui ex 7. in 3. producitur, una cum 49. quadrato prioris partis 7. Id quod res ipsa indicat. Pari ratione erit numerus 30. procreatus ex 10. in 3. aequalis numero 21. producto ex 3. in 7. simul cum 9. quadrato praedicti numeri 3.

iiij. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, aequale est & illis, quae à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.



RECTA linea AB, diuisa sit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectae AB. aequale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis AC, CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, ducaturq. diameter BE. Deinde ex C, agatur CF, parallela rectae BD, secans diametrum in G, puncto, per quod rursus ducatur HI, parallela rectae AB. Eritq. quadratum AD, diuisum in quatuor parallelogramma. Quoniam igitur trianguli ABE, duo latera AB, AE, aequalia sunt; [a] erunt duo anguli ABE, AEB, aequales: Atqui [b] tres anguli ABE, AEB, BAE, trianguli ABE, duobus rectis sunt aequales, & BAE, rectus est. Reliqui ergo duo anguli ABE, AEB, semirecti erunt. Eadem ratione ostendes angulos DBE, DEB, semirectos esse. Quod etiam constat ex ijs, quae ad 34. propos. lib. 1. demonstrauimus. Nam, vt ibi ostensum est, diameter BE, diuidit angulos rectos ABD, AED, bifariam. Quia ergo anguli quoque tres trianguli EFG, [c] aequales sunt duobus rectis, & angulus EFG, rectus est,

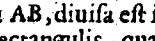
[a] 5. pri.
[b] 32. pri
[c] 32. pri

cum

a cum sit æqualis recto D, externus interno; nec non FEG, ostensus semirectus; erit & reliquus EGF, semirectus; ideoq. æqualis angulo FEG. Quare b æqualia erunt latera EF, FG: quæ cũ sint æqualia oppositis lateribꝰ GH, HE, erit parallelogrammũ FH, quadratũ, cum omnia eius latera sint æqualia, & omnes ãguli recti; propterea quod existente vno angulo recto, nẽpe FEH, vel F, in parallelogrãmo FH, omnes quatuor recti sunt, vt ad defin. 1. huius lib. monstrauimus. Eadem ratione quadratum erit CI. Quamobrem CI, FH, quadrata sunt segmentorum AC, CB, quod latus HG, c æquale sit rectæ AC. Rectangula quoque AG, DG, comprehensa erunt sub segmentis AC, CB; propterea quod CG, GI, æquales sunt rectæ CB, ob quadratum CI; & FG, æqualis rectæ GH, ob quadratum FH, hoc est. c rectæ AC. Quocirca cum quadratum AD, æquale sit quadratis CI, FH, & rectangulis AG, DG; constat quadratum AD, totius lineæ AB, æquale esse quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenso sub eisdem segmentis AC, CB, bis sumpto. Igitur si recta linea secta sit vtcunque, quadratum, quod à tota describitur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 29. pri
b 6. pri.
c 34. pri
d 34. pri
e 34. pri

ALITER. Quoniam recta AB, diuisa est in C, f erit quadratum totius AB, æquale rectangulis, quæ sub tota AB, & segmentis AC, CB, comprehenduntur: Rectangulum autem sub AB, AC, comprehensum, g æquale est rectangulo comprehenso sub AC, CB, & quadrato segmenti AC: Item rectangulum sub AB, CB, comprehensum, æquale est rectangulo sub CB, AC, comprehenso, & quadrato segmenti CB. Igitur quadratum rectæ AB, æquale etiam est quadratis segmentorum AC, CB, & rectangulis sub AC, CB, & sub CB, AC. Quod est propositum.



f 2. sec.
g 3. sec.

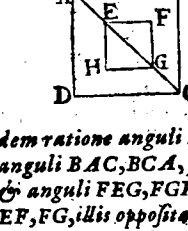
COROLLARIVM I.

HINC manifestum est, parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

CONSTAT: hoc ex priori huius theorematis demonstratione, in qua ostensum est, rectangula CI, FH, quæ sunt

circa

circa diametrum BE, esse quadrata. In omnibus enim alijs quadratis eadem erit demonstratio. Est tamen corollarium istud intelligendum de illis parallelogrammis circa diametrum quadrati, qua communem aliquem angulum habent cum toto quadrato, cuiusmodi sunt dicta parallelogramma CI,FH. Illud enim angulum habet ABD. communem cum quadrato, hoc vero angulum AED. Idem nihilominus verum est de quibuscunque parallelogrammis circa diametrum quadrati, etiam protractam, quamuis non habeant cum quadrato angulum aliquem communem, dummodo eorum latera parallela sint quadrati lateribus. Circa enim diametrum AC, quadrati BD, consistat parallelogrammum FH, siue intra quadratum, siue extra; quod tamen habeat latera lateribus quadrati BD, parallela. Dico FH, esse quadratū. Cum enim parallelæ sint AB, EF, a *erunt anguli BAC,FEG, æquales, interni, & externus; atque eadem ratione anguli BCA,FGE, æquales erunt: Sunt autem anguli BAC,BCA, semirecti, vt ostensum iam fuit. Igitur & anguli FEG,FGE, semirecti erunt:* b *propterea que latera EF,FG, illis opposita æqualia,* c *& angulus F, rectus. Quare cum EF,FG, latera* d *æqualia sint oppositis lateribus GH, HE, æquilaterum erit parallelogrammum FH: Sed & rectangulum est, ex ijs, quæ ad defin. 1. huius lib. ostendimus, propterea quod angulus vnus F, rectus est demonstratus. Igitur FH, quadratum erit. Quod est propositum.*



a 29.pri

b 6.pri,
c 32.pri
d 34.pri

COROLLARIVM II.

SEQVITVR etiam ex demonstratione huius propos. 4. diametrum cuiusuis quadrati diuidere eius angulos bifariam. Probatum enim fuit, angulos ABE, DEB, esse semirectos, &c. Id quod etiam ad propos. 34. lib. 1 demonstrauimus.

SCHOLIVM.

IN numeris ita theorema hoc quartum exercebitur. Sit numerus 10. diuisus vtcunque in 7. & 3. Vides igitur 100. quadratum totius numeri æquale esse 49. & 9. quadratis

partium

partium 7. & 3. una cum numero 21. qui ex 7. in 3. procreatur, his sumpto. Nam 49.9.21. & 21, efficiunt 100.

PERFACILE autem erit ex hoc theoremate 4. demonstrare hoc aliud theorema.

SI linea recta fuerit dupla lineæ rectæ, quadratum ex illa descriptū, quadruplum est quadrati ex hac descripti. Et si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum est lateris huius.

SIT enim primum linea AB, dupla lineæ K. Dico quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ K. Nam diuisa AB, bifariam in C, si fiat constructio, vt in 4. hoc theoremate, erunt quatuor parallelogramma AG, CI, IF, FH, quadrata, atque inter se aqualia, cum omnia eorum latera sint aqualia, omnesq. anguli recti, vt facile demonstrari potest ex propos. 34. lib. 1. Quare cum quadratum AD, æquale sit quatuor quadratis AG, CI, IF, FH, erit quadratum lineæ AB, quadruplum quadrati lineæ AC, hoc est, lineæ K, qua aqualis est ipsi AC. Est enim vtraque dimidium lineæ AB.

BREVIVS. Quadratum rectæ AB, æquale est quadratis rectarum AC, CB, & rectangulo sub rectis lineis AC, CB, bis comprehenso. Cum igitur quadrata rectarum aqualium AC, CB, aqualia sint; & rectangulum sub aqualibus AC, CB, quadratum quoque sit, atque aquale quadrato rectæ AC; Constat quadratum rectæ AB, quadruplum esse quadrati rectæ AC; cum æquale sit quatuor quadratis, quorum vnumquodque quadrato rectæ AC, æquale est. a 4. sec.

SIT deinde quadratum rectæ AB, quadruplum quadrati rectæ K. Dico latus AB, duplum esse lateris K. Nam diuisa recta AB, bifariam in C, vt AB, dupla sit ipsius AC; erit, vt iam demonstratum est, quadratum rectæ AB, quadruplū quadrati rectæ AC. Ponitur aūt & quadruplū quadrati rectæ K. Igitur aqualia sunt quadrata rectarū K, &

AC,

AC, & ipsa propterea recta K, & AC, aequales: Est autē AB ex constructione ipsius AC, dupla. Dupla igitur etiam erit ipsius K. Haec tamen omnia aliter demonstrabimus ad propos. 20. lib. 6.

CAETERVM ex hac propos. 4. colligi potest modus inueniendi numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat. Si namque ex dato numero auferatur 1. erit quadratus numerus ex reliqui numeri dimidio in se multiplicato productus, is qui quaeritur. Vt si datus sit numerus 15. inueniendusq. numerus quadratus, cum quo datus numerus 15. faciat numerum item quadratum; detrahemus 1. ex 15. & reliqui numeri 14. dimidium 7. accipiemus. Nam numerus quadratus 49. ex eo dimidio in se multiplicato productus erit is, cum quo datus numerus 15. constituit 64. quadratum numerum, cuius latus est 8. nempe numerus una vnitate maior, quam 7. latus quadrati inuenti. Ratio huius rei haec

a 4. sec. *est. Quoniam quadratum AD, recta AB, a aquale est duobus quadratis FH, CI, partium AC, CB, vnà cum rectangulo bis comprehenso sub AC, CB; si gnomonem H B F, qui cum quadrato FH, constituit totum quadratum AD, penamus 15. quantus nimirum est datus numerus; quadratum autem CI, statuamus 1. atque adeo latus quoque eius C B, 1. erit vtrumuis rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde segmentum AC, 7. vt nimirum ex AC, in CB, qua est 1. fiant 7. Quadratum ergo FH, erit 49. Totum autem latus AB, erit 8. nempe vna vnitate maius, quam AC, latus quadrati FH. Hac ergo est causa, cur ex dato numero, hoc est, ex gnomone HBF, detrahamus 1. & reliqui numeri dimidium statuamus latus quadrati FH, quaesiti.*

VT autem numeri fracti vitentur, datus numerus debet esse impar, vt nimirum ablata 1. reliquus numerus diuidi possit bifariam. Regula nihilominus vera est, quicunque numerus datus sit,

IDEM efficiemus, si ex dato numero quemuis quadratum numerum demamus, & residui dimidium per latus quadrati ablati partiamur. Quotiens enim erit latus quadrati quaesiti. Vt si detur numerus 45. pro gnomone H B F,

aufera-

auferemus numerum quadratum 9. pro quadrato CI, cuius latus est 3. Residui 36. dimidium est 18. pro AG, quod diuisum per 3. hoc est per CG, latus quadrati ablati CI, facit Quotientem 6. pro latere GH, cuius quadratum FH, nimirum 36. additum ad gnomonem HBF, nimirum ad 45. efficit quadratum numerum 81. Vt autem fractiones euitentur, dandus erit numerus, ita vt, ablato quadrato numero aliquo, residuus numerus habeat dimidium numerum, quem latus quadrati ablati numeret.

VICISSIM reperiemus numerum quadratum, à quo datus quiuis numerus subtractus relinquat numerum quoque quadratum. Nam si ex numero dato demtur 1. & reliqui numeri dimidio adiiciatur 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si rursum datus sit numerus 15. Detracta 1. erit reliqui numeri 14. dimidium 7. cui addita 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Si enim ex eius quadrato 64. detrahas 15. remanet quadratus numerus 49. cuius latus est 7. quod perpetuo est vna vnitate minus, quam latus quadrati inuenti. Ratio etiam huius regulæ facilis est ex eadem figura huius propos. 4. Nam si gnomonem HBF, qui ex quadrato AD, subtractus reliquum facit quadratum FH, ponamus 15. quantus nimirum est numerus datus. Quadratū vero CI, statuamus 1. atque adeo & latus eius CB, 1. erit vtrumlibet rectangulorum AG, DG, 7. ac proinde & segmentum AC, 7. vt supra dictum est, & tota linea AB, 8. &c.

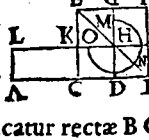
THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vnà cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei, quod à dimidia describitur, quadrato.

DIVIDATVR recta AB, bifariam in C, & per

inæqua-

inæqualia in D, vt sectionum intermedia sit recta C D, qua nimirum dimidia CB, minus segmentum D B, superat, vel qua maius segmentum AD, dimidium AC, excedit. Dico rectangulum sub segmentis inæqualibus A D, DB, comprehensum, vna cum quadrato rectæ C D, quæ inter duas est sectiones, æquale esse quadrato dimidiæ C B. Describatur enim CF, quadratum super dimidia CB: & ducta diametro BE, ducatur ex D, recta DG, parallela rectæ BF, secans diametrum BE, in H, puncto, per quod ducatur rectæ B C, parallela IK: Item ex A, rectæ CE, parallela A L, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. præcedentis propos. D I, KG, quadrata, ideoque DH, recta



a 34. pri rectæ DB, æqualis: a Est autem & KH, ipsi CD, æqualis. Quare rectangulum AH, comprehendetur sub AD, DB; & KG, erit quadratum rectæ CD. Probandum itaque est, rectangulum AH, vna cum quadrato K G, æ-

b 43. pri quale esse quadrato CF. Quoniam ergo b complementa CH, FH, æqualia sunt; si addatur commune quadratum DI, erit parallelogrammum DF, parallelogrammo CI, æ-

c 36. pri quale: c Est autem & AK, eidem CI, æquale, quod & bases AC, CB, æquales sint. Igitur DF, AK, æqualia etiam inter se erunt: quibus si commune apponatur C H, erit gnomon MNO, rectangulo AH, æqualis. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, æqualia sint quadrato CF; erit & rectangulum AH, vna cum quadrato KG, æquale eidem quadrato CF. Si recta ergo linea secetur in æqualia, & non æqualia, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

ALITER hoc theorema cum Francisco Maurolyco demonstrabimus, eo modo, quo idem in numeris demonstratur à Barlaam monacho. quod etiam cum eodem Maurolyco in sequentibus propositionibus vsque ad 11. exclusiue faciemus. Demonstrationes autem has numeris accommodatas reperies ad propos. 14. lib. 9. Ita ergo propo-

situm

situm exequemur. Quia quadratum ex CB, [a] *æquale est quadratis ex CD,DB, una cum rectangulo bis sub DB,CD; Rectangulo autem sub DB,CD, una cum quadrato ex DB,* [b] *æquale est rectangulum sub DB,CB; Erit quadratum ex CB, æquale reliquo quadrato ex CD, una cum reliquo rectangulo sub DB,CD, & rectangulo sub DB,CB, vel sub DB, AC. Atqui rectangulis sub DB,AC, & sub DB,CD,* [c] *æquale est rectangulum sub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CB, æquale erit quadrato ex CD, una cum rectangulo sub DB,AD; hoc est, rectangulum sub AD, DB, una cum quadrato ex CD, æquale erit quadrato ex CB. Quod erat demonstrandum.*

[a] 4. sec.
[b] 3. sec.
[c] 2. sec.

IDEM in numeris est manifestum. Diuidatur enim numerus 10. æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. ita vt medius numerus inter sectiones sit 2. quo videlicet dimidius numerus 5. superat minorem partem 3. &c. Vides igitur, numerum 21. ex 7. in 3. productum, una cum 4. quadrato intermedij numeri 2. æqualem esse 25. quadrato dimidij numeri 5.

EX hac etiam propos. 5. inueniemus alio modo numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque conficiat numerum. Nam si dato numero adijciatur 1. & à compositi numeri dimidio detrahatur 1. reliquum fiet latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 15. Addita 1. fit 16. à cuius dimidio 8. si dematur 1. manet 7. latus quadrati 49. cum quo datus numerus 15. componit numerum quadratum 64. cuius latus est 8. quod perpetuo est vna vnitate maior latere 7. quadrati inuenti. Ratio huius regulæ ex demonstratione propos. 5. difficilis non est. Cum enim rectangulum AH, cum quadrato KG, [d] *æquale sit quadrato CF; si rectangulum AH; ponatur 15. sicut numerus datus; at vero quadratum DI, statuatur 1. ac proinde latus DB. quoque 1. erit recta AD, 13. vt nimirum ex AD, in DB, gignatur 15. rectangulum videlicet AH. Addita ergo 1. erit tota linea AB. 16. à cuius dimidio 8. dempta 1. relinquetur CD, 7. latus nimirum quadrati KG.*

[d] 5. sec.

HIC quoque, si fracti numeri vitandi sint, debet numerus datus esse impar, vt videlicet, addita 1. dimidi possit bifariam.

E contrario reperiemus numerum quadratum, à quo si datus quiuis numerus subtrahatur, reliquus fiat numerus quoque quadratus. Nam si ad datum numerum adijciatur 1. erit dimidium compositi numeri latus quadrati quæsiti. Vt si rursum numerus 15. datus sit. Addita 1. erit compositi numeri dimidium 8. latus quadrati 64. quæsiti. Si enim demas datum numerum 15. reliquus fiet quadratus numerus 49. cuius latus 7. perpetuo minus est vna vnitate, quam latus quadrati inuenti. Ratio huius rei perspicua quoque est ex eadem figura huius propos. 5. Nam si rectangulum AH, quod ex quadrato CF, ablatum relinquit quadratum KG, statuatur 15. sicut datus numerus; & quadratum DI, ponatur 1. atque adeo & DB, eius latus 1. erit tota AB. 16. & eius dimidium CB, 8. &c.

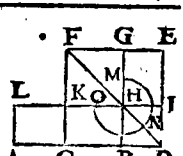
vj.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: Rectangulum comprehẽsum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico rectangulum comprehensum sub tota composita AD, & DB, adiecta, vna cum quadrato dimidiæ CB, æquale esse quadrato lineæ CD, quæ ex dimidia CB, & adiecta BD, componitur. Describatur namque CE, quadratum super CD, & ducta diametro DF, ducatur ex B, recta BG, parallela rectæ DE, secans diametrum DF, in H, puncto, per quod agatur IK, parallela

lela rectæ GD: Item ex A, ducatur rectæ CF, parallela AL, secans IK, productam in L. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4. huius lib. BI, KG, quadrata, ideoq. recta DI, rectæ DB, æqualis: [a] Est autem & KH, rectæ CB, æqualis. Quare rectangulum AI, comprehendetur sub rectis AD, DB, & KG, erit quadratum rectæ CB. Probandum itaque est, rectangulum AI, vna cum quadrato KG, æquale esse quadrato CE. Quoniam ergo parallelogrammum AK, [b] æquale est parallelogrammo CH, quod bases AC, CB, æquales sint: [c] Est autem & parallelogrammum HE, eidem CH, æquale, complementum complemento; erunt AK, HE, æqualia inter se. Addito ergo communi CI, erit rectangulum AI, gnomoni MNO, æquale. Quocirca cum gnomon MNO, & quadratum KG, quadrato CE, sint æqualia; erit & rectangulum AI, vna cum eodem quadrato KG, eidem quadrato CE, æquale. Itaque si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur, &c. Quod erat demonstrandum.



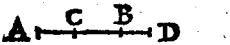
[a] 34. pri

[b] 36. pri

[c] 43. pri

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex CD, [d] *æquale est quadratis ex CB, BD, vna cum rectangulo bis sub DB, CB, hoc est, quadratis ex CB, BD, vna cum rectangulis sub DB, CB, & sub DB, AC: (sumpta AC, semel pro CB, qua illi æqualis ponitur.) Est autem rectangulis sub DB, AC; DB, CB; & sub DB, DB, (quod est quadratum ex DB,)* [e] *æquale rectangulum sub DB, & tota AD. Igitur quadratum ex CD, æquale est reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo sub DB, AD: Hoc est, rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex CB, æquale est quadrato ex CD. Quod demonstrandum erat.*



[d] 4. sec.

[e] 1. sec.

CAETERVM si rem attentius considerare velimus, comperiemus propositionem hanc 6. per precedentem 5. facillime posse demonstrari: id quod etiam eruditus vir, & in omni doctrinarum genere exercitatissimus, Mauricius Bre-

scius Gratianopolitanus, Regius olim Mathematicarum disciplinarum in Academia Parisiensi professor, animaduertit. Sit enim recta AB, secta in C, bifariam, & ei addita recta quantacunque BD. Dico rectangulum comprehensum sub tota AD, cõposita, & adiecta BD,

una cum quadrato dimidiæ CB, æquale esse quadrato rectæ CD, ex dimidia, & adiecta composita. Addita namque rectæ AD, ex altera parte rectæ AE, quæ adiecta BD, æqualis sit, erit tota ED, secta in C, æqualiter, & in B, inæqualiter, quod EA, AC, ipsis DB, BC, æquales sint. Recta quoque EB, rectæ AD, æqualis erit, quod EA, ipsi DB, sit æqualis, & AB, vtrique communis.

2 5. sec. *2 Rectangulum igitur sub partibus inæqualibus EB, BD, una cum quadrato intermediæ sectionis CB, hoc est, rectangulum sub AD, BD, una cum quadrato dimidiæ CB, æquale erit quadrato dimidiæ CD, hoc est, quadrato rectæ ex dimidia CB, datæ rectæ AB, & ex adiecta BD, compositæ. Quod est propositum.*

SECETVR iam numerus 10. bifariam, (vt & hac theorema numeris accommodemus.) in 5. & 5. addaturq. ei numerus 2. Videz igitur numerum 24. qui producitur ex toto numero composito 12. in adiectum 2. una cum 25. quadrato dimidij numeri, æqualem esse 49. quadrato huius numeri 7. qui ex dimidio 5. & adiecto 2. componitur.

EX hac porrò theoremate colligitur proprietas insignis Arithmeticæ proportionalitatis, quæ consistit in eodem semper excessu quantitatum proportionalium. Cum enim AD, superet CD, magnitudine AC, hoc est, CB; & CD, superet BD, eadem magnitudine BC: habebunt tres lineæ AD, CD, BD, proportionalitatem Arithmeticam; quandoquidem prima AD, superat secundam CD, eodem excessu AC, siue CB, quo secunda CD, tertiam BD, superat. Quare cum ostensum sit, rectangulum sub extremis AD, BD, una cum quadrato excessus CB, æquale esse quadrato lineæ mediæ CD; perspicue colligitur, in omni proportionalitate Arithmetica trium linearum, rectangulum sub extremis contentum, una cum quadrato excessus, æquale esse quadrato lineæ mediæ. Sem-

per

per enim tres lineas Arithmetice proportionales ita inter se coniungi poterunt, vt efficiant vnam lineam bifariam diuisam, (quæ nimirum æqualis sit excessui inter primam & tertiã, & ex tertia. Vt patet, si tres rectæ sint datæ AD, CD, BD. Si namque ex prima AD, abscindatur DC, æqualis mediæ, & ex media hac DC, auferatur tertia DB, erit AB, (excessus inter primam & tertiam) secta bifariam in C, eiq; addita tertia BD. Cum enim CB, excessus sit inter mediam CD, & tertiam BD, qui æqualis esse debet, ob proportionalitatem Arithmeticam, ipsi AC, nempe excessui inter primam AD, & mediam CD; erit necessario AE, secta in G, bifariam. Eademq. ratio est in alijs. Quod idem in numeris cernitur, qui eundem habent excessum. In numeris enim 4. 7. 10. eundem excessum 3, habentibus, numerus 40. productus ab extremis 4. 10. vna cum 9. quadrato excessus 3. æqualis est quadrato numero 49. qui ex medio numero 7. procreatur.

EX hac etiam propos. 6. reperiemus, vt ex 4. propos. numerum quadratum, cum quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum componat. Nam si ex dato numero dematur 1. & reliquus numerus bifariam secetur, erit quadratus numer⁹ huius dimidij is, qui quæritur. Vt si datus numerus sit 15. Dempta 1, relinquitur 14. cuius dimidium 7. dabit numerũ quadratum 49. quæsitum. Nam 15. cum 49. facit quadratũ numerũ 64. cuius latus 8. vna vnitate maius est latere 7. quadrati inuenti. Huius rei ratio manifesta ex hac 6. propos. Cum enim rectangulum AI, cum quadrato GK, æquale sit quadrato CE; si rectangulum AI, statuatur 15, at quadratũ BI, 1. ideoq. & latus BD. 1. erit tota linea AD, 15. vt nimirum multiplicata in BD, 1. producat rectangulũ AI, 15. Ablata igitur 1. BD. remanet AB, 14. cuius dimidiũ 7, dabit CB, latus quadrati KG, quæsiti. a 6. sec.

NECESSE autem etiam hic est, datum numerum esse imparem, vt fracti numeri vitentur, vt videlicet dempta 1. bifariam possit diuidi.

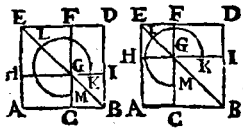
VERSA vice inueniemus numerum quadratum, à quo datus numerus detractus quadratum etiam numerũ relinquat. Si enim ex dato numero tollatur 1. & reliqui nume-

ri dimidio adiiciatur rursus 1. conficietur latus quadrati quæsiti. Vt si datus sit numerus 15. Dempta 1. erit 7. dimidium reliqui numeri 14. additaq; 1. fiet latus quadrati quæsiti 8. Nam si ex eius quadrato 64. subducas datum numerum 15. reliquus erit quadratus numerus 49. cuius latus 7. semper vna vnitate minus est latere inuento 8. Ratio est, quia si rectangulum AI, quod ex quadrato CE, subtractum relinquit quadratum KG, statuatur 15. at quadratum BI, ideoque & BD, eius latus 1. erit tota linea AD, 15. vt dictum est. Dempta ergo 1. BD, erit AB, 14. cuius dimidio CB, quod est 7. si rursus apponatur 1. fiet latus CD, 8. quod quæritur, &c.

vij.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI recta linea secetur vtcunque; Quod à tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato.



SECETVR recta AB, vtcunque in C. Dico quadratum totius AB, & quadratum segmenti siue maioris, siue minoris AC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub tota AB, & dicto segmento AC, vna cum quadrato reliqui segmenti CB. Describatur enim super AB, quadratum AD, & ducta diametro BE, ducatur ex C, recta CF, parallela rectæ AE, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela rectæ AB. Erunt igitur per corollarium 1. propos. 4 huius lib. CI, HF, quadrata: & quia recta GH, [a] æqualis est rectæ AC, erit HF, quadratum segmenti AC. Rursus quia AE, æqualis est ipsi AB, erit rectangulum AF, comprehensum sub tota AB, & segmento AC.

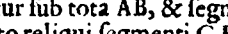
[a] 34. primi.

Eadem

Eadem ratione rectangulum H D, comprehensum erit sub eisdem rectis AB, AC, quod rectæ DE, E H, æquales sint rectis AB, AC, ob quadrata AD, FH. Quoniam igitur rectangulis AF, FI, vna cum quadrato CI, hoc est, gnomoni K L M, vna cum quadrato CI, æquale est quadratum AD; si apponatur commune quadratum HF, erunt quadrata A D, H F, æqualia rectangulis AF, DH, (quorum quodlibet comprehenditur sub tota AB, & segmento AC,) vna cum CI, quadrato reliqui segmenti C B. Si igitur recta linea secetur vtcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AB, a æquale est quadratis ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB, si addatur commune quadratum ex AC, erunt quadrata ex AB, AC, æqualia quadrato ex AC, bis, & quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB. a 4. sec.



Sed rectangulo sub AC, CB, vna cum quadrato ex AC, b æquale est rectangulum sub AB, AC: Et proinde rectangulo bis sub AC, CB. vna cum quadrato ex AC, bis, æquale est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur quadrata ex AB, AC, æqualia sunt reliquo quadrato ex CB, vna cum rectangulo bis sub AB, AC. Quod demonstrandum erat. b 3. sec.

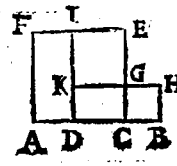
IN numeris autem diuidatur numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Igitur 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 36. quadratus numerus partis 6. æquales sunt numero 120. qui fit bis ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. vt constat. Sic etiam 100. quadratus numerus totius numeri 10. & 16 quadratus numerus partis 4. æquales sunt numero 80. qui bis fit ex toto 10. in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6.

EX FEDERICO COMMANDINO.

SI recta linea in partes inæquales secetur: Earum partium quadrata æqualia sunt rectangulo, quod bis dictis partibus conti-

netur, vna cum quadrato eius lineæ, qua maior pars superat minorem.

SECETVR recta AB, in partes inæquales AC, CB, sitque maior pars AC; ponatur autem minori parti CB, æqualis linea AD, vt DC, sit excessus, quo pars AC, superat partem CB. Dico quadrata partium AC, CB, æqualia esse rectangulo, quod bis continetur sub AC, CB, vna cum quadrato lineæ DC. Constituatur enim quadrata AE, CH, & agatur DI, ipsi CE, parallela, producaturque HG, ad K. Itaque quoniam AD, ipsi CB, est æqualis, addita communi DC, erit tota AC, hoc est, CE, toti DB, æqualis: Est autem & CG, ipsi CB, æqualis, quod quadratum sit CH. Igitur & reliqua GE, reliquæ DC, æqualis erit: Ac proinde, cum & IE, ipsi DC, sit æqualis, erunt GE, IE, æquales; ideoque IG, quadratum erit ab excessu DC, descriptum. Quoniam vero rectangula AI, DH, continentur sub partibus AC, CB, (Est enim AC, vtrique lineæ AF, DB, & CB, vtrique AD, BH, æqualis) manifestum est, quadrata AE, CH, partium AC, CB, æqualia esse rectangulis AI, DH, quæ continentur sub partibus AC, CB, vna cum quadrato IG, excessus DC. Quod est propositum.



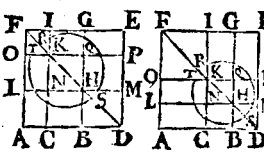
SCHOLIVM.

IN numeris. Secetur numerus 10. inæqualiter in 4. & 6. ita vt maior pars superet minorem numero 2. Vides igitur numeros 16. 36. quadratos partium, qui efficiunt 52. æquales esse numero 24. qui ex 4. in 6. fit, bis sumpto, vna cum 4. quadrato excessus 2. vt volebat theorema.

viij. ## THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota,

& vno ſegmentorum, cum eo, quod a reliquo ſegmento fit, quadrato, æquale eſt ei, quod a tota, & dicto ſegmento, tanquam ab vna linea deſcribitur, quadrato.



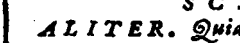
SIT recta AB, in C, diuiſa vtcunque. Dico rectangulum quater comprehenſum ſub AB, & ſegmento ſiue maiore, ſiue minore CB, vna cum quadrato reliqui ſegmenti AC, æquale eſſe quadrato lineæ, quæ ex recta AB, & dicto ſegmento CB, componitur. Producatur enim AB, verſus dictum ſegmentum CB, ad D, ſitque BD, recta æqualis ſegmento CB; & ſuper tota AD, quadratum deſcribatur AE. Ducta autem diametro DF, ducantur BG, CI, parallelæ ipſi DE, ſecantes diametrum in H, K, punctis, per quæ ducantur LM, OP, parallelæ ipſi AD, quæ ſecent priores parallelas in N, Q. Erunt igitur per collorarium 1. propoſ. 4. huius lib. OI, NQ, BM, LG, CP; circa diametrum DF, quadrata. Et quia OK, [a] æqualis eſt rectæ AC, erit OI, quadratum ſegmenti AC. Rurſus [b] quia NH, æqualis eſt rectæ CB, erit NQ, quadratum ſegmenti CB, ideoque quadrato BM, æquale, cum rectæ CB, BD, æquales ſint. Quare rectæ BH, HQ, æquales ſunt ſegmento CB; atque adeo duo rectangula AH, LQ, comprehenſa erunt ſub AB, & ſegmento CB, [c] cum LH, ſit æqualis rectæ AB. Eadem ratione erunt duo rectangula NG, HE, comprehenſa ſub AB, & CB, cum NH, HM, rectæ [d] æquales ſint rectis CB, BD; & rectæ GH, EM, rectæ FL, hoc eſt, rectæ LH, hoc eſt, rectæ AB. Et quia quadrata NQ, BM, æqualia ſunt; ſi addatur commune KG; erunt BM, KG, ſimul æqualia rectangulo NG. Quapropter quinque rectangula, AH, LQ, HE, BM, & KG, gnomonem RST, componentia, æqualia ſunt rectangulo quater comprehenſo ſub recta AB, & ſegmento CB. Cum igitur gnomon RST, & quadratum

a 34. pri
b 34. primi.
c 34. pri
d 34. pri

dratum OI, æqualia sint quadrato AB; erit rectangulum quater comprehensum sub data recta AB, & segmento CB, vna cum quadrato reliqui segmenti AC, æquale quadrato lineæ AD, compositæ ex AB, & dicto segmento CB. quamobrem, si recta linea secetur vtcunque, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

a 4. sec. *ALITER. Quia quadratum ex AD, a æquale est quadratis ex AB, BD, vna cum rectangulo sub AB, BD, bis, hoc est, quadratis ex AB, BC,*



vna cum rectangulo bis sub AB, BC: At quadrata ex AB, BC,

b 7. sec. *b æqualia sunt rectangulo bis sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC; Erit quadratum ex AD, æquale rectangulo quater sub AB, BC, vna cum quadrato ex AC. Quod demonstrandum erat.*

SECETVR iam numerus 10. vtcunque in 6. & 4. Numerus igitur 240. qui quater fit ex toto 10. in partem 6. vna cum 16. quadrato numero alterius partis 4. hoc est, numeras 256. æqualis est numero quadrato huius numeri 16. qui componitur ex dato numero 10. & dicta parte 6. vt constat. Eodem modo, numerus 160. qui fit quater ex 10. toto, in partem 4. vna cum 36. quadrato numero alterius partis 6. hoc est, numerus 196. æqualis est quadrato numero huius numeri 14. qui componitur ex 10. & 4. vt perspicuum est.

POTEST propositio hac 8. ita etiam proponi.

SI linea recta secetur vtcunque, eique in rectum adijciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius lineæ compositæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti.

NAM

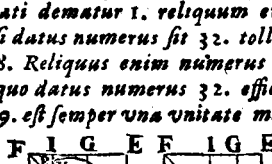
NAM recta AB, secta est in C, vtcunque, eique addita BD, segmento CB æqualis, demonstratumque est, quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub data linea AB, & adiecta BD, siue dicto segmento CB, una cum quadrato alterius segmenti AC.

Item sic.

SI linea recta secetur bifariam, eique in rectum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ lineæ æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & sub dimidia, vnà cum quadrato adiectæ.

NAM recta DC, secta est bifariam in B, eique addita CA, probatumque fuit, quadratum totius AD, æquale esse rectangulo quater comprehenso sub AB, composita ex BC, dimidia, & adiecta AC, & sub dimidia CB, una cum quadrato adiecta AC.

IAM vero ex hac quoque propos. 8. inueniemus alia ratione numerum quadratum, cum quo datus quilibet numerus conficiat numerum similiter quadratum. Nam si ex quarta parte numeri dati dematur 1. reliquum erit latus quadrati quæsiti. Vt si datus numerus sit 32. tollatur 1. ex eius quarta parte 8. Reliquus enim numerus 7. dabit quadratum 49. cum quo datus numerus 32. efficit quadratum 81. Cuius latus 9. est semper vna vnitate maius quarta parte dati numeri. Facilis est huiusce rei ratio. Quoniam enim rectangulum AH, quater sumptum, cum quadrato OI, æquale est quadrato AE; si rectangulum AH, ponatur 8. nempe quarta pars dati numeri, at vero quadratum CH, adeoque & CB, eius latus, 1. erit linea AB, 8. vt ducta in CB, 1. faciat



a 8. sec.

8. Ablа-

8. *Ablata erga* 1. *reliquum erit AC, latus quadrati OI,* 7. *quod quæritur.*

VT autem fractiones vitentur, necesse est, datum numerum diuidi posse in quatuor partes æquales, ita vt à 4. *numeretur:*

CONTRA, inueniemus quoque numerum quadratum, à quo datus numerus subtractus relinquat numerum etiam quadratum. Si namque ad quartam partem numeri dati addatur 1. *conflabitur latus quadrati quæsiti. Vt si datus rursum sit numerus* 32. *si ad quartam eius partem* 8. *adiiciatur* 1. *fiet latus* 9. *à cuius quadrato* 81. *si detrahatur datus numerus* 32. *remanebit quadratus numerus* 49. *cuius latus* 7. *semper est vnitate minus quarta parte dati numeri. Ratio est, quia si quarta pars gnomonis RST, qui ex quadrato AE, sublatus relinquit quadratum OI, hoc est, si rectangulum AH, quod gnominis RST, quartam partem esse demonstrauimus, statuatur* 8. *quarta pars dati numeri* 32. *at quadratum BM, ideoque & latus eius BD,* 1. *erit linea AB,* 8. *vt dictum est, ac proinde totum latus AD,* 9. *ex cuius quadrato AE, quod est,* 81. *si auferatur gnomon RST, quem posuimus esse* 32. *reliquum fiet quadratum OI,* 49. *cuius latus AC, est* 7. *quandoquidem AB, erat* 8. *& CB, hoc est, BD, illi æqualis,* 1. *quod quidē latus AC, perpetuo vna vnitate minus est quarta parte numeri dati* 32. *vt dictum est.*

viiij. ## THEOR. 9. PROPOS. 9.

SI recta linea secetur in æqualia, & non æqualia: Quadrata, quæ ab inæqualibus totius segmentis fiunt, simul duplicia sunt & eius, quod a dimidia, & eius, quod ab intermedia sectionum fit, quadrati.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & non bifariam in D. Dico, quadrata segmentorum inæqualium AD, DB, simul dupla esse quadratorum simul, quæ fiunt ex dimidia AC, & ex intermedia sectionum CD. Educatur

catur enim ex C, ad AB, perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, ducanturque rectę EA, EB. Deinde ex D, ducatur quoque ad AB, perpendicularis DF, secans EB, in puncto F, per quod ducatur FG, parallela ipsi AB, secans CE, in G, ducaturque tandem AF. Quoniam igitur in triangulo ACE, latera CA, CE, æqualia sunt, [a] erunt anguli CAE, CEA, æquales: Est autem angulus ACE, rectus: Reliqui igitur [b] anguli alium rectum conficient, ideoque AEC, semirectus erit. Eadem ratione angulus BEC, semirectus erit; ac propterea totus AEB, rectus. Rursus, quia trianguli FGE, angulus EGF, [c] æqualis est recto ECB, externus interno; [d] erunt reliqui duo anguli vni recto æquales: Ostensum autem est, angulum FEG, esse semirectum. Igitur & EFG, semirectus erit, propterea que anguli EFG, FEG, æquales erunt, [e] ideoque & latera EG, GF, æqualia inter se. Eodem modo ostendetur, in triangulo BDF, latera BD, DF, esse æqualia. Nam angulus FDB, est rectus, & B, semirectus, &c. Itaque cum in triangulo ACE, angulus C, rectus sit, [f] erit quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis laterum AC, CE: Atqui hæc duo quadrata inter se sunt æqualia, quod & lineæ AC, CE, æquales sint. Igitur quadratum lateris AE, duplum erit quadrati lateris AC. Rursus, quia in triangulo EGF, angulus G, rectus est, [g] erit quadratum lateris EF, æquale duobus quadratis laterum EG, GF: At duo hæc quadrata inter se æqualia sunt, ob æqualitatem linearum EG, GF. Igitur quadratum lateris EF, duplum erit quadrati lateris FG, hoc est, quadrati lineæ CD. Est enim CD, [h] recta rectæ FG, æqualis; cum CF, sit parallelogrammum. Quare duo quadrata rectarum AE, EF, dupla sunt duorum quadratorum linearum rectarum AC, CD: Sunt autem duo quadrata rectarum AE, EF [i] æqualia quadrato rectæ AF; & quadratum rectæ AF, æquale duobus quadratis rectarum AD, DF. Igitur & duo quadrata rectarum AD, DF, dupla sunt duorum quadratorum rectarum AC, CD: Atqui quadratum

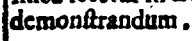
a 5. pri.
b 32. pri.
c 29. pri.
d 32. pri.
e 6. pri.
f 47. pri.
g 47. pri.
h 34. pri.
i 47. pri.

rectæ

rectæ DF, æquale est quadrato rectæ DB. Ostensum enim est, rectas DF, DB, esse æquales. Quare duo quoque quadrata rectarum AD, DB, segmentorum inæqualium, dupla sunt quadratorum rectarum AC, CD, dimidiæ lineæ, & intermediæ sectionum. Si ergo recta linea secetur in æqualia, & non æqualia &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex linea recta AD, de-
[a] 4. sec. *scriptum,* [a] *æquale est quadratis descriptis ex AC, CD, una cum parallelogrammo rectangulo bis sub rectis AC, CD, cõprehenso; si commune apponatur quadratum ex DB, erunt*



duo quadrata ex AD, DB, æqualia tribus quadratis ex AC, CD, DB, una cum rectangulo bis sub
[b] 7. sec. *AC, CD, vel sub BC, CD; Atqui quadrato ex DB, una cum rectangulo bis sub BC, CD,* [b] *æqualia sunt quadrata ex BC, seu AC, & ex CD. Quadrata igitur ex AD, DB, æqualia sunt bis quadratis ex AC, CD; Ac propterea quadrata ex AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD. Quod ostendendum erat.*

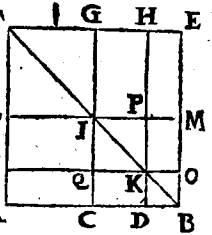
ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, æqualis est, & superat CB, ipsam CD, recta DB; superabit quoque AC, ipsam CD, eadem recta DB. Quare, vt ad 7. propos. huius libri demonstrauimus, quadrata rectarum AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis una cum quadrato rectæ DB; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, una cum quadrato rectæ DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Sed quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub
[c] 4. sec. *AC, CD, bis* [c] *est æquale quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarum AD, DB, dupla sunt quadratorum ex AC, CD.*

IAM vero rursus numerus 10. dimidiatur æqualiter in 5. & 5. Item inæqualiter in 7. & 3. vt sit intermedia sectio numerus 2. seu in propos. 5. est dictum. Quadrati numeri igitur 49. & 9. partium inæqualium 7. & 3. dupli sunt qua-

drato-

dratorum 25. & 4. dimidij numeri 5. & numeri 2. inter duas sectiones, vt manifestum est.

QVOD si lubeat, demonstrabimus & hanc 9. propos. ex ipsa constructione, vt precedentes, hoc modo. Descripto quadrato AE, totius linea AB, ductaque diametro BF, ducantur per C, D, lateribus AF, BE, parallela CG, DH, secantes diametrum BF, in punctis I, K, per quæ lateribus AB, FE, parallela agantur LM, NO, secantes CG, DH, in Q, P. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius lib. quadrata sunt LG, QP, DO, CM, NH, 2 estque LI, ipsi AC, & QK, ipsi CD, & NK, ipsi AD, æqualis; erunt NH, DO, quadrata partium inæqualium AD, DB, & LG, QP, quadrata dimidiatæ linea AC, & intermedia sectionis CD. Dico illa horum esse dupla. Quoniam enim quadrata NH, DO, superant quadrata LG, QP, quadrato DO, & rectangulis NI, IH: Sunt autem quadratum DO, & rectangula NI, IH, æqualia quadratis LG, QP, vt mox demõstrabitur; liquido constat, quadrata NH, DO, quadratorum LG, QP, esse dupla, cum hæc bis in illis contineantur. Quod autem tria hac rectangula DO, NI, IH, æqualia sint quadratis LG, QP, ita ostendetur. Rectangulum NI, [b] *æquale est rectangulo QM, quod recta NQ, QO,* [c] *æquales sint æqualibus AC, CB. Igitur NI, complectitur quadratũ QP; & insuper KM. Si ergo KM, DO, IH, æqualia sint quadrato LG, erunt necessario DO, NI, IH, æqualia duobus quadratis LG, QP. Esse autem KM, DO, IH, æqualia quadrato LG, sic demonstrabimus.* [d] *Rectangula KM, DO, simul æqualia sunt ipsi PE, quod recta BM, ME, æquales sint, cũ BM, æqualis sit ipsi CB, ob quadratum CM,* [e] *& ME, ipsi FL, hoc est, ipsi LI, ob quadratum LG, hoc est* [f] *ipsi AC. Addito ergo communi IH, erunt KM, DO, IH, æqualia ipsi IE, hoc est, quadrato LG:* [g] *quod IE, LG, æqualia sint, ob rectas LI, IM,* [h] *quæ æqualibus AC, CB, æquales sunt. Quod est propositum.*



a 34. pri

b 36. pri

c 34. pri

d 36. pri

e 34. pri

f 34. pri

g 36. pri

h 34. pri

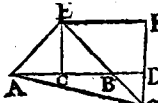
THEOR.

x.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quæpiam recta linea: Quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius, quod à dimidia, & eius, quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna, descriptum sit, quadrati.

SECETVR recta AB, bifariam in C, & ei in rectum addatur BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse quadratorum simul, quæ ex rectis AC, CD, describuntur. Super AB, enim ex C, erigatur perpendicularis CE, quæ sit æqualis dimidiæ AC, vel CB, & iungantur rectæ AE, EB. Per D, deinde educatur DF, ipsi CE, parallela, occurrens rectæ EB, protractæ in G; & per E, ducatur rectæ CD, parallela EF, secans DF, in F, iungaturque recta AG. Ostendetur iam, angulum AEB, esse rectum, vt in præcedenti propos. & CEB, semirectum; [a] ideoque eius alternum, EGF, semirectum quoque. [b] Est autem angulus F, rectus, cum in parallelogrammo CF, recto angulo C, opponatur. [c] Igitur & reliquus FEG, semirectus erit, & propterea ipsi EGF, æqualis. Quare [d] rectæ EF, FG, angulis æqualis FEG, EGF, oppositæ, æquales quoque erunt. Eadem arte ostendes, rectas BD, DG, esse æquales, propterea quod angulus BDG, sit rectus, & BGD, semirectus, &c. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, [e] æquale est quadratis æqualibus rectarum æqualium AC, CE; erit quadratum rectæ AE, duplum quadrati rectæ AC. Rursus quia quadratum rectæ EG, [f] quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, FG, æquale est; erit quoque quadratum rectæ EG, duplum quadrati rectæ EF, hoc est, rectæ CD, [g] cum CD, recta æqualis sit rectæ EF. Duo igitur quadrata rectarum



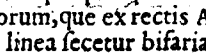
a 29. pri
b 34. pri
c 32. pri
d 6. pri.
e 47. pri
f 47. pri
g 34. pri

AE,

AE, EG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Atqui duobus quadratis rectarum AE, EG, æquale est [a] quadratum rectæ lineæ AG; & quadrato rectæ AG, æqualia sunt duo quadrata, quæ ex duabus lineis rectis AD, DG, describuntur. Quadrata ergo rectarum AD, DG, dupla sunt quadratorum ex rectis AC, CD, descriptorum. Cum igitur quadratum rectę DG, æquale sit quadrato rectæ BD; erunt quoque quadrata rectarum AD, DB, dupla quadratorum, quę ex rectis AC, CD, describuntur. Itaque si recta linea secetur bifariam, &c. Quod ostendendum erat. [a] 47. pri

SCHOLIVM.

ALITER. Quia quadratum ex AD, [b] *æquale est quadratis ex AC, CD, una cum rectangulo bis sub AC, CD, vel sub BC, CD; si commune addatur quadratum ex BD, erunt duo quadrata ex AD, BD, æqualia tribus quadratis ex AC, CD, BD, una cum rectangulo bis sub* [c] *BC, CD, Sed quadrato ex BD, una cum rectangulo bis sub BC, CD, æqualia sunt quadrata ex CD, BC, hoc est, quadrata ex AC, CD. Igitur quadrata ex AD, BD, æqualia sunt quadratis ex AC, CD, bis; Ac proinde quadrata ex AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD; Quod erat demonstrandum.*



[b] 4. sec.
[c] 7. sec.

ALITER ex Federico Commandino. Quoniam AC, ipsi CB, est æqualis, & superat CD, ipsam CB, recta BD; superabit quoque CD, ipsam AC, eadem recta BD. Quare, ut ad 7. propos. huius lib. ostendimus, quadrata ex AC, CD, æqualia sunt rectangulo sub AC, CD, bis, una cum quadrato rectæ BD; Ac propterea quadrata rectarum AC, CD, & rectangulum sub AC, CD, bis, una cum quadrato rectæ BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD: Atqui quadratis rectarum AC, CD, una cum rectangulo sub AC, CD, bis, [d] *æquale est quadratum rectæ AD. Igitur & quadrata rectarum AD, BD, dupla sunt quadratorum ex AC, CD.*

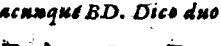
[d] 4. sec.

NVMERVS 10. *bifariam secetur in 5. & 5, cui addatur numerus quinis 3. ut totus numerus compositus sit 13 Quadrati igitur numeri 169. & 9. horum numerorum 13. &*

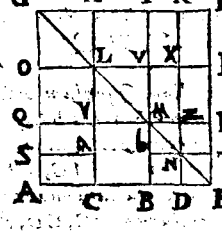
5. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex his numeris 5. & 8. gignuntur, vt perspicuum est.

SED & hac propos. 10. facile ex precedente 9. demonstrabitur, quemadmodum supra demonstrata fuit 6. ex 5. Sit enim recta AB, secta bifariam in C, eique addita recta quæ tacnaque BD. Dico duo quadrata rectarum AD, BD, simul dupla esse duorum quadratorum rectarum AC, CD, simul. Addita namque recta AD, ad partes A, recta AE, quæ adiecta BD, æqualis sit; erit tota ED, secta in C, bifariam, & in B, non bifariam, quod EA, AC, ipsis DB, BC, æquales sint. Recta quoque EB, recta AD, æqualis erit, quod EA, ipsi DB, sit æqualis, & AB, vtrique communis. a Quadrata igitur rectarum EB, BD, hoc est, rectarum AD, BD, dupla erunt quadratorum rectarum EC, CB, hoc est, rectarum CD, AC. quod est propositum.

a 9. sec.



QVOD si lubeat eandem hanc propos. 10. demonstrare ex ipsa constructione, quemadmodum præcedentem 9. ostendimus, fiet id hoc modo. Producta AD, ad E, vt DE, sit adiecta linea BD, æqualis, & descripto quadrato AF, totius lineæ AE, ducantur per G, B, D, lateribus AG, EF, parallelæ CH, BI, DK, secantes ductam diametrum EG, in L, M, N, punctis, per quæ lateribus AE, GF, parallelæ agantur OP, QR, ST, secantes priores in V, X, Y, Z, a, b. Quoniam igitur ex coroll. 1. propos. 4. huius libri omnia rectangula circa diametrum EG, quadrata sunt, b estque S N, ipsi AD, æqualis, & OL, ipsi AC, & a N, ipsi CD, erit SX, quadratum rectæ AD; & DT, quadratum rectæ DE, siue BD, & OH, a X, quadrata rectarum AC, CD. Dico quadrata SK, DT, simul dupla esse quadratorum OH, a X, simul. Quoniam enim quadrata SK, DT, superant quadratum OH, a X, quadrato DT, & rectangulis SL, LK: Sunt autem quadratum DT, & rectangula SL,



b 34. pri.

LK,

LK, æqualia quadratis OH, aX, vt mox demonstrabitur; liquido constat, quadrata SK, DT, quadraterum OH, aX, dupla esse, cum hæc in illis contineantur bis. Quod autem tria hæc rectangula DT, SL, LK, quadratis OH, aX, æqualia sint, ita patebit. Rectangulum QL, æquale est quadrato OH, ob lineas QO, OG, quæ æquales a *sunt; b propterea quod QO, ipsi YL, æqualis est, & YL, ipsi OG, ob æqualia quadrata YV, OH, æqualium laterum OL, LV. Item cSY, ipsi aM, & LI, ipsi YV, & VK, ipsi VZ, & DT, ipsi bZ. Igitur quinque rectangula QL, SY, LI, VK, DT, hoc est, tria rectangula DT, SL, LK, æqualia sunt quinque rectangulis OH, aM, YV, VZ, bZ, hoc est, duobus quadratis OH, aX. Quod est propositum.*

a 36. pri.
b 34. pri
c 34. pri

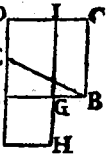
PROBL. 1. PROPOS. 11. xi.

DATAM rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota, & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato.

DATA sit recta AB, quam secare oportet in duas partes, ita vt rectangulum comprehensum sub tota AB, & altero eius segmento, nempe minori, æquale sit quadrato reliqui segmenti, nimirum maioris. Describatur ex AB, quadratum AC, & diuiso latere AD, quod cum linea data AB, angulum rectum efficit, bifariam in E, iungatur recta EB, cui ex EA, producta, æqualis sumatur EF, & ipsi AF, abscindatur ex recta AB, data æqualis AG. Est enim AB, maior quam AF. Nam cum EB, sit æqualis ipsi EF, ex constructione, d sint autem latera AE, AB, maiora latere EB; Erunt quoque rectæ EA, AB, maiores recta EF: ac proinde ablata communi AE, reliqua AB, maior erit, quam reliqua AF. Dico rectam AB, sectam esse in G, ita vt rectangulum comprehensum sub AB, BG, æquale sit quadrato rectæ AG; adeo vt AG, sit maius segmentum, & BG, mi-

d 20. pri

nus. Ducatur enim per G, recta HI, parallela rectæ DF, secans CD, in I; Ac per F, ducatur ipsi AG, parallela FH, secans HI, in H. Erit igitur parallelogrammum AH, quadratum segmenti AG, cum omnia eius quatuor
a 34. primi. latera sint æqualia, quippe cum [a] FH, GH, æqualia sint oppositis AG, AF, æqualibus; omnesq. anguli eiusdem recti ob rectum A, vt ad defin. 1. huius libri ostendimus. Rectangulum quoque CG, comprehensum erit



sub AB, & segmento BG; quod AB, æqualis sit ipsi BC. Itaque probandum est, rectangulum CG, & quadratum AH, æqualia esse. Quoniam igitur recta DA, diuisa
b 6. sec. est bifariam in E, & ei addita in rectum AF; [b] erit rectangulum sub DF, FA, hoc est, rectangulum DH, (cum FH, sit æqualis ipsi FA;) vna cum quadrato dimidiæ AE, æquale quadrato rectæ EF, hoc est, quadrato rectæ EB, quæ rectæ EF, æqualis est: Est autem quadratum rectæ EB,
c 47. pri [c] æquale quadratis rectarum AE, AB. Quare rectangulum DH, vna cum quadrato rectæ AE, æquale quoque est quadratis rectarum AE, AB. Dempto ergo communi quadrato rectæ AE, remanebit rectangulum DH, æquale quadrato rectæ AB, hoc est, quadrato AC. Ablato igitur rursus communi rectangulo AI, remanebunt rectangulum CG, & quadratum AH, inter se æqualia. Quod est propositum. Datam igitur rectam AB, secuimus, &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

HOC problema nulla ratione accommodari potest numeris, Non enim numerus vllus in duos potest numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in alteram partem æqualis sit quadrato alterius partis, vt demonstrabimus ad propos. 14. lib. 9. Vbi etiam decem theoremata antecedentia huius lib. in numeris demonstrabimus. Clariusque ad propos. 29. eiusdem lib. 9. ostendemus, problema hoc 11. nulla ratione posse numeris accommodari.

PRAXIS autem huiusce problematis non est difficilis. Nam ad extremum A, vbi terminari debet maius segmen-

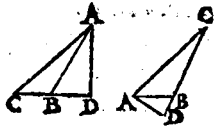
tum

tum lineæ datæ AB, excitata perpendiculari AD, ipsi datæ lineæ AB, æquali, eaq; secta in E, bifariam; si ad interuallum EB, resecetur EA, producta in F, erit AF, maiori segmento AG, æqualis, vt demonstratum est.

THEOR. 11. PROPOS. 12. xii.

IN amblygonijs triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum.

TRIANGVLVM ABC, habeat angulum ABC, obtusum, & ex A, in latus CB, ad partes anguli obtusi protractum cadat perpendicularis AD. Dico quadratum lateris AC, quod obtuso angulo opponitur, maius esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD; hoc est, quadratum lateris AC, æquale esse duobus quadratis laterum AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Cum enim recta GD, diuisa sit in B, vtcunque



[a] erit quadratum rectæ CD, æquale duobus quadratis rectarum CB, BD, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. Addito igitur communi quadrato rectæ AD, erunt duo quadrata rectarum CD, DA, æqualia tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenso bis sub CB, BD: [b] Est autem quadratis rectarum CD, DA, æquale quadratum rectæ AC. Quare & quadratum rectæ

[a] 4. sec.

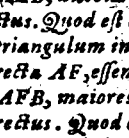
[b] 47. pri

A C, æquale erit tribus quadratis rectarum CB, BD, DA, & rectangulo comprehenſo bis ſub CB, BD. Cum igitur
2 47. primi. quadratis rectarum BD, DA, æquale ſit quadratum rectæ AB; erit quadratum rectæ AC, æquale quadratis rectarũ C B, B A, & rectangulo comprehenſo bis ſub C B, B D. Quod eſt propoſitum. In amblygonijs ergo triangulis, quadratum, quod fit, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

IAM hoc loco demonſtrauit Euclides, quanto maius ſit in triangulo amblygonio quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti, quadratis aliorum duorum laterum: In ſequenti autem propoſ. 13. oſtendet, quanto quadratum lateris acuto angulo oppoſiti minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum, vt ad initium ſcholij propoſ. 47. lib. 1. monuimus.

QVONIAM vero aſſumpſit Euclides, perpendicularem ductã ex A, cadere in latus CB, ad partes anguli obtuſi protractum, ideo paucis id demonſtrabimus. Sit in triangulo ABC, angulus ABC, obtuſus, & latus CB, ad

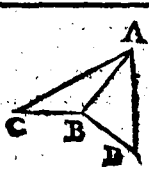


partes B, protractum. Dico perpendicularem ex A, deductam cadere extra triangulum in latus CB, protractum, huiuſmodi eſt recta A D. Si enim caderet intra triangulum, qualis eſt recta AE, eſſent duo anguli ABE, AEB, duobus rectis maiores, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt contra propoſ. 17. lib. 1. Si vero caderet extra triangulum in latus BC, productum ad partes C, qualis eſt recta AF, eſſent rurſus in triangulo ABF, duo anguli ABF, AFB, maiores duobus rectis, cum ille ſit obtuſus, hic vero rectus. Quod eſt abſurdum.

SED & hoc theorema verum eſt.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit duobus quadratis duorum laterum reliquorum: Angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit.

IN



IN triangulo ABC, quadratum lateris AC, maius sit quadratis laterum AB, BC. Dico angulum B, quem latus AC, subtendit, esse obtusum. Ducatur enim ex B, ad AB, perpendicularis BD; lineæ BC, æqualis, iungaturque recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD, æquale est quadratis ex AB, BD, hoc est, ex AB, a 47. pri *BC: Penitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC; Erit quadratum ex AD, minus quadrato ex AC, & idcirco recta AD, minor quam recta AC. Itaque quia latera AB, BC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus AB, BD, trianguli ABD, utrumque utrique, & basis AC, maior est basi AD:* b *Erit angulus ABC, maior angulo ABD:* b 25. pri *Sed ABD, rectus est. Igitur ABC, recto maior, & obtusus erit. Quod est propositum.*

QVIN etiam conuersum huius propos. 12. demonstrabimus: nimirum.

SI in triangulo quadratum vnius lateris maius sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab opposito angulo demissa abscindit: Demissa hæc linea ad latus productum perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, obtusus.

IN triangulo ABC, ad latus CB, protractum demittatur ex opposito angulo A, recta AD, sitque quadratum lateris AC, maius, quam quadrata laterum AB, BC, rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso. Dico AD, ad CD, esse

perpendicularem, & angulum ABC, obtusum. Si enim AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad CB, perpendicularis, quam dico cadere necessario in CB, productam ad partes B. Cadat enim, si fieri potest, in B, ita vt
a 47.pri AB, sit ad CB, perpendicularis. Erit igitur a quadratum ex AC, aquale quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum maius ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, in CB, demissa, in punctum B.

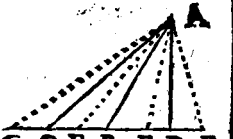
CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex
b 47.pri A, demissa, in latus BC, qualis est AF. Erit igitur b quadratum ex AC, aquale quadratis ex AF, FC: Ponitur autem quadratum ex AC, maius quadratis ex AB, BC. Igitur & quadrata ex AF, FC, maiora erunt quadratis ex AB, BC, quod est absurdum. Sunt enim quadrata ex AB, BC, maiora quadratis ex AF, FC, quod recta AB, recto an-
c 19.pri gulo AFB, opposita c maior sit quam AF, & BC, tota maior parte FC. Perpendicularis ergo ex A, demissa non cadit in CB.

CADAT tertio, si fieri potest perpendicularis ex A, ad locum BC, demissa, in C, ita vt AC, sit perpendicularis.
d 47.pri Erit igitur quadratum ex AB, d aquale quadratis ex AC, CB, ac proinde quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, & propterea multo minus quadratis ex AB, BC, quod est absurdum, cum ponatur maius. Perpendicularis ergo ex A, ad BC, demissa non cadit in C.

CADAT quarto, si fieri potest, perpendicularis ex
A, in BC, protractam ad partes C, qualis est AG. Quo-
17.pri niam igitur duo anguli AGC, ACG, e minores sunt duobus rectis, estq; AGC, rectus; erit ACG, minor recto, ac proinde
f 19.pri ACB, obtusus. Recta ergo AB, f maior erit quam AC, & propterea quadratum ex AC, minus erit quadrato ex AB, ac proinde multo minus quadratis ex AB, BC: sed & maius ponitur, quod est absurdum. Cum ergo perpendicularis ex A, demissa ad CB, non cadat in B, neque inter C, B, neque in C, neque extra C, cadet extra B, qualis est AD, vt demonstrabitur: Quare angulus ABE g acutus erit,
g 17.pri & ABC, obtusus. quod secundo loco proponitur, demonstrandum.

CAE-

CAETERVM angulum ABC, esse obtusum, si quadratum rectæ AC, maius sit quadratis rectarum AB, BC, facilius demonstrauimus in proximo theoremate huius scholij. Ex quo fit, (vt ad initium huius scholij ostendimus) perpendicularē ex A, ad CB, demissam cadere extra triangulum ABC, ad partes anguli obtusi.



QVOD autē AD, sit ad CE, perpendicularis, ita demonstrabimus. Si non est, ducatur AE, ad CB, perpendicularis cadens vltra B, vt ostendimus. Quoniam igitur angulus ABC, ostensus est obtusus, erit quadratum rectæ AC, maius quam quadrata rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BE: Sed & quadratum eiusdem rectæ AC, maius ponitur, quàm quadrata earundem rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenso sub CB, BD. Igitur quadrata ex AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BD, comprehenso æqualia erunt quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo sub CB, BE, bis comprehenso: & ablatis quadratis communibus rectarum AB, BC, rectangulum bis sub CB, BE, comprehensum æquale erit rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, ac proinde & rectangulum sub CB, BE, semel comprehensum æquale erit rectangulo semel sub CB, BD, comprehenso, & recta BE, recta BD, æqualis, pars toti, vel totum parti. quod est absurdum. Est ergo AD, ad CD, perpendicularis, & nulla alia. quod est propositum.

IAM vero, quoniam neque hoc duodecimum theorema, neque sequens 13. per numeros, quando libet, explicari potest, quod posito vno latere trianguli quotlibet partium æqualium, alia latera, eorumq; partes à perpendicularibus lineis facta plerumque numeris exprimi nequeant, sed sint lineæ illi lateri incommensurabiles: quod in præcedentibus propositionibus non accidebat, quippe cum, posita diuisa recta linea quotlibet partium æqualium, eius partes statui possint pro libito ei commensurabiles, vt in exemplis numerorum adhibitis factum est; præscribemus regulas quasdam, quibus Geometrice triangula amblygonia, atque oxygonia

(quæ-

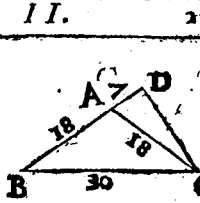
(quotquot quis optauerit) constituantur eiusmodi, vt omnia latera, partesq. eorum à lineis perpendicularibus factæ sint lineæ commensurabiles: atque adeo veritas vtriusque theorematis in numeris quoque appareat. Hic autem de amblygonijs triangulis agemus, & in scholio sequentis propositionis de Oxygonijs. Quoniam autem amblygonium trian-
19.pri gulum est vel Isosceles, in quo tertium latus semper a maius est, quod obtuso angulo opponatur, vel scalenum, (aquilaterum enim esse non potest, vt ad definitionem 27. lib. 1. diximus,) & in scaleno linea perpendicularis cadit vel in minimum latus productum, vel in medium, proponemus tres regulas. Prima exhibebimus triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo etiam segmentum vtriuslibet laterum æqualium producti inter perpendicularem, & angulum obtusum eisdem lateribus commensurabile sit. Secunda constituemus triangulum amblygonium scalenum laterum etiam commensurabilium, & in quo segmentum minimi lateris producti inter perpendicularem, & angulum obtusum lateribus eisdem sit commensurabile. Tertia denique triangulum amblygonium scalenum proponemus commensurabilium laterum, & in quo segmentum lateris medij producti inter lineam perpendicularem, & obtusum angulū eisdem lateribus commensurabile existat.

REGVLA I.

AD construendum triangulum amblygonium Isosceles laterum commensurabilium, in quo segmentum exterius alterius laterum æqualium producti inter perpendicularem lineam, & angulum obtusum, eisdem lateribus quoque sit commensurabile; statuatur segmentum exterius tot partium æqualium, vt earum numerus à 7. numeretur, vt 7 vel 14, vel 21, vel 28. &c. Deinde vtrumuis laterum æqualium ponatur dicti segmenti duplum superquadruplum partiens septimas, maximum autem obtuso angulo oppositum eiusdem segmenti quadruplum superbipartiens septimas. Vt in triangulo ABC, ducta sit CD, ad BA, latus productum. Si igitur AD constituatur partium 7. & vtrumuis laterum AB, AC, partium 18. qui numerus habetur, si duplicā-

ueris

neris 7. addideris que $\frac{4}{7}$ ipsius. Latus vero BC, partium 30. quem numerum habebis, si quadruplicaueris 7. adiunxeris q. $\frac{1}{7}$ ipsius; erit triangulum ABC, quod quæritur. In hoc enim triangulo quadratũ Lateris BC, est 900. cui æqualia

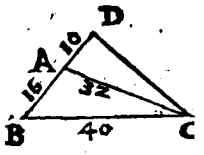


sunt quadrata laterum AB, AC, nempe 324. 324. una cum rectangulo bis comprehenso sub AB, AD, hoc est, cum 126. 126. Hæc enim conficiunt quoque summam 900. Quam ob rem, vt in hoc scholio ostendimus, erit ducta CD, ad BD, perpendicularis, & angulus BAC, obtusus. Quod si singules numeros huius trianguli per quemlibet numerum multiplices, procreabis alias lineas trianguli commensurabiles, prioribus tamen proportionales. Vt si inuentos numeros duplices, efficies AD, 14. & tam AB, quam AC, 36. at BC, 60. Propositum quoque triangulum reperies, statuendo segmentum exterius AD, quotcunque partium, etiamsi à 7. non numerentur: sed tunc latera erunt numeri integri cum fractionibus. Idem denique triangulum offendes, statuendo latus quodcunque, à quo incipere vis, quotlibet partium, dummodo maximum fiat segmenti AD, quadruplum superbipartiens septimas, vtrumuis autem æqualium sit eiusdem segmenti duplum superquadripartiens septimas.

REGVLA II.

VT efficiatur triangulum amblygonium Scalenum laterum commensurabilium, in quo perpendicularis cadens in minimum latus productum faciat segmentum exterius commensurabile etiã lateribus. Statuatur exterius segmentum quotuis partium æqualium à 5. numeratarum, vt 5. vel 10. vel 15. vel 20. &c. Quibus si addas $\frac{3}{5}$ habebis minimum latus. Si vero eadem partes dicti segmenti triplices, addasq; $\frac{1}{5}$ vel si partes minimi lateris inuentas duplices, efficies medium latus. Si denique partes eadem dicti segmenti quadruplices, reperies latus maximum. Vt si in appositio triangulo segmentum AD, constituatur 10. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Vbi etiam vides, quadrato la-

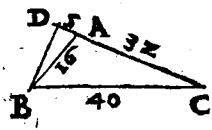
teris



teris BC, quod est 1600. aqualia esse quadrata laterum AB, AC, nimirum 256. 1024. una cum rectangulo bis sub AB, AD, comprehenso, idest, cum 160. 160. Ex quo fit, CD, esse ad BD, perpendicularem, & angulum BAC, obtusum, vt supra in hoc scholio ostendimus. Iam si singulos numeros inuentos multiplices per quemuis numerum, gignentur alij numeri illis proportionales, qui idem praestabunt. Vt si eos duplices, erit latus AB, 32. AC, 64. & BC, 80. qui quidem numeri reperientur eadem arte, si exterius segmentum AD statuas partium 20. qua duplam quoque proportionem habent ad priores partes 10. Sic si eosdem numeros triplices, efficies segmentum exterius AD, partium 30. latus AB, 48. AC, 96. BC, 120. & sic deinceps.

REGVLA III.

PRO triangulo amblygonio Scaleno commensurabilium laterum, in quo perpendicularis linea in medium latus productum cadens efficiat quoque segmentum lateribus trianguli commensurabile; accipiatur rursum exterius segmentum quotlibet partium à 5. numeratarum, vt in praecedenti regula. Quum si triplices, addans $\frac{1}{5}$ produces minimum latus: Si vere eosdem multiplices per 6. adiungas $\frac{2}{5}$ habebis latus medium: Si denique eosdem per 8. multiplices, produces maximum latus. Vt si in triangulo proposito segmentum AD, fiat partium 5. erit AB, 16. AC, 32. & BC, 40. Atque ita quadrato lateris BC, nimirum 1600. aqualia existent quadrata laterum AB, AC, nempe 256. 1024.



una cum rectangulo bis comprehenso sub AC, AD, hoc est, cum 160. 160. Ac proinde BD, ad CD, erit perpendicularis, angulusque BAC, obtusus, vt in hoc scholio supra demonstrauimus. Quod si numeros inuentos per quemuis numerum multiplices, inuenies alios

numeros laterum illis proportionales, in quibus eadem hæc propoſ. 12. examinabitur. Vt ſi eos quadruplices, efficies ſegmentum exterius AD, partium 20. latus AB, 64. AC, 128. & BC, 160. Si vero eoſdem illos priores numeros per 10. multiplices, erit ſegmentum exterius AD, 50. latus AB, 160. AC, 320. & BC, 400. Atque ita in infinitum.

CAVE autem, exiſtimes, poſito latere aliquo trianguli amblygonij, vel ſegmento exteriori, quotlibet partium æqualium, alia latera cum illo ſeruare neceſſario proportiones illas, quas in regulis prædictis explicauimus: adeo vt cognito vno, reliqua etiam cogneſcantur. Hoc enim falſum eſt, cum illa variari poſſint mille modis, & alias atque alias proportiones habere. Itaque ex tribus præſcriptis regulis ſolum colligendum erit, ex lineis rectis, quæ dictas proportiones ſeruent, conſtitui poſſe triangulum amblygonium, vna cum ſegmento exteriore, in quo veritas propoſitionis 12 poſſit examinari.

xiij.

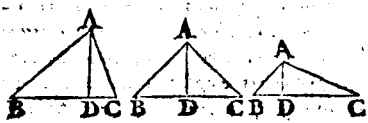
THEOR. 12. PROPOS. 13.

IN oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente minus eſt quadratis, quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenſo, & ab vno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab aſſumpta interius linea ſub perpendiculari prope acutum angulum.

SINT omnes anguli trianguli ABC, acuti, & ex A, perpendicularis AD, demiſſa cadat in latus BC.

Dico

Dico quadratum lateris AB, quod acuto angulo ACB, opponitur, minus esse quadratis laterum AC, CB, circa angulum acutum dictum, rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, hoc est, quadratum lateris AB, vna cum rectangulo bis comprehẽso sub BC, CD, æquale esse duobus quadratis laterum AC, CB. Cum enim recta BC, diuisa sit in D, vtcunque, erunt quadrata rectarũ BC, CD,



7. sec. [a] æqualia rectangulo comprehenso bis sub BC, CD, & quadrato rectæ BD. Adito ergo communi quadrato rectæ DA, erunt tria quadrata rectarum BC, CD, DA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA: Duobus autem quadratis rectarum CD, DA, 47. pri [b] æquale est quadratum rectæ CA. Duo igitur quadrata rectarum BC, CA, æqualia sunt rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & duobus quadratis rectarum BD, DA. Cum ergo duobus quadratis rectarum BD, DA, 47. pri [c] æquale sit quadratum rectæ AB; erunt duo quadrata rectarum BC, CA, æqualia rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, & quadrato rectæ AB, quod est propositum. Eodem modo ostendetur, quadrata rectarum AB, BC, æqualia esse rectangulo bis comprehenso sub CB, BD, & quadrato rectæ AC; hoc est, quadratum lateris AC, minus esse quadratis laterum AB, BC, rectangulo comprehenso bis sub CB, BD. In oxygonijs ergo triangulis, quadratum à latere, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex tribus propositionibus, nempe 47. lib. 1. & 12. atque 13. huius lib. cognoscimus, quantum sit quadratum cuiusuis lateris trianguli cum quadratis aliorum duorum laterum comparatum, nempe an sit illis æquale, an maius, minusve, & quanto maius sit, aut minus; prout videlicet angulus assumpto lateri oppositus fuerit rectus, vel obtusus, aut acutus.

QVAMVIS autem Euclides theorema hoc proponat

de triangulis duntaxat oxygonijs, quæ scilicet omnes angulos habent acutos; idem tamen verum etiam est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, vt constat ex posterioribus duobus triangulis in schemate propositis. Sunt enim in hisce triangulis necessario duo reliqui anguli acuti, vt perspicue colligi potest ex propos. 17. vel 32. primi lib. Hoc solum obseruandum est in triangulis rectangulis, & amblygonijs, perpendicularem duci debere ab angulo recto, vel obtuso, in oxygonijs vero à quolibet. Ita enim semper cadet perpendicularis intra triangulum, vt Euclides in demonstratione assumpsit. Quod quidem facile demonstrabitur hac ratione. Sint in triangulo ABC, duo anguli ABC, ACB, acuti, angulus vero BAC, rectus, vel obtusus, acutusve. Dico perpendicularem ex A, demissam cadere intra triangulum. Si enim caderet extra in CB, protractum ad partes B, cuiusmodi est recta AE, esset in triangulo ABE, angulus exterior ABC, acutus. a maior interno & opposito recto AEB, quod est absurdum. Si vero caderet extra BC, productam ad partes C, qualis est recta AF, in idem incideremus absurdum, vt manifestum est.

a 16. pri.

IDEM hoc theorema in triangulis rectangulis, & obtusangulis demonstrat Federicus Commandinus, etiamsi perpendicularis AD, non cadat in latus BC, sed vel eadem sit, quæ latus AB, vt in rectangulis, vel extra triangulum cadat, vt in obtusangulis accidit, ceu in scholio propos. praecedentis demonstrauimus: quod tum demum accidet, cum perpendicularis non ab angulo recto, vel obtuso, sed ab altero acutorum demittitur.

SIT triangulum rectangulum ABC, cuius angulus B, sit rectus; & ex angulo A, acuto ad EC, perpendicularis ducatur AD, quæ eadem erit, quæ latus AB, propter angulum rectum B. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis, minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo bis comprehenso sub latere CB, in quod perpendicularis cadit, & sub linea CD, quæ interijcitur inter perpendicularem AD, & acutum angulum C. Cum enim quadrata ex AB, CB, b æqualia sint quadrato ex AC;

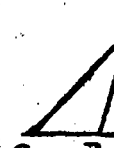
b 47. pri.

addito

addito communi quadrato ex CB, erunt tria quadrata, nempe quod ex AB, & duplum eius, quod ex CB, aequalia duobus quadratis ex AC, CB: At quadratum ex CB, idem est, quod rectangulum sub CB, CD. Igitur & quadratum ex AB, una cum rectangulo bis sub CB, CD, aequale est quadratis ex AC, CB; Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.

RVRSVS sit triangulum obtusangulum ABC, cuius angulus B, obtusus; & ex angulo acuto A, ad BC, perpendicularis ducatur AD, extra triangulum cadens. Dico quadratum lateris AB, acutum angulum C, subtendentis minus esse, quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, & CD. Quoniam enim quadrata ex

a 47. pri



AD, CD, a aequalia sunt quadrato ex AC; addito quadrato ex CB, communi, erunt tria quadrata ex AD, CD, CB, aequalia duobus quadratis ex AC, CB:

b 4. sec.

At quadratum ex CD, b aequale est quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD. Igitur & duo quadrata ex AD, CB, una cum quadratis ex CB, BD, & rectangulo bis sub CB, BD, aequalia sunt quadratis ex AC, CB: Sunt autem quadrata ex AD, BD, aequalia

c 47. pri

c quadrato ex AB. Quare quadratum quoque ex AB, & duplum quadrati ex CB, una cum rectangulo bis sub CB, BD, aequalia sunt quadratis ex AC, CB. Atqui quadrato ex CB, una cum rectangulo sub CB, BD,

d 3. sec.

d aequale est rectangulum sub CD, CB. Ac propterea duplo quadrati ex CB, una cum rectangulo bis sub CB, BD; aequale est rectangulum bis sub CD, CB. Igitur & quadratum ex AB, una cum rectangulo bis sub CB, CD; aequale est quadratis ex AC, CB. Ac proinde quadratum ex AB, minus est, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis sub CB, CD. Quod est propositum.

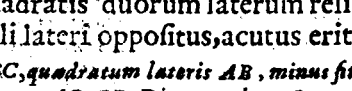
ALITER, & brevius. Quoniam quadratum ex AC,

maius est, quam quadrata ex AB, BC, rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso, hoc est, quadratum ex AC, aquale est quadratis ex AB, BC una cum rectangulo sub CB, BD, bis comprehenso; erit quadratum ex AB, minus, quam quadratum ex AC, quadrato ex BC, & rectangulo sub CB, BD, bis: Ac proinde si quadrato ex AC, addatur quadratum ex BC, erit quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, BC, quadrato ex BC, bis sumpto, & rectangulo bis sub CB, BD, comprehenso. Cum ergo quadrato ex BC, una cum rectangulo sub CB, BD, contento, [b] aquale sit rectangulum sub CB, CD, contentum; erit quoque quadratum ex AB, minus quam quadrata ex AC, CB, rectangulo comprehenso bis sub CB, CD: Quod est propositum. 212. sec. b 3. sec.

IN scholio quodam antiquo demonstratur sequens theorema, instar illius, quod nos in scholio precedentis propos. secundo loco demonstrauimus. Videlicet.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit duobus quadratis duorum laterum reliquorũ: Angulus illi lateri oppositus, acutus erit.

IN triangulo ABC, quadratum lateris AB, minus sit, quam quadrata laterum AC, CB. Dico angulum C, quem dictum latus subtendit, esse acutum. Ducatur enim ex C, ad AC, perpendicularis CD, linea CB, aqualis, iungaturq. recta AD. Quoniam igitur quadratum ex AD,

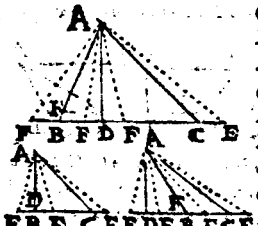


[c] aquale est quadratis ex AC, CD, hoc est, ex AC, CB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB; Erit quadratum ex AD, minus quadrato ex AB; & ideo recta AD, maior quam recta AB. Itaque quia duo latera AC, CD, trianguli ACD, aqualia sunt duobus lateribus AC, CB, trianguli ACB, vtrumque vtrique, & basis AD, maior base AB; [d] Erit angulus ACD, maior angulo ACB: Sed ACD, rectus est, ex constructione. Ergo ACB, recto minor, & acutus erit. c 47. pri d 25. pri

SED & conuersum huius propos. 13. ostendemus, nimirũ.

SI in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum priori lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppositio demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus.

IN triangulo ABC, ad latus BC, demittatur ex angulo opposito A, recta AD; sitq. quadratum lateris AB, minus quam quadrata laterum AC, CB, rectangulo sub BC, CD, bis comprehenso. Dico AD, esse perpendicularem ad BC, & angulum ACB, acutum. Si namque AD, perpendicularis non est, ducatur ex A, ad BC, perpendicularis, quam dico necessario cadere citra punctum C, versus B, hoc est, vel in latus BC, vel in punctum B, vel in latus BC, versus B, productum. Cadat enim, si fieri potest, in C, ita vt AC, sit ad BC, perpendicularis.



2 47. pri

Erit igitur [2] quadratum ex AB, æquale quadratis ex AC, CB. quod est absurdum, cum minus ponatur. Non cadit ergo perpendicularis ex A, deducta ad BC, in punctum C.

CADAT deinde, si fieri potest, perpendicularis ex A, demissa vltra C, in E, qualis est AE. Erit igitur [b] quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB: Ponitur autem quadratum ex AB, minus quadratis ex AC, CB. Igitur & quadrata ex AE, EB, minora erunt quadratis ex AC, CB. Cum ergo quadratum ex AC, æquale sit quadratis ex AE,

b 47. pri

c 47. pri

EC,

EC; erunt quoque quadrata ex AE, EB, minora quadratis ex AE, EC, CB: Et ablato communi quadrato recta AE, erit reliquum quadratum ex EB, minus quoque quadratis ex EC, CB. quod eſt abſurdum. Cum enim quadratum ex EB, aquale ſit quadratis ex EC, CB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub EC, CB, maius erit quadratum ex EB, quadratis ex EC, CB. Non ergo perpendicularis cadit vltra C: Sed neque in C, cadit, vt oſtendimus. Igitur cadet citra punctum C, qualis eſt AD, vt demonſtrabitur, ac propterea angulus ACB, acutus erit. Quod ſecundo loco proponitur demonſtrandum. a 4. ſec. b 17. pri

CAETERVM angulum ACB, eſſe acutum, ſi quadratum rectæ AB, minus ſit quadratis rectarum AC, CB, facilius demonſtrauimus in proxime antecedente theoremate huius ſcholij. Ex quo fit, (quemadmodum in coroll. 2. propoſ. 17. lib. 1. oſtenſum eſt) perpendiculorem ex A, ad BC, demiſſam cadere citra angulum AGB, ſecantem verſus B.

QVOD autem AD, ſic ad BC, perpendicularis, ita oſtendemus. Si non eſt, ſit AF, ad BC, perpendicularis, cadens citra punctum C, vt probatum eſt, vbicunque hæc contingat, ſiue intra triangulum, ſiue in punctum B, ſiue extra triangulum. (In ſecundo tantum triangulo non dicet aduerſarius, perpendicularem cadere in B; quia eadem eſſet, quæ AD. quod ille negat) Quia ergo angulus AGB, oſtenſus fuit acutus, c erit quadratum ex AB, minus, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenſo ſub EC, CF, hoc eſt, quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CF, æquale eſt quadratis ex AC, CB: Ponitur autem quadratum idem ex AB, minus quoque, quam quadrata ex AC, CB, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, hoc eſt, quadratum idem ex AB, vna cum rectangulo bis contento ſub BC, CD, æquale ponitur quadratis ex AC, CB. Igitur quadratum ex AB, vna cum rectangulo bis comprehenſo ſub BC, CD, æquale erit quadrato eidem ex AB, vna cum rectangulo comprehenſo bis ſub BC, CF: Et ablato communi quadrato rectæ AE, rectangulum ſub BC, CD, bis comprehenſum æquale erit rectangulo bis ſub BC, CF, com- c 13. ſec.

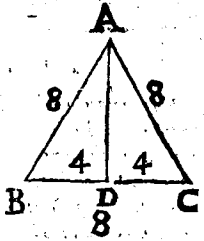
prehenso: ac proinde & rectangulum semel comprehensum sub BC, CD, aquale erit rectangulo semel comprehenso sub BC, CF. ideoq. & recta CD, CF, aquales erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Est igitur AD, ad BC, perpendicularis, & non alia. Quod est propositum.

QVEMADMODVM autem in scholio superioris propositionis triangula amblygonia construximus laterum, & linearum commensurabilium, in quibus per numeros veritas propositionis 12. examinari possit, ita hoc loco oxygonia triangula constituemus laterum, atque linearum commensurabilium, in quibus huius 13. propos. veritas explicetur. Quia vero triangulum oxygonium est vel aquilaterum, vel Isosceles, vel Scalenum; complectemur totam hanc doctrinam septem regulis. Prima de triangulo aquilatere oxygonio aget. Secunda de Isoscele, in quo perpendicularis cadit in tertium latus inaequale, siue maius illud sit, siue minus utrouis aqualium. Tertia de Isoscele, cuius tertium latus maius est, perpendicularisq in alterutrum aqualium laterum cadit. Quarta de Isoscele, cuius latus tertium minus est, & perpendicularis rursus in alterutrum laterum aqualium cadit. Quinta de Scaleno, in quo perpendicularis cadit in minimum latus. Sexta de Scaleno, in quo perpendicularis in medium latus demittitur. Septima denique de Scaleno, in quo ad maximum latus perpendicularis ducitur. Loquor autem hic de illis etiam triangulis, in quibus perpendicularis linea cadit intra triangulum, ac proinde duo anguli supra basin sunt acuti, siue oppositus angulus acutus etiam sit, siue non. De his enim propositio etiam intelligenda est, vt diximus. Quo pacto autem triangula, in quibus linea perpendicularis cadit vel extra ipsa, vel cum vno laterum coincidit, numeris quoque possint accommodari, docebimus ad finem regularum.

REGVLA I.

SI quodlibet latus trianguli aquilateri statuatur quotuis partium aqualium, numero tamen parium, vt fractiones vitentur, erunt omnia latera & inter se, & segmentis à linea perpendiculari factis commensurabilia. Vt in trian-

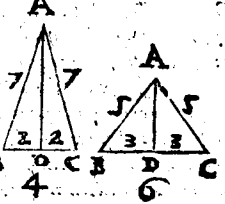
gulo



ulo aquilatero ABC, diuidet perendicularis AD, oppositum latus BC, bifariam, vt in scholio propos. 26. lib. 1. demonstrauimus. Quam ob rem posito quolibet latere 8 erunt segmenta BD, CD, 4. 4. Vbi vides quadratum lateris AB, angulo acuto C, oppositi, (omnes enim anguli in triangulo aequilatero acuti sunt, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) hoc est, 64. una cum rectangulo bis contento sub BC, CD, id est, cum 32. 32. efficere 128. quantum videlicet conficiunt duo quadrata laterum AC, CB, nempe 64. 64.

REGVLA II.

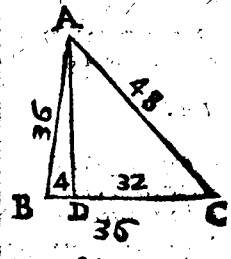
SI vtrumque laterum aequalium trianguli Isoscelis statuatur quotcunque partium aequalium, tertium autē quotlibet partium numero parium, vt fractiones vitentur, siue pauciores partes in hoc latere ponantur, quam in vtrolibet aequalium, siue plures, dummodo tot non sint, quot in vtroq. simul, aut plures; quia sic non posset fieri triangulum, propterea quod duo latera aequalia non essent maiora tertio latere, sed vel aequalia, vel minora, quod propositioni 20. lib. 1. repugnat. Si inquam latera hoc modo numeris exponantur, erunt omnes linea trianguli inter se commensurabiles. Vt in priori horum Isoscelium vtrumuis latus AB, AC, statuatur 7. & BC, 4. In posteriori autem vtrumlibet AB, AC, 5. & BC, 6. Cum ergo perpendicularis AD, diuidat basim BC, bifariam, ex scholio propos. 26 lib. 1. erunt segmenta BD, CD, in priori quidem triangulo 2. 2. in posteriori vero 3. 3. Vbi etiam perspicuum est, quadratum lateris AB, angulo acuto C, oppositi, (vterq. enim angulus B, C, acutus est, ex coroll. 3. propos. 17. lib. 1.) una



rectangule bis comprehenso sub BC, CD, æquale esse quadratis simul laterum AC, CB. &c.

REGVLA III.

IN triangulo Isoscele, in quo tertium latus maius est, & perpendicularis in alterum æqualium interũ cadit, erit segmentum prope maius latus tertium, maius, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Si igitur minus segmentum statuas quotuis partium, eaq. per 2. multiplices, habebis segmentum maius: Si vero easdem ducas in 12. efficies tertium latus: Duo denique segmenta simul addita conflabunt vtrũque laterum æqualium; quod etiã produces ex multiplicatione minoris segmenti per 9. Vt si in Isoscele ABC, segmentum minus BD, ponatur 4. erit maius CD, 32. latus vero AC, 48. & vtrumque latus AB, BC, 36. Quadratum igitur lateris AB, angulo acuto



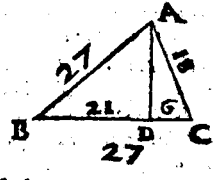
C, oppositi, nempe 1296. vna cum 20, quod fit bis ex BC, in CD, id est, cum 1152. 1152. conficit 3600. quantum nimirum efficiunt duo quadrata ex AC, CB, nempe 2304. 1296. Ita quoque quadratum ex AC, nimirum 2304. vna cum eo, quod bis fit ex CB, in BD, hoc est, cum 144. 144. facit 2592. qui numerus etiam conficitur ex quadratis laterum AB, BC, nimirum ex 1296. 1296. In huiusmodi ergo triangulo segmenta inæqualia proportionem habent octuplam: vtrum uis vero æqualium laterum ad minus segmentum proportionem habet noncuplam: Tertium denique latus maius ad idem segmentum minus habet proportionem duodecuplam.

REGVLA IIII.

IN triangulo Isoscele, cuius tertium latus minus est, & perpendicularis rursum in alterum æqualium laterum cadit, erit segmentum prope minus latus tertium, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. ostensum est. Quod segmentum si statuas quotuis partium numero parium, vt fractiones fugiantur,

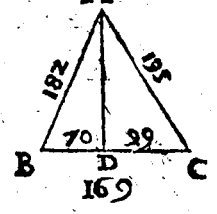
eaq.

uoq. per 3. multiplices, & producto earundem medietatem adijcias, vel earum medietatem per 7. multiplices, produ-
ris mains segmentum: Si vero eas-
dem partes minoris segmenti mul-
tiplices per 3. efficies tertium latus
minus. Vtrumque denique aqua-
lium laterum componetur ex duo-
bus segmentis: quod etiã ex multi-
plicatione medietatis minoris se-
cũdi per 9 producetur. Vt si in Isoscele ABC, minus segmen-
tum CD, ponatur 6. erit maius BD, 21. & latus AC, 18 atq;
unum AB, quàm BC, 27. Quadratum ergo lateris AB, angu-
lo acuto C, oppositi, nimirum 729. una cum eo, quod fit
bis ex BC, in CD, id est, cum 162. 162. efficit 1053. qui nu-
merus etiam componitur ex quadratis laterum AC, CB,
nempe ex 324. 729. &c.



REGVLA V.

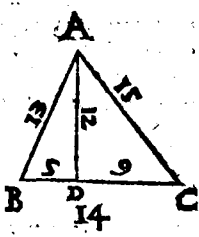
IN Scaleno triangulo, in quo perpendicularis in minimum latus demittitur, eris segmentum basis iuxta medium latus, minus, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstratum est. Quod segmentum si constituantur tot partium aqualium, vt à 70. nu-
merentur, nimirum partium 70. vel 140, vel 210. &c. eisq. ad-
dantur earum $\frac{2}{7}$ $\frac{9}{0}$ confectũ erit segmentum maius, & ex additio-
ne partium horum segmentorum gignetur minimum latus. Si vero partes minoris segmenti duplicen-
tur, & producto adijcientur $\frac{9}{7}$ $\frac{2}{0}$ hoc est, $\frac{2}{1}$ earundem partiũ, procreabitur medium latus. Si denique partes eiusdem minoris segmenti duplicentur, pro-
ductoq. $\frac{2}{7}$ $\frac{5}{0}$ id est, $\frac{1}{1}$ $\frac{7}{4}$ earundẽ addantur, cõponetur latus maximum. Vt in scaleno ABC, si minus segmentum BD, ponatur 70. erit maius CD, 99. & totum minimum latus BC, 169. Medium autem latus AB, 182. & maximum



*AC,*195. *Quadratum ergo lateris AB, acuto angulo C, oppositi, hoc est,*33124. *una cum numero, qui bis fit ex BC, in CD, id est, cum* 16731. 16731. *conficit numerum* 66586. *aequalem duobus simul quadratis* 38025. 28561. *laterum AC, CB, &c.*

REGVLA VI.

*IN triangulo Scaleno, quando perpendicularis in medium latus cadit, erit ex iis, quae ad propos.*47. *lib.*1. *ostendimus, minus segmentum minimo lateri adiacens. Quod segmentum si statuatur tot aequalium partium, vt à* 5. *numerentur, vt* 5. *vel* 10. *vel* 15. *&c. eiq. addantur* $\frac{4}{5}$ *confectum erit segmentum maius, & partes horum segmentorum in vnam summam collectae component medium latus. Si autem partibus minoris segmenti duplicatis adiiciantur earundem* $\frac{3}{5}$, *producetur minimum latus. Triplum denique earundem partium minoris segmenti dabit latus maximum. Vt in Scaleno ABC, si minus segmentum BD, fiat* 5. *erit segmentum maius CD,* 9. *& totum latus BC, medium,* 14. *Minimum vero AB,* 13. *& maximum AC,* 15. *&c.*



REGVLA VII.

*IN Scaleno denique triangulo, vbi perpendicularis ad maximum latus deducitur, erit minus segmentum iuxta latus minimum, ex iis, quae ad propos.*47. *lib.*1. *scripsimus. Si ergo pro minori segmento statuantur* 33. *vel quiuis alius numerus à* 33. *numeratus, vt* 66. *vel* 99. *&c. eiq. addantur* $\frac{9}{5}$ $\frac{3}{5}$ *hoc est,* $\frac{3}{1}$ $\frac{3}{5}$. *fiet maius segmentum: quae duo segmenta simul composita maximum latus offerent. Si vero numero minoris segmenti duplicato adiiciantur* $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{5}$, *producetur medium latus. Si denique eidem*

minori

minori segmento apponantur $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{5}$. exhibebitur minimum latus. Vt si in Scaleno ABC, minus segmentum CD, sit 33. erit maius segmentum BD, 42. totumq; latus maximum BC, 75. & medium AB. 70. & minimum AC, 65. &c.

QVOD si singulos numeros harum regularum per eundem numerum aliquem, quicumque is sit, multiplices, procreabis alios numeros lateribus triangulorum tribuendos. Idem etiam numeri reperientur, si minus segmentum, vel maius, vel quodcunque latus statuatur quotlibet partium; si modo proportiones seruentur, quas supradictis regulis expressimus.

HIC quoque sciendum est, non in omni triangulo oxygonio proportiones præscriptas reperiri inter latera, cum mille modis possint variari eorum proportiones. Neque vero hoc regula illa docent, sed vsus earum in eo solum consistit, vt seruatis illis proportionibus, quas explicauimus, triangula oxygonia formari possint, in quibus propositio 13. huius lib. 2. ad numeros accommodetur.

I A M vero si perpendicularis coincidat cum illo latere, cuius quadratum probandum est minus esse duobus quadratis aliorum duorum laterum, &c. Ita vt triangulum propositum sit rectangulum, quærendi sunt tres numeri pro lateribus, ex iis, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus. Vt in figura regulæ 6. si in triangulo ABD, minimum latus BD, ponatur 5. erit AD, 12. & AB, 13. Vbi cernis quadratum lateris AD, acuto angulo B, oppositi, nempe 144. una cum eo, quod fit bis ex BD, in BD, hoc est, cum 25. 25. efficere 194. quantum videlicet conficiunt duo quadrata simul ex AB, BD, nimirum 169. 25. Eadem ratione, si minimum latus BD, statuatur partium 6. erit AD, 8. & AB, 10. Vbi etiam vides, quadratum lateris AD, acuto angulo B, subtensi, nimirum 64. una cum eo, quod fit ex BD, in BD, hoc est, cum 36. 36. conficere 136. quem numerum etiam conficiunt duo numeri quadrati laterum AB, BD, nimirum 100. 36. Ita quoque cernis, quadratum numerum lateris BD, acuto angulo A, oppositi, hoc est, 36. una cum eo, quod fit ex AD, in AD, bis, id est, cum 64. 64. efficere 164. quantum scilicet conficiunt duo numeri quadrati simul laterum

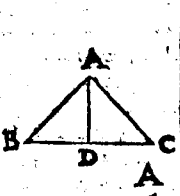
AB, AD, nimirum 100. & 64. Denique si in alio triangulo ACD, minimum latus CD, ponas 6. reperies ex ijs, quæ ad propos. 47. lib. 1. scripsimus, AD, 40. & AC. 42. Vbi manifestum est, quadratum numerum lateris AD, angulo acuto opposito, nimirum 1600. una cum numero, qui fit ex CD, in CD, bis, id est, cum 21. 21. facere 1762. qui numerus æqualis est quadratis numeris duorum laterum AC, CD, hoc est, duobus numeris 1681. 81. Hi enim conficiunt quoque summam 1762. Quod si minimum latus CD, facias 7. comperies AD, 24. & AC, 25. in quibus numeris idem experieris. Nam quadratus numerus lateris CD, angulo acuto A, subtensi, id est, 49. una cum numero, qui bis producitur ex AD, in AD, hoc est, cum 576. 576. facit 1201. quantum scilicet efficiunt duo quadrati numeri laterum AC, AD, hoc est, 625. 576.

AF si perpendicularis cadat extra triangulum, ita ut triangulum sit obtusangulum, quærendum erit segmentum exterius, una cum lateribus, ut in tribus regulis scholij præcedentis propositionis docuimus. Segmentum namque exterius cum latere producto, dabit totum segmentum inter acutum angulum assumptum & perpendicularem. Vt in figura regulæ 3. scholij antecedentis propositionis, erit segmentum totum CD, inter angulum acutum C, & perpendicularem BD, cadentem extra triangulum, 37. Vbi perspicuum est, quadratum lateris AB, angulo C, acuto opposito, hoc est, 256, una cum rectangulo sub AC, CD, comprehenso bis, id est, cum 1224. 1184. componere numerum 2624. qui æqualis est duobus quadratis simul laterum BC, AC, nimirum aggregato quadratorum numerorum 1600. 1024. &c.

NEQVE vero alienum putaui hoc loco ex Pappo Alexandrino sequens etiam theorema demonstrare.

SI in triangulo à quouis angulo recta linea ducatur, diuidens latus oppositum

bifariam, erunt duo quadrata laterum eum angulum ambientium simul dupla duorum quadratorum simul sumptorum, quorum vnum ex linea ducta, alterum vero ex dimidiato latere describitur.



IN triangulo ABC, recta AD, secat latus BC, bifariam in D. Dico quadrata ex AB, AC; dupla esse quadratorum ex AD, BD. Demittatur enim ex A, ad BC, perpendicularis, qua primum recta AD, congruat, ac proinde triangulum ABC, aquilaterum sit, vel Isosceles, vt ad prepos. 26. lib. 1. demonstrauimus. a Quoniam igitur tam quadratum ex AB, aquale est quadratis ex AD, DB, quam quadratum ex AC, quadratis ex AD, DC; erunt duo quadrata ex AB, AC, aqualia quadrato ex AD, bis sumpto, vna cum quadratis ex DB, DC. Cum ergo quadrata ex DB, DC, aqualia sint, si auferantur duo quadrata ex AD, DC, ablatum erit dimidium quatuor quadratorum, nimirum quadrati ex AD, bis sumpti, & quadratorum ex DB, DC. Quare duo quadrata ex AB, AC, dupla sunt duorum quadratorum ex AD, DB. quod est propositum. Quod clarius ita ostendetur: b Quoniam quadratum ex AB, duobus quadratis ex AD, DB, aquale est. Sunt autem duo quadrata ex AB, AC, quadrati ex AB, dupla, ob aqualitatem linearum AB, AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod demonstrandum erat.

a 47. pri

b 47. pri

CONGRVAT deinde perpendicularis AC, lateri AC. Et quia quadratum ex BC, quadruplum est eum quadrati ex BD, quum quadrati ex DC, vt in scholio propos. 4. huius lib. ostendimus; erit idem quadratum ex BC, duplum duorum quadratorum ex DB, DC. Sunt autem duo quadrata ex AC, CD, bis sumpta, dupla quoque quadrati ex AD; quod c quadrata ex AC, CD, semel sumpta aqualia sint quadrati ex AD. Igitur quadratum ex BC, vna cum qua-

c 47. pri

dratis

dratis ex AC, CD, bis sumptis, duplũ erit quadratorũ ex DB, DC, AD. Cum ergo & quadratum ex CD, bis sumptum,
a 20. prĩ. duplum sit quadrati ex CD; a erit reliquum quadratum ex BC, una cum quadrato ex AC, bis sumpto, duplum quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD: Sunt autem
b 47. pri b quadrata ex BC, AC, æqualia quadrato ex AB. Igitur quadrata ex AB, AC, (quæ æqualia sunt quadrato ex BC, una cum quadrato ex AC, bis sumpto) dupla quoque sunt, quadratorum ex AD, DB. Quod erat propositum.

TERTIO cadat perpendicularis AE, intra triangulum inter puncta D, C. Quia igitur
c 9. sec. c quadrata ex BE, EC, dupla sunt quadratorum ex BD, DE: Item quadrata ex AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; quod
d 47. pri d quadrata ex AE, ED, semel sumpta quadrato ex AD, æqualia sint; erunt quadrata ex BE, EC, una cum quadratis AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, duplum sit quadrati
e 20. prĩ. ex DE; e erunt reliqua quadrata ex BE, EC, una cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque reliquorum quadratorum ex DB, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, f æquale sit quadratum
f 47. pri ex AB; & quadratis ex EC, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod est propositum.

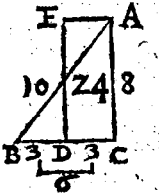
POSTREMO cadat perpendicularis AE, in latus
g 10. sec. BC, productum. Quoniam igitur g quadrata ex BE, CE, dupla sunt quadratorum ex BD, DE. Item quadrata ex
h 47. pri AE, DE, bis sumpta, dupla sunt quadrati ex AD; h quod quadrata ex AE, DE, semel sumpta, æqualia sint quadrato ex AD; erunt quadrata ex BE, CE, una cum quadratis ex AE, DE, bis sumptis, dupla quoque quadratorum ex BD, DE, AD. Cum ergo & quadratum ex DE, bis sumptum, du-
i 20. prĩ plum sit quadratorum ex DE; i erunt reliqua quadrata ex BE, GE, una cum quadrato ex AE, bis sumpto, dupla quoque

reliquo-

reliquorum quadratorum ex BD, AD. Quare cum quadratis ex BE, AE, [a] æquale sit quadratum ex AB, & quadratis ex CE, AE, quadratum ex AC; erunt quoque quadrata ex AB, AC, dupla quadratorum ex AD, DB. Quod erat ostendendum. [a] 47. pri

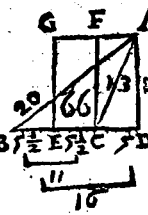
NON te moueat autem, quod ad huius theorematis demonstrationem adhibuerimus pronunciatum 20. quod uniuersaliter in omni genere multiplicium ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 5. quoniam in dupla proportione facile concedi potest sine demonstratione, vt in expositione eius principij diximus: Vel propositio 5. lib. 5. ante hoc theorema demonstrari potest: Vel certe theorema ipsum post librum 5. demonstrari; ita, vt circulus in demonstrando nulla ratione committatur, etiamsi principium illud demonstretur libro 5. quia propositio 5. lib. 5. ex hoc theoremate non pendet.

EX his autem, quæ proximis duobus theorematibus, & propos. 47. lib. 1. demonstrata sunt, aream cuiusque trianguli latera habentis nota inueniemus, vt recte hoc loco monet Campanus, & Federicus Commandinus demonstrat, hac fere ratione. Sit primo triangulum rectangulum ABC, cuius latera nota sint, nempe AB, 10. palmorum; AC, 8. BC, 6. Diuiso latere BC, bifariam in D, vt sint CD, BD, 3. palmorum, perficiatur rectangulum ACDE, quod æquale est triangulo ABC, vt in scholio propos. 41. lib. ostendimus. Quia vero ex ductu CD, trium palmorum in CA, 8. palmorum producitur area rectanguli CE, 24. palmorum quadratorum, vt ad initium huius lib. docuimus: Totidem palmos quadratos continebit triangulum ABC, rectangulo CE, æquale. Quod est propositum.



SIT deinde triangulum obtusangulum ABC, cuius latera sint cognita; AB, 20. palmorum; AC, 13. BC, 11. Primum igitur inuenienda est quantitas perpendicularis lineæ AD, ex A, in latus BC, protractum demissæ; hoc modo. Quoniam quadratum lateris AB, [b] maius est, quam quadrata [b] 12. sec.

drata



drata laterum AC, BC, rectangulo bis cõprehenso sub BC, CD; si quadrata laterũ AC, BC, nempe 169. 121. qua efficiunt 290. detrahantur ex 400. quadrato lateris AB, remanebunt 110. pro rectangulo bis comprehenso sub BC, CD, cuius numeri dimidium 55. dabit rectangulum sub BC. CD. Si igitur 55. rectangulum sub BC, CD, diuidatur per 11. latus notum BC, exibit reliquum latus CD, 5. palmorum, vt Ioan. Regiom. demonstrat propos. 17. lib. 1. de triangulis, & à nobis demonstratum est in libro de mensurationibus omnium quantitatum. Quia vero quadrata laterum AD,
247. pri CD, [a] aequalia sunt quadrato lateris AC; si quadratum 25. palmorum, nempe lateris CD, 5. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 169. quadrato lateris AC, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare huius AD, erit 12. palmorum, cum radix quadrata huius numeri 144. sit 12. Iam verò diuiso latere BC, bifariam in E; educantur ex C, E, ad BD, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectae AG, quae per A, ipsi BD, parallelè ducitur, in punctis F, G. Quibus peractis, si EC, palmorum quinque cum dimidio,
b 34. pri ducatur in CF, 12. palmorum, (Est [b] enim CF, ipsi AD, aequalis,) exurget area rectanguli CG, 66. palmorum: quod cum aequale sit triangulo ABC, ex scholio propos. 41. lib. 1. (sunt enim rectangulum CG, & triangulum ABC, in eisdem parallelis, &c.) Eris quoque area trianguli ABC, palmorum quadratorum 66. quod est propositum.

SIT postremo triangulum acutangulum ABC, latera habens nota; AB, 13. palmorum; AC, 15. BC, 14. Primum igitur hic quoque reperienda est quantitas perpendicularis AD, ex A, ad BC, demissa, hac ratione. Quoniam quadra-
c 13. sec. tum lateris AB, [c] minus est, quam quadrata laterum AC, BC, rectangulo comprehenso bis sub BC, CD; si quadratum lateris AB, nimirum 169. detrahatur ex quadratis laterum AC, BC, hoc est, ex 225. 196. qua efficiunt 421. remanebunt 252. pro rectangulo comprehenso bis sub BC, CD, cuius numeri dimidium 126. dabit rectangulum sub BC,

CD.

CD. Si igitur 126. rectangulum sub BC, CD, dividatur per BC, latus notum, ut per 14 exibit reliquum eius latus CD, palmorum 9. ut constat ex Ioan. Regiom. lib. 1. de triangulis propos. 19. & à nobis demonstratum sit in lib. de mensurationibus omnium quantitatum. Quoniam autem quadrata ex AD, CD, æqualia sunt quadrato ex AC, si quadratum 81. palmorum, nempe lateris CD, 9. palmorum nuper inuenti, auferatur ex 225. quadrato lateris AC, remanebunt 144. palmi pro quadrato lateris AD. Quare cum radix quadrata huius numeri 144, sit 12. erit latus AD, 12. palmorum. Ipse vero diuiso latere BC, bifariam in E, educantur ex C, E, ad BC, perpendiculares CF, EG, occurrentes rectæ AF, quæ per A, ipsi BC, parallela ducitur, in punctis G, F. Quibus peractis, si CE, 7. palmorum ducatur in EG, 12. palmorum, (hæc enim EG, recta ipsi AD, æqualis) exurget area rectanguli EF, palmorum 84. Quod cum triangulo ABC, sit æquale, ex scholio propos. 42. lib. 1. (sunt enim rectangulum EF, & triangulum ABC, in eisdem parallelis, &c.) erit quoque area trianguli ABC, 84. palmorum. Quod est propositum.

247. pri

IT A QVE in vniuersum, area cuiuscunque trianguli proditur ex dimidio basis in perpendicularem, quæ à vertice ad basim demittitur, vt in exemplis datis est manifestum. Sed plura hac de re in libro de mensurationibus omnium quantitatum, quem propediem, Deo iuuante, in lucem edemus. Quo pacto autem, duobus lateribus, cum vno angulo, cognitis, vel duobus angulis, cum vno latere, reliqui anguli, & latera cognoscantur, demonstrauimus in nostris triangulis rectilineis.

b 34. pri

PROBL. 2. PROPOS. 14. xiiij.

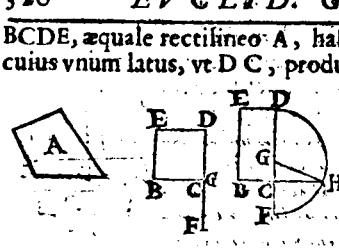
DATO rectilineo æquale quadratum constituere.

SIT datum rectilineum A, cui quadratum æquale constituendum est. c Constituatur parallelogrammum

c 45. pri

BCDE,

BCDE, æquale rectilineo A, habens angulum rectum, cuius vnum latus, vt DC, producatur ad F, sitque CF, recta æqualis rectæ BC. Diuidatur quoque DF, bifariam in puncto G, quod cadet aut in punctum C, aut non. Si cadit in punctum C, erit recta



BC, (cum æqualis ponatur rectæ CF) rectæ CD, æqualis. Quare rectangulum BD, erit quadratum, cum latera DE, EB, a æqualia sint oppositis lateribus BC, CD, atque adeo constitutum erit quadratum æquale rectilineo A. Si vero punctum G, non cadit in C; facto G, centro, describatur interuallo GD, vel GF, semicirculus FHD, producaturq. BC, donec circumferentiam secet in H. Dico igitur, quadratum rectæ CH, esse æquale rectilineo A. Ducta enim recta GH; quia recta DF, diuidtur bifariam in G, & non bifariam in C; erit rectangulum comprehensum sub DC, CF, hoc est, rectangulum BD, vna cum quadrato rectæ GC, b æquale quadrato rectæ GE, hoc est, quadrato rectæ GH; cum rectæ GF, GH, sint æquales: At quadratum rectæ GH, c æquale est quadratis rectarum GC, CH. Igitur rectangulum BD, vna cum quadrato rectæ GC, æquale quoque erit quadratis rectarum GC, CH. Quam ob rem dempto communi quadrato rectæ GC, remanebit rectangulum BD, hoc est, rectilineū A, quadrato rectæ CH, æquale. Dato ergo rectilineo æquale quadratum cōstituimus: Quod facere oportebat.

a 34. primi.

b 5. sec.

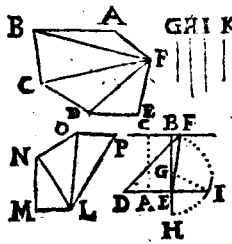
c 47. pri

SCHOLIVM.

VERVM quia laboriosum est, rectangulum dato rectilineo multorum angulorum construere æquale, quod sæpius super datam rectam constituendum sit, ex propos. 44. lib. 1. rectangulum æquale triangulo, facilius fortasse describemus quadratum dato rectilineo æquale, si datam figuram rectilineam in triangula resoluamus, & cuilibet triangulo quadratum æquale efficiamus, hoc est, latus quadrati, quod cuiuis triāgulo æquale sit, inuestigemus: quod fa-

ctu facillimum est, vt mox ostendemus. Nam si per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. scripsimus, inueniamus latus alterius quadrati, quod sit omnium inuentorum laterũ quadratis æquale, factum erit, quod proponitur.

VT si datum sit rectilineum ABCDEF, resoluemus illud in triangula ABF, FBC, CFD, DEF, inueniemusq; latera G, H, I, K, quorum quadrata sint illis ordine æqualia. Deinde angulum rectum constituemus M, & lineas L M, M N, lateribus G, H, æquales. Ducta autem recta NL, erigemus ad eam perpendicularem NO, lateri I, æqualem. Similiter ducta recta O L, excitabimus illi perpendicularem O P, lateri K, æqualem, iungemusq; rectam PL. Atque hoc modo progrediemur, donec vltimo lateri sumpta sit perpendicularis linea æqualis, qualis hic fuit perpendicularis O P, vltimo lateri K, æqualis. Nam quadratum rectæ PL, postremo loco ducta æquale erit omnibus quadratis laterum G, H, I, K, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, atque adeo omnibus triangulis ABF, FBC, CFD, DEF, hoc est, datæ figuræ rectilineæ ABCDEF.



PRAXIS autem, qua cuiuis triangulo quadratum æquale inueniatur, facilis est. Sit enim inueniendum quadratum æquale quarto triangulo DEF, datæ rectilineæ figuræ. Diuidatur quodcunque latus, nempe DE, bifariam in A, producaturq. quantum libet. Ducta deinde per angulum oppositum F, lateri D E, parallela F B, ducatur per E, ad DE, perpendicularis HEB, secans FB, in B, sitq. EH, ipsi AE dimidio lateris DE, æqualis. Postremo, diuisa tota linea BH, bifariam in G, describatur ex G, ad interuallum GH, vel GB, arcus secans latus DE, productum in I. Dico quadratum lateris EI, æquale esse triangulo DEF. Si namque compleatur rectangulum AEC, & semicirculus BH, ducaturq. recta GI, ostendemus, vt in hac propos. 14. quadratum ex EI, rectangulo AB, æquale esse. Cum ergo rectangulum AB, triangulo DEF, sit æquale, ex scholio propos. 41. lib. 1.

quod basis DE, sit dupla basis AE, constat propositum.

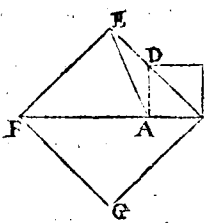
NON est tamen necessarium, vt rectangulum construatur AB. Nam si fiat angulus rectus IEB, aeque in BH, capiatur EH, semissi lateris DE, aqualis, & recta EB, aqualis perpendiculari ex F, in latus DE, demissa, secetur q. BH, bifariam in G, auferet circunferentia ex G, circa BH, descripta rectam EI, cuius quadratum aquale est rectangulo sub BE, EH, hoc est, triangulo DEF.

QVONIAM vero secundo hoc libro Euclides multa de quadratis, ac rectangulis parallelogrammis disputauit, recte hic inseri poterunt sequentia duo problemata de quadrato, & parallelogrammo rectangulo, neque iniucunda, neque inutilia: quorum posterius eruditus vir, atque excellens Mathematicus, Marinus Ghetaldus Patricius Racusinus, mihiq. familiarissimus, ingeniosissimè sane soluit, & longe aliter, breuiusque, quam à quodam alio solutum quondam fuit. quam solutionem hic subiungere superuacaneum est, cum illam Marini Racusini hic apposuerim, tanquam breuiorem, ac faciliorem.

I.

DATO excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem; Inuenire latus ipsius quadrati.

EXCEDAT diameter alicuius quadrati latus eiusdem recta AB, inueniendumq. sit latus illius quadrati. Ex recta AB, describatur quadratum AC, cuius diameter ducta BD, producatur ad E, vt sit DE, recta recta AD, aqualis. Dico rectam EB, esse latus illius quadrati, cuius diameter excedit ipsum latus BF, excessu dato AB. Ducatur enim EF, perpendicularis ad BE, quæ rectam BA, productam secet in



F.

F. Quoniam igitur in triangulo BEF, angulus FEB, rectus est, & EBF, semirectus, ex coroll. 2. propos. 4. huius lib. a erit & BFE, semirectus. b Quare recta BE, FE, aequales sunt. Si igitur ex F, ducatur FG, parallela ipsi BE; & ex B, recta BG, parallela ipsi EF, occurrens priori in G, constitutum erit quadratum recta BE. Quod si ducatur recta AE, erunt anguli AED, EAD, aequalibus lineis DE, DA, oppositi aequales. Quare si demantur ex rectis angulis DEF, DAF, remanebunt anguli AEF, EAF, aequales; d ideoq. recta EF, AF, aequales erunt. Quoniam vero diameter BF, rectam AF, superat data recta AB; superabit eadem diameter BF, latus quadrati EF, eadem recta AB, quod est propositum.

a 32. pri
b 6. pri.
c 5. pri,
d 6. pri.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta composita ex diametro quadrati supra excessum datum descripti, & ex latere eiusdem quadrati, exhibet latus quadrati, quod quæritur. Eadem autem diameter cum duplo excessus, diametrum quæsiti quadrati constituit.

II.

DATIS duobus excessibus diametri alicuius parallelogrammi rectanguli supra vtrumque latus; Inuenire latera ipsius rectanguli.

SVPERET diameter minus latus rectæ AB, & maius recta BC. Producta AC, in vtramque partem, sumatur AD, ipsi AB, aequalis: descripto, circa CD, semicirculo, erigatur ad AC, perpendicularis BE, secans circumferentiam in E, sumaturq. ipsi BE, aequalis CF. Et quia, vt ex demonstratione propos. 14. huius lib. constat, quadratum rectæ BE, aequale est rectangulo sub DB, BC, erit BE, maior quam BC, minus latus dicti rectanguli. Igitur & CF, maior erit quam BC. Sumpta ergo FG, ipsi BC, aequali,

cadet punctum G, inter C, & F. Erecta autem ad AF, perpendiculari GH, ipsi BF, æquali; Dico AG, esse maius latus, & GH, minus, ita vt rectangulum quæsitum sit GK. Esse .n. rectam AG, maiorem quam GH, ita probabitur: Quoniam BC. FG, æquales sunt, addita communi CG, erunt quoque BG, CF, æquales. Additis igitur inæqualibus AB, ipsi BG, & BC, ipsi CF, erit AG, maior quam BF, hoc est, quam GH: quandoquidem addita AB, maior est, quam addita BC. Esse autem AG, GH, latera quæsita, ita demonstrabitur. Descripto ex A, ad interuallum AG, circulo, ducatur per A, H, recta secans circumferentiam in L, M, & recta AD, producatur circumferentiam secans in I. Quoniam igitur rectangulum sub BC, BD, [a] æquale est rectangulis sub CB, BA, & sub CB, AD, hoc est, duplum rectanguli sub excessibus AB, BC: Est autem rectangulo sub BC, DB, æquale quadratum rectæ BE, vt ostendimus; erit quoque quadratum rectæ BE, duplum rectanguli sub AB, BC, hoc est, quadratum rectæ BE, æquale erit duplo rectanguli sub AB, BC. Addito ergo communi quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli sub BG, BC, hoc est sub CF, BC; erunt quadrata rectarum BE, siue CF, & BC, vna cum duplo rectanguli sub CF, BC, æqualia duplo rectanguli sub AB, BC, & quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli sub AB, BC. Sunt autem quadrata rectarum CF, BC, vna cum duplo rectanguli sub CF, BC, [b] æqualia quadrato rectæ BF. Igitur & quadratum rectæ BF, æquale erit duplo rectanguli sub AB, BC, & quadrato rectæ BC, vna cum duplo rectanguli sub CF, BC, vel sub BG, BC. Cum ergo duplum rectangulorum sub AB, BC, & sub BG, BC, æquale sit rectangulo sub IG, (quæ ipsarum AB, BG, simul dupla est) & BC, vel FG; erit quoque quadratum rectæ BF, æquale rectangulo sub IG, FG, vna cum quadrato rectæ BC, vel FG. At rectangulo sub IG, GF, vna cum quadrato rectæ FG, [c] æquale est rectangulum sub IF, FG. Igitur quadratum rectæ BF, siue GH, æquale etiam est rectangulo sub IF, FG. Addito ergo

a 1. sec.

b 4. sec.

c 3. sec.

commu-

communi quadrato rectæ AG; erunt quadrata rectarum GH, AG, æqualia rectangulo sub IF, FG, vna cum quadrato rectæ AG. Est autem quadratis rectarum GH, AG, a *æquale quadratum rectæ AH; & rectangulo sub IF, FG, vna cum quadrato rectæ AG,* b *æquale est quadratum rectæ AF. Igitur & quadratum rectæ AH, quadrato rectæ AF, æquale est, rectaq. AH, rectæ AF, æqualis: demptisq; æqualibus AL, AG, reliqua LH, GF, æquales erunt. Diameter ergo AH, rectanguli GK, hoc est, recta AF, excedit maius latus AG, rectæ GF, sine excessu dato BC: Ipsum vero minus latus GH, sine rectam BF, ipsi GH, æqualem, excessu dato AB. Quod est propositum.*

a 47. pri
b 6. sec.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta BE, vel CF, cuius quadratum rectanguli sub datis excessibus AB, BC, duplum est, addita minori excessui BC, efficit minus latus quæsitum BF, hoc est, GH. Eadem autem recta BE, hoc est, BG, addita maiori excessui AB, conficit maius latus quæsitum AG: Eadem denique BE, vel CF, cum vtroque excessu AB, BC, diametrum AF, vel AH, constituit.

FINIS ELEMENTI SECVNDI.

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

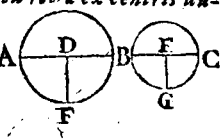
I.

AEQVALES circuli sunt, quorum diametri sunt æquales; vel quorum, quæ ex centris, rectæ lineæ sunt æquales.

VONIAM Euclides hoc 3. lib. varias circuli proprietates demonstrat, idcirco explicat prius terminos quosdam, quorum frequens in eo futurus est vsus. Primum itaque docet, eos circulos esse aquales, quorum diametri, vel semidiametri aquales sunt. Cum enim circulus describatur ex circumuolutione semidiametri circa alterum extremum fixum, & immobile, vt lib. 1. diximus, perspicuum est, eos circulos

esse

esse æquales, quorum semidiametri, seu rectæ ex centris ductæ, sunt æquales; vel etiam quorum tota diametri æquales sunt. Vt si diametri AB, BC, vel rectæ DF, EG, è centris D, & E, ductæ sint æquales, æquales erunt circuli AFB, & BGC. Sic etiam è contrario, si circuli sint æquales, erunt diametri, vel rectæ e centris ductæ, æquales. Ex his liquet, circulos, quorum diametri, vel rectæ ductæ ex centris sunt inæquales, inæquales esse; atque adeo illum, cuius diameter, vel semidiameter maior, maiorem. Et contra, circulorum inæqualium diametros, semidiametrosve inæquales esse, maioris quidem maiorem, & minoris minorem.



II.

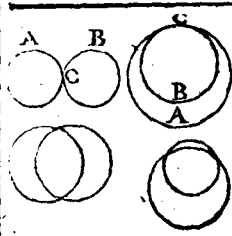
RECTA linea circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, si producatur, circulum non secat.

VT recta AB, si ita circulum BFD, tangat in B, vt producta ad C, nulla ratione circulum secet, sed tota iaceat extra ipsum, dicetur tangere circulum. At vero recta EF, quia ita eundem circulum tangit in F, vt producta ad G, secet circulum, cadatq. intra ipsum, non dicetur circulum tangere, sed secare.

III.

CIRCVLI se se mutuo tangere dicuntur, qui se se mutuo tangentes, se se mutuo non secant.

EODEM modo duo circuli AC, BC, se mutuo dicuntur tangere in C, si ita sese contingant in C, vt neuter alterum secet. Est autem hic contactus circulorum duplex.



Aut enim exterius se se circuli tangunt, vt quando vnus extra alterum est positus; aut interius, quando vnus intra alterum constituitur. Quod si duo circuli ita se mutuo tangant, vt vnus alterum quoque secet, dicentur circuli illi se mutuo secare, & non tangere.

IIII.

IN circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cum perpendiculares, quæ à centro in ipsas ducuntur, sunt æquales. Longius autem abesse illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

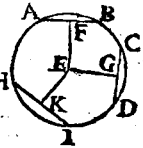
QVONTAM inter omnes lineas rectas, quæ ab aliquo puncto ad quamlibet lineam rectam ducuntur, brevissima est perpendicularis, & semper eadem; aliæ vero infinitis modis variari possunt; recte distantia illius puncti à linea illa recta accipitur penes lineam perpendicularem. Vt distantia puncti A, à recta BC, dicitur esse perpendicularis AD, non autem AE, vel AF, vel alia quauis, quæ non perpendicularis est; quia AD, omnibus est brevior, ex coroll. propos. 19. lib. 1. Immo non solum AE, AF, maiores sunt, quam AD, sed etiam ipsæ inter se inæquales sunt. Est enim AF, a maior, quam AE, cum angulus AEF, sit obtusus, & AFE, acutus, & sic de alijs lineis non perpendicularibus. Quod enim AFE, acutus sit, constat ex eo, quod in triangulo ADF, duo anguli ADF, AFD, b minores sunt duobus rectis. Hinc enim fit, cum ADF, rectus sit, angulum AFD, recto esse minorem. Eadem ratione angulus AED, ostendetur acutus, propterea quod in triangulo ADE, c duo anguli ADE, AED, minores sunt duobus rectis, & ADE, rectus est.) ac proinde, cum ambo AED, AEF,

19. pri

17. pri

17. pri

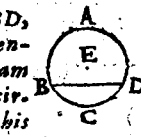
æquales sint duobus rectis, erit AEF, obtusus. Hinc factum est, vt Euclides æqualem distantiam rectarum in circulo ab ipsius centro definierit per æquales perpendiculares, & inæqualem distantiam per inæquales. Vt duæ rectæ AB, CD, in circulo ABCD, æqualiter dicentur distare à centro E, si perpendiculares EF, EG, æquales fuerint. At linea CD, longius abesse dicetur à centro E, quam linea HI, si perpendicularis EG, maior fuerit perpendiculari EK. 213. pri



V.

SEGMENTVM circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

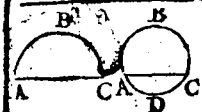
VT si ducatur in circulo ABCD, recta BD, vtcunque, dicetur tam figura BAD, contenta circumferentia BAD, & recta BD; quam figura BCD, comprehensa recta BD, & circumferentia BCD, circuli segmentum. Ex his colligitur triplex circuli segmentum, Semicirculus, quando recta BD, per centrum E, incedit; Segmentum semicirculo maius, quando recta BD, non transit per centrum, in ipso tamen centrum existit, quale est segmentum BAD; Et Segmentum semicirculo minus, extra quod centrum circuli constituitur, cuiusmodi est segmentum BCD. Id quod ad defin. 18. lib. 1. demõstrauimus. Vocatur à plerisq. Geometris recta BD, chorda, & circumferentia BAD, vel BCD, arcus.



VI.

SEGMENTI autem angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

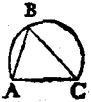
DEFINIT iam Euclides tria genera angulorum, qui in circulis considerantur. Primo loco angulum segmen-



ti, dicens angulum mixtum BAC, vel BCA, contentum sub recta linea AC, & circumferentia ABC, appellari angulum segmenti. Quod si segmentum circuli fuerit semicirculus, dicetur angulus semicirculi: Si vero segmentum maius semicirculo extiterit, vocabitur angulus segmenti maioris: Si denique segmentum minus fuerit semicirculo, angulus segmenti minoris nuncupabitur.

VII.

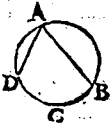
IN segmento autem angulus est, cum in segmenti peripheria sumptum fuerit quodpiam punctum, & ab illo in terminos rectæ eius lineæ, quæ segmenti basis est, adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Is, inquam, angulus ab adiunctis illis lineis comprehensus.



SIT segmentum circuli quodcunque ABC, cuius basis recta AC. Ex suscepto quolibet puncto B, in circumferentia, ducantur ad puncta A, & C, extrema basis, rectæ lineæ BA, BC. Angulus igitur rectilineus ABC, dicitur existere in segmento ABC.

VIII.

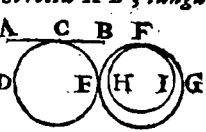
CVM vero comprehendentes angulum rectæ lineæ aliquam assumunt peripheriam, illi angulus insistere dicitur.



EX puncto A, quolibet suscepto in circumferentia circuli ABCD, ducantur rectæ duæ lineæ AB, AD, ad duo extrema B, & D, circumferentiæ BCD, cuiusque quam quidem duæ rectæ AB, AD, assumunt. Angulus itaque rectilineus

stilineus BAD, insistere dicitur circumferentiæ BCD. Perspicuum autem est, hunc angulum à præcedenti non differre, nisi voce tenus. Idem enim angulus rectilineus BAD, iuxta præcedentem quidem definitionem dicitur esse in segmento BAD, si recta BD, basis duceretur; ex hac vero insistere circumferentiæ BCD. Non tamen confundendus est angulus in segmento aliquo, cum angulo, qui circumferentiæ insistit; quamuis vnus & idem sit; ad diuersa siquidem referuntur. Angulus enim in segmento, segmentum, in quo existit, angulus autem insistens circumferentiæ, circumferentiam, quæ basis est ipsius anguli, respicit. Vnde si sumatur segmentum aliquod circuli BCD, in circulo ABCD, non erit idem angulus in hoc segmento existens, & eius circumferentiæ insistens. Angulus enim in eo existens, erit BCD; at eius circumferentiæ BCD, insistens, erit angulus BAD, qui multum ab eo differt. Qua in re mirum in modum hallucinati sunt Orontius, Peletarius, & alij interpretes nonnulli. Quod autem angulus in segmento, & angulus circumferentiæ cuipiam insistens, ad diuersos arcus referantur, luce clarius patebit ex vltima propos. lib. 6. qua solum conuenire potest circumferentijs circulorum, quibus anguli insistunt, non autem in quibus existunt, vt eo in loco ostendemus. Idem quoque facile constat ex verbo græco βεβηκέναι, quod ascendisse significat. Ascendit enim angulus DAB, supra circumferentiam BCD.

PRAETER tres dictos angulos consideratur etiam à Geometris angulus contingentiæ, qui continetur linea recta tangente circulum, & circumferentia circuli; vel certe duabus circumferentijs se mutuo tangentibus, siue hoc exterius fiat, siue interius. Exemplum. Si recta AB, tangat circulum CDE, in C; angulus mixtus ACD, vel BCE, dicetur angulus contingentiæ, siue contactus: Rursus, si circulus CED, tangat circulum EFG, exterius in E; Item circulus HFI, circulum EFG, inte-



rius in F; appellabitur tam angulus curuilineus CEF, quam EFH, vel GFI, angulus contactus, seu contingentia. Sunt itaque, vt vides, tres anguli contingentia, vnus quidem mixtus, reliqui vero duo curuilinei.

IX.

SECTOR autem circuli est, cum ad ipsius circuli cẽtrum constitutus fuerit angulus, comprehensa nimirum figura & à rectis lineis angulum continentibus, & à peripheria ab illis assumpta.

SI in circulo ABCD, cuius centrum E, rectæ AE, CE, constituant angulum AEC, ad centrum E; nominabitur figura AECD, contenta rectis AE, EC, & circumferentia ADC, quam predictæ lineæ assumunt, Sector circuli. Ex hoc autem perspicue etiam colligitur, angulum, qui definitione 8. explicatur, referri ad circumferentiam, qua ipsius basis est, non autem ad eam, in qua existit, vt multi interpretes existimarunt. Nam sicut in hac definitione Euclides intelligit circumferentiam ADC, qua basis est anguli ad centrum constituti, quando mentionem facit peripheriæ à rectis AE, CE, assumptæ; Ita quoque in illa intellexisse eum necesse est nomine peripheriæ, quam rectæ lineæ assumunt, eam, qua basis est anguli ad circumferentiam constituti; quandoquidem in vtraque definitione vsus est eodem verbo graco ἀπολαμβάνω.

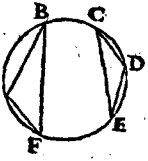
X.

SIMILIA circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales: Aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

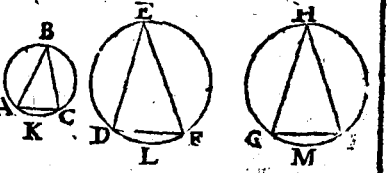
SEGMENTA videlicet ABDF, DCAE; eiusdem

circuli

circuli ABCDEF, quæ capiunt hos duos angulos ABE, DCE, æquales: vel, quod idem est, in quibus ijdem anguli æquales existunt, iuxta 7. definitionem, similia dicuntur, & ipsa circunferentia quoque ABDF, DCAE, similes.



EODEM modo segmenta diuersorum circulorum tam æqualium, quam inæqualium, à Geometris dicuntur similia, quæ vel suscipiunt æquales angulos; vel in quibus æquales anguli existunt. Vt si in circulis ABCK, DEFL, GHIM, anguli ABC, DEF, GHI, fuerint æquales, dicentur segmenta, seu circumferentia ABC, DEF, GHI, quæ dictos angulos suscipiunt, vel in quibus prædicti anguli existunt, similes. Consistit autem hæc segmentorum, circumferentiarumve similitudo in eo, quod qualis pars est vna circumferentia totius suæ circumferentia, talis quoque sit altera circumferentia, quæ dicitur huic similis, totius suæ circumferentia; ita vt qualis, & quanta pars est circumferentia ABC, totius circumferentia ABCA, talis & tanta quoque pars sit circumferentia DEF, totius circumferentia DEFD; Item talis, & tanta circumferentia GHI, totius circumferentia GHIG. Vel potius segmentorum similitudo in hoc consistit, quod segmenta, seu circumferentiæ similes, ad totas circumferentias suas eandem habeant proportionem. Quod autem segmenta, quæ vel æquales suscipiunt angulos, vel in quibus existunt æquales anguli, sint huiusmodi, demonstrabimus propositione vltima lib. 6. Nunc satis sit, talia segmenta circulorum, vel etiam arcus, circunferentiasve, appellari similes.



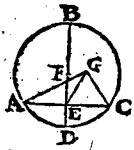
EADEM ratione dicuntur arcus, vel circumferentiæ similes, quibus æquales anguli, iuxta defin. 8. insistunt. Vt si in ijsdem circulis anguli ABC, DEF, GHI, sint æquales, dicentur arcus, circumferentiæve AKC, DLF, GMI,

quibus

quibus insistunt, similes. Immo si anguli ad centra insistentes arcubus AKC, DLF, GMI, sint æquales, erunt adhuc ipsi arcus similes. Id quod à nobis in scholio propos. 22. huius lib. demonstrabitur.

j. **PROBL. 1. PROPOS. 1.**

DATI circuli centrum reperire.



SIT circulus datus ABCD, cuius centrum oportet inuenire. Ducatur in eo linea vtcunque AC, a quæ bifariam diuidatur in E, & per E, ad AC, perpendicularis agatur BD, vtrinque in peripheria terminata in punctis B, D. Hac igitur bifariam secta in F; dico F, esse centrum circuli propositi. In ipsa enim recta BD, aliud punctum, præter F, non erit centrum, cum omne aliud punctum ipsam diuidat inæqualiter, quandoquidem in F, diuisa fuit æqualiter. Si igitur F, non est centrum, sit punctum G, extra rectam BD, centrum, à quo ducantur lineæ GA, GE, GC. Quoniam ergo latera AE, EG, trianguli AEG, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG; & basis AG, basi CG; (à centro enim ducti dicuntur) b erunt anguli AEG, CEG, æquales, ideoq. recti: Erat autem & angulus AEF, rectus ex constructione: Igitur recti AEF, AEG, æquales sunt, pars & totum. quod est absurdum. Non est ergo punctum G, centrum; eademq. est ratio de omni alio. Quare F, centrum erit. Itaque dati circuli centrum reperimus. Quod erat faciendum.

a 10 pri

b 8. pri.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si in circulo recta aliqua linea aliquam rectam lineam bifariam, & ad angulos rectos secet, in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod BD, recta rectam AC, bifariam secat in E, & ad angulos rectos, ostensum fuit, punctum eius medium F, necessario esse circuli centrum.

THEO-

THEOR. 1. PROPOS. 2. ij.

SI in circuli peripheria duo quælibet puncta accepta fuerint; Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.

IN circulo ABC, sumantur quælibet duo puncta A, & C, in eius circumferentia. Dico rectam ex A, in C, ductam cadere intra circulum, ita vt ipsum secet. Si enim non cadit intra, cadat extra, qualis est linea ADC, recta, vt vult aduersarius. Inuento [a] igitur centro E, ducantur ab eo ad puncta assumpta A, & C, necnon ad quoduis punctum D, in recta ADC, lineæ rectæ EA, EC, ED, secetq. ED, circumferentiam in B. Quoniam ergo duo latera EA, EC, trianguli, cuius basis ponitur recta ADC, æqualia sunt, (è centro enim ducuntur) [b] erunt anguli EAD, ECD, æquales: Est autem angulus EDA, [c] angulo ECD, maior, externus interno opposito, cum latus CD, in triangulo ECD, sit productum ad A. Igitur & angulo EAD, maior erit idem angulus EDA. Quare recta EA, maiori angulo ADE, opposita, hoc est, recta EB, sibi æqualis, [d] maior erit, quàm recta ED, minori angulo DAE, opposita, pars quàm totum. Quod est absurdum. Non igitur recta ex A, in C, ducta extra circulum cadet, sed intra. Eodem enim modo demonstrabitur, rectam ductam ex A, in C, non posse cadere super arcum ABC, ita vt eadem sit, quæ circumferentia ABC. Esset enim recta EA, maior, quam recta EB. Quod etiam ex definitione rectæ lineæ patet, cum ABC, arcus sit linea curua, non autem recta. Itaque si in circuli peripheria duo quælibet puncta, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. tertij

b 5. pri.

c 16. pri

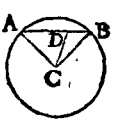
d 19. pri

SCHOLIVM. xiiij.

IDEM hoc theorema demonstrari poterit affirmatiue, hoc modo. Recta AB, coniungat duo puncta A, & B, in cir-

cunferentia

cunferentia circuli AB, cuius centrum C. Dico rectam AB, intra circulum cadere, ita vt omnia eius puncta media intra circulū existant. Assumatur enim quodcunque eius punctum intermedium D, & ex centro educantur rectæ CA, CB, CD. Quoniam igitur duo latera CA, CB, trianguli CAB, æqualia sunt, a erunt anguli CAB, CBA, æquales: Est autem angulus CDA, b angulo CBA, maior, externus interno. Igitur idem angulus CDA, angulo CAD, maior erit, & ob id latus CA, c latere CD, maius erit. Quare cum CA, sit ducta à centro ad circunferentiam, vsque, non perueniet recta CD, ad circumferentiam, ideoque punctum D, intra circulum cadet. Idem ostendetur de quolibet alio puncto assumpto. Tota igitur recta AB, intra circulum cadit. Quod est propositum.



a 5. pri.
b 16. pri
c 19. pri

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, lineam rectam, quæ circulum tangit, ita vt eum non secet, in vno tantum puncto ipsum tangere. Si enim in duobus punctis eum tangeret, d caderet pars rectæ inter ea duo puncta posita, intra circulum. Quare circulum secaret, quod est contra hypothesin.

d 2. ter.

iij.

THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI in circulo recta quædam linea per centrum extensa quandam non per centrum extensam bifariam secet; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.

PER centrum A, circuli BCD, recta CE, extensa diuidat rectam BD, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam AF, esse ad angulos rectos ipsi BD. Ductis enim rectis AB, AD, erunt duo latera AF, FB, trianguli AFB, duobus AF, FD, trianguli AFD, æqualia; & bases AB, AD, æquales. e Igitur anguli AFB,

e 8. pri.

AFD,

AFD, æquales erunt, hoc est, recti. Quod erat primo propositum.

SIT iam AF, ad angulos rectos ipsi BD. Dico rectam BD, bifariam secari in F, à recta CE. Ductis enim iterum rectis AB, AD; cum latera AB, AD, trianguli ABD, sint æqualia, [a] erunt anguli ABD, ADB, æquales. Quoniam igitur duo anguli ABF, ABF, trianguli ABF, æquales sunt duobus angulis AFD, ADF, trianguli ADF; & latera AB, AD, quæ rectis angulis æqualibus opponuntur, æqualia quoque: [b] erunt latera FB, FD, æqualia. Quod secundo proponebatur. Si igitur in circulo recta quædam linea per centrum extensa, &c. Quod demonstrandum erat. a 5. pri. b 6. pri

FACILE quoque demonstrari poterat secunda, hæc pars, quæ quidem conuersa est primæ partis, hac ratione. Si enim AF, perpendicularis est ad BD, erit tam quadratum rectæ AB, [c] æquale quadratis rectarum AF, FB, quàm quadratum rectæ AD, quadratis rectarum AF, FD. Cum igitur quadratum rectæ AB, æquale sit quadrato rectæ AD; erunt & quadrata rectarum AF, FB, æqualia quadratis rectarum AF, FD. Quare dempto communi quadrato rectæ AF, remanebunt quadrata rectarum FB, FD, æqualia; atque idcirco & rectæ FB, FD, æquales erunt. c 47. pri

COROLLARIVM.

EX hac demonstratione facile inferemus, in quouis triangulo duorum laterum æqualium, siue æquilaterum illud sit, siue scalenon, lineam, quæ basim bifariam secet, perpendicularem esse ad basim: Et contra, lineam, quæ ad basim sit perpendicularis, basim secare bifariam. Nam in triangulo ABD, cuius duo latera AB, AD, æqualia sunt, atque adeo ex centro A, per B, D, circulus describi potest: ex eo, quod recta AF, secat basim BD, bifariam, ostensum est, angulos ad F, esse rectos: Et ex eo, quòd anguli ad F, recti sunt, demonstratum est, basim BD, à recta AF, bifariam secari. Sed hoc etiam demonstrauimus ad propos. 26 lib. 1. & quidem vniuersalius.

SCHOLIVM.

CENSEMVS quoque, demonstrandum esse hoc loco sequens theorema, ad ea, quæ sequuntur, non inutile; videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interioris circumferentiam secans; erunt eius segmenta inter vtramque circumferentiam posita, inter se æqualia.

DVO circuli ABC, DEFG, habeant idem centrum H, & ex puncto A, ducatur primum per centrum H, recta AC, secans circumferentiam interiorem in D, G. Dico rectas AD, CG, æquales esse. Nam si ex HA, HC, quæ a æquales sunt, demantur HD, HG, quæ eadem ratione æquales sunt, b erunt rectæ AD, CG, æquales.

a 15. def
b 3. prō.

DEINDE ex eodem puncto A, ducatur recta AB, non per centrum secans interiorem circumferentiam in E, F. Dico rursus, rectas AE, BF, esse æquales. c Ducta enim ex centro H, ad AB, perpendiculari HI, d secabit hæc tam rectam AB, in circulo ABC, quam rectam EF, in circulo DEFG, bifariam. Ablatis igitur æqualibus IE, IF, ex æqualibus IA, IB, e remanebunt AE, BF, æquales. quod est propositum.

c 12. pri
d 3. ter.
e 3. prop

iiij.

THEOR. 3. PROPOS. 4.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent non per centrum extensæ; se se mutuo bifariam non secabunt.

DVÆ rectæ AB, CD, se mutuo in E, secent in circulo ACBD, non per centrum extensæ. Dico fieri non posse, vt mutuo sese bifariam secent. Si enim vna earum per centrum transit, certum est, eam bifariam non secari: solum enim in centro, per quod altera ponitur non transi-

re,

re, bifariam diuiditur: Si vero neutra per centrum extenditur, quamuis vna earum nonnunquam bifariam ab altera diuidatur, tamen altera minime secabitur bifariam. Diuisa enim sit & AB, & CD, si fieri potest, bifariam in E. [a] Inuento igitur centro circuli F, ducatur ab eo ad E, recta FE. Quoniam ergo FE, ponitur secare rectam AB, bifariam in E, [b] secabit ipsam ad angulos rectos. Eadem ratione secabitur CD, ad angulos rectos, cum ponatur bifariam diuidi in E. Quare rectus angulus FED, recto angulo FEB, æqualis est, pars toti, quod est absurdum. Itaque si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secent, &c. Quod erat demonstrandum.

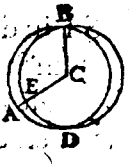
a 1. ter.

b 3. ter.

THEOR. 4. PROPOS. 5. v.

SI duo circuli se se mutuo secent; non erit illorum idem centrum.

DVO circuli ABD, EBD, se mutuo secent in B, & D. Dico ipsos non habere idem centrum. Sit enim, si fieri potest, idem centrum vtriusque, C, à quo duæ rectæ ducantur; CB, quidem ad sectionem B; CA, A vero secans vtramque circunferentiam in A, & E. Quoniam igitur C, centrum ponitur circuli EBD, erit recta EC, rectæ BC, æqualis. Rursus quia C, centrum quoque ponitur circuli ABD, erit & recta AC, eidem rectæ BC, æqualis. Quare rectæ EC, AC, [c] æquales inter se erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo secent, &c. Quod ostendendum erat.



a 1. prom.

THEOR. 5. PROPOS. 6. vj.

SI duo circuli se se mutuo interius tangant; eorum non erit idem centrum.

DVO circuli AB, BC, se interius tangant in B. Dico eos non habere idem centrum. Habeant enim, si fieri potest, idem centrum D, à quo duæ rectæ ducantur; D B, quidem ad tactum B. At D C, secans vtramque circunferentiam in A, & C. Quoniam igitur D, ponitur centrum circuli A B, erit recta AD, rectæ BD, æqualis. Rursus quia D, ponitur centrum circuli BC, erit recta CD, eidem rectæ BD, æqualis. Quare rectæ AD, & CD, [a] inter se erunt æquales, pars & totum, quod est absurdum. Si igitur duo circuli se se mutuo interius tangant, &c. Quod demonstrandum erat. 21. prom

SCHOLIVM.

EVCLIDES proposuit theorema hoc de circulis se se interius tangentibus duntaxat, quoniam circulorum exterius se se tangentium, cum vnus sit extra alium, non posse esse idem centrum, manifestum est.

vij.

THEOR. 6. PROPOS. 7.

SI in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoque puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant: Maxima quidem erit ea, in qua centrum, minima vero reliqua; aliarum vero propinquior illi, quæ per centrum ducitur, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulū cadunt, ad vtrasq; partes minimæ, vel maximæ.

IN diametro AB, circuli ACDEB, cuius centrum F, punctum assumatur quodcunque G, præter centrum, & ex G, cadant in circulum quotcunque lineæ G C, G D, G E. Dico omnium, quæ ex G, ad circumferentiam du-

cuntur,

cuntur, maximam esse GA, in qua est centrum, minimam vero reliquam GB, quæ diametrum perficit: Deinde rectam GC, quæ rectæ GA, per centrum ductæ propinquior est, maiorem recta GD, quæ ab eadem GA, plus distat; & eadem ratione GD, maiorem recta GE, atque ita de alijs lineis, si ducerentur, in infinitum. Denique ex G, ad vtrasque partes minimæ lineæ GB, vel maximæ GA, duci posse tantummodo duas lineas inter se æquales. Ducantur è centro F, ad C, D, & E, rectæ lineæ FC, FD, FE. Quoniam igitur duo latera GF, FC, trianguli GFC, [a] maiora, sunt latere GC. Sunt autem rectæ GF, FC, æquales rectis GF, FA, hoc est, toti rectæ GA; erit & GA, maior quam GC. Eadem ratione maior erit recta GA, quam GD, & quam GE. Quare GA, maxima est omnium, quæ ex G, in circulum cadunt.

a 20. pri

DEINDE, quoniam in triangulo EFG, latus EF, [b] minus est duobus lateribus FG, GE. Est autem EF, ipsi FB, æqualis; erit & FB, minor duabus rectis FG, GE. Dempta ergo communi recta FG, remanebit adhuc GB, minor, quam GE. Eadem ratione minor erit GB, quam GD, & quam GC. Quare GB, minima est omnium, quæ ex G, in circuli circumferentiam eadunt.

b 20. pri

RVRSVS, quia duo latera GF, FC, trianguli GFC, æqualia sunt duobus lateribus GF, FD, trianguli GFD; & angulus totus GFC, maior est angulo GFD; [c] erit basis GC, maior basi GD. Eadem ratione maior erit GC, quam GE: Item maior erit GD, quam GE. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est ea, quæ remotior.

c 24. pri

FIAT iam angulo BFE, ex altera parte æqualis angulus BFH, & ducatur recta GH. Quoniam igitur latera BF, FG, trianguli EFG, æqualia sunt lateribus HF, FG, trianguli HFG, & anguli his lateribus contenti EFG, HFG, æquales; [d] erunt rectæ GE, GH, ex vtraque parte ipsius lineæ minimæ GB, vel maximæ GA, æquales inter se. Quod autem nulla alia his duabus pos-

d 4. pri.

sit esse æqualis, constat: Nam si ex G, ducatur alia, quæ cadat supra punctum H, erit ea, cum sit ei, quæ per centrum ducitur, propinquior, maior quam GH: si vero cadat infra H, erit ea, cum sit remotior ab eadem GA, per centrum ducta, minor quam GH, vt ostensum fuit. Duæ igitur duntaxat rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ GB, vel maximæ GA, cadunt. Itaque si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

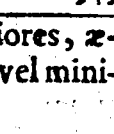
QVAMQVAM autem Euclides solum demonstraverit, lineam, quæ propinquior est rectæ per centrum ductæ, remotiore esse maiorem, si amba linea ex eadem parte diametri AB, existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ducta sint. Vt si quis dicat, rectam GD, propinquiorem esse rectæ GA, quam rectam GH; dico GD, maiorem esse, quam GH. Si namque ipsi GH, ex altera parte æqualis ducatur GE, vt dictum est, nempe si fiat angulo GFH, æqualis angulus GFE; &c. videt punctum E, inter D, & B; quod GH, GE, æqualiter à GA, distent, ob æqualitatem angulorum GFH, GFE; & GD, ponatur minus distare, quam GH, ac proinde minus, quam GE. Cum ergo GD, maior sit, quam GE, maior quoque erit eadem GD, quam GH. 2 7. ter.

HANC porro propositionem nonnulli conuertunt, hoc modo.

SI intra circulum punctum sumatur, ab eoque puncto in circulum rectarum linearum cadentium, vna quidem maxima sit, vna vero minima; & reliquarum aliæ sint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores

qui-

quidem erunt maximæ propinquiores, æquales autem ab eadem maxima, vel minima æqualiter distabunt.



IN circulo ABC, punctum sumatur D, à quo rectæ quotcunque DA, DC, DE, DF, DB, cadant in circumferentiam, quarum omnium maxima sit DA, minima vero DC; ipsarum vero DE, DF, maior sit DE; denique DE, DB, sint æquales. Dico DA, per centrum transire, & DC, reliquam partem esse diametri, hoc est, DC, ipsi DA, esse in directum. Item DE, quæ maior ponitur quam DF, propinquiorem esse maximæ DA, quam DF. Denique DE, DB, æqualiter ab eadem DA, vel DC, abesse. Primum enim si DA, non transit per centrum; ducta ex D, per centrum recta quapiam linea, [a] *erit ea omnium ex D, cadentium maxima. Quod est absurdum; cum DA, maxima ponatur. Transit ergo DA, per centrum.* [a 7. ter.]

DEINDE si DC, non est in directum ipsi DA; protracta AD, in directum, [b] *erit alia recta quam DC, ex D, cadens, nempe pars ipsius AD, protracta, omnium minima; Quod est absurdum; cum DC, minima ponatur. Est ergo DC, reliqua pars diametri.* [b 7. ter.]

RVRSVS si DE, non est vicinior maximæ DA, quam DF; aut æqualiter distabunt ab ea, aut DE, longius ab ea aberit: Si æqualiter utrinque à DA, dicantur distare, [c] *ipsa erunt æquales; quod est absurdum. Ponitur enim DE, maior. Si vero æqualiter ex eadem parte à DA, distare dicantur, erunt DE, DF, una eademque linea; atque adeo DE, maior non erit, quam DF, quod est contra hypothesin. Quod si DF, dicatur esse propinquior maximæ DA,* [d] *ipsa erit maior, quam DE. Quod magis est absurdum.* [c 7. ter.] [d 7. ter.]

POSTREMO si DE, DB, non æqualiter distant à DA, vel DC, [e] *erit ea, quæ magis à DA, distat, reliqua minor. Quod est absurdum. Ponuntur enim æquales DE, DB.* [e 7. ter.]

viij.

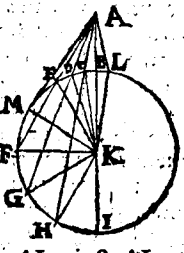
THEOR. 7. PROPOS. 8.

SI extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore ſemper maior eſt; In conuexam vero peripheriam cadentium rectarum linearum minima quidem eſt illa, quæ inter punctum, & diametrum interponitur; aliarum autem ea, quæ propinquior eſt minimæ, remotiore ſemper minor eſt. Duæ aũt tantũ rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipſum circulum cadunt, ad vtraſque partes minimæ, vel maximæ.

EX puncto A, extra circulum BCDE, cuius centrum K, lineæ ſecantes circulum ducantur, quarum AI, per centrum tranſeat, aliæ vero AH, AG, AF, vtcunque. Dico omnium eſſe maximam AI, quæ per centrum incedit: Deinde rectam AH, quæ rectæ AI, quæ per centrum ducitur, propinquior exiſtit, maiorem rectam AG, quæ remotior eſt ab eadem AI: Et eadem ratione AG, maiorem quam AF. E contrario autem, rectam AB, omnium, quæ extra circulum ſunt, minimam eſſe: Deinde rectam AC, quæ vicinior eſt minimæ AB, minorem eſſe recta AD, remotiore; Et eadem ratione, ipſam AD, minorem, quam AE. Denique ex A,

ad

ad vtrasque partes minimæ lineæ AB, vel maximæ AI, duci posse tantummodo duas lineas rectas inter se æquales. Ducantur ex centro K, ad puncta C, D, E, F, G, H, rectæ KC, KD, KE, KF, KG, KH. Quoniam igitur duo latera AK, KH, trianguli AKH, [a] maiora sunt recta AH; Sunt autē rectæ AK, KH, æquales rectis AK, KI, hoc est, toti rectæ AI, erit & AI, maior, quam AH. Eadem ratione erit AI, maior, quam AG, & quam AF. Quare AI, est omnium, quæ ex A, in circulum cadunt, maxima.



[a] 20. pri

DEINDE, quoniam latera AK, KH, trianguli AKH, æqualia sunt lateribus AK, KG, trianguli AKG; Et angulus totus AKH, maior est angulo AKG; [b] erit basis AH, basi AG, maior. Eadem ratione maior erit AH, quam AE: Item AG, maior, quam AF. Quare linea propinquior ei, quæ per centrum ducitur, maior est linea remotiore.

[b] 24. pri

RVRSVS; quia in triangulo ACK, recta AK, [c] minor est duabus AC, CK; si auferantur æquales BK, CK: remanebit adhuc AB, minor, quam AC. Simili ratione erit AB, minor, quam AD, & quam AE. Quare AB, omnium linearum extra circulum, quæ ex A, ducuntur, minima est.

[c] 20. pri

RVRSVS, cum intra triangulum ADK, cadant duæ rectæ AC, CK, ab extremitatibus lateris AK; [d] erunt AC, CK, minores, quam AD, DK. Sublatis igitur æqualibus CK, DK, remanebit adhuc AC, minor, quam AD. Pari ratione erit AC, minor, quam AE: Item AD, minor, quam AE. Quare linea propinquior minimæ lineæ AB, minor est, quam remotior ab eadem.

[d] 21. pri

POSTREMO fiat angulo AKC, angulus AKL, æqualis, & ducatur recta AL. Quoniam igitur latera AK, KC, trianguli AKC, æqualia sunt lateribus AK, KL, trianguli AKL; Sunt autem & anguli AKC, AKL, dictis lateribus

a 4. pri. ribus contenti æquales ; a erunt rectæ AC, AL, ex vtraque parte minimæ AB, vel maximæ AI, inter se æquales. Quod autem nulla alia his possit esse æqualis, constat. Nam si ex A, ducatur recta cadens vltra L, erit ipsa, cum sit remotior à minima, maior quam AL. Quod si cadat inter B, & L, erit ea, cum sit minimę propinquior, minor quam AL, vt ostensum est. Duæ igitur solum rectæ lineæ æquales ad vtrasque partes minimæ, vel maximæ cadunt. Si igitur extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ab A, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ æquales cadent, ad vtrasque partes maximæ AI.

FIAT enim angulo AKH, æqualis angulus AKM, iungaturque recta AM. Quia igitur latera AK, KH, æqualia sunt lateribus AK, KM; sunt autem & anguli AKH, AKM, æquales; b erunt, & basis AH, AM, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis exhiberi potest. Nam quacunque ex A, ducatur ad partes H; ea vel maior erit, vel minor, quam AH, prout citra vel vltra rectam AH, ducta fuerit, vt manifestum est ex demonstratione theorematis.

b 4. pri.

HAEC propositio vera etiam est, quando vna linearum ex A, cadentium circulum tangit. Hæc enim quia longius à linea per centrum ducta abest, minor erit omnibus alijs in concauam peripheriam cadentibus, qualis est recta AM, in priori figura. Nam ducta recta KM, ex centro ad contactum, erunt duo latera AK, KF, trianguli AKF, æqualia duobus lateribus AK, KM, trianguli AKM, angulus vero AKF, angulo AKM, maior. Igitur c basis AF, basi AM, maior erit. Eadem ratione maior erit quacunque alia in eandem peripheriam cadens, quam recta AM.

c 24. pri

PARI ratione eadem linea tangens AM, maior erit omnibus alijs in conuexam peripheriam cadentibus.

Nam

Nam cum duo latera AE, EK, [a] *minora sint duobus lateribus AM, MK: si auferantur aquales rectæ KE, KM, erit reliqua AE, minor quam reliqua AM. Eademque ratio est de cæteris.* a 21. pri

QVAM QVAM vero Euclides solum demonstrauerit, lineam propinquiorem ei, quæ per centrum ducitur, maiorem esse remotiore: Item lineam propinquiorem minimæ minorem esse remotiore, si ambæ lineæ ex eadem parte maximæ, vel minimæ existant: idem tamen verum etiam est, si ad diuersas partes ductæ sint. Quod non aliter demonstrabitur, quàm idem in scholio præcedentis propositionis de duabus lineis ad diuersas partes ductis demonstratum fuit.

THEOR. 8. PROPOS. 9. ix.

SI in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ, rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

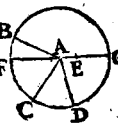
A puncto assumpto A, in circulo BCD, cadant plures rectæ, quam duæ, AB, AC, AD, inter se æquales. Dico A, punctum esse centrum circuli. Connectantur enim puncta B, C, D, rectis B C, C D; quibus diuisis bifariam in E, & F, ducantur ex A, rectæ AE, AF. Quoniam igitur latera AE, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus A E, E C, trianguli A E C; & bases A B, A C, ponuntur etiam æquales; [b] erunt anguli AEB, AEC, æquales, ideoque recti. Eodem modo ostendemus, angulos ad F, esse rectos. Quare cum rectæ AE, AF, diuidant rectas BC, CD, bifariam, & ad angulos rectos, transibit vtraque producta per centrum circuli, per corollarium propos. 1. huius lib. Punctum igitur A, in quo se mutuo secant, centrum erit circuli. Si enim esset aliud punctum centrum, non transiret vtraque per

b 8. pri.

cen-

centrum. Si itaque in circulo acceptum fuerit punctum, &c. Quod demonstrandum erat.

ALITER. Si punctum A, non est centrum circuli,



a 1. ter. a sit centrum inuentum E, ex quo per A, agatur diameter FG. Quoniam igitur in diametro FG, præter centrum acceptum est punctum A, à quo in circumferentiam cadunt rectæ AD, AC; b erit recta AD, quæ propinquior est rectæ AG, per centrum E, ductæ maior, quam recta AC, remotior ab AG, quod est absurdum. Positæ sunt enim æquales rectæ AD, AC. Idem absurdum sequetur, si aliud punctum præter A, centrum ponatur.

b 7. ter.

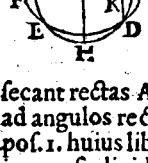
QVOD si quando recta per centrum E, & punctum A, ducta coincidat cum vna trium æqualium datarum, vt si dicantur æquales tres AB, AF, AC, vbi EA, coincidit cum AF; c erit AF, omnium à puncto A, cadentium minima, atque adeo minor, quam AB, & AC. quod est absurdum. Ponitur enim vtrique æqualis.

c 7. ter.

X. THEOR. 9. PROPOS. 10.

CIRCVLVS circulum in pluribus, quam duobus, punctis non secat.

SECET enim, si fieri potest, circulus ABCDEF, circulum AGBDHE, in pluribus, quam duobus, punctis A, B, & D, quæ iungantur rectis AB, BD: quibus d bifariam diuisis in I, & K, e educantur ex I, & K, ad AB, & BD, perpendiculares IL, KL. Quoniam igitur rectæ IL, KL, secant rectas AB, BD, in circulo AGBDHE, bifariam, & ad angulos rectos; transibit vtraque, ex corollario propos. 1. huius lib. per centrum ipsius. Quare punctum L, in quo se diuidunt, erit centrum dicti circuli. Eodem modo demonstrabimus, punctum L, esse centrum circuli ABCDEF. Duo igitur circuli se mutuo secantes idem possident centrum, f quod est absurdum. Circulus ergo cir-



d 10. pri

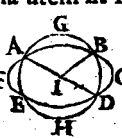
e 11. pri

f 5. ter.

culum

culum in pluribus, quam duobus, punctis non secat. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Secent se ijdem duo circuli, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D. [a] Inuentuma utem sit I, centrum circuli AGBDHB, à quo ad dicta tria puncta ducantur rectæ IA, IB, ID, quæ per defin. circuli æquales erunt inter se. Quoniam igitur intra circulum ABCDEF, assumptum est punctum I, à quo cadunt in circumferentiam plures, quam duæ, rectæ æquales, [b] erit I, centrum circuli ABCDEF. Erat autem idem punctum I, centrum circuli AGBDHE. Duo ergo circuli se mutuo secantes habent idem centrum. [c] Quod est absurdum.



a 1. ter.

b 9. ter.

c 5. ter.

THEOR. 10. PROPOS. 11.

SI duo circuli se se intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.

TANGAT circulus ABC, circulum ADE, intus in A, & sit F, centrum circuli ABC, & G, centrum circuli ADE, quod necessario ab illo diuersum erit, cum duo circuli interius se tangentes, [d] non possint idem centrum habere. Dico rectam extensam per G, & F, cadere in contactum A. Si enim non cadit, secet vtrumque circulum in punctis D, B, C, E, & ex contactu A, ad centra F, G, rectæ ducantur AF, AG. Quoniam igitur in triangulo AFG, duo latera GF, FA, [e] maiora sunt latere GA. Est autem GA, recta rectæ GD, æqualis (quod G, positum sit centrum circuli ADE) erunt & GF, FA, rectæ maiores recta GD. Dempta igitur communi GF, remanebit FA, maior, quam FD. Quare cum FA, æqualis sit ipsi FB, (quod F, positum fuerit centrum circuli ABC) erit & FB, maior, quam FD, pars quam totum, quod est absurdum.

d 6. ter.

e 20. pri

QVOD

QVOD si quis velit contendere F, esse centrum circuli ADE, & G, centrum circuli ABC, instituetur argumentatio hac ratione. In triangulo AFG, duo latera FG, GA, a maiora sunt latere FA: Est autem recta FA, rectæ FE, æqualis. (cum F, ponatur cẽtrum circuli ADE.) Igitur rectæ FG, GA, maiores sunt recta FE. Dempta ergo communi FG, remanebit GA, maior, quam GE. Quia igitur GA, æqualis est ipsi GC; (propterea quod G, ponitur esse centrum circuli ABC,) erit quoque GC maior, quam GE, pars quam totum, quod est absurdum. Idem absurdum sequetur, si centrum maioris circuli extra minorem ponatur. Non ergo recta FG, extensa vtrumque circulum secabit, sed in contactum A, cadet. Quare si duo circuli se se intus contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

a 20. pri

THEOR. 11. PROPOS. 12.

xj.

SI duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.

CIRCVLI duo ABC, DBE, tangant se exterius in B, & centrum circuli ABC, sit F, circuli vero DBE, centrum sit G. Dico rectam extensam per F, & G, transire per contactum B. Si enim non transit, secet circumferentias in C, & E, ducanturque à centris F, G, ad B, contactum rectæ FB, GB. Quoniam igitur in triangulo FBG, latera duo BF, BG, b maiora sunt latere FG: Est autem recta BF, rectæ FC, æqualis: (quod F, ponatur centrum circuli ABC,) & recta GB, rectæ GE, æqualis; (quod G, ponatur centrum circuli DBE) erunt & rectæ FC, GE, maiores quam recta FG, pars quam totum, (cum FG, contineat præter FC, GE, rectam adhuc CE,) quod est absurdum. Si igitur duo circuli sese exterius contingant, &c. Quod erat demonstrandum.

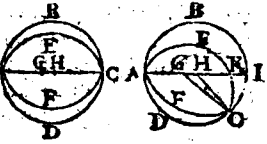
b 20. pri

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 13. xij.

CIRCVLVS circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.

TANGANT sese circuli A B C D, A E C F, intus. Si fieri potest, in pluribus punctis, quam vno, A, & C: Assumantur autem centra horum circulorum G, H, [a] quæ diuersa erunt, per quæ recta G H, in vtramque partem extendatur, quam necesse est [b] cadere in contactus A, & C. Itaque cum G, sit centrum, & recta A G H C, diameter, diuidetur A G H C, bifariam in puncto G. Simili ratione diuidetur eadem A C, bifariam in H. quod est absurdum. Vna enim recta in vno duntaxat puncto diuiditur bifariam. Si namque G C, est dimidium totius A C, erit necessario H C, dimidio minor, cum sit pars dimidij G C.



[a] 26. tert.

[b] 11. tert.

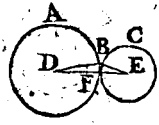
QVOD si quis dicat rectam G H, extensam ad partes quidem G, cadere in contactum A; At vero ad partes H, minime pertinere ad contactum C, sed secare vtrumque circulum in I, & K, vt in secunda figura perspicuum est: (Dicere enim quis posset, in præcedenti proposito ostensum esse, rectam per duo centra circulorum se se intus tangentium ductam cadere in vnum duntaxat contactum, non autem in alterum, quod tamen nemo rectè affirmare poterit, cum demonstratio præcedentis propos. vtrique contactui conueniat. Sed quicquid dicat aliquis, ostendemus, absurdum illud esse.) ducendæ erunt ex centris G, H, ad contactum C, rectæ G C, H C. Ponatur igitur primo G, centrum circuli A B C D: & H, centrum circuli A E C F. Et quia in triangulo G H C; duo latera G H, H C, [c] maiora sunt latere G C: Sunt autem rectæ G H, H C, æquales ipsi G K: (quod H C, H K, ex centro H, sint æquales, & G H, communis) & recta G C,

[c] 20. pri

rectæ

rectæ GI; (quod sint ex G, centro) erit quoque recta GK, maior quam GI, pars quàm totum, quod est absurdum. Ponatur secundo G, centrum circuli AECF; & H, centrum circuli ABCD. Quoniam igitur rectæ HG, GC,
a 20. pri maiores sunt recta H C; Est autem H C, æqualis rectæ HA: (cum vtraque ducta sit ex centro H,) erunt quoque HG, GC, maiores recta GA. Quare dempta communi HG, erit GC, maior, quam GA. quod est absurdum, cum vtraque ex centro G, ducatur. Non igitur circuli intus se tangent in pluribus punctis, quam vno.

TANGANT se iam circuli AB, CB, exterius in pluribus punctis, quam vno prope F. Ducatur ex D, centro circuli AB, ad E, centrum circuli
b 12. ter CB, recta DE, b quæ per contactum F, necessario transibit. Si igitur etiam in alio puncto præter F, se tangunt, tangant sese in B. Ductis igitur rectis DB, EB, erunt rectæ DB, EB, æquales rectis DF, EF, hoc est ipsi DE: c Sunt autem & maiores. quod est absurdum. Non ergo se tangent circuli exterius in pluribus punctis, quam vno.
c 20 pri



ALITER. Si circuli AB, CB, exterius se tangant in duobus punctis B, & F; ducta recta BF, cadet ipsa intra vnum circulorum, per 2. propos. huius tertij lib. & ideo extra alium, quod est contra eandem propos. Quare circulus circulum non tangit, &c. Quod erat demonstrandum.

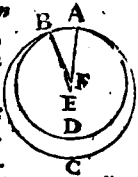
SCHOLIVM.

SI recte consideretur Euclidis demonstratio, qua probauit, circulum a circulo intus non posse tangi in pluribus punctis, quam vno, videtur ea potissimum concludere, circulum non posse tangi à circulo in duobus, vel pluribus punctis, qua longo interuallo à se dissideant, non autem eundem contactum plura puncta habere non posse; quamuis facile hoc ipsum eodem argumento fere demonstrari possit. Quare vt omni ex parte confirmatum relinquatur, circulum non posse tangere circulum in pluribus punctis, quam vno, ostendemus breuiter, in vno eodemque contactu non posse

esse

esse plura puncta, quam vnum. Tangat enim circulus ABC, circulum ABD, prope A; & per eorum centra E, & F, aquae diuersa sunt, recta ducatur EF, b qua ad contactum perueniet necessario, vt ad punctum A. Dico igitur, hos circulos sese duntaxat tangere in puncto A. Si enim se tangant in alio etiam puncto, vt in B; ductis ex B, ad centra E, & F, rectis BE, BF, c erunt rectae EF, FB, maiores recta EB. Est autem recta EB, aequalis rectae EA, cum vtraque sit ex centro E. Igitur & recta EF, FB, maiores erunt recta EA. Quare dempta communi EF, remanebit FB, minor, quam FA. quod est absurdum, cum FB, FA, cadant à centro F, ad circumferentiam, ideoq. ex circuli defin. aequales existant. In solo ergo puncto A, se mutuo tangent circuli ABC, ABD, & non in alio.

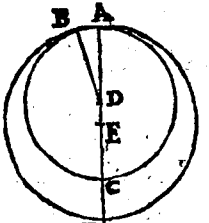
a 6. ter.
b 11. ter
c 20. pri



NON videtur etiam omittendum hoc loco sequens theorema, videlicet.

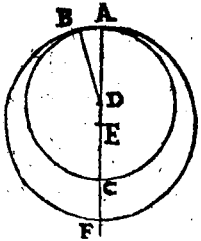
SI in semidiametro circuli producta punctū vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusq. extra eundem cadet.

SIT circulus ABC, cuius centrum D, & in semidiametro AD, producta sumatur punctum quodcunque E, ex quo ad interuallum EA, circulus describatur AF, quem dico circulum ABC, in solo puncto A, tangere. Aut enim punctum E, est intra circulum ABC, aut extra. Si intra, quoniam AE, maior est, quam AD, hoc est, quam DC, hoc est, à fortiori, quam EC; erit



quoque EF, quæ ipsi AE, æqualis est, maior quam EC: ac proinde punctum F, extra circulum ABC, existet, circulusque AF, extra eundem circulum ABC, prope punctum F, existet. Multo magis punctum F, extra circulum ABC, cadet, si E, extra eundem circulum ABC, existet: Si igitur circulus AF, non totus extra circulum ABC, cadat, ita vt eum in solo puncto A, tangat; secet, vel tangat circulus AF, circulum ABC, in alio puncto B, si fieri potest, ducaturq. recta DB. Quoniam igitur in diametro circuli AF, sumptum est punctum D, præter centrum E, a erit DA, omnium rectarum ex D, cadentium minima. Minor est ergo DA, quam DB. quod est absurdum. Sunt enim æquales rectæ DA, DB, cadentes ex centro D, in circumferentiam eiusdem circuli ABC. Non ergo circulus AF, circulum ABC, secat aut tangit in alio puncto, quam in A, sed totus extra illum cadit. Quod est propositum.

a 7. ter.



QVOD si in semidiametro non producta punctum sumatur citra centrum, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus tanget quoque priorem circulum in dicto puncto extremo semidiametri, totusq. intra eundem cadet. Vt si in semidiametro AE, circuli AF, sumatur punctum D, ex quo ad interuallum DA, circulus describatur ABC, cadet hic totus intra illum, tangetq. eum in solo puncto A. Cum enim ostensum proxime sit, circulum AF, cadere totum extra circulum ABC, cadet vicissim totus hic intra illum, ita vt se mutuo in solo puncto A, contingant.

xiij.

THEOR. 13. PROPOS. 14.

IN circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.

SINT

SINT in circulo A B C D, cuius centrum E, duæ rectæ æquales AB, C D. Dico ipsas æqualiter distare à centro E. Ducantur enim ex E, centro ad rectas A B, C D, duæ perpendiculares E F, E G, & coniungantur rectæ EA, ED. Secabunt rectæ EF, EG, rectas AB, CD, bifariam. Quare cum totæ AB, CD, æquales ponantur, erunt & dimidia earum, rectæ videlicet AF, DG, æqualia. Quoniam igitur quadrata rectarum EA, ED, æqualium, inter se sunt æqualia; Quadratum autem rectæ E A, [b] æquale est quadratis rectarum AF, FE; & quadratum rectæ ED, quadratis rectarum DG, GE: Erunt quoque quadrata rectarum A F, F E, æqualia quadratis rectarum DG, GE. Ablatis ergo quadratis æqualibus æqualium rectarum AF, DG, remanebunt quadrata rectarum FE, GE, æqualia, ideoq. & rectæ EF, EG, æquales erunt. Distant igitur per 4. defin. huius lib. rectæ AB, CD, æqualiter à centro E.

[a] 3. ter.

[b] 47. ter

RVRSVS distent rectæ A B, C D, æqualiter à centro E. Dico eas inter se esse æquales. Ducantur enim iterum ex centro E, ad A B, C D, perpendiculares E F, EG, quæ per 4. defin. huius lib. æquales erunt; [c] duidentq. rectas AB, CD, bifariam. Ductis igitur rectis EA, ED, erunt earum quadrata æqualia: Est autem quadratum rectæ EA, [d] æquale quadratis rectarum AF, F E; & quadratum rectæ ED, æquale quadratis rectarum D G, GE. Igitur & quadrata rectarum AE, FE, æqualia sunt quadratis rectarum D G, G E; ideoq. ablatis æqualibus quadratis æqualium rectarum EF, EG, remanebunt quadrata rectarum AF, DG, æqualia; atque adeo rectæ A F, DG, ac propterea earum duplæ AB, C D, æquales quoque erunt. Itaque in circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, &c. Quod erat demonstrandum.

[c] 3. ter.

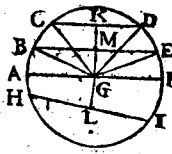
[d] 47. pri

THEOR. 14. PROPOS. 15. xiij.

IN circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior cen-

tro, remotiore semper maior.

IN circulo ABCDEF, cuius centrum G, diameter sit AF; & recta ei propinbuior HI, remotiòr autem CD. Dico omnium esse maximam AF, & HI, maiorem, quam CD. Ducantur enim ex G, centro-rectæ GK, GL, perpendiculares ad CD, HI. Et quia remotior est CD, à centro, quam HI, erit GK, maior quam GL, per 4. defin. huius lib. Abscindatur ex GK, recta GM, ipsi GL, æqualis, atque per M, educatur BME, perpendicularis ad GK, & connectantur rectæ GB, GC, GD, GE. Quoniam igitur rectæ perpendiculares GM, GL, æquales sunt, æqualiter distabunt rectæ BE, HI, à centro, per 4. defin. huius lib. [a] & ideo inter se æquales erunt. Rursus quia rectæ GB, GE, [b] maiores quidem sunt recta BE, æquales autem diametro AF; erit & diameter AF, maior, quam BE. Eadem ratione ostendetur AF, maior omnibus alijs lineis. Deinde quia latera GB, GE, trianguli BGE, æqualia sunt lateribus GC, GD, trianguli CGD; & angulus BGE, maior est angulo CGD; [c] erit recta BE, maior quam CD; atque adeo HI, quę æqualis ostensa fuit ipsi BE, maior quoque erit quam CD. In crculo igitur maxima quidem linea est diameter, &c. Quod erat demonstrandum.



a 14. ter.
b 20. pri
c 24. pri

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabitur theorema, si ab uno, eodemq. circumferentiæ puncto plurimæ lineæ cadant.

CADANT enim à puncto A, plures lineæ AB, AC, AD, quarum AD, per centrum E, transeat. Dico AD, esse omnium maximam, & AC, maiorem remotiore AB. Ductis enim rectis BE, CE; cum in triangulo AEC, latera AE, EC, [d] maiora sint latere AC; sintq. rectæ AE, EC, æquales rectis AE, ED, hoc est, recta AD; maior erit AD, quam AC. Eademque ratione maior

d 20. pri

erit;

erit, quam AB; & sic de cæteris. Maxima ergo omnium est AD.

DEINDE, quia duo latera AE, EC, trianguli AEC, æqualia sunt duobus lateribus AE, EB, trianguli AEB; & angulus AEC, totus maior est angulo AEB; a erit basis AC, maior basi AB. Eodemque argumento erit AC, maior quacunque alia linea, quæ à centro remotior est. a 24. pri

CAETERVM & hinc duæ tantum æquales lineæ duci possunt à puncto A, ad vtrasque partes maximæ AD. Si namque angulo AEG, æqualis fiat angulus AEF, iungaturq. recta AF; cum latera AE, EC, æqualia sint lateribus AE, EF, & anguli contenti quoque AEC, AEF, æquales; b erunt bases AC, AF, æquales. Neque vero vlla alia his duabus æqualis potest exhiberi. Quacunque enim ducatur ex A, supra AC, ea minor erit quam AC; si vero infra AC, ea maior erit, vt iam demonstratum est. b 4. pri.

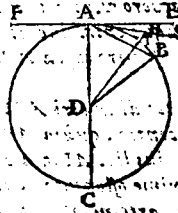
QVOD si AB, AF, ad diuersas partes diametri AD, ductæ sint, & dicatur AF, propinquior centro, quàm AB, demonstrabitur, vt in scholio propos. 7. huius lib. AF, maiorem esse, quam AB. Si namque, vt proxime ostensum fuit, ducatur ipsi AF, æqualis AC, ex altera parte, nempe si fiat angulo AEF, æqualis angulus AEC, &c. cadet punctum C, inter B, & D; quod AF, AC, c æqualiter distent ab AD, ob earum æqualitatem, aut certe ob æquales angulos AEF, AEC. Hinc enim fit, cum AF, ponatur propinquior centro, quam AB, vt & AC, ipsi AF, æqualis, propinquior sit centro, quam AB, ac proinde punctum C, sit inter B, & D. Cum ergo AC, maior sit, quàm AB, vt in hoc scholio demonstratum est, maior erit quoque AF, quam AB. c 14. ter

THEOR. 15. PROPOS. 16. XV.

QVAE ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam com-

prehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor.

IN circulo ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, ad quam ex A, puncto extremo perpendicularis ducatur. Dico hanc lineam perpendicularem necessario extra circulum cadere. Si enim cadit intra ipsum, qualis est AB; ducta DB, erunt duo anguli DAB, DBA, æquales, a 5. pri. sed DAB, rectus est, per constructionem: igitur & DBA, rectus erit; quod est absurdum. Duo enim anguli in triangulo b minores sunt duobus rectis. Non igitur cadet perpendicularis intra circulum; neque eandem ob causam in ipsam circumferentiam, sed extra, qualis est EF. Dico iam ex A, inter AE, rectam, & circumferentiam AB, non posse cadere alteram rectam. Cadat enim, si fieri potest recta AG, ad quam ex D, ducatur perpendicularis DH, secans circumferentiam in I, quæ necessario ad partes anguli acuti DAG, cadet, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Quoniam igitur in triangulo DAH, c duo anguli DHA, DAH, minores sunt duobus rectis; & DHA, rectus est, per constructionem, erit angulus DAH; recto minor, ideoq; recta DA, hoc est, recta illi æqualis DI, d maior erit, quam DH, pars quam totum; quod est absurdum. Non igitur intercipietur recta inter AE, & circumferentiam AB: sed quicunque ex A, ducatur infra AE, ea secabit circulum. Dico denique angulum semicirculi, contentum diametro AC, & circumferentia AB, maiorem esse omni acuto angulo rectilineo; reliquum vero angulum contingentiæ, qui continetur recta AE, & circumferentia AB, minorem esse omni acuto angulo rectilineo. Quoniam enim ostensum est, omnem rectam ex A, ductam, infra perpendicularem AE, cadere intra



b 17. pri.

c 17. pri.

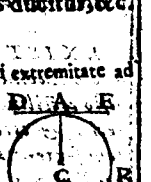
d 19. pri.

circu-

circulum) faciet necessario ea linea cum AC, angulum rectilineum acutum minorem angulo semicirculi, at vero cum AE, angulum rectilineum acutum maiorem angulo contingentiæ, cum ille sit pars anguli semicirculi, hic vero totum quidpiam respectu anguli contingentiæ. Id quod liquido constat, ducta recta AB, quomodocunque infra AE. Nam cum hæc linea AB, intra circulum cadat, vt demonstratum est, erit angulus rectilineus acutus CAB, minor angulo semicirculi contento sub diametro AC, & circumferentia ABC, cum ille huius sit pars: Angulus vero contingentiæ contentus sub tangente linea AE, & circumferentia ABC, minor angulo rectilineo acuto BAE, quod ille huius pars sit. Bademq; ratio est de omnibus alijs angulis acutis rectilineis, cùm omnes contineantur à diametro AC, vel tangente AE, & rectis ex A, sub AE, ductis, quæ omnes intra circulum cadent, vt demonstrauimus. Angulus igitur semicirculi maior est omni acuto angulo rectilineo, reliquus autem angulus contingentiæ, minor. Itaque quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, rectam à diametri circuli extremitate ad angulos rectos ductam, ipsum circulum tangere. Ostensum enim est, ipsam cadere extra circulum. Quare solum in puncto illo diametri extremo circulum attingit.

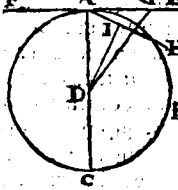


QVARE si iubeamur per datum punctum A, in circumferentia circuli AB, rectam lineam ducere, quæ circulum tangat in A, ducemus ex A, ad centrum C, rectam AC, & ad eam extitabimus perpendicularem DAE. Hæc enim circulum tanget in A, vt demonstratum est.

EX ORONTIO.

POTEST hoc idem theorema demonstrari ostensiue hac ratione. Sit diameter AC, in circulo ABC, cuius centrum D. Ducatur ex A, ad AC, perpendicularis AE, quam dico extra circulum cadere. Sumatur enim in ea quodlibet punctum G, & coniungatur recta GD. Quoniam igitur in triangulo ADG, duo anguli DAG, DGA, minores sunt duobus rectis, & DAG, factus est rectus, erit DGA, recto mi- 217. pri

219. pri



nor. Quare a maior erit recta DG, quã DA; ideoq. punctum G, extra circulum erit. Eademq. est ratio de omnibus alijs punctis rectæ AE. Cadet ergo tota AE, extra circulum. Ducatur iam ex A, infra AE, recta AH, quam dico necessario secare circulum. Fiat enim angulus ADI, æqualis angulo EAH. Addito igitur communi angulo DAH, erunt

13. prō duo anguli ADI, DAH, æquales toti angulo recto DAE, ideoq. minores duobus rectis: Quare b coibunt rectæ AH, DI, in aliquo puncto, vt in I. Dico igitur punctum I, esse intra circulum. Quoniam enim tres anguli in triangulo DAI,

32. pri c æquales sunt duobus rectis; & duo anguli DAI, ADI, ostensi sunt æquales recto DAE; erit reliquus AID, rectus, atque adeo maior, quam DAI, acutus. Quare recta

19. pri d DA, d maior est, quam DI. Non igitur DI, ad circumferentiam perueniet; propterea q. punctum I, intra circulum existet; atque adeo recta AH, circulum secabit. Reliqua partes theorematis ostendentur, vt prius.

SCHOLIVM.

EXISTIMAT Peletarius, angulum contingentiæ, quem Euclides hic probauit minorem esse omni acuto angulo rectilineo, nihil esse, atque adeo ex illo contactu lineæ rectæ, & circumferentiæ, non effici angulum vllum. Vt autem sententia illius planior fiat, afferemus in medium digressionem illã, quã ipse hoc loco instituit. Sic igitur inquit:

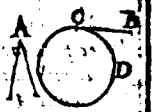
CVM huius theorematis caput postremum attentius considerarem, mihi sane in mentem subijt prima specie, Geometriam non satis sibi constare; immo adeo repugnantiam in se admittere.

PRIMVM enim extra intelligentiam est, vt inter quantitates minima dari possit; qualem hoc loco angulum, quem dicunt contingentiæ, seu rectius, contactus, minorem omni acuto posuimus. Nihilo magis conuenit, vt maxima quantitas detur, qualis hic angulus semicirculi omni acuto rectilineo maior ponitur. Quantitas enim eo nomine quantitas est, quod partibus constet, & secundum eam æquale, &

inæquale

i maquale dicatur. Quantitatis etiam continuæ in infinitum sectio est. Atque adeo cum in primam propositionē decimi incidissem, tum magis anxie expendere cepi, quonam pacto conciliari posset tam aperta, vt apparebat, repugnantia. Sic enim habet prima decimi.

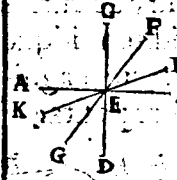
SI à maiori duarum quantitatum auferatur maius, quam dimidium; ac rursus ex reliquo maius, quàm dimidium, idque continuo fiat; relinquetur tandem magnitudo minor magnitudine minore posita.



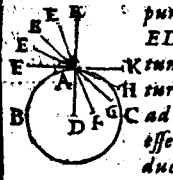
VERBI causa, sint duo anguli A, quidem rectilineus; BCD, angulus (si modo sit angulus) contactus: Vult prima decimi, si auferatur ab angulo A, maius, quàm dimidium, ac rursus à reliqua parte maius, quam dimidium; &c. continuo ex residuis partibus maius, quam dimidium; tandem relinqui minorem angulum, quam ECD, Cuius demonstrationem hic non appono, cum ex sequentibus pendeat. Nulla tamen in tota Geometria propositio est, qua (vt sic dicam) magis naturaliter vera sit. Quod ex numeris (in quibus rerum omnium imagines) luce clarius euadit. Quis enim non videt, propositis duobus numeris 8. & 2. cum ab octonario maius quam dimidium abstuleris, vt quinarium; tum à ternario residuo, maius quam dimidium, vt binarium; relinqui vnitatem posito binario minorem? Neque vero id rem facit, quod Campanus illic excipit, propositionis sententiam de quantitatibus eiusdem generis esse intelligendam. Hæc quippe conciliatio nulla est; quin etiam menti Euclidis contraria, vt nos, cum illuc ventum erit, manifestum faciemus. Immo & ipse Campanus secum pugnat, cum in secunda duodecimi demonstranda, aliisq. propositionibus nonnullis solidorum, à curuo rectum auferat.

NOS igitur hanc dubitationem sic expediemus; vt dicamus,

anus, lineam rectam, qua circulum tangit, cum peripheria angulum non efficere; scilicet BCD, nullo modo angulum dici debere. Omnis enim angulus in sectione consistit, non in contactu. Et vbi cessat sectio, cessat quoque anguli forma. Atque vt vno verbo dicam, in decussatione (Decussationem hoc loco, & sectionem sine discrimine accipio) omnes angulorum species perficiuntur. Duabus enim lineis AB, & CD, se scindentibus in puncto E, ad angulos rectos,



intelligatur CD, sic moueri in orbem, scilicet super puncto E, fixo, vt ex CD, fiat FG; hinc sane ex recto angulo AEC fiet obtusus AEF: Inde ex recto BEC, fiet acutus BEF. Cumq. facta fuerit HK, hinc quidem angulus obtusior fiet HEA, inde vero acutior BEH; sicq. continuo, donec peruenerit ad AB, & intra eosdem terminos concludatur cum ea. Tum enim immersa, vt sic dicam, linea CD, in lineam AB, euanescet angulus. Neque diuersa ratio est in curuo. Sit enim in circulo ABCA, cuius centrum D, linea DE, praeteriens peripheriam, & secans ipsam in A, puncto fixo, super quod circumducatur ipsa DE, per puncta F, G, H. Tum fient anguli continuo vary cum peripheria, in ipso

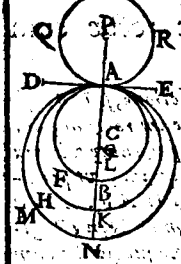


puncto A; donec cessante decussatione, linea ED, facta sit EK, & tangat circulum. Ac tum linea DE, non iam inclinata intelligitur, sed immersa in lineam BAC, quantum ad angulum attinet: non aliter quàm si BAN, esset linea recta; neque contra facit, quod deducantur linea, faciantq. spatium CAK. Nam id sola AC, linea efficit, qua rectam refugit; sed eam tamen in puncto A, amplectitur. Cum igitur omnis angulus in pluribus punctis non consistat, quam vnos sit, vt punctum A, tam sit ineptum angulo constituendo, quam modo erat punctum sectionis E, linearum rectarum. Fortasse dices, punctum A, linea recta manere in suo recto, punctumq. A, peripheria in suo rotundo; neque vtrumque esse idem punctum; sed lineas se tantum inter se vetari lambere, quia altera alteram penitus, omnique puncto refugit; vt contra-

ria contraposita fiant manifestiora; Id vero sensus non recipit. Duo enim circuli sese exterius tangentes, rectam lineam intermedium illibatam relinquerent: Scilicet, si intelligeremus circulum, qui in puncto A, tangeret ipsum ABC, circulum exterius: quod non patitur linearum natura. Sed demus id fieri posse, vt nihil in cogitationem cadat, quod semel vspiam Geometria non repræsentet. Illud tamen minime vrgebit; Immo tanto minus contactus linearum erit angulus. Habit enim vtrinque ipsarum concursus. Sed nos hac Geometricis rationibus confirmemus per theoremata.

CONTACTVS duorum circulorum interior, quantitas non est.

SIT enim circulus AFBA, cuius centrum C, diameter vero AB, per cuius extremitatem A, ducatur linea DE, ad angulos rectos. Et constat, ex consectario huius decimæsextæ lineam DE, contingere ipsum AFBA, circulum: ac propterea DAF, esse minorem omni angulo acuto, ex ipsa Euclidis sententia: scilicet per vltimam partem huiusce decimæsextæ. Cum vero inter punctum C, & B, suscipiatur in diametro AB, centrum G, & spatio GA, describatur alter maior circulus AHKA: Dico FAH, non esse quantitatem: Constat quippe circulum AHKA, transire inter rectam DA, & curuam AF, cum sit semidiameter GA, maior semidiametro CA. Manifestum quoque est, lineam DE, tangere ipsum AHKA, circulum, ex eodem huiusce decimæsextæ consectario: ac propterea DAH, esse omni acuto minorem. Describatur tertio, secundum huius spatium LA, circulus AMNA. Et erit ex eodem consectario, DAM, omni acuto minor. Sicq; in infinitum, erunt omnes contactus, quos efficiet linea DE, cum circulis ductis per A, punctum, quorum centra in AB, linea, minores omni acuto rectilineo: ac sic omnes æquales, si modo æqualitas inter non



quanta

quanta dici possit. Quapropter contactus DAM, erit æqualis contactui DAF: Fietque vt MAF, contactus interior circulorum, neque augeat, neque minuat contactum DAM. Igitur MAF, quantitas non est. Quod erat demonstrandum.

SED & probabimus, contactum interiorem circulorum quantitatem non esse in hunc modum. Nempe cum omnes circuli sint similes, erunt & semicirculi similes. Quapropter anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, in omnibus circulis sunt æquales, per conuersam definitionis similium sectionum. (Nam ab hac æqualitate angulorum non excludentur anguli mixti.) Erit igitur angulus BAF, æqualis vtriq. angulorum KAH, & NAM: Ac propterea contactus FAM, nihil addit ad angulum BAF. Quare FAM, quantitas non est. Quod fuit demonstrandum. Hinc sequitur alterum.

CONTACTVS lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.

MANENTE enim eadem constructione, si DAF, sit quantitas; ipsa vtique diuidetur per lineam rectam, aut per obliquam. Non per lineam rectam, repugnante vltima parte huius decimæsextæ: neque per obliquam, vt per lineam AM. Esset enim FAM, pars ipsius DAF: Atqui FAM, quantitas non est, vt modo probauimus. Non est igitur FAM, pars ipsius DAF. Igitur DAF, neque per lineam rectam, neque per obliquam diuidi potest. Quare DAF, quantitas non est: quod erat probandum. Hinc exurgit tertium.

CONTACTVS duorum circulorum exterior, quantitas non est.

IN eadem constructione, protrahatur BA, diameter ad punctum P. Tum centro P, interuallo autem PA, describatur

batur circulus AQRA, tangens circulum ABFA, exterius in puncto A. Dico contactum FAQ non esse quantitatem. Id verò manifestum est ex posteriori demonstratione. Nam neque per lineam obliquam diuiditur, cum FAM, non sit quantitas per primam harum; neque per rectam, cum neque DAF, sit quantitas, per secundam earundem; neque DAQ, quantitas per eandem. Quare cum FAQ, partes nullas habeat, quantitas non erit: quod erat probandum.

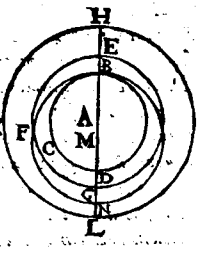
EX his emerget hoc pronunciatum, quod in Geometria nemo hactenus admittendum esse cogitauit.

ANGVLI, qui fiunt à diametro, & peripheria, siue intra, siue extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.

VT in posteriori figura, angulus BAF, æqualis est angulo BAD; cum ipsi nihil accrescat ob contactū DAF, qui quantitas non est; & ob id QAP, rectus quoque est, & æqualis ipsi DAP. cum DAQ, nihil addat: quod erat probandum.

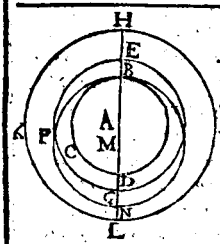
HAEC Peletarius hoc in loco. In epistola autem quam ad Cardanum scribit, affert aliam demonstrationem, quam ipse ait pleniorem esse. Hanc igitur hic subijcere statui. In primis autem præmittit hoc theorema.

IN circulis anguli, qui fiunt à diametro & peripheria, sunt æquales.



SINT enim super centro A, duo circuli BCDB, & EFGE, quorum diametri BD, & EG; & secet EG, ambos circulos in punctis E, B, D, & G. Aio duos angulos CBD, & FED, esse æquales. Nam si sit FED, maior ipso CBD; (neque enim contra, CBD, maior vllo pacto erit ipso FED) ac describantur plures circuli super eodem centoo A, quorum vnus hoc locō satis fuerit H K L H: fiet tandem ex continuo augmento, angulus à diametro, & peripheria, verbi gratia, angulus

KHL,



KHL, maior recto: quod est contra ipsius Euclidis sententiam, qui eos omnes angulos ponit recto minores. Sunt igitur anguli interiores, qui ad B, & E, inter se aquales: quod fuit ostendendum. Idem de exterioribus iudicium. Neque in hac demonstrandi ratione vllus est paralogismus. Licet enim nulla sit comparatio angulorum quos vocant, contactus, ad angulos rectilineos attamen erit angulorum, qui fiunt ex sectione recta linea, & peripheria, aliqua collatio ad ipsos rectilineos. Eiusmodi enim anguli, qui mixti dicuntur, manifestè maiores, & minores fiunt.

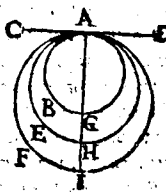
HIS ad hunc modum demonstratis, nio contactum circulorum interiorem, non esse quantitatem. Super centro M. in eadem linea HL, posito, describatur circulus BFNB, tanto interuallo, quanto est circulus EFGE; posita scilicet MB, semidiametro aquali ipsi AE; qui circulus tangat BCDB, circulum in puncto B. Et manifestum est, angulum FBD, aqualem esse angulo FED, propter aqualitatem peripheriarum & diametrorum. Quapropter & idem ipse FBD, erit angulo CBD, aqualis. Igitur CBF, contactus nihil addit ad ipsum GBD, angulum. Quare CBF, quantitas non est: quod fuit probandum. Atque hinc procedit demonstratio eorum, qua in tertio libro adduximus, theorematum.

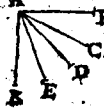
HAEC igitur est Peletarij sententia de angulo contactus, qua omnino Euclidi est contraria. Si enim Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi aqualem recto rectilineo: Quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quam nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Pelelarij sententia, minus esse quocunque angulo? Quid quoque magis perspicuum, quam angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Quapropter angulum contactus vere esse angulum, ac quantitatem, affirmamus;

atque

atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Vnde dissoluenda sunt à nobis omnia Peletarij sophismata, quæ in hac digressione adduxit, ad confirmandum, angulum contactus nihil esse.

PRIMVM igitur extra intelligentiam esse fatemur, vt inter quantitates minima dari possit: sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse minimam quantitatem: Immo vero asseueramus, quemuis angulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni acuto rectilineo, diuidi posse in partes infinitas, non quidem per lineam rectã, vt Euclides demonstrauit, & optime; sed per lineam circularem. Vt proposito angulo contactus CAB, si per A, describatur circulus AEH, maior circulo ABG, tangens rectam CD, in A, fiet angulus contactus CAE, minor angulo contactus CAB. Quod si adhuc maior circulus AFI, describatur, erit multo minor angulus contactus CAF, eodem angulo contactus CAB. Atque ita sine fine semper minorem angulum contactus efficiemus. Reperitur igitur inæqualitas inter angulos contactuum, quamuis quilibet eorum minor sit acuto rectilineo quocunque. Quemadmodum quiuis angulus acutus minor est recto, & tamen quolibet acuto dato, minor dari poterit; cum diuidi possit infinite. Vt angulus acutus BAC, minor est recto BAF; & tamen si ducatur recta AD, inter AC, AB, fiet acutus minor BAD. Quod si alia recta AE, inter AB, AD, ducatur, erit multo minor acutus BAE, nec vnquam finis erit huius decrementi.





PARI ratione asserimus, angulum contactus augeri posse infinite, ita vt quouis angulo contactus proposito, dentur alij maiores sine numero. Vt in superiori figura circumscripti, angulo contactus CAF, maior est angulus contactus CAE, & multo maior angulus contactus CAB; Atque ita deinceps, si minores semper circuli, quam ABG, describantur, tangentes rectam CD, in A, augebitur perpetuo angulus

contactus; semper tamen minor existet quouis rectilineo acuto. Quemadmodum quouis angulo acuto dato, dantur alij acuti innumeri maiores. Vt in proxima figura, angulo acuto BAE, maior est acutus BAD, & multo adhuc maior acutus BAC. Quod si alia recta ducatur inter perpendicularem AF, & rectam AC, fiet adhuc maior angulus acutus, nec vnquam finis erit huius incrementi. Sicut igitur in huiusmodi incremento nunquam peruenimus ad aliquem angulum acutum, qui sit aqualis angulo recto, vel maior recto, nisi acutus angulus mutetur in rectum, vel obtusum, sed semper recto, vel obtuso minor est angulus acutus: Ita quoque in accretione anguli contactus nunquam deuenimus ad aliquem angulum contactus, qui aqualis sit acuto angulo rectilineo proposito, vel maior acuto, nisi angulus contactus mutetur in alium angulum mixtum, (qui quidem efficitur à duabus lineis se secantibus; cuiusmodi est angulus segmenti.) sed angulus contactus acuto semper minor est.

EODEM modo negamus, nos ponere angulum semicirculi maximam quantitatem. Immo asserimus, quolibet angulo semicirculi proposito, quamuis ostensus sit ab Euclide maior omni acuto angulo rectilineo, infinitos dari posse maiores. Vt in eadem figura superiori circulari, angulo semicirculi BAG, maior est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc maior angulus semicirculi FAI: Atque ita deinceps, si maiores semper circuli describantur, quã AFI, tangentes rectam CD, in A, angebitur perpetuo angulus semicirculi, semper tamen minor existet angulo recto CAI. E contrario vero, angulo semicirculi FAI, minor est angulus semicirculi EAH, & multo adhuc minor angulus semicirculi BAG, nec vnquam finis erit huius decrementi, & tamen quilibet maior est quouis angulo acuto rectilineo, licet infinite diminuatur, vt Euclides demonstrauit. Quemadmodum quouis acuto angulo dato, inueniuntur alij quidem maiores, alij vero minores innumerabiles.

QVOD autem anguli contactus sint inaquales inter se, non omnes aquales, vt vult Peletarius, similiter & anguli semicirculorum, ex eo manifestum est, quod angulus quili-

bet

bet consistit in vnico puncto, & linearum inclinatione, quæ non in directum iacent, vt constat ex anguli plani definitione. Hinc enim fit, vt æqualitas angulorum eiusdem generis requirat eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius conueniant omnino lineis alterius, si vnus alteri superponatur; Ea enim æqualia sunt, quæ sibi mutuo congruunt, iuxta 8. pronunciatum. Cum igitur in angulis contactus, necnon in angulis semicirculorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod [vno superposito alteri] lineæ eorum non sibi respondeant, sed prorsus inter se dissideant, vt ex figuris superioribus perspicuum est; non erunt omnes anguli huiusce modi inter se æquales. Immo quilibet angulus contactus augeri, & diuidi poterit infinite per lineam curuam, licet per rectam secari nequeat, vt recte ostendit Euclides. Cuius etiam rei hæc afferri potest causa. Si enim linea contingens circulum concipiatur moueri circa punctum contactus immobile, continuo circulum secabit, donec iterum ipsum contingat: Tunc enim primum secare desinet circulum. Quare si vel minimè inclinari intelligatur super puncto illo contactus fixo, secabit circulum, cum in vno tantum puncto linea recta circulum possit tangere, vt ex 2. propos. huius lib. colligimus.

SOLVM igitur illi anguli contactus, pariterq; illi duntaxat anguli semicirculorum æquales inter se erunt, qui efficiuntur à peripherijs æqualibus: In his enim tantummodo lineæ sibi congruunt mutuo. Anguli vero contactus, qui efficiuntur à peripherijs minoribus, maiores erunt; Et qui à peripherijs maioribus, minores. Anguli denique semicirculorum maiorum maiores, minorum autem minores erunt, vt non obscure intelligi potest ex superioribus figuris. Neque enim lineæ talium angulorum sibi mutuo conueniunt.

CONSTAT ergo, quemuis angulum contactus habere partes; & vnum alteri posse æqualem exhiberi, ac rursus inæqualem, nempe maiorem, vel minorem: quemadmodum & in reliquis angulis omnibus fieri cernimus. Quod etiam de quocunque angulo semicirculi dici potest. Non igitur recte intellexit Peletarius, angulum contactus minimam esse quantitatem, angulum vero semicirculi, maximam.

DEINDE non est, quod anxium reddat Peletarium prima propositio decimi libri. Ea enim intelligenda est tam de quantitatibus eiusdem generis, quam diuersis, dummodo vtrauis multiplicata alteram excedere possit; cuiusmodi non sunt angulus contactus, & angulus acutus rectilineus. Nam angulus quilibet contactus siue bis sumatur, siue ter, quaterue, siue denique quoties libuerit, semper minor est angulo acuto rectilineo. Si namque quotcunque anguli contactus, vt centum, inter se aquales angulum acutum rectilineum excederent, vel se illis aquarent; esset quoque vnus illorum maior, vel aqualis illi angulo acuto rectilineo, qui est centesima pars propositi anguli acuti rectilinei; quod est absurdum, cum quilibet angulus contactus minor sit quocunque angulo acuto rectilineo, velut ab Euclide fuit demonstratum. Quare nullo modo ex illa propositione colligere licebit, si ab angulo acuto maius, quam dimidium auferatur, ac rursus ex reliquo maius, quam dimidium, idq; continuo fiat, relinqui tandem angulum acutum minorem angulo contactus proposito; quoniam angulus contactus, vt dictum est, per quemcunque etiam numerum multiplicatus, siue quantumuis auctus, semper minor existit angulo acuto; nec vnquam ipsum superare potest: quod tamen necessario requiritur ad demonstrationem illius propositionis. Vt enim demonstretur, multiplicanda est minor quantitas proposita toties, donec excedat maiorem, vt videre licet apud omnes interpretes Euclidis. Vnde Campanus, vel potius ipse Euclides per Campanum, quando in Stereometria à curuo rectum aufert, vel contra, vt vult prima propos. lib. 10. assumit semper tales magnitudines, quarum alterutra multiplicata alteram excedere potest.

IAM vero nulla ratione concedemus Peletario, angulũ tantũmodo effici à duabus lineis se secantibus Sufficit enim, vt angulus efficiatur, duas lineas in plano adinuicẽ inclinari, ita tamen, vt non in directum iaceant, vt constat ex anguli plani descriptione tradita ab Euclide, quanquam se mutuo non secent, si producantur; cuiusmodi sunt peripheriæ se tangentes. Quare vere angulum efficiunt, vt antea diximus.

PORRO demonstratio Peletarij, qua conatur ostendere, contactum interiorem non esse quantitatem, nullius est momenti. Quamuis enim omnes anguli contactus, qui efficiuntur à linea tangente, & peripheria, minores sint quolibet angulo acuto; non tamen propterea inter se omnes aquales esse necesse est, sed potest alio alius maior esse, & minor, vt diximus: quemadmodum etiam omnes anguli acuti minores sunt angulo recto, & tamen ipsi inter se non sunt omnes aquales. Sic etiam omnes formicæ (vt ex rebus quoque naturalibus exemplum afferamus,) minores sunt homine, vel monte, cum tamen ipsæ inter se valde sint inæquales. Quare non recte concludit Peletarius, contactum interiorem nihil esse.

NEGAMVS deinde, angulos segmentorum similium aquales esse, sicut ipse assumit in sequenti demonstratione: Neque enim hoc Euclides significauit in vltima definitione huius tertij libri; Sed docuit ea segmenta esse similia, in quibus anguli rectilinei sunt aquales, vel qua angulos rectilineos capiunt aquales; non autem quorum anguli aquales existunt. Immo magnum discrimen est inter angulos in segmentis, & angulos segmentorum, vt aperte constabit ex propos. 31. huius libri.

EX his facile reijcientur reliqua Peletarij demonstrationes. Angulus enim contactus, qui efficitur a linea tangente, & peripheria, diuiditur per lineam circularem, ita vt contactus interior sit verè pars eius, cum contrarium nullo modo ostenderit. Eodem pacto angulus contactus, quem constituunt duo circuli se exterius tangentes, diuiditur & per lineam circularem, & per rectam, qua vtrumque tangit. Pari ratione theorema illud refellitur, quo asseruit, angulum semicirculi aqualem esse angulo recto rectilineo. Excedit namque rectus angulus angulum semicirculi, angulo illo contactus, quem efficit linea tangens, & peripheria. Postremo hallucinatus est quoque Peletarius in illa demonstratione, quam ad Cardanum misit. Etsi enim angulus semicirculi in maiori circulo maior est angulo semicirculi in circulo minori; non tamen propterea efficitur, vt aliquis angulus semicirculi maior sit angulo recto. Semper enim

rectus angulus superabit quamuis angulum semicirculi, angulo illo contactus, qui efficitur à peripheria, & linea tangente. Quemadmodum etiam quouis angulo acuto proposito, dari possunt alij maiores; nunquam tamen aliquis acutus rectum excedet, vt in præcedenti figura vernere licet. Constat igitur ex his, angulum contactus verè esse angulum, demonstrationes autem Peletarij sophisticas esse; ac nullius momenti, homineq; Geometra prorsus indignas.

HAEC porro mea de angulo contactus disputatio adeo Peletarium commouit, atque perturbauit, vt læsam esse omnino, atque offensam existimationem putauerit suam. Quare annis ferè quinque post mei in Euclidem commentarij editionem, hoc est, anno 1579. vt se defenderet, Apologiam in me conscripsit: in qua tamen neque ausus est solutiones meas hoc loco adductas infringere, aut impugnare, neque opinionem suam, nouam illam quidem, & inauditam, nouis rationibus (scilicet nullas habebat) confirmare, sed verbis duntaxat, & conuitijs se defendere conatur, vt facile ij, qui eam perlegerint, iudicabunt. Huic ego Apologia iam pridem non tam mei purgandi, quam veritatis tuendæ gratia respondissem, nisi me ab hoc consilio grauissima eruditissimorum hominum auctoritas, qui eam responso omnino indignam iudicabant, reuocasset. Nunc vero quoniam locus hic à me postulare videtur, vt in secunda hac editione patrocinium veritatis iterum suscipiam, non alienum esse duxi, breuiter calumnias, atque iniurias, quibus frequenter me in ea Apologia afficit, quanta potero modestia, depellere. Quamuis enim hoc à me factum iam sit anno 1586. in meis triangulis sphæricis, vbi necessario de re ipsa, eiusque Apologia mentio facienda fuit; quia tamen fortassis non omnes librum illum meum viderunt, operæ pretium arbitratus sum me facturum, si totam illam responsionem hic, vbi proprius eius locus est, interferam, vt benignus lector intelligat, sine causa eum tanto animi dolore, & iracundia, quantam præ se fert, contra me exarsisse, falsoque mihi imposuisse multa: me autem è contrario nullum verbum iniuriosum in illum effudisse, aut conuitium, quod frustra in epistola nuncupatoria criminatur, vbi me

à con-

à conuitijs non abstinere, aperte testatur. Atque in illa Apologia nihil adeo me offendit, quam quod me Peletarius non syncere, sed animose, atque adeo inuidiose fecisse insimulae, vt eum in meis commentarijs vel reprehenderem, vel laudarem: quæ sane vitia pusilli semper animi esse duxi, & ab homine liberaliter, Christianeque educato alieniſſima. Verum ea quam longe absint tum à nostra Societatis disciplina, tum à mea consuetudine, nemo omnino, qui nos ac nostra norit, ignorat. His vero, qui nostra minime norunt, hic ipse liber fidem faciet, syncera omnia dici, nihil inuidiose, nihil animose: planè vt veritatem quæsitam, non cuiusque auctoritatem contemptam esse appareat. Neque enim mihi tantum arrogo, (etsi nihil arrogo) vt mihi vni interdictum putem, ne, si quid in alienis scriptis falsum videatur, occasione oblata, cur id mihi minus probetur, ostendam; modo (quod pudentium, ac bene moratorum hominum consuetudo postulat) id sine conuitio, atque irrisione faciam: Hoc autem liber ipse, qui in medio est, ita à me factum esse clamat. Etenim vt totum hunc librum peruolutes, ne verbum quidem vnum reperias, quod vel speciem maledicti habeat, atque conuitij. Nam in scholio hoc de angulo contactus iurare liquido possem, nihil me minus cogitasse, quam vt Peletarium obtrectandi animo oppugnarem; sed illud habuisse propositum, (si modo consequi possem) vt suum esset veritati locus. Quod quidem ea liberius feci, quod Peletario ipse non modo inuito, sed etiam libenti existimaui me esse facturum, quod vel ipso auctore facerem: qui non à Cardano solum, atq; Campano, sed etiam à Proclo, Theone, Apollonio, Eratosthene, Pappo, Ptolemæo, Hippocrate Chio, Geometriæ luminibus, ab ipso denique omnium magistro Euclide dissentire non dubitauit. Nimirum quia, vt ab eodem in Apologia vere dictum est, in omni doctrina, præsertim vero in Geometria, non auctoritas est spectanda, sed veritas: quanquam non video, qui amicus veritatis sis, apud quem veritas odium parit; nisi forte aut decipi se non posse arbitretur, qui columina illa Geometriæ errasse interdum prædicat, aut veritatem in alienis rebus amat, ac quærit potius, quam in suis. Equidem si quis me

in re quapiam (quod pro humani ingenij imbecillitate fieri posse video) errasse ostenderit. ne ego maximum illi gratiam habuero, qui errantem in viam veritatis reduxerit. At enim probat studium veritatis Peletarius, conuitia ferè non potest: qua tandem conuitia? rogas? Demonstrationes meas appellas sophismata. Nunc demum, quæ conuitia dicat, intelligo. Nam alia nulla in meo hoc libro esse certò scio: ab his (si conuitia sunt) fateor me non abstinere. At ego homo simplex, & ignarus verborum, conuitia esse nunquam duxi, cum vere dicerentur. Neque enim, quo alio vocabulo demonstrationes planè fallaces, & adulterinas appellarem, habebam: neque vero philosophorum, ac Mathematicorum consuetudo loquendi magis appositum mihi verbum suppeditabat. Accedit, quod cum à Peletario, homine in loquendo consideratissimo, germanas Campani, Cardanique demonstrationes paralogismos appellari viderem, existimaui in falsis eius demonstrationibus refellendis impunius persimili me vocabulo vsurum. Quod si sophisma contumeliosius verbum est, quam paralogismus, in Gallia, ignoscat consuetudinis eius ignaro, atque existimet, me paralogismos dicere voluisse. Atque vt planè intelligat Peletarius, me non contradicendi studio illa scripsisse, mecum vna consideret, quantam mihi materiam sui refellendi dederit, si hominem refellere potius, quam rem, quæ tum agebatur, explanare in animo fuisset: quanquam occasionem eius reprehendendi in suum delatam sæpius omisi, ne illum mihi delegisse viderer, in quem potissimum incurrerem. Quàm præclara enim occasio fuit in propos. 4. & 8. lib. 1. atq; in propos. 24. lib. 3. quam ipse 23. facit? In his enim omnibus reijcit demonstrationes antiquissimas Euclidis, tanquam non Geometricas; quippe in quibus figuram vnam alteri superponi concipere animo oporteat: quod ipse à Geometria dignitate putat esse alienum, hac solum inductus ratione, quod superpositionem illam mechanicum quid esse arbitretur, & quod omnes fere propositiones hoc modo, vt ait, possint demonstrari, etiam problemata, in quibus aliquid proponitur construendum: atque in huius rei exemplum adducit propos. 2. & 3. lib. 1. quæ

pro-

problemata sunt. Hic certe Peletarium iure carpere potuissem, si id mihi fuisset propositum, vt falso criminatur, maxime in eo, quod eadem ratione vsui fore existimauit superpositionem in demonstrandis problematibus, ac theorematibus. Nam non satis intellexisse videtur, quo pacto Geometra superpositionem illam vsurpent. Neque enim volunt, re ipsa faciendam esse superpositionem, (hoc enim mechanicum quid esset) sed cogitatione tantum, ac mente, quod opus est rationis atque intellectus. Itaque in theorematibus quidem locum habebit genus hoc argumentandi, in problematibus vero non. Namque in theorematibus, propter magnitudinum aqualitatem, in aqualitatem ve, quæ, vt nota, ponitur, facile intellectus cuiusuis sine vlla hæsitatione comprehendit, vnã vel non excedere alteram, vel excedere, si animo concipiatur vna alteri esse superposita, quamuis re ipsa non fiat illa superpositio, vt in propos. 4. lib. 1. factũ est: At in problematibus, in quibus magnitudinem quis alteri æqualem construere iubetur, licet mente cogitet magnitudinẽ propositam transferri in alium locum, non tamen propterea quicquam efficiet, cum re ipsa translatio nulla facta sit. Vt mirũ sit, Peletarium sibi persuadere potuisse, propos. 2. & 3. lib. 1. & alias pene omnes per superpositionẽ, siue translationẽ linearum, figurarũve posse demonstrari, si hoc modo argumentandi in Geometria vti liceret. Et certe hac in re non solũ Euclidem in crimen vocat Peletarius, verum etiam Archimedem, quo, omnium iudicio, acutior in demonstrando, & subtilior fuit nemo, eiusque commentatorem grauissimum, eumq. doctissimum Eutocium Ascalonitam, qui eodem argumentandi genere vtuntur in æqueponderantibus, immo vero & omnes Geometras redarguat necesse est, qui non raro hoc argumenti genus adhibent. Sed videamus, quo tandem egregius hic noster Geometra, qui omnes alios Geometras reprehendit, sit deuolutus. Viderat Peletarius, (neque enim rem adeo manifestam videre non poterat) si hunc modum argumentandi è medio tollat, vniuersam se Geometriam funditus euertere, cum plurima, eaque præcipua propositiones in Geometria demonstrentur ex propositione 4 & 8. lib. 1. & ex 24. lib. 3. quæ quidem alio modo demon-

strari nequeunt, quam per illam figurarum superpositionem, non quidem re ipsa existentem, sed cogitatione duntaxat, vt dixi, comprehensam. Quo igitur se verteret? quid ageret? Excogitauit sane rem magis à Geometria alienam, quam est superpositio illa figurarum. Coactus enim est asserere, propositionem 4. lib. 1. esse definitionem angulorum æqualium, (& quis vnquam talem audiuit desipientem?) atque adeo concedendam eam esse sine demonstratione: propositionem vero 8. eiusdem lib. principium esse per se quoque notum. Quod vt credibile magis efficiat, ita scribit in propositionem 4. lib. 1. (Etenim nulla euidentiori specie æqualitas figurarum dignoscitur, quam ex laterum æqualitate.) *Idemq. quasi confirmat, & repetit in propositionem 8. eiusdem lib. dum ita loquitur.* (Quis enim negauerit, duas superficies esse æquales, quarum latera & quantitate, & numero sunt æqualia?) *Hæc Peletarius, vt dicta propositiones Euclidis sine demonstratione admittantur, commentus est, sed quæ omnino falsa sunt: vt magnopere mirandum sit, potuisse eum propositiones à Geometria prorsus alienas tam inconsiderate proferre. Scilicet verum est, quod philosophi asserunt; Dato vno absurdo, cætera consequuntur. Assumpserat enim Peletarius propos. 4. & 8. lib. 1. pro principijs: quod quidem falsum est, atque absurdum. Vnde ad eas absurditates necessario deuenit, quas etiã illi, qui vix adhuc principia Geometriæ attigerunt, vel facile vitare potuissent. Nam quis non videt, Rhombum, & Quadratum, etiamsi latera habeant & quantitate, & numero æqualia, posse tamen inter se valde esse inæqualia? Id quod in Pentagonis quoque æquilateris, & in alijs figuris pluriũ laterum æqualium cerni potest: quod non est huius loci pluribus verbis explicare. Cum ergo in omnibus figuris multilateris inæqualitas reperiatur, licet latera habeãt & quantitate, & numero æqualia, demonstrandum fuit necessario Euclidi, æqualitatem triangulorum colligi ex laterum æqualitate, quandoquidem in alijs figuris ea non colligitur. Quare neque propositio 4. Definitio, neque propositio 8. principium erit; ac proinde omnes propositiones, quæ illis nituntur, quæ innumerabiles propemodum sunt, corruant necesse*

est,

est, nisi demonstrationes Euclidis recipiantur in illis propositionibus, cum alio modo demonstrari non possint. Demonstratio enim nouæ propos. 4. quam Peletarius confinxit, nihil aliud est, quam (vt cum Logicis loquamur) petitio principij. Id quod perspicuum erit cuilibet, qui eam diligentius considerare voluerit. Nam in ea solum construitur vnum triangulum posteriori ex duobus datis æquale, immo idem, atque hoc ipsum quidem ineptissime, cum ad id præstandum circulos describat Peletarius, quibus tamen in demonstratione non vtitur, quod vitiosum omnino est in Geometria: Deinde infert, triangulum hoc constructum, quod à posteriori ex duobus propositis non differt, priori esse æquale, sine vlla demonstratione; certum autem est, hoc ab initio propositum fuisse, vt demonstraretur. Quocirca manifeste principium petit, cum eadem facilitate statim in principio concludere potuisset, etiamsi nullam adhibuisset constructionem, triangula proposita esse æqualia; quippe cum constructio illa ad rem non faciat. Idem dico de demonstratione propos. 24. lib. 3. quam etiam nouam confinxit: quod eorum iudicio, ad quorum manus eius commentarij peruenerunt, relinquo. Præterea alia loca innumerabilia, in quibus abutitur propositionibus Euclidis in demonstrando, vt quod plerunque secundam propos. lib. 1. inscite pro tertia assumat, &c. Neque enim mihi in animo nunc est, eius commentarios examinare, sed solum calumnias, quas frequentes in sua Apologia adhibuit, à me depellere. Qua cum ita sint, quod ille falsò de me, vere ego de illo dicere possem, rubere me, (vt eius verbis vtar) Euclidi interpretem contigisse, qui non iam Theonem, aut Campanum emendet, sed ipsum Euclidem sine causa reprehendat; quippe cum ego Euclidem (vti par est) à calumnijs ipsius defendam, omnesq. insidias, ac fallacias, quas contra eum instruxerat, detegam ac refellam. Liquet igitur, me ea mente non fuisse, vt Peletarium redarguerem, cum tot ac tantos errores dissimulauerim: quos ego ne nunc quidem in lucem protulissem, nisi vellem omnes & intelligere, quantum Peletarius à me, de quo tam acerbe queritur, tum beneficium acceperit, & ex breui hac disputatione fructus aliquid, vtilitatisq. percipe-

re.

re. Nunc vt, quam dispari ille animo in me fuerit, appareat, eius calumnias breuiter exponam, atque ita refellam ac diluam, vt omnes oculis videant, eas esse calumnias: In quo tamen eiusmodi à me moderatio adhibebitur, vt modestia, qua hominem religiosum decet, minime obliuiscar. Neque enim illi, vti prouocauit, respondebo.

PRIMVM itaque mihi obiicit Peletarius, quod in eius demonstrationibus citandis ita me gesserim, vt si quo modo nomen ipsius supprimere potuissem, id me ostendam libenter fuisse facturum. Quod quam sit falsum, facile indicabunt ij, qui meos commentarios legerint; cum vbique eum honorifice appellem, eiq; plurimas demonstrationes ascribam, tanquam proprias, quas tamen aliter, quam ipse, & multo breuius demonstro, & interdum etiam (quod melius est) vniuersalius, vt liquido constat ex ijs, qua tum ad propos. 38. tum ad propos. 45. lib. 1. ex Peletario demonstraui, vt alia interim taceam: qua non iniuria mihi vendicare potuissem: vt miror, quid illi in mentem venerit, id a me parum syncere, atque adeo inuidiose factum existimare, quod ego verebar, ne nimis ambitiose factum quispiam indicaret. Quod vero propos. 16. lib. 3. & in prioribus duabus definitionibus lib. 5. vt ipse obiicit, animose, vt ego fateor, libere, quid de eius demonstrationibus sentirem, exposui, id feci, vt iam ante dixi, non cuiusquam laedendi causa, sed quarenda veritatis. Ea enim est natura, & conditio eorum, qui liberalibus artibus dant operam, vt etiamsi alter alterius interdum sententiam impugnet, non tamen idcirco odijs potius, quam ingenijs inter se certare videantur. Qui sit aliorum sensus ignoro, equidem, vt supra dixi, ita sum animo, vt si quis me alicuius erroris in demonstrando commissi admoneret, ei quam maximas gratias haberem: atque vt liberius id facerent, enixe rogaui non paucos, & nunc iterum eosdem, atque etiam alios amice oratos volo. Scio enim, quam facile possit in suis quisque inuentis hallucinari; video (quod ipse quoque Peletarius in Apologia sapienter asseruit) omnibus hominibus commune esse, vt peccent. Deinde quod in additionibus ad propos. 47. lib. 1. eius mentionem non fecerim, non est, quod egre ferat, cum illa propositiones non sint ab

ipso

ipso inuenta. Quadam enim multo tempore ante ipsum demonstrata sunt vel à Campano, vel à Procle, aut Theone, quasdam vero demonstraui egomet, antequam ipsius demonstrationes vidissem; quod adeo manifesta sint, & faciles, vt nulla probatione egeant, sed sint instar corollariorū propos. 47. Vt nulla prorsus laus, aut gloria illi accessura videretur, si maxime eas ab ipso inuentas esse (quod tamen verum non est) prædicassem; cum eas quilibet, modo primoribus labris studia Mathematica degustarit, nullo negotio ex illa propos. 47. colligere possit: Vt non videam, cur tandem eas propositiones tanti ponderis esse dicat, cum sint omnium iudicio leuissimæ; adeo vt in plerisque earum nec ipse Peletarius demonstrationem vllam, propter earum euidentiam, adducat, sed eas nulla probatione egere fateatur. Denique non est, quod tantopere mihi succenseat idcirco, quod constructionem Pentagoni æquilateri, & æquianguli supra datam rectam lineam finitam ei non tribuerim: quoniam in ea constructione nihil prorsus ab eo sum mutuatus: quod ijs diiudicandum relinquo, qui meam cum illius constructione contulerint. Nam & mea omnino diuersa est, & ille in sua mirificè (vt alia peccata taceam) abutitur proportione 9. lib. 3. cum ex ea probet, punctum quoddam esse centrum circuli, qui nondum est descriptus. Geometra sane dixisset, punctum illud esse eiusmodi, vt circulus ex eo descriptus ad interuallum cuiuslibet lineæ rectæ ex illo tribus, quæ ibi ostensa sunt æquales, transeat per extremitates reliquarum duarum linearum æqualium. Nam propositio 9. lib. 3. nihil eo loco ad rem facit, cum propositum ex ipsa constructione possit concludi, & ex demonstratis, vt proxime dixi, etiamsi propositio illa vera non esset, aut nusquam demonstrata. Idem peccatum committit Peletarius in omnibus propositionibus lib. 4. in quibus vel intra figuram rectilineam, vel circa eandē circulus describendus est. Quod si ideo sum reprehendendus, quod propositionem vnā, multo aliter à me, & breuius demonstratam, ei non ascripserim, non video, quo pacto in idem ipse vitium non incurrat, cum problema hoc (Propositis duabus lineis inæqualibus, potentiam maioris supra minorem cognoscere.) *multis seculis ante ipsum*

à Theone demonſtratum ſibi arroget, hac ſolum de cauſa, vt arbitror, quod illud alia ratione, longiore tamen, demonſtrauit. Mitto hoc aliud problema, (Dato angulo rectilineo æqualem angulum curuilineum conſtituere.) *quod in Apologia ſuum proprium appellat, idemq. hactenus deſideratum eſſe gloriatur; cum tamen illud ipſum ego ex Proclo, qui multis ante eum ſeculis floruit, in defin. 5. lib. 5. multo breuius, & clarius demonſtrauerim. Nam, vt eo in loco oſtendi, ſi recta linea datum angulum rectilineum continentes ponantur æquales, & circa ipſas duo ſemicirculi (qui æquales erunt) verſus eaſdem partes deſcribantur, illico conſtitutus erit angulus curuilineus dato angulo rectilineo æqualis: Neque opus eſt tot ambagibus vti, quos Peletarius ad eam rem demonſtrandam adhibet; quamuis robur demonſtrationis ipſius idem ſit, quod mea. Et quod magis mirandum eſt, fatetur Peletarius, ſe meam demonſtrationem vidiſſe, & eam nihilominus ſibi audet, tanquam propriam, arrogare. En cur Peletarius clamet, me non paucas demonſtrationes parum honeſte, vt mihi vendicem, ſibi ſubducere conatum. Quis autem non videt, id eum in altero vituperare, quod ipſe ſibi glorioſum putat? Itaq. multo verius, ac iuſtius eodem illum crimine ego, quàm ille me, condemnare poſſum; cum nunquam propoſitionum illarum inuentorem me appellauerim, vt ipſe, ſed ſolum eius nomen, ob rationes à me expoſitas, reticuerim.*

DEINDE angulum contactus, & acutum rectilineum eiuſdem generis eſſe, contra me pluribus verbis conatur oſtendere. Sed neſcio quo modo aberrat, quod dicitur, à ſcopo. Solum enim probat, vtrumque angulum eodem genere quantitatis contineri, hoc eſt, vtrumque angulum planum eſſe; quod acutus angulus rectilineus, vel etiam rectus conſtare poſſit ex angulo contactus, & alio angulo mixto: quod neque ego, neque vllus vnquam Geometra negauit. Ego angulos illos eiuſdem eſſe generis negaui hac ſolum de cauſa, quod angulus contactus quantumuis multiplicatus angulum acutum rectilineum ſuperare nequeat, vt in ſcholio huius propos. 16. euidenter oſtendi. Hinc enim fit, vt alter ad alterum proportionem non habeat, atque adeo quodam-

modo diuersi generis sint: quemadmodum eadem de causa linea recta finita, & infinita non censentur esse eiusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat; quamuis sub eodem genere magnitudinis; nimirum sub linea recta, comprehendantur. Hoc itaque feriat, vt collimasse videatur: quamquam vt omnia faciat, collimabit nunquam; ita longe abest, quod est propositum. Magnitudines autem, quarum altera multiplicata alteram superare nequit, non censeri eiusdem generis, (quod ad proportionem attinet) licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur, liquido constat ex defin. 5. lib. 5. vbi Euclides satis perspicue explicat, cuiusmodi debeant esse magnitudines eiusdem generis, inter quas proportio reperitur. Quare viderint alij, Peletarius homo consideratus quam cogitate me incogitantem hominem appellarit; quasi non recte intellexerim, qua magnitudines sint eiusdem generis, qua non sint. Numquã enim dixi (id quod mihi affinxit, vt carperet) duarum magnitudinum, qua sub diuersis quantitatis generibus collocantur, quales sunt linea, superficies, corpus, ac numerus, alterutram ita posse multiplicari, vt alteram superet: In quo, nemine reluctante, frustra sese fatigat, vt doceat, id fieri non posse, sed de illis duntaxat magnitudinibus sum locutus, qua cum in eodem genere quantitatis versentur, diuersi tamen generis censeri possunt: quales sunt superficies rectilinea, & curuilinea, siue mixta: Itemq. linea recta, & curua. Hæ etenim ita differre inter se videntur, vt Aristoteles liquido affirmarit, vnam alteri æqualem esse non posse: quod tamen (pace Aristotelis dictum sit) verum vsquequaque non est; cum Archimedes in lib. de lineis spiralibus demonstrauerit, quanam linea recta æqualis possit esse circumferentiæ cuiusuis circuli dati, idemq. nos in quadratura circuli ostenderimus. Non igitur negare poterit Peletarius, ab Euclide defin. 5. lib. 5. aliquas quantitates à proportionis definitione excludi, diuersiq. propterea esse quodam modo generis, quod ad proportionem attinet, licet in eodem magnitudinis genere ponãtur: quales sunt angulus cõtactus, & angulus rectilineus; Linea item recta finita, & infinita:

Multas

Multas item magnitudines comprehendi in eadem definitione proportionis, quas plerique excludebant; cuiusmodi sunt curuilinea superficies, & rectilineus; nec non linea circularis, & recta, vt paulo ante diximus, latiusq. in defin. 5. lib. 5. exponemus. Verum Peletarius, ne opinionem illam suam, quam de angulo contactus semel imbiberat, deserere cogeretur, noluit hanc expositionem 5. defin. lib. 5. recipere; immo eam vt oppugnet, omnes videtur in Apologia intendisse neruos, oblitus sui, qui fere eodem modo illam defin. in 5. lib. olim exposuerat; nisi quod non recte inde colligit, angulum contactus non esse quantitatem, propterea quod multiplicatus nullam magnitudinem, vt dicit, possit excedere. Hoc enim (pace eius dixerim) falsum est. Nam licet angulus contactus multiplicatus angulum rectilineum non possit excedere, excedet tamen alium angulum contactus. Quare ex illa defin. solum recte colligitur, angulum contactus ad angulum rectilineum non habere proportionem vllam; ad angulū vero alium contactus quemcunque proportionem habere. Sed sive ita intellexerit eam defin. vt ex commentarijs eius in lib. 5. colligi potest, sive secus, vt in Apologia indicare videtur, non multum laboro: Certe ita illam esse intelligendam, vt exposui, nemo qui verba Euclidis diligenter expenderit, negabit. Verum enim vero, si mihi fidem habere non vult Pelotarius, habebit certe, (nisi arrogans haberi volet) aut Proclo grauissimo scriptori, qui lib. 2. in lib. 1. Euclidis ad definitionem anguli plani eodem modo definitionem illam intellexit, aut Petro Nonio Lusitano, quem tanti facit, (& merito id quidem: fuit enim acerrimo vir ingenio, & nullo hac nostra aetate in Mathematicis inferior) vt eum vnum pro multis millibus testem citet, & suarum demonstrationum approbatorem, qui disertissimis verbis tum in libro de Erratis Orontij, tum in Algebra sua, illam definitionem explicat, vt à me est exposita: quinetiam ibidem asserit ex ea defin. colligi, angulum contactus ad angulum rectilineum, & lineam finitam ad infinitam nullam habere proportionem; vt Petrus Nonius, quē testem produxerat pro se Pelotarius, iam pro me testimonium dicat. Atque ex hisce

duobus

duobus locis Petri Nonij facile quiuis intelliget, quam sine ratione, & quãto contradicendi studio mihi insultet Peletarius, cum semel atque iterum odiose percontatur, vndenam petuerim illi lineam infinitam deportare. In idem enim crimen (si crimen est, lineam infinitam exempli causa nominare) vocat etiam Petrum Nonium testem suum, atque adeo omnes philosophos, quorum est illa vox nemini inaudita, praterquam Peletario, finiti ad infinitum nullam esse proportionem. Desinat igitur à me suscitari, vnde lineam infinitam deportauerim: Inde enim respondebo, vnde eam Petrus Nonius, vnde philosophi omnes deportarunt. Quid? nonne sophisma illud Peletarij, semper in hoc erre, demonstratio illa, volui dicere, & quidem palmaris, qua conatur ostendere, propositionem 1. lib. 10. cum propos. 16. lib. 3. stare non posse, si angulus contactus concedatur esse quantitas, à Petro Nonio Peletarij cognitore eadem prorsus ratione, qua à me ipso, confutatur? Qua si germana demonstratio est, miror quid sit, cur eam Nonius Geometria scientissimus, idemque Peletarij approbatur, minus probarit: Cur nihilo magis demonstrationes eiusdem, quibus planum facit, (vt putat) angulum contactus quantitatem non esse, eundem illum Nonium nihil admodum mouerint? Id enim (nisi faller) illa Nonij verba (Si quis sententiam Peletarij de angulo contactus amplecti velit.) *declarant. Nam si demonstrationes existimasset, profecto Peletarij doctrinam in eo refutandam esse dixisset, Geometrica enim demonstrationes eiusmodi sunt, vt assensum extorqueant, ac dubitationem omnem excludant, nulloque modo quampiam sinant ancipiti opinione distrahi sic, vt tum assentiatur, si velit, tum si nolit, dissentiat. En cur Peletarius Nonij testimonio aliorum iudicia contemnat, en praclarum testimonium, quod Petrus Nonius eius demonstrationibus dedit: quo aquiore animo ferat, eas à me nihilo magis, quam ab illo suo approbatore, demonstrationes putari.*

TERTIO, quod existimare dixi Peletarium, angulum contingentia nihil esse, falsum esse, clamat: Nusquam enim dixisse se, nihil esse, sed quantitatem non esse. Ita ne vero? at in praedicamento Quantitatis, quod neque est

pun-

punctum, (quis enim inclinationem illam punctum esse dixerit?) neque quantitas, quæ alio nomine vocetur, quam Nihil? Sed vt vt dixit, profecto non modo mirabile est, sed monstri in Geometria simile, putare angulum contactus non esse quantitatem, qui postea additus aliis angulis efficiat curuilineum angulum rectilineo æqualem. Quis enim vnquam Geometrarum id, quod quantitas non est, magnitudini adiunxit, vt æqualem eam alteri efficeret? Prætereo, quod figura trilatera curuilinea intra tres circulos se mutuo tangentes conclusa nullum haberet angulum ex Peletarij sententia; quia tres illi contactus, anguli non sunt: cum tamen tribus diuersis lineis contineatur; quod omnino nouum est, & inauditum apud Geometras. Itemque, si quatuor, aut plures circuli se mutuo tangerent, vt fieret figura curuilinea quadrilatera, vel pluriũm laterum, illa nullum angulum haberet. Atq; etiam, si dua linea recta angulum continentes, vnum eundemque circulum tangerent, trilatera illa figura habens tertium latus curuum, vnicum tantum haberet angulum. Qua omnia si sunt absurda, consentanea non est opinio Peletarij. Sed nimis fortasse multa ad Nihil illud Peletarij euertendum, ad quod tuendum ille nihil afferat. Quoniam vero, ne pro Nihilo suo nihil agere videatur, quando res non potest, mea verba carpit, verba defendam: qua quidem ille nescio quibus præstigijs ita depranat, vt dicere videar, Nihil esse minus quocunque angulo: atque (vt simplicem, credo, hominem irretiat) quærit ex me, quod eandem genus sermonis sit illud. Viderit is, cuius ex officina prodijt. Neque enim ego eiusmodi sermonem agnosco, qui, Nihil esse minus quocunque angulo, nusquam dixerim, nisi ex sententia Peletarij. Sed videlicet homo vehemens, vt suum illud Nihil vlciscereturr, aliud mihi Nihil affinxit, quo cum impune pugnaret: At quam palæstricè pugnat? quam sibi placet hoc loco, dum meum illud argumentum, quo petitus fuerat, in me ipsum mira venustate conuertit? Sic enim argumentatur. (Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Angulus igitur maior nihilo est: Atqui Clauius eundem ponit minorem nihilo,

Est

Est igitur angulus contactus nihilo maior, & idem nihilo minor.) *Mox quasi Nihil illud ab se efficium ingulasset, exclamat.* (An Clauij argumenta, quæ vtrum tandem Peletarij sophismata sunt, an Clauij potius figmenta, cum ipse suum angulum contactus nihil esse dicat, non ego?) *Verum vt hominem faucium, atque adumbratum nequicquam petere desinat, virum ostendam, qui eum, si velit, certare cum laude possit. Ego, vt ostenderem, angulum contactus, ex Euclidis sententia, vere esse angulum, & angulum semicirculi angulo recto rectilineo minorem; ita sum argumentatus. Si Euclides sensisset, angulum contactus nihil prorsus esse; (hoc est, vt Peletarius intelligit, non esse angulum, vel non esse quantitatem.) & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo; quid, obsecro, tantopere desudasset, vt demonstraret, angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi maiorem? Quid enim clarius, quàm nihil, cuiusmodi est angulus contactus, ex Peletarij sententia, hoc est, quàm id, quod quantitatis non est, minus esse quocunque angulo? Quid rursus magis perspicuum, quàm angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, maiorem esse quolibet acuto? Agnoscat itaque Peletarius, Nihil illud suum male à nobis acceptum, idq; ita vbi fecerit, vt meum hoc argumentum refellat: in quo ego si angulum contactus dixi esse nihil, & non potius eum nihil esse asserui ex sententia Peletarij, libenter manus dabo. Videtur Peletarius aut non intellexisse meum argumentum, aut intelligere noluisse: nisi eum quis dicat, dedita opera verba mea voluisse cauillari; quod & plerisque alijs in locis facere videtur. Numquam enim dixi, angulum contactus minorem esse, aut maiorem nihilo: Solum affirmaui, angulū contactus quemcunque minorem esse, aut maiorem aliquo alio angulo contactus; quem non ego dixi nihil esse, sed Peletarius, undemque Euclides minorem quolibet acuto rectilineo recte demonstrauit. Vt autem intelligat Peletarius, me, quod ipse negat, didicisse Dialecticam, illum ipsum tam lepidū, atque acutum syllogismum, quo Nihil illud ab se confictum mira venustate confixit, paulisper considerabimus; vt quàm suo iure Dialectica*

ignaros alios vocet, appareat. Nam mihi quidem male tornatus ille ipse syllogismus videtur, incudique reddendus. Etenim cum versetur in tertia figura, in eo maior extremitas, (vt Dialectici loquuntur) quæ est, Nihil, de minori extremitate, quæ est, angulo contactus maior, in recto prædicari deberet, hoc pacto. Angulus contactus nihil est: Angulus contactus angulo contactus maior est. Igitur aliquid, quod angulo contactus maius est, nihil est. Quæ quidem conclusio recte sequitur ex præmissis, quarum prior Peletarij est, non mea, posterior autem mea, & Procli, immo & Euclidis. Conclusio autem illa Peletarij, Angulus igitur maior nihilo est, nulla ratione ex præmissis inferri potest. Nam si, angulum cum dicit, intelligit Peletarius angulum contactus, assumitur medius terminus, qui in vtraque præmissa subjicitur: quod nefas esse, Aristoteles in prioribus Anal. & Dialectici omnes clamant. Si autem alium angulum intelligis, assumitur in conclusione terminus, cuius nulla facta est mentio in præmissis: quod nihilo magis licere, nemo est tam plumbeus in Dialecticis, qui nesciat. Neque commendat Peletarius, mentionem factam esse anguli in minore extremitate, vbi dictum est, angulum contactus angulo contactus maiorem esse. Nam angulus in minore extremitate positus est in obliquo, qui in conclusione subjicitur in recto: quod, vt nuctore Aristotele docent omnes Logici, sine peccato fieri non potest. Quod, vt planum fiat, vtemur in palæstra, quam ab illa didicimus. Si quispiam ita argumentetur; Angulus in semicirculo rectus est: Angulus in semicirculo angulo acuto maior est. Angulus igitur acutus maior recto est; quis, modo sit imbutus Dialecticis, eiusmodi argumentationem probet, cum præmissæ veræ sint, conclusio autem falsa? Talis ille syllogismus est Peletarij, qui apud imperitam multitudinem alter Chrysippus videri voluit. Conclusio, quæ recte ex præmissis inferretur, hæc esset. Igitur aliquis angulus, qui acuto maior est, rectus est. Sed tamen ei veniam dandam puto, quod se Geometricum Dialecticum, ex alio quodam Dialecticorum genere, profiteatur, cuius ego me Dialectica, si ab Aristotelica abhorret,

plane

plane fateor ignarum? Fatetur deinde Peletarius, se non intelligere, quo pacto dicere possim, angulum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum contactus esse omni acuto rectilineo minorem, (ipse, vt aliquid addat de suo, dicit, omni minimo acuto rectilineo minorem; cum tamen verbum illud, minimo, ego non addiderim) cupitq; scire, quid aliud sit, angulum contactus minorem esse omni rectilineo acuto, quàm angulum contactus esse acutorum rectilineorum minimum. Qua in re morem geram homini non grauate, etsi è scholio huius propos. 16. posuit id, quod cupit, cognescere. Nempe ea ratione me illud posuisse dicere, qua dicimus: angulum obtusum rectilineum minimum dari non posse, & tamen angulum rectilineum acutum esse omni obtuso rectilineo minorem. Item quemadmodum aliud est, angulum rectilineum acutum minorem esse omni rectilineo obtuso, quàm angulum rectilineum acutum esse obtusorum rectilineorum minimum: propterea quod angulus acutus non est obtusus; sic nec angulus contactus rectilineus est, nec acutus. Id quod etiam clarissime docet Proclus lib. 2. in primum Euclidis ad vbium anguli recti, obtusi, & acuti. Sed hæc puerilia sunt, & quæ magis ad Grammaticos spectent, quam ad Geometras. Quod etiam, ne librum meum parum spissum videretur fortasse, suas demonstrationes ad verbum me recitasse queritur, id in me reprehendit, quod ego in ipso desiderari in autore vt in me consilio factum est, vt omnes plane viderent, sentirem me, ac fideliter eius opinionem retulisse, nullisque omnino verbum immutasse. Quod vtinam in meis verbis vrgendis ipse facere in animum induxisset. Multo enim minus spissam Apologiam suam fecisset futurum. Nam ego, quid erat, cur laborarem meum librum Peletarij verbis magis spissum efficere? Qui enim parum spissum iudicarem librum eum, qui nec rarus, nec inuius in libros omnes Euclidis commentationes censeretur, cum Peletarius suum librum, qui sex priorum duntaxat librorum demonstrationes complectitur, satis spissum se arbitratus? Sed eo sum æquior Peletario, quod ex se alios iudicat. Nam in Apologia sua, me inanis rerum videretur, tres demonstrationes nihil pe-

mitus ad eam pertinentes inferfit; quarum priorem immerito suam propriam facit, vt supra dixi: posteriorem vero, quam minimum in modum gloriatur se clariorem fecisse, ego & longe breuius, & dilucidius (nisi meorum me amor fallat) iam pridem demonstraui, vt mox, Deo adiuuante, ex Geometria mea Practica clarissime apparebit. Sed licuerit Peletario sua Apologia, ne incomitata prodiret, nouo more comites ac pedisequas adiungere: mihi cur non liceat, quod omnibus semper licuit, aliorum sententias totas meis scriptis intexere? Aut igitur omnes reprehendat, atque in primis Patrum Nonium laudatorem suum, qui idem fecit in refellendis paralogismis Orontij, aut sine causa id se mihi vitio dedisse fatentur. Quod si, postquam tam fideliter eius verba proposui, Pelatarius criminatur, me eius sententiam perperam esse interpretatum, quid facturus fuisset, si alienis verbis eius opiniones in medium adduxissem? Equidem facile sibi persuadebis quis nullum eum verbum relicturum fuisse, quod non reprehendisset.

QVAMQVAM autem hoc amicum, illud putat palmare, quod me laborare vsitandi, vt pretor, angulos contactus alios alijs esse inæquales: propterea quod scripsi æqualitatem angulorum eiusdem generis requirere eandem inclinationem linearum, ita vt lineæ vnius contineant omnino lineæ alterius, si alteri alteri superponantur, intra eãdem promineantur. Quæ in re duplici ter me peccare ait. Primum quod dicam, ad æqualitatem angulorum eiusdem generis requiri eandem linearum inclinationem: cum tamen angulus rectilineus ostensus sit à me æqualis curuilineo, atque adeo eiusdem generis cum illo, licet non fiat in vtroque eadem linearum inclinatio. Deinde, quod putem angulos contactus inter se inæquales esse, quod sibi mutuo non congruant. Equidem si quid in eo à me peccatum esse intelligerem, & peccatum (quod ab ingenuo, & liberaliter educato homine dignum) agnoscerem, & Peletario corrigeri, & emendatori meo (quicunque id animo fecerit) gratias agerem. Nunc vero, cum neque ea etiam atque etiam considerata, nihil omnino vitij inesse videam, ita, quæ obiecimus, diluantur, vt tamen gratiam habeam Peletario, qui

occasio-

*occasionem dedit eius loci diligentius explicandi. Ego igitur eo loco intellexi angulos eiusdem generis illos, qui vnam lineam habent rectam, & alteram circularem, quales sunt anguli contactus, & semicirculorum, de quibus tunc agebamus. Quare cum linea recta vnius congruat lineæ rectæ alterius, circularis vero circulari non item, nisi circuli ponantur æquales, efficitur, angulos illos esse inæquales inter se, quippe cum alter alterum excedat. Eadem ratione, si dentur duo anguli curuilinei æqualium circulorum æquales, necesse est, lineas vnius lineis alterius congruere, si alter alteri superponatur. Quòd si Pelletarius hanc doctrinam oppugnat, sciat, se iam bellum mouere non mihi, sed Proclo, qui lib. 3. in primum Euclidis ad propos. 4. idem prorsus docet, quod ego. Ait enim (*Angulorum autem æqualitatem sumemus iuxta conuenientiam laterum in rectilineis: in cæteris q. omnibus, qui eiusdem sunt speciei, vt in Lunaribus, in Syftroidibus, atque in vtrinque conuexis, &c.) *Et infrà.* (Quę æqualia data sunt, sibi inuicem congruunt. Hoc autem non in omnibus verum est, sed in iis, quæ specie similia sunt. Specie autem similia, hæc dico, vt recta linea rectę lineæ, & circumferentia circumferentiæ circuli eiusdem, & anguli, qui à similibus similiter iacentibus lineis comprehensi sunt. Horũ autem dico, quòd quæ æqualia data fuerint, sibi inuicem congruunt.) *Nonne luce clarius ex his colligitur, Proclum illos solum angulos contactus concedere æquales, quorum recta linea, & curua sibi mutuò congruunt? Temerè igitur Peletarius mihi obijcit angulum rectilineum, & curuilineum, triangulum & quadratum, atque alia huiusmodi, de quibus eo loco sermo non erat; quippe qua non sint eiusdem speciei, atque adeo æqualitatem sueantur, etiamsi alterum alteri non congruat. Vt iam vereri incipiam, ne Peletarius noster contentionis sit cupidior, quàm veritatis.*

POSTREMO, *vt nihil intactum relinquat, me non modo Geometria ignarum vocat, sed etiam Logices: propterea quòd lib. 5. dixi, non recte à quibusdã diuidi Proportionem rationalem in proportionem æqualitatis, atque*

inaqualitatis; quod multa proportiones inaqualitatis sint etiam irrationales. Ego vero (etsi non is sum, qui mihi quicquam vllo in genere arrogem) tamen in hisce studijs, in quibus mediocriter versatus sum, plane eadem non esse, pro me semper exti. Quantulum autem sit id, quod in vtroque possim, caeteri melius, qui vacant amore, & odio, iudicabunt; Peletario quidem ipsi ita me adhuc respondisse arbitror, viam minus fortasse ignarus Geometriae, ac Dialectica videar, quam putarat. Nunc, vt perficiat, neque me pertinacem esse, neque illa, quae exigunt, à Dialecticorum praeceptis abhorrere, libenter ei concedo, diuisionem illam, quam à me reprehensam criminatur, probam esse, ita tamen si in quolibet diuisionis membro Diuisum intelligatur: neque vero hoc vnquam negaui, cum alibi similes diuisiones vsurpem. Solum id eo loci contendi, rectius meo iudicio, dimidi Proportionem in vniuersum duplici diuisione, priori quidem in proportionem rationalem, & irrationalem; posteriori vero in proportionem aqualitatis, atque inaqualitatis, (quod verissimum esse, neminem negaturum censeo, qui rem diligentius expenderit) cum tam priora duo membra diuidentia, quam posteriora totum Diuisum, vt Logici loquuntur) exhaurient: quàm si prius membrum prioris diuisionis, hoc est, proportio rationalis, secetur in proportionem aqualitatis, & inaqualitatis, cum hae membra diuidentia latius pateant, quàm Diuisum, nisi in illis Diuisum intelligatur. Atque eo magis duplex illa diuisio mihi probatur, quod non desint, qui primum partiantur Proportionem in proportionem aqualitatis, & inaqualitatis; posteriorem deinde hanc in proportionem rationalem, & irrationalem: contrario scilicet modo, quàm priores. Vt igitur hanc controuersiam dirimerem, ac dubitationem, vtri rectius faciant, priores ne, an posteriores, tollerem, statui duabus diuisionibus secandum esse Proportionem, quarum vtraque absolutissima est, ac perfectissima. Non aliter arbitror, omnes magis esse probaturos, si corpus duplici diuisione secetur, primum quidem in viuens, & non viuens; deinde vero in album, nigrum, ac mixto colore affectum: quam si corpus viuens diuidatur in album, nigrum,

ac mixto colore affectum; ob causam iam dictam: licet hæc subdiuisio bona sit, si Diuisum semper intelligatur. Huiusmodi diuisiones sexcentas adducere possem: sed satis est, me prudenti lectori institutum meum in diuisione Proportionis exposuisse, & cur duplicem illam diuisionem subdiuisioni aliorum prætulerim. Quod si tam acres, & seueri iudices singulorum verborum aut improprietatum, quæ per incogitantiam interdum excidunt, esse velimus, nasciptorum nullus aliquo vitio carebit, neque ipse quidem Peletarius, vt partim ex ijs, quæ dicta sunt, constat, partim etiam ex alijs eius demonstrationibus apparere potest: quas si liberet ad certam illam Dialecticorum normam exquirere, profecto reprehendendi materia non deesset. Verum non est hoc nostri consilij, refellendi studio vitia aliena scrutari, sed vbi sese occasio obtulerit, meam (qualiscumque est) de aliorum sententijs sententiam exponere: Solum ab eo peto, (quoniam se tam acutum Dialecticum iactat, vt alios contemnere videatur; quamquam ex superiore syllogismo, quem in me conuertit, liquide constat, quam sit Dialectica peritus) ex qua Logica hanc argumentationem hauserit; Omnes anguli contactus sunt minores quolibet angulo acutæ rectilineo: ergo omnes inter se sunt æquales. Itemq. hanc; Anguli semicirculorum, quo à maioribus circulis fiunt, ea sunt maiores: igitur tandem ad aliquem perueniemus, qui recto rectilineo maior sit; in qua quidem ad Cardanum scribit, nullum esse paralogismum. Ego sane vehementer miror, qua ratione in tam apertas hallucinationes, & viro Geometræ omnino indignas, incidere potuerit. Sed argumentationes eiusmodi satis superq. in scholio huius propos. 16. à me sunt confutatæ, adductis contra ipsas euidentissimis instantijs. Deinde quod me perstringit, quasi parum intellexerim, quæ sit proportio rationalis, & quæ irrationalis, non multum laboro. Constat enim, eum studio mihi detrahendi id dixisse, cum has proportiones vbique ex sententia grauissimorum scriptorum definierim, neque vero ipse vllum peccatum à me ea in re esse commissum, poterit ostendere. Certe commentarius meus in lib. 10. Euclidis abunde declarat, num illas intellexerim, nec ne. Denique quod crimina-

tur, me in definitionibus lib. 5. proportionis nomen confundere cum Rationis nomine, nullo modo verum est. Perspicuis enim verbis docui in defin. 4. lib. 5. me in commentario comparationem duarum quantitatum Proportionem cum pluribus Geometris appellaturum, habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem; licet in textu cum interprete illam dicam Rationem, hanc vero, Proportionem. Neque enim quicquam in textu Euclidis volui immutare. Itaque nulla in meis verbis potest esse ambiguitas.

EX his, quæ diximus, satis (vt opinor) apparet, doctissimos illos viros, de quibus initio memini, non sine causa Apologiam Peletarij inanem, ac responsionis indignam iudicasse. Ego tamen, ne contemnere hominem viderer, quem semper laudandum esse duxi, occasione inuitatus respondendum amice putaui. Existimet ille, angulum contactus quantitatem non esse, atque adeo angulum semicirculi recto rectilineo esse æqualem, ego certe contrariam sententiam tuebor, donec aliud mihi demonstratum ab aliquo fuerit: rationes enim Peletarij fallaces sunt, nihilque continent in se probabilitatis, vt in scholio huius propos. 16. ostendi, vbi omnes dissolui, neque meis ipse solutionibus vel vnum verbum (exceptis ijs, quæ supra ex lib. 10. adduxi) respondit; quod tamen maxime ad Apologiam pertinebat: Vt non sine causa permulti existimauerint, eum non veritatis studio eam Apologiam scripsisse, sed ne veritati cessisse videretur. Nec vero quisquam putet, me vnum existimare, angulum contactus vere esse angulum, & angulum semicirculi recto rectilineo minorem. Multos enim eius rei auctores, eosq. grauissimos laudare possum, Theonem, Campanum, Petrum Nonium, & (vt Nonius refert) Archimedem, atque Iordanum: quin etiam (quod plurimi facio) Euclidem ipsum, eiusq. commentatorem celeberrimum Proclum; vt taceam ex Gallis præstantissimos, atque eruditissimos viros non paucos, è quorum numero in primis est Franciscus Candalla ex illustrissima Flassatum familia oriundus, qui insigne volumen in elementa Geometrica Euclidis edidit, vbi ad propos. hanc 16. apertissime

docet,

docet, angulos contingentia vere esse angulos, ex definitione anguli plani, alios q. alijs esse maiores, aquales, ac minores: Eos autem qui aliter sentiunt, (Peletarium procul dubio intelligit. Praeter eum enim ad hunc diem nemo hac de re scripsit) absurde multa ex falsis suppositis concludere affirmat. Huc accedat etiam Henricus Monantholius Mathematicarum artium professor regius, qui, cum Apologiam Peletarij in me conscriptam vidisset, opusculum eruditum aduersus Peletarium de angulo contactus edidit. Vt autem studiosus lector videat, quid in hoc negotio sentiat Proclus, afferam in medium pauca quaedam ex eius commentarijs in lib. 1. Euclidis, qua obiter notaui, & ex quibus liquide constabit, eius sententiam esse Peletarij commento prorsus contrariam. Primum itaque ita scribit lib. 2. in primum Euclidis, ad definitionem anguli plani. (Duæ namque circumferentiæ se inuicem secando, vel sese concingendo, angulos efficiunt. Quinetiam à recta linea, & conuexa circumferentia angulus continetur, vt Cornicularis.) *Intelligit autem nomine Cornicularis anguli angulum contactus mixtum. Paulo enim ante dixerat, angulum Cornicularem esse omni rectilineo minorem: quod solius anguli contactus proprium est. Deinde in eodem libro ad definitionem anguli recti, obtusi, & acuti ita habet.* (Cornicularis namque angulus omni recto est minor, quandoquidem & acuto, nec tamen acutus est: Semicircularis itidem quocunque recto est minor, acutus tamen non est.) *Quid clarius, quam Proclum hic asserere, angulum semicirculi minorem esse recto? Rursus lib. 3. ad propos. 4. lib. 1. Euclidis ita scribit.* (Addiscemus enim, quòd angulus Cornicularis acuto semper inæqualis est, & nunquã æqualis; Et semicircularis similiter, transitusq. à maiori ad minus non omnino per æquale fit.) *En quam aperte docet, angulũ semicirculi aequalem esse non posse angulo rectilineo, transitumq. propterea fieri à maiori ad minus non per aquale: quorum vtrumq. Peletarius negat, audetq. posterius appellare paralogismum. Deniq. eodem lib. 3. ad propos. 23. hac verba habentur.* Cum autem nullus angulus mixtus rectilineo æqualis esse possit, &c.) *Et Peleta-*

rius

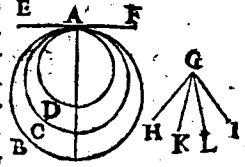
rius tamen non dubitat angulum semicirculi, qui mixtus est, angulo recto rectilineo facere aqualem, contra Procli sententiam. Ex his liquere arbitror, vt de cæteris taceam, idem sentire Proclum de angulo contactus, & semicirculi, quod ego contra Peletarium scripsi; quis autem neget, maiorem esse auctoritatem, meliora argumenta Procli, quam Peletarij?

⊙ BITER. quoque hoc loco monendum lectorem censeo, id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, ex sententia Euclidis, & Procli docui, verum etiam esse de angulo contactus, qui in conicis sectionibus efficitur, nimirum in Parabola, Hyperbola, & Ellipsi. Vt enim Apollonius Pergæus demonstrat lib. 1. propos. 32. in locum, qui inter coni sectionem, & rectam lineam tangentem interijcitur, alteri rectæ lineæ non cadit, atque adeo angulus ille contactus minor etiam est omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (si nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitetur perpendicularis) omni acuto rectilineo maior. Si igitur, vt opinatur Peletarius, angulus contactus quantitas non est, (eadem enim hic est ratio, quæ in circulo) erunt omnes anguli contactus inter se æquales, hoc est, vt ipse vult, non inæquales, & reliquorum angulorum singuli recto rectilineo æquales. Vbi sane mirer absurditas apparet, quo ad sensum, in ea Ellipsi, quæ perexiguam habeat latitudinem, & in ea Hyperbola, quæ ferè linea recta esse videatur. Valde enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipsis, & Hyperbolæ constituti; vt incredibile omnino sit, nisi firma ratione demonstretur, angulos illos contactus ad vertices sectionum constitutos inter se, & reliquos ex rectis inter se quoque esse æquales; propterea quod in ea Ellipsi linea tangens magis recedere perspiciatur à circumferentia Ellipsis, quam in circulo; in illa vero Hyperbola minus. Sed hæc alio tempore examinanda relinquamus: nunc ad interruptam expositionem Euclidis reuertamur.

EX CARDANO.

ALIQVA quantitas potest continue, & infinite augeri, altera verò infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunque sit, minus semper erit decremento huius.

PROPONANTVR enim angulus contactus BAE, & acutus HGI. Si igitur describantur alij circuli minores AC, AD, tangentes rectam EF, in A, augebitur continuo angulus contactus, vt dictum est. Si rursus inter rectas GH, GI, alia recta cadant GK, GL, diminuetur continue angulus acutus: Et tamen semper angulus contactus, quantumlibet augeatur, minor est angulo acuto, quantumuis diminuatur.

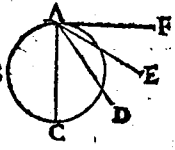


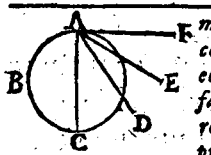
EX CAMPANO.

CAETERVM ex hac propos. 16. perspicuum est, vitiosam esse argumentationem hanc, qua vsus est Brison in quadrando circulo, vt auctor est Aristoteles. Videlicet.

TRANSITVR à minori ad maius, vel contra, & per omnia media; ergo per æquale. Vel, contingit reperire maius hoc, & minus eodem; ergo contingit reperire æquale.

DESCRIBATVR enim circulus ABC, cuius diameter AC, moueri intelligatur circa extremum punctum A, fixum, per puncta D, E, F, donec circulum contingat in A. Hoc concesso, manifestum est, quamdiu recta AC, secat circulum, fieri angulum acutum minorem angulo se-

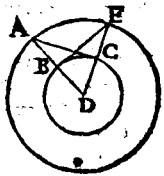




micirculi; quamprimum vero secare cessat, effici angulum rectum maiorem eodem angulo semicirculi. Cum igitur factus sit transitus per omnes angulos rectilineos intermedios, patet vitium prioris argumentationis. Similiter quia nullus angulus rectilineus aqualis reperitur angulo semicirculi; (Rectus enim, vel obtusus, maior est; & acutus, minor,) constat quoque vitiosam esse posteriorem consequentiam.

xvj. ## PROBL. 2. PROPOS. 17.

A DATO puncto rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.



EX puncto A, ducenda sit linea, quæ tangat circulum BC, cuius centrũ D. Ducatur recta AD, secans circulum BC, in B. Deinde centro D, interuallo autem DA, describatur circulus AE, & ex B, educatur BE, perpendicularis ad AD, secans circulum AE, in E. Ducta denique recta ED, secante circulum BC, in C, connectatur recta AC: quam dico tangere circulum BC, in C. Cum enim duo latera DE, DB, trianguli BDE, æqualia sint duobus lateribus DA, DC, trianguli CDA, vtrumque vtrique, vt constat ex circuli definitione; anguluſq. D, contentus dictis lateribus sit communis: Erunt [a] & bases BE, CA, & anguli DBE, DCA, super ipsas, æquales. Est autem DBE, rectus ex constructione. Igitur & DCA, rectus erit. Itaque CA, cum sit perpendicularis ducta ad C, extremum semidiametri CD, tanget circulum, per corollarium præcedentis propositionis. A dato ergo puncto A, ducta est AC, recta tangens circulum BC, in C, quod faciendum erat.

[a] 4. pri.

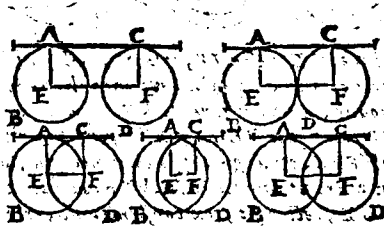
SCHO-

SCHOLIVM.

PRAXIS huius problematis ex ipsa demonstratione facile elicitur. Faciliorem tamen praxim, ad propos. 31. huius lib. inuenies.

SED & sequens problema cum Cardano absoluemus.

PROPOSITIS duobus circulis, quorum neuter alterũ includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque tangat circulum.

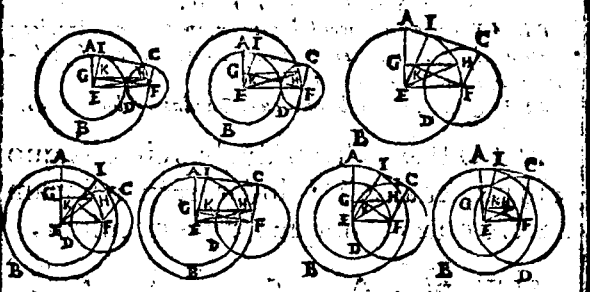


SINT primum duo propositi circuli æquales AB, CD, quorum centra E, & F, recta iungantur EF, ad quam ducãtur perpendiculares EA, FC, secantes circumferentias in punctis A, & C. Dico rectam per A, & C, ductam vtrumque circulum tangere. Cum enim EA, FC, semidiametri circulorum æqualium sint æquales, a *& parallelæ, quòd anguli E, & F, recti sint;* b *erunt quoque EF, AC, æquales & parallelæ; ideoq.* c *& anguli A, & C, recti. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta AC, vtrumq. circulũ tanget, cum rectos angulos constituat in extremitatibus semidiametrorũ.*

SINT deinde duo circuli propositi inæquales AB, CD, quorum rursus centra E, & F, iungantur rectæ EF, ad cuius internallum ex F, centro maioris circuli circulus describatur FH, si maior non transeat per centrũ minoris. Deinde ducta ad EF, perpendiculari EA, abscindatur ex ea portio AG, semidiametro minoris circuli CD, æqualis; & ex G, ipsi EA, perpendicularis ducatur GH, vsque ad circumferentiam circuli FH, proxime descripti. Ducta autem recta HE, fiat angulo HEA, angulus FEI, æqualis; atq; per F, agatur ipsi EI, parallela recta FC. Dico rectam per puncta I, & C, ductã vtrumq. circulũ AB, CD, contingere. Abscindatur

a 28. pri.
b 33. pri.
c 29. pri.

enim



enim ex IE, recta IK, ipsi AG, vel semidiametro FC, minoris circuli, aequalis, vt sine reliqua EG, EK, aequalis quoque, ducaturq; recta KF. Quoniam igitur latera HE, EG, trianguli HEG, aequalia sunt lateribus FE, EK, trianguli FEK, & anguli ipsis contenti aequales, ex constructione: a Erunt anguli HGE, FKE, aequales: Ac proinde, cum HGE, rectus sit, ex constructione, erit & FKE, rectus. Rursus quia CF, IK, aequales sunt, & parallelae, ex constructione, b erunt quoque IC, KF, aequales & parallelae; Atque propterea anguli EIC, c cum aequalis sit externo FKE, rectus erit; d Ideoq. & ICF, rectus existet. Quocirca, per coroll. propos. 16. huius lib. recta IC, vtrumque circulum continget, cum rectos angulos efficiat in extremitatibus semidiametrorum. Quod erat propositum.

a 4. pri.

b 33. pri.

c 29. pri.

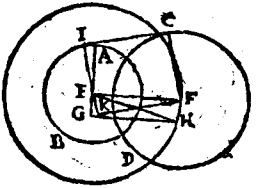
d 28. pri.

SATIS autem constat, si circuli propositi aequales fuerint, id quinque modis posse fieri. Aut enim alius extra alium cadit, aut se mutuo contingunt, aut se inuicem per ventra secant, aut non ita tamen, vt vel centra consistant in communi eorum segmento, vel certe extra illud.

ITEM si circuli propositi fuerint inaequales, id contingere posse septem modis. Aut enim minor totus extra maiorem cadit, aut ipsum tangit, aut ipsum secat, ita vt vel centrum eius sit in circumferentia maioris, vel intra ipsum circulum, hac tamen lege, vt circumferentia minoris citra centrum maioris transeat, vel centrum minoris sit extra circulum maiorem, vel iterum ita intra, vt circum-

ferentia

ferentia minoris per maioris centrũ incedat, vel deniq. ita intra, vt circumferentia minoris includat centrũ maioris.

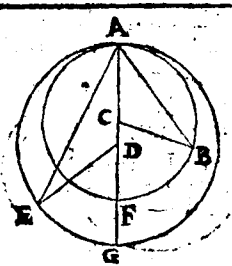


QVONIAM vero circulis inaqualibus existentibus, initium constructionis sumpsimus semper à maiori, si quis maluerit à minori incipere, id efficiet eadem constructione, demonstrationeq. nisi quod recta AE, IE, protrahẽda sunt, ad G, & K, vt AG, IK, aquales sint semidiametro FG, maioris circuli; Addito insuper, angulos HEG, FEK, contentos lateribus HE, EG; FE, EK, idcirco aquales esse, quHEA, FEI, reliqui duorũ rectorũ, aquales sint ex cõstructione. Deniq. angulũ EIC, esse rectũ, ex 29. propos. lib. 1. & EKF, inter parallelas IC, KF, rectus sit ostensus.

QVIA vero & per punctum in circumferentia circuli datum, & per punctum extra circulum existens lineam rectam, que circulum tangat, ex ijs, que demonstrata sunt, ducere possumus; per punctũ quidem in circuli circumferentia positum, ex coroll. propos. 16. per punctum vero extra circulũ ex hac propos. 17. Item ostensum est hoc scholio, rectam duci posse, que duos circulos tangat, dummodo alter eorũ in altero non totus includatur; non alienum esse hoc loco demonstrare, quo pacto per datum punctũ circulus alium datum circulũ tangens, siue interius, siue exterius, describendus sit: Item qua ratione describendus sit circulus tangens duos alios circulos, quorum vnus non sit totus intra alium.

SIT ergo primum in circulo AB, cuius centrum C, datum punctum A, in circumferentia, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens in A. Ducta ex A, per centrum C, recta AC, sumatur in ea quodvis punctum D, ex qua ad interuallum DA, circulus describatur AE, qui circulum AB, in A,

tanget;



tanget; Et si quidem punctum D, fuerit vltra centrum C, cadet circulus AE, totus extra circulum AB; intra vero, si punctum D, in semidiametro AC, extiterit, vt scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

DEINDE extra eundem circulum AB; datum sit punctum G, per quod describendus sit circulus circulum AB, tangens. Ducta ex G, per centrum C, recta GCA, eaque secta bifariam in D, describatur ex D, per A, circulus AE, qui per datum punctum G, transibit, tangetq. circulum AB, in A, per ea, qua in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

ALITER. Sit datum rursus punctum E, extra circulum AB. Ducta recta EA, vtcunque ex puncto dato E, qua circulum secet, & non per centrum transeat, ducatur ex A, per centrum C, recta AC; eritq. angulus EAC, acutus, cum pars sit anguli semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo EAC, in E, aqualis constituatur AED: coibitq. recta ED, cum AC, in D, ob duos angulos DAE, DEA, duobus rectis minores. Quoniam igitur anguli DAE, DEA, æquales sunt,
a 6. pri. a erunt & latera DA, DE, æqualia. Circulus ergo ex D, per A, descriptus per datum punctum E, transibit, tangetq. circulum AB, in A, ex ijs, qua in supradicto scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

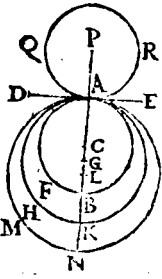
TERTIO datum sit punctum F, intra circulum AE. Ducta ex F, per centrum D, recta FA; eaq. secta bifariã in C, describatur ex C, per A, circulus AB, qui per datum punctũ F, transibit, tangetq. ex dicto scholio circulum AE, in A.

ALITER. Sit datum rursus punctum B, intra circulum AE, cuius centrum D. Ducta recta quacunque AD, per centrum D, & non per datum punctum B, transeunte, qua cum recta coniuncta AB, faciet angulum acutũ BAD, vtpote minorem angulo semicirculi, qui recto minor est. Angulo ergo BAD, in B, aqualis fiat ABC: coibitq. recta EC, cum AD, in C, ob duos angulos BAC, ABC, duobus rectis

minores.

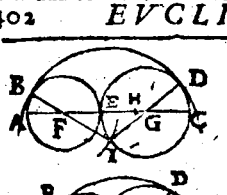
minores. Quoniam igitur anguli BAC, ABC, æquales sunt, a *erunt & latera CA, CB, æqualia. Circulus ergo ex C, per* a 6. pri.
A, descriptus per datum punctum B, transibit, tangetque circulum AE, in A, per ea, quæ à nobis scholio propos. 13. huius lib. demonstrata sunt.

QVOD si per punctum N, extra circulum QAR, datum, describendus sit circulus tangens circulum QAR, exterius, ita vt neuter intra alium cadat, ducatur ex N, puncto dato ad centrum P, circuli QAR, recta NP, secans circumferentiam circuli in A. Diuisa deinde recta NA, bifariam in L, describatur ex L, per A, circulus, qui per datum punctum N, transibit, tangetque circulum QAR, in A, propterea quod vterque circulus rectam DE, quæ per A, ducitur ad NP, perpendicularis, tangit in A, ex coroll. propos. 16 huius lib.



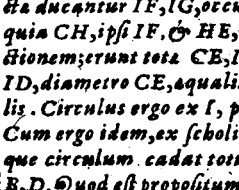
EODEM modo, si in circumferentia circuli QAR, datum sit punctum A, describemus circulum, qui circulum QAR, exterius tangat in A. Ducta enim ex centro P, recta PAC, per datum punctum A, si ex quolibet puncto huius rectæ, per A, circulus describatur, nimirum AMN, ex centro L, tanget hic circulum QAR, vt dictum est, in A.

EX his liquet, per idem punctum datum plures posse circulos describi alium datum circulum tangentes, (si nimirum ex datis punctis E, B, in priori figura ducantur aliæ rectæ, quæ à rectis EA, BA, differant; Item ex punctis datis F, G, emittantur aliæ lineæ non per centra C, D, transeuntes, sed circulos secantes; ac tandem in recta AG, eiusdem figura, vel in PAC, posterioris figura, quando punctum A, in circumferentia datur, alia centra à centris C, D, L, diuersa assumantur) cum tamen per punctum datum extra circulum vna sola linea ad eadem partes duci possit circulum tangens. Quo pacto autem circulus duos circulos tangens, quorum vnus non sit totus intra alium, describendus sit, hac ratione cum Ioan. Bapt. Benedicto demonstrabimus.



a 12. 3ter

SINT primum duo circuli se mutuo tangentes, aut secantes inaequales, AB, minor, & CDE, maior, quorum centra F, G, per quae recta ducatur FG, occurrens circumferentijs in A, C, quae, si circuli se tangant in E, a *per contactum E, transibit. Abscissa recta EH, ex semidiametro maioris circuli, quae semidiametro minoris sit aequalis, describatur ex F, centro minoris ad intervallum rectae HC, quae maior est, quam semidiameter minoris, arcus secans circumferentiam maioris in I; & ex I, per centra F, G, rectae ducantur IF, IG, occurrentes circumferentijs in B, D. Et quia CH, ipsi IF, & HE, ipsi FB, aequalis est, per constructionem; erunt totae CE, IB, aequales. Cum ergo & diameter ID, diametro CE, aequalis sit, erit quoque IB, ipsi ID, aequalis. Circulus ergo ex I, per B, descriptus transibit per D. Cum ergo idem, ex scholio propos. 13. huius lib. extra utrumque circulum cadat totus, tanget utrumque circulum in B, D. Quod est propositum.*

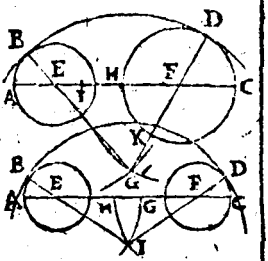


SINT deinde duo circuli se mutuo tangentes, vel secantes aequales, AB, CD, per quorum centra E, F, recta educatur AC. Diuisa deinde recta EF, inter duo centra bifariam in G, (Quando circuli se mutuo tangunt, diuiditur recta EF, bifariam in puncto contactus, propter semidiametros aequales aequalium circulorum) excitetur in G, ad EF, perpendicularis GH: in qua sumpto puncto H, vtcunque, ducantur ex eo per centra E, F, rectae occurrentes circumferentijs in B, D. Quoniam igitur duo latera GE, GH, duobus lateribus GF, GH, aequalia sunt, angulosque b 4. pri. *comprehendunt aequales, nimirum rectos;* b *erunt & bases*

HE,

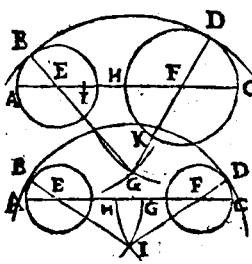
HE, HF, æquales: Et additis ſemidiametris æqualibus EB, FD, tota linea HB, HD, æquales erunt. Circulus igitur ex H, per B, deſcriptus tranſibit per D, cadetq; extra vtrumque circulum, ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. Quare vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.

TERTIO ſint duo circuli ſiue æquales, ſiue inæquales, AB, CD, quorum alter extra alterum ſit totus. Per eorum centra E, F, ducatur recta AC. Et ſi circuli ſunt inæquales, deſcribatur ex E, centro minoris ad interuallum diametri maioris CH, arcus, quæ in G, ſecet alter arcus ex F, centro maioris deſcriptus ad interuallum rectæ FI, compoſite ex ſemidiametro maioris FH, & HI, ſemidiametro minoris æquali. Ponamus enim nunc hos arcus ſe interſecare; quando autem ſe non ſecant, dicemus mox, quid agendum ſit. Ex G, autem per centra E, F, rectæ ducantur ſecantes circumferentias in B, D Et quia FG, ipſi FI, æqualis eſt: ablatis æqualibus FK, FH; reliqua æquales erunt KG, HI. Eſt autem HI, ſumpta æqualis ſemidiametro minoris EB. Igitur & KG, ipſi EB, æqualis erit. Cum ergo & EG, diametro maioris KD, ſit æqualis; erunt tota rectæ GB, GD, æquales. Quare circulus ex G, per B, deſcriptus tranſibit per D, cadetque extra vtrumque circulum ex ſcholio propoſ. 13. huius lib. ac proinde vtrumque tanget in B, D. Quod eſt propoſitum.



VERVM quia non ſemper duo illi arcus ex E, & F, deſcripti ſe interſecant, quod accidit propter nimiam circulorum diſtantiam vnius ab altero, abſoluemus problema hoc alio modo, qui generalis eſt, ſiue circuli ſe tangant, ſiue non, etiamſi non ſe ſecent, & ſiue æquales ſint, ſiue inæquales. Ducta recta AG, per circulorum centra, ſumantur rectæ æquales AG, CH, ita vt qualibet ſemiſſem ipſius AC, ſuperet: & ex centro E. per G, arcus GI. deſcribatur, quem ſecet in I, alius arcus HI, ex centro F, per H, deſcriptus

ac denique ex I, per centra E, F, rectæ emittantur circumferentijs occurrentes in B, D. Et quoniam E G, E I, æquales sunt; si addantur æquales AE, BE, fient totæ AG, BI, æquales. Eadem ratione erunt CH, DI, æquales. Cum ergo AG, CH, posita sint æquales, erunt quoque BI, DI, æquales. Circulus igitur ex I, per B, descriptus transibit per D, totus, q; extra vtrumque circulum cadet, ex scholio propos. 13. huius lib. ac propterea vtrumque tanget in B, D. Quod est propositum.

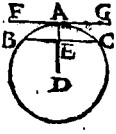


IAM vero eadem arte describemus circulum data magnitudinis, qui duos circulos propositos tangat, dummodo semidiameter circuli describendi maior sit semisse rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ducta. Nam si semidiametro dati circuli rectas æquales abscindamus AG, CH, reliqua perficiemus, vt proximè dictum est.

PORRO manifestum etiam est, si ex puncto medio rectæ AC, per centra circulorum vsque ad circumferentias ducta, describatur circulus per A, & C, eum circulum tangere vtrumque circulum AB, & CD, in A, & C, ex scholio propos. 13. huius lib.

EX PELETARIO.

LINEAE rectæ, quæ circulum secet, lineam parallelam ducere, quæ eundem circulum tangat.



CIRCVLVM enim ABC, cuius centrum D, secet recta BC, cui ducendu est parallela tangens circulum ABC. Ducatur ex centro D, recta DE, perpendicularis ad BC, extendaturq. ad punctum A, in circumferentiam; & ex A, ducatur FG, perpendicu-

laris

laris ad AD. a Erit igitur FG, parallela ipsi EC, tangetq. circulum in A, per corollarium propos. 16. huius lib. quod erat faciendum. a 28. pri

THEOR. 16. PROPOS. 18. xvij.

*SI circulum tangat recta quæpiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quædam linea: quæ adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

RECTA linea AB, tangat in C, circulum CD, cuius centrum E, & ex E, ad C, recta ducatur EC. Dico EC, perpendicularem esse ad AB. Si enim non est, ducatur EF, perpendicularis ad AB, secans circumferentiam in D. Quoniam igitur in triangulo CEF, b duo anguli ECF, EFC, minores sunt duobus rectis; Et est EFC, rectus, ex constructione: erit ECF, minor. Quare c maior erit recta EC, hoc est, BD, quam EF, pars quam totum. quod est absurdum. Est igitur EC, perpendicularis ad AB. Quare si circulum tangat recta quæpiam linea, &c. Quod demonstrandum erat. b 17. pri c 19. pri

ALITER. Si EC, non est perpendicularis ad AB, erit alter angulorum ad C, obtusus, & alter acutus. Sit ergo ECB, acutus, qui cum maior sit angulo semicirculi ECD, erit angulus semicirculi minor angulo aliquo acuto: quod est absurdum. Omnis siquidem angulus semicirculi d maior est omni acuto. d 16. ter

SCHOLIVM.

HINC licebit demonstrare sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: Videlicet.

DVOBVS circulis ex eodem centro descriptis; erunt omnes rectæ lineæ inte-

riorem circulum tangentes, & vsque ad circumferentiam exterioris circuli extensæ, inter se æquales, bifariamq. in punctis contactuum secabuntur.

SINT duo circuli ABCD, EF, ex eodem centro G, descripti, quos tangant recta AC, BD, in punctis E, F. Dico rectas AC, BD, esse æquales, bifariamq. secari in E, F. Ducantur enim ex centro G, ad puncta contactuum E, F, recta GE, GF, a *quæ ad AC, BD, perpendiculares erunt; ac proinde, per defin. 4. huius lib. recta AC, BD, æqualiter à centro G, in circulo ABCD, distabunt, cum perpendiculares GE, GF, æquales* b *sint. Igitur* b *rectæ AC, BD, æquales sunt. Diuiduntur* c *autem & bifariam in E, F, à perpendicularibus GE, GF. Constat ergo id, quod propositum est.*

a 18. ter

b 14. ter

c 3. ter.

xviij.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI circulum tetigerit recta quæpiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: In excitata erit centrum circuli.

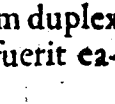
TANGAT recta AB, circulum CDE, in C; & ex C, ducatur CE, perpendicularis ad AB. Dico in CE, esse centrum circuli. Si enim est extra CE, sit F, centrum, à quo ad C, ducatur recta FC, quæ d perpendicularis erit ad AB. Quare rectus angulus FCB, recto angulo ECB, æqualis erit, pars toti: quod est absurdum. Non igitur extra CE, centrum circuli existet. Itaque si circulum tetigerit recta quæpiam linea, &c. Quod erat demonstrandum.

d 18. ter

THEOR. 18. PROPOS. 20. xix.

IN circulo, angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam; cum fuerit eadem peripheria basis angulorum.

IN circulo ABC, cuius centrum D, super basin BC, constituatur angulus BDC, ad centrum; & super eandem basin angulus BAC, ad peripheriam. Dico angulum BDC, duplum esse anguli BAC. Includant enim primum duæ AB, AC, duas DB, DC; & per centrum D, recta extendatur AE. Quoniam igitur rectæ DA, DB, æquales sunt, [a] erunt anguli DAB, DBA, æquales: Est autem externus angulus BDE, [b] æqualis duobus angulis internis DAB, DBA. Quare BDE, duplus erit alterius eorum, vt anguli DAB. Eodem modo duplus ostendetur angulus CDE, anguli DAC. Quapropter totus BDC, duplus erit totius BAC. Quando enim duæ magnitudines duarum sunt duplæ, singulæ singularum, est quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum. Constat ergo propositum.

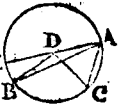


[a] 5. pri.
[b] 32. pri

DEINDE non includant rectæ AB, AC, rectas DB, DC, sed AB, per centrum extendatur. Quoniam igitur externus angulus BDC, [c] æqualis est duobus internis DAC, DCA: Hi autem duo [d] inter se sunt æquales, quod latera DA, DC, sint æqualia; erit angulus BDC, duplus alterius eorum, nempe anguli BAC. Quod est propositum.

[c] 32. pri
[d] 5. pri.

TERTIO recta AB, secet rectam DC, & per centrum D, extendatur recta AE. Quoniam igitur angulus EDC, ad centrum, & angulus EAC, ad peripheriam, habent eandem basin EC, & recta AE, extenditur per centrum; erit angulus EDC, duplus anguli EAC, vt ostensum est in secunda parte. Simili modo erit angulus EDB, duplus anguli EAB; habent enim hi angu-



li eandem basin EB. Reliquus igitur angulus BDC, duplus erit reliqui anguli BAC. [a] Quando enim totum totius est duplum, & ablatum ablati; est & reliquum reliqui duplum. In circulo igitur angulus ad centrum duplex est, &c. Quod erat demonstrandum.

a 20. pro

SCHOLIVM.

AD primam partem huius propos. demonstrandam assumptum est hoc principium. (Si duæ magnitudines duarum magnitudinum sint duplæ, singulæ singularum; erit quoque aggregatum ex illis aggregati ex his duplum) *In tertia vero partis demonstratione hoc aliud principium adhibitum est.* (Si totum totius est duplum, & ablatum ablati; erit & reliquum reliqui duplum.) *Quorum vtrumque ab Euclide vniuersaliter demonstratur in omni genere multiplicium, & de quotcunque magnitudinibus, libro 5, propos. 1. & 5. Non tamen propterea demonstratio huius propos. censenda est vitiosa, quasi assumat ea, quæ nondum sunt demonstrata: quia & duo illa principia lumine naturali ita cognita sunt in duplis magnitudinibus, vt facile à quouis sine vlla demonstratione concedantur, & vtraque illa propositio lib. 5. demonstrari possit ante tertium hunc librum, cum ex eo non pendeant: adeo vt duo illa principia iure optimo adhiberi possint hoc loco, tanquã demonstrata. Neque vero hac in re circulus ab Euclide committitur, cum duo illa principia, per quæ propos. 20. huius lib. demonstratur, hac eadem propositione non nitantur, aut aliis propositionibus, quæ ex hac 20. pendent.*

VERVM, si placet, demonstrabimus primam partem huius propos. sine priore illo principio, & tertiam sine posteriore, (secunda enim pars neutro eorum indiget) hac ratione. Repetatur prima figura. Et quoniam [b] *vtram anguli DAB, DBA, inter se æquales sunt, quam anguli DAC, DCA; erit totus angulus BAC, duobus angulis B, C, simul sumptis æqualis, ac proinde tres anguli BAC, B, & C, simul sumpti* [c] *dupli erunt anguli BAC. Quia vero angulus BDC, æqualis est ijsdem tribus angulis BAC, B, & C; (Nam* [c] *cum BDE, duobus internis, B, & DAB, & CDE, duobus inter-*

b 5. pri.

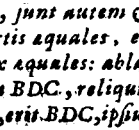
c 32. pri

nis

nis G, & DAC, æqualis sit, erit totus BDC, omnibus quatuor, hoc est, tribus BAC, B, & C, æqualis.) erit angulus quoque BDC, duplus anguli BAC, quod est propositum.

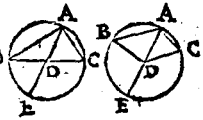
ALITER. Quoniam a sex anguli triangulorum ABD, ACD, sunt æquales quatuor rectis, sunt autem & tres anguli BDC, CDA, ADB, quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. erunt hi tres illis sex æquales: ablatis q. communibus ADB, ADC, b reliqui BDC, reliquis BAC, B, & C, æqualis erit. Quare vt prius, erit BDC, ipsius BAC, duplus. a 32. pri. b 3. pro.

REPETATVR quoque tertia figura, vbi recta DC, rectam AB, secat, vt in E. Quoniam ergo, ducta recta AD, c duo anguli DAC, DCA æquales sunt, estq. angulus DAC, angulo EAC, maior, erit quoque angulus DCA, eodem angulo EAC, maior. Si igitur fiat angulus ACF, angulo EAC, æqualis, secabit CF, rectam AE, vt in puncto F, d, angulusq. EFC, æqualis erit internis angulis FAC, FCA, ac proinde anguli BAC, duplus. Quia vero e anguli DAC, DCA, æquales sunt, & ablati quoque FAC, FCA; erunt & reliqui DAB, ECF, æquales. Cum f ergo DAB, ipsi DBA, æqualis sit; erit quoque ECF, eidem DBE, æqualis: Sunt autem, g & anguli DEB, FEC, ad verticem E, æquales. Igitur & reliqui anguli BDE, EEC, æquales erunt, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. Cum ergo angulus EFC, ostensus sit anguli BAC, duplus; erit quoque angulus BDC, anguli BAC, duplus. quod est propositum.



c 5. pro. d 32. pr. e 5. pri. f 5. pri. g 15. pri

QVOD, si recta BD, CD, in centro angulum non constituat ad partes basis BC; quod tum demum fit, quando segmentum BAC, est vel semicirculus, vel segmentum minus; nihilominus spatium illud ad centrum duplum erit anguli ad circumferentiam, qui eandem habeat basin, quæ spatium illud. Ducta enim recta AE, per centrum, erit tam angulus BDE, ad centrum duplus anguli BAE, ad circumferentiam, quam angulus CDE, ad centrum, anguli CAE,



ad

ad circumferentiam, vt ostensum est. Spatium igitur ad centrū D, basin habens BEC, constansq. ex duobus angulis BDE, CDE, duplū est totius anguli BAC. Quod est propositū.

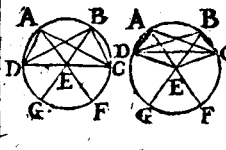
XX. THEOR. 19. PROPOS. 21.

IN circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli, sunt inter se æquales.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, existant anguli A, & B, in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit enim segmentum DABC, primum semicirculo maius; & ducantur rectæ DE, CE, ad centrum E. Quoniam igitur angulus DEC, ad centrum, [a] duplus est tam anguli DAC, quam DBC, ad peripheriam, cum omnes habeant eandem basin DC; erunt anguli A, & B, dimidiatæ partes anguli E. [b] Quare inter se æquales erunt. Eademque ratione omnes alij anguli existentes in segmento DABC, ostendentur esse æquales.

a 20. ter

b 7. pro.



SIT deinde segmentum DABC, vel semicirculus, vel semicirculo minus. Ducantur per centrum E, rectæ AF, BG, & in segmento minori connectantur rectæ DE, CE. Quoniam igitur angulus DEF, ad centrum, [c] duplus est anguli DAF, ad peripheriam: Similiter angulus CEF, anguli CAF; ac proinde duo anguli simul DEF, CEF, duorum angulorum simul DAF, CAF, dupli erunt, hoc est, totius anguli DAC: Sunt aut anguli DEG, GEF, æquales angulo DEF: erunt quoque tres anguli DEG, GEF, FEC, simul dupli anguli DAC. Eadem ratione erunt ijdem tres anguli dupli anguli DBC. [d] Quare æquales erunt anguli DAC, DBC.

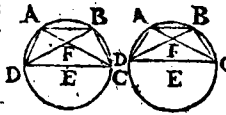
c 20. ter

d 7. pro.

ALITER. Quoniam, vt in scholio propos. præcedentis demonstrauimus, spatium ad centrum E, cuius basis DGFC, duplum est vtriusque anguli DAC, DBC, ad circumferentiam: [e] Erunt ipsi anguli DAC, DBC, inter se æquales.

e 7. pro.

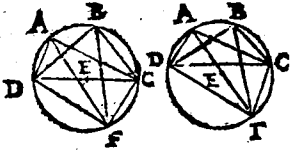
ALITER. Secent sese rectæ AC, BD, in F, & connectatur recta AB. Quoniam igitur tres anguli trianguli AFD, æquales sunt tribus angulis trianguli BFC; quoniam tam illi, quam hi [a] æquales sunt duobus rectis: Si auferantur anguli AFD, BFC, [b] qui æquales sunt; erunt reliqui ADF, DAF, reliquis BCF, CBF, æquales. Atqui & anguli ADF, BCF, æquales sunt ostensi in segmento maiori ADCB. Ergo & anguli reliqui DAC, DBC, æquales sunt.



[a] 32 pri

[b] 15 pri

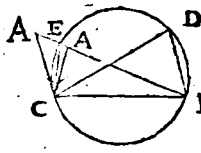
ALITER. Ductis rectis DF, CF, ad punctum in circumferentia quoduis F, includentibus centrum E, ita vt tam DABCF, quam FDABC, sit segmentum maius; iungantur quoque rectæ AF, BF. Quia igitur anguli DAF, DBF, in eodem segmento maiori DABCF, æquales sunt; nec non & anguli FAC, FBC, in segmento etiam maiori FDABC, existentes: si hi illis addantur, fiet totus angulus DAC, toti angulo DBC, æqualis. Itaque in circulo, qui in eodem segmento sunt, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

FACILE quoque theorema istud conuertemus hoc modo.

SI à duobus punctis quatuor rectæ lineæ ducantur, ex singulis binæ, quæ ad easdem partes contineant angulos duos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorum descriptus, per alterum quoque angulum transibit.



EX duobus enim punctis B, C, educantur quatuor rectæ lineæ BA, CA, BD, CD, binæ ex singulis, constituentes ad eandem partes duos æquales angulos A, D. Dico circulum per puncta B, C, & angulum D, descriptum, transire quoque per angulum A. Si enim non transit, transibit vel vltra A, vel citra secans rectam AB, in E. Ducta ergo recta C E, [a] *erunt anguli E, D, æquales. Cum ergo & angulus A, angulo D, ponatur æqualis; erunt anguli CAB, CEB, æquales, externus, & internus, quod est absurdum,* [b] *Externus enim interno maior est. Transit ergo circulus per A. quod est propositum.*

a 21.ter

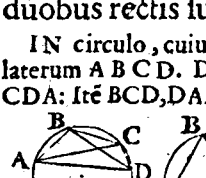
b 16.pri

xxj.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

QVADRILATERORVM in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

IN circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum A B C D. Dico duos angulos oppositos A B C, CDA: Itē BCD, DAB, æquales esse duobus rectis. Ductis .n. diametris duabus quadrilateri AC, BD, [c] erunt duo anguli ABD, ACD, in eodē segmento ABCD, æquales. Similiter erunt duo anguli CBD, CAD, in eodem segmento CBAD, æquales: Quare duo anguli ABD, CBD, hoc est, totus angulus ABC, æqualis est duobus angulis ACD, CAD. Addito igitur communi angulo CDA, erunt duo anguli ABC, C D A, æquales tribus angulis ACD, CAD, CDA. [d] Sed hi tres æquales sunt duobus rectis. Igitur & duo ABC, CDA, duobus erunt rectis æquales. Eodem modo ostendemus, angulos BCD, DAB, duobus esse rectis æquales. Nam rursus [e] duo anguli A B D,



c 21.ter

d 32.pri

ACD,

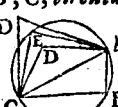
ACD, sunt æquales: Item duo BCA, BDA; ac propterea totus angulus BCD, duobus angulis ABD, BDA, æqualis erit. Addito igitur communi angulo BAD; erunt duo anguli BCD, BAD, æquales tribus angulis ABD, BDA, DAB. a Sed hi tres sunt æquales duobus rectis. Igitur & duo BCD, DAB, duobus rectis æquales erunt. Quadrilaterorum igitur in circulis descriptorum, &c. Quod demonstrandum erat. a 32. pri

SCHOLIVM.

CONVERSVM quoque huius theorematis demonstrari potest, hoc modo.

SI in quadrilatero anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sint æquales; circulus, qui per tres quoscumque eius angulos describitur, transibit etiam per reliquum quartum angulum; Atque adeo circa ipsum quadrilaterū circulus describi potest.

IN quadrilatero enim ABCD, sint anguli oppositi B, & D, duobus rectis æquales, & per angulos A, B, C, circulus describatur; (Quo modo autem hoc fieri possit, ad 25. propos. huius lib. & ad 5. quarti lib. ostendetur.) quem dico transire etiam per D. Si enim non, transibit vel vltra D, vel citra. Ducantur ergo recta CE, AE, ad circumferentiam, ita vt non secent rectas CD, AD. Quo facto, b *erunt anguli B, & E, æquales duobus rectis: Erant autem & anguli B, & D, duobus rectis æquales. Igitur duo anguli B, E, æquales sunt duobus angulis B, D. Quocirca ablato communi B, remanebunt anguli D, & E, æquales: quod est absurdum. Ducta enim recta AC,* c *erit angulus D, maior angulo E, vel contra, angulus E, maior angulo D. Transit igitur circulus per punctum D. Quod est propositum*



b 32. pri

c 21. pri

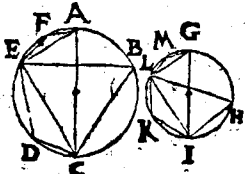
SATIS autem est, sumere duos tantum angulos oppositos æquales duobus rectis, vt theorema hoc verum sit;

quia

quia si duo oppositi sunt æquales duobus rectis, erunt necessario & reliqui duo oppositi duobus rectis æquales; cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, vt ad propos. 32. lib. 1. demonstrauimus.

EX hac etiam propos. facile demonstrabimus theorema hoc insequens, quod frequenter vsurpari solet, tanquam principium, à Mathematicis, scilicet.

SI ex semicirculis, aut circulis segmenta similia detrahantur; reliqua quoque segmenta similia erunt.



SINT primum in circulis ABCDEF, GHIKLM, arcus similes CDE, IKL. Dico & reliquos arcus EFABC, LMGHI, similes esse. Sumptis enim in dictis arcubus, punctis vtcunque D, B, K, H, iungantur rectæ DC, DE, BC, BE, KI, KL, HI, HL. Quia igitur arcus CDE, IKL, similes sunt, erunt, ex definitione segmentorum similium, anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo duo anguli CDE, CBE, duobus angulis IKL, IHL, sint æquales; a *quod tam illi, quàm hi sint æquales duobus rectis:* b *erunt & reliqui anguli CBE, IHL, æquales; ac propterea, ex defin. 10. huius lib. arcus EBC, LHI, similes erunt.*

a 22. ter
b 3. pro.

DEINDE in semicirculis AEC, GLI, similes sint arcus EC, LI. Dico & reliquos arcus AE, GL, esse similes. Sumptis enim punctis D, F, K, M, vtcunque in ijs arcubus, iungantur rectæ CD, DE, CE, EF, FA, AE; IK, KL, IL, LM, MG, GL. Itaque quia arcus EC, LI, similes sunt; erunt, ex defin. anguli CDE, IKL, æquales. Cum ergo & duo anguli CDE, EAC, duobus angulis IKL, LGI, æquales sint; c *quod tam illi, quàm hi sint duobus rectis æquales: erunt & reliqui anguli EAC, LGI, æquales. Sunt autem & anguli AEC, GLI, in semicirculis, hoc est, in segmentis similibus AEC, GLI, æquales, ex definitione segmentorum similium*

c 22. ter

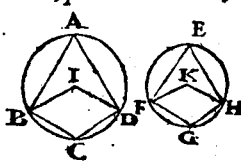
Igitur

Igitur in triangulis AEG, GLI, & reliqui anguli ACE' GIL, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. æquales erunt. Cum ergo duo anguli ACE, EFA, duobus angulis GIL, LMG, æquales sint; a quod tam illi, quam hi duobus sint rectis æquales; erunt quoque anguli reliqui EFA, LMG, æquales: ac proinde, ex defin. similium segmentorum, arcus AE, GL, reliqui in semicirculis, similes erunt. Quod erat ostendendum. a 22. 20 r

QVANDO autem de segmentis similibus sermo hic incidit, non videntur omittenda hoc loco tria theoremata tum Geometricis rebus, tum præsertim Astronomicis pernecessaria, quorum primum sit hoc, quod nos ad defin. 10. huius lib. demonstrandum recepimus: videlicet.

ANGVLI insistentes arcubus circulorum similibus siue ad centra, siue ad circumferentias, sunt inter se æquales. Et contra, arcus, quibus anguli æquales siue ad centra, siue ad circumferentias insistunt, similes sunt.

SINT in circulis ABCD, EFGH, quorum centra I, K, primum arcus similes BCD, FGH, quibus ad centra insistant anguli I, K, ad circumferentias vero anguli A, E. Dico eam illos, quam hos inter se æquales esse. Constituantur enim in illis arcubus anguli C, G, qui ex defin segmentorum similium, æquales erunt. b *Sunt autem tam duo anguli C, A, quam duo G, E, duobus rectis æquales. Ablatis igitur æqualibus C, G, erunt quoque reliqui A, E, æquales. Quorum* c *cum dupli sint anguli I, K,* d *erunt hi quoque æquales. Quod est propositum.*



b 22. ter

c 20. ter

d 6. pro.

DEINDE sint tam anguli I, K, quàm A, E, insistentes arcubus BCD, FGH, inter se æquales. Dico arcus BCD, FGH, esse similes. Nam si A, & E, sint æquales: sint c *autem*

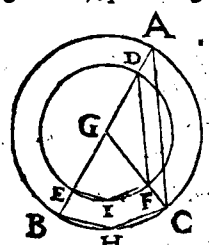
c 22. ter

tem tam duo anguli A, C, quam duo E, G, duobus rectis æquales; erunt & reliqui C,G, æquales; ac propterea, ex defin. simlium segmentorum, arcus BCD, FGH, quibus anguli æquales A,E, ad circumferentias insistunt, similes. Si vero
a 7.pro. anguli I, K, ad centra sint æquales, a erunt quoque eorum dimidia æqualia, hoc est, anguli A,E. Quare vt prius, arcus BCD, FGH similes sunt. Quod erat ostendendum.

SECVNDVM autem, quod nos etiam in sphæra ad finem primi cap. demonstrauimus, huiusmodi sit.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ, aut plures rectæ lineæ ducantur; erunt arcus inter quascũq. duas lineas intercepti, similes.

DVO circuli ABC, DEF, ex eodem centro G, descripti sint, & ex centro G, duæ rectæ educantur GB, GC. Dico arcus EF, BC, esse similes. Producta enim BG, ad A, iungantur rectæ AC, DF; Item sumptis punctis H, I, vtcunque, ducantur rectæ BH, CH, EI, FI. Quoniam igitur angulus
b 20.ter G, ad centrum arcubus EF, BC, insistens b duplus est tam
c 7.pro. anguli EDF, quam anguli BAC; c erunt anguli EDF, EIF,



d 22.ter duobus angulis BAC, BHC, æquales; quod d tam illi, quam hi duobus rectis sint æquales. Ablatis igitur æqualibus angulis
c 3.pro. EDF, BAC, c reliqui EIF, BHC, æquales erunt: ac proinde segmenta EF, BC, in quibus sunt, similia erunt, ex defin. similium segmentorum. Quod erat ostendendum.

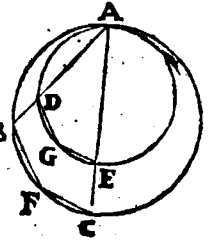
BREVIVS sic. f Quoniam
f 7.pro. anguli A, D, æquales sunt, quod vtrinsque g duplus sit an-
g 20.ter gulus G, ad centrum; erunt per antecedens theorema, arcus BC, EF, quibus ea circumferentias insistunt, similes. Quod est propositum.

VEL

VEL adhuc breuius. Quoniam arcubus EF, BC, æquales anguli in centro insistunt, immo vnus & idem angulus BGC; erunt per antecedens theorema arcus EF, BC, similes. Atque in hac demonstratione non est opus vlla constructione, vt manifestum est.

TERTIVM denique, quod aliter quoque in nostro Astrolabio ostendimus, hoc sit.

SI duo, aut plures circuli se mutuo tangant interius in vno puncto, à quo duæ, aut plures rectæ educantur; erunt & arcus inter quascunque duas lineas intercepti, & arcus inter quamcumque lineam, & punctum contactus intercepti, similes.



TANGANT se mutuo interius duo circuli ABC, ADE, in puncto A, à quo duæ rectæ educantur AB, AC. Dico tam arcus DE, BC, quam AD, AB, & AED, ACB. similes esse. Sumptis enim duobus punctis vtcunque F, G, iungantur rectæ BF, CF, DG, EG. Quoniã igitur duo anguli DAE, DGE, duobus angulis BAC, BFC, æquales sunt; quod a tam illi, quam hi sint duobus rectis æquales: ablato communi angulo BAC, b erunt reliqui anguli DGE, BFC, æquales; ac proinde arcus DE, BC, similes erunt ex defin. segmentorum similium. a 22. ter b 3. pro.

BREVIVS sic. Quoniam angulus A, communis vtrique arcui DE, BC, ad circumferentias insistit, erunt, ex demonstratis ante proxime antecedens theorema, arcus DB, BC, quibus insistit, similes. Quod est propositum.

QVIA vero, si per circulorum centra ducta cogitetur recta AC c hac in contactum A, cadit, suntque eodem pacto arcus DE, BC, similes, fit, vt hisce similibus ablatis ex semicirculis similibus, reliqui arcus AD, AB, similes quoq; c 21. ter

sint: atque his ablatis ex totis circumferentijs similibus, similes quoque sint reliqui arcus AED, ACB, vt paulo ante demonstrauimus. Quod est propositum.

HVC etiam referri potest hoc theorema.

SI vnum latus quadrilateri in circulo descripti producatur, erit angulus externus angulo, qui angulo ei deinceps opponitur, æqualis.

IN circulo ABCD, descriptum sit quadrilaterum quodcunque ABCD, cuius latus AD, producatur ad E. Dico angulum EDC, angulo B, æqualem esse. Cum enim duo anguli ad D, æquales sint duobus rectis: Item b *duo B, & D, in quadrilatero; erunt duo illi his duobus æquales. Ablato ergo communi angulo ADC; reliquus EDC, externus reliquo B, æqualis erit. Quod est propositum.*

a 13. pri. b 22. ter

THEOR. 21. PROPOS. 23.

xxij.

SVPER eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inæqualia, non constituentur ad easdem partes.

SI enim fieri potest, super recta AB, constituantur ad easdem partes duo segmenta similia, & inæqualia ACB, ADB. Perspicuum est autem, quod se solum intersecent in punctis A, & B; c Circulus enim circulum non secat in pluribus punctis, quam duobus. Vnde peripheria vnius segmenti tota erit extra peripheriam alterius. Ducatur igitur recta AD, secans circumferentias in C, & D, & connectantur rectæ CB, DB. Quoniam igitur segmenta ponuntur similia, erit per 10. defin. huius lib. angulus ACB, æqualis angulo ADB, externus interno: d quod est absurdum. Non igitur segmenta sunt simi-

c 10. ter

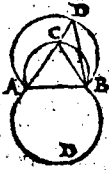
d 16. pri

lia:

lia: Quare super eadem recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EADEM ratione, neq; ad diuersas partes super eadem recta linea duo segmenta circulorum similia, & inaqualia constituentur. Nam si alterum eorum intelligatur moueri circa lineam AB, vt iam ambo sint ad easdem partes, in idem absurdum incidemus, vt figura indicat, quoniam alterum alteri non congruet, propter inaqualitatem.



THEOR. 22. PROPOS. 24. xxiij.

SVPER æqualibus rectis lineis, similia circulorum segmenta sunt inter se æqualia.

SVPER rectis lineis æqualibus AB, CD, constituta sint segmenta similia AEB, CFD. Dico ea inter se esse æqualia. Lineæ enim AB, CD, cum sint æquales, congruent inter se, si altera alteri superponatur. Dico igitur & segmentum AEB, segmento CFD, congruere. Si enim non congruit, cadet aut extra, aut intra, aut partim extra, partim intra. Quod si extra cadat, aut intra, constituentur super eadem recta CD, duo segmenta AEB, AFB, similia, & inæqualia, quorum vnum totum extra aliud cadit, quod est absurdum. [a] Demonstratum enim est contrarium. Quod si partim extra cadat, partim intra, secabunt sese in pluribus punctis, quam duobus, nimirum in A, B, G. Quod est absurdum. [b] Circuli enim non se secant in pluribus punctis, quam duobus. Congruet igitur segmentum AEB, segmento CFD, atq; adeo ipsa inter se æqualia erunt. Quocirca super æqualibus rectis lineis, &c. Quod erat demonstrandum.

a 23. ter

b 10. ter

SCHOLIVM.

NON solum in hac propositione ostenditur, segmenta similia AEB, CFD, esse æqualia, super æquales bases AB, CD; verum etiam ipsas peripherias, eo quod, vt demonstratum est, sibi mutuo congruant.

CONVERSVM quoque huius propes & præcedentis, facile demonstrabitur. Nimirum, segmenta circulorum æqualia super æquales lineas, vel super eandem constituta, esse similia. Nam propter æqualitatem, alterum alteri congruet; quare similia erunt, cum hac ratione omnes anguli in ipsis constituti æquales sint. Quod si quis dicat, non sibi mutuo congruere segmenta, secabit necessarie vna circumferentia alteram. Vna enim extra alteram non cadet. Inæqualia namque forent segmenta, quod est contra hypothesin. Sint ergo segmenta AFB, AGB, æqualia super eandem rectam AB, secentque se mutuo in G. Igitur circuli AFB, AGB, secant se in punctis A, G. B, pluribus quam duobus, quod est absurdum. a *Circuli enim non se intersecant in pluribus punctis quam duobus. Eodem modo res demonstrabitur, si æqualia segmenta super æquales rectas sint constituta: si nimirum altera alteri superponatur, &c.*

a 10. ter.

xxiiij.

PROBL. 3. PROPOS. 25.

CIRCVLI segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum.

SIT segmentum circuli ABC, quod perficere oporteat. Subtendatur recta AC, quę bifariam secetur in D, puncto, per quod perpendicularis ducatur DB, connectaturque AB. Angulus igitur D B A, vel maior est angulo DAB, vel æqualis, vel minor. Sit primum maior, (quod quidem continget, quando segmentum ABC, minus fuerit semicirculo: Tunc enim, quia BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod est extra segmentum, cum ponatur esse minus; erit DA, maior, quam DB, cum DB, perficiens diametrum b sit omnium minima, quæ ex puncto D, in circumferen-

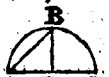
b 7. ter.

tiam,

tiam cadunt. Quare angulus D B A, a maior erit angulo DAB.) fiatq. angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AB, rectam BD, productam in E. Dico E, esse centrum circuli, cuius segmentum ABC. Ducta enim secta EC, erunt latera AD, DE, trianguli ADE, æqualia lateribus CD, DE; trianguli CDE, & anguli contenti, recti. b Quare bases EA, EC, æquales erunt; c Est autem & EA, æqualis ipsi EB, quod anguli EAB, EBA, æquales sint. Igitur tres lineæ EA, EB, EC, æquales erunt, d ac propterea E, centrum erit circuli ABC, quandoquidem ex E, plures quam duæ rectæ æquales cadunt in circumferentiam.

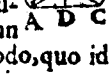
a 18. pri
b 4. pri.
c 6. pri.
d 9. ter.

SIT deinde angulus DBA, angulo DAB, æqualis: (Quod demum continget, quando segmentum ABC, semicirculus fuerit. Tunc enim erit AC, diameter, & D, centrum, atque adeo rectæ DA, DB, æquales; quare e & anguli DAB, DBA, æquales erunt.) f Erunt igitur rectæ DA, DB, æquales: Erat autem & DC, æqualis ipsi DA, quòd recta AC, secta sit bifariam. Quapropter cum tres rectæ DA, DB, DC, cadant ex D, in circumferentiam, g erit D, centrum.



e 5. pri.
f 6. pri.
g 9. ter.

SIT tertio angulus DBA, angulo DAB, minor, (quod quidem eueniet, si segmentum ABC, semicirculo maius extiterit. Tunc enim, quoniam BD, transit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. quod quidem intra segmentum, cum maius esse ponatur, existit; h erit DB, omnium, quæ ex D, in circumferentiam cadunt, maxima; maior igitur erit quam DA, i ideoq. angulus DAB, maior angulo DBA.) fiatq. angulus BAE, æqualis angulo DBA, & secet recta AE, rectam BD, in E, punc̃to, quod ostendetur esse centrum eodem modo, quo id ipsum ostendimus, quando angulus DBA, maior erat angulo DAB, vt constat, si recta ducatur EC. Circuli igitur segmento dato, descripsimus circulum, cuius est segmentum. Quod facere oportebat.



h 7. ter.
i 18. pri

SCHOLIVM.

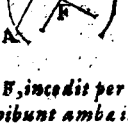
SED fortassis hæc demonstratio Euclidis, qua per omnia tria circuli segmenta progreditur, ita facilius instituetur. Diuisa recta AG, bifariam in D, erectaq. perpendiculari DB, & ducta AB; aut DB, minor est, quàm DA, aut
218.pri æqualis, aut maior. Si minor; a erit angulus BBA, minor angulo BAD. Constituto igitur angulo BAE, æquali ipsi ABD; ostendemus, vt prius, E, centrum esse. Atque hoc euenit, quando segmentum est semicirculo minus.

SI vero DB, æqualis est ipsi DA; erunt omnes tres DA, DB, DC, æquales; b ac proinde D, centrum. Quæ ratio locum habet in semicirculo.
b 9.ter.

SI denique DB, minor est, quàm DA; c erit angulus DBA, minor angulo DAB. Constituto ergo angulo BAE, æquali ipsi ABE; ostendetur E, esse centrum, vti prius. Hoc autem maiori segmento accidit.
c 18.pri

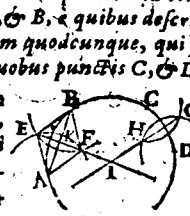
ALITER idem problema hoc modo absoluetur. Positis iisdem, quæ prius, fiat angulo DBA, æqualis angulus EAB. Et si quidem recta AE, cadit infra AC, erit segmentum semicirculo minus, vt in prima figura. Si vero AE, cadit supra AC, erit segmentum semicirculo maius, vt in tertia figura: semper autem E, centrum erit, vt demonstratum est. Si denique recta efficiens cum AB, in A, angulum æqualem angulo ABD, coincidit cum AC, erit segmentum semidirculus, punctumque D, centrum erit, vt in secunda figura.

BREVIVS tamen inuenietur centrum segmenti propositi cuiuslibet, siue illud semicirculo maius sit, siue æquale, siue maius, hac ratione. Assumantur in peripheria segmenti tria puncta vtcunque A, B, & C, quæ duabus rectis coniungantur AB, BC, quæ bifariam secentur in D, & E. Deinde ex D, & E, educantur ad AB, BC, perpendiculares DF, EF. Quoniam igitur per corollarium propos. 1. huius lib. tam DF, quàm EF, incidit per centrum circuli, cuius ABC, est segmentum, coibunt ambæ in centro, vt in F. Quare centrum est inuentum. Quod est propositum.



ALI-

ALITER, vt Mechanici solent. Accipiantur in circumferentia duo puncta vtcunque A, & B, à quibus describantur duo arcus ad idem internallum quodcunque, qui se intersecent in E, & F. Postea ex alijs duobus punctis C, & D, alij duo arcus se secantes in G, & H, describantur ad quoduis internallum, siue idem quod prius, siue diuersum. Si igitur agantur recta EF, GH, transibunt amba per centrum. Quare punctum I, in quo coeunt, erit centrum.



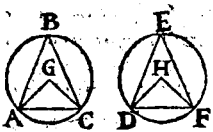
Quod autem linea EF, GH, per centrum transeant, ita demonstrabitur. Ducantur rectæ AE, AF, BE, BF, quæ inter se æquales erunt, ob æqualitatem circulorum. Quoniam igitur latera AE, EF, trianguli AEF, æqualia sunt lateribus BE, EF, trianguli BEF; & bases quoque AF, BF, æquales: a erunt anguli AEF, BEF, æquales. Rursus ducta recta AB, quæ secet EF, in K: quoniam latera AE, EK, trianguli AEK, æqualia sunt lateribus BE, EK, trianguli BEK; & anguli AEK, BEK, ostensi quoque æquales; b erunt & bases AK, BK, & anguli AKE, BKE, æquales; ideoq. recti. Quare cum EF, diuidat rectam AB, in circulo bifariam, & ad angulos rectos, transibit per centrum, ex corollario propos. 1. huius lib. Eadem ratione ostendetur GH, transire per centrum. Debent autem quatuor puncta A, B, C, D, in tali situ accipi, vt rectæ EF, GH, non in directum sibi occurrant, sed vt se mutuo secent. Quòd si quando contingat, rectas EF, GH, in directum esse constitutas, diuidenda erit recta intra circumferentiam comprehensa, bifariam: Punctum enim diuisionis erit centrum circuli: propterea quòd tunc recta illa est diameter circuli, quandoquidem per centrum transit, ex coroll. propos. 1. huius lib.

a 8. pri.

b 4. pri.

THEOR. 23. PROPOS. 26. XXV.

IN æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus A B C, DEF, quorum centra G, H, constituti sint primum ad centra anguli æquales A G C, DHF. Dico peripherias AC, D F, quibus insistunt, siue super quas ascenderunt, esse æquales. Sumantur enim in peripherijs ABC, DEF, duo puncta B, E, ad quæ rectæ ducantur AB, CB, DE, FE, connectanturq. rectæ AC, DF. Quoniam igitur
a 20.def anguli B, & E, dimidij sunt æqualium angulorum G, & H; erunt & ipsi æquales inter se. Quare ex definitione segmenta ABC, DEF, similia erunt. Et quia latera A G, GC, trianguli AGC, æqualia sunt lateribus D H, H F, trianguli DHF, propter circulorum æqualitatem; & anguli, quos continent, G, H, æquales, ex hypothesi; b erunt
b 4.pri. bases AC, DF, æquales. Cum igitur segmenta similia ABC, DEF, sint super lineas æquales AC, DF, c erunt ipsa
c 24.def inter se æqualia. Quare si à circulis æqualibus demantur, remanebunt & segmenta AC, DF, inter se æqualia; atque adeo peripheriæ AC, DF: Quod est propositum.

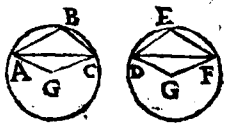
SINT deinde ad peripherias constituti duo anguli æquales B, & E; Dico rursus, peripherias AC, DF, super quas ascenderunt, esse æquales. Erunt enim, vt prius, segmenta ABC, DEF, similia. Cum igitur sint super æquales lineas AC, DF: (cum enim anguli G, H, æquales sint,
d 20.def d quod sint dupli angulorum æqualium B, & E; erunt, vt
c 24.def prius, rectæ AC, DF, æquales) c erunt ipsa inter se æqualia. Si igitur à circulis æqualibus detrahantur, remanebunt & segmenta AC, DF, æqualia. In æqualibus itaque circulis, æquales anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HAEC secunda pars breuius ita demonstrabitur. Quoniam anguli G, H, dupli sunt angulorum æqualium B, E, erunt ipsi inter se æquales. Quare vt ostensum est prius, peripheriæ AC, DF, super quas ascenderunt, æquales erunt.

IAM vero, si quando contingat, rectas AG, CG; DH, FH, non constituere angulos in centris supra bases AC, DF,

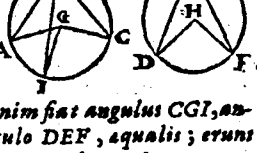
sed



se dſupra baſes ABC, DEF, vt ſubiecta hæ figuræ monſtrant. ita ſecunda pars huius propoſ. demonſtranda eſt. Quoniam ſpatia ad centra G, H, inſiſtentia arcubus AC, DF, æqualia inter ſe ſunt, cum ex ſcholio propoſ. 20. huius lib. duplæ ſint angulorum B, E, ad circumferentias; erunt etiam anguli AGC, DHF, reliqui quatuor rectorum, quibus tam ſpatium circa G, quam ſpatium circa H, æquale eſt, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. inter ſe æquales. Quare, vt prius oſtendemus, baſes AC, DF, triangulorum AGC, DHF, æquales eſſe, ideoq. ſegmenta ſimilia ABC, DEF, ob æqualitatem angulorum B, E, ſuper æquales baſes AC, DF, eſſe æqualia, &c.

HINC etiam fit, ſpatia æqualia in centris, inſiſtere arcubus æqualibus. Nam ſi ſpatia in centris G, H, inſiſtentia arcubus maioribus AC, DF, æqualia ſunt; erunt quoque, vt oſtendimus, anguli AGC, DHF, æquales. Igitur, vt in prima parte propoſitionis demonſtratum eſt, erunt & arcus AC, DF, maiores, & minores ABC, DEF, inter ſe æquales.

QVOD ſi dicti anguli fuerint inæquales, maior inſiſtet maiori peripheriæ, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, ſit angulus AGC, ad centrũ maior angulo DHF, ad centrum: Item angulus ABC, ad circumferentiam, maior angulo DEF, ad circumferentiam. Dico peripheriam AC,



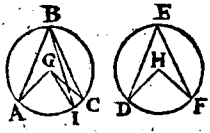
maiorem eſſe peripheria DF. Si enim fiat angulus CGI, angulo DHF, & angulus CBI, angulo DEF, æqualis; erunt vt oſtenſum eſt, peripheriæ CI, DF, æquales. At propterea AC, maior, quam DF.

PORRO propoſitio hæc, & tres proxime ſequentes intelligenda etiam ſunt in eodem circulo. Hoc eſt. In eodem circulo æquales anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, &c. vt ex demonſtratione huius propoſ. & ſequentium trium liquido conſtat. Eadem enim ſemper demonſtratio, qua duo-

bus, pluribusve circulis accommodatur, locum habet in uno eodemque circulo.

xxvj. THEOR. 24. PROPOS. 27.

IN æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.



IN circulis æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, H; insistant primum anguli ad centra AGC, & DHF, æqualibus peripherijs AC, DF. Dico angulos AGC, & DHF, æquales esse. Si enim non sunt æquales, sit angulus G, maior, fiatq. angulus AGI, æqualis angulo DHF. a Erunt igitur peripheriæ AI, DF, æquales. Cum igitur peripheria AC, æqualis ponatur peripheriæ DF, erunt peripheriæ AI, AC, inter se æquales, pars, & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli AGC, DHF, æquales.

a 26. ter

INSISTANT deinde eisdem peripherijs æqualibus AC, DF, anguli B, & E, ad peripherias; quos rursus dico æquales esse. Nam si alter, vt ABC, maior est; fiat angulo E, æqualis angulus ABI, b eruntq. peripheriæ AI, DF, æquales. Quare, vt prius, erunt peripheriæ AI, AC, æquales, pars & totum; quod est absurdum. Sunt ergo anguli ABC, DEF, æquales. In æqualibus igitur circulis, anguli, qui æqualibus peripherijs insistunt, &c. Quod demonstrandum erat.

b 26. ter

SCHOLIVM.

HAEC secunda pars ita quoque demonstrabitur, quando rectæ AG, CG; DH, FH, in centris angulos constituunt supra bases AC, DF. Quoniam c anguli ABC, & E, dimidij sunt angulorum AGC, & H, quos iam ostendimus esse æquales; erunt & ipsi inter se æquales.

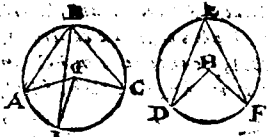
c 20. ter

EODEM modo spatia in centris G, H, insistentia ar-

cubus.

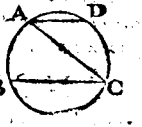
cubus ABC, DEF, aqualibus, aqualia erunt. Nam ablatis aqualibus ABC, DEF, ex circulis aqualibus; reliqui fient aquales arcus AIC, DF; ideoq. vt ostendimus, anguli AGC, DHF, aquales erunt: quibus ablatis ex spatijs circa centra G, H, qua aqualia sunt, cum quodlibet sit quatuor rectis aquale, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. reliqua erunt & spatia in centris G, H, insistentia arcubus ABC, DEF, aqualia.

SI vero peripheria fuerint inaquales, insistet maiori maior angulus, siue ad centrum, siue ad circumferentiam, quam minori. In figura enim scholij precedentis sit peripheria AC, maior, quam peripheria DF. Dico angulum AGC, maiorem esse angulo DHF, & angulum ABC, maiorem angulo DEF. Si enim fiat peripheria CI, aqualis peripheriæ DF, ducantur q. recta IG, IB, erunt, vt ostensum est, tam anguli ad centrum CGI, DHF, quam anguli ad circumferentiam CBI, DEF, aquales. Quare & angulus AGC, angulo DHF, & angulus ABC, angulo DEF, erit maior.



QVOD etiam de spatijs ad centra G, H, insistentibus arcubus ABC, DEF, intelligendum est. Nam eodem modo demonstrabimus spatium ad H, arcui DEF, insistens maius esse spatio ad G, quod arcui ABC, insistit, si arcus DEF, maior ponatur arcu ABC.

EX hac porro propositione colligemus, duas rectas lineas, qua in eodem circulo aquales arcus intercipiunt, se mutuo non secantes, esse parallelas. Et si sint parallela, ab ipsis arcus aquales intercipi. In circulo enim ABCD, recta AD, BC, intercipiant arcus aquales AB, DC. Dico AD, BC, esse parallelas. Ducta namque recta AC, cum arcus AB, DC, ponatur aquales, [a] erunt anguli ACB, CAD, ipsis insistentes, aquales; qui cum sint alterni, [b] erunt AD, BC, parallela.



[a] 27. ter
[b] 27. pri

SINT iam AD, BC, parallela. Dico arcus interceptos AB, DC, esse aquales. Cum enim sint parallela AD, BC,

ducta

ducta recta AC; erunt anguli alterni ACB, CAD, aquales; b *Ac proinde arcus AB, DC, quibus insistunt, æquales erunt.*

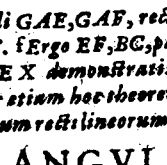
29.pri
b26.ter

VISVM est quoque hoc loco apponere sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile: videlicet.

LINEA recta, quæ ex medio puncto peripheriæ alicuius ducitur tangens circulum, parallela est rectæ lineæ, quæ peripheriam illam subtendit.

IN circulo ABC, cuius centrum D, ducantur ex A, puncto medio peripheria BAC, linea EF, tangens circulum. Dico EF, parallelam esse rectæ BC, arcum BAC, subtendenti. Ducta enim ex centro D, ad punctum contactus A, recta DA, secante rectam BC, in G, connexisq. rectis DB, DC, c *erunt anguli ADB, ADC, circumferentijs æqualibus AB, AC, insistentes, æquales: Sunt autem & latera BD, DG, trianguli BDG, lateribus CD, DG, trianguli CDG, æqualia, utrumque utrique.* d *Igitur & anguli ad G, æquales sunt super bases GB, GC, ac propterea recti. Igitur & AGB, AGC, illis deinceps recti sunt: Sunt autem & anguli GAE, GAF, recti,* c *quòd DA, perpendicularis sit ad EF.* f *Ergo EF, BC, parallelæ sunt. Quod est propositum.*

27.ter



d 4.pri.

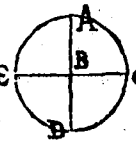
c18.pri
f28.pri

EX demonstratis in hac propos. & antecedenti, colligitur etiam hoc theorema, quod ad initium quoque triangulorum rectilineorum demonstranimus.

ANGVLVS rectus in centro insistit quadranti; acutus vero arcui quadrante minori; & obtusus arcui quadrante maiori. Et contra, angulus in centro quadranti insistens, rectus est; insistens vero

arcui

arcui quadrante minori, acutus; & arcui quadrante maiori, obtusus.



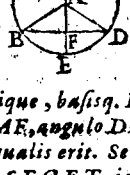
RECTVS angulus ABC, insistat arcui AC, in centro B, circuli ACDE. Dico arcū AC, quadrantem esse, &c. Productis enim rectis AB, CB, ad D, E, erunt quoque anguli ABE, CBD, recto ABC, deinceps, recti, ex defin. 10. lib. 1. necnon & angulus DBE: rectus, [a] cum æqualis sit recto angulo ABC, ad verticem. Omnes ergo quatuor anguli ad centrum B, æquales sunt, vtpote recti: ac propterea [b] arcus AC, CD, DE, EA, quibus insistunt, æquales erunt. Quilibet igitur eorum quadrans est. Et quoniam recta cum AB, in E, constituens angulum acutum, cadit in arcum AC: recta vero cum eadem AB, in B, continens angulum obtusum, cadit in arcum CD; liquido constat, angulum acutum insistere arcui quadrante minori, obtusum verò maiori. [a] 15. pri [b] 6. ter

SED insistat iam quadranti AC, angulus ABC, in centro B. Dico angulum ABC, esse rectum, &c. Productis enim rursum rectis AB, CB, ad D, E; quoniam tam CAE, quam ACD, & AED, semicirculus est, estq. AC, quadrans; erit tā AE, quàm CD, quadrans quoque, ac proinde & DE, in semicirculo AED, quadrans erit: Sunt ergo quatuor arcus AC, CD, DE, EA, æquales, [c] ac proinde anguli ad centrum B, illis insistentes, æquales erunt. Quare cum omnes quatuor sint quatuor rectis æquales, erit eorum quilibet rectus. Et quia recta cum AB, auferens minorem arcum quadrante AC, facit in centro B, cum AB, minorem angulum recto angulo ABC; recta vero cum eadem AB, auferens maiorem arcum quadrante AC, constituit in centro B, angulum recto angulo ABC, maiorem; perspicuum est, angulum minori arcui quadrante insistentem, esse acutum; maiori vero, obtusum. Quod est propositum. [c] 27. ter

PARI ratione & hoc theorema ex demonstratis elicitur, quod in sinubus etiam demonstrauimus.

RE-

RECTA linea è centro circuli ducta, secansq. aliam rectam non per centrum ductam bifariam, secabit & arcum, cui hæc recta subtenditur, bifariam. Et contra, si secet arcum bifariam, secabit & rectam ei subtensam bifariam.



EX centro A, circuli BCDE, recta egrediens AE, secet rectam BD, bifariam in F. Dico & arcum BED, in E, sectum esse bifariam, &c. Ductis enim rectis AB, AD; quoniam duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, vtrumque vtrique, baseq. BF, basi DF, æqualis ponitur; a *erit angulus BAE, angulo DAF, æqualis. Igitur* b *arcus BE, arcui DE, æqualis erit. Sectus ergo est arcus BD, in E, bifariam.*

a 8. pri.
b 26. ter

SECET iam recta AE, arcum BD, in E, bifariam. Dico rectam quoque BD, in F, bifariam esse sectam. Ductis enim rursum rectis AB, AD; quoniam arcus BE, DE, ponuntur æquales; c *erunt & anguli BAE, DAE, in centro æquales. Itaque quia duo latera AB, AF, duobus lateribus AD, AF, æqualia sunt, vtrumque vtrique, angulosq. continent æquales, vt ostendimus;* d *erunt quoque bases BF, DF, æquales: ac proinde recta BD, in F, secta est bifariam. Quod erat ostendendum.*

c 27. ter
d 4. pri.

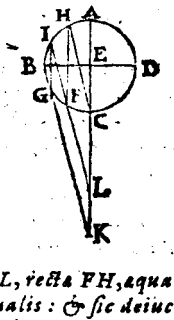
NEQVE vero omittenda hoc loco videtur eximia quædam proprietas circuli, quam Ioannes Baptista Benedictus ex Cardano lib. 16. cap. 1. de subtilitate desumptam demonstrat: Videlicet.

SI in circulo, ductis duabus diametris se se ad angulos rectos secantibus, altera earum producatur, eiq. ex vna parte quot-quot parallelæ agantur diuidentes vtrum-

que

que Quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremum punctum proximæ parallelæ recta ducatur conueniens cum diametro pruducta : Erit tota recta inter punctum concursus, & concauam peripheriam circuli, omnibus parallelis vnà cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis.

IN circulo ABCD, secent se ad rectos angulos diametri AC, BD, & AC, producatur versus C, quantumlibet. Diuiso autem Quadrante BC, in quotuis partes æquales CF, FG, GB, & Quadrante BA, in totidem, iungantur rectæ FH, GI, quæ ex scholio huius propos. 27. ipsi AC, parallelæ erunt, cum arcus æquales intercipiant. Ex B, per G, denique extendatur recta BG, occurrens AC, productæ in K. Dico rectam AK, æqualem esse omnibus parallelis AC, HF, IG, simul sumptis. Ductis enim rectis HC, IF, & productis, donec cum AK, conueniant; a quoniam anguli CHF, HFI, arcubus æqualibus CF, HI, insistentes, sunt æquales; b erunt rectæ HC, IL, parallelæ : Est autem & FH, ipsi CL, parallela. Parallelogrammum ergo est CHFL; c ac proinde recta CL, rectæ FH, æqualis. Eadem ratione erit KL, ipsi GI, æqualis : & sic deinceps, si sint plures. Addita ergo communi AC, fiet tota AK, omnibus AC, HF, IG, simul sumptis æqualis. Quod est propositum.



a 27. ter

b 27. pri

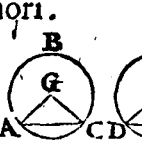
c 34. pri

THEOR. 25. PROPOS. 28. xxvij.

IN æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maio-

rem

rem quidem maiori, minorem autem minori.



IN circulis æqualibus A B C, DEF, quorum centra G, & H, sint rectæ æquales AC, DF. Dico maiorem peripheriam A B C, æqualem esse maiori DEF, & minorem AC, minori DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponuntur autem & bases AC, D F, æquales. Igitur [a] anguli G, & H, æquales erunt: Ac propterea peripheriæ A C, D F, quibus insistunt, [b] æquales erunt; quæ ablatæ ex totis æqualibus, relinquent etiam æquales ABC, DEF. In æqualibus ergo circulis æquales rectæ lineæ, &c. Quod erat demonstrandum.

a 8. pri.
b 26. ter

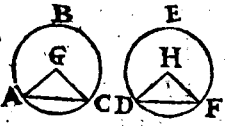
SCHOLIVM.

QVOD si fuerint lineæ inæquales in circulis æqualibus, auferet maior linea, maiorem peripheriam, quam minor, si loquamur de segmentis circuli minoribus semicirculo. Nã si de segmentis circuli maioribus fermo habeatur, maior linea auferet minorem peripheriam, quàm minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sit recta AC, maior, quam DF. Dico peripheriam AC, semicirculo minorem, maiorem esse peripheria DF: At peripheriam ABC, minorem peripheria DEF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF. Ponitur autem basis AC, maior basi DF. Igitur [c] angulus AGC, maior erit angulo DHF. Fiat angulus CGI, angulo DHF, æqualis; erit que propterea [d] peripheria CI, peripheriæ DF, æqualis; Ac proinde peripheria A I C, maior, quam peripheria D F: Ideoq. reliqua ABC, minor, quam reliqua DEF.

c 25. pri
d 26. ter

THEOR. 26. PROPOS. 29. xxviij.

IN æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt.

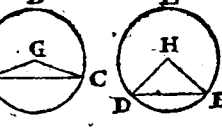


IN circulis eisdem æqualibus ponantur æquales peripheriæ ABC, DEF; Item AC, & DF. Dico rectas AC, DF, quæ eas subtendunt, esse æquales. Ductis enim lineis, vt prius, erunt latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia lateribus DH, HF, trianguli DHF; Sunt autem & anguli G, H, [a] æquales; quod æqualibus peripherijs AC, DF, insistant. Igitur [b] bases AC, DF, æquales erunt. In æqualibus ergo circulis, æquales peripherias, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 27. 3. [b] 4. pri.

SCHOLIVM.

SI autem fuerint peripheriæ inæquales, subtendet maiorem maior linea, quam minorem, si de segmentis semicirculo minoribus fiat sermo. Nam si de segmentis maioribus semicirculo loquamur, subtendet maiorem minor linea, quam minor. In circulis enim æqualibus ABC, DEF, quorum centra G, & H, sint peripheriæ semicirculo minores AC, DF; sitq. AC, maior, quam DF; Ac proinde ABC, minor quam DEF. Dico lineam AC, maiorem esse, quam DF. Ductis enim rectis AG, GC, DH, HF; erit angulus AGC, maior angulo DHF, ex scholio propos. 27. huius lib. Cum igitur latera AG, GC, trianguli AGC, æqualia sint lateribus DH, HF, trianguli DHF, [c] erit basis AC, maior basi DF, &c.



[c] 4. pri.

SVNT autem proximæ antecedentes quatuor propositiones 26. 27. 28. & 29. intelligenda etiam in eodem circulo, vt in scholio propos. 26. monuimus, quemadmodum constat ex demonstrationibus adductis. Eadem enim locum habent in vno eodemq. circulo.

ITAQVE eadem quatuor propositiones magis universales fient, si ita proponantur.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

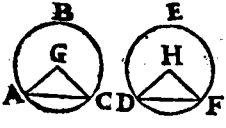
IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales rectæ lineæ æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori.

IN æqualibus circulis, vel eodem, æquales peripherias æquales rectæ lineæ subtendunt.

SED & sequentes propositiones demonstrare, non fuerit inutile.

I.

CIRCVLI, ē quibus æquales rectæ lineæ auferunt similes circumferentias, æquales sunt.



EX circulis ABC, DEF, rectæ lineæ æquales AC, DF, abscindant similes circumferentias ABC, DEF. Dico circulos ipsos æquales esse. Nam si segmenta ABC, DEF, similia sunt, erunt & reliqua segmenta AC, DF, similia, vt ad propos. 22. demonstrauimus. Rursus quia super rectas

æquales AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, les AC, DF, constituta sunt similia segmenta ABC, DEF, a ipsa inter se æqualia erunt. Eadem ratione æqualia erunt segmenta AC, DF, quæ similia sunt demonstrata. Toti ergo circuli æquales erunt. Simili modo, si rectæ æquales AC, DF, dicantur auferre similes circumferentias AC, DF, erunt ex ijs, quæ ad propos. 22. demonstrauimus, & segmenta ABC, DEF, similia. b Tam ergo illa, quam hæc inter se æqualia erunt: ac proinde & toti circuli æquales erunt inter se. Quod est propositum. a 24. ter b 24. ter

II.

EX circulis inæqualibus æquales rectæ lineæ circumferentias dissimiles auferunt.

IN eadem figura ponantur rectæ AC, DF, æquales, at circuli ABC, DEF, inæquales. Dico circumferentias ABC, DEF, dissimiles esse. Si enim similes essent, circuli ipsi, vt proxime demonstrauimus, essent æquales. Quod pugnat cum hypothesi. Dissimiles ergo sunt circumferentiæ ABC, DEF. Eadem ratione circumferentiæ AC, DF, erunt dissimiles. Quod erat ostendendum.

III.

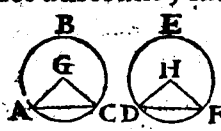
EX circulis inæqualibus, lineæ rectæ, quæ circumferentias similes auferunt, inæquales sunt.

IN eadem figura ponantur circuli inæquales, ac circumferentiæ ABC, DEF, similes. Dico rectas AC, DF, inæquales esse. Si enim dicantur esse æquales, erunt, ex primo theoremate, circuli æquales, quod est absurdum, cum ponantur inæquales. Sunt ergo rectæ AC, DF, inæquales. Eodem modo, si similes dicantur circumferentiæ AC, DF, demonstrabitur, rectas lineas AC, DF, inæquales esse.

IIII.

RECTAE lineæ, quæ ex quibuscun-

que circulis circumferentias ſimiles inæ-
les auferunt, inæquales ſunt.



IN eadem figura ponantur circumferentia ABC, DEF, ſimiles & inæquales. Dico rectas AC, DF, inæquales eſſe. Aut enim circuli æquales
28.ter. *ſunt, vel inæquales. Sint primum æquales. Si ergo recta AC, DE, dicuntur æquales, a erunt circumferentia ABC, DEF, ablata æquales, quod eſt contra hypotheſin. Non ergo æquales ſunt recta AC, DF. Sint deinde circuli inæquales. Igitur recta AC, DF, auferentes circumferentias ABC, DEF, ſimiles, inæquales ſunt, vt in tertio theoremate demonſtratum eſt. Non aliter oſtendemus, rectas AC, DF, inæquales eſſe, ſi circumferentia AC, DF, ponantur ſimiles, & inæquales.*

V.

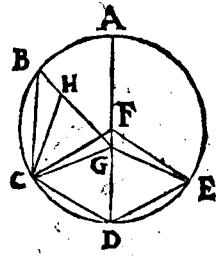
SI in diametro circuli præter centrum punctum ſumatur, ab eoq. in peripheriam duæ rectæ non in eaſdē partes cadētes efficiant ad diametrum angulos æquales, rectæ illæ lineæ æquales erunt, & arcus abſcindent æquales. Et ſi lineæ ſint æquales, conſtituent rectæ illæ ad diametrum angulos æquales, abſcindentq. æquales arcus. Si denique arcus æquales abſcindant, erunt rectæ illæ æquales, conſtituentq. ad diametrum angulos æquales.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, ſumatur in diametro AD, punctum G, præter centrum, conſtituanturque primum duo anguli æquales CGD, EGD. Dico tam rectas
13.pri *GC, GE, quam arcus CD, ED, æquales eſſe. Quoniam enim b tam duo anguli CGD, CGF, quàm duo EGD, EGF, duo-*

bus

C

bus rectis æquales sunt, si demantur æquales CGD, EGD; erunt & reliqui CGF, EGF, æquales. Ductis igitur rectis CF, EF, ad centrum, erunt duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia, angulique FGC, FGE, æqualibus lateribus oppositi æquales. Cum ergo reliquorum angulorum FCG, FEG, vterque sit recto minor; (Ducta enim recta CD, erit angulus FCD, in Isoscele FCD, acutus; ex 3. coroll. propos. 17. lib. 1. ac propterea à fortiori FCG, acutus erit. Eodemq. modo, ducta recta DE, angulus FEG, acutus erit,) erit ex ijs, quæ ad finem lib. 1. demonstrauimus, basis GC, basi GE, æqualis, & angulus CFG, angulo EFG; a ac proinde arcus CD, ED, æquales erunt. Constat ergo propositum. a 26. ter



DEINDE sint lineæ GC, GE, æquales. Dico & angulos CGD, EGD, æquales esse, & arcus CD, ED. Si enim lineæ GC, GE, sunt æquales, erunt duo latera GC, GF, æqualia duobus lateribus GE, GF: Est autem & basis FC, basi FE, æqualis. b Igitur anguli FGC, FGE, æquales erunt, ac proinde & ex duobus rectis reliqui CGD, EGD, erunt æquales. Rursus quia duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, æqualia sunt, baseq. æquales ponuntur GC, GE, c erunt & anguli CFD, EFD, æquales, d atque idcirco & arcus CD, ED, æquales erunt. Quod est propositum. b 8. pri. c 8. pri. d 26. ter

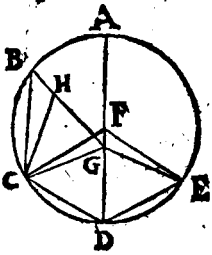
TERTIO sint arcus CD, ED, æquales. Dico & lineas GC, GE, & angulos CGD, EGD, esse æquales. Si enim arcus CD, ED, æquales sunt, e erunt & anguli CFD, EFD, æquales. Quare cum duo latera FC, FG, duobus lateribus FE, FG, sint æqualia, angulosq. æquales contineant; f erunt & bases GC, GE, æquales, & anguli FGC, FGE; ac proinde ex duobus rectis reliqui CGD, EGD. Quæ omnia demonstranda erant. e 27. ter f 4. pri.

HOC tamen theorema multo vniuersalius est Lemma 21. lib. 1. nostri Astrolabij.

V.

SI in diametro circuli præter centrum sumatur

tur punctum quodpiam, in quo ad easdē partes duo anguli æquales constituātur, insistent hi anguli æquales arcubus inæqualibus, maiorq. erit ille, q à minori portione diametri remotior est.



IN eadem figura proxima sint anguli æquales CGD, duo CGB. Dico arcum BC, arcu CD, maiorem esse. Ductis enim rectis BC, CD, a *quoniam recta GB, maior est, quam recta GD, abscindatur GH, ipsi GD, æqualis, iungaturq. recta CH. Quia igitur duo latera GH, GC, duobus laterib. GD,* b *GC, æqualia sunt, anguloq. continēt æquales; horum & bases CH, CD, æquales,* c *& angulus GHC, angulo GDC, æqualis. Est autem GDC, in Isoscele FCD, acutus,* d *ex 3. coroll. prop. 17. lib. 1. Igitur & GHC, acutus erit; ac proinde ex duobus rectis reliquus CHB, obtusus erit. Cum ergo;* e *duo anguli CHB, CBH, sint duobus rectis minores, erit CBH, acutus. Quare* d *latus BC, latere CH, maius erit. Est autem CH, recta ostensa ipsi CD, æqualis. Igitur recta BC, maior quoq; erit, quā CD; ac propterea ex scholio prop. 28. huius lib. arcus BC, arcu CD, maior erit. Quod erat ostendendū.*

a 7. ter.
b 4. pri.
c 17. pri
d 19. pri

PROBL. 4. PROPOS. 30.

xxix.

DATAM peripheriam bifariam secare.

SIT peripheria ABC, secanda bifariam. Ducatur recta subtendens AC, qua diuisa bifariam in D, erigatur perpendicularis DB, quæ peripheriam ABC, bifariam secabit in B. Ductis enim rectis AB, CB, erunt latera AD, DB, trianguli ADB, æqualia lateribus CD, DB, trianguli CDB: Sunt autem & anguli ad D, æquales, nempe recti. Igitur e & bases AB, CB, æquales erunt; Ac propterea f peripheriæ AB, CB, erunt æquales. Datam ergo peripheriam bifariam secuimus. Quod erat faciendum.

e 4. pri.
f 28. ter.

PRA-

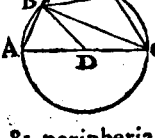
PRAXIS.

NON differt praxis diuidendi datam peripheriam bifariam à praxi diuidendi rectam lineam bifariam, quam ad propos. 10. lib. 1. tradidimus. Si namque quicunque arcus proponatur, vt ABC, intelligenda semper est recta linea eum subtendens AC, etiamsi ducta non sit; atque ex punctis A, & C, describendi arcus eodem interuallo se mutuo intersecantes supra & infra puncta A, & C, &c. non secus, ac si dicta recta AC, secanda esset bifariam. Recta enim diuidens rectam AC, bifariam, secabit quoque arcum datum bifariam.

THEOR. 27. PROPOS. 31. xxx.

IN circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autem in maiore segmento, minor recto: qui vero in minore segmento, maior est recto. Et insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto.

CIRCVLI enim ABC, cuius centrum D, diameter sit AC, constituaturq. in semicirculo angulus ABC, existetq. angulus BAC, in maiori segmento CAB. Constituatur quoq. in CEB, minori segmento angulus BEC. Dico angulum ABC, in semicirculo rectum esse; angulum vero BAC, in maiore segmento, minorem recto: & angulum BEC, in minori segmento, maiorem recto. Item angulum maioris segmenti comprehensum, recta BC, & peripheria BAC, esse recto maiorem. At angulum minoris segmenti comprehensum recta BC, & peripheria BEC, recto minorem. Ducatur enim recta BD, ad centrum, & extendatur AB, in F. Quoniam igitur rectæ DA, DB,

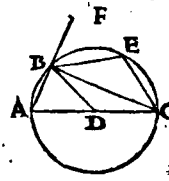


a 5.pri. DB, æquales sunt, a erit angulus DBA, angulo DAB, æqualis. Eadem ratione erit angulus DBC, angulo DCB, æqualis, ideoque totus angulus ABC, duobus angulis BAC,
b 32.pri BCA, æqualis erit. b Est autem & angulus FBC, externus eisdem duobus internis angulis BAC, BCA, in triangulo ABC, æqualis. Quare æquales erunt inter se anguli ABC, FBC; ac propterea vterque rectus. Rectus igitur est angulus ABC; quod est primum.

c 17.pri QVONIAM vero in triangulo ABC, c duo anguli ABC, & BAC, sunt duobus rectis minores; Et est angulus ABC, ostensus rectus: Erit angulus BAC, in segmento maiori, recto minor; quod est secundum.

d 22.ter RVRSVS quia in quadrilatero ABEC, intra circulum descripto, d duo anguli oppositi BAC, & BEC, sunt duobus rectis æquales; Et angulus BAC, ostensus est recto minor: Erit BEC, angulus in segmento minore, recto maior; quod est tertium.

SATIS autem est, demonstrasse, vnum angulum in semicirculo, nimirum ABC, rectum esse: & in maiori segmento, qualis est BAC, recto minorem: ac denique in segmento minori, cuiusmodi est BEC, maiorem recto. Cum enim omnes anguli in eodem segmento sint inter se æquales, perspicuum est, si vnus angulus in semicirculo rectus sit, omnes in eodem semicirculo esse rectos: Et si in maiore segmento vnus sit recto minor, omnes in eodem segmento esse recto minores: Et si denique in minore segmento vnus sit maior recto, omnes in eodem segmento maiores esse recto. Hoc idcirco dixerim: quia Euclides non probat absolute, quemcumque angulum in segmento maiore, BAC, esse recto minorem, vt constat, si alius angulus in eo segmento constitueretur; cum is non contineretur à diametro, quemadmodum angulus BAC, Quare quicunque alius effendetur esse etiam recto minor, quia c *æqualis est angulo BAC, in eodem segmento maiore, qui recto minor est ostensus ab Euclide.*



c 21.ter

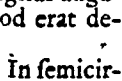
AMPLIVS cum angulus rectus ABC, pars sit an-

guli

guli segmenti maioris BAC, qui comprehenditur recta BC, & peripheria BAC; erit angulus segmenti maioris, recto maior, quod est quartum.

POSTREMO, cum angulus segmenti minoris, comprehensus recta BC, & peripheria BEC, pars sit quoque anguli recti FBC; Erit angulus segmenti minoris, recto minor; quod est quintum. In circulo igitur angulus, qui in semicirculo, rectus est, &c. Quod erat demonstrandum.

ALIA demonstratio huius propositionis. In semicirculo, cuius diameter AC, & centrum D, sit angulus ABC, quem dico esse rectum. Ducta enim rectæ BD, a erũt anguli DBA, DAB, æquales, quod rectæ DA, DB, æquales sint. Cum igitur angulus BDC, externus b æqualis sit duobus angulis internis DBA, DAB, in triangulo ABD; Erit angulus BDC, duplus anguli DBA. Eodem modo erit angulus ADB, duplus anguli DBC, atque adeo duo anguli ad D, dupli erunt totius anguli ABC. Cum igitur c anguli ad D, sint duobus rectis æquales; erit angulus ABC, eorum dimidium, rectus: quod est primum.



a 5. pri.

b 32. pri

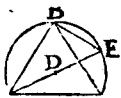
c 13 pri

VEL sic. Quoniam d angulus DAB, angulo DBA, & angulus DCB, angulo DBC, æqualis est; erunt duo anguli A, C, angulo ABC, æquales in triangulo ABC: ac proinde angulus ABC, dimidium erit trium angulorum A, C, & ABC, eiusdem trianguli. Quocirca e cum tres anguli in triangulo ABC, sint æquales duobus rectis; erit ABC, dimidium duorum rectorum, atq; idcirco rectus.

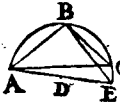
d 5. pri.

e 32. pri

SIT rursus in segmento maiori, cuius centrum D, angulus ABC, quem dico esse recto minorem. Ducta enim diametro AE, & coniuncta recta BE; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est. Quare angulus ABC, pars recti, recto minor erit: quod est secundum: Atque hæc demonstratio in omnem angulum in minori segmento quadrat; quod de superiori demonstratione dici non poterat, vt ibidem monuimus.

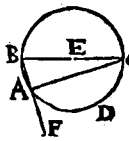


SIT iterum in segmento minori, cuius centrum D.



angulus ABC, quem dico esse recto maiorem. Ducta enim diametro A E, occurrens peripheriæ productę in E, & coniuncta recta B E; erit angulus ABE, in semicirculo rectus, vt demonstratum est; qui cum sit pars anguli ABC, erit angulus ABC, recto maior: quod est tertium.

I A M vero proponatur segmentum maius A B C, & segmentum minus ADC, quorum centrum E. Dico angulum CAB, segmenti maioris, qui videlicet constituitur à recta CA, & peripheria ABC, esse recto maiorem; At angulum C A D, segmenti minoris, qui fit à recta eadem C A, & peripheria CADC, recto minorem. Ducta enim diametro C B, & recta BAF, cadet eius segmentum B A, duo puncta B, A, coniungens, [a] intra circulum, reliqua vero pars AF, extra circulum; eritq. angulus BAC, in semicirculo rectus, atque adeo ei deinceps FAC, rectus quoque. Cum igitur angulus rectilineus rectus BAC, sit pars anguli CAB, segmenti maioris, qui nimirum sub recta CA, & peripheria ABC, continetur; & angulus C A D, segmenti minoris, contentus videlicet sub recta C A, & peripheria ADC, pars quoque anguli recti FAC; constat vtrumque.



[a] 2. ter.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, quod angulus trianguli, qui reliquis duobus æqualis existit, rectus est: eo quod illi contiguus (qui producto latere extra triangulum fit) eisdem sit æqualis. Quod quidem constat ex priore demonstratione. Vel eo quod dimidium sit trium angulorum trianguli, *b* qui duobus rectis æquiualent. Quod ex posteriore demonstratione manifestum est.

EX CAMPANO.

EX hac propositione perspicuum quoque est, non valere duas illas argumentationes, quas impugnauimus ad propos. 16. huius lib. quarum vna est.

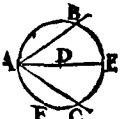
TRAN-

TRANSITVR a maiore ad minus, & per omnia media; ergo per æquale.

ALTERA vero est eiusmodi.

CONTINGIT reperire maius, & minus eodem; Igitur continget reperire æquale.

IN circulo enim ABC, cuius centrum D, & diameter AE, ducatur recta AB, [a]*Erit angulus ABE segmenti maioris, recto maior. Quare si AB, moueatur versus AE, circa A, punctum fixum, faciet semper cum peripheria angulum recto maiorem, donec ad diametrum AE, perueneriat,* [b]*vbi faciet angulum semicirculi, recto minorem. Quod si vlterius moueatur ad AC,* [c] *faciet à fortiori angulum ACF, segmenti minoris, recto minorem. Transitur ergo ab angulo segmenti maioris, qui recto maior est, ad angulum semicirculi, vel etiam segmenti minoris, quorum vterque recto minor est, non tamen per angulum recto aqualem. Cum igitur per omnes medios angulos fiat transitus, perspicuum est, vitiosas esse praditas consequentias.*



a 31. tert
b 16. tert
c 31. tert

SCHOLIVM.

MANIFESTVM quoque est conuersum huius theorematis: hoc est.

SEGMENTVM circuli, in quo angulus constitutus est rectus, est semicirculus: in quo vero angulus est acutus, est segmentum maius: & in quo angulus est obtusus, est segmentum minus. Et segmentum cuius angulus recto est maior, est semicirculo maius; cuius vero angulus est

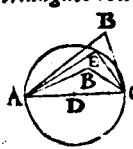
recto

recto minor, est vel semicirculus, vel semicirculo minus.

NAM angulo existente recto, si segmentum non sit semicirculus, erit vel maius, & sic angulus erit acutus; vel minus, & sic angulus in eo obtusus erit: quorum vtrumque pugnat cum hypothesi. Rursus angulo existente acuto, si segmentum non sit semicirculo maius, erit vel semicirculus, & sic angulus in eo erit rectus; vel minus, & sic angulus in eo erit obtusus: quorum vtrumque cum hypothesi etiam pugnat. Denique angulo existente obtuso, si segmentum non sit minus semicirculo, erit vel semicirculus, atque ita angulus in eo rectus erit; vel maius, atq; ita angulus in eo acutus erit: quod similiter hypothesi contrariū est. Praterea, quando segmenti angulus est recto maior, si segmentū non sit maius semicirculo, erit vel semicirculus vel semicirculo minus, & sic eius angulus recto erit minor, quod non ponitur. At quando angulus segmenti est recto minor, si segmentū non sit semicirculus, aut semicirculo minus, erit maius, atque ita eius angulus recto quoq; maior erit. quod hypothesi aduersatur QVIN & hoc theorema verum est; scilicet.

SI angulo recto linea recta subtensa, hoc est, si in triangulo rectangulo latus recto angulo oppositum, bifariam secetur, & ex puncto diuisionis circa illam rectam, vel latus, circulus describatur; transibit necessario circulus ille per angulum rectum.

ANGVLO enim recto ABC, subtensa recta AC, vel in triangulo rectāgulo ABC, latus AC, recto angulo B, oppositū bifariā secetur in D, puncto, ex quo ad interuallum D A, vel DC, circulus describatur AEC, quē dico transire per B. Si. n. transeat citra B, vel vltra; ductis rectis AE, CE, ita vt rectas AB, AC, non secent, sed vel intra eas cadant, vel extra; erit [2] *angulus AEC,*

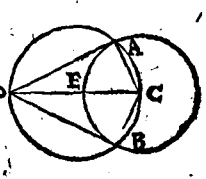


[2] 31. 1. ter

rectus

rectus quoque. Quare anguli recti B, & E, æquales erunt; quod est absurdum: cum angulus E, sit necessario, a vel maior, vel minor angulo B. Transit igitur circulus per punctum B: quod est propositum. a 21. pri

EX ijs, quæ in priore parte huius propos. demonstrata sunt, nullo negotio ex puncto extra circulum dato ducemus duas rectas ad vtramque partem rectæ ex eodem puncto per centrum circuli ductæ, quæ circulum tangant. Id quod ad propos. 17. huius lib. polliciti sumus.



SIT enim circulus AB, cuius centrum C, & punctum D, extra ipsum. Ducta recta DC, ex dato puncto ad centrum, eaq. diuisa bifariam in E, describatur ex E, ad interuallum EC, vel ED, circulus ACBD, secans datum circulum in punctis A, B, tangunturque rectæ DA, DB. Dico vtramque circulum tangere in A, & B. Ductis enim rectis AC, BC, b *erit vterque angulus A, & B, in semicirculo rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. recta DA, circulum AB, tanget in A; & recta DB, eundem tanget in B: quandoquidem tam illa perpendicularis est ad extremitatem semidiametri AC, quàm hæc ad extremitatem semidiametri CB.* b 31. ter

SED & hoc theorema non inuenundum ex Pappo Alexandrino demonstrabimus hoc loco.

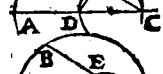
SI per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusque circuli centrum recta eijciatur, à puncto verò, vbi hæc recta à posteriori circulo secatur, ducatur recta vtrunq; : secabitur eius portio intra priorẽ circulũ à circumferentiâ posterioris bifariam.

SIT circulus ABC, per cuius centrum D, describatur alius circulus DEF. & per horum circulorum centra ducatur recta AF; ac denique ex puncto F, vbi circulus DEF,

rectam

rectam AF, interſecat, ducatur recta FB, ſecans circumferentiam in B, E, G. Dico BE, GE, eſſe æquales. Ducta enim recta
a 31.ter DE, a erit angulus DEF, in ſemicirculo DEF, rectus. Igitur b recta DE, rectam
b 3.ter. BG, ſecat bifariam.

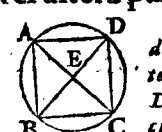
QVOD ſi poſterior circulus tranſeat per punctum C, vt in ſecunda figura; erit
c 31.ter c rurſum angulus DEC, in ſemicirculo
d 3.ter. DEC, rectus; ac d propterea BC, in E, ſecabitur bifariam.



SI denique poſterior circulus totus ſit intra priorem, vt
e 31.ter in tertia figura; erit iterum e angulus DEF, in ſemicirculo
f 3. ter. DEF, rectus. Quare f recta DE, rectam BG, bifariam ſecabit. Quod erat oſtendendum.

FACILE etiam aliud hoc theorema demonſtrabitur.

QVADRILATERVM in circulo deſcriptum, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum, hoc eſt, vel quadratum, vel altera parte longius.



IN circulo ABCD, deſcriptum ſit quadrilaterum ABCD, cuius duo oppoſita latera AD, BC, parallela ſint, & æqualia. Dico ipſum eſſe parallelogrammum, & rectangulum. Cum enim recta AD, BC, pa-
g 33.pri rallela ſint, & æquales, g erunt quoque AB, DC, parallelæ, & æquales. Parallelogrammum ergo eſt ABCD. Quia ve-
h 28.ter ro h & arcus AD, arcui BC, ob rectas æquales AD, BC, & arcus AB, arcui DC, ob æquales rectas AB, DC, æqualis eſt; erit totus arcus BAD, toti arcui BCD, & totus arcus ADC, toti arcui ABC, æqualis; ac proinde, ductis rectis BD, AC,
i 31.ter ſemicirculi erunt BAD, BCD, ADC, ABC. Quare i anguli quadrilateri recti erunt. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 28. PROPOS. 32. xxxj.

SI circulum tetigerit aliqua recta linea, à contactu autem producatur quędam recta linea circulum secans: Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis.

TANGAT recta AB, circulum CDE, in C, puncto, à quo ducatur recta CE, diuidens circulum in duo segmenta, in quibus fiant anguli CGE, CDE. Dico angulum ACE, æqualem esse angulo CGE, in alterno segmento; & angulum BCE, angulo CDE, in alterno quoque segmento. Transeat enim primum, vt in prio re figura, recta CE, per centrum. a Erit igitur vterque angulus ACE, BCE, rectus: b Sunt autem & anguli CGE, CDE, in semicirculis recti. Igitur angulus ACE, angulo CGE; & angulus BCE, angulo CDE, æqualis est.

a 18. ter

b 31. ter

NON transeat iam CE, recta per centrum, vt in figura posteriore. Ducta igitur recta CF, per centrum, connectatur recta EF: c e ritq. CF, perpendicularis ad AB, d & angulus CEF, rectus; ac propterea reliqui anguli ECF, EFC, æquales erunt vni recto, vt angulo recto ACF. Dempto ergo communi angulo ECF, erit reliquus ACE, reliquo CFE, æqualis: e Est autem angulo CFE, æqualis quoque angulus CGE, cum vterq. sit in segmento CGE. Quare angulus ACE, angulo CGE, æqualis erit. Quoniam vero in quadrilatero CDEG, duo f anguli CDE, CGE, duobus sunt rectis æquales: g Sunt autem & duo anguli ACE, BCE, duobus rectis æquales; si auferantur æquales anguli ACE, CGE, remanebit angulus BCE, angulo CDE, æqualis. Si circulum igitur tetigerit aliqua recta linea, à contactu aũt, &c. Quod erat ostendendum,

c 18. ter

d 31. ter

e 21. ter

f 22. ter

g 13. pri

SCHO-

SCHOLIVM.

POTEST theorema hoc conuerti hoc modo.

SI linea recta ducta ad extremitatem lineæ circulum secantis fecerit cum ipsa angulos æquales ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis; Linea ducta circulum tanget.

IN eadem figura priore transeat primum recta CE, per centrum, secans circulum CDE, & ducatur recta AB, per C, faciens angulum ACE, æqualem angulo CGE. Dico AB, a 31. ter *tangere circulum. Quoniam* a *angulus CGE, rectus est, erit & angulus ACE, illi æqualis, rectus. Quare per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget. Iam vero CE, non transeat per centrum, construatur q. figura posterior, vt supra. Quoniam igitur angulus ACE, æqualis ponitur angu-*
b 21. ter *lo CGE, in alterno segmento maiore,* b *& hic est æqualis angulo CFE; erit & angulus ACE, æqualis angulo GFE. Addito ergo cõmuni angulo ECF, erit angulus ACF, æqua-*
c 32. ter *lis duobus angulis EFC, ECF: Atqui anguli EFC, ECF, æ-*
d 32. pri *quales sunt vni recto; quod* c *angulus CEF, rectus sit in semicirculo, & tres anguli in triangulo CEF,* d *æquales sint duobus rectis. Angulus igitur ACF, rectus quoque erit; ideoq, per coroll. propos. 16. huius lib. AB, circulum tanget.*

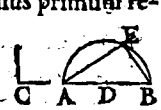
EODEM modo, si angulus BCE, æqualis fuerit angu-
e 13. pri *lo CDE, in alterno segmento minori, ostendetur recta AB,* f 22. ter *tangere circulum. Cum enim* e *anguli BCE, ACE, duobus sint rectis æquales:* f *Item duo anguli CDE, CGE, duobus rectis æquales; si demantur æquales BCE, CDE, remanebunt anguli ACE, CGE, æquales. Quare, vt demonstratum iam est, recta AB, circulum tanget.*

xxxij. PROBL. 5. PROPOS. 33.

SVPER data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

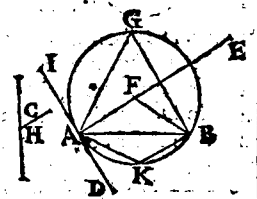
RE-

RECTA data sit A B, & datus angulus primum rectus C. Oportet igitur super A B, segmentum describere, in quo angulus existés sit æqualis angulo recto dato C. Diuisa A B, Bifariam in D, describatur centro D, interuallo autem D A, vel D B, semicirculus AEB; factumque erit, quod proponitur. Nam [a] angulus A E B, in descripto semicirculo rectus est, ideoque æqualis angulo C, recto.



[a] 31. tertij.

SIT deinde angulus datus acutus C. Ad punctum A, fiat angulus D A B, æqualis angulo C, acuto; & agatur ad D A, perpendicularis A E, quæ cadet supra A B. Fiat deinde angulo F A E, æqualis angulus F B A, secetque B F, rectam A E, in F. [b] Erunt igitur rectæ F A, F B, æquales. Quare si centro F, & interuallo F A, circulus describatur A G B, transibit is per B. Dico igitur angulum in segmento A G B, quod descriptum est super A B, esse æqualé angulo C. Fiat enim angulus in dicto segmento A G B. Quia igitur A E, per centrum F, transit, & ei perpendicularis est D A, tanget D A, recta circulū in A, per coroll. propos. 16. huius lib. Quapropter [c] angulus D A B, hoc est, angulus datus C, æqualis erit angulo G, in segmento alterno A G B.



[b] 6. primi.

[c] 32. tertij.

SIT tertio angulus datus H, obtusus. Fiat rursus angulo H, æqualis angulus I A B, & agatur ad I A, perpendicularis A E, quæ supra A B, cadet. Reliqua omnia fiant, vt prius, descriptumque erit super A B, segmentum A K B, in quo angulus K, æqualis est angulo dato obtuso H. Nam angulus I A B, hoc est, angulus datus H, [d] æqualis est angulo K, in alterno segmento A K B. Eadem enim est demonstratio. Itaque super data recta linea descripsimus segmentum, &c. Quod efficiendum erat.

[d] 32. tertij.

PROBL. 6. PROPOS. 34. xxxiij.

A DATO circulo segmentum abscin-

dere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DATVS circulus sit ABC, à quo auferre oporteat segmentum, in quo angulus existens æqualis sit dato angulo D. [a] Ducatur recta EF, tangés circulum in A. Fiat deinde angulus FAB, æqualis angulo dato D. Dico igitur angulum ACB, in segmento ablato ACB, æqualem esse dato angulo D. Est enim [b] angulus FAB, æqualis angulo C in alterno segmento ACB. Cum ergo angulo dato D, factus sit æqualis angulus FAB, erit quoque angulus C, angulo D, æqualis. A dato ergo circulo abscidimus segmentum ACB, &c. Quod erat faciendum.

a 17. *tertij*.

b 32. *tertij*.

xxxiiij.

THEOR. 29. PROPOS. 35.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint, rectãgulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo.

IN circulo ACBD, secent se mutuo rectæ AB, CD, in E. Dico rectangulum comprehensum sub segmentis AE, EB, æquale esse rectangulo comprehenso sub segmentis CE, ED. Aut enim vtraque linea transit per centrum, aut vna tantũ, aut neutra. Trãseat primũ vtraque per centrũ. Quoniam igitur omnia quatuor segmẽta inter se æqualia sunt, perspicuum est, rectangulum comprehensum sub duobus vnius lineæ æquale esse ei, quod sub duobus alterius lineæ comprehenditur, rectangulo, ex ijs, quæ ad initium lib. 2. scripsimus.

TRANSEAT deinde CD, sola per centrum F, diuidatque primum rectam AB, bifariam, [c] ac propterea ad angulos rectos, coniungaturque recta BF. Quoniam

c 3. *tertij*.

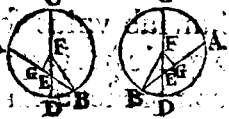
igitur

igitur CD, diuisa est per æqualia in F, & per inæqualia in E, [a] erit rectangulum sub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ EF, æquale quadrato rectę FD, ideoque quadrato rectæ FB, cum rectæ FD, FB, sint æquales: Est autem quadratum rectæ FB, [b] æquale quadratis rectarum FE, EB. Igitur rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ EF, æquale quoque erit quadratis rectarum FE, EB. Quare ablato communi quadrato rectæ FE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale quadrato rectæ EB, hoc est, rectangulo sub AE, EB, cũ AE, EB, rectæ sint æquales: ac proinde rectangulum sub eis comprehensum, sit quadratum, ex iis, quæ ad definitionem 1. lib. 2. scripsimus.

a 5. sec.

b 47. primi.

DIVIDAT iam CD, transiens per centrum rectam AB, non bifariam. Secetur ergo AB, bifariam in G, ducanturque rectæ FG, FB, [c] erit q. FG, perpendicularis ad AB. Quoniam vero rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ FE, [d] æquale est quadrato rectæ FD, hoc est, quadrato rectæ FB. Est autem quadratum rectæ FE, [e] æquale quadratis rectarũ FG, GE, & quadratum rectæ FB, æquale quadratis rectarum FG, GB; erit quoque rectangulum sub CE, ED, vna cum quadratis rectarum FG, GE, æquale quadratis rectarum FG, GB. Dempto ergo cõmũni quadrato rectæ FG, remanebit rectangulum sub CE, ED, vna cũ quadrato rectæ GE, æquale quadrato rectæ GB. Atqui etiam rectangulum sub AE, EB, vna cum quadrato rectę GE, [f] æquale est eidem quadrato rectæ GB: propterea quod recta AB, secta est bifariam in G, & non bifariam in E. Igitur rectangulum sub CE, ED, vna cum quadrato rectæ GE, æquale est rectangulo sub AE, EB, vna cum quadrato eiusdem rectæ GE. Quare ablato cõmuni quadrato rectæ GE, remanebit rectangulum sub CE, ED, æquale rectangulo sub AE, EB. quod est propositum.



c 3. tertij.

d 5. secũdi.

e 47. primi.

f 5. secũdi.

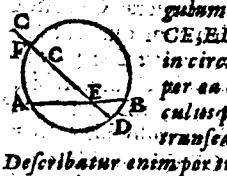
TERTIO. neutra per centrum transeat, siue vna illarum bifariam diuidatur, siue neutra. Ducatur per centrum F, & punctum sectionis E, recta GH. Quoniam itaque ostensum est, rectangulum sub AE, EB, æquale esse rectangulo sub GE, EH, siue AB, diuidatur in bifariam, siue non: Item rectangulum sub CE, ED, æquale esse quoque eidem rectangulo sub GE, EH, siue CD, secta sit bifariam, siue non; Erit rectangulũ sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED, quod est propositum. Si in circulo igitur duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

CONVERTI poterit theorema istud hoc modo.

SI duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub vnius segmentis comprehensum, æquale sit ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo describi poterit per quatuor illarum puncta extrema circulus: hoc est, circulus per quelibet tria puncta earum extrema descriptus, per quartum quoque punctum transibit.

SECENTES se mutuo rectæ AB, CD, in E, sitque rectangulum sub AE, EB, æquale rectangulo sub CE, ED. Dico quatuor puncta A, D, B, C, in circumferentiam circuli cadere, hoc est, per ea circulum posse describi: nam vt circulus per tria puncta A, D, B, descriptus, transeat necessario per punctum etiam C.



Describatur enim per tria puncta A, D, & B, circulus aliquis; (quo autem modo id fiat, ostendemus ad 5. propos. lib. 4.) qui si non transeat per C, transibit autem vel citra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub FE, ED, [a] *æquale est*

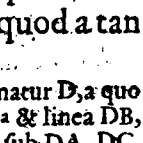
[a] 35. tertij.

rectangulo sub AE, EB; & rectangulum sub CE, ED, ponitur quoque æquale eidem rectangulo sub AE, EB; Erunt rectangula sub CE, ED, & sub FE, ED, æqualia, pars & totum; quod est absurdum. Transibit igitur circulus per punctum C. quod erat propositum.

THEOR. 30. PROPOS. 36. xxxv.

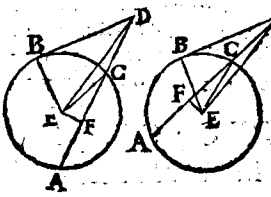
SI extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duę rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera vero tangat: Quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod a tangente describitur, quadrato.

EXTRA circulum ABC, punctum sumatur D, a quo linea ducatur D A, secans circulum in C, [a] & linea DB, circulum tangens in B. Dico rectangulum sub DA, DC, æquale esse quadrato rectæ D B. Transeat enim primum recta D A, per centrum E, & iungatur recta E B, [b] quæ perpendicularis erit ad DB. Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in E, & ei addita in rectum & continuum C D, [c] erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EC, hoc est, cum quadrato recte EB, æquale quadrato rectæ D E: Est autem quadratum rectæ D E, [d] æquale quadratis rectarum EB, BD. Quare rectangulum sub DA, DC, vna cũ quadrato rectæ EB, æquale erit quadratis rectarum D B, BE. Ablato igitur communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulum sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale. Quod est propositum.



NON transeat iam DA, secans per centrum E. Diuisa ergo A C, bifariam in F, ducantur rectæ EB, EC, ED, EF; [e] eritque EB, ad BD, perpendicularis; [f] & EF, ad AC.

[a] 17. tertij.
[b] 18. tertij.
[c] 6. secundi.
[d] 47. primi.
[e] 18. tertij.
[f] 3. tertij.

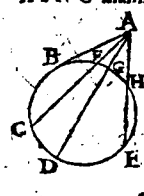


Quoniam igitur CA, diuisa est per æqualia in F, & ei addita recta CD, [a] erit rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ CF, æquale quadrato rectæ DF. Addito igitur cõi quadrato rectæ FE, erit rectangulum sub DA, DC, vna cum quadratis rectarum CF, FE, æquale quadratis rectarum DF, FE: Est autem quadratis rectarum CF, FE, [b] æquale quadratum rectæ EC, ideoque & quadratum rectæ EB; Et [c] quadratis rectarum DF, FE, æquale est quadratum rectæ DE. Quare rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale erit quadrato rectæ DE. Cum igitur quadratum rectæ DE, [d] æquale sit quadratis rectarum DB, BE; erit & rectangulũ sub DA, DC, vna cum quadrato rectæ EB, æquale quadratis rectarum DB, BE. Ablato ergo communi quadrato rectæ BE, remanebit rectangulũ sub DA, DC, quadrato rectæ DB, æquale: quod est propositum. Si igitur extra circulũ sumatur pũctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandũ.

[a] 6. secũdi.
[b] 47. primi.
[c] 47. primi.
[d] 47. primi.

COROLLARIVM. I.

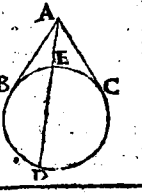
HINC manifestum est, si à puncto quouis extra circulum assumpto plurimæ lineæ rectæ circulũ secãtes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis, & partibus exterioribus, inter se esse æqualia. Vt si ex A, ducantur rectæ AC, AD, AE, secantes circulum in F, G, H, erunt rectangula sub AC, AF; Item sub AD, AG; & sub AE, AH, æqualia inter se. Nam ducta AB, tangente circulum, e erunt quadrato rectæ AB, æqualia singula illa rectangula; quare & inter se omnia æqualia erunt.



[e] 36. tertij.

COROLLARIVM. II.

CONSTAT etiam, duas rectas ab eodem puncto ductas, quæ circulũ tangant, inter se esse æquales. Ducantur enim ex A, rectæ AB, AC, tangentes circulum; quas dico esse æquales inter se. Ducta enim recta AD, quæ circulum secet in E, erit tam quadratum rectæ AB, quã quadratum rectæ AC, æquale rectangulo sub AD, AE. Quare quadrata rectarum AB, AC, inter se æqualia erunt, ac propterea rectæ AB, AC, æquales quoque erunt.

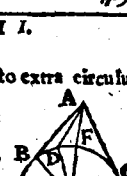


[f] 36. tertij.

CO-

COROLLARIVM. III.

PERSPICVVM quoque est, ab eodem puncto extra circulum assumpto, duci tantum posse duas lineas, quæ circulũ tangant. Si enim præter duas AB, AC, duci possit tertia AD, circulum eundem tangẽs; ductis rectis EB, ED, ex centro E, a erunt anguli ABE, ADE, recti, ideo que æquales; quod est absurdum. Nam si ducatur recta AE, b erit angulus ADE, maior angulo ABE.



a 18. tertij.
b 21. primi.

ALITER. Si tertia AD, circulum etiam tãgat; erunt duæ tangentes AB, AD, ęquales, vt ostensum est; quod est absurdum. Ducta namque recta AE. ad centrum E, quæ circulũ secet in F, c erit AD, cũ sit propinquior minimę AF, minor, quã AB, quæ a minima AF, remotior est. Vel sic. Si AB, AD. sunt æquales; additis æqualibus EB, ED, erunt quoque AB, BE, ipsis AD, DE, æquales quod est absurdum. d Sunt enim maiores AB, BE. Solũ igitur duæ rectæ ducentur a puncto A, quæ circulum tangant. Quod est propositum.

c 8. tertij.
d 21. primi.

COROLLARIVM III.

ILLVD denique constat etiam, si duæ rectæ æquales ex puncto quopiam in conuexam peripheriam incidant, & earum vna circulum tangat, alteram quoque circulum tangere. Vt si duæ rectæ AB, AC, in antecedente figura sint æquales, & AC, tangat circulum in C, tanget quoque AB, eundem circulum in B. Si enim non tangat, ducatur AD. tangens, (semper enim duæ tangentes ab eodem puncto duci possunt, vt constat ex scholio propos. 31. huius lib.) eruntque ex 2. coroll. AC, AD. æquales. Cum ergo & AB, ipsi AC, æqualis ponatur, ducentur tres rectæ æquales AB, AC, AD, quod est absurdum. e Duæ enim tantum duci possunt.

e 8. tertij.

ALITER. Ponantur in figura sequentis propositi duæ rectæ æquales DB, DF, & DB, circulum tangat, in B. Dico & DF, eundem tangere in F. Ductis enim rectis EB, EF, ex centro, erunt duo latera DB, BE, duobus lateribus DF, FE, æqualia, & basis DE, communis. f Igitur anguli B, F, æquales erunt: g Sed B, rectus est. Igitur & F, rectus erit. atque idcirco DF, circulum tanget in F, ex coroll. propos. 16. huius lib.

f 8. primi.
g 18. tertij.

SCHOLIVM.

FACILLIMO negotio propositionem hanc per antecedentem propositionẽ demonstrabimus, hoc modo. Ex puncto A, extra circulũ BCD, ducatur tangẽs AB, et secãs AE, quæ primum per centrũ F, transeat, secetq; circumferentiã

in D. Dico rectangulum sub AE, AD, aquale esse quadrato ex AB. Descripto namque ex F, per A, circulo AKL, producantur AE, AB, vsque ad H, I; & per D, ad AH, perpendicularis KL, qua eundem circulum BCD, tanget in D, ex coroll. propos. 16. huius lib. Eruntq; ex demõstratis in scholio propos. 3. huius lib. AD, HE, aquales, ac proinde, addita communi DE, & AE, HD, aquales erunt. Item ex scholio propos. 16. huius lib. AI, KL, aquales erunt, secabunturque in B, D, bifariam: ac propterea rectãgula sub AB, BI, & sub KD, DL, aqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob aqualitatẽ rectarum AB, BI; KD, DL. Ieaque quoniã rectangulum sub HD, DA, hoc est, sub AE, (qua ipsi HD, ostensa est aqualis) AD, [a] *aquale est rectangulo sub KD, DL, hoc est, rectangulo sub AB, BI, sine quadrato ex AB, constat propositum.*

a 35. tertij.

SED iam secans linea AN, non transeat per centrum F, secetque circumferentiam in C. Dico rursum, rectangulum sub AN, AC, quadrato ex AB, aquale esse. Descripto enim rursus ex F, per A, circulo AKL, producantur AN, AB, vsque ad G, I; & per C, ducatur OM, circulum BCD, tangens. Eruntque ex scholio propos. 3. huius lib. AC, GN, aquales, ac proinde, addita communi CN, & AN, GC, aquales erunt. Item ex scholio propos. 18. huius lib. AI, OM, aquales erunt, secabunturque in B, C, bifariam: ac propterea rectangula sub AB, BI, & sub OC, CM, aqualia inter se erunt, atque adeo quadrata, ob aqualitatem rectarum AB, BI; OC, CM. Ieaque quoniam rectangulum sub GC, CA, hoc est, sub AN, (qua ipsi GC, ostensa est aqualis) AC, [b] *aquale est rectangulo sub OC, CM, hoc est, rectangulo sub AB, BI, sine quadrato ex AB; constat rursus id, quod proponebatur.*

b 35. tertij.

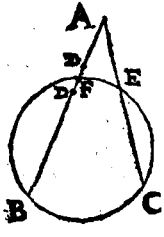
PRIMVM etiam corollarium huius propos. hoc modo ferme conuertemus.

SI a puncto aliquo binæ lineæ rectæ finitæ egrediantur, quæ ita secentur in binas partes, vt rectangula sub totis, & segmentis

prope

prope punctum comprehensa sint æqualia: describi poterit per extrema puncta aliorũ segmentorum circulus, hoc est, circulus per tria puncta extrema aliorum segmentorum descriptus, per quartum etiam punctum extremum transibit.

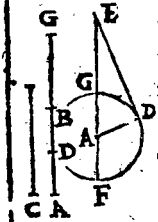
EX puncto enim A, egrediantur duæ rectæ AB, AC, quæ ita secentur in punctis D, E, vt rectangula sub AB, AD, & sub AC, AE, sint æqualia. Dico quatuor puncta B, C, E, D, in circumferentiam circuli cadere; hoc est, per ea posse describi circulum: adeo vt circulus per tria puncta B, C, E, descriptus, transeat necessario per reliquum etiam punctum D. Describatur enim per tria puncta B, C, E, (vt ad propos. 5. lib. 4. docebimus) circulus BCE, qui si dicatur non transire per quartum punctum D, transibit aut citra D, aut vltra, vt per F. Quoniam ergo rectangulum sub AB, AF, æquale est, ex coroll. 1. huius propos. rectangulo comprehenso sub AC, AE; & rectangulum sub AB, AD, eidem rectangulo sub AC, AE, ponitur æquale: erunt rectangula sub AB, AF, & sub AB, AD, inter se æqualia, pars et totum: quod est absurdum. Transibit ergo circulus per punctum D. Quod erat demonstrandum.



LICEBIT quoque ex demonstratis hac propos. colligere huiusmodi problema.

DATIS duabus rectis siue æqualibus, siue inæqualibus, alterutri earum rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta comprehensum, quadrato alterius sit æquale.

SINT



SINT data duæ rectæ AB, & C, ſitque ipſi AB, minori adiungenda recta, ita vt rectangulum comprehenſum ſub tota compoſita, & adiuncta, æquale ſit quadrato rectæ C, maioris. Diuiſa recta AB, bifariam in D, deſcribatur ex quouis centro A, ad interuallum AD, dimidiata, circulus DFG, & ad AD, in D, excitetur perpendicularis DE, ipſi C, æqualis, ac denique ex E, per A, centrum recta extendatur EF, ſecans circumferentiam in G. Dico ſi rectæ AB, adiiciatur BG, ipſi EG, æqualis, rectangulum ſub tota AG, & GB, æquale eſſe quadrato rectæ C. Quoniam enim rectangulum ſub FE, EG. a *æquale eſt quadrato rectæ ED; (quod ED, circulum tangat in D, ex coroll. propoſ. 16. huius lib.) Eſt autem rectangulum ſub FE, EG, æquale octangulo ſub AG, GB, (quod rectæ FE, EG, rectis AG, GB, æquales ſint. Sumpta enim eſt GB, ipſi EG, æqualis, & AB, ipſi FG, æqualis poſita eſt,) & quadratum ex ED, quadrato ex C, (ob æqualitatem rectarum ED, & C, ex conſtructione.) æquale. Igitur & rectangulum ſub AG, GB, quadrato ex C, æquale erit. Quod eſt propoſitum.*

a 36. tertij.

NON ſecus propoſitum demonſtrabitur, ſi recta C, maiori adiungenda ſit recta, ita vt rectangulum ſub tota compoſita, & adiuncta comprehenſum quadrato rectæ AB, minoris æquale ſit.

xxxvj.

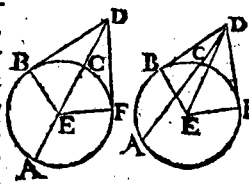
THEOR. 31. PROPOS. 37.

SI extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat; ſit autem, quod ſub tota ſecante, & exterius inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta, comprehenditur rectangulum,

æquale

æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato; Incidens ipsa circulum tanget.

EXTRA circulum ABC, cuius centrum E, punctũ sumatur D, a quo ducatur recta DA, circulum secans in C, & recta DB, incidens in circulum ad punctum B; sitque rectã gulum sub DA, DC, æquale, quadrato rectæ DB. Dico DB, circulum tangere in B. a Ducatur enim DF, tangẽs circulum, & iungantur rectæ EB, EF. Quod si DA, secans non transeat per centrum E, iungatur quoque recta DE. Quoniã igitur rectangulo sub DA, DC, b æquale est quadratum rectæ tangentis DF: Et eidem rectangulo sub DA, DC, æquale ponitur quadratum rectæ DB: erunt quadrata rectarum DF, DB, inter se æqualia, ideoque & rectæ DF, DB, æquales inter se erunt. Itaque quia latera DF, FE, trianguli DFE, æqualia sunt lateribus DB, BE, trianguli DBE; & basis DE, communis c erunt anguli DFE, DBE, æquales. d Atqui angulus DFE, rectus est, quod DF, circulum tangat. Igitur & angulus DBE, rectus erit. Quapropter per coroll. propos. 16. huius lib. DB. circulum tanget; quod est propositum. Si ergo extra circulum sumatur punctum aliquod, &c. Quod erat demonstrandum.



a 17. tertij.

b 36. tertij.

c 34. primi.

d 18. tertij.

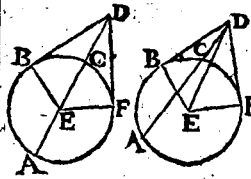
SCHOLIVM.

EST autem hoc theorema conuersum præcedentis theorematis, vt perspicuum est.

PLACET hoc loco sequens etiam theorema demonstrare.

SI a puncto extra circulum dato duæ lineæ rectæ circulum tangentes ducantur, aut duę lineę vsque ad conuexã peripheriã

inter se æquales; Linea recta ab eodem puncto per centrum circuli eiecta angulum ab eis comprehensum diuidit bifariam: Et contra, Linea recta angulum ab eis comprehensum diuidens bifariam, per centrum circuli transibit.



IN priori figura huius propos. duæ rectæ DB. DF, circulum ABCF, tangant in B, F, punctis, quæ ex 2. coroll. præcedentis propos. æquales erunt: Vel ducantur quæcunque duæ æquales DB, DF. Et per centrum E, ducatur recta linea D E A. Dico angulum BDF, sectum esse bifariam a recta DA. Cum enim iunctis rectis EB, EF, duo latera BD, DE, duobus lateribus FD, DE æqualia sint, basisque EB, basi EF, æqualis; a *erunt duo anguli ad D, inter se æquales. Quod est propositum.*

a 8. primi.

DIVIDAT iam recta DA, angulum BDF, bifariam. Dico rectam DA, per centrum transire. Si enim in DA, non est centrum, sit extra ipsam centrum E, iungaturque recta E D, vt in posteriori figura huius propos. Ergo, vt demonstratum est, recta E D, angulum BDF, bifariam diuidet; ac propterea anguli BDA, BDE, cum sint dimidiata partes anguli BDF, æquales inter se erunt, pars, & totum; quod est absurdum. Transit ergo recta D A, per centrum. Quod demonstrandum erat.

EV-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

I.

FIGVRA rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cum singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli singula latera eius, in qua inscribitur, tangunt.

AGENS Euclides quarto hoc libro de variis inscriptionibus figurarum rectilinearum in circulo, & earundem circa circulum descriptionibus: Item de inscriptionibus circuli in eisdem figuris, & circuli descriptionibus circa easdē: exponit paucis definitionibus, quid sit figurā in figura inscribi, aut circa figurā describi, incipiēs à rectilineis figuris. Si igitur anguli D, E, F, trianguli interni DEF, tangant latera AB, AC, BC, triāguli externi ABC; dicetur triāgulum DEF, in triangulo ABC, esse

inscriptum. At quoniam angulus M, trianguli KLM, non tangit latus HI, trianguli GHI, non dicetur triangulum KLM, inscribi in triangulo GHI; quamuis totum illud sit intra hoc, duoque anguli K, L, tangant duo latera GH, GI.

II.

SIMILITER & figura circum figuram describi dicitur, cum singula eius, quæ circumscribitur, latera singulos eius figuræ angulos tetigerint, circum quam illa describitur.

E contrario dicetur triangulū ABC, describi circa triangulum DEF; quoniam singula latera illius singulos huius angulos tangunt. At triangulum GHI, non dicetur descriptum esse circa triangulum KLM, propterea quòd latus illius HI, angulum huius M, non tangit. Idem intelligendum est de inscriptionibus, ac circumscriptionibus aliarum figurarum rectilinearum.

CAETERVM proprie figura rectilinea dicuntur in figuris rectilineis describi, & circa easdem describi, quando inscripta, & circumscripta habent latera numero æqualia, & angulos numero æquales: quamuis hoc non sit omnino necessarium, cum & quadratum intra triangulum describi possit, vt ad finem lib. 6. docebimus.

III.

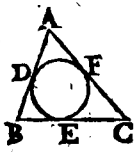
FIGVRA rectilinea in circulo inscribi dicitur, cū singuli eius figuræ, quæ inscribitur, anguli tetigerint circuli peripheriā.

VT si tangant anguli A, B, C, trianguli ABC, peripheriam circuli ABC, dicetur triangulum in circulo esse inscriptum. Quod si vel vnus tantum angulorum non tangeret peripheriam, non diceretur triangulum esse inscriptum in circulo.

FIGV-

IIII.

FIGVRA vero rectilinea circa circum describi dicitur, cum singula latera eius, quę circunscribitur, circuli peripheriam tangunt.



AT vero, si latera trianguli ABC, singula tãgant peripheriam circuli DEF; dicetur triangulum circa circulum esse descriptum.

V.

SIMILITER & circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit eius figuræ, cui inscribitur.

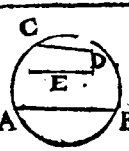
VI.

CIRCVLVS autem circum figurã describi dicitur, cum circuli peripheria singulos tangit eius figuræ, quam circumscribit, angulos.

VICISSIM dicetur circulus DEF, in figura definitionis 4. inscriptus esse in triangulo ABC: At vero circulus ABC, in figura definitionis 3. descriptus esse circa triangulum ABC. Idem iudicium habeto de alijs figuris rectilineis, qua in circulo dicuntur inscribi, vel circa eundem describi; Aut in quibus circulus dicitur inscribi, vel circa quas describi circulus dicitur.

VII.

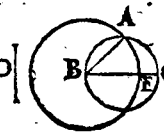
RECTA linea in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum eius extrema in circuli peripheria fuerint.



VT recta linea AB, quoniam eius extrema A, & B, in peripheria circuli ABC, existunt, coaptata, seu accommodata in dicto circulo esse dicetur: Non autem recta E, vel CD; quia hæc alterum duntaxat extremorum, nempè C, habet in peripheria circuli; Illa vero neutrum.

1. ## PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN dato circulo rectam lineam accõmodare æqualem datæ rectæ lineę, quæ circuli diametro non sit maior.



IN circulo ABC, coaptanda sit recta linea æqualis rectæ lineæ datę D, quæ tamẽ maior non sit diametro circuli dati. Cũ enim diameter [a] sit omnium rectarum in circulo maxima, si data recta diametro maior foret, non posset in circulo aptari illi vna æqualis. Ducatur ergo diameter BC. Itaque si data recta D, æqualis fuerit diametro, aptata erit BC, illi æqualis: Si vero D, minor fuerit diametro, [b] abscindatur BE, æqualis ipsi D, & centro B, interuallo autem BE, circulus describatur EA, secans circulum ABC, in A. Ducta igitur recta BA, erit ea aptata in circulo ABC, æqualis datæ rectæ D. [c] Est enim BA, æqualis ipsi BE; & D, æqualis eidem BE, per constructionem. Quare AB, & D, inter se æquales quoque erunt. In dato ergo circulo rectam lineam accommodauimus, &c. Quod faciendum erat.

[a] 15. tertij.

[b] 3. primi.

[c] 15. defin. primi.

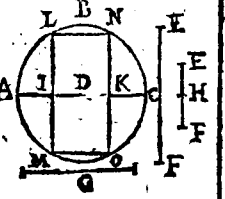
EX FEDERICO COMMANDINO.

IN dato circulo rectam lineam accommodare æqualem datæ rectæ lineæ, quæ circuli diametro non sit maior, & alteri datæ parallelam.

IN dato circulo ABC, cuius centrum D, accommodan-

da sit

da sit recta aqualis rectæ EF, quæ diametro maior non sit, & alteri rectæ G, parallela. [a] *Ducatur per centrum D, diameter AC, recta G, parallela. Quod si recta EF, diametro fuerit aqualis, factum iam erit, quod proponitur. Si vero EF, diametro minor fuerit, secta ea bifariã in H, abscindatur DI, ipsi HE, & DK, ipsi HF, aqualis, vt tota IK, toti EF, sit aqualis.* [b] *Et per I, K, ad angulos rectos ipsi AC, ducantur LM, NO; iungaturq; LN. Dico LN, accõmodatã esse aqualẽ ipsi EF, & ipsi G, parallelam. Cũ enim LM, NO, aqualiter a centro distẽt,* [c] *ipsa quales inter se erunt:* [d] *quæ cum diuidantur bifariã in I, & K, quod ad angulos rectos secantur a recta AC, per centrum D, transeunte; erunt & earum semisses LI, NK, aquales.* [e] *Quia vero LI, NK, parallela etiam sunt;* [f] *erunt quoque LN, IK, aquales, et parallelæ. Quare cum IK, æqualis sit ipsi EF,* [g] *& parallela ipsi G. Erit etiam LN, aqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Eadem ratione, si recta ducatur MO, erit ea aqualis ipsi EF, & parallela ipsi G. Quod est propositum.*



[a] 31. primi.

[b] 11. primi.

[c] 14. tertij.

[d] 3. tertij.

[e] 28. primi.

[f] 33. primi.

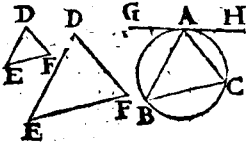
[g] 30. primi.

ij.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

IN dato circulo triangulum describere dato triangulo æquiangulum.

SIT in circulo ABC, dato describendum triangulum æquiangulum triangulo dato cuicunque DEF. Ducatur recta GH, tangens circulum in A, fiatque angulus GAB, angulo F, æqualis, & angulus HAC angulo E, atque extendantur rectæ AB, AC, ad circumferentiam vsque in puncta B, & C, coniungaturq; recta BC. Non cadet autem recta AC, in rectam AB, vel inter rectas AB, AG: propterea quòd anguli GAB, HAC, hoc est, anguli F, E, [h] minores sunt



[h] 17. primi.

duobus rectis. [a] Essent autem duobus rectis æquales, si AC, in AB, caderet; vel maiores duobus rectis, si inter AB, AG, cadere. Dico triangulum ABC, circulo dato inscriptum, esse æquiangulum dato triangulo DEF. Est enim angulus C, [b] æqualis angulo GAB; & eidem angulo GAB, æqualis est angulus F, ex constructione. Quare anguli C, & F, inter se quoque erunt æquales. Similiter quia angulus B, [c] æqualis est angulo HAC; & eidem angulo HAC, æqualis est, per cōstructionem, angulus E, erunt etiam anguli B, & E, inter se æquales. Cum igitur duo anguli B, & C, trianguli ABC, æquales sint duobus angulis E, & F, trianguli DEF, [d] erunt quoque reliqui anguli A, & D, æquales. Aequiangulum est ergo triangulum ABC, triangulo DEF. Quare in dato circulo triangulum descripsimus, &c. Quod faciendum erat.

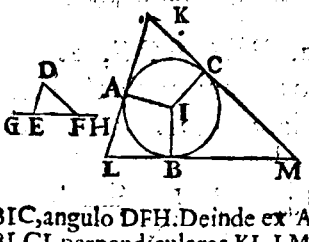
[a] 19. primi.
[b] 32. tertij.
[c] 32. tertij.
[d] 32. primi.

iij.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

CIRCA datum circulum triangulū describere dato triangulo æquiangulum.

CIRCA circulum datum ABC, describendum sit triangulum æquiangulū dato triāgulo DEF. Producto latere EF, vtrinq; ad G, & H, sumptoque centro circuli I, ducatur recta vtcunque AI, & fiat angulus AIB, æqualis angulo DEG, & angulus BIC, angulo DFH. Deinde ex A, B, C, educantur ad AI, BI, CI, perpendiculares KL, LM, MK, quæ circulū tangēt in punctis A, B, C, per coroll. propos. 16. lib. 3. coibuntq; in punctis K, L, M. Si enim ducerētur recta AC, fierent duo anguli KAC, KCA, duobus rectis minores, ac proinde AK, CK, coibunt, &c. Nam recta hæc ducta AC, caderet supra rectas AI, CI, quod hæ angulum constituant in I. Cum enim spatium circa I, æquale sit quatuor rectis, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. hoc est, quatuor



angulis

angulis ad E, & F, sintque duo anguli AIB, CIB, duobus angulis DEG, DFH, æquales; erit reliquum spatium AIC, reliquis duobus angulis DEF, DFE, æquale: Sed [a] hi minores sunt duobus rectis. Igitur & spatium AIC, minus erit duobus rectis, ac proinde angulus erit AIC, Alias spatium illud esset vel æquale duobus rectis, si nimirum AI, CI, vnam rectam lineam constituerent; vel maius duobus rectis, si recta AI, producta caderet supra IC. Cadit igitur necessario AI, producta infra CI, atq; idcirco angulus fiet AIC, ad partes K, & ducta recta AC faciet cum AK, CK, duos angulos minores duobus rectis ideoque rectæ AK, CK, coibunt in K. Non secus ostendemus, AL, BL, coire in L, & C M, BM, in M: quia ductæ rectæ AB, BC, facient cum AL, BL, CM, BM, angulos minores duobus rectis. Descriptum est igitur circa circulum triangulum KLM, quod dico esse æquiangulum triangulo DEF. Quoniam enim omnes anguli in quadrilatero AIBL, æquales sunt quatuor rectis, vt ad 32. propos. lib. 1. ostensum fuit, & anguli IAL, IBL, sunt duo recti, erunt reliqui AIB, & L, duobus rectis æquales. Cū igitur [b] & anguli DEG, DEF, sint duobus rectis æquales; si auferantur æquales AIB, DEG, remanebit angulus L, angulo DEF, æqualis. Pari ratione ostendemus angulū M, æqualē esse angulo DFE, [c] Reliquus igitur angulus K, reliquo angulo D, æqualis erit; atque idcirco triangulum KLM, æquiangulum triangulo DEF, Circa datum ergo circulum, &c. Quod efficiendū erat.

[a] 17. primi.

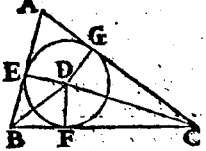
[b] 13. primi.

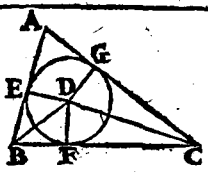
[c] 32. primi.

PROBL. 4. PROPOS. 4. iiii.

IN dato triangulo circulum inscribere.

SIT describendus circulus in dato triangulo ABC. Diuisis duobus angulis ABC, ACB, bifariam rectis BD, CD, quæ intra triangulum coeāt in D, ducantur ex D, ad tria latera, perpendiculares DE, DF, DG. Quoniam igitur duo anguli DBE, DEB, trianguli DBE, æquales sunt





duobus angulis DBF, DFB, triāguli DBF, vterque vtrique; & latus BD, commune; [a] erunt quoque latera DE, DF. æqualia. Eademque ratione æqualia erunt latera DF, DG, in triangulis DCF, DCG. Cū igitur tres rectæ DE, DF, DG, sint æquales; circulus ex D, ad interuallū DE, descriptus transibit per reliqua puncta F, & G; tangetq. latera triāguli in E, F, G, per coroll. propos. 16. lib. 3. quod latera perpendicularia sint ad semidiametros DE, DF, DG. In dato ergo triāgulo circulum descripsimus. Quod erat efficiendum.

a 26. primi.

SCHOLIVM,

VERVM quoniam Euclides lib. 1. demonstrauit; [b] *in omni triangulo duo latera quomodolibet assumpta reliquo esse maiora; nē abs re fuerit demōstrare hoc loco, cū Io. Baptista Benedicto, quāto maiora sint, hoc proposito theoremate.*

b 20. primi.

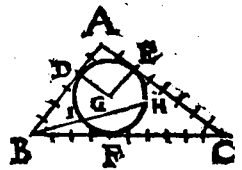
IN omni triāgulo, si circulus inscribatur, duo quælibet latera superant reliquū recta linea, cuius quadratum quadruplū est rectanguli comprehēsi sub recta ab angulo illis lateribus comprehēso in cauam peripheriam ducta, & sub eius segmento exteriore. Quòd si angulus cōprehensus sit rectus, superabunt illa duo latera latus recto angulo oppositū diametro circuli triāgulo inscripti.

SIT triangulum ABC, [c] *cui circulus inscribatur DEF, tangens latera trianguli in D, E, F, punctis: & à quouis angulo B, siue rectus is sit, siue obtusus, siue acutus, ducatur recta BH, secans circulum in I. Dico duo latera BA, BC, superare latus AC, recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli sub BH, BI, comprehensi. Quoniam enim per coroll. 2. propos. 36. lib. 3. recta CF, recta CE, & recta AD, re-*

c 4. quarti.

cta

cta AE, æqualis est; erunt duæ rectæ FC, DA, lateri AC, æquales. Latera igitur BA, BC, latus AC, superāt segmētis BD, BF: quæ cum ex eodem coroll. sint æqualia; superabunt eadē latera BA, BC, latus AC, rectā, quæ dupla est segmēti BD.



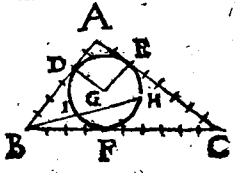
Sed quadratum rectæ, quæ dupla est segmenti BD, quadruplum est quadrati rectæ BD, ex scholio propos. 4. lib. 2. Et quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub BH, BI. Igitur latera BA, BC, superant latus AC, rectā, cuius quadratum quadruplū est rectāguli sub BH, BI. Quod est propositū. a 36. ter tij.

QVOD si angulus A, rectus sit, dico non solum duo latera AB, AC, superare latus BC, rectā, cuius quadratū quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ex A, in cauam peripheriam ducta, & eius segmento exteriore, vt ostensum est: verum etiam excessum illum esse diametro circuli DEF, æqualem. Ductis enim ex centro G, ad puncta contactuum D, E, rectis GD, GE; b erunt anguli ad D, & E, recti. Cum ergo & angulus A, ponatur rectus, c erunt tam recta AE, DG, quā AD, EG, parallelæ inter se: atque idcirco AG, parallelogrammum erit. d Quare tam recta AD, semidiametro EG, quàm recta AE, semidiametro DG, æqualis erit: hoc est, duæ rectæ AD, AE, simul toti diametro circuli erunt æquales. Superāt autem duo latera AB, AC, latus BC, duabus rectis AD, AE, vt ostensum est. Nam EC, ipsi FC, & DB, ipsi FB, æqualis est, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. Igitur eadem latera AB, AC, superant latus BC, diametro circuli inscripti. Quod est propositum. b 18. ter. c. 28 primi. d 34. primi.

ITAQVE quauis duo latera superant reliquum duabus rectis circulum triangulo inscriptum tangentibus, quæ inter angulum duobus illis lateribus comprehensum, & circulum interijciuntur. Ostensum enim est, latera AB, AC, superare latus BC, rectis tangentibus AD, AE, &c.

IAM vero his ita demonstratis, si tria latera trianguli cognita sint, inueniemus nullo negotio tria puncta, in quibus circulus triāgulo inscribēdus latera tāgere debet. Quia

enim latera. verbi gratia, AB, AC, superare debent latus BC, duobus tangentibus ex A ductis, quæ quidem æquales sunt: si dematur latus BC, notum ex notis lateribus AB, AC, relinquentur duæ tangentes AD, AE, notæ. Semissis ergo huius excessus dabit vtrumque punctum D, E. Reliquum deinde segmentum EC, dabit segmentum CF, vsque ad punctum tertium F: Vel reliquum segmentum DB, dabit segmentū BF, ad idem punctum F. Si igitur ex duobus punctis D, E, erigantur perpendiculares DG, EG, coibunt ea in G, centro circuli inscribendi. Exempli gratia. Sit latus AB, 6. latus AC, 8. & latus

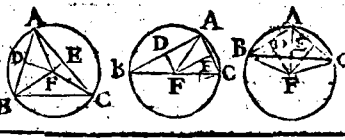


BC, 10. palmorum. Dempto latere BC, 10. palmorū ex duobus lateribus AB, AC, hoc est, ex 14. palmis, relinquuntur 4. palmi. Tam ergo AD, quàm AE, duos palmos continebit. Segmentum ergo D.B, continebit 4. palmos, totidemque segmentum BF, habebit. Segmentum autem EC, ac proinde & CF, erit 6. palmorum. Sic etiã dempto latere AB, 6. palmorum, ex lateribus AC, BC, id est, ex 18. palmis, reliqui sunt 12. palmi. Vtrumque ergo segmentum CE, CF, erit 6. palmorum: ac proinde vtrumque AE, AD. 2. palmorum, & vtrũque BD, BF, 4 palmorum. Postremo dempto latere AC, 8 palmorum ex lateribus AB, CB, hoc est, ex palmis 16. remanēt 8 palmi. Vtrumque ergo segmentum BD, BF, habebit 4. palmos: At vtrumque CF, CE, 6. palmos: & vtrumque AD, AE, 2. palmos.

V. PROBL. 5. PROPOS. 5.

CIRCA datum triangulum circulum describere.

SIT circulus describendus circa datum triangulum



ABC. Diuidãtur duo latera AB, AC, (quæ in triangulo rectãgulo, vel obtusangulo sumẽda sunt facilita-

tis

tis gratia, circa rectũ, vel obtusum angulũ, quamuis hoc non sit omnino necessarium, sed duo quæuis latera bifariam possint secari) bifariam in D, & E, punctis, ex quibus educantur DF, EF, perpendiculares ad dicta latera, coeuntes in F, (Quod enim coeant, patet. Nam si ducta essent tecta DE, fierent anguli FDE, FED, duobus rectis minores.) eritque F, vel intra triangulum, vel in latere BC, vel extra triangulum. Ducantur rectæ FA, FB, FC. Quoniam igitur latera AD, DF, trianguli ADF, æqualia sunt lateribus BD, DF, trianguli BDF, & anguli ad D, recti; [a] erũt bases FA, FB, æquales. Eodẽ modo erũt FA, FC, æquales. Cum ergo tres rectæ FA, FB, FC, sint æquales, circulus descriptus ex F, ad interuallum FA, transibit quoque per puncta B, & C. Circa datum ergo triangulum circulum descripsimus. Quod erat faciendũ.

a 4. primi.

COROLLARIVM.

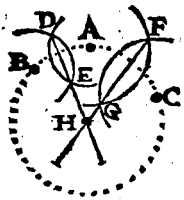
HINC manifestum est, si centrum intra triangulum cadat, [b] omnes angulos esse acutos, quoniam omnes sunt in maiori segmento circuli: si vero sit in latere BC, [c] angulum BAC, ei lateri oppositum, esse rectum, quod sit in semicirculo: si denique cadat extra triangulum, [d] angulum oppositum BAC, obtusum esse, cum sit in minori segmento circuli.

b 31. tertij.
c 31. tertij.
d 31. tertij.

CONTRA vero perspicuum est, si triangulum fuerit acutãgulum, centrum cadere intra triangulum: si rectangulum, in latus recto angulo oppositum: si denique obtusangulum fuerit, extra triangulum. Quod quidem facile ostendetur, ducendo ad incommodum aliquod, siue absurdum. Quia si in acutangulo caderet centrum in vnum latus, esset angulus ei oppositus rectus: si vero extra, esset idem angulus obtusus. Item si in rectangulo cẽtrum caderet intra, essent omnes anguli acuti, si vero extra, esset angulus oppositus obtusus. Denique si in triangulo obtusangulo caderet in vnum latus, esset angulus ei oppositus, rectus, si vero intra, omnes angnli essent acuti. Quæ omnia ex priori parte huius coroll. colliguntur, & pugnant cum hypothesi.

SCHOLIVM.

COLLIGITVR etiam ex hoc problemate, quanam arte describendus sit circulus, qui per data tria puncta non in vna recta linea existentia transeat. Nam si data puncta tribus rectis iungantur, vt cõstituatur triangulum, facile circa ipsum circulus describetur, vt hoc propes. traditum est. Quod tamen



facilius efficietur praxi illa, quam tradidimus propos. 25. lib. 3. Sint enim data tria puncta A, B, C. Ex A, & B, quouis interuallo eodem duo arcus describantur se intersecantes in D, & E, punctis, per quæ recta linea ducatur DH. Item ex A, & C, quouis alio interuallo eodem, vel etiam, si placet, priori illo, alij duo arcus delineẽtur secãtes sese in F, & G, punctis, per quæ recta ducatur FH, secans rectã DH, in H. Dico H, esse centrũ circuli transeuntis per data puncta A, B, & C. Nam si ducerentur rectæ AB, AC, BC, diuiderentur latera AB, AC, triãguli ABC, bifariã a rectis DH, FH, ceu demonstratum est in praxi illa propositionis 25. lib. 3. Quare vt in hoc 5. problemate Euclides ostendit, H, erit centrum circuli circa triangulum ABC, descripti. Quod est propositum.

vj.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato circulo quadratũ describere.

SIT in dato circulo ABCD, cuius centrum E, inscribendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se se ad angulos rectos in centro E, & iungantur rectæ AB, BC, CD, DA. Dico ABCD, esse quadratum inscriptum in dato circulo. Nam quia latera BA, EB, trianguli AEB, æqualia sunt lateribus EC, EB, trianguli CEB, cum omnia sint ex centro; & anguli contenti sunt recti; a erunt bases AB, BC, æquales. Eadem ratione æquales erunt rectæ BC, CD: Item rectæ CD, DA, & rectæ DA, AB. Omnia igitur latera quadrilateri ABCD, æqualia inter se sunt. Quod breuius ita concludemus. Quoniã quatuor anguli ad E, æquales sunt, nimirum recti; b erũt quatuor arcus, quibus insistũt, æquales: c ac proinde & rectæ quatuor subtensæ æquales erunt. Omnia ergo latera quadrilateri ABCD, inter se æqualia sunt. Sunt autẽ d & anguli recti, cum omnes in semicirculis existãt. Quare quadratũ erit ABCD, propterea quæ in dato circulo quadratũ descripsimus. Quod erat faciendũ.

a 4. primi.

b 26. tert.

c 29. tert ij.

d 31. tert ij.

PROBL. 7. PROPOS. 7. vij.

CIRCA datum circulum quadratum describere.

SIT circa datum circulum ABCD, cuius centrum E, describendum quadratum. Ducantur duæ diametri AC, BD, secantes se in E, centro ad angulos rectos; & per A, B, C, & D, educantur ad diametros lineæ perpendiculares FG, FH, HI, IG, coeuntes in punctis F, H, I, G. Quod enim coeant AF, BF, patet ex eo, quod ducta recta AB, faciat cum AF, BF, duos angulos duobus rectis minores; atque ita de reliquis. Dico FHIG, esse quadratum circa circulum datum descriptum. Cum enim anguli AEB, FBE, sint recti, [a] erunt FH, AC, parallelæ; similiterque erunt GI, AC, parallelæ. [b] Quare & FH, GI, parallelæ erunt. Eodem modo parallelæ erunt FG, HI. Quoniam igitur parallelogramum est ACHF, [c] erunt latera opposita AC, FH, æqualia, & anguli oppositi ACH, AFH, æquales: Sed ACH, est rectus. Igitur AFH, rectus erit. Eadem ratione ostendemus angulos H, I, G, rectos esse: & latera HI, IG, GF, æqualia esse diametris BD, AC. Quare cum diametri sint æquales, erunt & quatuor latera FG, FH, HI, IG, æqualia, ideoque FGIH, quadratum erit; cuius quidem latera circulum tangunt, per corollarium propos. 16. lib. 3. Circa datum igitur circulum quadratum descripsimus. Quod erat efficiendum.

[a] 28. primi.
[b] 28. primi.
[c] 8. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8. viij.

IN dato quadrato circulum describere.

SIT in dato quadrato ABCD, inscribendus circulus. Diuisis lateribus bifariam in E, F, C, H, ducantur rectæ EG, FH, secantes se in I. Quoniam igitur AD, BC, rectæ æquales sunt, & parallelæ, erunt & dimidiæ earum AH, BF, æquales & parallelæ.

Quare

a 33. primi.

a Quare & AB, parallela est, & æqualis ipsi FH. Eadē ratione erit DC, parallela, & æqualis eidem FH: Itemque rectæ AD, BC, parallelæ erūt, & æquales ipsi EG. Sunt igitur parallelogrāma AI, IB, CI, ID, ideoque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erūt rectis AH, EB, DH, AE: Sūt autem hæ inter se æquales, cum sint semisses æquālium AD, AB, &c. Quare & rectæ IE, IF, IG, IH, æquales erunt, ac propterea circulus descriptus ex I, ad interuallum IE, transibit quoque per puncta F, G, H. qui cum contingat latera AB, BC, CD, DA, per coroll. propos. 16. lib. 3. b quod anguli ad E, F, G, H, sint recti, descriptus erit in quadrato AC. In dato ergo quadrato circulum descripsimus. Quod efficiendum erat.

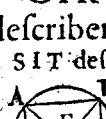
b 29. primi.

ix.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

CIRCA datum quadratum circulum describere.

SIT describendus circulus circa quadratum ABCD, Ducantur diametri AC, BD, secantes se in E. Quoniam igitur latera AB, AD, triāguli ABD, æqualia sunt c erunt anguli ABD, ADB, æquales: Est autem angulus BAD, rectus. d Quare ABD, ADB, semirecti erunt. Similiter ostendemus, reliquos omnes angulos ad A, B, C, D, esse semirectos, & idcirco inter se æquales. Cum ergo anguli EAD, EDA, sint æquales; e erunt rectæ EA, ED, æquales. Eadem ratione EA, EB, æquales erunt; nec non EB, EC. Item EC, ED. Quare circulus ex E, descriptus, intēruallo EA, transibit per reliqua puncta B, C, D. Circa datum ergo quadratum circulum descripsimus. Quod erat faciendum.

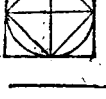


c 5. primi.

d 32. primi.

e 6. primi.

SCHOLIVM.



QVOD si circa datum circulum describatur quadratum, & in eodem circulo aliud quadratum inscribatur, erit quadratum circumscriptum quadrati inscripti duplum. Quoniā enim latus quadrati circumscripti aqua-

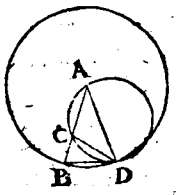
le

le est diametro circuli, vt ex 7. propos. huius lib. constat, hoc est, diametro quadrati inscripti: quadratum vero diametri duplum est quadrati, cuius est diameter, vt ad 47. propos. lib. 1. ostendimus; Constat propositum.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

ISOSCELES triangulum constituere; quod habeat vtrumque eorum, qui ad basin sunt, angulorum, duplum reliqui.

SVMATVR quæuis recta linea AB, quæ [a] diuidatur in C, ita vt rectangulum sub AB, BC, æquale sit quadrato rectæ AC. Deinde cētro A, interuallo vero AB, circulus describatur, in quo [b] accōmodetur recta BD, æqualis ipsi AC, iungaturq. recta AD. Quoniam autem rectæ AB, AD, æquales sunt, erit triangulum ABD, Isosceles. Dico vtrumque angulorū ABD, ADB, duplum esse reliqui anguli A. Ducta enim recta CD, [c] describatur circa triangulum ACD, circulus DCA. Quoniam igitur rectangulū sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ BD, & recta AB, secat circulū DCA, [d] tāget recta BD, eundē circulū DCA, in D. Quare angulus BDC, [e] æqualis est angulo A, in alterno segmēto CAD. Addito igitur communi CDA, erit totus angulus ADB, æqualis duobus angulis CAD, CDA: Sed his eisdem [f] æqualis est etiam angulus externus BCD. Angulus ergo BCD, æqualis erit angulo ADB, hoc est; angulo ABD, [g] cum ABD, ADB; æquales sint; ac propterea [h] rectæ CD, BD, æquales erunt: Est autem BD, æqualis posita rectæ AC. Igitur & CD, ipsi CA, æqualis erit; [i] ac propterea anguli CAD, CDA, æquales. Angulus igitur ADB, qui æqualis ostensus est duobus angulis CAD, CDA, duplus erit alterius eorum, anguli nimirum A. Quare & angulus ABD, duplus erit eiusdem anguli A. Isosceles ergo triangulum constituimus, habens, &c. quod erat efficiendum.



[a] 11 secundi.
[b] 1. quarti.
[c] 5. quarti.
[d] 37. tertij.
[e] 32. tertij.
[f] 32. primi.
[g] 5. primi.
[h] 6. primi.
[i] 5. primi.

COROLLARIVM.

32.primi. QVONIAM vero tres anguli trianguli ABD, æquales sunt duobus rectis, hoc est, quinque quintis duorum rectorum; perspicuum est, angulum A, esse quintam partem duorum rectorum; vtrumlibet autem B, D, duas quintas partes. Item A, esse duas quintas partes vnius recti, & vtrumuis B, D, quatuor quintas partes; quandoquidem omnes tres b æquales sunt duobus rectis, hoc est, decem quintis vnius recti.

b 32.primi.

SCHOLIVM.

POTVISSET problema hoc proponi ad instar theorematis, hoc modo.

SI recta linea secetur, vt propos. 11. lib. 2. traditum est; Isosceles triangulum, cuius basis maiori segmento æqualis est, vtrumuis vero laterum æqualium ipsi datæ lineæ æquale, habet vtrumlibet angulorum æqualium ad basim, duplum reliqui.

NON est autem, quod se excrucient Campanus, & Peletarius, vt probent, rectam BD, ita applicari circulo DCA, vt eum nullo modo secet. Nam propterea quod quadratum rectæ BD, æquale est rectangulo sub AB, EC, ostensum est vltima propos. 3. lib. rectam BD, perpendicularem esse ad semidiametrum circuli ex D, ductam. Quare circulum tanget, & nulla ratione secabit.

QVA arte autem construi debeat triangulum Isosceles, cuius vteruis angulorum ad basim, ad reliquum habeat quamcunque proportionem datam, non solum duplã, vt hic ab Euclide factum est, trademus cum Pappo ad finem lib 6. Qua res hactenus desiderata est.

PRO-

PROBL. 11. PROPOS. 11. xi.

IN dato circulo, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

SIT in dato circulo ABCDE, inscribendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [a] Constituatur triangulum Isosceles FGH, ita vt vterque angulorum G,H, dnplus sit reliqui F, & in circulo [b] inscribatur triangulũ ACD, æquiangulũ triangulo FGH, & vterque angulorũ ACD, ADC, [c] bifariã diuidatur rectis CE,DB, atque rectæ iungantur AB, BC, CD, DE, EA. Dico pentagonũ ABCDE, in circulo dato inscriptũ, esse æquilaterum, & æquiangulũ. Cũ enim vterque angulorũ ACD, ADC, duplus sit anguli CAD, & diuisus bifariam; erut quinque anguli ADB,BDC,CAD,DCE,ECA æquales. [d] Quare arcus AB,BC,CD DE, EA, super quos ascenderunt, atque idcirco [e] & rectæ AB,BC,CD, DE, EA, æquales erunt. Æquilaterum est igitur pentagonum ABCDE. Rursus quia arcus AB. ED, æquales sunt; addito communi BCD, fient æquales ABCD, EDCB. [f] Anguli ergo AED, BAE, dictis arcubus insistentes æquales erũt. Eodẽ modo æquales erũt cuilibet horũ angulorũ reliqui anguli. Insistunt enim æqualibus arcubus, quorum singuli externis arcubus æqualibus componuntur. Aequiangulum est ergo pentagonum ABCDE. Quare cum & æquilaterum esse sit ostensum inscriptum erit dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum: Quod faciendum erat.

[a] 10. quarti.
[b] 2. quarti.
[c] 9. primi.
[d] 26 tertij.
[e] 29. tertij.
[f] 27. tertij.

COROLLARIVM.

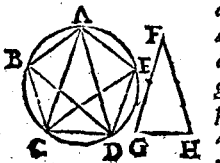
SEQVITVR hinc, angulum Pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti tres quintas partes duorum rectorum; vel sex quintas vnius recti. [g] Cum enim tres anguli BAC, CAD, DAE, æquales sint, vtpote qui æqualibus arcubus BC, CD, DE, insistant, sit autem CAD, per coroll. præcedentis propos. quinta pars, duorum rectorum, vel duæ quintæ vnius recti: erit totus BAE, tres quintæ duorum rectorum: vel sex quintæ vnius recti.

[g] 27. tertij.

SCHO-

SCHOLIVM.

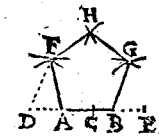
QVOD si detur recta linea terminata CD, super ea
1 2 10. quarti. *constituemus pentagonum aquilaterum, & aquiangulum, hoc modo. Fiat triangulum Isosceles FGH, habēs vtrumlibet angulorum G, H, duplum reliqui anguli F. Deinde constituantur anguli ACD, ADC, aquales angulis G, H, coeantque rectæ CA, DA, in A,* b *quæ efficiēt angulum CAD, aqualem angulo F; ac propterea trianguli ACD, vterque angulorum ACD, ADC, duplus erit reliqui anguli CAD. Iam vero circa*



b 32. primi.

c 5. quarti. *triangulum ACD, circulus* c *describatur ABCDE; In quo cum sit inscriptum triāgulum ACD, si anguli ACD, ADC, bifariam secentur, inscribetur, vt prius, pentagonum aquilaterum, & aquiangulum, cuius latus est recta CD. Quod est propositum.*

FACILIVS idem efficiemus hac ratione. Secta recta



proposita AB, supra quam pentagonum aquilaterum, & equiangulum constituendum est, in C, vt propos. 11. lib. 2. traditum est, producatur ad vtramque partē, sintq; AD, BE, maiori segmento AC, aquales. Interuallo deinde data rectæ AB, ex A, D, duo arcus describantur secantes sese in F. Item ex B, E, eodem interuallo alij duo se intersecantes in G. Denique ex F, G, eodem interuallo alij duo se diuidentes in H, coniungantur q; rectæ AF, FH, HG, GB. Dico pentagonū ABGHF, super datam rectam AB, descriptum, esse aquilaterum, atque aquiangulum. Quod enim sit aquilaterum, constat ex constructione, cum omnes lineæ ipsi AB, sumptæ sint aquales, hoc est, omnes arcus descripti sint ad interuallum AB. Quod autem sit & aquiangulum, ita ostendetur. Ducta recta DF, erit ADF, Isosceles, quale ab Euclide propos. 10. constructum est, vt ex scholio eiusdem propos. manifestum est, propterea quod basis AD, aqualis est maiori segmento AC, lineæ AB, vtrumuis vero laterum aqualium ipsi AB, aquale. Quare ex coroll. eiusdem propos. 10. angulus DAF, conti-

nebit

nebit duas quintas duorum rectorum; ac proinde reliquus angulus duorum rectorum, nimirum BAF, reliquas tres quintas duorum rectorum continebit. Cum ergo ex coroll. huius propos. angulus pentagoni aquilateri, & aquianguli complectatur tres quintas duorum rectorum; erit BAF, angulus pentagoni aquilateri, & aquianguli. Eademque ratione erit AEG, angulus pentagoni aquilateri, & aquianguli. Ex quo sequitur, totum pentagonum esse aquiangulum. Si enim compleatur, aut concipiatur esse completum, hoc est. super F, G, cogitentur descripta duo alia latera, cadent ea necessario in punctum H. Alioquin, si supra H, aut infra conuenirent, [a] essent ea vel maiora, vel minora rectis FH, GH, vt constat, si angulo H, subtenderetur basis FG: atque idcirco alijs lateribus FA, AB, BG, aequalia non ferēt. quod est absurdum. Pentogonum ergo ABGHF, & aquilaterum, & aquiangulum est. Quod erat ostendendum.

[a] 21. primi.

PROBL. 12. PROPOS. 12. xii.

CIRCA datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT circa datum circulum ABCDE, describendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. [b] Inscribatur in eo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, & ex centro F, ducantur rectæ FA, FB, FC, FD, FE, ad quas ducātur perpēdiculares GH, HI, IK, KL, LG, coeuntes in G, H, I, K, L. Cum enim anguli GAE, GBA, duobus sint rectis minores, partes nimirum angulorum rectorum FAG, FEG; [c] coibunt rectæ AG, EG, ad partes G, & sic de alijs. Et quia ipsæ tangunt circulum, per coroll. propos. 16. lib. 3. erit descriptum pentagonum GHIKL, circa circulū; quod dico esse æquilaterum atque æquiangulum. Ductis enim rectis FG, FH, FI FK, FL. erunt quadrato rectæ FH, [d] æqualia tam quadrata rectarum FA, AH, quā rectarum FB, BH. Quare quadrata rectarum FA, AH,

[b] 11. quarti.

[c] 13. pron.

[d] 47. primi.

æqualia

æqualia erunt quadratis rectarum FB,BH. Demptis igitur quadratis æqualibus rectarum ęqualiũ FA,FB,remanebunt quadrata rectarum AH,BH,æqualia; ideoque & rectæ AH,BH,æquales erunt. Quod etiam constat ex coroll. 2.propos.36.lib.3.cum AH,BH, ex eodem puncto H, ducantur circulũ tangẽtes in A,& B.Quoniam ergo latera AF,FH, trianguli AFH,æqualia sunt lateribus BF, FH,trianguli BFH.Est autem & basis AH, basi BH, æqualis, vt

[a] 8.primi. ostensum est;[a] erunt anguli AFH, BFH, æquales. Igitur [b] & anguli AHF,BHF.Duplus igitur est angulus AFB,anguli BFH,& angulus AHB,anguli BHF. Eodem modo ostendemus, angulum BFC, duplum esse anguli BFI,& angulum BIC,anguli BIF. Cũ igitur [c] anguli AFB, BFC, sint æquales, quod insistant circumferentiis AB,BC, [d] quæ æquales sunt,cum a rectis æqualibus subtendantur AB, BC;erunt & dimidii eorum BFH, BFI,æquales. Quocirca cum duo anguli BFH, HBF, trianguli BFH,æquales sint duobus angulis BFI, IBF,trianguli IFB,& latus illis adiacens commune BF, [e] erunt & latera BH,BI,ęqualia,& anguli BHF, BIF, ęquales. Dupla est ergo recta HI,rectæ HB.Eademque ratione ostẽdemus GH, rectam duplam esse rectę HA. Sunt autem ostensę ęquales HB, HA.Igitur & earum duplę HI,HG, æquales erunt. Similiter demonstrabimus, rectas IK, KL,LG,ęquales esse cuilibet rectarum HI,HG.Æquilaterum ergo est pentagonum GHIKL.Rursus quoniam ostẽsum est,angulos BHF,BIF,ęquales esse, ac.semisses angulorum BHA,BIC;erunt & eorum dupli BHA,BIC,ęquales. Eademque ratione anguli IKL, KLG,LGH, ęquales erunt cuilibet angulorum BHA,BIC. Aequiangulum igitur est pentagonum GHIKL. Quapropter cum & æquilaterum sit ostensum, descriptum erit circa datum circulum, pentagonum ęquilaterum, & ęquiangulum.Quod efficiendum erat.

[b] 4.primi.
[c] 27.tertij.
[d] 28.tertij.
[e] 26.primi.

COROL-

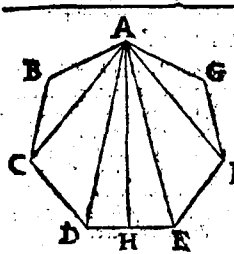
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex huius problematis demonstratione; si in circulo quæcunq. figura æquilatera, & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum ex centro ad angulos ductarum excitentur lineæ perpendiculares: has perpendiculares constituere aliam figuram totidem laterum, & angulorum æqualium circulo circumscriptam. Eadem enim semper ratione demonstrabitur, illas perpendiculares concurrere, angulosq. conficere æquales, si nimirum ab illis ad centrum ducantur rectæ, vt in pentagono factum est: quæ quidem ipsos angulos bifariam secabunt, quemadmodum in pentagono hic probatum est, &c.

HVC referendum est theorema sequens ad figuras æquilateras, & æquiangulas spectans, quod perutile erit ad inuenienda centra circulorum circa ipsas figuras, siue intra ipsas describendorum, vt ex sequentibus patebit.

IN figura æquilatera, & æquiangula, si quidem angulorum numerus impar est, recta linea ex quouis angulo demissa secans oppositum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam; Et contra, recta linea diuidens angulũ bifariam secat quoque latus oppositum bifariam: Si vero numerus angulorum est par, recta linea ex quouis angulo ad oppositum angulum ducta secat vtrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea secans quemuis angulum bifariam cadit in oppositum angulum, eumq. bifariam quoque diuidit.

SIT primum figura æquilatera, æquiangulaq. imparium laterum ABCDEFG, & ex angulo A, demissa recta AH, secet latus oppositum DE, bifariam. Dico angulum quoque BAG, sectum esse bifariam. Ductis enim ex A, re-



ctis ad omnes angulos non proximos; quoniam duo latera BA, BC, duobus lateribus GA, GF, æqualia sunt, & angulos q. continent æquales, ex hypothesi; a erũt & bases AC, AF, æquales, & tam anguli BAC, GAF, quam BCA, GFA: ac proinde cum toti anguli BCD, GFE, penuntur æquales; erunt quoque reliqui ACD, AFE, æquales. Quia igitur rursus duo latera CA, CD, duobus lateribus FA, FE, æqualia sunt, continentq. angulos æquales, vt ostensum est; b erunt & bases AD, AE, æquales, & tam anguli CAD, FAE, quam CDA, FEA. Æque ita procedendum erit, donec ad latus oppositum perueniatum sit. Vbi quia rursus toti anguli CDE, FED, æquales sunt, erunt quoque reliqui ADH, AEH, æquales. Quare cum duo latera DA, DH, duobus lateribus EA, EH, æqualia sint, angulosq. æquales contineant, c erunt etiã anguli DAH, EAH, æquales. Quocirca cum quotuis anguli BAC, CAD, DAH, totidem angulis GAF, FAE, EAH, sint æquales, singuli singulis; erit quoque totus angulus BAH, toti angulo GAH, æqualis; ac proinde angulus BAG, sectus erit bifariam. Quod est propositum.

a 4. pri.

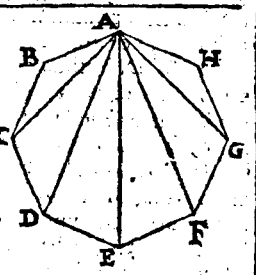
b 4. pri.

b 4. pri.

SED iam recta AH, secet angulum BAG, bifariam. Dico eam secare quoque latus oppositum DE, bifariam. Si enim dicatur latus DE, non secari bifariam, si ex A, ducatur alia recta secans DE, bifariam, secabit eadem & angulum BAG, bifariam, vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAG, secabunt bifariam. quod est absurdum, cum vna medietas maior esset quàm altera. Recta ergo AH, secans angulum BAG, bifariam, secat quoque latus DE, bifariam. Quod est propositum.

SIT deinde figura æquilatera, & æquiangula parium laterum ABCDEFGH, & ex angulo A, ad angulum oppositũ E, ducatur recta AE. Dico rectã AE, secare tam angulum BAH, q̃ DEF, bifariam. Ductis.n. ex A, ad omnes angulos non proximos rectis; demonstrabimus, vt in antecedente figu-

te figura, quotuis angulos BAC, CAD, DAE, totidem angulis HAG, GAF, FAE, esse aquales, singulos singulis; ideoque totum angulū BAE, toti angulo HAE, aqualem esse, necnon & angulum DEA, FEA, esse aqualem. Vterque igitur angulus BAH, DEF, secatur bifariam. Quod propositum.



SED iam recta AE, secet angulum BAH, bifariam. Dico eam cadere in angulum oppositum E, eumq. diuidere bifariam. Si enim non dicatur cadere in E, si ex A, ad E, ducatur alia recta, secabit ex angulum BAH, bifariam. vt iam ostendimus. Duæ igitur rectæ eundem angulum BAH, bifariam secabunt. quod est absurdum. Recta ergo AE, secans angulum BAH, bifariam, cadit in E, secatq. propterea, vt demonstratum est proxime, angulum DEF, bifariam quoque. Quod est propositum.

PROBL. 13. PROPOS. 13. xiij.

IN dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere.

SIT inscribendus circulus in dato pentagono ABCDE. [a] Diuidantur duo eius anguli BAE, ABC, proximi bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F. Cum enim ex scholio præcedentis propos. rectæ AF, BF, secent opposita latera CD, DE, bifariam, necesse est, duas rectas AF, BF, se mutuo intra pentagonum secare. priusquam rectis CD, DE, occurrant. Connectantur deinde rectæ FC, FD, FE. Quoniam igitur latera AB, BF, trianguli ABF, æqualia sunt lateribus CB, BF, trianguli CBF: Sunt autem ex constructione, & anguli ipsis contenti æquales ABF, CBF; [b] erunt bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, æquales. Cum igitur anguli

[a] 9. pri.

[b] 4. pri.

BAE, BCD, ponantur æquales, & BAF, dimidium sit anguli BAE, per constructionem; erit & BCF, dimidium anguli BCD. Diuisus est ergo angulus BCD, bifariam. Similiter modo ostendemus, reliquos duos angulos CDE, DEA, diuisos esse bifariã. Ducantur iã ex F, ad singula pẽtagoni latera perpẽdiculares FG, FH, FI, FK, FL. Quoniã igitur duo anguli FGA, FAG, triãguli FAG, æquales sunt duobus angulis FLA, FAL, trianguli FAL; estque latus AF, subtensum vni æqualium angulorum commune [a] erunt & rectæ FG, FL, æquales. Similiterque ostendentur reliquæ perpendiculares FH, FI, FK, æquales cuilibet istarum. Circulus igitur descriptus ex centro F, & interuallo FG, transibit per puncta quoque H, I, K, L. Quoniam vero latera pentagoni circulum hunc tangunt, per coroll. propos. 16. lib. 3. eo quod angulos rectos faciant cum semidiametris FG, FH, &c, erit circulus in dato pentagono inscriptus. Quod faciendum erat.

[a] 26. primi.

SCHOLIVM.

EADEM prorsus arte in quacunque figura æquilatera, & æquiangula circulum describemus. Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, si ex puncto concursus linearum angulos diuidentium perpendiculares ducantur ad latera, eas inter se esse æquales: ac proinde punctum illud concursus centrum esse circuli inscribendi. Concurrent autem necessario intra figurã duæ illæ rectæ, quæ angulos duos proximos secant bifariam: propterea quod in figura imparium laterũ diuidunt latera opposita bifariam; in figura vero parium laterum, angulos oppositos bifariam, vt in scholio antecedentis propos. ostensum est.

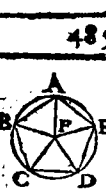
xiiij.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

CIRCA datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

SIT

SIT circa pentagonum ABCDE, æquilaterum, & æquiangulum, circulus describendus. Diuisis duobus angulis BAE, ABC, bifariam rectis AF, BF, quæ coeant in F, intra pentagonum, vt in antecedente propos. demonstratum est; & coniunctis rectis FC, FD, FE, ostendemus, vt in præcedenti problemate, reliquos etiã angulos BCD, CDE, DEA, sectos esse bifariam. Erunt ergo omnes anguli dimidij inter se æquales, quod totí anguli æquales ponantur. Quoniam igitur in triangulo AFB, duo anguli æquales sunt FAB, FBA; erunt rectæ FA, FB, æquales. Eademque ratione erunt reliquæ FC, FD, FE, cuilibet istarum æquales. Quare circulus descriptus ex centro F, interuallo autem FA, transibit quoque per puncta B, C, D, E. Circa datum ergo pentagonum, &c. Quod faciendum erat.



a 4.pri.

SCHOLIVM.

EODEM prorsus artificio circa quamlibet figuram æquilateram, & æquiangulam circulum describemus: Semper enim ostendemus, diuisis duobus angulis proximis bifariam, rectas ex puncto concursus linearum angulum diuidentium ad angulos figuræ ductas, inter se esse æquales: ac propterea punctum illud concursus centrum esse circuli circumscribendi.

PROBL. 15. PROPOS. 15. xv.

IN dato circulo, hexagonum & æquilaterum & æquiangulum inscribere

SIT in dato circulo ABCDEF, cuius centrum G, inscribẽdum hexagonum æquilaterum, & æquiangulũ. Ducta diametro AD, describatur circulus ex centro D, interuallo uero DG, qui secet circulum datum in pũctis C, & E, è quibus per centrum G, rectæ extendantur CF, EB. Si igitur connectantur rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inscriptum erit in

dato

dato circulo hexagonum ABCDEF; quod dico esse & æquilaterum & æquiangulum. Cum enim recta GC, æqualis sit rectæ G D, & recta D C, æqualis eidem rectæ D G, ex definitione circuli; erunt & rectæ GC, DC, æquales inter se: Ideoq; triangulum CDG, erit æquilaterum. Quare [a] tres anguli CGD, GDC, DCG, æquales inter se erunt: qui cum [b] æquales sint duobus rectis, erit quilibet illorum, nempe CGD, tertia pars duorum rectorum. Eodem modo erit angulus DGE, tertia pars duorum rectorum. Sunt autē ∃ tres anguli CGD, DGE, EGF, [c] æquales duobus rectis. Reliquus igitur angulus EGF, tertia quoque pars erit duorum rectorum. Sunt ergo tres anguli CGD, DGE, EGF, inter se æquales; quibus cum etiam [d] æquales sint ad verticem anguli FGA, AGB, BGC; erunt sex anguli ad centrum G, æquales. [e] Quare circumferentiæ, quibus insistunt, [f] ac propterea rectæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, æquales erunt. Quapropter æquilaterum est hexagonum ABCDEF. Rursus quia circumferentia BC, æqualis est circumferentiæ AF; si addatur communis CDEF, erunt circumferentiæ BCDEF, AFEDC, æquales. Anguli igitur ipsis insistentes BAF, ABC, [g] æquales erunt. Similiterq; ostendemus, reliquos angulos BCD, CDE, DEF, EFA, æquales esse cuilibet istorum, quia nimirum quilibet insistit arcui composito ex quatuor arcubus æqualibus, nimirum ex tot, quot latera continet figura inscripta, demptis duobus. Ex quo fit, angulos omnes æqualibus arcubus insistere. Quare æquiangulum quoque est hexagonum ABCDEF. In dato ergo circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum descripsimus. Quod faciendum erat.

a 5. pri.
b 32. pri
c 13. pri
d 15. pri
e 26. ter
f 29. ter
g 27. ter

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, Hexagoni latus æquale esse semidiametro circuli. Nam DC, latus hexagoni, æquale est semidiametro DG, ex definitione circuli.

SCHOLIVM.

GAETANVM, per una, quæ data pentagono

propos. 12. 13. & 14. describemus hexagonum aquilaterum, & aquiangulum circa datum circulum. Iam in dato hexagono aquilatero, & aquiangulo circulum inscribemus, & denique circa idem hexagonum describemus circulum. Nam, vt hexagonum circulo circumscribatur, inscribendum prius erit hexagonum intra circulum, vt hac propos. 15. docuit Euclides. Si vero circulus vel in hexagono, vel circa hexagonum describendus sit, diuidendi erunt duo anguli proximi bifariam. Reliqua deinde perficienda, vt propos. 12. 13. 14. tradiuit.

PORRO ex his quoque facile demonstrabimus, dari posse triangulum Isosceles oxygonium, cuius vertium latus vtrouis aequalium maius sit, sine in quo vtrumuis laterum aequalium tertio minus sit. Id quod ad desin. 28. lib. 1. admonuimus. Sit enim A, centrum circuli BCDE, in quo sexta pars sit DE, & quarta BE. Erit ergo subtensa DE, semidiametro aequalis. Et si ex quouis puncto C, inter B, & D, ad E, recta ducatur CE, erit hac maior quidem DE, ex scholio propos. 20. lib. 3. hoc est, maior quam semidiameter. Quare iunctis duabus semidiametris AC, AE, erit triangulum ACE, Isosceles, cuius vertium latus CE, circuli aequalium AC, AE, maius est. Dico idem esse oxygonium. Quoniam enim anguli ACE, AEC, aequales sunt, & simul duobus rectis minores, erit vterque acutus. Deinde item vertex AB, erit angulus BAE, quadrantis BE, in centro insistens rectus, ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde CAE, acutus erit. Oxygonium ergo est Isosceles triangulum ACE, habens vertium latus CE, vtroque libet aequalium maius. Quod est propositum.

a 15. quarti.

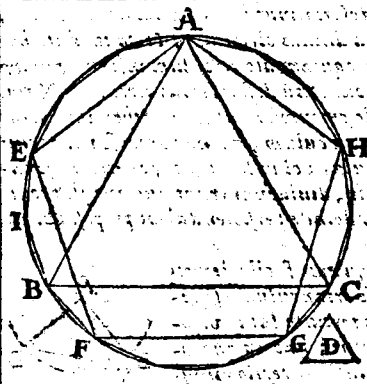
b 5. primi

c 17. primi

PROBL. 16. PROPOS. 16. XVI.

IN dato circulo, quintidecagonum & æquilaterum, & æquiangulum describere.

SIT in dato circulo ABC, inscribendum Quintidecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Constituto triangulo



gulo æquilatero. Dquod ex coroll. propos. 2. lib. 2. erit etiam æquiangulum; & inscribatur ei æquiangulum triangulũ ABC, in dato circulo, quod etiam erit æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. b eruntq; tres arcus AB, BC, CA, æquales, vel propter tres rectas AB, BC, CA, æquales, vel propter tres æquales angulos A, B, C, trianguli ABC. Qualium igitur partium æqualium quindecim est circumferentia tota ABC, talium quinque erit arcus AB, qui tertia pars est totius circumferentiæ. Inscribatur rursus in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum AEFGH, applicans vnum angulorum ad punctum A, d eruntq; quinque arcus AE, EF, FG, GH, HA, æquales. Qualium igitur partium æqualium quindecim est tota circumferentia ABC, talium trium erit arcus AE, quinta pars existens totius circumferentiæ. Itaque cum arcus AB, continens tres partes æquales quindecim, & arcus AB, tres; continebit reliquus arcus EB duas. Diuiso ergo arcu EB, bifariam in I, erit arcus BI pars decimaquinta totius circumferentiæ. Quare ducta recta BI, subtendet decimaquintam partem totius circumferentiæ; cui si aliæ quatuordecim, f æquales in circulo accommodentur, inscriptum erit in circulo quindecagonum æquilaterum, quod g & æquiangulum est, cum eius anguli subtendant arcus æquales, compositos videlicet ex 13. arcubus æqualibus omnes, vt perspicuum est. In dato igitur circulo quindecagonum, &c. Quod faciendum erat.

a 12. quar.

b 26. vel 28. ter.

c 30. ter.

d 28. ter

e 30. ter.

f 1. quar.

g 27. ter

SIMILITER autem per ea, quæ dicta sunt de-

pen-

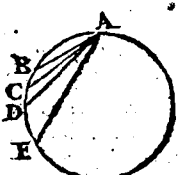
pentagono supra, propos. 12. 13. & 14. describemus circa datum circulum quintidecagonũ æquilaterũ, & æquiangulum. Item in dato quintidecagono æquilatero, & æquiangulo circulum inscribemus; & tandem circa datum quintidecagonum describemus circulum.

SCHOLIVM.

EX huius problematis structura, atque demonstratione colligi potest methodus, atque ars quædam, qua infinita propemodum figura in dato circulo inscribantur. Nam quia recta AB, denominatur à ternario, quod ea sit latus trianguli æquilateri, & recta AE, à quinario, quod ea sit latus pentagoni; si multiplicentur 3. cum 5. efficientur 15. Quare ex illis duobus lateribus in circulo descriptis, inscribetur in eodem figura 15. laterum, angulorumq. æqualiũ, hac ratione. Denominator lateris AB, hoc est, 3. exceditur à denominatore lateris AE, id est, à 5. binario. Igitur arcus BE, continebit duo latera figuræ prædictæ; Ideoque diuisa arcus BE, bifariam in I, erit subtensa recta BI, latus figuræ 15. laterum, angulorumq. æqualium, vt demonstratum fuit. Hac fere arte vsus est Euclides in describendo Quintidecagono intra circulum. Ex qua licebit nobis inferre huiusmodi Theorema.

SI in circulo ab eodem puncto inscribãtur duo latera duarum figurarum æquilaterarũ, & æquiangularum; continebit arcus inter illa latera inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differũt denominatores eorundẽ laterum. Continebit autem figura inscribẽda tot latera, angulosque æquales, quot vnitates sũt in numero, qui ex multiplicatione denominatorũ producitur.

INSCRIBANTVR in circulo ABCDE, initio semper facto à puncto A, plurima latera; Hexagoni quidem AB, pentagoni vero AC, & quadrati AD, trianguli denique æquilateri AE. Quoniam igitur denominator lateris AB, nimirum 6. excedit denominatorem lateris AC, nempe 5. vnitate; continebit arcus BC, inter ea latera inclusus vnum latus figuræ 30. laterum, angulorumq. æqualium. Nam ex multiplicatione 5. cum 6. producuntur 30. Hoc autem ita esse, sic demonstrabitur. Æqualium partium æqualium 30. est tota circumferentia, talium 5. est arcus AB, sexta pars circumferentiæ; & talium 6. est arcus AC, quinta pars circumferentiæ. Igitur arcus BC, vnam talem continebit partem.



PARI ratione arcus BD, continebit duo latera figuræ 24. laterum, angulorumq. æqualium. Nam denominator lateris AB, videlicet 6. superat denominatorem lateris AD, nimirum 4. binario; & ea multiplicatione 4. in 6. fiunt 24.

ITA quoque arcus BE, comprehendet tria latera figuræ 18. laterum.

ARCVS vero CD, complectetur vnum latus figuræ 20. laterum.

ARCVS autem CE, duo latera figuræ 15. laterum.

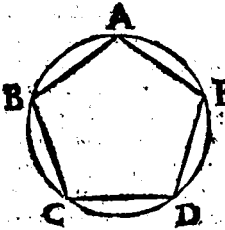
ARCVS denique DE, continebit vnum latus figuræ 12. laterum, angulorumq. æqualium. Hac itaque arte, ac methodo inuestigabuntur fere infinitarum figurarum latera.

NON est autem prætereundum hoc loco, omnem quidem figuram æquilateram circulo inscriptam, esse quoque æquiangulam: at non omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam necessario æquiangulam quoque esse, nisi quando nu-

merus

merus angulorum ipsius est impar; vel si par est, quando duo anguli proximi æquales sunt, vel duo non proximi, dummodo vno eorum primo posito, alter occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximus. quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimum, &c. Qua in re nonnulli hallucinati sunt, putantes omnem figuram æquilateram circulo circumscriptam, necessario esse quoque æquiangulam: inter quos est Campanus Euclidis non obscuri nominis interpres.

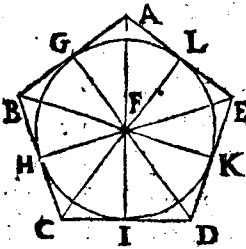
SIT enim figura æquilatera quotcunque angulorum ABCDE, circulo inscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam. Cum enim latera AB, BC, CD, sint æqualia, a erunt arcus quoque AB, BC, CD, æquales; ac proinde & totus arcus ABC, toti arcui BCD, æqualis erit. Reliqui ergo ADC, BED, in eodem circulo æquales erunt. Quocirca b anguli ABC, BCD, illis insistentes æquales erunt. Eodemq. modo omnes anguli ostendentur esse æquales, quotquot illi sint; ac propterea figura ABCDE, æquiangula est, siue angulorum numerus sit par, siue impar. Quod ostendendum erat.



a 28. tert.

b 27. tert.

SIT rursus figura æquilatera ABCDE, quotlibet angulorum numero imparium circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam necessario esse quoque æquiangulam.



Ductis enim ex F, centro ad omnes angulos, & ad puncta contactuum, rectis, a erunt ha ad latera perpendiculares. Et quoniam tangentes AG, AL, ex coroll. 2. propos. 36. lib. 3. aquales sunt; erunt duo latera AG, AF, duobus lateribus AL, AF, aqualia. Cum ergo & bases FG, FL, ex centro sint aquales; b erunt & anguli ad A, aquales: ac proinde angulus BAE, diuisus erit bifariam. Non aliter ostendemus reliquos omnes angulos figura sectos esse bifariam. Rursus quia duo latera AB, BF, duos lateribus CB, BF, aqualia sunt, angulique illis contenti, ostensi aquales; c erunt quoque bases AF, CF, & anguli BAF, BCF, aquales. Cum ergo hi anguli sint semisses angulorum BAE, BCD, vt ostensum est, erunt toti anguli BAE, BCD, quoque aquales. Eadem ratione erit recta CF, recta EF, & angulus BCD, angulo DEA, aqualis: Atque ita deinceps, si figura plures habeat angulos, erit semper tertius quisque angulus ei, à quo tertius est, vno relicto in medio, aqualis: hoc est, primus (constitui autem potest primus quicunque angulus) aqualis erit tertio, tertius quinto, quintus septimo, septimus nono, &c. Atque ita omnes anguli in locis imparibus posiri, aquales inter se erunt: Eademque ratione omnes anguli parium locorum, vt secundus, quartus, sextus, octauus, decimus, &c. aquales inter se erunt; cum quartus sit à secundo tertius, & sextus à quarto tertium quoque locum occupet, &c. Itaque quoniam figura proposita habet numerum angulorum imparem, erit primus angulus, qui aqualis ostensus est omnibus angulis locorum imparium, aqualis vltimo angulo impari, qui primo proximus est. Hic autem vltimus angulus erit eadem ratione secundo angulo aqualis, qui tertius est ab vltimo, primo relicto in medio; & omnibus aliis à secundo tertium locum occupantibus, vt quarto, sexto, octauo, decimo, &c. vsque ad penultimum. Quapropter omnes

a 18. ter

b 8. pri.

c 4. pri.

angu-

anguli figurę propoſitę inter ſe æquales erunt. Quod erat oſtendendum.

HAEC demonſtratio in figuris æquilateris circulo circumſcriptis, quæ habent numerum angulorum parem, locum non habet. Ex ea enim ſolum concludetur, primum angulum æqualem eſſe tertio, quinto, ſeptimo, nono, & alijs loca imparia occupantibus; nunquam autem probabitur, primum vltimo eſſe æqualem, eo quod vltimus locum parem occupet, vt in quadrangulo quartum, in hexagono ſextum, in octogono, octauum, &c. Sic etiam ſolum ex eadem demonſtratione colligetur, angulum ſecundum æqualem eſſe quarto, ſexto, octauo, decimo, & alijs loca paria occupantibus; nunquam autem oſtendetur, ſecundum angulum eſſe primo æqualem, propterea quod primus locum imparem occupat. Itaque ſoli anguli imparium locorum inter ſe, & ſoli quoque anguli locorum parium inter ſe ſemper conuincentur æquales.

QVOD ſi duo anguli proximi, vel etiam duo non proximi, dummodo vnus eorum in loco impari, alter vero in loco pari collocatus ſit, fuerint inter ſe æquales, tum demũ per ſuperiorem demonſtrationem concludetur omnium angulorum æqualitas. Nam ſi primus angulus æqualis ſit ſecundo, (quando enim duo anguli proximi ſunt æquales, licebit vnum eorum dicere primum, & alterum ſecundum,) cum oſtenſum ſit, primum eſſe æqualem quoque omnibus angulis loca imparia occupantibus, ſecundum vero omnibus parium locorum; erunt omnes inter ſe æquales. Si autẽ primus angulus æqualis ſit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo anguli non proximi ſunt æquales, quorũ vnus in loco impari, & alter in loco pari exiſtat, dicere licebit eorum vnum primum, & alterum vel quartum, vel ſextum, vel octauum, &c. prout ab illo diſtiterit, non autẽ ſecundum, quia ſecundus primo proximus eſt.) cum primus oſtenſus ſit æqualis omnibus alijs locorum imparium, alter vero omnibus parium locorum, atque adeo & ſecundo angulo; erit quoque primus ſecundo æqualis: hoc eſt, duo proximi inter ſe æquales erunt. Quamobrem, vt proxime demonſtrauimus, omnes anguli inter ſe erunt æquales.

VERVM

VERVM si dicat forsan aliquis, quanquam ex ea demonstratione colligi nequeat, omnem figuram aquilateram, cuius angulorum numerus sit par, circulo circumscriptam, esse quoque aquiangulam; non colligi tamen contrarium: ac proinde eam posse esse aequiangulam, non quidem propter illam demonstrationem, sed propter quampiam aliam; adeo vt nulla dari possit figura aquilatera circulo circumscripta, quin simul sit aquiangula, vt Campanus cum nonnullis alijs asseruit. Si, inquam, aliquis ita dicat, respondemus, infinitas figuras aquilateras angulorum numero parium circumscriptas circulo, non esse aquiangulas. Sit enim

circulus ex centro A, descriptus, cuius circumferentia tribus diametris BE, CF, DG, in sex partes aquales OP, PQ, QR, RS, ST, TO, diuidatur, quemadmodum propos. 15. in descriptione hexagoni traditum est. Deinde arcus OP, secetur inaqualiter in H, sitque maius segmentum OH, & minus PH. Arcui quoque OH, aquales sumantur OI, QK, QL, SM, SN, ita vt sex arcus aquales ad vtrasque partes trium semidiametrorum non proximarum, sed inter binas singulis relictis in medio, sumantur. Eruntq. ad vtrasque partes semidiametrorum relictarum sex reliqui arcus PH, PK, RL, RM, TN, TI, aquales. Ductis item ex centro A, ad puncta H, K, L, M, N, I, rectis lineis, ducatur per H, ad HA, perpendicularis BC, secans semidiametros AO, AP, productas in B, C, quæ circulum tanget in H, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Coibunt autem necessario recta HB, AB, propterea quòd duo anguli BHA, BAH, duobus rectis minores sunt. Est enim BHA, rectus, & BAH, insistens arcui OH, qui minor est quadrante, minor recto, ex scholio propos. 27. lib. 3. Iungatur quoque recta BI. Et quia duo latera AH, AB, duobus lateribus AI, AB, aequalia sunt, a angulosq. continent aquales aequalibus arcubus OH, OI, insistentes; b erunt quoque bases BH, BI, & anguli H, I, aequales. Cum ergo BHA,

a 27. ter
b 4. pri.

rectus,

rectus sit ex constructione, erit & BIA, rectus: ac propterea recta BI, circulum tanget in I, conueniet q. cum semidiametro AT, producta in G, ob angulos AIG, GAI, duobus rectis minores: Est namque AIG, ostensus rectus, at GAI, recto minor est, ex scholio propos. 27. lib. 3. ob arcum TI, quadrante minorem. Et quoniam duo anguli I, A, trianguli GAI, duobus angulis H, A, trianguli CAH, æquales sunt; (Nam I, H, recti sunt, [a] & GAI, CAH, æquales sunt insistentes æqualibus arcubus TI, PH.) lateraq. AI, AH, quibus adiacent, æqualia; [b] erunt quoque latera GI, GA, lateribus HC, CA, æqualia. Cum ergo & BI, ipsi BH, ostensa sit æqualis; erit tota BG, toti BC, æqualis. Eadem ratione, ducta recta GN, tanget circulum in N, coibitq. cum semidiametro AF, producta in F, eritq. ipsi GB, æqualis. Item iuncta recta FM, circulum tanget in M, & cum semidiametro AR, producta conueniet in E, ipsiq. FG, æqualis erit. Similiter ducta recta EL, tanget circulum in L, & semidiametro AQ, protracta occurret in D, ipsiq. EF, fiet æqualis. Denique iuncta recta DK, eundem circulum tanget in K, & cum semidiametro AP, producta concurret in C, fietq. ipsi DE, æqualis. Quod autem DK, in eodem puncto C, occurrat semidiametro AP, in quo recta BH, eidem occurrit, manifestum est. Si enim in alio puncto eam secaret, cum ducta recta CL, circulum tangeret in K, vt demonstratum est, tangerent duæ rectæ circulum in eodem puncto K; atque adeo inter peripheriam, & tangentem interciperetur ad punctum contactus vna linea recta: quod fieri non posse, [c] Euclides demonstrauit. Est ergo hexagonum BCDEFG, circulo circumscriptum, æquilaterum. At idem esse non æquiangulum, ita demonstrabimus. Quoniam figura BCDEFG, æquilatera est, erunt quidem per ea, quæ paulo ante monstrauimus, anguli locorum imparium, nimirum B, D, F, inter se, & anguli locorum parium, vt C, E, G, inter se æquales; omnesq. secti erunt bifariam à semidiametris: At quia tres anguli trianguli ABH, [d] tribus angulis trianguli ACH, æquales sunt; ablatis rectis ad H, erunt reliqui duo reliquis duobus æquales: Est autem BAH, maior quam CAH, ex scholio propos. 27. lib. 3. quod & arcus OH, maior

a 27. ter

b 26. pri

c 16. tre

d 32. pri

sit

sit arcus P H. Igitur reliquus ABH, reliquo ACH, minor erit; qui cum semisses sint totorum angulorum B,C, vt ostensum est; erit totus quoque CBG, toto BCD, minor. Eodemque modo reliqui anguli D, F, totis angulis E, G, minores ostendentur. Non est ergo hexagonum BCDEFG, æquiangulum: Quod erat ostendendum.

EADEM omnino constructio, & demonstratio fieri potest in octogono, decagono, & alijs figuris parium laterũ, si circulus quatuor diametris secatur in 8. partes, vel quinque diametris in 10. &c.

QVOD si figura æquilatera quotcunq. angulorũ circulo circũscribatur per doctrinam prop. 12. descripta nimirũ prius simili figuræ intra circulum, & ductis lineis circulũ tangẽtibus in figura inscriptæ angulis, &c. vt factũ est in pentagono prop. 12. tũ necessario figura illa erit simul æquiangula, vt ex demonstratione eiusdẽ propos. liquide constat.

OBSERVATIONE quoque dignũ est, omnem quidem figuram æquiangulam circulo circumscriptam, esse etiam æquilateram: at non omnem figuram æquiangulum circulo inscriptam necessario æquilateram quoque esse, nisi quando numerus laterum ipsius est impar; vel si par est, quando duo latera proxima æqualia sunt, vel duo non proxima, dummodo vno eorum posito primo, alterum occupet locum parem quemcunque, vt quartum, (si enim secundum occuparet, esset primo proximum, quod est contra hypothesim.) sextum, octauum, decimum, &c. Quam re facile etiam quis hallucinari possit.

SIT

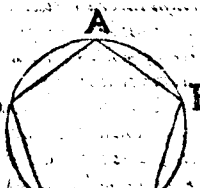
SIT enim figura aequiangula ABCDE, quotuis laterum circulo, cuius centrum F, circumscripta. Dico eam esse quoque necessario aequilateram. Ductis enim ex F, centro ad puncta contactuū rectis FG, FH, FI, FK, FL, a quae ad latera figurae sunt perpendiculares; emittantur quoque ex centro F, ad angulos figurae rectae FA, FB, FC, FD, FE. Et quoniam tangentes AG, AL, ex 2. coroll. propos. 36. lib. 3. aequales sunt, erunt duo latera AG, AF, trianguli AGF, duobus lateribus AL, AF, trianguli ALF, aequalia: Sunt autem & bases FG, FL, ex centro aequales. b Igitur anguli quoque ad A, illis lateribus comprehensi aequales sunt, idcoque angulus BAE, sectus est bifariam. Non aliter ostendemus, reliquos angulos figurae bifariam sectos esse, ac proinde cum totis anguli ponantur aequales, & eorum semisses aequales erunt. Quocirca duo anguli A, G, trianguli AFG, duobus angulis B, G, trianguli BFG, aequales erunt: Est autē latus FG, vni aequalium angularum oppositum, commune. c Igitur latera quoq. AG, BG, aequalia erunt; atque ideó latus AB, sectum erit bifariam in G. Eodem modo probabis, reliqua figurae latera secta esse bifariam. Quia ergo AG, AL, dimidia aequalia sūt, erūt quoque tota lineae AB, AE, aequales. Eademq; ratione AB, BC, & BC, CD, & CD, DE, & DE, EA, aequales erunt. Quā ob rem figura ABCDE, aequilatera est; siue numerus laterum sit par, siue impar. Quod erat demonstrandum.

a 18. ter

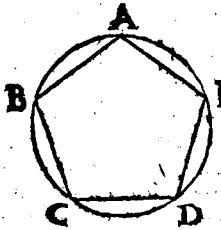
b 8. pri

c 26. pri

SIT rursus figura aequiangula ABCDE, quotuis laterum numero imparium circulo inscripta. Dico eā necessario esse quoque aequilateram. Quoniam enim anguli BAE, ABC, ponuntur aequales, erunt arcus BCE, ADC, quibus insistunt, aequales: quibus demptis ex communi circulo, aequales quoque erunt reliqui arcus



d 26. ter



29.ter.

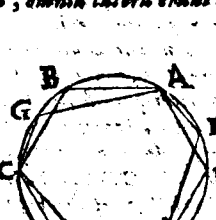
BAE, ABC. Dempto ergo cõmuni arcu AB, erunt & reliqui arcus AE, BC, æquales. Eadem ratione arcus BC, arcui DE, æqualis erit; ac proinde & latus AE, lateri BC, & latus BC, lateri DE, æquale erit: atque ita deinceps, si figura plura habeat latera, erit semper tertiũ quodque latus ei, à qua tertiũ est, uno relicto in medio, æquale: hoc est, primum (constituimus autem quodvis latus potest primum) æquale erit tertio, tertium quinto, quintum septimo, septimum nono, &c. atque in hunc modum omnia latera in locis imparibus posita, æqualia inter se erunt: Eademq; ratione omnia latera parium locorum, ut secundum, quartũ, sextum, octauum, decimum, &c. æqualia inter se erunt, cum quartum sit à secundo tertium, & sextum à quarto tertiũ istum occupat locum, &c. Itaque quotuis proposita figura numerum laterum habet imparem, æquale erit vltimum primo, cui proximum est. Hoc autem vltimum latus eadem ratione æquale erit secundo, quod ab vltimo tertium est, primo in medio relicto; & omnibus alijs à secundo tertium locum occupantibus, ut quarto, sexto, octauo, &c. vsque ad penultimum. Quocirca omnia latera figuræ propositæ inter se æqualia erunt. quod ostendendum erat.

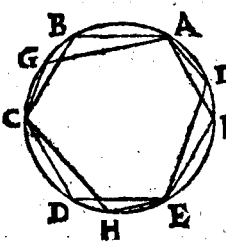
HAEC etiam demonstratio in figuras æquiangulas parium laterũ circulo inscriptas non quadrat. Ex ea enim solum concludetur, primum latus esse æquale tertio, quinto, septimo, & alijs loca imparia occupãtibus; nunquã aũt per eã demõstrabitur, primũ vltimo esse æquale, propterea quod vltimũ occupat locũ parẽ, ut in quadrãgulo quartũ, in hexagono sextũ, &c. Pari ratione eadẽ demonstratio cõuincet tantũ, latus secundũ æquale esse quartæ, sexto, octauo, et alijs loca paria possidentibus, at per eam nunquã colligetur, secũdum latus esse æquale primo, eo quod primũ in loco impari locetur. Itaque sola latera imparium locorũ inter se, & sola latera in paribus locis posita inter se cõuincẽtur esse æqualia.

QVOD

QVOD si duo latera proxima, vel etiam duo non proxima, dummodo vnum eorum in loco impari, alterum vero in loco pari positum sit, fuerint inter se aqualia, tum demum superior demonstratio concludet omnium laterum aqualitatem. Nam si primum latus secundo sit aquale, (quando enim duo proxima latera aqualia sunt, dici poterit vnum primum, & alterum secundum) cum demonstratum sit, primum aquale esse quoque omnibus lateribus locorum imparium, secundum vero omnibus parium locorum; perspicuum est, omnia inter se esse aqualia. Si autem primum latus aquale sit alicui locum parem occupanti, (quando enim duo latera non proxima sunt aqualia, ita tamen, vt vnum in loco impari, & alterum in loco pari reperiatur, licebit vnum eorum appellare primum, & alterum vel quartum, vel sextum, &c. prout ab illo distiterit, non autem secundum, quia secundum primo proximum est.) eum primum ostensum sit aquale omnibus alijs positis in locis imparibus, alterum vero omnibus loca paria occupantibus, atque adeo circo & secundo lateri; erit quoque primum secundo aquale: ac proinde duo proxima inter se aqualia erunt. Vt ergo proxime demonstratum est, omnia latera erunt inter se aqualia.

SI quis autem dubitet, dari posse figuram aquiangulam parium laterum circulo inscriptam, qua non sit aquilatera, (quanquam enim superior demonstratio non probet omnia latera esse aqualia, si omnes anguli aquales sint: contrarium tamen ex ea inferre nō licet.) demōstrabimus id Geometricè hac ratione. Primum quidem constat id in figuris quadrilateris. Nam figura altera parte longior equiangula est, quippe cum omnes eius anguli sint recti, sed non aquilatera. Quis autem dubitet, eam circulo posse inscribi? Deinde vero hexagonum aquilaterum





& aquiangulũ A B C D E F, in circulo descriptum; sumaturque in arcu B C, queduis punctum G, & arcui B G, in tertio arcu ab eo arcus aqualis D H; Item in quinto ab eo arcus aqualis F I, iunganturque recta A G, G C, C H, H E, E I, I A. Dico hexagonum A G C H E I, aquiangulum esse, at non aquilaterum. Quod enim sit aqui-

a 21. ter angulum, sic ostendemus. Anguli B, G, a aquales sunt in eodem segmento A B C. Eadem ratione aquales sunt anguli D, H, & F, I. Praterea quia arcus B G, D H, aquales sunt, per constructionem; addito communi G D, erunt toti arcus B G D, G C H, aquales. Igitur reliqui ex

b 27. ter circulo arcus B F D, G F H, aquales erunt; b ac proinde anguli B C D, G C H, illis insistentes aquales quoque erunt. Non aliter ostendemus & angules D E F, H E I, & F A B, I A G, aquales inter se esse. Ergo sex anguli hexagoni A G C H E I, sex angulis hexagoni A B C D E F, aquales sunt, singuli singulis: ideoque cum hoc ponatur aquiangulum, erit quoque illud aquiangulum. Quod autem non sit aquilaterum, ita probabimus. Latus A G, latere A B, maius est, & latus G C, latere B C, minus, ex scholio propos. 29. lib. 3. Item eadem ratione latera C H, E I, lateribus C D, E F, maiora sunt, & latera H E, I A, lateribus D E, F A, minora. Cum ergo latera A B, B C, C D, D E, E F, F A, aqualia ponantur, erunt A G, G C, C H, H E, E I, I A, inaqualia: quanquam A G, C H, E I, inter se, & G C, H E, I A, inter se, relicto saepe uno in medio, aqualia sint, ut supra ostendimus.

IDEM proporsus eodem modo demonstrabitur fieri posse in octogono, decagona, & alijs figuris parium laterum, si in circulo inscribantur prius octogonum, decagonum, & alia figura aquilatera, atque aquiangula.

QVOD si figura inscribatur circulo per doctrinam propos. 11. 15. & 16. erit ea perpetuo & aquiangula, & aquila-

sera, vt ex earum propositionum demonstrationibus perspicuum est.

PORRO qualem cunque figuram aquilateram & aquiangulam in circulo nouerimus inscribere, talem etiam scicmus describere circa circulum, & in eo circulum quoque inscribere, & circa eandem describere circulum, si artem imitemur, qua tradita fuit de pentagono, propos. 12. 13. & 14.

RVRSVS inscripta figura quacunque aquilatera & aquiangula in circulo, inscribetur in eodem figura, qua habeat latera duplo plura. Diuisis etenim arcubus, quos latera subtendunt, bifariam, & subtensis rectis lineis, constat propositum. Vt per triangulum aquilaterum inscriptum inscribetur & hexagonum, & ideo dodecagonum, figura 24. laterum, &c. Sic quoque ex quadrato in circulo descripto, inscribetur octogonum, atque adeo figura 16. laterum, figura 32. 64. 128. laterum, &c.

CAETERVM omnes figura aquilatera & aquiangula in circulo inscripti possunt beneficio Isoscelium triangulorum, vt recte hoc loco nonnulli Euclidis interpretes monent.

IMPARIVM enim laterum figura inscribentur beneficio triangulorum Isoscelium, quorum anguli aquales ad basin multiplices sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin aqualis est ei, qui ad verticem, descripti in circulo inscribetur prima figura imparium laterum, hoc est, triangulum aquilaterum. Nam Isoscles huiusmodi, triangulum aquilaterum erit. Quod si in circulo inscribatur Isoscles, cuius vterque angulorum ad basin duplus sit eius, qui ad verticem, inscribetur secunda figura imparium laterum, nimirum pentagonum, in circulo, si duo anguli aquales secentur bifariam, veluti propos. 11. fuit ostensum. At Heptagonum, tertia figura laterum imparium, inscribetur in circulo, per triangulum Isoscles habens vterumque angulorum ad basin triplum eius, qui ad verticem, si duo eius anguli aquales diuidantur in tres angulos aquales ei, qui ad verticem. Ita quoque figura quarta

imparium laterum, quale est Hennagonum, in circulo inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin quadruplus est eius, qui ad verticem, si vterque distribuatur in quatuor angulos aquales ei, qui ad verticem, &c.

DIVISIO autem hæc angulorum ad basin in partes aquales perfacilis est. Nam si angulo ad verticem constituantur ad basin tot anguli aquales ordine, quot vnitates sunt in numero proportionis multiplicis, quam vterque angulorum aqualium habet ad reliquum, diuisus erit angulus in partes aquales. Verum descripto huiusmodi triangulo Isoscele in circulo, describetur figura in circulo sine diuisione angulorum ad basin, si basi accõmodentur recta aquales in circulo. Basis enim semper est vnum figura latus, vt in Pentagono patuit.

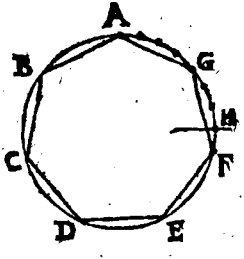
PARIVM vero laterum figura in circulo inscribentur, beneficio Isoscelium, quorum anguli aquales ad basin multiplices sesquialteri sunt eorum, qui ad verticem sunt, angulorum. Vt quadratum constituens primam figuram parium laterum, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin sesquialter est anguli ad verticem. Nam angulus ad verticem insistit quarta parti circumferentiæ. Cum enim duo anguli ad basin simul contineant tres angulos aquales ei, qui ad verticem, quod quilibet semel eum contineat, & dimidiatam insuper eius partem; subtendent ipsi tres partes circumferentiæ, & idcirco angulus ad verticem vnam duntaxat. Hexagonum, hoc est, secunda figura laterum parium, inscribetur beneficio Isoscelis, cuius vterque angulorum ad basin duplus sesquialter est eius, qui ad verticem, anguli. Nam angulus ad verticẽ, insistit sexta parti circumferentiæ, cum reliqui anguli simul compositi contineant ipsum quinquies; propterea quod quilibet bis eum continet, & dimidiatam eius insuper partem. Ita quoque Octogonum, id est, tertia figura laterum pariũ, inscribetur beneficio Isoscelis habẽtis vtrũque angulorũ ad basin triplã sesquialterũ anguli ad verticem.

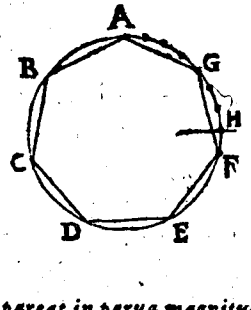
SI igitur inuenta fuerit ars, qua Isoscelia triangula cõstruantur habentia angulos ad basin multiplices eorũ, qui

ad verticem sunt, angulorum, quemadmodum Euclides Isosceles fabricauit habens vtrumque angulorum ad basin duplum anguli ad verticem, facile in circulo describentur figura omnes laterum imparium. Et si arcus earum diuidantur bifariam, inscribentur quoque omnes figura parium laterum, post quadratum, atque adeo ciriumferentia cuiuslibet circuli in quotlibet aquales partes Geometrice diuidetur. Qua res summam Astronomis afferret vtilitatem. Verum hac ars adhuc ignota extitit. Non enim recte sibi eam vendicat Orontius Finæus in libello hactenus, vt ipse ait, de siderato de absoluta figurarum rectilinearum omnium descriptione intra circulum, &c. cum eius demonstrationes falsa sint, ac sophistica, vt Geometrice ostensum est a Petro Nonio Lusitano in libello de erratis Orontij.

NOS tamen ad finem lib. 6. ex Pappo Alexandrino lineam quandam inflexam Geometrice describemus, qua non solum triangula Isoscelia, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant datam proportionem, construantur, ac proinde omnes figura æquilatera, & æquiangula in circulo describantur: verum etiam arcus quiuis circuli distribuantur in quotcunque partes æquales, siue is quadrans sit, siue non. Quin etiam eiusdem linea inflexa beneficio iucunda operatione circulus quilibet sine vllo negotio in quadratum æquale commutabitur, vt ibidem dicemus. Qua res ad hunc vsque idem animos Mathematicorum tenuit suspensos.

SED doceamus, si placet, qua etiam via figura quauis æquilatera, & æquiangula circulo inscribatur sine triangulis Isocelibus, quorum anguli ad basin ad reliquum habeant proportionem datam. Sit ergo in circulo ABCDEFG, inscribendum heptagonū æquilaterū, & æquiangulum. Secetur eius quadrās AH in septē partes æquales, in tot videlicet, quot latera, angulosue figura inscribenda continet.



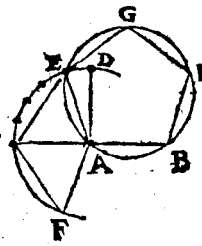


Secabis autem quadrantē AH, in propositas partes æquales vel ex ijs, quæ ad finem lib. 6. nos demonstraturos diximus, vel beneficio circini, dilatando eius crura modo magis, modo minus, donec reperias eorum distantiā partiri quadrantē in partes optatas. Facilius enim quadrans in quotuis æquales diuidetur partes, quàm tota circumferentia, quòd sæpius attentando, & quasi repetendo opus, clarius appareat in parua magnitudine, quàm in magna, quantum detrahi, vel addi debeat parti vni beneficio circini acceptæ, si ea partem desideratam non offerat. Secto quadrante in septem partes æquales, vel in plures, si figura plurium laterum desideretur, erit recta linea AG, quæ quatuor eiusmodi partes subtendit, latus figuræ inscribendæ. Quoniam enim in tota circumferentia quater tot partes æquales continentur, in quot quadrans diuisus est, continebitur aggregatum ex quatuor partibus toties in tota circumferentia, quoties vna pars in quadrante: quia qualibet pars cum alijs tribus, quarum singulæ in singulis alijs tribus quadrantibus accipiantur, efficit aggregatum ex quatuor partibus. Quod etiam ita perspicuum fiet. Quoniam partes eandem proportionem habent, quam earum æquemultiplicia, vt ab Euclide demonstratur lib. 5. propos. 15. (Liceat enim huc accommodare eam propos. cum ex antecedentibus nullo modo pendeat.) ita se habebit vna pars ad quadrantem, vt quadruplum vnius partis, hoc est, arcus AG, ad quadruplum quadrantis, id est, ad totam circumferentiam. Qualis ergo pars quadrantis est vna illarum, in quas quadrans diuisus est, talis erit arcus AG, totius circumferentiæ. Atque ita si quadrans diuisus sit in 7. partes, continebuntur eiusmodi partes 28. in tota circumferentia. Igitur 4. efficient $\frac{4}{28}$. hoc est, $\frac{1}{7}$. totius circumferentiæ. Ita quoque si quadrans sectus sit in 11. partes, continebuntur eiusmodi

partes

partes 44. in tota circũferentia: atque adeo 4. efficient $\frac{4}{4\ 4}$ *hoc eſt,* $\frac{1}{1\ 1}$ *totius circumferentiæ: & ſic de cæteris. Itaque ſi arcui A G, quatuor partium abſcindantur arcus continuè æquales, eiſdemque arcubus recta ſubtendantur, inſcripta erit circulo figura propoſita, vt ex demonſtratis liquet.*

I A M vero ſi ſupra datam rectam lineam quamuis figura æquilatera, & æquiangula deſcribenda ſit, efficiemus id hac ratione. Sit ſupra datam rectam A B, conſtituendum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum. Producta B A, ad C, vt A C, ipſi A B, æqualis ſit, deſcribatur ex A, per C, arcus circuli; ductaque A D, perpendiculari ad AC, vt quadrãs ſit CD, ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. diuidatur quadrans C D, in quinque partes æquales, in tot videlicet, quot laterum figura conſtruenda ſit; quarum 4. ſint CE, iungaturque recta AE, quæ ipſi AB, æqualis erit. Dico angulum BAE, æqualem eſſe angulo pentagoni æquilateri & æquianguli. Sumpto enim arcu CF, æquali arcui CE, iungantur rectæ C E, CF. Et quoniam CE, recta ſubtendens 4. partes quadrantis, latus eſt pentagoni æquilateri & æquianguli, vt proxime demonſtrauimus, in circulo ECF, deſcribendi, erit CF, alterum latus; ac proinde duo latera EC, FC, comprehendent angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli ECF. Quoniam vero, ducta recta A F, duo latera E C, C A, duobus lateribus FC, CA, æqualia ſunt, & baſes item æquales A E, AF; a erunt anguli ECA, FCA, æquales. Cum ergo, b & anguli ACE, AEC, ſint æquales; erit & ACF, ipſi AEC, æqualis: additoque communi A C E, totus angulus E C F, duobus angulis ACE, AEC, æqualis erit. Eſt autem c externus BAE, eiſdẽ internis ACE, AEC, æqualis. Igitur & ECF, BAE, inter ſe æquales erunt. Cum ergo ECF, ſit angulus pentagoni, erit quoque BAE, pentagoni angulus. Quocirca ſi circa tria puncta B, A, E, circulus deſcribatur, & rectis AB, AE, d re-

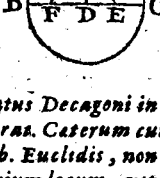


a 8. pri.
b 5. primi.
c 32. primi.
d 1. quarti.

cta æquales in eo accommodentur BH, HG, GE, descriptum erit pentagonum æquilaterum & æquiãgulum descriptum in circulo ABHGE, ac proinde supra datam rectam AB. Quod faciendum erat. Non est autem dubitandum, quin rectis AB, AE, æquales rectæ possint in circulo accommodari, quæ totam circumferentiam absoluant. Nam angulus pentagoni BAE, insistit tribus quintis partibus totius circumferentiæ, singula autem latera AB, AE, singulas quintas partes subtendunt, ac proinde singulæ BH, HG, GE, singulas quoque quintas partes subtendent, cum ipsis AB, AE, sumptæ sint æquales, propterea quæ totum arcum BGE, continentem tres quintas partes absoluent. Eadem ratio est de alijs figuris æquilateris, & æquiangulis.

SI forte in promptu habeamus aliquam figuram æquilateram, & æquiangulam, cui supra datam rectam lineam desideramus constituere similem, siue ea in circulo aliquo descripta sit, siue non: satis erit vni eius angulo æqualem angulum constituere BAE, in extremo datæ lineæ AB. Si namque, posita recta AE, æquali ipsi AB, per tria pũcta B, A, E, circulus describatur, perficiemus figuram propositam, vt ante diximus.

QVONIAM vero longa est, atque difficilis ea inscriptio pentagoni æquilateri, & æquianguli in circulo, quam Euclides tradidit, placuit huic quarto libro annectere praxin quandam, qua vna eademque opera Ptolemæus lib. 1. magnæ constructionis, in circulo dato inscribit Pentagonũ, & Decagonum æquilaterum, & æquiangulum. Sit enim datus circulus ABC, cuius centrum D; Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuisa semidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abscindatur EF. Itaque si ducatur recta AF, erit AF, latus Pentagoni, & DF, latus Decagoni in dato circulo inscribendi, vt ipse demonstras. Caterum cum demonstratio huius rei pendeat ex 13. lib. Euclidis, non videtur hoc loco scribenda, sed in proprium locum, vtpote in librum 13. differenda.



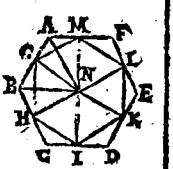
NON

NON erit etiam praeter institutum nostrum, aut ab hoc libro alienum, si sequens adhuc theorema adiungamus, videlicet:

SI bifariæ sectiones laterum figuræ æquilateræ, & æquiangulæ rectis coniungantur lineis, inscripta erit figura æquilatera quoque & æquiangula totidem laterum in illa figura, idem centrum habens.

CENTRVM figuræ æquilateræ, & æquiangulæ appellatur punctum illud, è quo circulus figuræ inscribitur, aut circumscribitur: vt idem sit centrum circuli, & figuræ.

SIT igitur figura æquilatera, & æquiangula ABCDEF, cuius laterà bifariam secentur in G, H, I, K, L, M, iunctis rectis GH, HI, IK, KL, LM, MG. Dico figuram GHIKLM, inscriptam figuræ ABCDEF, æquilaterà esse quoque, atque æquiangulam, idemque centrum habere.



Æquilatera quidem erit, quoniam eius latera cum subdant angulos æquales comprehensos æqualibus rectis, vtpote dimidijs laterum æqualium, [a] *æqualia sunt. Quoniam vero tam tres anguli AMG, GML, LMF, quam tres FLM, MLK, KLE,* [b] *duobus sunt rectis æquales: Sunt autem AMG, LMF, FLM, KLE,* [c] *inter se æquales, cum æqualibus lateribus contineantur, subtendanturque à basibus æqualibus; Erunt reliqui anguli GML, MLK, æquales. Eodemque argumento concludemus, reliquos angulos & hisce, & inter se æquales esse. Æquiangula igitur quoque est figura GHIKLM.*

a 4. pri.
b 13. pri.
c 8. pri.

QVOD autem idem habeat centrum, ita ostendetur. Ex centro N, figuræ ABCDEF, ad omnes angulos figuræ inscriptæ ducantur rectæ NG, NH, &c. iunganturque

rectæ

recta NA, NB. Quoniam igitur AG, GN, latera trianguli AGN, aqualia sunt lateribus BG, GN, trianguli BGN; suntque bases AN, BN, cum sint semidiametri circuli circa figuram descripti, aquales: a Aequales erunt anguli AGN. BGN, ideoque recti. Quare NG, perpendicularis est ad latus AB; Eodemque modo reliquæ NH, NI, &c. perpendiculares erunt ad latera BC, CD, &c. Qua cum ex defin. 4. lib. 3. ostendant distantias rectarum AB, BC, &c. aqualium à centro N; b aquales ad inuicem erunt. Circulus igitur ex N, interuallo NG, descriptus, per reliquos angulos H, I, K, L, M, incedet; Ac propterea N, centrũ erit figuræ GHIKLM, hoc est, circuli circa eã figurã descripti. Quod est propositũ.

a 8. primi.

b 14. tertij.

NEQVE vero & hoc omittendum est, inter omnes figuras aquilateras, & aquiangulas, solum triãgulum, quadratum, & hexagonum replere locum, hoc est, aliquot triãgula, vel quadrata, vel hexagona, ita in plano posse inter se aptari, vt inter eorum angulos nihil sit vacui, sed planã superficiem constituant. Nam sex anguli in triangulo aquilatero, & quatuor in quadrate; & tres in hexagono aquilatero, & aquiangulo, aquales sunt quatuor rectis, quantum nimirum est spatium circa punctum quodlibet in plano, vt ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quoniam enim vnus angulus trianguli aquilateri continet $\frac{2}{3}$. vnius recti, quòd omnes tres contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, hoc est, duos rectos, continebunt sex eiusmodi anguli $\frac{1}{3}\frac{2}{3}$. vnius recti, id est, quatuor rectos. Item quatuor anguli in quadrato sunt quatuor recti. Denique quia vnus angulus hexagoni aquilateri, & aquianguli continet $\frac{4}{3}$. vnius recti, quod omnes sex continent $\frac{2}{3}\frac{4}{3}$. vnius recti, hoc est, 8. rectos, continebunt tres eiusmodi anguli $\frac{1}{3}\frac{2}{3}$. vnius recti, id est, 4. rectos. Quod in alijs figuris planis aquilateris, & aquiangulis nõ cernitur. Nam tres anguli in pentagono aquilatero, & aquiangulo aquales sunt $\frac{1}{5}\frac{2}{5}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $\frac{3}{5}$. duntaxat, at quatuor aquales sunt $\frac{2}{5}\frac{4}{5}$. vnius recti, id est, angulis rectis $4\frac{4}{5}$. propterea quod omnes quinque aquinalent 6. rectis, hoc est, constituunt $\frac{3}{5}\frac{0}{5}$. vnius recti, atque

idcirco

id circo vnus continet $\frac{6}{7}$. vnius recti. & c. Tria igitur pentagona locum replere non possunt, cum trium in plano aptatorum tres anguli minores sint quatuor rectis: quippe qui efficiant tantum tres angulos rectos cum tribus quintis. Eadem ratione quatuor pentagona locum replere nequeunt, propterea quòd quatuor in plano aptatorum quatuor anguli maiores sunt quatuor rectis, cum æquales sint quatuor angulis rectis, & insuper quatuor quintis vnius recti, vt dictum est. Pari ratione neque ex heptagonis locus poterit repleri. Nam tres anguli cuiuslibet heptagoni æquilateri & æquianguli æquales sunt $\frac{3}{7}$. vnius recti, hoc est, angulis rectis $4\frac{2}{7}$. Quoniam enim omnes septem anguli 10. rectis sunt æquales, hoc est, complectuntur $\frac{7}{7}$. vnius recti: fit, vt vnus contineat $\frac{1}{7}$. vnius recti, hoc est, vnum rectum, & præterea $\frac{3}{7}$. vnius recti: ac proinde tres contineant quatuor rectos, & $\frac{2}{7}$. vnius recti. Non ergo tribus heptagonis in plano aptatis, eorum tres anguli locum replere possunt, cum quatuor rectos excedant. A fortiori neque quatuor heptagona locum replebunt: neque tria octogona æquilatera, & æquiangula, aut quatuor; neque tres aut quatuor figuræ æquilatera, atque æquiangula plurium laterum, quàm octo, quippe cum semper tres anguli simul sumpti sint maiores quatuor rectis, propterea quòd maiores sunt tribus angulis heptagoni æquilateri & æquianguli, quos ostendimus quatuor rectis esse maiores. Solum ergo triangulum æquilaterũ, quadratum, & hexagonum æquilaterum atque æquiangulum, suis angulis locum replere possunt, vt diximus.

FINIS ELEMENTI QVARTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVM.

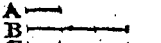
DEFINITIONES.

I.

PARS est magnitudo magnitudinis, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

EGIT *in antecedentibus quatuor libris Euclides de quantitate continua absolute considerata; Nunc vero duobus sequentibus de eadē disputat nō absolute, sed prout una ad aliam refertur, hoc est, quatenus comparata cum alia proportionem aliquā habet. Hoc quidem quinto libro docet proportiones quantitatum continuarū in genere, non descendēdo ad vllam quantitatis speciem, ut ad lineam, superficiem, vel corpus aliquod. Sexto vero libro ostendit in specie, quamnam proportionem habeant inter se linea, anguli, circumferentia circulorum, triangula, & alia figura plana. Vt igitur institutum suum seruet, definit prius vocabula, quæ ad demonstrationes proportionum adhibentur.*

ITAQVE ait magnitudinem illam minorem, quæ maiorem quampiam magnitudinem metitur, appellari partem. Vt quoniam magnitudo A, ter sumpta, metitur magnitudinem B: sexies autem sumpta, magnitudinem C, dicetur magnitudo A, pars magnitudinum B, & C. At vero quia magnitudo D, non metitur magnitudines E, & F, sed sumpta bis, excedit magnitudinem E, & sumpta ter, deficit a magnitudine F, sumpta autem quater, eandem superat; non appellabitur magnitudo D, pars magnitudinum E, & F.



DVPLEX autem est pars apud Mathematicos: Quædam metitur suum totum, ita vt aliquoties repetita totum suum constituat; qualis est numerus 4. cum 8. 12. 16. 20. &c. collatus; Quædam autem non metitur suum totum, sed aliquoties sumpta ipsum uel excedit, vel ab eodem deficit: cuiusmodi pars est numerus 4. collocatus cũ 6. 7. 9. 10. 18. 38. &c. Prior dici solet aliquota, posterior aũt aliquãta. Euclides igitur hoc loco definit partẽ aliquotã duntaxat, tũ quia hæc solum metitur suũ totũ; (Æliquanta n. non dicitur metiri suum totum) tum etiam, quia vt ex lib. 7. constabit, pars aliquanta in numeris non dicitur ab Euclide pars, sed partes. Nam numerus 4. non est pars huius numeri 6. sed duæ partes tertiæ, quales sunt duo binarij. Accedit etiam, quod in omnibus demonstrationibus huius quinti libri pars sumitur ab omnibus interpretibus pro parte aliquota. Vnde mirum sane est, nonnullos interpretes Euclidis, inter quos est etiã Peletarius, contendere, partem hoc loco definiri, quatenus complectitur omnem partem tam aliquotam, quam aliquantam; cum tamen in demonstrationibus etiam ipsi nomine partis intelligant partem aliquotam duntaxat.

II

MVLTIPLEX autem est maior minoris, cum minor metitur maiorem.

VT

VT in superiori exemplo tam magnitudo B, quam magnitudo C, multiplex est magnitudinis A; quoniam hac vtramque illam metitur. At vero neque magnitudo E, neque magnitudo F, multiplex est dicenda magnitudinis D; propterea quod hac neutram illarum metitur. Itaque pars ad multiplex refertur, & multiplex ad partē, ita vt minor quantitas mensurans maiorē, dicatur pars maioris; Maior vero mensurata a minori, dicatur minoris multiplex.

SATIS autem perspicue ex hac definitione colligitur, partē antea definitā esse eam, qua perfectē metitur suū totū. Si enim 6. diceretur metiri 7. vt vult Peletarius, esset iuxta hanc definitionem, 7. multiplex ipsius 6. quod est absurdum.

CAETERVM quando dua magnitudines minores duas alias maiores æque metiuntur, hoc est, vna minor in vna maiore toties continetur, quoties altera minor in altera maiore; dicuntur dua ha maiores duarum illarum minorum æquemultiplices. Quod idem dices, si plures minores æque metiantur plures maiores.

III.

RATIO est duarum magnitudinum eiusdem generis mutua quædam, secundum quantitatem, habitudo.

QVANDO dua quantitates eiusdem generis, vt duo numeri, dua lineæ, dua superficies, duo solida, &c. inter se comparantur secundū quantitatem, hoc est, secundū quod vna maior est, quā altera, vel minor, vel æqualis; appellatur huiusmodi comparatio, seu habitudo mutua, Ratio seu (vt alijs placet) Proportio. Itaque si cōparetur linea aliqua cū superficie quapiā, vel numerus cū linea, nō dicetur ea cōparatio proportio, quod neque linea, & superficies; neque numerus, & linea sint eiusdem generis quantitatis. Similiter si conferatur linea aliqua cū alia linea secundum qualitatē, hoc est, secundū quod vna est alba, & altera nigra; aut quod vna est calida, & altera frigida, &c. quāuis amba sint eiusdem generis, non dicetur ea comparatio proportio, quia non fit secundum quantitatem.

QVAN-

QVAM QVAM autem in solis quantitatibus proprie reperitur proportio, tamen omnia alia, quæ aliquo modo naturam sapiunt quantitatis; cuiusmodi sunt tempora, soni, voces, loca, motus, pondera, & potentiæ, proportionem quoque dicuntur habere, si eorum habitudo consideretur secundum quantitatem. Vt cum dicimus, tempus tempore esse maius, vel minus, vel duo tempora esse æqualia, &c. appellabitur eiusmodi habitudo, proportio; quoniam tempora tunc considerantur, veluti quantitates quædam.

CÆTERVM in omni proportione ea quantitas, quæ ad aliam refertur, dicitur ab Euclide, & Geometris alijs antecedens proportionis; Ea vero, ad quam alia refertur, consequens proportionis dici solet. Vt in proportione lineæ 6. palmorum ad lineam 3. palmorum, linea 6. palmorum dicitur antecedens proportionis, at linea 3. palmorum, proportionis consequēs. Quod si è contrario consideretur proportio lineæ 3. palmorum ad lineam 6. palmorum, appellabitur antecedens linea 3. palmorum, consequens vero linea 6. palmorum, & sic in cæteris.

IIII.

PROPORTIO vero est rationum similitudo.

QVOD hoc loco interpres proportionem appellat, illud Græcis ἀναλογία plerisque autem Latinis proportionalitas dicitur. Quemadmodum igitur comparatio duarum quantitatum inter se, dicitur proportio; Ita comparatio duarum, vel plurium proportionum inter se, proportionalitas solet vñcupari. Vt si proportio quantitatis A, ad quantitatem B, similis fuerit proportioni quantitatis C, ad quantitatem D, dicetur habitudo inter has proportiones, proportionalitas. Eodem modo, si similis fuerit proportio E, ad F, proportioni F, ad G, appellabitur hæc similitudo proportionalitas. Multæ autē habitudines proportionum, seu proportionalitates, (Nos enim cū pluribus comparationē duarum quantitatū, propor-

tionem appellabimus: habitudinem autem proportionum, Proportionalitatem) a scriptoribus, præsertim Boetio; & Iordano, describuntur; inter quas primum semper locum obtinuerunt apud Veteres, Proportionalitas Arithmetica, Geometrica, atque Musica, seu Harmonica, de quibus paulo post dicemus. Verum Euclides de sola Geometrica agit hoc libro; quæ quidem duplex est, cõtinua altera, in qua singulæ quantitates intermediæ bis sumuntur, ita vt nulla fiat proportionum interruptio, sed qualibet quantitas intermedia sit & antecedens, & consequens; Antecedens quidem quantitatis subsequentis, consequens vero quantitatis antecedentis. Vt si dicatur, quæ est proportio E, ad F, ea est F, ad G; vocabitur hæc proportionalitas, continua. Altera vero discreta, seu non continua, in qua singulæ quantitates intermediæ semel tantum accipiuntur, ita vt fiat proportionum interruptio, nullaque quantitas sit & antecedens, & cõsequens, sed vel antecedens tantum, vel consequens tantum. Vt si dicatur, quæ est proportio A, ad B, ea est C, ad D; appellabitur proportionalitas hæc, discreta, siue non continua.

DE PROPORTIONIS Diuisionibus.

OPERÆ pretium esse arbitror, paucis hoc loco exponere, quotnam sint genera proportionum apud Mathematicos, & quænam sint præcipuæ proportionalitates, earumque proprietates, vel ob hanc præcipue vtilitatem, vt ea, quæ his duobus libris ab Euclide demonstrantur de proportionibus magnitudinum, rebus possint materialibus accommodari, quando opus fuerit, & tum ea, quæ à Mathematicis de proportionibus dicuntur, tum ea, quæ a Philosophis cum Aristotele de proportione motuum disputantur, intelligi. Vt autem maior vtilitas, ac voluptas ex admirabilibus proportionum affectionibus percipi pos-

sit, instituemus paulo uberiorem tractationem in hac posteriori editione, quam in priori: reijcientes nihilominus innumera propemodū, quæ dici possent, in pleniorem nostram Arithmeticam, ubi omnia genera Proportionalitatum diligentissime persequemur.

PROPORTIO igitur ab Euclide definita diuiditur in proportionem rationalem, & irrationalem. Rationalis est ea, quæ in numeris potest exhiberi. qualis est proportio lineæ 20. palmorum, ad lineam 10. palmorum. Hæc enim proportio in hisce numeris 20. & 10. ostenditur. Irrationalis vero proportio ea est, quæ in numeris exhiberi nequit. qualis est proportio diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdē quadrati. Hæc enim proportio in numeris reperiri non potest, vt in 10. lib. ab Euclide demonstratur. Alij dicunt, proportionem rationalem eam esse, quam habent quæuis duæ quantitates commensurabiles: Irrationalem vero eam, quam habent duæ qualibet quantitates incommensurabiles. Dicuntur autem quantitates incommensurabiles, quæ habent vnam communem partem aliquotam seu quas eadem mensura communis metitur. Cuiusmodi sunt linea 20. palmorum, & linea 8. palmorum. Nam linea 4. palmorum est vtriusque pars aliquota, similiter linea 2. palmorum. Sicut enim linea tam 4. quam 2. palmorum metitur lineam 20. palmorum; ita quoque eadem linea tum 4. tum 2. palmorum lineam 8. palmorum mensurat. Non aliter omnes numeri,

commensurabiles dicentur, quia saltem vnitas omnes metitur. Quantitates vero incommensurabiles dicuntur, quæ nullam habent communẽ partem aliquotam, seu quarum nullam mensuram communem contingit reperiri. Cuiusmodi sunt diameter, & latus eiusdem quadrati. Quãuis enim quælibet harum linearum infinitas habeat partes aliquotas, vtpote partem dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Tamen nulla pars aliquota vnius, quantumuis minima, alteram metiri potest, vt demonstratur ab Euclide lib. 10. propos. vltima. Quo in lib. multæ aliæ lineæ incommensurabiles ostenduntur, præter illas duas. Itaque in numeris inuenitur sola proportio rationalis; At in quantitate continua tam rationalis, quã irrationalis proportio cõtinetur.

ALIO modo diuidi solet Proportio in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Æqualitatis proportio, est inter duas quantitates æquales, vt inter 20. & 20. Inter 100. & 100. Inter lineam 10. palmorũ, & lineam 10. palmorũ, &c. Inæqualitatis vero proportio inter duas quantitates inæquales reperitur, vt inter 20. & 10. inter 8. & 40. inter lineam 6. palmorum, et lineam 2. palmorum, &c. Habent autem hac duo proportionum genera cum superioribus duobus eam cõnexionem, vt omnis proportio æqualitatis sit necessario rationalis, sed non contra. Omnis item proportio irrationalis necessario sit proportio inæqualitatis, sed non contra. Ex quo manifestum est, minus recte à quibusdam diuidi propor-

tionem

tionem rationalem, in proportionem æqualitatis, & inæqualitatis. Quamuis enim omnis proportio rationalis sit necessario æqualitatis, inæqualitatisue, non tamen contra omnis proportio huiusmodi est rationalis; cum multæ proportiones inæqualitatis sint irrationales. Pari ratione perspicuum est, quosdam non satis recte distribuere proportionem inæqualitatis, in proportionem rationalem & irrationalẽ. Quamuis enim omnis proportio inæqualitatis sit necessario rationalis, irrationalisue, non tamen omnis huiusmodi proportio e contrario est proportio inæqualitatis: cum multæ proportiones rationales sint proportiones æqualitatis. Rectius igitur meo iudicio duplici diuisione secãda est proportio in genere, priori quidẽ in proportionẽ rationalẽ, & irrationalẽ, Posteriori vero in proportionẽ æqualitatis, et inæqualitatis, vt a nobis factũ est. Ita.n. mẽbra diuidentia cũ Diuiso (vt cũ Dialecticis loquamur) in vtraque diuisione reciprocantur. Scio recte posse subdiuidi tã proportionẽ rationalẽ in proportionẽ æqualitatis, & inæqualitatis; quã proportionẽ inæqualitatis in proportionẽ rationalẽ, et irrationalẽ; si in vtraq; diuisione subintelligatur Diuisũ. Sed cur duplicẽ nostrã diuisionẽ, qua proportio in tota sua latitudine diuiditur, vtriq; harũ subdiuisionũ prætulerim, supra exposui in responsione ad Apologiam Peletarij.

RVRSVS proportio inæqualitatis (Relinquimus enim æqualitatis proportionem, quoniã amplius subdiuidi nequit, cũ quæcũque quãtita-

tes æquales siue magnæ, siue paruæ fuerint, eandem semper habeant proportionem æqualitatis) subdiuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis: Maioris inæqualitatis proportio est, quando maior quantitas cũ minore confertur; qualis est proportio 20. ad 10. Item lineæ 8. pedum ad lineam 6. pedũ, &c. Proportio minoris inæqualitatis est, quando minor quantitas ad maiorẽ refertur; qualis est proportio 10. ad 20. Item lineæ 6. pedum ad lineam 8. pedum, &c. Non est autem hæc diuisio inanis, & superuacanea, vt multi suspicantur. Neque enim eadem est proportio 4. ad 2. quæ 2. ad 4. sed multum inter se differunt, cum valde diuersus sit vsus vtriusque, vt perspicuum est ijs, qui vel mediocriter in rebus Geometricis, & regula Algebræ sunt versati. Hæ igitur sunt generales diuisiones proportionis, prout complectitur omnes proportiones, nulla secluſa: Nunc autem tã proportionem maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, quatenus solas proportiones rationales comprehendunt, subdiuidemus; quoniam de quantitatibus, quæ habent proportiones irrationales, in 10. lib. est sermo futurus.

PROPORTIO ergo rationalis maioris inæqualitatis, distribuitur in quinque genera, vt in proportionem multiplicem, super particularem, superpartientem, multiplicem superparticularem, et multiplicẽ superpartientẽ. Pari ratione proportio rationalis minoris inæqualitatis in eadem genera secatur, si modo singulis voca-

bulis

bulis præponatur præpositio (sub.) vt in proportionem submultiplicem, subsuperparticularem, subsuperpartiẽtem, submultiplicem superparticularem, & submultiplicem superpartiẽtem. Horũ autem quinque generum priora tria sunt simplicia, posteriora vero duo ex illis tribus composita, vt manifestum est. Cur vero tantum sint quinque hæc genera proportionis rationalis tã maioris, quã minoris inæqualitatis, post explicationẽ omniũ harũ quinque proportionum ostendemus.

DE PROPORTIONE MVLTIPLICI.

PROPORTIO Multiplex est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorẽ aliquoties, vt bis, ter, decies, centies, &c. continet: ita vt minor maiorem metiatur. qualis est proportio numeri 20. ad 4. Nam numerus 20. comprehendit 4. quinquies. Item proportio lineæ 30. pedum ad lineam 5. pedum, &c.

HAEC autẽ sub se continet infinita genera. Si enim proportionis multiplicis maior quantitas minorem bis tantum continet, dicitur proportio dupla: si ter, tripla: si decies, decupla, si centies, centupla, &c.

EX his facile omnes species proportionis multiplicis definiemus. Nã proportio octupla nil erit aliud, quã habitudo maioris quãtitatis ad minorẽ, quãdo maior minorẽ octies cõplectitur. Eodẽque modo definiendæ erunt reliquæ proportiones multiplices: vt proportio quintupla, qualis est 40. ad 8. dicetur ea, cuius maior quãtitas minorẽ cõtinet quinquies. Item proportio dupla lineæ 10.

cubitorum ad lineam 5. cubitorum ea, in qua maior quantitas minorem bis comprehendit, & sic de reliquis.

CAETERVM omnes proportiones multiplices in numeris integris, hoc est, omnes numeros multiplicem habentes proportionem, inuenies hoc modo. Accipe numerũ, qui indicat, quoties maior numerus minorem in data proportione multiplici continet. Is enim ad vnitatem habet primam proportionem multiplicem, quæ inuestigatur: hoc est, numerus ille, & vnitas sunt primi, ac minimi numeri, inter quos proposita proportio multiplex reperitur. Atque numerus ille idem, atque vnitas dicũtur ab Arithmeticis termini eius proportionis multiplicis, qua proponitur. Inuentis hisce terminis, inter quos prima proportio multiplex proposita reperitur, si vterque duplicetur, producentur duo numeri habentes secundam proportionẽ multiplicem propositam: si vterque idem triplicetur, procreabuntur numeri tertiæ proportionis multiplicis propositæ: si vterque quadruplicetur, exurgent numeri quartæ proportionis multiplicis quæsitæ. Atque ita si ijdem termini per quemuis numerum multiplicentur, producentur duo numeri proportionis multiplicis propositæ, qua eum locum inter omnes proportiones multiplices illius speciei obtinet, quem numerus, qui vtrumque terminum multiplicauit, indicat: Adeo vt, si multiplicatio fiat per 100. procreentur duo numeri obtinentes centesimum locum inter omnes numeros propositam proportionem habentes.

EXEMPLI gratia. Quærantur omnes numeri proportionis quintuplæ. Et quoniam maior numerus minorem continet quinquies in quintupla proportione, erit prima proportio quintuplæ inter 5. & 1. qui duo termini si ducantur in 2. reperietur secunda proportio quintuplæ inter 10. & 2. Si ijdem termini per 3. multiplicentur, procreabuntur numeri 15. & 3. tertiæ proportionis quintuplæ: Et sic deinceps. Itaque si decimæ proportio quintuplæ quæratur, ducendi erunt duo primi termini inuenti 5. & 1. per 10. si vero mil-

lesima

lesima reperienda sit, multiplicandi erunt idem termini per 1000. &c.

OMNES item numeri cuiusque proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Constituantur duæ series numerorum in infinitum progredientes: quarum inferior ab unitate incipiat, & per seriem naturalē numerorū progrediatur; superior autē ab eo numero, qui significat, quoties maior numerus minorem in data proportione continet, initium ducat, progrediaturque per continuam additionem eiusdem numeri, primum ad seipsum, deinde ad conflatum numerum, &c. Nam superioris ordinis numeri ad numeros ordinis inferioris, vt primus ad primum, secundus ad secundum, tertius ad tertium, &c. habent omnes proportiones multiplices speciei propositæ. Exempla hic habes in proportionibus quintuplis, septuplis, & decuplis.

Proportiones quintuplæ.

5.10.15.20.25.30.35.40.45.50.55.60.65.70.75.80. &c.	
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16 &c.	

Proportiones septuplæ.

7.14.21.28.35.42.49.56.63.70.77.84.91.98.105. &c.	
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. &c.	

Proportiones decuplæ.

10.20.30.40.50.60.70.80.90.100.110.120.130.140. &c.	
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. &c.	

DE PROPORTIONE.

PROPORTIO superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad maiorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper vnam eius partem aliquotam, scilicet dimidiatam, tertiam, quartam, &c. Qualis est proportio 3. ad 2. Nam 3. continent 2. semel, & insuper vnitatem, quæ dimidia ta pars est numeri 2. Ita quoque linea 12.

pedum

pedum ad lineam 9. pedum, proportionem habet superparticularem, quia prior linea continet posteriorem semel, & insuper lineam 3. pedum, quæ tertia pars est lineæ 9. pedum, &c.

HAEC quoque proportio in infinita genera diuiditur. Si enim illa pars aliquota contenta in maiori quantitate, est dimidiata pars minoris quantitatis, constituitur proportio sesquialtera; si est tertia pars, exurgit proportio sesquitertia; si quarta, sesquiquarta; si millesima, sesquimillesima, &c.

VNDE ex ipsomet vocabulo faciles erunt definitiones omnium proportionum superparticularium. Erit enim proportio sesquioctaua, quando maior quantitas minorem semel includit, & insuper octauam partem minoris: qualis est inter 9. & 8. Item inter 45. & 40. Idem habeto de reliquis iudicium.

INVENIENTVR omnes proportiones superparticulares, siue omnes numeri, inter quos proportio superparticularis quacunque reperitur, hoc modo. Accipiatur numerus, qui partem aliquotã in proportione expressam denominat. Ad eum enim numerus proximè maior, qui videlicet eum vna sola vnitate superat, habebit primam proportionẽ superparticularem propositam, ita vt in minoribus numeris ea proportio reperiri nequeat. Hi duo numeri, qui termini data proportionis dicuntur, si duplicẽtur, triplicẽtur, vel per quemcunque alium numerum multiplicẽtur, gignentur alij numeri eandem proportionem habẽtes, nimirum secundam, tertiam, vel eam, quam numerus multiplicans indicat.

VERBI causa. Si quærantur omnes proportiones sesquiseptimæ, quoniam hic exprimitur pars septima, erit 7. minor terminus huius proportionis, maior autem erit 8. nam vnita te il-

te illum superans: atque inter 8. & 7. prima proportio sesqui septima existit. Qui duo termini si duplicentur, procreabuntur hi alij duo numeri 16. & 14. inter quos secunda proportio sesquiseptima cernitur: si triplicẽtur, erit tertia proportio eadem inter 24. & 21. Si denique centesima proportio eadẽ quaratur, ducendi erunt termini inuenti 8. & 7. per 100. vt signantur numeri 800. & 700.

NVMERI quoq. omnes cuiusq. proportionis superpartic ularis comperiẽtur, si constituantur duo ordines numerorũ, quorum inferior à numero partem aliquotam denominãte incipiat, superior vero à numero proxime maiore: vterque vero per continuam additionem numeri, à quo initium sumit, primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur. Exempla hic posuimus in proportionibus sesquialteris, sesquiseptimis, & sesquidecimis.

Proportiones sesquialtera.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36 39. 42. 45. *&c.*

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. *&c.*

Proportiones sesquiseptima.

8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104. 112. 120. *&c.*

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. 105. *&c.*

Proportiones sesquidecima.

11. 22. 33. 44. 55. 66. 77. 88. 99. 110. 121. 132. 143. 154. *&c.*

10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100. 110. 120. 130. 140. *&c.*

DE PROPORTIONE Superpartiente.

PROPORTIO superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior minorem semel duntaxat continet, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non efficien-

tes

tes vnam aliquotam. Qualis est proportio 8. ad 5. Nam 8. continent semel 5. & insuper tres vnitates, quarum quælibet est pars aliquota, vtpote quinta, huius numeri 5. ipse autem ternarius ex illis compositus, non est pars vna aliquota numeri 5. Dixi partes illas aliquotas non debere constituere vnam partem aliquotam, ob multas proportiones, quæ primo aspectu videntur esse superpartientes, cum tamē sint superpartibulares; cuiusmodi proportio est inter 10. & 8. Quā quam enim 10. contineant semel 8. & duas insuper vnitates, quarum quælibet est octaua pars numeri 8. quia tamen binarius ex illis vnitatibus compositus, est quarta pars 8. non dicenda est ea proportio superpartiēs, sed superparticularis, nēpe sesquiquarta. Itaq. vt duæ quātitates dicantur habere proportionē superpartientem, necesse est, vt maior quantitas minorē contineat semel, & plures eius partes aliquotas, quæ simul sumptæ non cōstituant vnam aliquotam. Quod quidā non aduertentes, mirum in modum genera proportionum inter se confundunt.

DIVIDITVR primū proportio superpartiēs habita ratione numeri partium aliquotarum, in genera infinita. Si enim maior quantitas minorem semel comprehendit, & duas eius partes aliquotas non constituentes vnam, conficitur proportio superbipartiēs; si tres partes aliquotas, susupertripartiens; si decē, superdecupartiens, &c.

DIVIDITVR deinde quodlibet horum generum, habita ratione denominationis partiū

aliquotarum, in infinita adhuc genera. Nam proportio superbipartiens inter duas quantitates inæquales, quarum maior continet minorem semel, & duas eius partes tertias, dicitur superbipartiẽs tertias. Quod si duæ illæ partes fuerint quintæ, appellabitur superbipartiens quintas, & ita de reliquis proportionibus superbipartientibus. Pari rõne superdecupartiẽs proportio inter duas quãtitates inæquales, quarũ maior excedit minorẽ decẽ partibus vndecimis, appellabitur superdecupartiẽs vndecimas. Quod si decẽ illæ partes sint decimætertiæ, vocabitur proportio superdecupartiẽs decimastertias; et sic de reliquis omnibus superdecupartientibus proportionibus.

NE autem proportiones superpartientes vel inter se confundantur, vel cum proportionibus superparticularibus, quod à plerisque factum esse deprehendimus, diligenter considerandæ sunt ea, quæ sequuntur. Primum, in pronunciatione cuiuscunque proportionis superpartientis, duos indicari numeros, quorum alter monstrat quotnã partes aliquotæ minoris quantitatis in maiore supersint; alter vero, quotæ partes eæ sint, aut quãtæ, indicat. Vt in proportione supertripartiẽte octauas, denotãtur duo hi numeri 3. et 8. quorũ prior significat, maiorẽ quãtitatem dictæ proportionis continere semel minorem, & adhuc tres eius partes aliquotas, exprimiturq. syllaba illa (tri) quando dicitur supertripartiens: posterior autẽ per vocẽ (octauas) expressus ostẽdit, illas tres partes aliquotas esse partes octauas minoris.

Deinde

Deinde in qualibet proportione superpartiente duos prædictos numeros, (qui quidem facile ex ipsa proportionis prolatione cognoscuntur, vt ex proximo exemplo patet) eiusmodi esse debere, vt non habeant vllam partem aliquotam communem, præter vnitatem, quæ quidem est omnium numerorum pars aliquota: hoc est, vt sint inter se primi. Numeros enim, qui præter vnitatem nullam aliam partem aliquotam communem admittunt, dicunt Arithmetici cum Euclide, primos inter se, vt ex lib. 7. constabit. Tales sunt duo illi numeri 3, & 8. in superiori proportione superpartiente octauas expressi. Nam sola vnitas, vt constat, est vtriusque pars communis aliquota. Quare recte denominabimus proportionē inter 11. & 8. supertripartientem octauas: qualis etiam est inter 22. & 16. Non autem recte appellabitur proportio posterior inter 22. & 16. supersextupartiens sextasdecimas, quamuis maior minorem contineat semel, & insuper sex vnitates, quarū quælibet decima sexta pars est minoris: Non, inquam, recte sic appellabitur, quia duo numeri 6. & 16. in ea expressi, habent partem aliquotam 2. per quam, vt in Arithmetica traditur, reducuntur $\frac{6}{16}$ ad $\frac{3}{8}$. atque ita proportio ea dicenda est, supertripartiens octauas. Sic etiam non recte vocabitur proportio inter 9. & 6. supertripartiens sextas, quoniam duo numeri in ea notati 3. & 6. habent præter vnitatem, aliam communem mensuram, videlicet 3. Nam ternarius semel sumptus, seipsum, & bis

repetitus, senarium metitur, ac proinde $\frac{3}{6}$ reducentur per partem aliquotam communem 3. ad $\frac{1}{2}$. Quocirca talis proportio nuncupanda erit sesquialtera, cum maior quantitas contineat semel minorem, & eius partem dimidiatam. Eadem ratione non recte dicetur proportio inter 10. & 6. superquadripartiens sextas, quia duo numeri in ea notati 4. & 6. habent 2. communem partem aliquotam, præter vnitatem; atque ita dicenda erit talis proportio superbipartiens tertias, cum maior quantitas contineat minorem semel, & duas eius partes tertias. Ex his igitur non difficile erit vnicuique, denominare conuenienter omnes proportiones superpartientes.

PERSPICVVM etiam ex dictis relinquitur, cur proportionem superbipartientem diuiserimus paulo ante, in proportionem superbipartientem tertias, quintas, septimas, nonas, &c. prætereuntes superbipartientem quartas, sextas, octauas, decimas, &c. Cum enim hæ posteriores omissæ, sint superparticulares, propterea quod $\frac{2}{4}$. faciunt $\frac{1}{2}$. & $\frac{2}{6}$. constituunt $\frac{1}{3}$. & $\frac{2}{8}$. efficiunt $\frac{1}{4}$. denique $\frac{2}{10}$. æquiualent $\frac{1}{5}$, confunderentur proportiones superpartientes cum proportionibus superparticularibus, si & ipsæ in numerum proportionum superbipartientium referrentur. Quo modo autem dignoscendum sit, an duo quilibet numeri propositi habeant, præter vnitatem, aliquam aliã partem communem aliquotam,, necne, in Arithmetica docetur, demonstrabiturque ab Euclide, ad initium libri 7.

INVENTIO omnium proportionum superpartientium cuiusque speciei sic se habet. Numerus tot unitatibus maior denominatore partium aliquotarum, quæ in proportione nominantur, quot partes in eadem proportione exprimuntur, habebit primam proportionem speciei propositæ ad numerum easdem partes aliquotas denominantem. Qui duo termini duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati, gignent secundos numeros eandem proportionem habentes, tertios, vel alios, vt supra dictum est. VERBI gratia, si inquirendi sint omnes numeri proportionis supertripartientis decimas, erunt primi huiusmodi numeri, 13. & 10. quia maior superat minorem, qui partes decimas denominat, tribus unitatibus, quot videlicet partium decimarum mentio fit, in proportione supertripartiente decimas. Dupli eorum, qui nimirum secundam proportionem constituunt, sunt 26 & 20. Tripli, 39. & 30. Cæteſimæ autem eiusmodi proportio erit 1300. ad 1000. cum hi numeri centupli sint terminorum 13. & 10. qui primo loco inuenti sunt.

EOSDEM numeros omnium proportionum superpartientium reperies, si statuas duos numerorum ordines, quorum inferior incipiat a partium aliquotarum denominatore; superior autem a numero, qui numero partium nominatarum priorem illum superat: vterque deinde ordo progrediatur per continuam additionem primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad numeros conflatos, vt supra diximus. Exempla hic adiecimus proportionum superbipartientium quintas, superoctupartientium nonas, & superseptupartientium decimas.

Proportiones superbipartientes quintas.

7. 14. 21. 28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77. 84. 91. 98. &c.
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. &c.

Proportiones superoctupartientes nonas.

17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153. 170. 187. &c.
9. 18. 27. 36 45. 54. 63. 72. 81. 90. 99 &c.

Pro-

Proportiones superseptupartientes decimas.

17.34.51.68.85.102.119.136.153.170.187. &c.

10.20.30.40.50. 60. 70. 80. 90.100.110. &c.

DE PROPORTIONE multiplici superparticulari.

PROPORTIO multiplex superparticularis est habitudo maioris quantitatis ad minorẽ, quando maior minorem aliquoties, vt bis, ter, vel quater, &c. continet, & præterea vnam eius partem aliquotam. Cuiusmodi est proportio 9. ad 4. Continent enim 9. bis 4. (qua ex parte proportio hæc cum multiplici conuenit, vtpote cum dupla) & insuper comprehendunt vnitatem, quæ est quarta pars numeri minoris; (qua in re proportioni superparticulari, nimirum sesquiquartæ, eadem proportio proposita similis est.) vt recte proportio hæc composita dicatur ex multiplici, & superparticulari.

DIVIDITVR autem proportio hæc, habita ratione proportionis multiplicis, in genera infinita, veluti multiplex. Vt in duplam superparticularem; triplam superparticularẽ, &c. prout maior quantitas minorem bis comprehendit, aut ter, quaterue, &c. & insuper vnam partem minoris quantitatis aliquotam.

VNVMQVODQVE rursus horũ generũ in infinita alia subdiuiditur, habita ratione proportionis superparticularis. Nã proportio, v. g. tripla superparticularis continet sub se triplam sesquialteram, (quando scilicet maior quantitas minorem ter cõtinet, & præterea dimidiatã eius

partem;) triplam sesquitertiam; triplam sesquiquartam, & ita infinitas alias.

REPERIEMVS verò omnes proportiones multiplices superparticulares cuiuslibet speciei, si aduertamus diligenter denominatorem partis aliquotæ, & proportionis multiplicis, quarum in proposita proportione mentio fit. Nam si denominatorem partis aliquotæ per denominatorem multiplicis proportionis multiplicemus, productoque numero adiiciamus vnitatem, habebit hic numerus conflatus ad denominatorem partis aliquotæ primam proportionem speciei propositæ. Et si duo numeri duplicati, triplicati, vel per quemuis numerum multiplicati dabunt alios in eadem proportione numeros, nimirum secundos, tertios, vel alterius ordinis, pro numero vnitatum, quæ in numero multiplicante continentur, vt in alijs dictum est. EXEMPLI gratia, si inueniendi sint omnes numeri proportionis sextuplæ sesquinonæ, ducemus 9. denominatorem partis nonæ in 6. denominatorem multiplicis proportionis, productoque numero 54. addemus 1. Conflatus namque numerus 55. ad 9. denominatorem partis nonæ expressa habet primam proportionem sextuplam sesquinonam, ita vt, in minoribus numeris integris ea dari nequeat. Duplicatorum numerorum 110. & 18. erunt secundi numeri in eadem proporlione. Tripli vero 165. & 27. erunt tertij, &c. ita vt eorundem centupli 5500. & 900. exhibeant contesimam proportionem eandem.

EASDEM proportiones multiplices superparticulares inuenies, si constituas duas series numerorum, quarum inferior incipiat à denominatore partis aliquotæ nominatæ, superior autem a numero conflato ex vnitate, & numero producto ex multiplicatione denominatoris partis aliquotæ eiusdem in denominatorem proportionis multiplicis expressæ: Vterq; vero ordo per continuã additionẽ primi numeri sui ordinis ad seipsum, & ad conflatum numerũ, &c. progrediatur, vt in superioribus dictum est. Exempla hic videsis proportionis duplæ sesquialteræ, triplæ sesquiseptimæ, & decuplæ sesquitertiæ.

Proportiones duplæ sesquialteræ.
5.10.15.20.25.30.35.40.45.50.55.60.65.70.&c.
2. 4. 6. 8.10.12.14.16.18.20.22.24.26.28.&c.
Proportiones triplę sesquiseptimæ.
22.44.66.88.110.132.154.176.198.220.242.&c.
7.14.21.28. 35. 42. 49. 56. 63. 70. 77.&c.
Proportiones decuplæ sesquitertiæ.
31.62.93.124.155.186.217.248.279.310.341.&c.
3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.&c.

DE PROPORTIONE multiplici superpartiente.

PROPORTIO denique multiplex superpartiens est habitudo maioris quantitatis ad minorem, quando maior aliquoties complectitur minorem, & insuper aliquot eius partes aliquotas, non conficientes vnam: qualis est proportio 11. *ad* 3. *Dixi, non conficientes vnam, ob causam dictam in proportione superpartiente. Nã si partes illæ aliquotæ vnam efficerent, non esset proportio multiplex superpartiens, sed multiplex super particularis. Vt proportio* 20. *ad* 6. *non dicenda est multiplex superbipartiēs sextas, quamuis* 20. *contineant ter* 6. *& duas sextas; quia duæ sextæ conficiunt vnam tertiam partē. Quare vocabitur proportio tripla sesquitertia.*

DISTRIBVITVR autē hæc proportio primum, habita ratione proportionis multiplicis.

Vt multiplex in duplam superpartientem: triplam superpartientem, &c.

DEINDE quælibet harum, habita ratione numeri partium, sub se continet genera infinita. Vt sub tripla superpartiente, coutinetur tripla superbipariens; tripla supertripartiēs, &c.

POSTREMO quauis istarum, habita ratione denominationis partium aliquotarum: in genera adhuc infinita secatur. Vt tripla supertripartiens diuiditur in triplam supertripartientem quartas; in triplam supertripartiētem quintas, &c. Quarum omnium definitiones, & exempla non difficile est cuiuis ex dictis depromere, &c.

OMNES proportiones multiplices superpartientes postrema diuisionis ita inueniemus. Denominator partium aliquotarum propositarum multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis propositæ, productoque numero addatur numerus partium aliquotarum expressus. Conflatus enim numerus ad earundē partiū aliquotarū denominatorē habet primam proportionem earum, quæ inuestigantur. Atque hi duo numeri, si duplicentur, triplicentur, vel per alium quemcumque numerum multiplicentur, dabunt secundos numeros, tertios, & alios in eadem proportione. VELVTI si quærantur omnes proportiones quadruplæ superoctupartientes vndecimas, ducemus 11. denominatorem partium vndecimarum in 4. denominatorem proportionis quadruplæ, numeroque procreato 44. adiiciemus 8. numerum octo partium. Nam conflatus numerus 52. ad 11. denominatorem partium habet primam proportionem quæsitam. Secundi numeri erunt 104. & 22. Tertij 156. & 33. nimirum illorum dupli, tripli, &c. Centupli autem eorundem, vt 5200. & 1100. habent centesimam proportionem inter omnes quadruplas superoctupartientes vndecimas.

QVOD si duo numerorum ordines constituantur, quo-

rum inferior incipiat à denominatore partium aliquotarum propositarum, & per continuam eiusdem additionem primum ad se, deinde ad numerum conflatum, &c. progrediatur; superior vero incipiat à numero conflato ex numero producto ex eodem partium denominatore in denominatorem multiplicis proportionis data, & ex numero partium expresso, ac per eiusdem continuam additionem primum ad se, deinde ad conflatum numerum, &c. progrediatur; obtinebimus quoque omnes numeros oblatæ proportionis, vt in superioribus quoque diximus. Exempla hic vides in proportione dupla superbipartiente tertias, dupla superquintupartiente sextas, & quintupla supertripartiente quintas.

Proportiones duplę superbipartientes tertias.

8. 16. 24. 32. 40. 48. 56. 64. 72. 80. 88. 96. 104 &c.

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. &c.

Proportiones duplæ superquintupartientes sextas.

17. 34. 51. 68. 85. 102. 119. 136. 153 170. 187. &c.

6. 12. 18. 24. 30. 36. 42. 48. 54. 60. 66. &c.

Proportiones quintuplæ supertripartientesquintas.

28. 56. 84. 112. 140. 168. 196. 224. 252. 280. 308. &c.

5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55 &c.

DE PROPORTIONIBVS rationalibus minoris inæqualitatis.

OMNIA, quæ dicta hactenus sunt de quinque generibus proportionum rationalium maioris inæqualitatis, intelligenda sunt quoque de quinque generibus correspondẽtibus minoris inæqualitatis, præmissa tamẽ sẽper præpositione (sub

vt dictum est. Nam si in exemplis allatis conferantur minores quantitates cum maioribus, habebũtur proportiones minoris inæqualitatis correspondentes. Quemadmodũ. n. proportio 100. ad 1. est centupla, ita proportio 1. ad 100. est subcẽtupla. Sicut etiã proportio 11. ad 3. est tripla superbipartiẽs tertias, ita proportio 3. ad 11. est subtripla superbipartiẽs tertias; Atque ita de cæteris.

NON videtur autem hoc loco prætermittenda insignis utilitas tabulæ Pythagoricæ, quam cap. 4. nostræ Arithmeticæ cõstruximus, in omnibus proportionibus rationalibus inueniendis: quæ eiusmodi est. Constructa tabula Pythagorica, (Est autem constructio facillima; cum numeri in sinistro latere constituant seriem numerorum naturalem, in infinitumque progredi possint; qualibet autem linea in transuersum procreetur ex continua additione numeri in sinistro latere, à quo incipit, ad seipsum, & ad numerum cõflatum, & sic in infinitum: ita vt hæ lineæ in transuersum nil aliud sint, quàm progressiones Arithmeticæ numerorum, quorum differentiæ sint primi numeri earundem linearum.) primũ omnes numeri cuiusuis proportionis multiplicis reperientur hoc modo. Denominator datæ proportionis multiplicis in suprema linea acceptus ad unitatem in sinistro latere habet primam eam proportionem multiplicem: Numeri autẽ sub eodem denominatore descendentes per lineam rectam ad numeros sub unitate in latere sinistro positos, singuli ad singulos, habent secundam, tertiam, quartam, & alias proportiones eiusdem speciei, in infinitum. Vt prima proportio nonuplæ erit inter 9 supremam lineæ ad 1. in sinistro latere; secunda inter 18 sub 9. ad 2. sub 1. tertia inter 27. eiusdem lineæ à 9 descendentis, & 3. in sinistro latere. &c. atque ita de alijs proportionibus multiplicibus dicendum est.

DEINDE omnes numeri cuiusuis proportionis superparticularis sic inuenientur: Ad denominatorem partis aliquotæ, quæ in proportione exprimitur, in latere supremo acceptum habet proxime insequens numerus primam pro-

portionem

portionem datam: Et si per lineam rectam ab hisce duobus numeris descendamus, reperiemus omnes alios numeros eiusdem proportionis, vt de multiplicibus dictum est. Verbi gratia, prima proportio sesquioctaua erit 9. ad 8. alia vero ordine erunt inter numeros sub illis positos, vt secunda inter 18. & 16. tertia inter 27. & 24. &c.

TERTIO sic reperies omnes proportiones superpartientes cuiuslibet speciei. Post denominatorem partium aliquotarum, quarum in proportione data mentio fit, in supremo latere acceptum numera tot numeros, quot partes in eadem proportione nominantur. Vltimus enim ad denominatorem earundem partium habebit primam proportionem superpartientem propositam. Secunda autem, tertia, quarta, & alia ordine, reperientur inter numeros sub illis duobus collocatos. Exempli causa, si quis omnes numeros proportionis superoctupartientis undecimas desideret, sumat in latere supremo denominatorem partium, id est, 11. post quem numeret hos octo numeros, propter octo partes, 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. Vltimus enim 19. ad 11. habet primam proportionem superoctupartientem undecimas. Secundam habebit numerus 38. ad 22. tertiam 57. ad 33. & alias alij numeri sub 19. & 11. per rectam lineam descript.

QVARTO numeros omnes cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis inuenies hac ratione, In supremo latere accipe numerum, qui ad denominatorem partis aliquotae expressa habeat proportionem multiplicem, cuius mentio fit. Numerus enim proxime insequens habebit ad denominatorem partis aliquotae primam proportionem propositam: Secundam autem, tertiam, & alias habebunt numeri sub illis duobus positi. Vt autem scias numerum, qui ad denominatorem partis aliquotae habeat multiplicem proportionem propositam, sumendus est denominator partis in supremo latere, & in sinistro denominator proportionis multiplicis: Vel prior denominator in sinistro latere, & posterior in supremo. In angulo enim communi reperies numerum multiplicem, quem desideras. Exempli gratia: Inueniendi sint omnes numeri proportionis triplae sesqui-

TABVLA PYTHAGORICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308

quinta. Primum quaratur numerus ad denominatorem partis aliquotæ, hoc est, ad 5. triplus, nimirum 15. quem reperies in communi angulo denominatoris proportionis triplæ, qui est 3. & denominatoris partis aliquotæ, qui est 5. quorum alteruter in supremo latere, & alter in sinistro sumatur. Deinde hic numerus triplus, nimirum 15. accipiatur in latere supremo. Numerus enim 16. proxime insequens ad denominatorem partis aliquotæ, id est, ad 5. habet primam proportionem triplam sesquiquintam. Alias proportiones eiusdem speciei reperies in numeris, qui sub illis duobus ponuntur, vt de alijs dictum est.

QVINTO, & vltimo reperientur omnes numeri cuiuslibet proportionis multiplicis superpartientis hoc modo. In latere supremo accipiatur numerus, qui ad denominatorem partium aliquotarum habeat proportionem multiplicem propositam: qui quidem inuenietur quoque in angulo communi denominatoris proportionis multiplicis, & denominatoris partium aliquotarum. Deinde post acceptum numerum multiplicem numerentur tot numeri, quot partium aliquotarum fit mentio. Vltimus namque ad denominatorem partium aliquotarum comperietur habere primam datam proportionem multiplicem superpartientem. Alias proportiones eiusdem speciei reperies sub illa prima, vt de alijs diximus. Vt si cupiat quis omnes proportiones quadruplas supertripartientes quintas. Primum inquirat numerum quadruplum denominatoris partium, qui est 3. Inueniet autem eum numerum esse 20. quippe qui in angulo communi denominatoris proportionis quadruplæ, qui est 4. & denominatoris partium quintarum, qui est 5. descriptus sit. Deinde post numerum hunc 20. inuentum numeret in supremo latere tres hos numeros 21. 22. 23. quod tres partes quintæ nominentur. Nam vltimus 23. ad 3. hoc est, ad denominatorem partium, habet primam proportionem quadruplam supertripartientem quintas. Numeri aliarũ proportionum eiusdem speciei continentur sub ductibus illis numeris, vt in alijs traditum est.

INVENTIS hac arte omnibus numeris cuiuslibet proportionis maioris inæqualitatis, si minores cum maiori-

bus conferantur, inuenti quoque erunt omnes numeri eiusdem proportionis minoris inaqualitatis.

NEQVE vero silentio transiri debet hoc loco admirabilis quædam proprietas cuiuslibet proportionis rationalis; qua sic se habet. Inuentis minimis, siue primis terminis, numerisue cuiuslibet proportionis, si constituatur progressio, seu proportionalitas Arithmetica incipiens à numero, qui vna vnitate minor sit, quàm differentia minimorum illorum numerorum, progredienſque per ipſammet eandem differentiam numerorum minimorum, cadent inter primos numeros illius progressionis tot numeri in serie naturali numerorum, quot vnitates sunt in primo termino constituta tua proportionalitatis Arithmetica; Inter secundos vero, qui primorum dupli sunt, tot, quot in secundo termino eiusdem progressionis continentur vnitates; Inter tertios autem tot, quot vnitates in tertio termino eiusdem progressionis continentur: atque ita deinceps. Exempli gratia, si proponatur proportio dupla, cuius minimi numeri sunt 2. & 1. constituatur progressio incipiens ab 0. (quod differentia inter 2. & 1. sit 1. & figura 0. vna vnitate minor quàm 1.) progredienſq. per continuam additionem vnitatis, nimirum differentia inter 2. & 1. primum ad 0. deinde ad conflatum numerum 1. Postea ad numerum confectum 2. &c. hoc scilicet modo.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10, 11. 12. 13. 14. 15. &c.

Itaque inter primos numeros duplæ proportionis, hoc est, inter 2. & 1, nullus cadit medius numerus: Inter secundos, qui sunt 4. & 2. cadet vnus medius, nimirum 3. Inter tertios 6. 5. duo medij intercipiuntur 5. 4. Inter quartos 8. 4. tres medij existunt 7. 6. 5. & sic deinceps. Id quod in hac formula apparet, vbi numeri extremi cuiuslibet lineæ habent proportiones omnes duplas, vt primam, secundam, tertiam, &c. Multitudines autem numerorum seriei naturalis inter eos cadentium respondent numeris superioris proportionalitatis Arithmetica.

						2	1			
					4	3	2			
				6	5	4	3			
			8	7	6	5	4			
		10	9	8	7	6	5			
	12	11	10	9	8	7	6			
14	13	12	11	10	9	8	7			
16	15	14	13	12	11	10	9	8		
18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10

QVOD si superiori proportionalitati Arithmetica superponas seriem naturalem numerorũ, quæ ab 1. incipiat, ita vt singuli eius termini singulis terminis constituta tua Arithmetica proportionalitatis respondeant, dicto citius cognoscemus, quotnam numeri cadant medij inter quosuis duos numeros proportionis duplæ. Numeri enim seriei huius naturalis indicabunt, quem locum duo numeri dupla proportionis obtineant, respondentes vero numeri in proportionalitate Arithmetica constituta multitudinem numerorũ inter illos cadentium significabunt. Exemplum hic vides.

Ordo proportion. duplarũ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multitudo mediorum numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

Itaque

Itaque si scire cupias, quot numeri cadant inter undecimos numeros proportionis duplæ, cape in serie naturali numerum 12. cui supponitur numerus 10. Dices ergo 10. numeros inter illos intercipi, & sic de cæteris.

PROPONATVR deinde proportio decupla, cuius termini minimi sunt 10. & 1. Differentia eorum est 9. & numerus una unitate minor, 8. Progressio ergo Arithmetica incipiet ab 8. progredieturque per continuam additionem 9. primum ad 8. deinde ad numerum conflatum 17. & sic deinceps; vt hic videre licet, vbi suprascripsimus etiam seriem numerorum naturalem, cuius idem vsus hic est, qui supra fuit in proportione dupla.

Ordo propor. decuplarum.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	8	17	26	35	44	53	62	71	&c.

Itaque inter primos numeros decuplæ proportionis cadent 8 numeri medij; Et 17. inter secundos: Et 26. inter tertios. At inter octauos intercipientur 71. numeri medij. & sic de cæteris. Vt hæc formula declarat.

10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

20. 19. 18 17. 16. 15. 14. 13. 12, 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5, 4. 3. 2.

RVRSVS detur proportio quacunque superparticularis. Et quoniam duo minimi numeri differunt sola unitate, quemadmodum & minimi numeri proportionis duplæ, inseruient hic eadem progressiones, quæ in dupla proportione, ita vt idem numerus sit numerorum mediorum hic, qui ibi. Vt hic perspicuum est in proportione sesquioctaua.

Ordo propor. sesquioct.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	&c.
Multit. med. numerorum.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	&c.

						9	8
					18	17	16
				27	26	25	24
			36	35	34	33	32
		45	44	43	42	41	40
	54	53	52	51	50	49	48
63	62	61	60	59	58	57	56

OFFERATVR quoque proportio superquadruparsiens septimas, cuius minimi termini sunt 11. *&* 7. *Differentia eorum est* 4. *Progressio ergo Arithmetica incipiet a* 3. *progredieturque per* 4. *vt hic patet, una cum serie naturali*

Ordo propor. superquadr.	1	2	3	4	5	6	7	8 &c.
Multit. med. numerorum.	3	7	11	15	19	23	27	31 &c.

Igitur inter primos numeros proportionis superquadruparsientis septimas cõprehenduntur 3. *numeri medij. Et* 7. *inter secũdos: Et* 23. *inter sextos, atq; ita de cæteris, vt hic vides.*

11. 10. 9. 8. 7.

22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14.

33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21.

44. 43. 42. 41. 40. 39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28.

ITEM data sit proportio dupla sesquisexta, cuius numeri minimi sunt 13. *&* 6. *Differentia eorum est* 7. *Incipiet er-*

go progressio a 9. habebitque differentiam 7. inter eius numeros, vt hic cernitur, una cum serie naturali numerorũ.

Ordo propor. dup. sesquisex.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum	6	13	20	27	34	41	48	55	&c.

Inter primos ergo numeros proportionis dupla sesquisexta cadent 6. medii numeri: inter secundos, 13. & inter octauos, 55. &c. veluti hic cernitur.

13. 12. 11. 10. 9. 8. > 6.

26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

39. 38. 37. 36. 35. 34. 33. 32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18

POSTREMO propositum sit idem experiri in proportione dupla superbipartiente tertias, cuius minimi termini sunt 8. & 3. Et quia eorum differentia est 5. sumet progressio Arithmetica initium a 4. habebuntque eius numeri differentiam 5. veluti hic manifestum est, una cum numerorum naturali serie.

Ordo propor. duplarũ super bip. tertias.	1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
Multit. med. numerorum.	4	9	14	19	24	29	34	39	&c.

Cadens ergo inter duos primos numeros proportionis duplæ superbipartientis tertias, 4. numeri medij; & inter secundos 9. & inter septimos, 34. &c. vt hic perspicuum est.

8. 7. 6. 5. 4. 3.

16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6.

24. 22. 22. 21 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12. 11. 10. 9.

32. 31. 30. 29. 28. 27. 26. 25. 24 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16. 15. 14. 13. 12.

MANIFESTVM autem est, quod de proportionibus maioris inæqualitatis hoc loco diximus, verum quoque esse de minoris inæqualitatis proportionibus, cum ijdem numeri

inter

inter maiorem numerum, ac minorem, & inter minorem, ac maiorem interÿciantur.

CAETERVM *ex ijs, quæ de quinque ſpeciebus proportionis rationalis tam maioris, quam minoris inæqualitatis diximus, perſpicue colligitur, non poſſe plura eſſe genera proportionis rationalis maioris inæqualitatis, quam quinque iam expoſita. Cum enim, vt Euelides demonſtrat propoſ. 5 lib. 10. commenſurabiles quãtitates quæcunque, inter quas, vt diximus, eſt proportio rõnalis, inter ſe proportionẽ eã habeãt, quã numerus ad numerũ; ſit, vt omnis proportio rõnalis quarũcunq; quantitatũ continuarũ aſſignari, ſeu exhiberi poſſit in numeris. Aut igitur maior numerus comprehendit minorem, ad quem refertur, aliquoties perfectè; qua ratione conſtituitur proportio multiplex: Aut ſemel tãtummodo, ac præterea vnam eius partem aliquotam; & ſic habetur proportio ſuperparticularis: Aut ſemel duntaxat, & inſuper plures partes eius aliquotas non facientes vnam; & conficitur proportio ſuperpartiens: Aut aliquoties, & vnam eius partem aliquotam; & colligitur proportio multiplex ſuperparticularis: Aut denique aliquoties, & plures eius partes aliquotas non faciẽtes vnã; et exurgit proportio multiplex ſuperpartiens. Neque vero alio modo maior quantitas minorẽ continere, aut minor quãtitas a maiore cõtineri poteſt. Eadem ratione cõſtat, totidẽ eſſe genera proportionis minoris inæqualitatis. Recte ergo proportionẽ rationalẽ tum*

maio-

maioris inæqualitatis, tum minoris, in quinque genera, quæ expoſuimus, partiti ſumus.

DE PROPORTIONVM rationalium Denominatoribus

QVONIAM vero non exiguus eſt vſus Denominatorum proportionum rationalium, quas hactenus expoſuimus, non abs re erit, paucis docere, à quibuſnam numeris ſingulæ proportiones denominentur. Denominator ergo cuiuslibet proportionis, dicitur is numerus, qui exprimit diſtincte, & aperte habitudinẽ vnius quantitatis ad alteram: Vt denominator proportionis octuplæ eſt 8. Nam hic numerus indicat, maiorem quantitatem proportionis octuplæ continere minorem octies. Similiter denominator proportionis ſeſquiquintæ eſt $1\frac{1}{5}$; quoniam iſte numerus ſignificat, maiorem quantitatem proportionis ſeſquiquintæ, continere minorem ſemel, & quintam eiuſdem partem. Atque ita de reliquarum proportionum denominatoribus dicendum erit. Inde factum eſt, vt arbitror, quod Euelides in lib. 6. & plerique alij Mathematici, appellent denominatorem cuiuſuis proportionis, quantitatem illius; quia denominator, vt diximus, oſtendit, quanta ſit vna quantitas ad alteram, cum qua confertur, vt ex propoſitis exemplis conſtat.

EX ijs autem, quæ diximus, facile colligi poteſt denominator cuiuſque proportionis. Denominator enim proportionis multiplicis, quæcunque ea ſit, eſt numeras integer tot continens

vnitates, quoties maior quantitas minorem continere dicitur in ea proportione, cuius denominator quæritur. Vt proportionis duplæ denominator est 2. Noncuplæ, 9. Octuplæ, 100. Millecuplæ, 1000. &c. Denominatores autem proportionum submultiplicium multiplicibus correspondentium, sunt partes aliquotæ a denominatoribus proportionum multiplicium, quibus respondent, denominatæ. Vt denominator proportionis subduplæ, est $\frac{1}{2}$; subquintuplæ, $\frac{1}{5}$. subnoncuplæ, $\frac{1}{9}$. subcentuplæ, $\frac{1}{100}$. submillecuplæ, $\frac{1}{1000}$. Eodem modo, denominatores aliarũ proportionũ submultiplicium reperiemus. Itaque denominator cuiuscunque proportionis submultiplicis est numerus fractus, cuius numerator perpetuo est vnitas, denominator autem, numerus proportionem multiplicem correspondentem denominans, vt ex prolatis exemplis patet. Neque vero vlla difficultas est in cuiusque proportionis multiplicis, vel submultiplicis denominatore reperiendo, si ea, quæ dicta sunt, recte intelligantur: quippe cum ipsa prolatio proportionis denominatorem offerat, vt ex datis exemplis manifestũ est.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis superparticularis est vnitas cum parte illa aliquota, quam maior quantitas debet vltra minorem comprehendere. Vt proportionis sesquialteræ denominator est $1\frac{1}{2}$: sesquioctauæ, $1\frac{1}{8}$. sesquimillesimæ, $1\frac{1}{1000}$, &c. Neque difficile erit denominatorem cuiusque proportionis superparticularis inuenire: cum ipsa proportionis prolatio

denominatorẽ exprimat per suã partẽ aliquotã vt ex datis exẽplis perspicuũ est. Denominatores autẽ proportionum subsuperparticulariũ correspondentium, sunt fractiones, quarum numeratores vna tantum vnitate minores sunt earundem denominatoribus. Vt denominator proportionis subsesquialterę, est $\frac{1}{2}$; subsequioctauę, $\frac{7}{8}$. subsesquimillesimę, $\frac{999}{1000}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotę in proportione expreßę, & pro eiusdem fractionis denominatore, numerus vnitate maior. Vt denominator proportionis subsesquidecimę est $\frac{10}{11}$. cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partem decimam, nimirum 10. denominator autem eiusdem fractionis numeratorem superet vnitate, &c. Reperiemus quoque denominatorẽ cuiusuis proportionis subsuperparticularis hoc modo. Denominatorẽ correspondẽtis proportionis superparticularis reuocabimus ad vnã fractionẽ, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidẽ numerator superabit hic sẽper vna vnitate denominatorẽ, qui etiã denominator est partis aliquotę, cuius mẽtio fit in oblata proportione. Nã si huius fractionis terminos inuertamus, vt ex numeratore fiat denominator, et ex denominatore numerator, habebimus denominatorẽ propositę proportionis subsuperparticularis. Vt si offeratur proportio subsesquiseptima: quoniam denominator proportio-

nis

nis sesquiseptimæ, quæ illi respondet, est $1\frac{1}{7}$. qui reuocatur ad hanc fractionem $\frac{8}{7}$. cuius numerator vna vnitate maior est, quam denominator partis aliquotæ. Quare si eã fractionẽ inuertamus hoc modo $\frac{7}{8}$. dicemus denominatorem proportionis sesquiseptimæ esse $\frac{7}{8}$. Facilius denique cuiusuis proportionis subsuperparticularis denominator forta ſſis reperietur, si inueniantur primi numeri habẽtes proportionẽ superparticularẽ respondentẽ, vt supra docuimus. Nã fractio, cuius numerator sit eorũ numerorũ minor, denominator vero, maior, erit denominator propositæ proportionis. Vt si proponatur proportio subsesquiseptima: quoniã primi, siue minimi numeri habẽtes proportionẽ sesquiseptimã, sunt 8. et 7. si ex minore fiat numerator, et ex maiore denominator, cõficiemus hãc fractionẽ $\frac{7}{8}$. pro denominatore proportionis sesquiseptimæ propositæ, vt prius.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis supertripartientis est vnitas cũ illis partibus aliquotis nõ efficientibus vnã, quas maior quãtitas debet vltra minorẽ cõtinere. Vt denominator proportionis supertripartientis septimas, est $1\frac{3}{7}$. supertripartientis vigesimas, $1\frac{3}{20}$. etc. Neq; vlla difficultas est in huiusmodi denominatoribus inueniendis: propterea quod prolatio ipsa proportionis denominatorẽ propriũ exhibet, vt ex superioribus exẽplis liquido constat. Denominatores autẽ proportionũ subsuperpartientium, sunt fractiones, quarum numeratores tot vnitatibus minores sunt, quã earundem fractionum denominatores, quot

partibus aliquotis maior quantitas minorem superat. Vt denominator proportionis subsupertripartientis septimas, est $\frac{7}{10}$; subsupertripartientis vigesimas: $\frac{9}{12}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis subsuperpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quæ in proportione exprimuntur, cui si addatur numerus earundē partium, habebitur eiusdem fractionis denominator. Vt denominator proportionis subsuperquadripartientis undecimas, est $\frac{11}{15}$, cum huius fractionis numerator sit numerus denominans partes undecimas, nimirum 11. cui additus est numerus 4. quatuor partium, vt fiat eiusdē fractionis denominator 15. Denominator autē proportionis subsupertripartientis quintas est hæc fractio, $\frac{5}{8}$. Nam eius numerator est numerus denominans partes quintas, nimirum 5. Denominator autem 8. eiusdem fractionis conflatus est ex illo numeratore 5. & ex numero 3. trium partium. Eademque ratione reperiemus & aliarum proportionum subsuperpartientiū denominatores. Quos hac etiam ratione inuenies. Reuoca denominatorem proportionis cuiusque superpartientis correspondentis ad vnam fractionem, vt in Arithmetica docuimus; cuius quidem numerator denominatorem, qui partes etiam aliquotas expressas denominat, superabit hic semper tot vnitatibus, quot sunt partes aliquotæ. Nam huius fractionis numeri inuersi, vt ex numeratore fiat denominator, & ex denominatore numera-

tor, dabunt denominatorem propositæ proportionis subsuperpartientis. Vt denominator proportionis subsuperdecupartientis decimastertias est $\frac{1}{2}\frac{3}{5}$ quia denominator proportionis superdecupartientis decimastertias est $1\frac{1}{1}\frac{0}{3}$. qui ad hanc fractionem $\frac{3}{1}\frac{3}{3}$ reuocatur, cuius numeri inuersi efficiunt hanc fractionem $\frac{1}{2}\frac{3}{3}$. Denique facilius cuiusuis proportionis subsuperpartiẽtis denominator inuenietur fortassis, si reperiantur primi, vel minimi numeri habẽtes proportionem superpartientem correspondentem, vt supra tradidimus. Fractio etenim, cuius numerator sit eorum numerorum minor; denominator autem, maior, denominator erit propositæ proportionis subsuperpartiẽtis. Veluti si proponatur proportio subsuperquadrupartiens nonas: quoniam minimi numeri habẽtes proportionem superquadrupartientem nonas sunt 13. & 9. faciemus fractionẽ $\frac{9}{1}\frac{13}{3}$ pro denominatore proportionis subsuperquadrupartientis nonas: & sic de cæteris.

DENOMINATOR cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis est numerus integer multiplicem proportionem expressam denominans, cum illa parte aliquota, quã maior quantitas continere debet vltra minorem quantitatẽ. Vt denominator proportionis triplæ sesquiseptimæ est $3\frac{1}{7}$. Quintuplæ sesquinonæ, $5\frac{1}{9}$, &c. Vt nullus omnino labor sit, exhibere denominatorẽ cuiuslibet proportionis multiplicis superparticularis; quippe cum ipsa prolatio proportionis distinctè exprimat & denominatorem multiplicis

proportionis, & partem aliquotam, vt exempla proposita declarant. Denominatores autem proportionum submultiplicium superparticularitū, sunt fractiones, quarum numeratores numeri sunt denominantes partes aliquotas in proportionibus expressas. Vt denominator proportionis subtriplæ sesquiseptimæ, est $\frac{7}{3}$; subquintuplæ sesquinonæ, $\frac{9}{5}$; &c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superparticularis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partis aliquotæ, qui si multiplicetur per denominatorem proportionis multiplicis, addaturq. vnitas numero producto, habebitur denominator eiusdē fractionis. Vt denominator proportionis subquadruplæ sesquisextæ, est $\frac{6}{4}$; cū huius fractionis numerator 6. denominet partes sextas, isq. ductus sit in 4. denominatorē proportionis quadruplæ, ac producto numero 24. addita vnitas, vt eiusdē fractionis denominator consiciatur 25. &c. Idē denominatores proportionū submultipliciū superpartitularitū inuenientur, si denominator cuiusuis proportionis multiplicis superparticularis respondētis reuocetur ad vnā fractionē, vt in Arithmetica docuimus, multiplicādo nimirū denominatorē multiplicis proportionis per denominatorē fractionis ei adhærētis, & producto numero vnitatē, ideſt numeratorē eiusdem fractionis addendo. Nam si huius fractionis termini commutēt ordinē inter se, fiet denominator proportionis propositæ. Vt si detur proportio subquadrupla sesquisextæ: quoniā de-

nomi-

nominator correſpondentis proportionis quadruplæ ſeſquiſextæ eſt $4\frac{1}{6}$. *ducemus* 4. *id eſt, denominatorem multiplicis proportionis, in* 6. *hoc eſt, in denominatorem fractionis adhærentis, numeroque producto* 24. *addemus* 1. *nimirum numeratorem eiuſdem fractionis, vt totum denominatorem* $4\frac{1}{6}$. *reuocemus ad hanc fractionem* $\frac{25}{6}$. *Cuius termini ſi inter ſe ordinem permutent, fiet hæc fractio* $\frac{6}{25}$. *pro denominatore proportionis ſubquadruplæ ſeſquiſextæ. Eodemque modo in cæteris agendum erit. Denique facilius fortaſſe denominatorem cuiuſque proportionis ſubmultiplicis ſuperparticularis inuenies, ſi duos primos, minimoſue numeros proportionis multiplicis ſuperparticularis correſpondentis reperias, vt ſupra traditum eſt. Nam fractio, cuius numerator ſit minor eorum numerus, denominator autem, maior, erit denominator proportionis propoſitæ. Vt ſi offeratur proportio ſubtriplaſeſquiſeptimæ: quoniam primi, ſiue minimi numeri proportionis triplæ ſeſquiſeptimæ ſunt* 22. *&* 7. *fiet ex illis fractio hæc* $\frac{7}{22}$ *pro denominatore proportionis ſubtriplæ ſeſquiſeptimæ, atque ita de cæteris.*

DENOMINATOR cuiuſuis proportionis multiplicis ſuperpartientis, eſt numerus integer denominans proportionem multiplicem in ea expreſſam, cũ illis partib. aliquotis, non conſtituẽtibus vnã, quas maior quantitas vltra minorem debet cõprehẽdere. Vt denominator proportionis triplæ ſuperquinquepartientis octauas, eſt $3\frac{5}{8}$;

quadruplæ superbipartientis quintas, $4\frac{3}{5}$. *&c. Nihil enim difficultatis habet hæc inuentio denominatorum in proportionibus multiplicibus superpartientibus, quod aperte, & distincte in qualibet earum exprimatur tam denominator proportionis multiplicis in ea contentæ, quam partes aliquotæ, vt perspicue in exemplis prolatis apparet. Denominatores vero proportionũ submultiplicium superpartientium, sunt fractiones, quarũ numeratores numeri sunt denominãtes partes aliquotas, quæ in proportionibus expressæ sunt. Vt denominator proportionis subtriplæ superquincupartientis octauas, est* $\frac{8}{9}$. *subquadruplæ superbipartientis quintas*, $\frac{5}{2\,2}$. *&c. Inuenietur autem denominator cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis, si pro numeratore fractionis sumatur denominator partium aliquotarum, quem si multiplices per denominatorem proportionis multiplicis, numeroque producto addas partium aliquotarum numerum, obtinebis eiusdem fractionis denominatorem. Vt denominator proportionis subduplæ superoctupartiẽtis decimas tertias, est* $\frac{1}{3\,4}$. *quia huius fractionis numerator 13. denominat partes tertias decimas: qui si ducatur in 2. denominatorem duplæ proportionis, producto numero 26. adiiciatur numerus 8. octo partium, conficietur eiusdem fractionis denominator 34. &c. Denominatorem quoque cuiuslibet proportionis submultiplicis superpartientis sic reperies. Reduc denomina-*

torem proportionis multiplicis superpartientis, quæ propositæ respondet, ad vnam fractionem: vt in Arithmetica præcepimus, nimirum multiplicando denominatorem multiplicis proportionis per denominatorẽ fractionis ei adhærẽtis, & producto numero addẽdo numeratorẽ eiusdẽ fractionis. Nam huius fractionis termini, si inter se permutent ordinẽ, dabunt fractionẽ, quæ denominator erit proportionis submultiplicis superpartiẽtis. Veluti si proponatur proportio subquintupla supertripartiẽs decimas, reducemus denominatorem correspondentis proportionis quintuplæ supertripartientis decimas, hoc est, $5\frac{3}{10}$. ad hanc fractionem $\frac{53}{10}$. quod fit ducendo 5. in 10. productoque numero addendo 3. vt fiat numerator 53. cui idem denominator 10. supponendus est. Nam si hæc fractio terminos permutet, fiet denominator proportionis subquintuplæ supertripartientis decimas, $\frac{10}{53}$. &c. Sed forsitan facilius denominatorem cuiusuis proportionis submultiplicis superpartientis obtinebis, si primos, siue minimos numeros proportionis multiplicis superpartientis respondentis reperias, ex eisque fractionem constituas, sumendo minorem pro numeratore, & maiorem pro denominatore. Fractio enim hæc dabit denominatorem proportionis propositæ. Vt si proponatur proportio subquintupla supertripartiens decimas: quoniam minimi numeri in proportione quintupla supertripartiẽte decimas sunt 53. & 10. constituetur ex eis denominator propor-

tionis

tionis propositæ hæc fractio $\frac{1}{5}-\frac{0}{3}$. et sic de cæteris.

DENOMINATOR denique proportionis æqualitatis perpetuo est vnitas: quia vna quantitas debet in ea proportione esse æqualis alteri, ac proinde vna alteram continere semel, & nihil præterea. quod quidem vnitas significat.

EX his, quæ de proportionũ denominatoribus diximus, perspicuum esse puto, denominatores proportionum maioris inæqualitatis re & nomine ipsas proportiones maioris inæqualitatis denominare; denominatores vero proportionum minoris inæqualitatis re tantũ, non autẽ & verbo, siue nomine, denominare proportiones minoris inæqualitatis. Id quod ex prolatis exemplis liquido constat. Nam denominator, verbi gratia, proportionis triplæ superquadrupartientis nonas, qui est $3\frac{4}{9}$. hoc est, trid integra, & quatuor nona partes, re & verbo denominat eam proportionem, cum distincte, aperteque nobis indicet, in ea maiorem quantitatem cõtineri meorem ter, & insuper quatuor eius partes nonas. At vero denominator correspondẽtis proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas, nimirum $\frac{9}{3}$. id est, nouem trigesimaprimæ partes, re quidem ipsa proportionem subtriplam superquadrupartientem nonas denominat, cum verè significet, minorem quantitatem in ea esse maioris nouem partes trigesimas primas, quod omnino necessariũ est, vt minor quantitas ad maiorem habeat proportionem subtriplã perquadrupartientem nonas: Verbo autem, siue nomine, eam proportionem nequaquam denominat; quippe cũ $\frac{9}{3}$. hoc est, nouem partes trigesimaprimæ cum nomine proportionis subtriplæ superquadrupartientis nonas nihil videantur habere commune, sed penitus abeo discrepare.

QVARE si denominator alicuius proportionis minoris inæqualitatis numeris expressus sit, nimirum per fractionẽ, vt dictũ est: vt scias, quo pacto proportionem, quam denominat, offerre debeas; vide quam proportionem habeat denominator eius fractionis ad numeratorem: quod scies, si partiaris denominatorẽ fractionis per numeratorem. Nam

Quo-

Quotiens denominabit proportionē, quam denominator fractionis habet ad numeratorem. Eodem enim nomine proportionem dati denominatoris proportionis minoris inæqualitatis pronūciabis, præpositā tantū syllabā, sub, quo illa denominatoris fractionis ad numeratorē appellatur. Vt si detur denominator $\frac{1}{3}$, dicetur eius proportio subdecupla. Quando.n. numerator fractionis est vnitas, proportio dati denominatoris erit submultiplex ab eiusdē fractionis denominatore denominata. Quod si datus denominator sit $\frac{2}{3}\frac{0}{1}\frac{0}{7}$. Diuiso denominatore 327. per numeratorē, fit Quotiēs $10\frac{7}{2}\frac{0}{1}$. Denominator igitur fractionis $\frac{2}{3}\frac{0}{1}\frac{0}{7}$. ad numeratorē habet proportionē sedecuplā superseptupartientem vigesimas: ac proinde proportio, cuius denominator est $\frac{2}{8}\frac{0}{1}\frac{0}{7}$. dicēda est subsedecupla superseptupartiēs vigesimas, & sic de cæteris.

QVIA vero non semper commode omnes proportiones proprijs nominibus appellari possunt, (quis enim proportionem, v.g. 37. ad 1. commode dixerit triginta septuplam, vel trigecuplam septuplam, vel alio id genus nomine? Quis itē commode proportionem 48. ad 29. dixerit supernonemdecupartientem vigesimasnonas? &c.) solēt Geometræ plerūque in suis scriptis exprimere proportionem quamcunque per primos, siue minimos numeros eius proportionis. Vt proportionem 13. ad 1. vel 39. ad 3. vel 390. ad 30. malunt dicere eam, quam habent 13. ad 1. quam tredecuplam. Et viciſſim proportionem 1. ad 13. vel 3. ad 39. vel 30. ad 390. potius dicunt eam, quam habet 1. ad 13. quàm subtredecuplam. Ita quoque proportionē 52. ad 40. vocant proportionē 13. ad 10. quæ alias diceretur supertripartiēs decimas. Proportionē vero 40. ad 52. appellāt eā, quæ est 10. ad 13. quæ proprio nomine diceretur subsupertripartiens decimas, & sic de alijs.

QVANQVAM autem proportio qualibet exprimi possit per minimos eius numeros, vt diximus: perneccſſaria tamen est cognitio denominatoris eiusdem proportionis, vt habitudinem vnius numeri ad alterum cognoscamus. Nam etiamsi alicuius proportionē numeri 1700. ad 400. dicat esse eam, quæ est numeri 17. ad 4. non intelligam tamen plane, quanā sit illa proportio, nisi eius denominatorē cognouero, qui est $4\frac{1}{4}$. Hic enim manifeste declarat, maiorē numerū

con-

continere minorẽ quater, & insuper quartam eius partem. Atque hic denominator facilius ex minimis numeris alicuius proportionis percipitur, quam ex numeris non minimis. Quòd si quãdo minimi numeri alicuius proportionis sint ita magni, vt denominator ex illis non facile possit intelligi, recurrendum erit ad praeceptum, quod mox subiungam, & ex quo denominator proportionis inter quoslibet duos numeros, siue minimi ij sint, siue non, notus efficitur.

QVOD si proportionem quamcunque per eius numeros minimos efferunt Mathematici, licebit nobis multo commodius proportionem quorumlibet duorum numerorum explicare per eius proportionis denominatorem: ita vt proportionem 100. ad 20. dicamus eam, cuius denominator est 5. Item proportionem 48. ad 38. eam, cuius denominator est $1\frac{5}{19}$. qua dicenda esset superquintupartiens decimasnonas, sic etiam proportio 20. ad 100. dici potest ea, qua habet denominatorem $\frac{1}{5}$. Et proportio 33. ad 48. ea, cuius denominator est $\frac{1}{3}\frac{9}{16}$. atque ita de reliquis; quoniam videlicet denominator clarissime demonstrat habitudinem vnius numeri ad alium, vt dictum est.

DENOMINATOR porro proportionis inter duos quoslibet numeros ita reperietur. Diuidatur numerus antecedens, qui minimum ad alium refertur, per consequentẽ. Quotiens enim numerus, reducta prius fractione, si qua adsit, ad minimos numeros, vt in Arithmetica tradidimus, erit eius proportionis denominator. Veluti proposita proportione 39. ad 3. vel 390. ad 30. dicemus denominatorem eius esse 13. Quotientem videlicet numerum diuisionis 30. per 3. vel 390. per 39. Quod si vicissim conferantur 3. cum 39. vel 30. cum 390. erit quotiens diuisionis fractio hac $\frac{3}{39}$. vel $\frac{30}{390}$. Nã quando minor numerus per maiorẽ diuiditur, Quotiẽs semper est fractio, cuius numerator est minor numerus, & denominator, maior, vt in Arithmetica explicauimus. Et quia vtraq. fractio, si eius numeri ad minimos reuocẽtur, reducitur ad hanc $\frac{1}{13}$. dicemus denominatorem proportionis 3. ad 39. vel 30. ad 390. esse $\frac{1}{13}$. Rursus data proportione 52. ad 40. ex diuisione 52. per 40. fit Quotiens $1\frac{12}{40}$. cuius fractio reducitur ad hanc $\frac{3}{10}$. Igi-

tur

tur denominator proportionis 52. ad 40. erit 1 3/10. Si autem proportio offeratur 40. ad 52. inuenietur denominator siue Quotiens 4/5. hoc est, in minimis numeris, 1/1 0/3. Praterea proportio 100. ad 20. denominatem habebit 5. Diuisis enim 100. per 20. Quotiens est 5. Proportionis vero 20. ad 100. denominator erit 1/5. propterea quod diuisis 20. per 100. Quotiens est 1/100. id est, in minimis numeris 1/5. Deinde denominator proportiones 48. ad 10. erit 4 4/5. quod diuisis 48. per 10. Quotiens fit 4 8/10. hoc est in numeris minimis, 4 4/5. At denominator proportionis 10. ad 48. erit 1/4 0/8. id est, in minimis numeris 5/4. Et quia denominator fractionis, 5/4. ad numeratorem habet proportionem quadruplam superquadrupartientem quintas (quod diuisis 24. per 5. Quotiens fiat 4 4/5 appellabitur proportio 10. ad 48. subquadrupla superquadrupartiens quintas. Vt enim rite efferatur proportio minoris inaequalitatis, denominanda prius est propertio denominatoris fractionis ad numeratorem, vt supra diximus.

INVENTO denominatore proportionis duorum numerorum in minimis numeris, vt dictum est, eoque reducto ad vnam fractionem, vt in Arithmetica traditum est, erunt numerator, & denominator fractionis, minimi numeri, inter quos illa proportio reperitur. In multiplici tamen proportione, quando nimirum denominator inuentus non habet annexam fractionem, erunt denominator inuentus, & vnitas, minimi numeri illius proportionis. Vt quoniam denominator proportionis 348. ad 120. est 2 9/10. si reducatur ad hanc vnam fractionem, 2/1 9/10. (quod fit, ducendo integrum numerum 2. in denominatorem fractionis 10. productoque numero 20. eiusdem fractionis numeratorem 9. addendo.) erunt 29. & 10. minimi numeri habentes proportionem eandem, quam 348. ad 120. Sic etiam, quia denominator proportionis 824. ad 1133. est 8/11. erunt 8. & 11. minimi numeri proportionis 824. ad 1133. Item quia denominator proportionis 84. ad 12. est 7. erunt in ea proportione minimi numeri 7. & 1. Vicissim numeri minimi proportionis 12. ad 84. cuius denominator est 1/7. erunt 1. & 7. Itaque propositis duobus numeris quibuscunque, si quarantur minimi nume-

ri eandem, quam illi habentes proportionem, inueniendus erit denominator proportionis earum, vt dictū est, isque ad vnam fractionem redigendus. Huius enim fractionis numerator, & denominator, erunt minimi numeri quæsiti. Vt si quærantur minimi numeri proportionis, quā habent 400 ad 90. Diuiso antecedente per consequentem terminum, fit Quotiens $2\frac{4}{9}$ in minimis numeris. Quo reuocato ad hanc fractionem $\frac{40}{9}$, dicemus, minimos numeros proportionis 400. ad 90. esse 40. & 9. Eademque ratio est de cæteris.

IAM vero si, propositis duabus proportionibus, cognoscere velis, vtra earum maior sit, vel minor, dices eam maiorem esse, cuius denominator maior est, minorem vero eam, cuius denominator est minor. Quod si denominatores sint æquales, proportiones quoque æquales esse pronunciabis. Vt si proponantur duæ hæ proportiones, superoctupartiens decimasquintas, & superdecupartiens decimas septimas, quarū denominatores sunt $1\frac{8}{15}$ & $1\frac{10}{17}$, dices priorem posteriore esse minorem: quia denominator $1\frac{8}{15}$ minor est denominatore $1\frac{10}{17}$. Qua vero arte cognoscas vtra duarum fractionum maior sit, vel minor, an vero æquales sint, tradidimus in Arithmetica. Eadem ratione, si offerantur duæ proportiones, quarum denominatores sint $10\frac{1}{1000}$ & $9\frac{100}{101}$, dicemus priorē esse maiorem. Quanquam enim fractio $\frac{1}{1000}$ minor sit fractione $\frac{100}{101}$, numerus tamen integer 10. integro numero 9. maior est. Sic si dentur duæ proportiones, vna 17. ad 11. altera 18. ad 12. dices illam hac esse maiorem, quia illius denominator $1\frac{6}{11}$ maior est huius denominatore $1\frac{1}{2}$. Cæterum, quando duæ proportiones proponuntur in numeris, dignoscemus facile, vtra earum sit maior, etiamsi earum denominatores non inquiramus, hac ratione. Multiplicato antecedente termino prioris proportionis in terminum consequentem posterioris, & termino antecedente posterioris in consequentem terminum prioris; cuius proportionis antecedens terminus maiorem numerum produxerit, illa proportio maior est: Et si duo æquales numeri geniti fuerint, proportiones inter se æquales erunt. Vt si proponantur duæ proportiones 17. ad 11. & 18. ad 12. comperiemus priorem maiorem esse, quia illius

antece-

antecedens 17. in huius consequentem 12. ductus procreat 204. at antecedens huius 18. in consequentē illius 11. producit tantūmodo 198. Rursus si dentur duæ proportiones 18. ad 12. & 108. ad 72. producetur idem numerus 1296. tam ex prioris antecedente 18. in posterioris consequentem 72. quàm ex antecedente posterioris 108. in consequentem prioris 12. multiplicato. Quare proportiones ipsæ æquales inter se erunt. Ratio huiusce operationis est: quia hac ratione, propositis quatuor numeris, multiplicantur inter se tam extremi duo, quam duo intermedij, vt in datis exemplis patet. Igitur si procreentur numeri æquales, erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum, vt ab Euclide demonstratur lib. 7. propos. 19. Hinc fit, si primus in quartum producat maiorem numerum, quam secundus in tertium, maiorem esse primum, quam vt eandem habere possit proportionem ad secundum, quam tertius ad quartū: quandoquidem minor esse deberet, vt eundē numerum posset producere, ac proinde eandem habere proportionem.

DESIDERANTVR nonnunquam duo numeri in quacunque proportione, siue ij primi sint, siue non; hos ergo, vt inueniamus, multiplicabimus quemcunque numerum assumptum, vel diuidemus, per propositæ proportionis denominatorem. Nam productus numerus ad assumptum, qui multiplicatus est, vel assumptus, qui diuisus est, ad Quotientem habebit proportionem propositam: Verbi gratia, si sint inueniendi duo numeri in proportione quintupla, ducemus quemcunque numerum, vt 100. in denominatorem 5. Productus enim numerus 500. ad multiplicatum numerum 100. proportionem habebit quintuplam. Vel eundem numerum 100. diuidemus per denominatorem 5. Nam diuisus numerus 100. ad Quotientem 20. habebit quoque datam proportionem quintuplam. Ita quoq; si inueniendi sint duo numeri in proportione dupla sesquitertia, cuius denominator est $2\frac{1}{3}$. multiplicabimus quemuis numerum, vt 24. per $2\frac{1}{3}$. Productus enim numerus 56. ad numerum multiplicatum 24. habet proportionem denominatam à $2\frac{1}{3}$. Item si numerum 24. diuidamus per $2\frac{1}{3}$. habebit diuisus numerus 24. ad Quotientem $10\frac{3}{7}$. propor-

tionem

tionem datam duplam sesquitertiam. Sed vt fractiones vitentur, si quidem per multiplicationem rem expedire lubet, accipiendus erit numerus multiplicandus, qui numeretur à denominatore partis aliquotæ, vel plurium partium, quarũ in proportione fit mentio: In proportione tamen multiplici, quia nullius partis fit mentio, assumi potest quilibet numerus. Vt si desiderentur duo numeri proportionis triplæ superbipartientis nonas, accipiendus erit numerus à 9. numeratus, qualis est 18. vel 27. 36. 45. &c. Quilibet enim horum ductus in denominatorem $3\frac{2}{9}$. gignet numerum integrum: vt ductis 45. in $3\frac{2}{9}$. fit numerus 145. qui ad assumptum numerum 45. proportionem habet datam. Sic etiam si cupiat quis proportionem subquadruplam, cuius denominator est $\frac{1}{4}$. sumendus erit numerus a 4. numeratus, vt 12. Hic enim ductus in denominatorẽ $\frac{1}{4}$. producet 3. numerum integrũ, qui ad assumptum 12. habet proportionem subquadruplam. Si vero par diuisionem agendum sit, & fractiones vitanda, sumendus erit in proportione multiplici numerus a denominatore proportionis numeratus. In alijs autem proportionibus, reuocandus erit denominator proportionis ad vnã fractionem, numerusque sumendus a numeratore numeratus. Vt si quaratur proportio quintupla, sumendus erit, verbi gratia, numerus 30. a 5. numeratus. Hic enim diuisus per denominatorem 5. facit Quotientem 6. ad quem proportionem habet quintuplam. Si autem desideretur proportio, cuius denominater sit $4\frac{3}{7}$. reuocato eo ad fractionem $\frac{31}{7}$. sumendus erit numerus a 31. numeratus, vt 62. Nam hac diuiso per $\frac{31}{7}$. fit Quotiens 14. ad quem acceptus numerus 62. habet proportionem a $4\frac{3}{7}$. denominatam, nimirũ quadruplam supertripartientem septimas. Caterum si duo numeri proponantur, cupiatque quis alios duos in eadem proportione reperire, satis erit, si vtrumque per quemuis numerum multiplicet, aut diuidat. Numeri enim producti, aut Quotientes eandem habebunt proportionem, quam propositi duo numeri. Item si proposito quouis numero, inueniendus sit alius, qui ad eum proportionem habeat datam, vel ad quem is datum habeat proportionem, assequeris primum, si propositum numerum per denominatorem proportionis mul-

tiplices:

tiplices: at secundum obtinebis, si eundem per denominatorem proportionis diuidas. Quòd si proportio detur in duobus numeris, proponaturque tertius quispiam numerus; si quidem inueniendus sit quartus, ad quem tertius datus eandem habeat proportionem, quam primus datus ad secundũ: si quidem denominator proportionis duorum numerorũ datorum notus est, diuidendus erit tertius numerus datus per denominatorem. Quotiens enim numerus erit, quem quarimus. Vel certe, siue denominator cognitus sit, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per secundum datum, hoc est, per consequentem terminum data proportionis, productusque numerus per primum, siue per antecedentem terminum, diuidendus. Vt si dentur duo numeri 4. 7. quorum proportionis denominator est $\frac{4}{7}$. detur item tertius numerus 20. Diuide numerum 20. per denominatorem $\frac{4}{7}$. produceturque quartus numerus quasitus 35. Vel multiplica tertium numerum 20. per secundum 7. & productum numerũ 140. partire per primum 4. Ad Quotientem enim 35. habebit tertius numerus 20. eandem proportionem, quam 4. ad 7. Si vero inueniendus sit quartus, qui ad tertium eandem habeat proportionem, quam dati duo numeri, si quidem denominator notus est, ducendus is erit in tertium numerum. Productus enim numerus erit, quem queris. Vel siue notus sit denominator, siue non, multiplicandus erit tertius numerus per primum datum, nimirum per terminum antecedentem, & numerus productus per secundum, id est, per consequentem terminum, diuidendus. Vt datis eisdem duobus numeris 4. 7. & tertio 20. multiplica 20. per $\frac{4}{7}$. denominatorem, gigneturque quasitus numerus $11\frac{1}{7}$. Vel duc tertium numerum 20. in primum 4. numerumq; productum 80. partire per secundum 7. Nam ad tertium 20. habebit Quotiens $11\frac{3}{7}$. eandem proportionem, quam 4. ad 7.

QVIA vero diximus, eam proportionem esse maiorem, cuius denominator maior est, sit, vt in proportionibus multiplicibus detur minima, nimirum dupla, denominata à 2. non autẽ maxima: propterea quod numerus 2. inter omnes denominatores proportionũ multiplicium est minimus, maximus autẽ dari non potest, cum numeri augeãtur in infinitũ.

Efficitur quoque, inter proportiones superparticulares reperiri maximam, nimirum sesquialteram, denominata à $1\frac{1}{2}$ *non autem minimam: quia numerus* $1\frac{1}{2}$ *. omnium denominatorum proportionum superparticularium maximus est, minimus autem dari non potest, cum denominatores fractionum progredi possint in infinitum. Constat autem ex ijs, qua in Arithmetica tradidimus, fractionem, cuius denominator maior est, minorem esse, si idem sit numerator: fractionem autem, cuius denominator minor est, si idem sit numerator, maiorem esse. Cum ergo denominator 2. sit omnium minimus, erit fractio* $\frac{1}{2}$ *. omnium, qua numeratorem habet 1. (quales sunt fractiones denominatorum proportionum superparticularium) maxima. Colligitur denique, in alijs proportionibus maioris inaqualitatis neque minimam posse dari, neque maximam. Quod intelligendum est de vltimis speciebus. Nam si de vltimis speciebus non sit sermo, erit superbipartiens inter superpartientes, minima; superpartiens autem tertias, maxima. Inter multiplices autem superparticulares maxima erit multiplex sesquialtera; minima vero, dupla superparticularis. Inter multiplices denique superpartientes maxima erit multiplex superpartiens tertias; minima vero, dupla superbipartiens. E contrario in proportionibus submultiplicibus datur maxima, nimirum subdupla, non autem minima: In subsuperparticularibus autem reperitur minima, vt subsesquitertea, non autem maxima: In alijs denique proportionibus minoris inaqualitatis neque maxima, neque minima dari potest. Qua omnia perspicua erunt, si denominatores proportionum inter se conferantur.*

COLLIGITVR etiam, hanc esse connexionem inter proportionem maioris inaqualitatis, aqualitatis, & minoris inaqualitatis, vt qualibet proportio maioris inaqualitatis maior sit proportione aqualitatis, qualibet vero proportio minoris inaqualitatis, minor: propterea quòd quilibet denominator proportionis maioris inaqualitatis, quantùuis minimus, maior est vnitate, qua denominator est proportionis aqualitatis, cum ille minor esse nequeat, quàm vnitas cum vna parte aliquota: At denominator propor-

tionis

tionis minoris inaqualitatis semper minor est, quàm unitas, cum sit fractio, cuius numerator à denominatore superatur vt ex ijs, quæ supra diximus, patet. Itaque proportio æqualitatis media est inter proportionem maioris inaqualitatis, & minoris inaqualitatis. Vbi hoc animaduersione dignum est, Proportionem maioris inaqualitatis decrescendo appropinquare semper magis ac magis in infinitum proportioni æqualitatis, nunquam tamen ad eam peruenire: E contrario vero proportionem minoris inaqualitatis crescendo semper magis, ac magis in infinitum accedere ad eandem proportionem æqualitatis, nunquam tamē eam attingere. Nam qualibet proportione multiplici proposita datur minor, ac minor, vsque ad duplam, qua omnium multiplicium est minima. Deinde hac datur minor, nimirum superparticularis, vel superpartiens quæcunque, in qua cum minima non possit dari, omnisque proportio eiusmodi maior sit proportione æqualitatis, liquido constat, proportionem maioris inaqualitatis ad æqualitatis proportionem non posse peruenire, etiamsi in infinitum decrescendo ad ipsam accedat. Rursus cum omnis proportio minoris inaqualitatis minor sit proportione æqualitatis, non possit autem in ea reperiri maxima, manifestum quoque est, proportionem minoris inæqualitatis attingere non posse proportionem æqualitatis, licet in infinitum crescendo ad eam accedat. Sed vt vtrumque exemplo etiam discatur, sciendum est, si inter duos numeros quosuis non proximos interponatur quilibet numerus intermedius, maior scilicet vno eorū, & altero minor; proportionem maioris numeri ad minorē diuisam esse in duas minores, quarum vna est maioris numeri ad medium interpositum; altera vero numeri medij ad minorem. Item proportionem minoris numeri ad maiorem diuisam esse in duas maiores, quarum vna est minoris numeri ad medium interpositum, altera vero medij ad maiorem. Vt si inter duos numeros 6. 3. ponatur medius 4. hoc modo, 6. 4. 3. proportio 6. ad 3. quæ dupla est, diuisa erit in sesquialteram 6. ad 4. & sesquitertiam 4. ad 3. quarū vtraque minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra vero, proportio 3. ad 6. quæ subdupla est; diuisa erit in subsesquiter-

tiam 3. ad 4. & subsesquialteram 4. ad 6. quarum vtraque maior est proportione subdupla 3. ad 6. Idem fit, si inter eosdem numeros 6. 3. interponatur medius 5. hoc modo, 6. 5. 3. Tam enim proportio 6. ad 5. sesquiquinta, quam proportio superbipartiens tertias 5. ad 3. minor est proportione dupla 6. ad 3. Contra vero tam proportio superbipartiens tertias 3. ad 5. quam subsesquiquinta 5. ad 6. maior est proportione subdupla 3. ad 6. Quæ omnia ex denominatoribus probari possunt. Verum vtrumque demonstrabitur hac ratione. Quoniã medius numerus minor est maiore dato, & maior minore, habebit maior datus ad minorẽ datum, maiorem proportionem, quam idem maior ad medium, & quam medius ad minorem. At vero minor ad maiorem habebit minorem proportionem, quam idem minor ad medium, & quam medius ad maiorem, vt manifestum est vel ex defin. 20. lib. 7. vt ibidem explicauimus, vel ex propos. 8. huius lib. 5. vbi demonstrat Euclides, propositis duabus quantitatibus inæqualibus maioris ad tertiam aliquã esse maiorem proportionẽ, quam minoris: At è contrario, tertiam eandẽ quantitatem ad maiorem habere minorem proportionẽ, quam ad maiorem. Ex quo sequitur id, quod diximus: nimirum positis his tribus numeris 6. 4. 3. maiorem esse proportionem eiusdẽ numeri 6. ad minorem 3. quam ad medium 4. maiorem: Item maiorem esse proportionem maioris numeri 6. ad 3. quã minoris 4. ad eundem 3. Contra vero, maiorẽ esse proportionem eiusdem numeri 3. ad minorem 4. quam ad maiorẽ 6. Item maiorem esse proportionem maioris numeri 4. ad 6. quã minoris 3. ad eundẽ 6. Eademq; in cæteris ratio est. His positis, erit proportio dupla 4. ad 2. diuisa hic, 4. 3. 2. in duas minores. Et tam proportio 8. ad 6. quæ eadem est, quæ 4. ad 3. diuisa hic, 8. 7. 6. quam proportio 6. ad 4. quæ eadem est, quæ 3. ad 2. hic 6. 5. 4. in duas minores. Item tam proportio 16. ad 14. quæ eadem est, quæ 8. ad 7. diuisa hic, 16. 15. 14. & proporti 14. ad 12. quæ eadem est, quæ 7. ad 6. hic, 14. 13. 12. quã proportio 12. ad 10. quæ eadem est, quæ 6. ad 5. hic, 12. 11. 10. & proportio 10. ad 8. quæ eadem est, quæ 5. ad 4. hic, 10. 9. 8. in duas minores: atque ita fieri potest in infinitum. E contrario vero proportio subsesquialtera 4. ad 6. diuisa

erit

erit hic, 4. 5. 6. in duas maiores. Et tam proportio 8. ad 10. quæ eadem est, quæ 4. ad 5. diuisa hic, 8. 9. 10. quam proportio 10 ad 12. quæ eadem est, quæ 5. ad 6. hic, 10. 11. 12. in duas maiores. Item tam proportio 16. ad 18. quæ eadem est, quæ 8. ad 9. diuisa hic, 16. 17. 18. & proportio 18. ad 20. quæ eadem est, quæ 9. ad 10. hic, 18. 19. 20. quam proportio 20. ad 22. quæ eadem est, quæ 10. ad 11. hic. 20. 21. 22. & proportio 22. ad 24. quæ eadem est, quæ 11. ad 12. hic, 22. 23. 24. in duas maiores: atque huius incrementi nunquam erit finis. Idemque experiri licebit in quibusuis alijs proportionibus. Vt proportio decupla 10. ad 1. diuisa hic est 5 10. 6. 1. in duas minores: Et proportio subsuperseptupartiens undecimas 11. ad 18. diuisa hic. 11. 15. 18. in duas maiores, &c.

DE PROPORTIONALITATIBVS.

PROPORTIONALITAS ab Euclide definita in plura genera diuiditur, vt videre licet apud Boetium, Iordanum, et alios Arithmeticos: sed præcipuæ proportionalitates, quas auctores nominati Medietates vocant, sunt hæ tres; Arithmetica, Geometrica, & Musica, siue Harmonica.

ARITHMETICA proportionalitas, siue Medietas, est, quãdo tres, vel plures numeri per eãdẽ differentiã progrediũtur. Vt hi numeri 4. 7. 10. 13. 16. quorũ quilibet suũ antecedentẽ ternario superat, dicuntur constituere proportionalitatẽ Arithmeticã. Est autẽ duplex, continua, & discreta. Cõtinua est, quãdo in progressione numerorũ nulla fit interruptio, sed quilibet cũ proxime antecedẽte cõfertur, vt in dato exẽplo fit. Discreta autẽ est, quãdo in numerorũ progressione interruptio fit, ita vt bini tantũ inter se cõferãtur,

non autem quilibet cum proxime præcedente. Vt in his numeris contingit, 4. 7. 8. 11. 30. 33. Nam eadem differentia est inter binos 4. 7. & 8. 11. & 30: 33. non autem inter 4. 7. & 7: 8. &c.

GEOMETRICA proportionalitas, siue Medietas est, quando tres, vel plures numeri eãdem proportionem habent: quam quidem Euclides definiuit. Hæc enim proprie proportionalitas dicitur, siue Analogia: aliæ vero improprie, cum non sit eadem semper inter earũ terminos proportio, ita vt rectius Medietates dicantur, propter medios terminos, qui certa quadam ratione inter extremos interijciuntur. Vt hi numeri, 2. 6. 18. 54. quoniam quilibet ad suum antecedentem eandem habet proprotionem triplam, cõstituunt proportionalitatem Geometricam. Hæc duplex quoque est, continua, & discreta, vt in 4. defin. huius lib. explicauimus. Cõtinua cernitur in datis numeris, discreta autẽ in hisce sex, 2. 3. 12. 18. 20. 30. Nam bini tantum 2. 3. & 12. 18. & 20. 30. eandẽ habent proportionem sesquialterã; non autem quilibet ad proxime præcedentem.

MVSICA siue Harmonica proportionalitas, siue Medietas est, quando tres numeri ita ordinantur, vt eadem sit proportio maximi ad minimum, quæ differentiæ inter maiores: duos ad differentiam inter duos minores: ita vt nec eadem inter eos sit differentia, vt in Arithmetica, nec eadem proportio, vt in Geometrica. Vt tres hi numeri, 3. 4. 6. quoniam eadem est proportio maximi 6. ad minimũ 3. quæ differẽtia

inter

inter maximum 6. & medium 4. nimirum numeri 2. ad differentiã inter medium 4. & minimum 3. id est, ad 1. (cum vtrobique proportio sit dupla.) constituunt proportionalitatem, siue Medietatem Musicam, siue Harmonicã: Ipsi vero neque eandem habent differentiam, neque eandem proportionem, vt patet. Sic etiam tres hi numeri 42. 12. 7. Harmonicam proportionalitatem constituunt, quia eadem proportio est maximi 42. ad minimum 7. quæ differentiæ inter maximum 42. & medium 12. hoc est, numeri 30. ad differentiam 5. inter medium 12. & minimum 7. cum vtrobique proportio sit sextupla. Dicitur autem huiusmodi proportionalitas Musica, siue Harmonica, quia plerunque eius numeri habent proportiones eas, in quibus consonantiæ Musicæ consistunt. Vt in priori exemplo inter 6. & 4. est proportio sesquialtera, constituens consonantiam, quæ diapente dicitur, siue Quinta. Item inter 4. & 3. est proportio sesquitertia, constituens consonantiam, quam Diatessaron, siue Quartam vocant. Denique inter extremos 6. & 3. cernitur proportio dupla, quæ Diapason eonsonantiã, siue octauã cõstituit Atque eodẽ modo in plerisque alijs idẽ cernitur.

PROPRIETATES ALIQVOT trium proportionalitatum, sive Medietatum, quas explicauimus.

I.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ, minor est proportio maximi ad medium, quam medij ad minimum. Vt hic patet. 2. 4. 6. Nam proportio 6. ad 4. est sesquial-

tera; & 4. ad 2. dupla.

AT in tribus numeris proportionalitatis Musica, maior est proportio maximi ad medium, quàm medij ad minimũ. Vt hic vides. 3. 4. 6. Proportio enim 6. ad 4. est sesquialtera; & 4. ad 3. sesquitertia.

IN tribus denique numeris proportionalitatis Geometrica, eadem est proportio maximi ad medium, qua medij ad minimum, vt ex eius definitione constat, apparetque in hisce tribus numeris 3. 6. 12. Tam enim 12. ad 6. quam 6. ad 3. duplam habent proportionem. Qua in re Geometrica proportionalitas medium locum tuetur inter Arithmeticam, atque Harmonicam; cum in Arithmetica inter maiores numeros minor sit proportio, quàm inter minores: Contra vero in Harmonica inter maiores numeros maior, quam inter minores: In Geometrica autem eadem inter maiores, qua inter minores, vt explicatum est.

II.

ARITHMETICA proportionalitas habet terminorum differentias aquales, proportiones vero eorundem inaquales.

GEOMETRICA e contrario differentias terminorum habet inaquales, proportiones vero eorundem aquales.

HARMONICA denique neque differentias, neque proportiones terminorum aquales habet: Patet hoc ex superioribus exemplis.

III.

IN tribus numeris Arithmetica proportionalitatis, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, & à maiori superatur. Vt hic, 3. 7. 11. Medius 7. superat minorẽ 3. quatuor vnitatibus, qua efficiunt $\frac{4}{7}$. ipsius medij 7. Item medius idem 7. superatur à maiore 11. quatuor quoque vnitatibus, qua constituunt eiusdem medij, $\frac{4}{7}$. Item hic 15. 20. 25. medius 20. superat minorem 15. quinquẽ vnitatibus, qua efficiunt $\frac{1}{4}$. ipsius medij 20. Item medius idem 20. superatur à maiore 25. quinque quoque vnitatibus, qua constituunt $\frac{1}{4}$. eiusdem medij 20.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometrica, medius eadem sui parte, vel partibus minorem superat, qua

parte,

parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic 4.6. 9. medius 6. superat minorem 4. binario, qui est $\frac{1}{3}$. medij, superaturq. à maiore 9. ternario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. maioris. Sic etiam hic 9.15.25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, medius 15. superat minorem 9. sex vnitatibus, qua faciunt $\frac{2}{5}$ ipsius medij 15. Et idem medius 15. superatur à maiore 25. decem vnitatibus, qua efficiunt quoque $\frac{2}{5}$ ipsius maioris 25.

IN tribus denique numeris Harmonica proportionalitatis, medius eadem parte, vel partibus minoris minorem superat, qua parte, vel partibus maioris à maiore superatur. Vt hic, 3.4.6. medius 4. superat minorem 3. vnitate, qua est $\frac{1}{3}$. eiusdem minoris, superaturq. à maiore 6. binario, qui quoque est $\frac{1}{3}$. eiusdem maioris. Rursus in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12. 7. medius 12. superat minorem 7. quinque vnitatibus, qua sunt $\frac{5}{7}$ ipsius minoris 7. Et idem medius 12. superatur à maiore 42. triginta vnitatibus, qua sunt $\frac{30}{42}$. hoc est, in minimis numeris, $\frac{5}{7}$. quoque ipsius maioris 42.

IIII.

IN tribus numeris Arithmetica proportionalitatis, summa extremorum dupla est medij. Vt hic, 3.7.11. summa extremorum 14. dupla est medij 7.

AT in tribus numeris proportionalitatis tam Geometrica, quam Harmonica, summa extremorum superat duplum medij numero, quo differentia maiorum differentiam minorum superat. Vt hic, 4.6.9. & 3. 4.6. tam summa 13. extremorum 4. 9. superat duplum medij 6. hoc est, 12. vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 3. superat 2. differentiam minorum, quam summa 9. extremorum 3. 6. duplum medij 4. id est, 8. superat vnitate, qua differentia maiorum, nimirum 2. superat differentiam minorum, qua est 1. Sic etiam hic, 9. 15. 25. vbi est continua proportio superbipartiens tertias, summa 34. extremorum 9.25. superat duplum medij 15. hoc est, 30. numero 4. quo eodem differentia maiorum, 10. differentiam minorum, 6. superat. Item in hac proportionalitate Harmonica, 42. 12.7. summa 49. extremorum duplum medij 12. id est, 24. supe-

rat

rat numero 25. quo differentia maiorum 30. superat differentiam minorum 5.

V.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmetica, extremi inter se multiplicati procreant numerum, qui a quadrato medij superatur numero, qui fit ex differentia minorum in maiorum differentiam. Vt hic 3.7.11. numerus 33. factus ex 3. in 11. superatur a 49. quadrato medij, numero 16. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4.

AT in tribus numeris proportionalitatis Geometrica, numerus ex primo in tertium genitus quadrato medij aqualis est, vt hic, 4. 6. 9. Extremi inter se multiplicati faciunt 36. quadratum medij.

IN tribus numeris denique Harmonicæ proportionalitatis, numerus ex multiplicatione extremorum inter se genitus superat quadratum medij numero, qui fit ex differentia minorum in differentiã maiorum. Vt hic 42. 12. 7. numerus 294. factus ex 42. in 7. superat 144. quadratum medij numero 150. qui fit ex differentia 30. in differentiam 5. Qua in re etiam medium locum obtinet Geometrica proportionalitas inter Arithmeticam, & Harmonicam; quippe cum in Arithmetica minus producatur ex primo in tertiũ, quam ex medio in se, in Harmonica vero plus; & in Geometrica idem numerus gignatur.

VI.

IN tribus numeris proportionalitatis Arithmetica, summa extremorum in medium ducta producit numerum, qui duplũ producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorum duplicatam. Vt hic, 3.7.11. Summa extremorum 14. in medium 7. facit 98. qui numerus superat numerum 66. qui duplus est producti 33. ex primo in tertium, numero 32. qui fit ex differentia 4. in differentiam 4. duplicatam, hoc est, in 8.

IN tribus autem numeris Geometrica proportionalitatis summa extremorum in medium multiplicata gignit numerum, qui duplũ producti ex primo in tertium superat numero, qui fit ex differentia minorum in differentiam maiorũ.

Vt

Vt hic 4. 6. 9. Summa 13. extremorum in medium 6. facit 78. qui numerus duplum producti ex 4 in 9. id est, 72. superat numero 6. ex differentia 2. in differentiam 3. genito.

DENIQVE in tribus numeris proportionalitatis Harmonica, ex summa extremorum in medium procreatur numerus duplus producti ex primo in tertium, Vt hic, 3. 4. 6. Ex summa extremorum 9. in medium 4. fit numerus 36. duplus producti 18. ex 3. in 6.

VII.

QVATVOR numeris in proportionalitate Geometrica non continue proportionalibus datis, si secundus est inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, erit tertius inter eosdem extremos medius in Harmonica proportionalitate: Et si secundus medius est in proportionalitate Harmonica, erit tertius in Arithmetica medius. Vt hic, 6. 9. 8. 12. quoniam ita est 6. ad 9. vt 8. ad 12. Et sunt 6. 9. 12. proportionales Arithmetice, cum eundem habeant excessum 3. vides 6. 8. 12. Harmonice proportionales esse, cum eadem sit proportio 12. ad 6. quæ differentia maiorum, 4. ad 2. differentiam minorum. Item hic, 6. 8. 9. 12. quia ita est 6. ad 8. vt 9. ad 12. Et sunt 6. 8. 12. proportionales Harmonice, vt diximus, vides 6. 9. 12. Arithmetice esse proportionales, cum eundem excessum 3. habeant.

ITEM quatuor numeris datis, quorum alteruter mediorum sit inter extremos medius in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica; erunt quatuor dati numeri Geometrice non continue proportionales. Vt quia datis his 4. numeris, 4. 6. 8. 12. tertius 8. medius est Arithmetice inter extremos 4. 12. & secundus 6. inter eosdem extremos 4. 12. medius est Harmonice; vides ita esse 4. ad 6. vt 8. ad 12. Et 4. ad 8. vt 6. ad 12.

VIII.

PROPOSITIS quotquot numeris continue proportionalibus sive Arithmetice, sive Geometrice, sive Harmonice, (continuantur autem plures numeri in proportionalitate Harmonica, quando tres primi sunt Harmonice proportionales, item tres primum insequentes, relicto primo; & relictis primis duobus, alij tres, qui sequuntur; nec non primis

tribus relictis, subsequentes tres, & sic deinceps.) erunt in eadem proportionalitate constituti numeri, qui in locis tam imparibus, quàm paribus, atque etiam partim in imparibus, partim in paribus alternis locantur, dummodo aqualis multitudo numerorum inter quosuis impares, & pares, vel inter partim impares, partim pares alternis interijcian tur: cuiusmodi sunt primus, tertius, quintus, septimus, &c. Item secundus, quartus, sextus, &c. Praterea primus, quartus, septimus, &c. Insuper primus, quintus, nonus, &c. atque ita deinceps. Id quod in exemplis, qua sequuntur, perspicuum est.

PROPORTIONALITATES Arithmeticæ.

3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.	31.	35.	39.	43.	47.	51.	55.	59.
3,		11.		19.		27.		35.		43.		51.		59.
	7.		15.		23.		31.		39.		47.		55.	
3.			15.			27.			39.			51.		
	7.			19.			31.			43.			55.	
3.				19.				35.				51.		

Proportionalitates Geometricæ.

5	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120	10240	20480	40960	
5	1	20	1	80	1	320	1	1280	1	5120	1	20480	1	
	10		40		160		640		2560		10240		40960	
5	1	40	1	160	1	640	1	2560	1	10240	1	40960	1	
	10	1	80	1	320	1	1280	1	5120	1	20480	1		
5	1	1	80	1	1	320	1	1	5120	1	1	20480	1	

Proportionalitates Harmonicæ.

1252	1280	1315	1360	1420	1504	1630	1840	12601	25201		
1252		1315		1420		1630		12601		1	
1	1280		1360		1504		1840		25201		
1252		1		1360		1	1630		1	12520	
	1280		1		1420		1	1840		1	
1252		1		1420		1		12601		1	

IX.

QVOTQVOT numeris proportionalibus datis siue in Arithmetica proporttonalitate, siue Geometrica, aut Harmonica, si singuli per aliquem numerum eundem multiplicentur, aut diuidantur, habebunt quoque producti numeri, vel Quotientes proportionaliitatem Arithmeticam, vel Geometricam, aut Harmonicam. Vt hic vides singulos multiplitatos per 4. Item diuisos per 4.

Arithmetica prop.	*Geometrica prop.*	*Harmonica prop.*
20 | 28 | 36	20 | 40 | 80	60 | 84 | 140
Producti	*Producti*	*Producti*
80 | 112 | 144	80 | 160 | 320	2401 | 9361 | 560
Quotientes	*Quotientes*	*Quotientes*
5 | 7 | 9	5 | 10 | 20	15 | 21 | 35

CÆTERVM in Geometrica, & Harmonica proportionalitate, numeri producti, & Quotientes retinent eandē specie proportionem, quam numeri multiplicati, aut diuisi habent: At in Arithmetica non seruant eandem differentiam: Sed producti numeri habent differentiam differentiæ multiplicatorum numerorum multiplicem à numero multiplicante denominatam. Vt in dato exemplo quadruplam. Differētia. n. inter 20. & 28. est 8. at inter 80. & 112. est 32. Quotientum vero differentia ad differentiam numerorū diuisorum habet proportionem submultiplicē à diuisore denominatam, præposita particula, sub. Vt in dato exemplo subquadruplam. Nam differentia inter 20. & 28 est 8. at inter

5. & 7.

5. & 7. est 2. Eadem proportio differentiarum inter productos numeros, & multiplicatos, atque inter Quotientes, numerosq. diuisos reperitur in proportionalitate Geometrica, & Harmonica. Ita vides differentias numerorum 80, 160. 320. Item numerorum 240. 336. 560, quadruplas esse differentiarum inter numeros 20. 40. 80. & inter numeros 60. 84. 140. At vero differentias numerorum 5. 10. 20. & numerorum 15. 21. 35. esse earundem differentiarum subquaplas.

DE PROPORTIONALITATE Arithmetica.

I.

DATIS duobus numeris quibuscunque, si eorum differentiam maiori addas, habebis tertium terminum in proportionalitate Arithmetica utroque dato maiorem. Et si eandem differentiam huic tertio addas, conficies quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps reperies infinitos alios semper maiores, si differentiam vltimo inuento semper adijcias. Vt datis duobus numeris 4. 11. quorum differentia est 7. constituetur hac proportionalitas Arithmetica, qua extendi potest in infinitum.

4. 11. 18. 25. 32. 39. 46. 53. 60. 67. &c.

Quod si eandem differentiam à minori subtrahas, quando subtrahi potest, habebis rursus tertium terminum in eadem proportionalitate: vtroque minorem. Et si differentiã eandem à tertio detrahas, reliquus fiet quartus adhuc minor in eadẽ prportionalitatis Atq. ita deinceps inuenies alio minores, si differentiam ab vltimo inuento semper demas, donec subtractio amplius fieri nequeat. Vt datis numeris 30. 34. quorum differentia est 4. constituetur hac proportionalitas Arithmetica vsque ad 2. qua vlterius progredi nequit, cum differentia 4. amplius subtrahi nequeat à 2.

34. 30. 26. 22. 18. 14. 10. 6. 2.

EADEM proportionalitas extendetur, etiamsi differentia non assumatur, hoc modo. Datis duobus numeris, à maiore duplicato detrahe minorem. Reliquus enim nume-

rus

us erit tertius terminus utroque dato maior. A quo duplicato si proximè præcedentem subtrahas, habebis quartum; & sic in infinitum. Vt datis duobus numeris 4. 15. si 15. duplicato, hoc est, à 30. subtrahas 4. reliquus erit tertius terminus 26. Ab huius duplo 52. si quoque demas 5. habebis quartum terminum 37. & sic deinceps, vt hic apparet. 4. 15. 26. 37. 48. &c.

RVRSVS datis duobus numeris 3 si ex duplo minoris detrahas maiorem, relinquetur tertius numerus utroque minor. Et si ex huius duplo proxime præcedentem demas, relinques quartum terminum adhuc minorem; & sic deinceps, donec amplius subtractio fieri nequeat. Vt datis duobus numeris 20. 27. si ex 20. duplicato, ideſt, ex 40. detrahas 27. reliquus fiet tertius terminus 13. Ab huius duplo 26. si quoque detrahas 20. manebit quartus terminus 6. Et quia ab huius duplo 12. præcedens terminus 13. subtrahi non poteſt, non poterit proportionalitas vlterius progredi, vt hic vides. 27. 20. 13. 6.

II.

QVANDO terminorum numerus eſt impar, summa extremorum æqualis eſt summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, dupla autem medij termini, à quo extremi æqualiter diſtant. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28.

Summa 4. & 28. Item 7. & 25. Item 10. & 22. Item 13. & 19. Item duplum medij termini 16. semper eſt 32.

QVANDO autem numerus terminorum eſt par, summa extremorum æqualis semper eſt summæ quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter remotorum. Vt hic.

4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31.

Summa 4. & 31. Item 7. & 28. Item 10. & 25. Item 13. & 22. Item 16. & 19. semper eſt 35.

ITA QVE quando numerus terminorum impar eſt, habebit summa omnium terminorum ad medium termi-

num

num ab extremis aqualiter distantem, hoc est, ad semissem summa extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aqualiter distantium, proportionem multiplicem à numero terminorum denominatam. Cum enim summa extremorum, vel quorumlibet duorum ab extremis aquali interuallo distantium, dupla sit termini medij, continebitur medius terminus, siue semissis summa extremorum, in summa omnium terminorum toties, quot sunt termini; semel quidem in ipso medio termino, & bis in qualibet summa duorum à medio termino aqualiter distantium: ac proinde omnium terminorum summa ad semissem aggregati extremorum, hoc est, ad medium terminum, proportionem habebit multiplicem, cuius denominator est numerus terminorum. Vt in hac serie nouem numerorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30.

Summa omnium terminorum continebit medium terminum 18. hoc est, semissem summa extremorum 6. & 30. toties, quot vnitates sunt in 9. numero terminorum, id est, summa omnium terminorum ad 18. semissem summa extremorum, siue ad medium terminum, proportionem habebit noncuplam. Eademq. in cæteris est ratio.

SVMMAM igitur omnium terminorum proportionalitatis Arithmetica, cuius terminorum numerus impar est, facile inueniemus, si semissem aggregati extremorum, (quod semper par est, quando terminorum numerus est impar) per numerum terminorum multiplicemus. Vt in hac serie 11. terminorum.

7. 19. 31. 43. 55. 67. 79. 91. 103. 115. 127.

Summa extremorum est 134. Cuius semissis 67. qua à medio termino 67. non differt, in 11. numerum terminorum ducta producit 737. summam omnium terminorum. Atque hac ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est par: sed quando extremorum summa impar est (quando enim terminorum numerus est par, potest esse summa extremorum impar, non autem semper

par)

par) erit eius semissis, numerus integer cum $\frac{1}{2}$.

QVANDO autem terminorum numerus est par, habebit summa omnium terminorum ad summam extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aqualiter distantiū, proportionem multiplicem à semisse numeri terminorū denominatam. Cum enim summa quorumlibet duorū ab extremis aqualiter distantium aqualis sit summa extremorum, continebitur hac summa extremorum toties in summa omnium terminorum, quoties vnitas in dimidiato numero terminorum continetur, semel nimirum in summa quorumlibet duorum ab extremis distantium aqualiter: atque idcirco summa omnium terminorum ad summam extremorum proportionem habebit multiplicem à dimidiato numero terminorum denominatam. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33.

Summa omnium terminorum summam extremorum 6. & 33. quæ est 39. continebit quinquies, hoc est, summa omnium terminorum ad 38. summam extremorum habebit proportionem quintuplam. Et sic de alijs.

SVMMAM ergo omnium terminorum proportionalitatis Arithmetica, cuius terminorū numerus par est, obtinebimus, si summam extremorum in dimidiatum numerum terminorum (qui terminorum numerus dimidium habebit sine fractione vnitatis, cum par ponatur) ducamus. Vt in hac serie 10. terminorum.

6. 11. 16. 21. 26. 31. 36. 41. 46. 51.

Summa extremorum est 57. quæ in 5. semissem numeri terminorum ducta efficit 285. summam omnium terminorum. Hac ratio conuenit etiam in proportionalitatem, cuius terminorum numerus est impar; sed semissis numeri terminorum semper erit integer cum $\frac{1}{2}$. cum numerus terminorum ponatur impar.

VIDES igitur satis esse, vt summa inueniatur, si ex-

tremi termini, vna cum terminorum numero cogniti sint. Quo pacto autem ex cognito altero extremorũ, terminorũ numero, atque differentia, in cognitionem alterius extremi pervenire possimus, iamiam docebimus.

III.

SI in proportionalitate Arithmetica quotuis terminorũ alterum extremorum, numerum terminorum, & differentiam cognoscamus, reperiemus alterũ extremũ, hoc modo. Numerum proximè minorem numero terminorum in differentiam datam ducemus, & productum minori extremo cognito adijciemus, vel eundem numerum productum ex maiore extremo noto detrahemus. Nam ibi conficiemus maius extremum, quod quæritur, hic autem reliquum fiet minus extremum ignotum. Exempli causa. Si proponatur minus extremum notum 4. numerus terminorum 12. & differentia 5. multiplicabimus 11. nimirum numerum proximè minorem terminorum numero, per differentiam datam 5. productoque 55. minus extremum 4. adijciemus. Summa enim 59. erit extremum maius. Vt in his 12. terminis manifestum est, quorum differentia est 5.

4. 9. 14. 19. 24. 29. 34. 39. 44. 49. 54. 59.

Si verò proponatur maius extremum notum 59. & idem terminorum numerus 12. cum differentia eadem 5. auferemus numerum 55. productũ ex 11. numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiam 5. ex noto maiore extremo 59. Reliquus enim numerus 4. erit minus extremum. Vt in eodem exemplo perspicuum est.

NECESSE autem est, si minus extremum inquiratur, numerum productum ex numero, qui numero terminorum proximè minor est, in differentiã, maiorem esse maiore extremo cognito, vt subtractio fieri possit. Alioquin quæstio erit impossibilis: hoc est, fieri non poterit, vt datus numerus possit esse maius extremum in progressione vlla, cuius differentia, et numerus terminorũ ita se habeant, vt proponitur.

Vt si quis daret maius extremum 20. numerum terminorũ 6. & differentiam 5. non posset inueniri minus extremum; propterea quod numerus 25. productus ex 5. qui proxime minor est terminorũ numero, in differentiam 5. maior est dato maiore extremo 20. Quod si quando contingat, productum illum numerum maiori extremo esse æqualem, ita vt subtractione facta, relinquatur 0. erit quidem quæstio possibilis, sed minus extremum erit 0. Vt si in posteriori hoc exemplo maius extremũ proponeretur 25. fieret hæc proportionalitas Arithmetica.

0. 5. 10. 15. 20. 25.

IIII.

SI extremi termini noti sint, vna cum numero terminorum, reperiemus differentiam numerorum hoc pacto. Dempto minore extremo à maiore, diuidemus reliquum numerum per numerum proxime minorem numero terminorum. Nam Quotiens erit differentia quæsita. Vt si quis dicat, esse 10. terminos proportionalitatis cuiuspiam Arithmetica, cuius numeri extremi sint 7. & 52. Dempto minore extremo 7. ex maiore 52. reliquum numerum 45. partiemur per 9. numerum proxime minorem numero terminorum. Quotiens enim 5. erit differentia, quæ quæritur, vt hic apparet.

7. 12. 17. 22. 27. 32. 37. 42. 47. 52.

VERVM vt fractiones vitentur, progressioq. proposita locum habeat in numeris integris, necesse est, minore extremo detracto ex maiore, vt reliquus numerus possit numerari à numero, qui terminorũ numero proxime minor est. Si enim nõ numeretur, differentia inuẽta erit vel fractio, vel numerus integer cum fractione: quæstio tamen erit possibilis. Vt si quis proponat extremos terminos 2. & 38. & numerum terminorũ 9. Dempto 2. ex 38. & reliquo numero 36. diuiso per 8. reperitur differentia $4\frac{1}{2}$. vt patet in hoc exemplo.

2. $6\frac{1}{2}$. 11. $15\frac{1}{2}$. 20. $24\frac{1}{2}$. 29. $33\frac{1}{2}$. 38.

V.

SI duo termini extremi. Vna cum differentia, noti sint

cliciemus numerum terminorum hac ratione. Detracte minore extremo à maiore, partiemur reliquum numerum per differentiam. Nam si Quotienti adijciamus 1. conflabimus numerum terminorum quæsitum. Vt datis duobus extremis 10. & 40. cum differentia 3. Ablatis 10. ex 40. & reliquo numero 30. diuiso per 3. fit Quotiens 10. Addita ergo 1. fit numerus terminorum 11. vt hic videre licet.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34. 37. 40.

SED vt quæstio proposita sit possibilis, hoc est, vt verè in rerũ natura existat progressio aliqua, quæ habeat omnes conditiones propositas, necesse est, maiore extremo subducto ex maiore, reliquum numerum à differentia numerari. Si enim non numeretur, Quotiens non erit numerus integer, ac proinde indicare non poterit numerum terminorum, etiamsi addatur 1. Fieri enim non potest, vt detur progressio aliqua, cuius terminorum numerus non sit integer.

V I.

SI duo extremi termini, una cum omnium terminorum summa, noti sint, explorabimus & numerum terminorum, & differentiam, hac arte. Summam omnium terminorum per extremorum summam partiemur. Quotiens enim dabit dimidiatum numerum terminorum, & duplicatus totũ numerum indicabit. Inuento autem terminorũ numero, cum & duo extremi termini cogniti sint, inuenietur differentiã, vt in 4. regula traditũ est: si nimirum, minore extremo dempto ex maiore, reliquum numerum dividamus per numerum proxime minorem numero terminorum inuento. Verbi gratia. Si summa proponatur 515. & extremi termini 20. & 83. diuidemus summã 515. per 103. summam extremorum. Quotiens enim 5. duplicatus dabit numerum terminorum 10. quorum differentiam obtinebimus, si dempto minore extremo 20. ex maiore 83. reliquum numerum 63. partiamur per 9. numerum proxime minorem numero terminorum inuento. Nam Quotiens 7. erit differentia, vt hic cernis.

20. 27. 34. 41. 48. 55. 62. 69. 76. 83.

Videsergo, vt quæstio sit possibilis, hoc est, vt re vera existat aliqua progressio, in qua omnium terminorum summa, & duo extremi ita se habeant, vt proponitur; necesse esse, vt summa omnium terminorum data a summa extremorũ numeretur. Aliaquin terminorum numerus erumpẽt ex Quotiens non sit numerus integer: Vel certe, si summa omnium terminorum data a summa extremorum non numeretur, necesse esse, vt diuisa summa omnium terminorum per extremorũ summam, Quotiens sit numerus integer cum $\frac{1}{2}$. *vt nimirum duplicatus efficere possit numerum terminorũ integrum.*

VII.

SI trium terminorum extremi habeant proportionẽ duplam, medius ad differentiam habebit triplam proportionẽ. Si vero extremorum proportio maior sit quã dupla, proportio medij ad differentiam minor erit quam tripla: Si deniq; minor sit extremorum proportio quã dupla, maior erit proportio medij ad differentiam, quam tripla. Vt hic, 8. 12. 16. proportio extremorum 16. & 8. est dupla; & medij 12. ad differentiam 4. tripla. Hic autem, 8. 14. 20. prapartio inter extremos 20. & 8. est dupla sesquialtera, nimirũ maior quã dupla: & medij 14. ad differentiã 6. dupla sesquitertia, minor videlicet, quam tripla. Hic denique 8. 11. 14. extremi 14. & 8. proportionẽ habent supertripartientem quartas, qua minor est quã dupla: & medius 11. ad differentiam 3. triplam superbipartientem tertias, hoc est, maiorem quam triplam.

VIII.

INTER quoslibet duos numeros constitues medium proportionalem Arithmetice, si eorum summa accipias semissem. Vt datis duobus numeris 6. & 30. summa eorum est 36. Huius ergo semissis 18. medio loco proportionalis est Arithmetice inter 6. & 30. vt hic manifestum est, 6. 18. 30. Itaque si medius terminus constituẽdus sit numerus integer, necesse est, vtrumque numerorũ datorũ esse vel parem, vel impa-

rem, vt videlicet summa extremorum semper sit par, hoc est, vt possit habere dimidium sine fractione vnitatis. Nam quando summa extremorum impar est: quod accidit cum alter extremorum par est, & alter impar, erit medius terminus integer numerus cum semisse vnitatis. Vt datis numeris duobus 8. 25. summa eorum est 33. Huius ergo dimidium $16\frac{1}{2}$. medius terminus erit hoc modo, $8. 16\frac{1}{2}. 25.$

IX.

INTER quosuis autem duos numeros constitues, quotquot quis iusserit, medios proportionales Arithmetice, hoc modo. Minorem detrahe ex maiore: Reliquum deinde numerum partire per numerum proxime maiorē numero mediorum constituendorum. Quotiens enim erit differentia proportionalitatis Arithmeticæ, quam si minori numero proposito adijcias, conflabis primum medium. Huic si eandem differentiam addas, conficies secundum, & sic deinceps. Vel si eam differentiam à maiori numero proposito subtrahas, relinquetur vltimus medius. A quo si eandem differentiam demas, remanebis penultimus, & sic deinceps. Veluti si inter 6. & 114. constituendi sint 11. termini medij, detrahemus 6. ex 114. Reliquum numerum 108. per 12. (qui numerus proxime maior est numero mediorum constituendorum) partiemur. Quotiens enim 9. erit differentia terminorum proportionalitatis. Sic ergo se habebunt 11. termini medij inter 6. & 114.

6. 15. 24. 33. 42. 51. 60. 69. 78. 87. 96. 105. 114.

SED quoniam plerunque tales duo numeri proponuntur, inter quos non possunt cadere numeri integri medij proportionales, propterea quod inuentus Quotiens pro differentia non semper numerus integer est; si fractiones vitare velis, necesse est, duos propositos numeros esse eiusmodi, vt dempto minore ex maiore, reliquus a numero, qui proxime maior est numero mediorū constituendorum, numeretur: quos ita facile reperies. Accipe pro minore extremo quicunq; nume-

rum,

rum, eumque adde cuicunque alij numero, quem numerus proxime maior numero mediorum inueniendorũ metitur. Conflatus enim numerus maius extremum proportionalitatis erit. Vt si velis duos numeros, inter quos cadant 8. numeri proportionales Arithmetice, primus autem sit, verbi gratia 7. Adde hunc numerum 7. ad quemuis numerum, quem nouenarius, (qui proxime maior est numero mediorum constituendorum) metitur, nimirum ad 72. conficiesq; maius extremum 79. Differentiam autem inuenies, vt dictum est, detrahendo 7. ex 79. & reliquum numerũ 72. per 9. diuidendo. Quotiens enim 8. erit differẽtia, vt hic vides.

7. 15. 23. 31. 39. 47. 55. 63. 71. 79.

QVOD si quis proponat & minus extremum, & differentiam proportionalitatis, inuenies maius extremum, ita vt inter minus, & maius cadant quotuis medij numeri habentes illam differentiam, si numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum per datum differentiã multiplices, numeroque producto minus extremum addas. Vt si quis velit inter 5. & quempiam maiorem numerum constituere 9. terminos medios, quorũ differentia sit 4. Multiplicanda erunt 10. per 4. & producto numero 40. addendum minus extremum 5. Nam inter conflatum numerum 45. & datum minus extremum 5. intercipiuntur 9. medij termini cum differentia data 4. Vt hic manifestum est.

5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37. 41. 45.

HAC alia etiam iucunda operatione constituet quotuis medios proportionales inter datos duos numeros. Verumque datorum numerorum partire per numerum proxime maiorem numero mediorum constituendorum: Quotientes sub illis colloca, quemque sub suo, & ab eisdẽ Quotientibus ascende per continuam eorum additionẽ, addendo primo quemque ad seipsum, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, ita vt duas proportionalitates Arithmeticas instituas a Quotientibus incipiẽtes, & per eosdẽ progredien-

tes, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini desiderantur. Postremo adde singulos terminos vnius ordinis singulis terminis aduersis alterius ordinis, id est, maximum vnius minimo alterius; proximum deinde sub illo, proximo supra hunc, &c. Numeri enim constati dabunt medios optatos. Exempli gratia. Sint inter 15. & 100. constituendi 4. medij termini Arithmetice proportionales. Vtroque diuiso per 5. hoc est, per numerum proxime maiorem numero mediorum, fiunt Quotientes 3. & 20. Constitues ergo hos ordines 4. terminorum sub 15. & 100. Arithmetice proportionalium per eorundem Quotientium continuam additionem, addendo primum 3. ad 3. vt fiant 6. Item 3. ad 6. vt fiant 9. Item 3. ad 9 vt fiant 12. Rursus addendo 20. ad 20. vt fiant 40. Item 20. ad 40. vt fiant 60. Item 20. ad 60. vt fiant 80. vt hic vides.

15	32	49	66	83	100
12					80
9					60
6					40
3					20

EX 12. supremo primi ordinis, & infimo 20. secundi ordinis fiunt 32. pro primo medio. Ex 9. & 40. fiunt 49. pro secundo medio. Ex 6. & 60 fiunt 66. pro tertio medio. Denique ex 3. & 80. fiunt 83. pro quarto medio. Itaque in primo ordine semper descendendum est à supremo ad infimum vsque, in secundo vero ab infimo ad supremum vsque ascendendum.

EST autem dignum consideratione, differentiam Quotientium, qui sunt minimi numeri duorum ordinum constituentium, esse quoque differentiam proportionalitatis constituendæ. Ita vides differentiam in proposito exemplo esse 17. quæ differentia etiam est inter Quotientes 3. & 20. Quocirca, inuentis Quotientibus, si minor a maior subtrahatur, & reliquis numeris minori extremo duo adjiciatur, & hinc compositio numero idem ille numerus reliquis addatur, &

ita

ita deinceps, constituentur ijdem termini medij, etiamsi duo illi ordines non instituantur.

VIDES ergo, verumque numerum propositum numerari debere à numero, qui numerum mediorum una vnitate superat, si fractiones euitandæ sint: Vel certe inueniendos esse duos extremos, vt in priori parte huius regulæ præcepimus. In ijs enim fractiones quoque vitantur, etiamsi eos numerus numero mediorum proxime maior nõ numeret: quia minore Quotiente detracto ex maiore, semper numerus integer relinquitur; vt in exemplis prioris illius regulæ apparet. Nam in tertio eorum verbi gratia, inter 5. & 45. constituendi sunt 9. termini medij. Si igitur vterque per 10. dividatur, fiunt Quotientes $\frac{5}{1}\frac{0}{0}$. & $\frac{4}{1}\frac{5}{0}$. hoc est, $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. quorum differentia est 4. numerus integer, ex cuius continua additione ad minus extremum datum medij termini optati conficiuntur: qui ijdem reperiẽtur, si per Quotientes $\frac{1}{2}$. & $4\frac{1}{2}$. duo ordines instituantur à fundantes, vt dictum est, per ipsorum Quotientum additionem continuam, &c.

X.

NVMERVM quemlibet propositum distribuemus in partes, quotquot quis iusserit, proportionalitatem Arithmeticam seruantes, hac ratione. Diuisa dato numero per semissem numeri terminorum, secabimus Quotiẽtem in duas partes inæquales, vtcunque, pro extremis terminis proportionalitatis. Deinde quia iam dati sunt duo termini extremi, cũ numero terminorum, detrahemus minus extremum ex maiore, partiemurque reliquum numerum per numerum proxime minorẽ numero terminorũ. Ita namque prodibit in Quotiente differentia, vt ex 4. regula patet. Si igitur hæc differentia addatur minori extremo assumpto, deinde ad numerum conflatum, atque ita deinceps, cõstituetur numerus terminorum datus, quorum summa proposito numero æqualis est: ac proinde datus numerus in numerum partiũ Arithmetice proportionalium sectus erit. Exempli causa, si numerus 830. distribuẽdus sit in 10. partes proportionales Arithmetice; partiemur eum per 5. semissem terminorum, Quotientemque 166. secabimus in 20. & 246. terminos extre-

mos

mos proportionalitatis constituenda. Deinde deductis 20. ex 146. numerum reliquum 126. diuidemus per 9. numerũ proxime minorem numero terminorum. Quotiens enim 14. (vt in 4. regula dictum est) differentia erit proportionalitatis. Vt hic vides.

20. 34. 48. 62. 76. 90. 104. 118. 132. 146.

Rursus si numerus 10. diuidendus sit in 10. partes proportionales Arithmetice, diuidemus eum per 5. semissem terminorum: Quotientem vero 2 in duas partes inaequales secabimus $\frac{1}{2}$. & $1\frac{1}{2}$. pro extremis terminis proportionalitatis. Dempto deinde minore extremo $\frac{1}{2}$. ex maiore $1\frac{1}{2}$. partiemur reliquam 1. per 9. numerum proxime minorem numero partium constituendarum. Quotiens enim $\frac{1}{9}$. differentia erit continua addenda minori extremo $\frac{1}{2}$. & numero constato, &c. Qua additio, vt facilior fiat, reducemus minus extremum $\frac{1}{2}$. & differentiam $\frac{1}{9}$. ad eandem denominationem, vt ad $\frac{9}{18}$. & $\frac{2}{18}$. Sic ergo diuisus erit numerus 10. in 10. partes Arithmetice proportionales, quarum prima est $\frac{1}{2}$. siue $\frac{9}{18}$. vltima vero $1\frac{1}{2}$. siue $1\frac{9}{18}$. & differentia $\frac{2}{18}$.

$$\frac{9}{18}.\frac{11}{18}.\frac{13}{18}.\frac{15}{18}.\frac{17}{18}.1\frac{1}{18}.1\frac{3}{18}.1\frac{5}{18}.1\frac{7}{18}.1\frac{9}{18}.$$

Certum autem est, hac ratione variis modis datum numerum diuidi posse in propositum numerum partium proportionalium, prout videlicet, diuiso dato numero per semissem numeri terminorum, Quotiens in alias partes binas inaequales pro terminis extremis sectus fuerit.

IDEM efficiemus hac ratione. Numero dato, ac si esset summa omnium terminorum constituendorum, diuiso per numerum terminorum datum, dabit Quotiens duplicatus summam extremorum: propterea quod huius extremorum summæ semissis, id est, Quotiens inuentus ductus in numerũ terminorum, hoc est, in diuisorem, producit summam omnium terminorum, nimirum datũ numerum, vt in secunda regula dictũ est. Quare si Quotientem duplicatum in duos numeros inaequales secemus pro terminis extremis: & minore

detracto

detracto ex maiore, reliquum numerū per numerum proxime minorem numero terminorum dato diuidamus, dabit Quotiens differentiam, vt in 4. regula diximus. Quam si ad minus extremum factum adijciamus, & iterum ad conflatum numerum, & sic deinceps, constituta erit proportionalitas Arithmetica, qua imperatur. Veluti, si numerus 198. secandus proponatur in 9. partes Arithmetice proportionales, partiemur eum per 9. terminorum numerum, vt fiat Quotiens 22. qui duplicatus dabit 44. summam extremorum. Constituto igitur minore extremo 10. ac proinde maiore 34. si detrahamus 10. ex 34. & reliquum numerum 24. per 8. numerum proxime minorem numero terminorū partiamur, gignetur differentia 3. Sic ergo stabunt 9. termini proportionalitatis Arithmetica conficientes summam 198.

10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. 34.

Hic etiam manifestum est, quotijs medis datum numerū distribui posse in datum numerum partium, prout videlicet Quotiens primus duplicatus, quem summam esse diximus extremorum, in alias atque alias partes binas sectus fuerit pro extremis duobus terminis.

SED fortasse facilius (quamquam operatio aliquanto longior sit) idem hoc absolues hac ratione. Cape tot numeros Arithmetice quomodocunque proportionales, in quot partes datus numerus distribuendus est, & singulos in datū numerum duc, procreatosque numeros per summam omnium terminorum sumptorum ex 2. regula inuentam, pertine. Quotiētes. n. dabunt partes, quas quaris. Verbi gratia. Sit diuidendus numerus 525. in 10. partes proportionales Arithmetice. Sume 10. numeros Arithmetice proportionales quoscunque, 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. 25. 28. 31. quorum summa est 175. Ductis autem singulis in datum numerum 525. creabuntur hi 10. numeri, 2100. 3675. 5250. 6825. 8400. 9975. 11550. 13125. 14700. 16275. quibus singulis diuisis per summam 175. tuorum numerorum in proportionalitate Arithmetica acceptorum, gignentur ha 10. partes, quas quaeris.

12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93.

IDEM obtinebis, si datum numerum per assumptorum numerorum summam partiaris, Quotientem in singulos assumptos numeros ducas. Producti enim numeri dabunt partes, quas quaris. Vt in dato exemplo, si datus numerus 525. dividatur per 175. summam assumptorũ numerorum, sit Quotiens 3. quo ducto in singulos numeros assumptos, 4. 7. 10. &c. gignentur eadem partes, quæ prius, 12. 21. 30. &c.

VT autem operatio fiat facilior, ac brevior, satis est, priores duos numeros proportionalitatis acceptã multiplicare per datum numerum, productosque numeros per summam omnium terminorum eiusdem acceptæ proportionalitatis partiri. Vel satis est, dato numero per summam assumptorũ numerorum diviso, Quotientem in duos priores assumptos numeros ducere. Ita enim reperientur prima duæ partes numeri dati, quarum differentia addita maiori, fiet tertia, & eadem differentia addita tertiæ faciet quartam, & sic deinceps. Liquido autem hic quoque constare puto, datum numerum variis modis distribui posse in partes, quotquot quis imperauerit, proportionales: prout scilicet alij atque alij numeri eiusdem proportionalitatis Arithmeticæ fuerint assumpti, vel quorum alia atque alia sit differentia.

HAC via partes inuentæ habent ordinatim easdem proportiones inter se, quæ inter terminos proportionalitatis assumptos eodem ordine reperiuntur. Perpetuo autem singuli numeri acceptæ proportionalitatis ad singulas partes inuentas, primus ad primam, secundus ad secundam, &c. eandem omnino habent proportionem. Sic enim, inuentæ primas partes inuentas 12. 21. esse proportionem superiparticntem quartas, qualis est inter primos numeros acceptos 4. 7. &c. Item 4. ad 12. & 7. ad 21. & 10. ad 30. &c. habere eandem prorsus proportionem, nimirum subtriplam.

ITA QVE, si accipiantur proportionalitas Arithmetica, cuius primi duo numeri habeant proportionẽ duplam, ita vt primus sit differentia omnium terminorum, habebis prima partes duplam quoque proportionẽ, atque ideo prima

erit

erit quoque differentia, ex cuius additione alia partes concernentur. Vt si in superiore exemplo accepisses hos 10. terminos, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. quorum summa est 55. Vel hos 10. numeros, 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. quorum summa est 165. multiplicasses q. primum quemq. in datum numerum 525. & productos numeros 525. 1575. per summam quemlibet propriam: vt priorem per 55. & posteriorē per 165. divisisses, invenisses primam partē $9\frac{6}{11}$ quæ eadem esset differentia. Quare partes omnes 10. constituentes proportionalitatem Arithmeticam fuissent hæ.

$9\frac{6}{11}$. $19\frac{1}{11}$. $28\frac{7}{11}$. $38\frac{2}{11}$. $47\frac{8}{11}$. $57\frac{3}{11}$.

$66\frac{9}{11}$. $76\frac{4}{11}$. $85\frac{10}{11}$. $95\frac{5}{11}$.

DE PROPORTIONALITATE Geometrica.

I.

DATIS quibuslibet duobus numeris, si denominatorem proportionis, quam habent; conferendo maiorem cum minore, hoc est, si divisio maiore per minorem, Quotientem ducas in maiorem, gignes tertium terminum in proportionalitate Geometrica utroque dato maiorem: Et si eundem denominatorem, sive Quotientem in hunc tertium ducas, produces quartum adhuc maiorem in eadem proportionalitate: Atque ita deinceps constitues infinitos alios semper maiores, si denominatorem, Quotientemve per ultimum inventum semper multiplices. Vt datis duobus numeris 4. 12. denominator proportionis 12. ad 4. est 3. quod divisis 12. per 4. Quotiens fiat 3. & igitur ducas 3. in 12. & iterum in productum, & sic in infinitum, constituas hanc proportionalitatem Geometricam, quæ in infinitū potest extendi.

4. 12. 36. 108. 324. 972. 2916. 8748. &c.

Quod si minorem cum maiore confras, & denominatorem proportionis, quam habent, id est, divisio minore per maiorem, Quotientem ducas in minorem: Vel, quod idem

est,

eſt, per denominatorem proportionis, quum maior ad minorem habet, diuidas minorem, creabitur tertius numerus proportionalis vtroque minor. Ex quo eadem via reperies quartum adhuc minorem, & ſic in infinitum. Vt datis duobus numeris 8. 16. denominator proportionis 8. ad 16. eſt $\frac{1}{2}$ quod diuiſis 8. per 16. Quotiens fiat $\frac{1}{2}$. Denominator autem proportionis 16. ad 8. eſt 2. quod diuiſis 16. per 8. Quotiens fiat 2. Si igitur ducas $\frac{1}{2}$. in 8. vel diuiſis 8. per 2. idemque cum producto numero facias, conſtituetur hac proportionalitas Geometrica, progrediens quoque in infinitum verſus minores numeros, ſicut illa in infinitum verſus maiores numeros progrediebatur.

16. 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$ &c.

EXTENDETVR quoque eadem proportionalitas in infinitum, etiamſi denominator proportionis ignotus ſit, hoc modo. Datis duobus numeris, duc maiorem in ſe, & productum per minorem diuide. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque maior. Hunc ſi iterum in ſe ducas, productumque per proxime precedentem terminum diuidas, dabit Quotiens quartum terminum, & ſic deinceps. Vt datis duobus numeris, 3. 6. Ducto 6. in ſe, fit 36. quo diuiſo per 3. fit 12. tertius terminus. Rurſus ducto 12. in ſe, fit 144. quo diuiſo per 6. fit 24. quartus terminus. atque ita in infinitum, vt hic vides. 3. 6. 12. 24. 48. &c.

BVRSVS datis duobus numeris, ſi minorem in ſe duxeris, productumque per maiorem diuiſeris, dabit Quotiens tertium terminum vtroque minorem. Quem ſi rurſus in ſe duxeris, productumque per proxime precedentem terminum diuiſeris, dabit Quotiens quartum terminum adhuc minorem, & ſic deinceps. Vt datis duobus numeris 6. 18. Ducto 6. in ſe, fit 36. quo diuiſo per 18. fit 2. tertius terminus. Rurſus ducto 2. in ſe fit 4. quo diuiſo per 6 fit $\frac{4}{6}$. ſiue $\frac{2}{3}$. in minimis numeris, pro quarto termino: atque ita in infinitum, vt hic apparet.

18. 6. 2. $\frac{2}{3}$. $\frac{2}{9}$. $\frac{2}{27}$. &c.

IAM

IAM vero si quamcunque proportionem non multiplicem (in multiplici enim, si regulam præscriptam sequaris, nulla est difficultas) extendere velis in numeris integris ad quotlibet terminos maiores, efficies id iucunda hac & facili operatione. Cape tot terminos continue proportionales eius proportionis multiplicis ab 1. incipientis, cuius denominator denominat partem, vel partes aliquotas, cuius, vel quarum in data proportione sit mentio; tot, inquam, cape terminos, quot in proposita proportionalitate non multiplici terminos desideras. Vltimus enim eorum erit primus terminus tua proportionis non multiplicis. Eum ergo si multiplices per denominatorem data proportionis, & iterum numerum productum in eundem denominatorem ducas, atque ita deinceps, constitues terminos optatos. Vbi hoc est mirabile, si termini imperati hac via reperiantur, non posse vltra terminos propositos proportionalitatem extendi sine fractione. Verbi gratia, si inuenienda sint 7. termini proportionis sesquialtera: Quoniam denominator fractionis $\frac{1}{2}$. cuius mentio fit, est 2. sumendi sunt 7. termini proportionis duplæ, videlicet. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. Si ergo à 64. incipias, constitues 7. terminos proportionalitatis sesquialteræ, & non plures, hos nimirum.

64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.

Inuenientur autem facile hi termini, si ad primum 64. adijcias eius dimidium, & ad secundum 96. iam factum, eius quoque dimidium, &c. Sic quoque si desiderentur 6. termini proportionis duplæ superbipartientis quintas, accipiendi sunt 6. termini proportionis quintuplæ, propter denominatorem partium quintarum, qui est 5. videlicet. 1. 5. 25. 125. 625. 3125. Nam si ab vltimo 3125. incipias, reperies hos 6. terminos in proportione duplæ superbipartiente quintas.

3125. 7500. 18000. 43200. 103680. 248832.

Qui termini facile reperientur, si duas quintas partes primi ad eundem primum duplicati adijcias, & rursus $\frac{2}{5}$.

secundi

secundi iam facti ad eundem secundum duplicatum, &c. Atque numeri hac via inuenti semper minimi sunt in sua proportione, ita vt alij totidem termini in eadem proportione continua reperiri, qui minores illis sint, sit prorsus impossibile: nisi fractiones admittere velimus. Facilius ijdem termini reperientur, si inuentis duobus minimis terminis in data proportione, per maiorem multiplicetur primus ex illa proportione multiplici inuentus, & productus per minorem diuidatur. Ita enim secundus terminus reperietur. Qui si rursus ducatur in maiorem minimorum terminorum, & productus per minorem diuidatur, inuenietur tertius terminus; & sic deinceps. Vt in posteriori exemplo, minimi termini proportionis dupla superbipartientis quintas sunt 5. & 12. Si igitur sextum 3125. proportionis quintuplæ, qui debet esse primus sex terminorum quæsitorum, ducatur in 12. & productus 37500. per 5. diuidatur, prodibit secundus terminus 7500. qui si rursus in 12. ducatur, & productus 90000. per 5. diuidatur, producetur tertius terminus 18000. &c. In proportione porro multiplici quacunque minimi termini quotcunque perpetuo incipiunt ab 1. Vt tres minimi termini in proportione continua quadrupla sunt hi, 1. 4. 16.

II.

QVANDO numerus terminorum continue proportionalium impar est, numerus geniturus ex multiplicatione extremorum inter se, æqualis est numero, qui ex quorumlibet duorum ab extremis æqualiter distantium multiplicatione inter se creatur, & ei quoque qui ex medio in se ipsum ducto producitur. Vt in his 5. numeris proportionis sesquialteræ.

16. 24. 36. 54. 81.

tam ex 16. in 81. quàm ex 24. in 54. & ex 36. in se, procreatur numerus 1296.

QVANDO autem proportionalium terminorum numerus est par, etiamsi non continue sint proportionales, dummodo bini continuam proportionem interrumpentes habeant

beant vnam eandemque inter se proportionem, hoc est, dum modo secundus & tertius; item quartus & quintus; necnon sextus & septimus, &c. (quibus in locis proportio interrumpitur) sint quoque non continue proportionales, in diuersa tamen proportione ab ea, quam primus habet ad secundum, & tertius ad quartum, & quintus ad sextum, &c. Quando, inquam, terminorum numerus est par, numerus ex ductu extremorum vnius in alterum productus semper aqualis est numero, qui ex multiplicatione quorumlibet duorum ab extremis aqualiter distantium inter se gignitur. Vt hic in 6. numeris dupla proportionis continua.

3. 6. 12. 24. 48. 96.

Ex 3. in 96. & ex 6. in 48. & ex 12. in 24. producitur idem semper numerus 288.

Item in hac sesquitertia non continua 8. terminorum, vbi bini proportionem continuam interrumpentes habent vnam eandemque proportionem. videlicet triplam, quae a sesquitertia diuersa est.

3. 4. 12. 16. 48. 64. 192. 256.

idem omnino numerus 768 fit ex 3. in 256. & ex 4. in 192. & ex 12. in 64. & ex 16. in 48.

HINC sequitur, quando terminorum numerus impar est, numerum ex ductu extremorum vnius in alterum, vel ex duorum quorumlibet aqualiter ab extremis, vel a medio distantium multiplicatione inter se procreatum, esse quadratum. (Dicitur quadratus numerus is, qui ex multiplicatione alicuius numeri in seipsum producitur; numerusque ipsum producens latus eius, siue radix appellatur.) cuius radix, siue latus est medius numerus: quia nimirum idem numerus gignitur ex medio in seipsum; ac proinde medius eius radix quadrata est. Numerum vero ex tribus inter se multiplicatis productum, quorum duo sunt vel extremi, vel ab extremis aqualiter remoti, tertius autem medius, esse cubum, (Numerus ille dicitur cubus, qui producitur ex

numero aliquo in ſeipſum ducto, & iterum in productum numerum: & numerus ille, qui in ſe ductus, & iterum in productum, cubum producit, latus eius cubicum, ſiue radix cubica appellatur) cuius latus, ſiue radix eſt medius numerus: quia videlicet gignitur ex medio in ſe cubice ducto, hoc eſt, primum in ſe, deinde in productum ex alijs duobus inter ſe multiplicatis. In ſe enim facit productum ex alijs duobus: ac proinde in hunc procreatum iterum ductus producit cubum.

SEQVITVR quoque, quando ſunt 4. numeri ſiue continue, ſiue non continue proportionales, numerum ex mutua omnium multiplicatione productum, (Dicuntur tres, vel plures numeri ſe mutuo multiplicare continue, quando vnus ducitur in alium, & productus numerus in tertium, & hic productus numerus in quartum, & ſic deinceps, donec omnes numeri ſint multiplicati.) eſſe quadratũ cuius latus, ſiue radix eſt numerus ex primo in quartum, vel ex ſecundo in tertium genitus. Nam ex multiplicatione mutua omnium 4. numerorum inter ſe idem procreatur numerus, quem producit numerus factus ex primo in quartum ſi in productum ex ſecundo in tertium (qui productio ex primo in quartum aqualis eſt) multiplicatur. Quando autem ſunt 6. numeri ſiue continue, ſiue non continue proportionales, dummodo bini numeri proportionem continuam interrumpentes ſint quoque non continue proportionales, fiet cubus ex mutua multiplicatione omnium 6. numerorum inter ſe, cuius radix, latuſue eſt numerus ex multiplicatione extremorum, vel duorum quorumlibet ab extremis aqualiter diſtantium, productus qui videlicet gignitur ex numero, qui fit ex duobus extremis inter ſe multiplicatis, in ſe cubice multiplicato: hoc eſt, ſemel in ſe, nimirum in productũ ex duobus, qui ſunt extremis proximi, & iterum in productum, quando videlicet hic productus numerus ducitur in productum ex duobus medijs: quippe cum tres hi numeri producti ſint inter ſe aquales.

III.

SI, propoſitis quotcunque terminis continue proportionalibus, minus extremum à maiore ſubtrahatur, & reliquus

numerus

numerus per numerum vna vnitate minorem denominatore proportionis, (quam quilibet propositorum numerorū ad minorem habet, qui illi proximus est) diuidatur, Quotiens denique maiori extremo adijciatur, conflabitur summa omnium ter minorum. Vt hic in proportione continua tripla.

2. 6. 18. 54. 162. 486. 1458. 4374. 13122.

Dempto minore extremo 2. ex maiore 13122. & reliquo numero 13120. diuiso per 2. per numerum scilicet vna vnitate minorem denominatore 3. proportionis triplæ, quā quilibet eorum numerorum ad proxime antecedentem minorem habet, fit Quotiens 6560. cui si addatur maius extremum 13122. fit summa omnium 19682. Item in hac sesquitertia continua.

243. 324. 432. 576. 768. 1024.

Subducto minore extremo 243. ex maiore 1024. & reliquo numero 781. diuiso per $\frac{1}{3}$. (qui numerus vna vnitate minor est denominatore $1\frac{1}{3}$.) fit Quotiens 2343. Addito ergo maiore extremo 1024. fit omnium terminorum summa 3367.

ITAQVE vt vides, ad explorandam summam quotcunque terminorum proportionalitatis Geometricæ satis est, si duo extremi cognoscantur, vna cum proportionis denominatore. Quo vero artificio inuestigandus sit vltimus terminus cuiusuis proportionalitatis Geometricæ quotcunque terminorum, etiamsi medios numeros ignoremus, copiose tradidimus in progressionibus in nostra Arithmetica practica, vt supernacaneum sit, eam hoc loco repetere.

III.

PROPOSITIS quotlibet numeris se mutuo æqualiter superantibus, id est, Arithmetice proportionalibus; si totidē alij numeri sumantur habentes easdem proportiones, quas illi eodem ordine sumpti; superabunt se quoque posteriores hi numeri æqualiter, hoc est, erunt Arithmetice proportionales, sicut illi. Vt si sex hi numeri, 4. 7. 10. 13. 16. 19.

Arithmetice proportionales proponantur, sumanturque alij sex cum ijsdem proportionibus, cuiusmodi sunt hi, 20. 35. 50. 65. 80. 95. comperies ipsos quoque Arithmetice esse proportionales; quippe cum habeant differentiam 15. Sed eadem patet, hanc proprietatem posse conuerti: Neque enim si dentur quotuis numeri Arithmetice proportionales, & totidem alij Arithmetice quoque proportionales sumantur, etiam si vtro hique eadem sit differentia, necessario hi illis proportionales erunt. Id quod perspicuum est in binis duabus proportionalitatibus Arithmeticis.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21.

Vbi prioris duo primi numeri 2. 4. habent proportionem duplam, at posteriores duo primi 3. 5. superbipartientem tertias. Item primus numerus 3. in posteriore ordine ad primum numerum 2 in ordine priore habet sesquialteram proportionem, secundus autem 5. ad secundum 4 sesquiquartam. &c.

V.

DVOBVS quibusuis numeris datis, si eorum alterutre in quotlibet partes distributo, singulæ partes in alterum ducantur, & singuli numeri producti per priorem numerum dividantur, constituent omnes Quotientes simul sumpti posteriorem numerum, habebuntque ordine eadem omnino proportiones inter se, quas partes prioris numeri inter se eodem ordine habent: at singuli Quotientes, siue partes posterioris numeri ad singulas partes prioris, vt prima ad primam, secunda ad secundam, &c. vnam eandemque versus habebunt proportionem. Veluti, datis duobus numeris 57. 285. si prior secetur in partes, quæ simul additæ ipsum conficiant, 2. 5. 10. 40. & earum qualibet in posteriorem numerum 285. ducatur, gignentur hi numeri, 570. 1425. 2850. 11400. quibus sigillatim per numerum priorem 57. diuisis, fiunt Quotientes, 10. 25. 50. 200. qui in vnam collecti summam constituunt posteriorem numerum 285. habentique

eadem

easdem proportiones, quas habent partes 2.5. 10.40. nimirum duplam sesquialteram, duplam, & quadruplam: singuli vero ad singulas partes, vt 10. ad 2. & 25. ad 5. & 50. ad 10. & 200. ad 40. eandem omnino proportionem habent, nimirum quintuplam.

EASDEM partes numeri posterioris obtinebis, si eum per priorem, qui in partes distributus est, partiaris. Quotiescunque factum in singulas partes eiusdem prioris numeri ducas. Vt in eodem exemplo, diuiso numero 285. per 57. fit Quotiens 5. quo ducto in 2.5.10.40. partes numeri 57. fiunt partes numeri 285. hæ, 10. 25. 50. 200. vt prius.

HINC facile elicitur, quo pacto duo quilibet numeri secandi sint in partes componentes ipsis numeris æquales, ita vt partes vnius sint partibus alterius proportionales, collatis tum partibus vtriusq; numeri inter se, tum & partibus vnius cum partibus alterius. Atque hac proprietate nititur tertia ratio distribuendi numerum propositum in quotuis partes Arithmeticæ proportionales, quam in regula 10. proportionalitatis Arithmeticæ præscripsimus. Nã sumptis totidem numeris Arithmeticè proportionalibus, erit eorum summa, numerus in illos, tanquam in partes ipsum componentes, diuisus. Quare si singulæ hæ partes in datum numerum ducantur, & producti numeri per summam illam diuidantur; Vel si per assumptorum numerorum summam datus numerus diuidatur, ac Quotiens in singulos eos numeros ducatur; producentur partes totidem numeri propositi in eisdem proportionibus. Quare Arithmeticè quoque proportionales erunt, vt ex antecedente regula 4. manifestum est.

VI.

QVOTLIBET numeris continuè proportionalibus datis, erunt eorum differentiæ continuè quoque in eadem proportione proportionales. Vt in appositè exemplo tam numeri, quàm eorum differentiæ, habent continuam proportionem sesquialteram.

Differentia.	1	32	48	72	108	162	243	
	1	64	96	144	216	324	486	729

Eadem ratione in hoc altero exemplo, quod sequitur, habent & numeri, & eorum differentia, duplam proportionem. Vbi vides differentias non differre à numeris dupla proportionis, quorum sunt differentiæ. Id quod soli proportioni duplæ cuicunque accidit: quia in ea quilibet numerus maior proxime præcedentem minorem superat ipsomet numero proxime antecedente, cuius duplus est, hoc est, quem bis continet.

Differentia.	7	14	28	56	112	224	448	896
	7	14	28	56	112	224	448	896	1792

VII.

DATIS quotcunque numeris continuè proportionalibus, si eorum summa per eos sigillatim diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales. Et si Quotientium summa per ipsos Quotientes sigillatim diuidatur, creabuntur ijdem prorsus Quotientes ordine conuerso: atque ita in infinitum. Summa autem eorum Quotientium æqualis erit numero, qui fit ex primo Quotiente in vltimum, vel ex multiplicatione duorum quorumlibet ab extremis æqualiter distantium, vel denique, si terminorum numerus est impar, ex medio in seipsum ducto. Quod sane incredibile videri possit. Exempli causa. Si dentur hi 4. numeri continuè proportionales in proportione duplæ. 3. 6. 12. 24. si eorum summa 45. per singulos diuidatur, erunt Quotientes 15. $7\frac{1}{2}$. $3\frac{3}{4}$. $1\frac{7}{8}$. conuerso ordine in eadem proportione dupla continuè proportionales. Et si per hosce Quotientes diuidatur eorum summa $28\frac{1}{8}$. prodibunt ordine conuerso ijdem omnino Quotientes, & ita deinceps in infinitum. Ipsa vero summa $28\frac{1}{8}$. æqualis est numero, qui fit ex 15. in $1\frac{7}{8}$. vel ex $7\frac{1}{2}$. in $3\frac{3}{4}$. Sic etiam datis

his

his 5. terminis in cătinua proportione tripla, 2. 6. 18. 54. 162. si eorum summam partiemur per eos singillatim, efficiemus hos 5. Quotientes, $121.40\frac{1}{3}.13\frac{4}{9}.4\frac{1}{2}\frac{3}{7}.1\frac{4}{8}\frac{0}{1}$. *in eadem continua proportione tripla. Quorum summa* $180\frac{6}{1}\frac{1}{3}$. *producitur vel ex* $121.$ *in* $1\frac{4}{8}\frac{0}{1}$. *vel ex* $40\frac{1}{3}$. *in* $4\frac{2}{7}$. *vel denique ex* $13\frac{4}{9}$. *in seipsum. Vbi duo consideratione sunt digna. Primum, quando terminorum numerus est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius radix est medius terminus: quippe qui ex medio termino in seipsum ducto procreetur, vt dictum est. Deinde, eosdem semper Quotientes gigni ex diuisione summa quotcunque terminorum proportionis eiusdem continuæ, quantumuis termini illi sint magni, aut parui, dummodo terminorum numerus idem semper sit. Veluti, si sint tres termini continue dupli, siue magni, siue parui, erunt perpetuo hi Quotientes,* $7.3\frac{1}{2}.1\frac{3}{4}$. *Si sint quatuor, hi Quotientes erunt,* $15.7\frac{1}{2}.3\frac{3}{4}.1\frac{7}{8}$. *In quinque numeris continue triplis, erunt hi semper Quotientes,* $121.40\frac{1}{3}.13\frac{4}{9}.4\frac{1}{2}\frac{3}{7}.1\frac{4}{8}\frac{0}{1}$. *Ac denique in quinque numeris continuam proportionem sesquialteram habentibus reperientur hi Quotientes.* $13\frac{5}{1}\frac{1}{6}.8\frac{1}{2}\frac{9}{4}.5\frac{1}{3}\frac{1}{6}.3\frac{4}{5}\frac{9}{4}.2\frac{4}{8}\frac{9}{1}$.

EX *hac proprietate inueniemus quotcunque terminos in data proportione continue proportionales, quorum summa æqualis sit numero, qui fit ab extremis inter se multiplicatis, vel ex duobus mediis quibuslibet æqualiter distantibus ab extremis, vel etiam ex termino medio in seipsum ducto, si numerus terminorum fuerit impar. Nam si sumantur tot termini in data proportione continue proportionales, quot inueniendi sunt, siue magni, siue parui, eorumque summa per eosdem seorsum diuidatur, erunt Quotiẽtes numeri, qui desiderantur. Quòd si summa debeat esse numerus quadratus, accipiendi erunt termini, quorum numerus impar sit, & dato numero terminorum impari æqualis, &c. Quæres miraculi instar quodammodo censeri possit, dari posse in data proportione, quotquot quis iusserit, terminos continue proportionales, quorum summa ex multiplicatione primi termini in vltimum gignatur: cum contrarium huius experiamur in omnibus proportionibus con-*

tionis inequalitatis, quarum termini sint numeri integri; & in alijs etiam omnibus, quarum numeri fractiones habent admixtas, nisi hi numeri Quotiẽtes sint producti ex diuisione sũmæ alicuius quotcũque terminorũ continue proportionaliũ, per ipsos terminos proportionales, vt diximus.

EODEM modo satisfaciemus quæstioni, si quis petat duos numeros datam habentes proportionem, quorũ summa æqualis sit numero ex eorum multiplicatione vnius in alterum procreato. Nam si sumantur quilibet duo numeri in proportione data, atque eorum summa per eosdem figillatim diuidatur, satisfiet quæstioni proposita per Quotiẽtes inuentos. Vt si cupiat quis duos numeros, inter quos reperiatur proportio tripla superbipartiens nonas, accipiemus vel hos duos numeros 29.9. vel 87.27. proportionem datam habentes, vel alios quosuis. Summa etenim priorum 38. diuisa per 29 & 9. vel posteriorum summa 114 per 87 & 27. diuisa dabit Quotientes, $1\frac{9}{29}$. & $4\frac{2}{9}$. proportionem eandem habentes, quam 29. & 9. vel 87. & 27. ordine tamen conuerso, & quorum aggregatum est $5\frac{1}{2}\frac{3}{6}\frac{9}{1}$. qui videlicet numerus ex ductu etiam $1\frac{9}{29}$ in $4\frac{2}{9}$ gignitur.

VIII.

INTER duos quoscunq; numeros constituemus mediũ Geometrice proportionalem, si eos inter se multiplicemus, & procreati numeri radicẽ quadratam accipiamus. Vt datis duobus numeris 6. & 96. ex vno in alterũ fit numerus 576. cuius radix quadrata 24. erit medio loco proportionalis inter datos numeros hoc modo, 6. 24. 96. Nã 96. ad 24. habent proportionem quadruplam, qualem etiam habent 24. ad 6. Itaque si inter datos duos numeros cõstituẽdus sit numerus medius rationalis, qui videlicet exprimi possit, necesse est, vt numerus ex vno in alterũ productus sit quadratus. Nisi enim quadratus sit, nõ habebit radicẽ in numeris, sed eius radix erit numerus, quẽ Arithmetici surdũ, vel irrationalẽ vocant, explicantque hoc modo, radix quadrata talis numeri. Veluti, datis duobus numeris 7. & 9. fiet ex vno in alterum numerus 63. qui radicem non habet. Dicamus ergo radicem quadratam numeri 63. qua quidẽ numeris exprimi ne-

mi nequit, esse medio loco proportionalem inter numeros datos 7. & 9. hoc modo, qua quidem radix maior est, quam 7. cum huius quadratum sit 49. minor vero quam 8. cum huius quadratum sit 64. Neque vero numerus 7. cum aliqua fractione, qui medius est inter 7. & 8. radix esse potest, etiamsi vnitas in infinitum cogitetur esse diuisa: quia omnis talis numerus cum fractione producit numerum cum fractione, vt ad defin. 8. demonstrabimus, cuiusmodi non est numerus 63.

| 7. | R. q. 63. | 9. |

IX.

SI quis inuenire velit tres numeros in Arithmetica proportionalitate, inter quorum binos singuli quadrati medij Geometrice proportionales, assequetur id hac ratione. Sumantur tres numeri quicunque, quorum secundus primi sit quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus. Quadrati enim numeri eorum erunt Arithmetice proportionales, & primus numerus acceptus in secundum ductus producet medium proportionalem Geometrice inter primū quadratū, & secundum, in proportione primi assumpti numeri ad secundum, secundus vero numerus assumptus in tertium ductus gignet medium proportionalem inter secundum quadratum, & tertium, in proportione, quam inter se habent secundus ac tertius numerus assumptus. Id quod perspicue in hoc exemplo apparet.

Tres nu. assump.	Primus. 8.	quintup. pri. 40.	Septup. pri. 56.
Quad. Arit. pro.	64	1600	3136.
Medij Geomet.	320	2240	

Differentia enim trium quadratorum est 1536. & medij proportionales inter eos, 320. & 2240. producti ex 8. in 40. et ex 40. in 56.

HINC facile reperies tres numeros quadratos, qui se

aqua-

aqualibus differentijs mutuo superent, si proradicibus eorũ sumes tres numeros, quorum secundus sit primi quintuplus, & tertius eiusdem primi septuplus, vt diximus.

PARI ratione, dato quouis quadrato, reperientur alij duo maiores cũ illo constituentes proportionalitatem Arithmeticam. Si enim radix dati quadrati statuatur primus numerus, & alij duo numeri sumantur, quorum alter illius radicis sit quintuplus, & septuplus alter, erũt quadrati numeri horum duorum numerorum, quos quærimus. Vt si detur quadratus numerus 64. erit eius radix 8. primus numerus, secundus, 40. & tertius. 56. &c.

INVENTIS autem tribus quadratis Arithmetice proportionalibus, si eos per quemuis numerum eundem multiplices, vel per quamuis partem aliquotam, si quam habẽt, diuidas, erũt producti quoque numeri, aut Quotiẽtes Arithmetice proportionales, inter quorum binos singuli etiam medij in Geometrica proportionalitate intercipiuntur; qui medij reperientur eodem modo, si nimirum medij inter quadratos inuẽtos per eundẽ illum numerũ multiplicentur, vel per eandem illam partem aliquotã diuidantur. Vt si superiores quadrati, una cum medys proportionalibus duplicentur, creabuntur hi numeri.

Arithmet: proportio.	1	128	1		1	3200	1		16272
Medij Geometr.	1		1	640	1		1	4480	1

Si vero diuidantur ỹdem per 8. partem aliquotam communem quadratorum, (sunt autem qualibet partes aliquote quadratorum. partes etiam aliquotæ mediorum) prodibunt hi numeri.

Arithmet. proportio.	1	8	1		1	200	1		1392
Medij Geometr.	1		1	40	1		1	280	1

Habebunt autem hi numeri hoc modo inuenti easdẽ sempre proportiones, quas quadrati, eorũque medij inter se habent.

Quod

Quod si hos 8. 200. 392. diuidas per 4. inuenies alios 2. 50. 98. Arithmetice proportionales, inter quos cadunt Geometrice medij, 100. & 70. Et si denique hos 2. 50. 98 partiaris per 2. habebis alios, 1. 25. 49. inter quos medij Geometrice sunt, 5. & 35.

VBI hoc etiam admiratione videtur dignum, quandocunque inter tres numeros Arithmetice proportionales, siue quadrati sint, siue nõ, cadunt duo medij Geometrice proportionales, vnus inter primũ & secundum, & inter secundũ ac tertium alter, quadratum prioris medij, & quadratum secundi numeri Arithmetica proportionalitatis, & quadratũ posterioris medij constituere proportionalitatẽ Arithmeticam. Vt in posteriori exemplo, quadrati numeri horũ triũ numerarum, 40. 200. 280. sunt 1600. 40000. 78400. Arithmetice proportionales, habentes differentiam eandem communem 30400. & sic de cæteris.

X.

INTER quoscunque duos numeros reperiemus quotcunq; medios continue proportionales, iucunda sane, & artificiosa operatione: quam vt planius explicem, dicenda pauca sunt de radicum generibus, & quo pacto numeri ex suis radicibus gignãtur. In omni ergo proportione continua, quæ ab 1. incipit, secundus terminus radix est omnium numerorum insequentium. Ea enim radix his posita, atque ita in se ipsam ducta producit tertiũ terminũ, qui est numerus quadratus, radixque ipsa quadrata dicitur. Eadem radix ter posita, & primum in se, & iterum in productum multiplicata gignit quartum terminum, qui cubus est, & propterea radix eius cubica appellatur. Denique si eadem radix ponatur quater, & fiant tres multiplicationes, primum in se, deinde in productum, tertia iterum in vltimum productũ, fiet quintus terminus: Et si ponatur quinquies, fiantq. quatuor ordine multiplicationes, orietur sextus terminus, atque ita in infinitũ: Quo pacto autem omnes hæ radices nominari debeant, & signari, non est huius loci declarare, sed ad Algebram tota hæc res spectat, vbi etiã docebimus, qua arte ex dato numero eruẽdæ sint. Nunc, vt intelligatur res, de qua

agimus

agimus, notanda sunt tres infrascripta proportionalitates continuæ, quarum duæ primæ sunt Arithmeticæ, nimirum duæ series naturales numerorum ab 1. incipientes, tertia verò Geometrica ab 1. quoque initium ducens. Vbi perspicuè apparebit, quàm egregium vsum habeat series numerorum naturalis in re proposita.

Numerus mediorum.	1	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	*&c.*
Numeri significantes radices.	1	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1	7	1	*&c.*
Numeri Geometr. propor.	1	1	2	1	4	1	8	1	16	1	32	1	64	1	128	1	*&c.*

Prima complectitur numeros mediorum constituendorũ, secunda numeros, qui significant genera radicum, hoc est, quoties terminus secundus tertiæ proportionalitatis, quem radicem omnium insequentium diximus, ordine poni debeat, vt multiplicatos numeros proportionalitatis Geometricæ illis respondentes procreet. Verbi gratia, vnitas medij ordinis significat, numerum 2. tertij ordinis, qui radix est omnium aliorum, semel positum non esse multiplicandum, sed ipsummet esse radicem omnium ex nulla sui multiplicatione productum. At numerus 2. eiusdem secundi ordinis indicat, eandem radicem 2. tertij ordinis positam bis hoc modo, 2.2. & ita in se multiplicatam gignere 4. tertium terminum eiusdem tertij ordinis. Sic numerus 3. medij ordinis denotat, radicem eandem 2. infimi ordinis positam ter hoc modo, 2.2.2 atque ita multiplicatam producere 8. quartum terminum infimi ordinis. Nam ex radice 2. primo loco posita in eandem 2. positam secundo loco fit numerus 4. & ex hoc producto in radicem 2. tertio positam loco gignitur numerus 8. quartus nimirum proportionalitatis Geometricæ sub numero 3. ordinis secundi. Idem dices de aliis. Vt verbi gratia numerus 7. secundæ proportionalitatis monstrat, radicem eandem 2. tertij ordinis positam septies, hoc pacto, 2.2.2.2.2.2.2. & in se continue sexies multiplicatam producere 128. octauum numerum Geometricæ proportionalitatis illi numero 7. suppositum, Nam ex 2. primi loci in 2.

secundi

secundi loci fiunt 4. & ex 4. in 2. tertij loci fiunt 8. & ex 8. in 2. quarti loci fiunt 16. & ex 16. in 2. quinti loci fiunt 32. & ex 32. in 2. sexti loci fiunt 64. & denique ex 64. in 2. septimi loci fiunt 128. &c. Atque hoc non solum verum est in proposita proportione continua dupla, sed in omnibus alijs ab vnitate incipientibus, quicunque numerus secundum locum occupet tanquam radix aliorum, & qui proportionem denominat.

ITAQVE si constituere vis quotlibet medios inter duos propositos numeros, cape numerum mediorum constituendorum in primo ordine. Nam ex vtroque numero dato extrahenda est radix, quæ toties ordine posita, & continuo multiplicata vtrumque producat, quot vnitates continentur in numero secundi ordinis, qui infra numerum mediorum constituendorum in supremo ordine acceptum scriptus est. Radices inuentas sub datis numeris colloca, quamque sub suo, & ab eisdem ascende per continuam vtriusque multiplicationem, (ducendo primum quamque radicem in se, deinde in numerum productum, & sic deinceps.) ita vt duas proportionalitates Geometricas multiplices instituas à radicibus incipientes, & ab eisdem denominatas, tot terminorum, (exclusis datis duobus numeris) quot medij termini quærumtur. Post hæc singulos terminos vnius ordinis duc in singulos terminos alterius ordinis aduersos, & oppositos, hoc est, maximum vnius in minimum alterius: proximum deinde sub illo in proximum supra hunc, &c. Ita vt in vno ordine semper descendas à supremo ad infimum vsque, in altero vero ab infimo vsque ad supremum ascendas, vt in exemplis patebit. Numeri enim procreati dabunt medios terminos, quos quærimus. Exempli causa, si inter 9. & 144. inueniendus sit vnus terminus medio loco proportionalis, sumemus in primo ordine 1. & sub hoc termino in secundo ordine numerum 2. qui indicat, ex vtroque numero dato eruendam esse radicem quadratam, quæ videlicet bis posita, per eius multiplicationem vtrumque producat, vt declarauimus. Radices autem quadratæ inuentæ sunt 3. & 12. Et quia vnus tantum medius terminus desideratur, non sunt instituenda proportio-

nalitates

nalitates Geometrica à radicibus incipientes, quæ plures terminos habeãt, sed ipsæ radices inter se multiplicãdæ. Numerus enim procreatus 36. erit medio loco proportionalis inter 9. & 144 Vt hic vides, 9. 36. 144. Sic etiam si inter 18. & 288. constituendus sit vnus terminus medius: quoniam hi numeri radices quadratas non habent, signabimus priorem hoc modo, R.q.18. posteriorem autem sic. R. q.288. Hæ autem radices inter se multiplicatæ faciunt 72. terminum medium proportionalem inter 18. & 288. hoc modo 18. 72. 288. Vbi etiam admiratione dignum est, duos numeros, quorum neuter potest efferri, inter se multiplicatos gignere numerum rationalem: cuius rei demonstrationem habes lib. 10. petenda est. Quo pacto autem inter se multiplicandi sint duo numeri surdi, qui nimirum efferri non possunt, quales sunt R.q.18. & R. q.288. docebimus in Algebra.

RVRSVS si dati sint duo numeri 16. & 625. inter quos tres medij constituendi sint, accipiemus in primo ordine numerum medium trium. cui in ordine secundo subscribitur numerus 4. Igitur ex vtroque dato numero extrahenda est radix, quæ quater posita, & continuè multiplicata vtrũque producat, quæ quadrati quadrata; vel Zensizencica dici solet, cuiusmodi in dato exemplo sunt 2. & 5. Constitues ergo hos ordines trium terminorum sub 16. & 625. Geometrice proportionalium in proportione multiplici, incipientes ab eisdem radicibus 2. & 5. à quibus proportiones horum ordinum denominantur, vt hic apparet.

16	40	100	250	625
8				125
4				25
2				5

Ex 8. supremo primi ordinis in 5. infimum secundi ordinis fiunt 40. pro primo medio. Ex 4. in 25. fiunt 100. pro medio secundo. Denique ex 2. in 125. fiunt 250. pro tertio medio.

SCITV autem dignum est, medios terminus inuentos cum duobus extremis datis continere proportionem continuam eam, quæ inter radices datorum numerorum reperitur. Sic enim in dato exemplo vides ita esse 625. ad 250. & 250. ad 100. & 100. ad 40. & 40. ad 16. vt 5. ad 2. Quapropter, inuentis radicibus, si maior per minorem diuidatur, & per Quotientem, qui denominator est proportionis radicum inuentarum, multiplicetur minor numerus datus, & productus numerus rursum per eundem Quotientem multiplicetur, atque ita deinceps, constituentur inter duos extremos datos medij termini ijdē, etiamsi duo illi ordines proportionum multiplicium à radicibus denominatarum non instituantur. Vt in exemplo dato. Diuisa radice 5. per radicem 2. fit Quotiens $2\frac{1}{2}$. denominator videlicet proportionis 5. ad 2. Si igitur ducas minorem numerum datum 16. in $2\frac{1}{2}$. gignes 40. primum medium: Et si rursus ducas 40. in $2\frac{1}{2}$. procreabis 100. secundum medium: Et denique si 100. ducas in $2\frac{1}{2}$. produces 250. tertium medium.

PERSPICVVM autem est, inter datos quoslibet numeros non semper constitui posse numerum terminorum propositum, qui sint rationales: propterea quod dati numeri non habent semper illas radices, quæ extrahendæ sunt: aut certe non habent eā proportionē, quam aliqui duo numeri, ex quibus ea radices possunt extrahi, quod etiam satis esset. Sicut enim inter 16. & 625. qui habent radices quadrati-quadratas, hoc est, quæ quater positæ eos suis multiplicationibus producunt, tres medij termini incidunt: ita quoq. inter 48. & 1875. qui illis 16. & 625. proportionales sunt, licet non habeant similes radices, cadunt tres medij termini, vt hic patet. 48. 120. 300. 750. 1875.

QVAMOBREM si quis desideret duos numeros, inter quos cadāt, quotquot veles, termini medij rationales in data proportione, accipiendi sunt duo numeri quomodocunque datam habentes proportionem. Eorum. n. vterq. si toties ponatur, quot termini medij quærendi sunt, & adhuc semel, & continue multiplicetur, erunt vltimi duo numeri producti, quos quærimus: Inter eos. n. medij termini consti-

tuentur

tuentur eo mode, quem exposuimus; hoc est, vel instituendo sub illis duos ordines proportionum multiplicium, quas assumpti numeri denominent, tot terminorum, quot medij termini quaruntur; vel multiplicando minorem eorum per denominatorem proportionis data, qua est inter acceptos ducs numeros, &c. Verbi gratia, si quis velit duos numeros, inter quos constitui possint quatuor termini medij rationales in proportione superbipartiente tertias, cuius denominator est $1\frac{2}{3}$. sumemus duos numeros 6. & 10. habentes datam proportionem superbipartientem tertias, & vtrumque quinquies ponemus hoc modo, 6.6.6.6.6. & 10.10.10.10.10. Ex multiplicatione enim continua vtriusque existent hi numeri 7776. & 100000. inter quos constitues quatuor medios numeros proportionales, vt hic vides.

7776	12960	21600	36000	60000	100000
1296					10000
216					1000
36					100
6					10

Qui quidem medij termini inueniuntur vel ex 1296. in 10. & ex 216. in 100. & ex 36. in 1000. & ex 6. in 10000. vel ex denominatore $1\frac{2}{3}$. proportionis superbipartientis tertias in minorem numerum inuentum 7776. & iterum in numerum productum, &c.

XI.

NVMERVM quemcunque datum distribuemus in quotuis partes proportionales Geometrice in data proportione hoc modo. Cape tot numeros continue proportionales in data proportione sive minimos, sive non minimos, in quot partes datus numerus distribuendus est, & per eorum summam datum numerum partire. Quotiens namque per singulos terminos in data proportione acceptos multiplicentur procreabit partes dati numeri seruantes datam proportionem in-

ter

ter sui vltimi sit datus numerus 756. secundus sit in 6. partes continue proportionales in proportione dupla: si sumantur 6. termini continue dupli, 3. 6. 12. 24. 48. 96. quorum summa est 189. & per hanc summam datus numerus 756. diuidatur. Quotiens autem 4. per singulos ascriptos numeros multiplicetur, prouenientibus his 6. numeris continue duplis, conficiesque simul in vnam summam collectis datum numerum 756. videlicet.

12. 24. 48. 96. 192. 384.

Eadem partes inuenientur, si sumantur hi alij 6. numeri continue dupli, $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{100}$. $\frac{2}{100}$. $\frac{4}{100}$. $\frac{8}{100}$. $\frac{16}{100}$. quorum summa est $\frac{32}{100}$. Vel hi. 100. 200. 400. 800. 1600. 3200. quorum summa est 6300. Nam datus numerus 756. diuisus per summa priorem $\frac{63}{100}$ facit 1200. qui Quotiens ductus in primum numerum acceptum $\frac{1}{100}$. dabit primam partem 12. vt prius, &c. Vel idem numerus datus 756. diuisus per posteriorem summam 6300. facit $\frac{12}{100}$. qui ductus in primum numerum assumptum 100. producit eandem partem primam 12. & sic de cæteris.

QVOD si cupias numerum, qui secari possit in quotcunque partes proportionales sine vlla fractione, (Nam nisi seruetur id, quod iam præcipiemus, incidemus plerunque in fractiones) assequeris propositum, si sumas quemcunque numerum multiplicem summæ totidem terminorum proportionalium assumptorum. Vt si quis quærat numerum, qui possit distribui in 4. numeros integros sesquialterum proportionem continuum habentes, sumpto 4. terminis in sesquialtera proportione continue quibuscunque, vt 64. 96. 144. 216. 324. quorum summa est 844. accipiemus huius summæ quemcunque numerum multiplicem, puta decuplum 8440. Hic enim per præceptum tradituum facilime in 4. numeros integros proportionis sesquialteræ secamus, cum eo diuiso per summam acceptorum numerorum. Quotiens necessario sit numerus integer.

HINC nullo negotio satisfaciemus quæstioni, quæ inducitur in data proportione rationum reperire quatuor numeros

qui in vnam summam collecti constituant numerum quēcunque datum. Nam si datus numerus secetur in tot partes proportionales data proportionis, vt docuimus, soluta erit quæstio. Vt si quis inuenire velit 4. numeros triplæ proportionis continuè, quorum summa sit 100. secēdus erit hic numerus 100. in 4. numeros proportionis triplæ, vt sit $2\frac{1}{2}$. $7\frac{1}{2}$. $22\frac{1}{2}$. $67\frac{1}{2}$. Hi enim conficiunt datum numerum 100. Quòd si conficere debeant summē 400. erunt numeri quæsiti in triplæ proportione continua hi. 10. 30. 90. 270. Horum enim summa est 400. Si denique summam conficere debeant non superantē 1. erunt huiusmodi numeri. $\frac{1}{40}$. $\frac{3}{40}$. $\frac{9}{40}$. $\frac{27}{40}$. Summa enim horum est $\frac{40}{40}$. hoc est. 1.

DE PROPORTIONALITATE Harmonica.

I.

TRES numeri in proportionalitate Harmonica inueniuntur ex tribus numeris proportionalitatis Arithmeticæ quibuscunque, si primus in secundum, ac tertium, & secundus in tertium multiplicetur. Vt subiecta exempla demonstrant.

Arit.	1	1.	2.	3.	1	3.	7.	11.	1	4.	6.	8.
Har.	1.	2.	3.	6.	1.	1.	3.	3.	7.	7.	1.	24.	32.	48.

1	10.	60.	110.									
1.	100.	1100.	6640.									

In omnibus enim ex primo termino Arithmeticæ proportionalitatis in secundum & tertium fit primus terminus Harmonicæ, & secundus: ex secundo vero in tertium, tertius: ALIO modo, & in idem recidis, gignitur Harmonica proportionalitas ex Arithmetica. Nam medius terminus Arithmeticæ proportionalitatis ductus in extremos gignit extremos Harmonicæ: extremi vero eiusdem Arithmeticæ inter se multiplicati creant medium Harmonicæ. Vt in ijsdem exemplis manifestum est.

HINC fit, extremos terminos Harmonicæ proportionalitatis, ac proinde & differentias, eandem habere proportionem, quam extremi Arithmeticæ, ex qua orta est, habent

quia

quia videlicet extremi Arithmetica per eundem medium multiplicati produxerunt Harmonica extremos.

QVAPROPTER si reperiendi sint tres numeri proportionalitatis Harmonica, quorum extremi, atque adeo et differentia, datam habeant proportionem, sumendi sunt duo numeri proportionem datam habentes, & inter eos medius Arithmetica proportionalitatis constituendus; ac denique ex hisce tribus terminis inueniendi tres in proportionalitate Harmonica, vt diximus. Vt si quarantur tres, quorū extremi habeant proportionem sesquitertiam, sumamus 3. & 4. inter quas ea proportio reperitur: sed quia eorum summa 7. impar est, non potest inter eos collocari medius integer in proportionalitate Arithmetica, ducemus vtrumque per aliquem numerum parem, nimirum per 2. Inter productos enim 6. 8. cadet integer medius proportionalis Arithmetice. 7. nimirum semissis eorum summæ. Ex his igitur tribus 6. 7 8. Arithmetice proportionalibus orientur hi tres Harmonice proportionales, 42. 48. 56. quorum extremi, atque adeo & differentia, proportionem sesquitertiam datam habent.

SEQVITVR etiam, binos numeros trium terminorum proportionalitatis Harmonica binis Arithmetica, ex qua orta est, conuerso ordine esse proportionales: hoc est, in Harmonica ita esse secundum ad primum, vt in Arithmetica tertius est ad secundum. Item in illa sic esse tertium ad secundum, vt in hac est secundus ad primum: quia nimirum priores duo in Harmonica producti sunt ex posterioribus duobus in Arithmetica per primum eundem multiplicatis: Duo vero posteriores Harmonica procreati sunt ex prioribus duobus Arithmetica in tertium ductis. Vt ex superioribus exemplis perspicuum est.

VICISSIM si primus numerus Harmonica proportionalitatis ducatur in secundum, ac tertium, & secundus in tertium, procreati erunt tres numeri Arithmetica proportionalitatis. Vel (quod idem est) si medius terminus Harmonica in duos extremos ducatur, gignentur duo extremi Arithmetica: duo vero extremi Harmonica inter se multiplicati producēt mediū Arithmetica: eodem scilicet prorsus modo, quo ex Arithmetica proportionalitate Harmonicā exiri

diximus. Ita vides ex hac Harmonica 2. 3. 6. gigni hanc Arithmeticam, 6. 12. 18. Sive enim ducas primum 2. in secundum 3. & tertium 6. Item secundum 3. in tertium 6. producet 6. 12. 18. sive ducas medium 3. in extremos 2. 6. facies extremos 6. 18. & ex primo 2. in tertium 6. medium 12.

HARMONICA proportionalitas dicitur continuari vltra tres terminos sive ad minores numeros progrediendo, sive regrediendo ad minores, quando primi tres numeri sunt proportionales Harmonice, & tertio adiunguntur duo cum eo consistentes quoque eandem proportionalitatem Harmonicam, & in eadem omnino proportione. Deinde vltimo, qui quintus est, adiunguntur eodem modo alij duo; atque vltimo sive septimo, alij duo, & sic in infinitum. Hoc autem fit versus maiores numeros progrediendo, si posteriores duo numeri ducantur in denominatorem proportionis, quam tertius ad primum habet. Vt datis his tribus numeris 2. 3. 6. Harmonice proportionalibus, si posteriores duo, 3. 6. ducantur in 3. denominatorem proportionis 6. ad 2. fient 9. 18. atque ita erunt iam quinque termini 2. 3. 6. 9. 18. Harmonice proportionales. Et si posteriores duo 9. 18. ducantur iterum in 3. denominatorem proportionis; erunt septem hi termini, 2. 3. 6 9. 18. 27. 54. continue proportionales Harmonice: & sic progredi poterimus in infinitum, ita vt semper Harmonicæ proportionalitas contineatur per terminos locorum imparium, vt per tertium, quintum, septimum, nonum, &c. Quod si versus minores terminos progredi libeat, diuidendi erunt minores duo numeri per denominatorem proportionis extremorum: Et posteriores duo minores inuenti iterum dividendi per eundem denominatorem, & sic deinceps in infinitum. Vt datis his tribus numeris, 18. 9. 6. si minores duo, 9. 6. dividantur per 3. denominatorem proportionis inter extremos 18. 6. fient 3. 2. atque ita erunt iam quinque termini; 18. 9. 6. 3. 2. Et si rursus duo posteriores inuenti 3. 2. dividantur per eundem denominatorem 3. adiuncti erunt vltimo termino 2. alij duo in Harmonica proportionalitate hoc modo, 18. 9. 6. 3. 2. 1. $\frac{2}{3}$. atque ita deinceps progredi licebit in infinitum.

ALIO modo, & quidem magis proprie, continuatur pro-

portio-

portionalitas Harmonica, sive ad maiores numeros progrediendo, sive ad minores, quãdo primi tres numeri sunt Harmonica proportionales; Item, relicto primo, alijsq; quatuor tres; & relictis duobus, sequentes alij tres, neque ita deinceps: Sed in hac continua nunquam erit eadem proportionalitas extremorum trium, qua inter extremos aliorũ triũ. Vt in his 4. numeris, 3. 4. 6. 12. continuus dicitur proportionalitas Harmonica, quoniam tam tres 3. 4. 6. quàm tres 4. 6. 12. Harmonica proportionales sunt: sed priorum extremi 3. 6. proportionem habent duplam, at extremi posteriorũ 4. 12. triplã. Item continuus esse dicitur Harmonica proportionalitas in his quinque terminis. 10. 12. 15. 20. 30. quia & in tribus, 10. 12. 15. & in tribus, 12. 15. 20. & in tribus, 15. 20. 30. Harmonica proportionalitas reperitur, licet extremi quorumlibet trium non habeant easdem proportiones. Quo pacto autem in vtramque partem hac modo continuanda sit, quando continuari potest, (neque enim semper ad maiores numeros progrediendo potest hoc modo extendi) aut quo pacto quotlibet numeri continue Harmonice proportionales, vt exposuimus, reperiri possint, ex ijs, quæ sequuntur, constabit.

II.

INTER quosuis datos duos numeros constituere medium Harmonice proportionalem, hac ratione. Numerum, qui fit ex datorum duorum numerorum differentia in eorum minorem, partire per eorundem summam, Quotienti eumque minori adde. Conflatus enim numerus erit medius, quem quæris. Vel eandem differentiam datorum numerorum duc in maiorem, & productum partire per eorundem summam. Si enim Quotientem ex maiore dato subtrahas, reliquus fiet medius terminus quæsitus. Vt inter duos numeros 15. & 60. inuenturus medium duc eorum differentiam 45. in minorẽ 15. & numerum productum 675. partire per eorum summam 75. Nam si Quotientem 9. minori 15. adijcias, conflabis medium terminum 24. vt hic patet. 15. 24. 60. Eundem medium reperies, si eandem differentiam 45. ducas in maiorem 60. & productum 2700. per eorum summam 75. diuidas. Quotiens enim 36. ex maiore 60. detractus relin-

quet eundem medium terminum 24.

VIDES ergo, quando summa datorum duorum numerorum non metitur productum ex eorundem differentia in minorem eorum, vel in maiorem, medium inuentum esse necessario integrum cum fractione. Vt si inter 7. & 10. inueniendus sit medius, duc eorum differentiam 3. in minorem 7. & productum 21. per eorundem summam 17. partire. Quotiens enim $1\frac{4}{17}$. additus eidem minori 7. facit medium terminum $8\frac{4}{17}$. Vt hic vides, 7. 8 $\frac{4}{17}$. 10. Quia tã 10. ad 7. habent proportionem superbipartientem septimas, quam differentia maiorum $1\frac{3}{17}$. ad minorum differentiam $1\frac{4}{17}$. Vel eorum differentiam 3. duc in maiorem 10. productumque numerum 30. partire per eorum summam 17. Quotiens enim $1\frac{13}{17}$. subtractus ex maiore 10. reliquum facit eundem medium terminum $8\frac{4}{17}$.

ALII tradunt medij termini inuentionem inter duos numeros datos in proportionalitate Harmonica hoc modo. Inuentis duobus minimis numeris in proportione duorum numerorum datorum, iubent Quotientem, qui fit ex diuisione differentiæ datorum duorum numerorum per summam minimorum duorum inuentorum, duci in minorem inuentum, & productum numerum minori dato adijci: Vel eundē Quotientem duci in maiorem inuentum, & productum numerum ex maiore dato subtrahi. Semper enim vel ille conflatus numerus, vel hic reliquus dabit medium terminum, qui quæritur. Vt si inter 20. & 30. sit inueniendus medius: minimi numeri proportionis inter 20. & 30. sunt 2. 3. Si igitur differentia datorum numerorum 10. diuidatur per inuentorum summam 5. fit Quotiens 2. quem si ducamus in minorem inuentum 2. & productum 4. minori dato 20. addamus, vel si eundem Quotientem 2. ducamus in maiorem inuentum 3. & productum 6. ex dato maiore 30. demamus, inuenietur semper medius terminus 24. Vt hic apparet. 20. 24. 30.

BREVIVS ita medius terminus reperietur. Diuidatur datorum numerorum differentia per numerum, qui denominatorem proportionis, quam dati numeri habent, una vice superat. Quotiens enim minori termino additus dabit

medium

medium. Vt datis numeris 10. 40. habentibus proportionem quadruplam; si eorum differentia 30. dividatur per 5. qui numerus denominatorem proportionis una unitate superat, fiet Quotiens 6. qui additus minori termino 10. conficiet medium terminum 16. hoc modo 10. 16. 40.

SED ad mechaniam iuuandam inuenimus fortasse eò medius, (licet aliquanto longiore operatione) mediũ terminũ inter duos extremes datos, hoc modo. Si duo extremi nũ sunt impares, vel pares, sed vnus par, & alter impar, duplica illos, & inter duplicatos constitue medium Arithmetice proportionalem, qui semper erit semissis summa eorũ. Rer eos deinde tres numeros Arithmetice proportionales quæ ex regula 1. tres Harmonice proportionales. Ita enim inuentus erit medius terminus inter duos, qui eandẽ inter se proportionẽ habent, quã dati duo extremi. Quod si fiat, vt primus inuentus ad secundum, ita primus datus ad alium; hoc est, si per primum inuentum dividatur numerus ex secundo inuento in primum datum factus, reperietur medius inter datos duos extremos. Vt si inter 7. et 10. inueniẽdus sit medius, duplica eos, vt fiant 14 et 20. Summa enim horũ 34. par est, cuius semissis 17. est medius Arithmetice inter 14. et 20. hoc modo 14. 17. 20. Ex his tribus inuenientur hi tres Harmonico proportionales, 238. 280. 340. Si ergo fiat, vt primus inuentus 238. ad secundum 280. ita primus datus 7. ad alium inuenietur numerus $8\frac{4}{7}$ qui medius est Harmonice inter 7. & 10. qui ab initio propositi fuerunt.

III.

PROPOSITIS duobus numeris, reperiemus tertiũ vtroque maiorem in proportionalitate Harmonica, quando id fieri potest. (Pulchre autem operatio docebit, quando id fieri nequeat) hac ratione. Numerum ex vno in alterũ genitũ partiemur per numerum, qui relinquitur, subtracta amborum differentia ex minore termino dato. Quotiens enim erit tertius terminus vtroque dato maior, quẽ quærimus. Quod si quando diuisor reperiatur esse 0. vel quando amborũ differentia ex minore termino subtrahi nequit, impossibile est, datis duobus numeris posse adiungi tertiũ maiorẽ in proportionalitate Harmonica. Vt si duo termini minores dentur

12. 16. dividemus numerum ex eis provenientem 192. per 8. qui numerus relinquitur, si amborū differētia 4. ex minore 12. detrahatur. Quoniam enim 24. eum datis duobus constituit hanc Harmonicam proportionalitatem, 12. 16. 24. Hanc extendemus, si ad duos terminos 16. 24. tertium adjungamus, minimum dividendum 384. numerum ex 16. in 24. factum, per 8. qui numerus romanus, facta subtractione differentiæ amborum, quæ est 8. ex minore 16. Inuenietur enim numerus 48. Quare ita habent 4. termini Harmonice proportionales, 12. 16. 24. 48. Quod si tertiam his adjungere alium maiorem, frustra laboraremus. Nam datis duobus ultimis 24. 48. reperietur differentia amborum, quæ est 24. subtracta ex minore 24. relinquit 0. Quod si quis proponat hos duos numeros, 10. 12. adjungatur illis tertius utraque maior, 15. Ad hos vero duos 10. 12. apponatur tertius $12\frac{2}{9}$. Et ad duos 90. 99. tertius 110. At vero ad 3. 6. nullus adjungi poterit, quia differentia inter ambos, quæ est 3. demptæ ex minore 3. relinquit 0. Æque eadē modo quando dati numeri habent proportionem duplam, non potest illis adjungi tertius proportionalis, quia differētia amborum semper est minor termino æqualis. Multa magis odati numeri habent proportionem dupla maiorem, non inuenietur tertius maior illis proportionalis Harmonice, quia differentia amborum tunc semper maior est minore termino, neque adcipi subtractio fieri nequit. Vt si dentur numeri 3. 7. quorum proportio est dupla sesquitertia, nimirū maior, quam dupla, videt amborum differentiam 4. maiorē esse minore termino 3. Quare illis non adjungetur vllus tertius proportionalis.

ALII ita inuestigant tertium terminum. Ducunt data rum numerorum differentiā in maiorem, productumque productum per numerum, qui relinquitur, subtracta eadē differentia ex minore numero, dividunt. Quotienti denique maiori adjiciunt, vt tertium conficiant. Vt datis duobus numeris, 12. 16. si earum differentia 4. ducatur in 16. fiet productus numerus 64. dividatur per 8. (qui numerus relinquitur, subtracta eadem differentia 4. ex minore 12.) fit. Quotiens 8. qui additus ad minorem 16. facit tertium 24. ut prius.

ITA-

ITA QVE, vt duobus numeris adiungi possit tertius maior proportionalis, necesse est, illorum proportionem esse vel superparticularem, vel superpartientem, nimirum duplam minorem. Ex quo liquide constat, Harmonicam proportionalitatem non posse progredi in infinitum versus maiores numeros, si de continuatione secundo modo accepta loquamur, quæ propria est, vt in prima regula diximus. Nam cum primum ventum erit ad duos numeros, quorum proportio dupla est, vel maior, ibi necessario proportionalitas consistet, & vltra non promouebitur.

SEQVITVR quoque ex priori regula, quando minor terminus superat differentiam amborum sola vnitate, tertiũ procreari ex primo in secundũ: quia productus hic numerus diuisus per illã vnitatem facit tertiũ numerũ, vt diximus. Constat autem numero per vnitatem diuiso, Quotientem esse eundem numerum diuisum. Vt si dentur duo numeri 6. 11. quia minor 6. superat amborum differentiam 5. sola vnitate, erit tertius proportionalis numerus 66. qui fit ex 6 in 11. veluti hic vides, 6. 11. 66. Idem cernitur in hisce numeris. 2. 3. 6. & 10. 19. 190. Semper enim tertius fit ex primo in secundum: quia primus superat differentiam priorũ duorum sola vnitate.

EX posteriori vero regula sequitur, quando minor terminus superat amborum differentiam sola vnitate, tertiũ procreari, si productus ex amborum differentia in maiorẽ, maiori adijciatur: quia productus ille diuisus per illam vnitatem, non facit diuersum Quotientem ab eo producto, &c. Vt datis eisdem numeris 6. 11. si differentia 5. ducatur in 11. productus 55. addatur maiori 11. fiet tertius terminus 66. vt prius.

QVARE facile quoque reperiri possunt tres numeri Harmonice proportionales, si pro primo sumatur quilibet numerus, pro secũdo vero eius duplus, detracta prius vnitate, pro tertio denique numerus, qui ex primo fit in secundũ. Vt si primus sit 8. erit secundus 15. et tertius 120. & sic de cæteris. Proportio autem tam extremorum hoc modo inuentorum, quam differentiarum semper erit multiplex à medio, qui perpetuo impar est, denominata. Vt in his proximis

tribus,

tribus, 8. 15. 120. proportio est quindecupla.

VNDE si quarantur tres minimi numeri integri Harmonice proportionales in quacunque proportione multiplici, si quidem denominator est numerus impar, statuemus eũ denominatorem in medio: semissem autem numeri proxime maioris in primo loco. In tertio denique collocabimus eum, qui ex prima in secundum fit. Vt si desiderẽtur tres numeri integri, & minimi in proportione septupla, locabimus 7. in medio, & 4. (id est, semissem numeri 8. proxime maioris quã 7.) in primo loco, & in tertio numerum 28. ex 4. in 7. procreatum, vt hic vides, 4. 7. 28. Si vero denominator est par, statuemus numerum proxime maiorem in primo loco: in tertio vero collocabimus numerum, qui fit ex illo proxime maiore in denominatorem. In medio denique ponemus denominatorem duplicatũ. Vt si inueniẽdi sint tres minimi integri in proportione octupla, constituemus 9 qui numerus proxime maior est denominatore 8. in primo loco; & in tertio numerum 72. ex 9. in 8. genitum in medio denique duplum denominatoris, nimirum 16. vt hic apparet. 9. 16. 72.

QVOD sit res numeri Harmonice proportionales in data proportione inueniendi sint, siue illi minimi sint & integri, siue non, agendum erit hoc modo. In medio statuemus denominatorem data proportionis: In primo vero semissem numeri, qui denominatorem vna vnitate superat: In tertio denique loco locabimus numerum ex multiplicatione primi per medium factum. Veluti si quarantur tres in data proportione dupla supertripartiente septimas; erit denominator huius proportionis $2\frac{3}{7}$. collocandus in medio, & in primo numerus $1\frac{5}{7}$. nimirũ semissis numeri $3\frac{3}{7}$. qui denominatorem $2\frac{3}{7}$. vnitate superat. Tertius denique erit $4\frac{3}{4}\frac{3}{6}$. factus ex primo $1\frac{5}{7}$. in medium $2\frac{3}{7}$. Ita igitur stabunt tres numeri inuenti, $1\frac{5}{7}$. $2\frac{3}{7}$. $5\frac{3}{4}\frac{3}{9}$. qui ad hos tres eiusdem denominationis reuocabuntur, $\frac{5}{4}\frac{4}{9}$. $\frac{1}{4}\frac{1}{9}\frac{9}{9}$. $\frac{2}{4}\frac{0}{9}\frac{4}{9}$. si prius quilibet ad vnicam fractionem reducatur: Numeratores autem 84. 119. 204. erunt numeri integri Harmonice proportionales, eritque extremorum proportio, ac proinde & differentiarum, dupla supertripartiens septimas, qua videlicet data est.

DVO

IIII.

DVOBVS numeris datis, reperiemus tertium vtrique minorem in proportionalitate Harmonica, hoc modo. Numerum ex vno in alterũ productum partiemur per ſummam ex maiore dato, & amborum differentia collectam. Quotiens enim erit is, qui quæritur, Vt ſi dentur duo numeri 6. 12. ſi diuidamus numerum 72. ex 6. in 12. factum, per 18. ſummã ex 12. & amborum differentia 6. collectam, reperiemus tertium 4. minorem vtroq; illis proportionalem, vt hic cernis, 4. 6. 12. Hãc extendemus regrediendo verſus minores numeros, ſi duobus 4. 6. minorem tertiũ adiungemus 3. hoc modo 3. 4. 6. 12. qui numerus 3. inuenietur, diuidendo numerum 24. factum ex 4. in 6. per 8. ſummam videlicet ex 6. & amborũ differentia 2. collectam. Eodem modo duobus minoribus 3. 4. adiungetur tertius minor $2\frac{2}{7}$. Atque in hũc modũ decreſcet proportionalitas qualibet Harmonica continue in infinitum. Vbi animaduertere licet admirabilem ſane varietatem inter has tres proportionalitates, Arithmeticam, Harmonicam, & Geometricam; quæ varietas tribus hiſce propoſitionibus explicatur.

I. ARITHMETICA augetur in infinitum, ſed in infinitum non decreſcit.

II. HARMONICA contra, decreſcit in infinitum, ſed in infinitum augeri non poteſt. Quod intelligendum eſt, ſi ita continuari debeat, vt quilibet tres numeri habeant proportionalitatem Harmonicã. Hoc eſt, vt primus, ſecundus, ac tertius ſint Harmonice proportionales: Item ſecundus, tertius, & quartus: Item tertius, quartus, & quintus, &c. Nam alias in vtrãque partem extendi poteſt in infinitum, ſicut Geometrica, vt ſupra in regula 1. diximus.

IIII. GEOMETRICA denique & augetur, & decreſcit in infinitum.

EST & hoc notatu dignũ, in cubo reperiri quatuor terminos in Harmonica proportionalitate cõtinuos, qui varie inter ſe comparati præcipuas perfectasq; conſonantias Muſicas exprimunt. Nam 6. eius baſes quadratæ; 8. anguli ſolidi; 12. lateræ; & 24. anguli plani conſtituunt hos 4. termi-

nos 6. 8.

nos 6. 8. 12. 24. continuæ proportionales Harmonicè. Proportio autem 8. ad 6. est sesquitertia, quæ consonantiam Diatessaron, siue Quartam, constituit. Proportio vera 12. ad 8. sesquialtera est, continens consonantiam Diapenten, siue Quintam. Proportio deinde 12. ad 6. vel 24. ad 12. dupla est, explicans consonantiam Diapason, siue Octauam. At proportio 24. ad 8. tripla est, efficiens consonantiam Diapason & Diapenten, hoc est, Duodecimam. Denique proportio 24. ad 6. quadrupla existit, exhibens consonantiam Disdiapason, siue Decimamquintam.

V.

DATIS quotlibet numeris Arithmeticæ proportionalitatis, si quicunque numerus, siue minimus, siue non minimus, ab eis numeratus per singulos diuidatur, erunt Quotientes conuerso ordine Harmonicè proportionales. Et vicissim, datis quotlibet numeris in proportionalitate Harmonica, si numerus, quem metiuntur, per singulos diuidatur, erunt Quotientes ordine conuerso Arithmeticè proportionales. Verbi gratia. Sint Arithmeticè proportionales. 1. 2. 3. 4. 5. 6. Numerus, quem metiuntur, est 720. ex eorum cõtinua multiplicatione inter se procreatus. At minimus ab eis numeratus erit 60. quem reperies per ea, quæ in Arithmetica practica cap. 10. scripsimus. Priore ergo per singulos dates diuisso, inuenietur hi in proportionalitate Harmonica cõtinua.

720. 360. 240. 180. 144. 120.

Posteriore autem per eosdem datos diuisso, reperientur hi

60. 30. 20. 15. 12. 10.

Atque hi numeri inuenti easdem proportiones habent, quas dati numeri Arithmeticæ proportionalitatis, bini ac bini, conuerso tamen ordine: nimirum vt in Harmonica primus ad secundum, ita in Arithmetica secundus ad primũ: Et vt in Harmonica secundus ad tertium, ita in Arithme-

tica

tica tertius ad secundum, &c. Numeri quoque per minimũ numeratum inuenti, sunt minimi in suis proportionibus. Quòd si vicissim numerus ab inuentis numeratus diuidatur per singulos inuentos, gignentur totidem numeri Arithmetice proportionales: & si quidem minimus, quem metiuntur, diuidatur, prodibunt ijdem numeri Arithmetice proportionales, per quos Harmonice proportionales inuenti sunt, & eadem quidem ordine, quo dati sunt, sed ordine conuerso, si cum inuentis in Harmonica proportionalitate conferantur. Semper enim si in una proportionalitate progrediantur numeri à minoribus ad maiores, in altera à maioribus ad minores progressus fit, & contra.

IGITVR si quis vtpiam quotcunque terminos continuè Harmonice proportionales, sumendi sunt totidem termini Arithmetice quomodolibet proportionales, & numerus ab eis numeratus (et minimus quidem, si minimi desiderentur) per singulos diuidendus, vt diximus.

VI.

DATIS tribus numeris in proportionalitate Harmonica, tantum fit ex priorum differentia in tertium, quantum ex differentia posteriorum in primum. Vt hic cernis. Nam tum ex 2. in 12. tum ex 4. in 6. fit numerus 24. Ratio huiusce rei est: quia tam fit, vt 12. primus ad 6. secundum, ita 4. tertius ad 2. quartũ: erit numerus ex primo 12. in quartum 2. factus, aequalis numero, qui ex secundo 6. fit in tertium 4. vt ex 2. regula proportionalitatis Geometrica manifestum est. Idem constat in pluribus terminis, si terni ac terni sumantur, cum suis differentijs, vt in his 6. terminis apparet.

Differentia.	30	10	5	3	2	
Propor. Harm.	60	30	20	15	12	10

Nam ex 30. in 20. & ex 10. in 60. fiunt 600. Item ex 10.

Differentia	2	4	
Propor. Har.	6	8	12

in 15. & ex 5. in 30. fiunt 150. Rursus ex 5. in 12. & ex 3. in 20. fiunt 60. Ac denique ex 3. in 10. & ex 2. in 15. fiunt 30. Atque ita, vt vides, iucunda operatione probare potes, num dati quotcunque termini, aut inuenti, seruent continuã proportionalitatẽ Harmonicã, nec ne. Nam sumptis ternis, ac ternis, aum suis differentijs, si differentiæ commutato ordine ducantur in primum terminum ac secundum, producantq. vtrobique numeros æquales, erunt termini omnes continuè proportionales Harmonicè, sin minus, nequaquam.

VII.

QVOD si quis reperire velit quinque minimos numeros, in quibus omnes tres proportionalitates, existiãt: ita vt primi tres numeri habeant proportionalitatem Arithmeticã: Relicto autem primo, tres insequentes, proportionalitatem Geometricã, & tres postremi proportionalitatem Harmonicã: ac deinde primus, tertius, & quintus habeant datam proportionem continuam Geometricam. Vel si reperire quis velit tres numeros in data proportione continue proportionales, ita vt inter primũ, ac secundũ cadat medius Arithmetice proportionalis, & inter secundũ ac tertium medius Harmonice proportionalis, medius denique triũ datorum numerorum sit inter medios inuentos medius proportionalis Geometrice, atq; quinque numeri ita inuenti sint minimi omnium in quibus ea contingant; efficiendum id erit hac ratione.

o.1 6.1 3.1 $\frac{1}{2}$ 1.	
9.1 o.1 3.1 $\frac{3}{2}$ 1.	
18.1 12.1 6.1 3. 1 2.	

Sit data proportio tripla, in qua tres minimi sumantur termini, 9. 3. 1. Inter primos duos statuatur medius Arithmetice, 6. Per hunc dividatur quadratus medij numeri 3. assumpto, & Quotiens 1 $\frac{1}{2}$. inter 3. & 1. statuatur, vt in primo ordine hic posito appareret. Sed quia hic Quotiens integer est cum fractione, reuocabimus eum ad vnicam fractionem hanc $\frac{3}{2}$. vt in secundo ordine vides. Quòd si eius numeratorem 3. accipiamus, relicto denominatore, & alios numeros secundi ordinis per denominatorem 2. multiplicemus, procreabimus quinque

mini-

minimos numeros quæsitos, vt in tertio ordine cernis. Nam 18.12.6. Arithmeticam habent proportionalitatem: 12.6.3. Geometricam: & 6.3.2. Harmonicam: ac denique 18.6.2. triplam datam. Quòd si non inueniendi sint minimi quinque termini in his tribus proportionalitatibus continuatis, accipi possunt quicunque tres numeri datam proportionem habentes continuam, & cum eis duo medij, nimirum secundus, & quartus, inuestigandi, vt dictum est.

SI minores termini eũ maioribus conferendi sint, & data sit proportio subtripla, inuenietur eodem artificio ex his tribus minimis. 1.3.9. subtriplis hos quinque 2.4.6.9.18. Nam 2.4.6. seruãt proportionalitatem Arithmeticã: 4.6.9. Geometricam: 6.9.18. Harmonicam; & 2.6.18. subtriplam propositam. Inueniendi modum conspicies in hisce tribus ordinibus appositis.

1.	2.	3.	$14\frac{1}{2}$.	9.
1.	2.	3.	$1\frac{9}{2}$.	9.
2.	4.	6.	9.	18.

RVRSVS sit data proportio sesquialtera, in qua tres minimi termini sint, 9.6.4. Inter 9. & 6. medius est Arithmetice, $7\frac{1}{2}$. vt in primo ordine. Reuocetur ad vnicam hanc fractionem $\frac{15}{2}$. vt in secundo ordine. Sumpto autẽ numeratore 15. pro secundo numero, relicto denominatore, ducantur alij in secundo ordine in denominatorẽ, 2. Vt in tertio ordine factum est. Et quadratus numerus numeri 12. nimirum 144. digitatur per 15. ac quoties $9\frac{3}{5}$. in minimis terminis statuatur medius inter 12. & 8. eiusdẽ tertij ordinis. Hunc numerum $9\frac{3}{5}$. reuocabimus ad hanc vnicam fractionem, $\frac{48}{5}$. vt in quarto ordine. Sumpto denique numeratore 48. pro penultimo numero, relicto denominatore, ducemus alios quarti ordinis in denominatorẽ 5. inuentique erunt quinque minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine apparet.

$9.17\frac{1}{2}$.	1	6.	1	4.
$9.1\frac{15}{2}$	1	6.	1	4.
48.	15.	12.	$19\frac{3}{5}$.	8.
18	15.	12.	$1\frac{48}{5}$.	18.
90.	75.	60.	48.	140.

SI minores numeri cũ maioribus comparandi sint, inuenietur in proportione data, subsesquialtera quinq; termini

minimi,

minimi, vt hic vides in quarto ordine. Eademque in cæteris est ratio.

4.		8.		9.
4.	5.	6.	$7\frac{1}{5}$.	9.
4.	5.	6.	$\frac{2}{5}\frac{6}{5}$.	9.
20.	25.	30.	36.	45.

POTES quoque, si placet, in primo ordine omnes quinque numeros cõstituere, & fractiones, si quæ sint, ad vnicam denominationẽ minimam reuocare, & deinde quamlibet ad vnicã fractionem; Nam si numeratores pro illis substituas, denominatore communi relicto, & reliquos numeros integros per communem denominatorẽ multiplices, efficies quinque numeros minimos integros quæsitos. Vt si sub quadrupla proportio proponatur, erunt minimi tres termini, 1. 4. 16. Additis simul 1. 4. erit summa dimidium $2\frac{1}{2}$. medius Arithmetice inter eos. Et si dicatur quadratus numerus numeri 4. per $2\frac{1}{2}$. fit. Quotiens $6\frac{2}{5}$. medius Harmonice inter 4. & 16. Dum autem fractiones reducentur ad eandem denominationem, vt in secundo ordine. Et fractionibus singulis ad vnicam fractionem reuocatis, constituent tertium ordo. Sumptis autem numeratoribus, relinquendo denominatorem communem, & numeris integris per denominatorem communem multiplicatis, constituentur quinque minimi numeri quæsiti, vt in quinto ordine vides. Atque in hunc modum quotcunque terminos proportionem aliquam seruantes, in quibus permista sunt fractiones, ad totidem terminos integros reduces, quando res exigit.

1.	$2\frac{1}{2}$.	4.	$6\frac{2}{5}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$6\frac{4}{10}$.	16.
1.	$2\frac{5}{10}$.	4.	$\frac{64}{10}$.	16.
10.	25.	40.	64.	16.

VIII.

QVANDO quatuor numeri ita ordinantur, vt ipsi sint Geometrice proportionales non continue, vnus autem mediorum eum extremis simul proportionalitatem Arithmeticam, alter vero Harmonicam, ita vt in quatuor illis numeris tres proportionalitates, quas diximus, reperiantur, dicuntur quatuor illi numeri constituere Harmonicam

maxi-

maximam. Quando autem quatuor numeri ita ordinantur, vt in ipsis reperiantur duæ duntaxat proportionalitates, vt vel Geometrica, & Arithmetica: vel Geometrica, & Harmonica; vel Harmonica, & Arithmetica, dicuntur illi quatuor numeri Harmoniam minorem constituere.

MAXIMAM Harmoniam, in qua extremi termini habeant etiam proportionem datam, ita constitues. Sit data proportio qua 6. ad 1. quam extremi termini habere debent. Quoniam summa eorum est impar, accipio eorum duplos 12. & 2. inter quos medius Arithmetice constituatur 7. hoc modo 12. 7. 2. Quòd si eorum summa fuisset par, accepissem statim medium inter eos in proportionalitate Arithmetica. Ex his tribus Arithmetice proportionalibus inueniantur tres Harmonice proportionales per primam regulam, 84. 24. 14. quorum extremi habent proportionem datam, nimirum eandem, quam 12. ad 2. vel 6. ad 1. Si igitur inter extremos 84. 14. qui semper ita inuenti pares erunt, statuatur etiam medius Arithmetice, 49. erunt quatuor quæsiti numeri, 84. 49. 24. 14. Nam extremi habent datam proportionem, quam 6. ad 1. Deinde in eis reperiuntur omnes tres proportionalitates. Inter ipsos enim quatuor existit Geometrica proportionalitas non continua, cum eadem sit proportio 84. ad 49. qua 24. ad 14. vel 84. ad 24. qua 49. ad 14. vt liquido constat ex 7. proprietate trium harum proportionalitatum. At inter 84. 49. 14. Arithmetica. Ac denique inter 84. 24. 14. Harmonica ex constructione, vt hic vides.

Tres proportio-	84.	1	49.	1	24.	1	14.	1	*nalitates simul.*			
Geometrice prop.	84.	1	49.	1	24.	1	14.	1	*Vel*	84.	24.	14.
Arithmet. prop.	1	84.	1	49.	1	14.				84.	49.	14.
Harmonice prop.	1	84.	1	24.	1	14.						

Rursus sit data proportio, qua 3. ad 2. Quoniam iterum eorum summa est impar, sint eorum dupli 6. 4 inter quos statuatur medius in Arithmetica proportionalitate, 4. hoc mo-

6.5.4. *Ex his per primam regulam inuenio Harmonice proportionales* 30. 24. 20. *Constituto autem medio Arithmetice* 25. *inter* 30. *&* 20. *erunt eadem ratione quatuor numeri quæsiti,* 30. 25. 24. 20. *cum habeant omnes tres proportionalitates, vt hic apparet.*

Geometrice proport.	30	25	24	20	*Vel*	30	24	25	20
Arithmet. proport.	1	30.	1	25.	1	20.			
Harmon. proport.	1	30.	1	24.	1	20.			

EOSDEM 4. *numeros maxima harmonia reperiemus, si pro extremis sumamus quosuis duos numeros datam proportionem habentes, pares, vel impares. Si enim inter hos statuatur medius Arithmetice: fiat autem, vt inuentus ad primũ extremum, ita alter extremus ad aliud, erit hic inuentus Harmonica proportionalitate medius inter eosdem extremos. Quando enim in* 4. *numeris Geometricè proportionalibus, quales sunt* 4. *inuenti, vnus mediorum est medius in proportionalitate Arithmetica, alter mediorũ medius est in Harmonica inter eosdem extremos, vt diximus in* 7. *proprietate harum trium proportionalitatum. Quando igitur hi* 4. *numeri inuenti sunt integri, factum erit, quod proponitur: si vero admista sint fractiones, reducemus eos ad integros, vt ad finem antecedentis regulæ* 7. *scripsimus. Vt si proportio data sit dupla, statuemus extremos,* 12. *&* 6. *Dimidium summæ eorum* 9. *erit medius terminus inter eos Arithmeticè proportionalis, hoc modo,* 12. 9. 6. *Si igitur fiat, vt* 9. *ad* 6. *ita* 12. *ad aliud: Vel vt* 9. *ad* 12. *ita* 6. *ad aliud, inuenietur semper numerus* 8. *inter* 12. *&* 6. *in Harmonica proportionalitate medius. Quare sic stabunt* 4. *numeri maximæ Harmoniæ,* 12. 9. 8. 6. *Postremo si in eadem proportione duplæ extremorum sumamus pro extremis,* 20. *&* 10. *inueniemus medium Arithmetice,* 15. *& Harmonice* $13\frac{1}{3}$. *in minimis numeris, hoc modo,* 20. 15. $13\frac{1}{3}$. 10. *Si ergo tertiũ numerum ad vnicam fractionem* $\frac{40}{3}$. *reuocemus, & eius numeratorem* 40. *denominatore relicto, tertium statuamus,*

mus, inuenientur alij, si inuentos per denominatorem 3. multiplicemus, vt hic vides, 60. 45. 40. 30.

MINOREM autem Harmoniam sic reperiemus. Si in 4. numeris debet reperiri sola proportionalitas Geometrica cum Arithmetica, cape tres numeros continue proportionales Geometrice, quorum extremi pares ambo sint, vel impares. Si enim inter extremos statuas medium in proportionalitate Arithmetica, habebis 4. numeros quæsitos. Vt si sumantur hi tres numeri sesquialteri, 16. 24. 36. et inter extremos inueniatur medius Arithmeticè proportionalis, 26. erunt 4. quæsiti numeri, 16. 24. 26. 36. quorum tres 16. 24. 36. Geometrice, & tres 16. 26. 36. Arithmetice proportionales sunt, ex constructione.

SI vero sola Geometrica cum Harmonica desideretur, cape quoque tres numeros quoscunque continue proportionales Geometrice. Si enim inter extremos inuenias medium in Harmonica proportionalitate, habebis 4. numeros, qui quæruntur. Vt si sumantur idem tres sesquialteri, 16. 24. 36, inuenietur inter extremos medius in Harmonica proportionalitate, $22\frac{2}{1-\frac{2}{3}}$. Sic ergo habunt 4. numeri inuenti, $16. 22\frac{2}{1-\frac{2}{3}}. 24. 36.$ qui reducentur ad hos integros, 208. 286 312. 468. Si accepisses hos numeros tres duplos. 20. 10. 5. inuenisses inter extremos medium Harmonicum 8. hoc modo, 20. 10. 8. 5.

SI denique optes solam Harmonicam cum Arithmetica proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonice proportionalitate, accipe tres quoslibet Harmonice proportionales. Si namque inter medium, & alterutrum extremorū statuas medium Arithmeticum, inuenti erunt quatuor numeri, quos quærimus. Vt si sumantur hi tres 6. 8. 12. erit inter priores duos medius Arithmetice proportionalis 7. Quare 4. inuenti numeri erunt hi, 6, 7. 8. 12. At inter posteriores duos erit medius in Arithmetica proportionalitate, 10. Sic ergo habunt 4. inuenti numeri, 6. 8. 10. 12. qui omnes (quod casu quodam fortuito in hoc exemplo accidit) sunt Arithmetice proportionales, & non solum tres 8. 10. 12. ex constructione at soli tres accepti 6. 8. 12. habent proportionalitatem Harmonicam.

IX.

SI inueniendi sint quotcũque numeri Arithmetice proportionales continue, inter quorum binos ac binos cadant singuli medij Harmonice proportionales integri, efficietur id hac ratione. Sumantur tot termini Arithmetice proportionales, quot quaruntur; & bini in proportione binorũ proximorum minimi. Si enim accipiatur minimus numerus numeratus à summis binorum minimorum acceptorum, atque hic in singulos acceptos numeros Arithmetice proportionales ducatur, procreabuntur numeri, qui quaruntur. Sint. n. verbi gratia inueniendi quatuor. Cape quatuor quoscunque numeros Arithmetice proportionales, 3. 6. 9. 12. & 1. 2. minimos terminos proportionis 3. ad 6. & 2. 3. minimos proportionis 6. ad 9. & 3. 4. minimos in proportione 9. ad 12. erũtque tres summa binorum minimorum 3. 5. 7. atque ab his minimus numeratus, 105. Si igitur hunc ducas seorsum in singulos acceptos, 3. 6. 9. 12 procreabis 4. numeros Arithmetice proportionales, quos desideras, 315. 630 945. 1260. Nã inter primum & secundum in Harmonica proportionalitate medius est, 420. Inter secundum & tertium, 756. Inter tertium & quartum, 1080. vt hic cernis.

Arith. proport.	1	315	1	630	1	1	945	1	1	1260		
Medij Harm.	1	1420	1	756	1		1080	1				

ITAQVE si vis duos in data proportione duorum numerorum, inter quos cadat vnus integer medius Harmonice, sume duos minimos in data proportione, & eorum summam duc in duos data proportionis. Vt si data sit proportio tripla inter 4. & 12 erunt minimi termini, 1. 3. quorũ summam 4. si duxeris in 4. & 12. efficies 16. & 48. numeros quæsitos. Medium Harmonicum inter eos erit 24. Vt hic vides, 16. 24. 48. Si data proportionis numeri fuissent minimi 1. 3. duxissemus vtrumque in eorum summam 4. factique essent hi duo numeri. 4. 12. inter quos cadit Harmonice medius 6.

SI

X.

SI autem volueris quotcunque terminos in continua proportione Geometrica data, inter quorum binos, ac binos, bini medij integri cadant, vnus in proportionalitate Arithmetica, & alter in Harmonica, assequeris id hoc artificio. Sume tot minimos numeros continue proportionales Geometrice, quot desiderantur, & singulos multiplica per summam duorum in eadem proportione minimorum: Et si quidem producti fuerint omnes pares, ipsi erũt, quos quarimus; sin minus, eorum dupli dabunt quæsitos numeros Sint enim inueniendi verbi gratia tres in proportione sesquialtera. Cape totidem minimos in data proportione, 4. 6. 9. & duos minimos in eadem, 2. 3. Horum summam 5. duc in singulos acceptos, & productos numeros, quoniam non omnes pares sunt, dupla, habebisque proposites numeros 40. 60. 90. Nam inter 40. 60. medium Harmonicum est, 48. Arithmeticum, 50. Et inter 60. 90 Harmonicum medium est, 72. Arithmeticum 75. Vt hic vides.

Geom. proportio.	40		60		90			
Medij Harmo.		48		72				
Medij Arithm.			50			75		

HINC facile reperies duos numeros in data proportione, inter quos intercipiãtur duo medij, alter secundũ proportionalitatem Arithmeticã, & secundũ Harmonicam alter. Sumptis enim minimis terminis data proportionis, si eorũ summam vel in duos illos minimos terminos, vel in duos quoscunque alios numeros datã habentes proportionẽ duxeris, erunt numeri producti, si pares sunt, quæsiti: si vero vterque non est par, erunt eorum dupli, quos quarimus. Vt si data sit proportio sesquitertia, cuius minimi numeri sunt 3. 4. eorũq; summa, 7. Si ergo duces 7. in 3. & 4. vel in 12. & 16. datam quoque habentes proportionẽ, produces vel 21. 28. vel 84. et 112. Et quia priores duo non sunt pares, erunt eorum dupli,

42.56 ij; quos quærimus. Posteriores autem duo, quia pares sunt, erunt quæsiti. Tam enim inter illos, quam inter hos cadunt duo medij, ques quærimus, vt hic manifestum est.

Numeri inuenti	1	42	1	1	56	11	1	84	1	1	112
Medij Harmo.	1	48	1	1	72	1	1	96	1		
Medij Arithm	1	49	1	1	70	1	1	98	1		

XI.

SI vero quis petat sibi dari tres numeros in proportionalitate Harmonica, inter quorũ binos binj cadant medij, alter in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alter, exequemur id hac methodo. Inuenião ut, per 9. regulam proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmetice proportionales 2.50. 98. inter quarum priores binos sit medius Geometrice, 10. & inter binos posteriores, 70. sintuantur quod ordine sic 2.10. 50. 70. 98. Minimus autem numerus ab eis quinque numeratus sit 2450. Quo diuiso per eosdẽ quinque numeros, Quotientes sint, 1225. 245. 49. 35. 25. Si igitur omnes Quotientes sint pares, vel impares, erũt primus, tertius, & quintus, vt 1225. 49. 25 ij numeri, qui quærumtur. Sunt enim Harmonice proportionales, vt constat ex 5. regula, ũ sint Quotientes producti ex diuisione numeri 2450. quẽ numeri 2.50.98. Arithmetice proportionales numerant, per eosdem numerus 2.50. 98. Inter binos autẽ cadunt Geometrice proportionales, 245. secũdus Quotiens, et 35. tertius Quotiens. Habent enim 1225. 245. 49. easdem proportiones conuerso ordine, quas continue proportionales 2. 10. 50. habent; ut constat ex 7. regula proportionalitatis Geometricæ. Eodemque modo 49. 35. 25. easdem habebunt proportiones, quas conuerso ordine habent continue proportionales 50. 70. 98. tum tam illi, quã hi, sint Quotientes producti per diuisionẽ eiusdem numeri 2450. per 2. 10. 50. & per 50. 70. 98. Certum autem est, inter binos eosdem 1225. 49. & inter 49. 25. cadere quoque singulos Arithmetice proportionales, cum omnes pares ponantur, vel impares. Quod si non omnes sint

pares

pares, duplicandi erunt omnes 5. Quotientes, vt pares numeri fiant, qui idem omnino præstabunt, quod quarimus. Habebunt enim easdem proportiones, quas eorum subdupli habent, ac proinde tam inter primum ac tertium secũdus, quam inter tertium & quintum quartus medio loco erit Geometrice proportionalis. Cum ergo inter eosdem cadant medij Arithmetice, constat propositum. Exemplum superius ob oculos hic propositum esse vides.

Tres Har. prop. inuenti.	1	1225	1	1	1491	1	1	25
Medij Arithm.	1	1637	1	1	1137	1	1	
Medij Geometr.	1	1	1245	1	1	135	1	

XII.

RVRSVS si quarantur tres numeri in Arithmetica proportionalitate, inter quarum binos cadant bini proportionales, Geometrice vnus, & alter Harmonice, satisfaciemus quæstioni hoc modo. Reperiantur iterũ, per 9. regulã proportionalitatis Geometricæ, tres numeri Arithmetice proportionales. 2. 50. 98. inter quorum binos singuli medij cadant in proportionalitate Geometrica; sumanturque duo minimi 1. 25. in proportione priorũ duorũ; Item duo minimi 25. 49. in proportione duorum posteriorum; & horum summa 26. 74, numerent minimum numerum 962, in quem tres illi inuenti 2. 50. 98. ducantur. Producti enim numeri 1924. 48100. 94276. erunt, quos inquirimus. Cum namque easdem proportiones habeãt, quas eorum submultiplices 2. 50. 98. fit vt quemadmodum inter binos horum singuli cadunt medij Geometrice, ita quoque inter binos illorũ singuli intercipiãtur medij in eadem proportionalitate Geometrica. Deinde quia summa minimorum numerorum 1. 25. & 25. 49 in proportionibus 2. ad 50. & 50. ad 98. (qui tres, 2. 50. 98. Arithmetice sunt proportionales) numerant minimum numerum 962. qui in eos tres, 2. 50. 98. ductus produxit 1924. 48100. 94276. cadent inter binos horum trium singuli medij Har-

monice proportionales, vt in 9. regula traditum est. Exemplum ergo cum mediys sic stabit.

Arit.prop.nu.	1	9	24	1	1	48	100	1	1	94	276
Medij Har.	1		137	001	1		163	700	1		
Medij Geo.	1	1		196	201	1		167	340	1	

XIII.

EX his, quæ diximus, inuenire quis poterit tres numeros proportionales siue Arithmetice, siue Geometrice, siue Harmonice, inter quorum binos cadant terni medij, vnus Arithmetice, alter Geometrice, & reliquus Harmonice. Sint enim primum inueniendi tres Arithmetica proportionalitatis. Per antecedentem regulam 12. reperiantur tres numeri Arithmetica propottionalitatis, inter quorum binos cadant bini medij, vnus in Geometrica proportionalitate, & in Harmonica alter. Qui tres numeri si fuerint omnes pares, vel impares, cadent quoque inter binos singuli Arithmetice proportionales, atque adeo quæstioni satisfacient. Si vero non omnes pares sint, aut impares, eorum dupli erunt, quos quærimus. Exemplum hic habes in tribus numeris antecedentis regulæ, qui omnes pares sunt, vt hic apparet.

Arith.prop.	1	9	24	1	1	48	100	1	1	94	276	
Medij Har.	1		137	001	1	1	163	700	1	1		
Med.Geo.	1	1		196	201	1	1	167	340	1		
Med.Arith.	1	1	1		125	012	1	1		171	188	1

DEINDE inueniendi sint tres numeri in Geometrica proportionalitate, inter quorum binos cadant terni

medij,

medij, in singulis proportionalitatibus singuli, sitque proportio data, quam medij Geometrica proportionalitatis efficere debent, nimirum sesquialtera. Cape quinque numeros minimos datæ proportionis continuè proportionales, 16. 24. 36. 54. 81. & duos minimos 4. 9. in proportione primi 16. ad tertium 36. & tertij 36. ad quintum 81. Horum minimorum summam 13. duc in eandem primum 16. tertium 36. & quintum 81. Producti enim numeri 208. 468. 1053. duplicati, (quoniam ipsi non omnes pares sunt, aut impares; alias non essent duplicabili) nimirum 416. 936. 2106. (vt inter binos cadere possint singuli medij Arithmetice) sunt ij., quos quærimus. Nam inter binos cadunt bini medij, alter Harmonice, & Arithmetice alter, vt ex 10. regula patet: Et inter eosdem cadunt medij Geometrice, nimirum dupli eorum, qui fiunt ex eadem summa 13. duorum minimorum in secundum 24. & tertium 54. ab initio acceptos: quemadmodum hic manifestum est.

Geo. prop.	1416	1	1	1936	1	1	2106
Med. Ha.	1	1576	1	1	1296	1	1
Med. Geo.	1	1	1624	1	1	1404	1
Med. Ar.	1	1	1	1676	1	1	1521

POSTREMO sint inueniendi tres in Harmonica proportionalitate. Inuētis tribus in Harmonica proportionalitate, 1225. 49. 25. inter quorū binos cadant bini Medij, vnus Arithmetice & alter Geometrice, vt in 11. regula docuimus, sint proportionis priorum duorum minimi duo numeri 25. 1. & proportionis duorum posteriorum minimi duo numeri 49. 25. quorū summa 26. 74. numerēt minimū numerū 962. Hunc si in tres inuētos duxeris, gignes tres quæsitos 1178450. 471138. 24050. Nā inter binos cadēt, bini medij, vnus Arithmetice, & alter Geometrice, quemadmodum inter eorum submultiplices 1225. 49 25. nimirum numeri, qui

fiunt

fiunt ex eodem 962. in medios supra inuentos. Itē inter eosdem bines cadent singuli medij Harmonice, vt ex 12. regula constat, cum producti sint ex minimo numerato à summis minimorum terminorum, in omnes tres. Exemplum hic habes.

Har. pro.	1178450	1	1	471338	1	1	240	50
Med. Ar.	1	612794	1	1	1	355594	1	1
Me. Geo.	1	1	235690	1	1	133670	1	
Me. Ha.	1	1	1	90650	1	1	31850	

XIIII.

PARI ratione comperiemus duos numeros proportionē habentes duplicatam data proportionis, inter quos cadant tres medij, vnus in proportionalitate Arithmetica, & in Geometrica alius, & tertius in Harmonica. Sit enim data proportio 6. ad 3. & tres minimi in ea numeri, 4. 2. 1. eritque ex defin. 10. huius lib. proportio 4. ad 1. duplicata proportionis 2. ad 1. vel 6. ad 3. data. Ducatur summa 5. ex 4. & 1. collecta in duos quosuis numeros habentes eandem proportionem, quam 4. ad 1. hoc est, duplicatam data proportionis, vt in 12. & 3. Producti autem numeri 60. 15. duplicentur, si ambo non sint pares, vel impares. Dupli enim 120. 30. sunt quos quærimus. Et si vterque esset par, aut impar, ipsi essent quæsiti, & duplicatio non foret necessaria. Ita autem se habent tres medij inter 120. & 30. vt hic apparet.

Duo numeri inuenti.	1	120	1	1	1	1	30	
Medius Arithmet.	1	1	75	1	1	1		
Medius Geometr.	1	1	1	60	1	1		
Medius Harmon.	1	1	1	1	48	1		

PO-

XV.

POSTREMO si lubeat numerum quemcunque propositum distribuere in quotuis partes Harmonicam proportionalitatem seruantes, efficies id hac ratione. Cape per 5. regulam tot numeros Harmonice proportionales, in quot partes numerus est distribuendus. Si enim per eorum summam diuides numeros, qui ex dato numero in numeros acceptos fiunt, erunt Quotientes partes, quas quaeris, eruntque acceptis numeris eodem ordine proportionales. Vel si per summam acceptorum numerorum partiaris datum numerum, & Quotientem in singulos numeros acceptos ducas, erunt numeri procreati, quos quaeris. Vt si numerus 130. distribuendus sit in tres partes Harmonice proportionales: si sumantur tres numeri 6. 8. 12. ex 5. regula inuenti, et per eorū summā 26. diuidantur numeri 780. 1040. 1560. qui ex dato numero 130. in assumptos numeros 6. 8. 12. gignuntur, erunt Quotientes 30. 40. 60. partes, quas inquirimus. Vel si datum numerum 130 per 26. summam acceptorum numerorum diuidas, & Quotientem 5. ducas in singulos acceptos, 6 8. 12. erunt procreati numeri 30. 40. 60. eadem partes, quas inquirimus. Constituunt enim datum numerum 130. sintque Harmonice proportionales, sicuti assumpti numeri, 6. 8. 12. Eodē modo diuidetur numerus 10. in has tres partes $2\frac{4}{1\ 3}$. $3\frac{1}{1\ 3}$. $4\frac{8}{1\ 3}$. eodem modo proportionales. Eademque ratio est de pluribus partibus.

QVO PACTO EX PROPORTIONE aqualitatis omnes inaqualitatis proportiones rationales oriantur.

POSITIS tribus terminis aqualibus, siue vnitatibus, siue numeris, mirabile dictu est, quam facili, & iucunda ratione, ex varia illorum inter se additione, omnes proportiones rationales inaqualitatis in tribus terminis gignantur, hoc ordine.

AEQVALES termini, siue numeri, procreant numeros duplos: DVPLI triplos: TRIPLI quadruplos: QVA-

DRVPLI quintuplos & sic in infinitum.

DEINDE ex multiplicibus terminis inuentis, si ordinem inuertant, gignentur omnes superparticulares. hoc seruato ordine DVPLI inuersi producunt sesquialteros: TRIPLI inuersi sesquitertios: QVADRVPLI inuersi sesquiquartos: atque ita deinceps.

TERTIO ex terminis superparticularibus inuentis, si inuertant quoque ordinem, producentur omnes superpartientes, hac serie SESQVIALTERI inuersi exhibēt superbipartientes. SESQVITERTII inuersi supertripartientes: SESQVIQVARTI inuersi superquadrupartientes, &c.

QVARTO ex ysdem terminis superparticularibus eo ordine, quo inuenti sunt, nascentur omnes multiplices superparticulares, hoc ordine.

SESQVIALTERI dāt duplos sesquialteros: DVPLI sesquialteri triplos sesquialteros: TRIPLI sesquialteri quadruplos sesquialteros, &c. SESQVITERTII item gignunt duplos sesquitertios: DVPLI sesquitertij triplos sesquitertios: TRIPLI sesquitertij quadruplos sesquitertios, &c. SESQVIQVARTI rursus efficiunt duplos sesquiquartos: DVPLI sesquiquarti triplos sesquiquartos: TRIPLI sesquiquarti quadruplos sesquiquartos, &c.

QVINTO ex terminis superpartientibus inuentis eliciuntur omnes multiplices superpartientes, hoc ordine.

SVPERBIPARTIENTES genērant duplos superbipartientes: DVPLI superbipartientes triplos superbipartientes, TRIPLI superbipartientes quadruplos superbipartientes, &c. SVPERTRIPARTIENTES quoque pariunt duplos supertripartientes; DVPLI supertripartientes, triplos supertripartientes: TRIPLI supertripartientes, quadruplos supertripartientes: &c. SVPERQVADRVPARTIENTES itē gignun duplos superquadrupartientes: DVPLI supo, quadrupartientes, triplos superquadrupartientes: TRIPL superquadrupartientes, quadruplos superquadrupartientes: atque sic de cæteris.

MODVS autem, quo omnes hæ proportiones ex tribus terminis æqualibus generantur eo ordine, quem exposuimus, est vnicus, isque facillimus, nimirum hic.

SVM-

SVMMA, collecta ex primo termino datæ proportionalitatis, ex qua alia generari debet, semel sumpto, & secundo bis, & tertio semel exhibet primum terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ.

SECVNDVS terminus Geometricæ proportionalitatis constituendæ oritur ex secundo, & tertio termino datæ proportionalitatis, ex qua alia oriri debet, semel sumpto.

TERTIVM terminum proportionalitatis Geometricæ constituendæ offert tertius terminus datæ proportionalitatis, ex qua alia erui debet, sumptus semel.

ATQVE hoc præceptum triplex sub oculos ponitur hoc appositio typo, vbi liquido constat, qui termini datæ proportionalitatis sumendi sint vel semel, vel bis, vel omittendi, vt termini alterius proportionalitatis constituantur.

TYPVS PROCREATIONIS VNIVS proportionis Geometricæ ex alia Geometricæ.

Ordo termin. datæ proportionalitatis.	Primus	Secúdus	Tertius
Primus cõstituitur, si dati term. ita sumãtur.	Semel	Bis.	Semel
Secúdus cõstituitur, si term. dati ita sumatur.		Semel.	Semel
Tertius cõstituitur, si ita sumãtur dati term.			Semel

SEQVVN-

SEQVVNTVR iam exempla generationis omnium proportionum ex æqualitatis proportione. Proponimus autē duas æqualitatis proportiones, vnam in vnitatibus; alteram vero in binarijs. Vbi hoc notatione dignum videtur, ex vnitatibus procreari semper minimos terminos cuiusque proportionalitatis trium terminorum.

GENERATIO MVLTIPLICIVM.

Æqualitatis proportio.	1 1 1 1 1 2 2 2
Dupli ex æqualibus creati.	1 4 2 1 1 8 4 2
Tripli ex duplis.	1 9 3 1 1 18 6 2
Quadrupli ex triplis.	1 16 4 1 1 32 8 2
Quintupli ex quadruplis.	1 25 5 1 1 50 10 2

GENERATIO SVPERPARTICularium.

Dupli inuerso ordine.	1 1 2 4 1 2 4 8
Sesquialt. ex duplis inuersis.	1 9 6 4 1 18 12 8
Tripli ordine conuerso.	1 1 3 9 1 2 6 18
Sesquiter. ex triplis inuersis	1 16 12 9 1 32 24 18
Quadrupli ordine conuerso.	1 1 4 16 1 2 8 32
Sesquiquar. ex quad. conuersis.	1 25 20 16 1 50 40 32

GENERATIO SVPERPARTientium.

Sesquialteri inuersi.	1 4 6 9 1 8 12 18
Superb. ex sesquialt. inuersis.	1 25 15 9 1 50 30 18
Sesquiter. ordine inuerso;	1 9 12 16 1 18 24 32
Supertr. ex sesquit. inuersis.	1 49 28 16 1 98 56 32
Sesquiquart. conuerso ordine.	1 16 20 25 1 32 40 50
Superquadrupar. ex sesquiquar. couersis	1 81 45 25 1 162 90 60

GENE-

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superparticularium.

Seſquialteri directo ordine.	1 ol 6l4l 1 18l12l8
Dupli ſeſquialteri ex ſeſquialt.	1251lol4l 1. 50l2ol8
Tripli ſeſquial.ex dupl ſeſquial.	1491l4l4l 1 98l28l8
Quadrupl.ſeſquial.ex tripl ſeſquial.	1811l8l4l 1162l36l8
Seſquitertij ordine recto.	1 16l12l9l 1 32l24l18
Dupli ſeſquiter.ex ſeſquit.	1 49l21l9l 1 98l42l18
Tripli ſeſquit. ex dup. ſeſquit.	1lool3ol9l 1ool6ol18
Quadr.ſeſquit.ex trip.ſeſquit.	1l69l39l9l 1338l78l18
Seſquiquarti ordine recto	1 25l2ol16l 1 50l 40l32
Dupli ſeſquiquar.ex ſeſquiqua.	1 81l36l16l 1l62l 72l32
Tripl.ſeſquiq.ex dup.ſeſquiq.	1l69l52l16l 1338l104l32
Quad.ſeſquiq.ex trip.ſeſquiq.	1l289l168l16l 1578l136l32

GENERATIO MVLTIPLICIVM Superpartientium.

Superbipart.ordine recto.	1 25l15l9l 1 50l30l18
Dupli ſuperbip.ex ſuperbip.	1 64l24l9l 1l28l48l18
Tripli ſuperbi.ex dup.ſuperbip.	1l21l32l9l 1242l66l18
Quadr.ſuperb.ex trip.ſuperbip.	1l96l42l9l 1392l84l18
Supertripart.directo ordine.	1 49l28l16l 1 98l 56l32
Dupli ſupertrip.ex ſupertrip.	1l21l44l16l 1l42l 88l32
Trip.ſupertri.ex dup.ſupertri.	1l225l60l16l 1450l120l32
Quad.ſupertri.ex trip.ſupertr.	1361l176l16l 1722l352l32

Su-

Superquadrup.recto ordine.	1	81	45	25	1	16	21	90	50
Dupli superquad.ex superq.	1	96	1	70	25	1	39	21	140	50
Trip.superq.ex dup. superq.	1	361	95	25	1	72	21	190	50
Quad.superq.ex trip.superq.	5	761	120	25	1	115	21	240	50

HIC enim perspicue cernis, quoslibet tres terminos ex tribus proximo antecedentibus procreatos esse ex praescripto triplicis praecepti superioris. Vt verbi gratia postremi hi tres, 576. 120. 25. ita producti sunt ex tribus antecedentibus 361. 95. 25. Primus 576. coacervatus est ex primo 361. semel, & ex secundo 95. bis, & ex tertio 25. semel. Secundus autē 120. cōflatus est ex secundo 95. semel, & ex tertio 25. semel. Tertius denique 25. est tertius 25. semel sumptus, vt haec appositā formula demōstrat. Atq; hoc eodem modo omnes alij geniti sunt, initio facto à terminis aqualibus, 1. 1. 1. vel 2. 2. 2.

361	1
95	1
95	95
25	25 25
576	120 25

QVO PACTO VICISSIM omnis proportio inaqualitatis ad aqualitatis proportionem revocetur.

PROPOSITIS rursus tribus terminis inaqualibus in quacunque proportione, restituetur vicissim proportio aqualitatis, non minus iucunda, quam facili ratione, per variā subtractionem terminorum inaqualium, vnius ab altero. Itaautem res expedietur triplici hoc praecepto.

MINIMVS trium terminorum inæqualium datorum statuatur vnum extremum proportionis, ad quam reductio fit.

MINIMO eodem subtracto ex medio, reliquus numerus constituatur in

medio

medio loco proportionis, ad quam fit reductio.

SVMMA collecta ex constituto iam extremo semel, & medio termino bis sumpto, subtrahatur ex maximo datorum trium numerorum, & reliquus numerus alterum extremum nouę proportionis fiat.

HAC ratione quauis proportio trium terminorum inaqualium reuocatur ad aliam proportionem, conferendo semper maiores numeros cum minoribus; & hac rursus eodem modo ad aliam, atque ita deinceps, donec tres termini aquales occurrant. Quod si tres dati termini habeant continuam proportionem duplam, reducentur ij prima statim operatione ad aqualitatem. Id quod exempla, quæ sequuntur, planum facient.

Quintupla proportio.	1	15	1 30	1 6
Quadrupla.	1	96	1 24	1 6
Tripla.	1	54	1 18	1 6
Dupla.		24	1 12	1 6
Aequalitatis proportio,	1	6	1 6	1 6

HOC enim exemplum monstrat, quintuplam proportionem reuocatam esse ad quadruplam, quadruplam ad triplam, triplam ad duplam, & denique duplam ad aqualitatem. In hoc altero vero exemplo vides proportionem supertripartientem quartas reduci ad sesquitertiam, sesquitertiam ad triplam, triplam ad duplam, ac duplam eandem ad aqualitatem.

Propertio supertripartiens quartas.	49	28	16
Sesquitertia	9	12	16
Tripla.	9	3	1
Dupla.	4	2	1
Propertio æqualitatis.	1	1	1

VIDES ergo vltimam proportionem inæqualitatis semper esse duplam, hanc vero statim ad æqualitatem reduci.

EST autem animaduersione dignum, si tres numeri dati fuerint in sua proportione minimi, proportionem æqualitatis, ad quam fit reductio, consistere in tribus vnitatibus: Si vero non fuerint minimi, proportionem illam æqualitatis consistere in tribus numeris æqualibus, quorum quilibet tot vnitates continet, quotum locum occupant tres termini dati inter omnes tres terminos eiusdem generis proportionis. Ita vides in posteriori exemplo tres datos numeros 49. 28. 16. minimos esse in proportione supertripartiente quartas, atque reductionem factam esse ad hanc æqualitatem, 1. 1. 1. At in priori exemplo occupant tres numeri dati, 150. 30. 6. sextum locum inter omnes tres numeros continua proportionis quintupla, propterea æqualitas inuenta est inter hos tres senarios, 6. 6. 6. Minimi enim siue primi numeri quintupla proportionis sunt, 25. 5. 1. Secundi, 50. 10. 2. Tertij, 75. 15. 3. Quarti, 100. 20. 4. Quinti 125. 25. 5. Sexti autem, 150. 30. 6. vt manifestum est. Idem experiri licebit in omnibus alijs proportionibus.

SED & hoc obseruatione non indigne videtur, quamlibet proportionem primo loco ad eam reduci, ex qua ortum habuit. Vt in priori exemplo quintupla reducta est ad quadruplam, ex qua orta est: quadrupla ad triplam. Hæc enim illam genuit, & sic de cæteris, vsque ad æqualitatem. In exemplo vero posteriori, Supertripartiens reuocata est ad sesquitertiam ordine inuerso. Constat autem, numeros

seſquitertios conuerſo ordine gignere ſupertripartientes, vt ſupra diximus. Item ſeſquitertia hæc, conferendo maiores numeros cum minoribus, reducta eſt ad triplam ordine inuerſo, quemadmodum tripla inuerſa generat ſeſquitertiam. Deinde tripla, conferendo maiores item numeros cum minoribus, reducta eſt ad duplam, & hæc ad æqualitatẽ, &c.

NEQVE vero ſilentio prætereundum cenſeo, ex tribus terminis cuiuſcunque proportionalitatis Geometricæ, ſiue ea æqualitatis ſit, ſiue inæqualitatis, gigni poſſe quamlibet trium proportionalitatum, quas ſupra explicauimus, ſi ipſi termini variis modis inter ſe cõmententur: Proportionẽ enim trium terminorum Geometricam procreare aliam Geometricam trium terminorum, ſi primus terminus ſemel, ſecundus bis, & tertius ſemel pro primo termino ſumatur; pro ſecundo autem ſecundus, & tertius ſemel; pro tertio denique ipſe tertius ſemel, perſpicue conſtat ex ijs, quæ paulo ante ſcripſimus de ortu omnium proportionum inæqualitatis ex æqualitatis proportione.

AT vero vt ex eadem Geometrica proportionalitate gignatur Arithmetica trium terminorum, ſerumbis hoc præceptum triplex.

SVMMAM ex primo, & ſecundo termino bis, & tertio ſemel collectam fac primum terminum Arithmeticæ proportionalitatis.

SVMMAM vero ex primo, ſecundo, & tertio ſemel confectam, ſtatue ſecundo loco.

TERTIVM denique terminum conſtitue tertium.

Cuius quidem productionis typum hic vides.

TYPVS PROCREATIONIS
Proportionis Arithmetica ex Geometrica.

Ordo terminorū duæ proportionalitatis.	Primus.	Secūdus	Tertius
Primus fit ex datis term. ita coaceruatis.		Bis.	Bis. Semel
Secundus vero fit.		Semel	Semel Semel
Tertius denique hoc modo.			Semel

NIHIL porrò interest, vtrum minimum numerum proportionalitatis Geometricæ facias primum terminum, an vero maximum, vt ex sequentibus exemplis apparebit.

GENERATIO ARITHMETICAE
Proportionalitatis ex Geometrica.

Geomet. prop.	1	1	1	1	1	1	4	1	4	1	4	1	9	1	6	1	4	1	4	1	9	1	6	1	9
Arith. propor.		1	5	1	3	1	1	1	2	1	0	1	2	1	4	1	3	4	1	9	1	4	1	2	9	1	1	9	1	9

CONSIDERATIONE autem dignissimum est, differentiam cōstitutæ proportionalitatis Arithmeticæ semper æqualem esse summæ primorum duorum terminorum Geometricæ proportionalitatis, per quam constituitur. Sic vides in primo exemplo differentiam esse 2. summam ex 1. 1. In secundo, 8. summam scilicet ex 4. 4. In tertio 15. quæ summa conficitur ex 9. 6. In quarto denique, 10. nimirum summam ex 4. 6. collectam, atque ita in aliis.

ITAQVE si Arithmetica proportionalitas constituatur ex proportione æqualitatis, erit differentia dupla vnius termini æqualis: vt perspicuum est in prioribus duobus exemplis.

DENIQVE Harmonicam proportionalitatem oriri quoque ex Geometrica, hoc alio præcepto triplici planum fiet.

SVMMAM collectam ex primo bis,

& se-

& ſecundo ter, & tertio ſemel ſumpto, ſtatue in primo loco proportionalitatis Harmonicæ.

SVMMAM vero confectam ex ſecundo bis, & tertio ſemel ſumpto, in ſecundo loco.

SVMMAM denique ſecundi & tertij, in tertio loco.

VBI etiam nihil intereſt, vtrum minimus terminus dicatur primus, uel maximus. Typum porro huius generationis hic expreſſum vides.

TYPVS PROCREATIONIS
Harmonicæ proportionalitatis ex Geometrica.

Ordo terminorum proportionalitatis	Primus	Secundus	Tertius
Primus fit ex ter. datis ſic in vnu collecta.	1 bis	1 Ter	1 Semel
Secundus vero ſic	1	1 Bis	1 Semel
Tertius denique hoc modo.	1	1 Semel	1 Semel

GENERATIO PROPORTIONALITATIS
Harmonicæ ex Geometrica.

Geomet. propor.	1	1	1	1	1	4	1	4	1	4	1	9	1	6	1	4	1	1	4	1	6	1	9
Harmo. propor.	16	13	12	11	24	1	12	18	11	40	1	6	1	10	1	3	1	2	1	1	1	1	5

IAM vero è contrario reducetur Harmonica proportionalitas quacunque ad æqualitatem hoc pacto.

DETRAHE minimũ terminum ex medio, & quod relinquitur, fac medium terminum proportionalitatis conſtituendæ.

HOC medio inuento ſublato ex minimo datæ proportionalitatis Harmonicæ, erit reliquus numerus, vnum extremorum proportionalitatis.

DENIQVE minimus datus ſemel, & medius inuentus bis in vnam ſummam collecti, & ex maximo dato ſubtracti, dabunt duplum alterius extremi. Semiſſis ergo huius erit ipſum alterum extremum.

HAC ratione reuocabitur Harmonica proportionalitas vel ad æqualitatem, vel ad proportionalitatem aliquã Geometricam, quæ ad æqualitatem redigetur, vt ſupra docuimus. Semper autem Harmonica proportionalitas propoſita oritur ex illa Geometrica, ſi ſuperius præceptũ àdhibeatur, ad quã per hoc præceptũ reuocata eſt. Exempla hic vides.

Harm. propor.	6	3	2	24	12	8	40	16	10	35	21	15
Geom. propor.	1	1	1	4	4	4	9	6	4	4	6	9

ALIA EXEMPLA

Harmon. propor.	9	4	6	60	40	30	24	16	12
Geometr. propor.	2	1	$\frac{1}{2}$	5	10	20	2	4	8
Æqualitas.	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	5	5	2	2	2

AT proportionalitas Arithmetica reuocabitur ad æqualitatem, vel ad Geometricam proportionalitatem, per quam conſtituitur, hoc modo.

MINIMVM terminum fac vnum extremorum

morum. Subducto deinde eodem minimo ex medio, erit reliquus numerus conflatus ex medio constituendæ proportionalitatis, & altero extremo. Igitur si hic numeris reliquus duplus est minimi, secto eo bifariam, erit dimidiata pars tam medius terminus, quam alterum extremorum; reductaque erit data proportionalitas Arithmetica ad æqualitatem, ex qua ortum traxit.

VT detur Arithmetica proportionalitas, 3. 9. 15. si in Geometrica constituenda facias vnum extremum 3. ex minimo proportionalitatis Arithmetica data, & hunc eundem numerum domas ex dato medio 9 supererunt 6. qui numerus duplus est minimi 3. Redigitur ergo data proportionalitas ad æqualitatem hanc 3. 3. 3. ex qua oritur secundum superius præceptum.

3	9	25
3	3	3

SI vero reliquus ille numerus non est duplus minimi, secandus erit in duas partes, quæ cum minimo constituãt proportionalitatem Geometricam continuam. Ad hanc enim illa reuocata erit.

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 34. 19. 4. Facto in Geometrica extremo vno, 4. minimo data Arithmetica proportionalitatis, eoque subducto ex medio 19. relinquitur numerus 15. qui non est duplus minimi. Quare secto eo in 6. & 9. reducetur illa Arithmetica ad hanc Geometricam 9. 6. 4. ex qua rursus ortum ducet, ex præscripto superioris præcepti.

34	19	4
9	6	4

SED quoniam reliquus ille numerus non potest semper diuidi in tales duas partes, qua cum minimo constituant continuam proportionalitatem Geometricam, (quo pacto autem ea diuisio facienda sit, & quando fieri in numeris nequeat, docebimus ad propos. 17. lib. 6.) nisi numeri surdi, irrationalesue adsciscãtur; reuocabimus quamcunque proportionalitatem Arithmeticam statim ad æqualitatem, ex qua, si termini æquales cum differentia proposita coaceruentur, ortum duxit; hoc pacto.

MINIMVS terminus datus fiat vnus ex duobus extremis. Differentia autem proportionalitatis subducta ex medio, reliquus numerus fiat medius: & eadem differentia duplicata, atque ex maximo termino sublata, fiat reliquus numerus alter extremorum.

20	27 34
20	20 20

VT si data sit Arithmetica proportionalitas, 20. 27. 34. cuius differentia est 7. si 20. fiat vnum extremorum, & differentia 7. dematur ex 27. & eadem duplicata ex 34. reliqui erunt alij duo termini æquales. 20. 20. Ex hac æqualitate, cognita differentia 7. quam termini Arithmetica proportionalitatis habere debent, conficietur ipsa proportionalitas Arithmetica, hac ratione.

VNVS terminorum æqualium fiat minus extremum. Huic addatur differẽtia data, vt fiat secundus terminus. Eidem denique minori extremo adijciatur data differentia duplicata, vt efficiatur maius extremum.

VT in dato exemplo, minus extremum erit 20. cui si dif-

ferentia

ferentia 7. addatur, fiet medius terminus 27. Et si eadē differentia 7. duplicata adjiciatur eidem minimo extremo 20. conflabitur maius extremum 34. Eodem pacto data hac aqualitate 15. 15. 15. si ex ea constitui debeat proportionalitas Arithmetica, cuius differentia sit 20. addatur hac differentia ad 15. vnum terminorum aqualium, vt habeas secundum terminum 35. Quòd si eadem differentia duplicata, hoc est, numerus 40. ad eundem terminum aqualem adjiciatur, fiet tertius terminus 55. Primus autem est 15. vnus terminorum aqualium, vt hic vides.

Differentia 20.

15	15	15
15	35	55

ATQVE pauca hac prælibasse hoc loco sufficiat ex infinitis, quæ de immensa proportionum, proportionalitatumq; vi ac natura, innumerabilibusque proprietatibus dici possent. Plura enim & quidem scitu perjucunda in pleniore nostra Arithmetica, Deo annuente, explicabimus. Nunc ad Euclidem interpretandum reuertamur.

V.

RATIONEM habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se se mutuo superare.

QVONIAM Euclides in tertia definitione habitudinē duarum magnitudinum eiusdem generis, vocauerat rationem, quam nos cum alijs auctoribus proportionem dicimus; explicat nunc definitione hac 5. quidnam requirant duæ quantitates eiusdem generis, vt proportionem dicantur habere. Neque enim omnes lineæ, neque etiam omnes anguli plani, quamuis sint eiusdem generis quantitatis, proportionem habent inter se, vt mox dicemus. Ait igitur, illas magnitudines dici proportionem habere inter se, quarū vtranuis multiplicata ita augetur, vt alteram tandem superet,

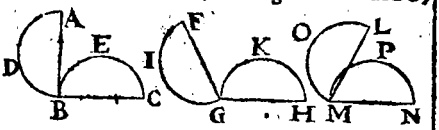
adeo

adeo vt si alterutra quantumuis multiplicata nunquam alteram excedat, nulla ratione proportionem habere dicantur. Vt diameter, & latus eiusdem quadrati, dicentur habere proportionem; (licet irrationalem, qua nullo possit numero exprimi) quia latus multiplicatū per 2. hoc est, bis sumptum, excedit diametrum. Cum enim duo latera quadrati, ac diameter constituant triangulum Isosceles, [a] erunt duo latera quadrati diametro eiusdem maiora. Ita quoque circumferentia circuli, & diameter eiusdem, proportionem habent, (quamuis nondum sit nobis explorata, atque cognita) quia diameter multiplicata per 4. hoc est, sumpta quater, circumferentiam superat, cum omnis circumferentia circuli, vt ab Archimede demonstratur, ter duntaxat comprehendat diametrum eiusdem, & particulam adhuc paulo minorem septima parte diametri. Eodem modo mixtæ curuilineæ cum rectilineis proportionē habebunt, quia & æqualitas & inæqualitas inter ea reperitur, cum & Hippocrates Chius Lunulam quandam, qua figura est contenta duobus arcubus circulorum inæqualium Lunæ noue, quando falcata esse cernitur; & Archimedes parabolam quadrarit; hoc est, ille cuidam lunulæ, hic vero parabolæ quadratum inuenerit æquale. Hinc enim fit, vt & quadratum detur maius ea lunula, ac parabola; Atque e contrario lunula & parabola maior eo quadrato. Huc accedit, quod Archimedes in lib. de Spiralibus demonstrauit, lineam aliquam rectam esse circumferentiæ circuli æqualem, & aliam duplam, triplam aliam, &c. ac proinde & quadratum aliquod circulo esse æquale, vt in libello de dimensione circuli demonstrauit. De æqualitate porrò lineæ rectæ, & circularis; quadrati, & circuli, ad calcem lib. 6. agemus. Adde, à Proclo quoque inter angulos rectilineos, ac curuilineos æqualitatem demonstrari. Ostendit enim lib. 3. in primum Euclidis, ad 12. Axioma, quod ipsi est 4. Postulatum, tam recto angulo, quam obtuso, & acuto, exhiberi posse angulum curuilineum æqualem. Sit enim angulus rectus A B C, contentus rectis æqualibus A B, B C, circa quas semicirculi describantur A D B, B E C. Quoniam igitur anguli semicirculorum A B D, C B E, sunt æquales; addito communi angulo mixto A B E,

[a] 20. primi.

fiet

fiet angulus totus curuilineus DBE, toti angulo recto ABC, aqualis. Simi liter ostendes, angulum cur uilineū IGK, aqualem esse obtuso FGH; nocnon curuilineum OMP, scuto LMN, dummodo hic ab angulis semicirculorum LMO, NMP, auferas communem angulum mixtum, qui continetur recta linea LM, & curua MP. Ex quibus constat, alterutrum angulorum multiplicatum posse alterum excedere; quare proportionem inter se habebunt. At vero linea finita ad lineam infinitam non habebit proportionem, quia finita quomodocunque multiplicata, infinitam nequit superare. Sic neque linea cum superficie, neque superficies cum corpore, eandem ob causam, vllam habebit proportionem. Denique non censebitur habere proportionem angulus contactus cum angulo rectilineo, quia angulus contactus, quantumuis multiplicatus, minor adhuc semper existit quouis angulo rectilineo, etiam minimo, vt propos. 16. lib. 3. demonstrauimus. Itaque vt apertius Euclides explicaret, quanam magnitudines eiusdem generis proportionem dicantur habere, hoc est, quas magnitudines eiusdem generis in definitione 3. intellexerit, voluit hac definitione eas intelligi, quæ hanc conditionem habeant, vt alterutra multiplicata alteram possit superare, alias vero non, etiamsi in eodem quantitatis genere videā tur comprehendi, quales sunt linea finita, & infinita, angulus rectilineus, & angulus contactus, &c Hanc ob causam in plerisque demonstrationibus proportionum, iubet toties multiplicare vnam propositarum magnitudinum, qua proportionem ponuntur habere inter se, donec alterā excedat. Quod etiā facit propos. 1 lib. 10. & in plerisque alijs propositionibus. Faceāt igitur, qui putant, per magnitudines eiusdem generis in definitione Proportionis, quam Euclides Rationem dixit, intelligendas esse, quæ sub eodem genere proximo, siue infimo continētur. Hac enim ratione nō esset proportio inter angulos rectilineos, & curuilineos, aut inter fi-



guras

guras rectilineas, curuilineasque, cum non sub eodem contineantur genere proximo: quod falsum esse diximus. Sileãt quoque, qui existimant, intelligendas esse magnitudines in eodem genere quantitatis, siue in eodem genere subalterno, vt Logici loquuntur; ita vt satis sit, vt dua quantitates dicantur habere proportionem, si sint vel linea, vel superficies, vel corpora, vel anguli, vel numeri. Ita enim proportio esset inter angulum rectilineum, & angulum contactus, cum in genere anguli contineantur: Itẽ proportionem haberent inter se, linea finita, & linea infinita, cum in genere linea existant: quorum vtrumque falsum esse, liquido ex hac definitione constat.

PERSPICVVM est ex his, quam inepte, & quàm falso, hanc definitionem exposuerit Orontius. Ait enim Euclidem non definire, seu docere, quanam magnitudines proportionem dicantur habere, sed qualem proportionem dua quacunque proposita quantitates habeant. Itaque, inquit, vult Euclides, si magnitudo A, ad magnitudinem B, referatur, & amba multiplicentur aqualiter, hoc est, ambarum sumantur quacunque aque multiplicia, nempe C, tam multiplex ipsius A, quam multiplex D, ipsius B; habere magnitudines A, & B, eam inter se proportionẽ, quam earum aque multiplicia C, & D. Non aduertit autem, hoc, quod ait, non esse definitionem, sed Theorema decimumquintũ huius 5. lib. vbi demonstratur ab Euclide, Partes cũ pariter multiplicibus in eadem proportione esse, hoc est, A, B, magnitudines eandem habere prèportionem, quam earum aque multiplicia C, & D. Non ergo ita est intelligenda hac definitio, praesertim cum tam ignota sit hac proportio inter C, & D. quam illa inter A, & B; quandoquidem semper eadem est. Quare non recte nos Euclides perduceret ad notitiam proportionis inter A, & B. Est ergo sensus huius definitionis ille, quem exposuimus, vt liquido constat ex verbis Euclidis.

VI.

IN eadem ratione magnitudines di-

cuntur

cuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æque multiplicia, a secundæ & quartæ æque multiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtrumque ab vtroque vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt; si ea sumantur, quæ inter se respondent.

EXPLICAT hoc loco Euclides, quasnam conditiones requirant, apud Geometras, magnitudines, vt eandem dicantur habere proportionem. Quod vt exequatur, cogitur confugere ad earum æquemultiplicia, vt complectatur omnes proportiones magnitudinum, tam rationales, quam irrationales. Sint igitur quatuor magnitudines A, prima; B, secunda; C, tertia; & D, quarta, sumanturque prima, & tertia æquemultiplicia quæcunque; E, quidem ipsius A; & F, ipsius C: Item sumantur secunda, et quarta alia quæcunque æquemultiplicia; G, quidem ipsius B; & H, ipsius D, siue hæc duo posteriora sint ita multiplicia secundæ, et quartæ, sicut priora duo multiplicia sunt primæ, & tertiæ, siue non. Quòd si iam inter se conferantur sumpta æque multiplicia ea, quæ inter se respondent, vt multiplex primæ, & multiplex secundæ inter se, hoc est, E, & G; Item multiplex tertiæ, & multiplex quartæ inter se, hoc est, F, & H; deprehensumque fuerit perpetuo, ea ita inter se habere, vt si E, multiplex primæ magnitudinis A, minus fuerit, quam G, multiplex secundæ magnitudinis B; etiam F, multiplex tertiæ magnitudinis C, minus sit quam H, multiplex quartæ magnitudinis D: Aut si E, æquale fuerit ipsi G; etiam F, æquale sit ipsi H: Aut denique si E, maius fuerit quam G; etiam F, maius sit quã H: (quod est vtrumque ab vtroque vel vna deficere, vel vna æqualia esse, vel vna excedere) ita vt in nullo genere multi-

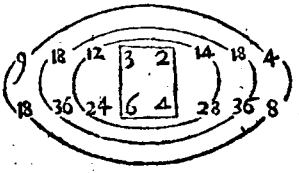
plicium

plicium contrarium possit reperiri, id est, vt nunquam E, minus sit quam G, quin & F, minus sit quam H; & vt nunquam E, aquale sit ipsi G, quin & F, ipsi H, sit aquale. Denique vt nunquam E, maius sit quam G, quin & F, maius sit, quam H. Si inquã deprchẽsum fuerit, aque multiplicia quauis accepta, perpetuo se se ita habere, vt dictũ est; dicetur eadem esse proportio prima magnitudinis A, ad secundam magnitudinẽ B, qua est proportio tertia magnitudinis C, ad quartã magnitudinẽ D. Quod si deprehenderetur aliquando, etiam in solo vno genere multiplicium, multiplex D, deficere à multiplici G, non autem multiplex E, deficere à multiplici H; Aut E, aquale esse ipsi G, at F, non aquale ipsi H; Aut denique E, excedere ipsum G, at F, non excedere ipsum H, quamuis in infinitis alijs multiplicibus conditio predicta reperiatur, nulla ratione dicentur quantitates proposita eandem habere proportionem, sed diuersas, vt ex defin. 8. fiet perspicuum.

ITAQVE vt demonstratione aliqua, per hanc 6. definitionem, concludantur quatuor quantitates eandem habere proportionem, ostendendum erit, (quod quidem diligenter ab Euclide & hoc 5. lib. & in alijs seruatur) quacunque aque multiplicia prima, & tertia collata cum quibuscunque aque multiplicibus secunda, & quarta, habere semper conditionem predictam defectus, aqualitatis, aut excessus; ita vt nunquam contrarium eius inueniri possit. Similiter si quatuor quantitates concedantur eandem habere proportionem, concedatur quoque necesse est, qualibet aque multiplicia prima, & tertia collata cum quibuslibet aque multiplicibus secunda, & quarta, habere eandem defectus, aqualitatis, aut excessus conditionem. Debent enim definitio & definitum reciprocari. Vt autem perspiciatur, quonam pacto, propositis quatuor magnitudinibus eandem proportionem habentibus: quadam aque multiplicia prima, & tertia magnitudinis, à quibusdam aque multiplicibus secunda & quarta magnitudinis, vtrumque ab vtroque vna deficiant, alia vero vna aqualia sint; alia denique vna excedant, si ea sumantur, qua inter se

respon-

respondent ; placet vnum exemplum proferre in numeris. Sint igitur quatuor numeri 3. 2. 6. 4. sumãturq; primi & tertij aque multiplices, nempe quadrupli 12. & 24. Item secundi & quarti sumantur alij aque multiplices, vt septupli 14. & 28. Vides igitur tũ 12. multiplicem primi deficere à 14. multiplice secundi, quam 24. multiplicem tertij à 28. multiplice quarti. Rursus primi, & tertij sumantur alij aque multiplices, nimirum sextupli, 18. & 36. Item secundi, & quarti sumantur alij aque multiplices, vt noncupli 18. & 36. Vides ergo, tam 18. multiplicem primi æqualem esse 18. multiplici secundi, quam 36. multiplicem tertij, 36. multiplici quarti. Postremo primi, & tertij sumantur alij aque multiplices, nempe tripli 9. & 18. Item secundi, & quarti alij aque multiplices, vt dupli 4. & 8. Vides igitur tam 9. multiplicem primi, excedere 4. multiplicem secundi, quam 18. multiplicem tertij, superare 8. multiplicem quarti. Si igitur in omnibus aque multiplicibus, in qua cunque sumantur multiplicatione, semper deprehendatur, vnum triũ horum verũ esse, dicetur eadẽ esse proportio 3. ad 2. quæ est 6. ad 4. alias non.

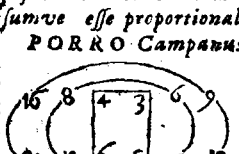


CAMPANVS vero atque Orontius, longe aliter definitionem hanc exponũt. Dicunt enim Euclidẽ velle, tum demum quatuor magnitudines eandẽ habere proportionẽ, cũ prima, & tertia aque multiplicia, a secũda & quarta aque multiplicibus, vtrumque ab vtroque, vel vna deficiunt proportionaliter, hoc est, in eadem proportione, vel vna æqualia sunt, vel vna excedũt proportionaliter, si ea sumantur, qua inter se respondẽt. Clarius, vt ait Cãpanus, quãdo earũ aque multiplicia proportionalia sunt, id est, cum eandẽ proportionẽ habet multiplex prima ad multiplex secũda, quã multiplex tertia ad multiplex quarta. Sed quis nõ videt, si ita intelligatur definitio, Euclidem idem per idem definire? Quod sane absurdum est. Præterea si Euclides vult, eas ma-

gnitu

gnitudines in eadem esse proportione, quarum æque multiplicia (si sumantur, & inter se conferantur eo ordine, quo dictum est) in eadē proportione existunt; cur obsecro in 4. Theoremate huius libri demōstrat, si fuerint quatuor magnitudines in eadem proportione, earū æque multiplicia eo ordine, quem diximus, sumpta, eandem quoque habere proportionem? Immo cum illud Theorema per hanc definitionē ostendatur, per pleonasmum est, idē per idem demonstrari, quod ridiculum est, veluti eo loco admonebimus. Accedit etiam, si ita interpretemur definitionē, plurima Theoremata quinti huius lib. non posse demonstrari, vt propriis locis monebimus. Intelligenda est igitur definitio, vt exposuimus; nimirum propositis quatuor magnitudinibus, si quotiescunque multiplex prima deficit à multiplici secūda, vel æquale est, vel excedit; necessario etiam multiplex tertia tunc deficiat à multiplici quarta, vel æquale sit, vel excedat, quicūq; sit ille defectus, excessusue, non considerando, an proportionalis sit, an non; ita vt nunquam contingat, multiplicem prima à multiplici secunda deficere, multiplicē vero tertia nō deficere à multiplici quarta: aut multiplicem prima æqualem esse multiplici secundæ, multiplicem vero tertiæ multiplici quartæ non æqualem: aut denique multiplicem primæ maiorem esse multiplice secundæ, at multiplicem tertiæ multiplici quartæ non maiorē. Propositis, inquam, quatuor magnitudinibus, quarum æque multiplicia sumpta, vt dictum est, perpetuo eam conditionem in defectu, æqualitate, & excessu seruant, dicuntur quatuor illæ magnitudines eandem habere proportionem; quicquid sit de earum æque multiplicium proportione, quæ nunc non consideratur: sed quarto postea Theoremate demonstrabitur, eum defectum, excessumve esse proportionalem.

PORRO Campanus conatur ostendere, definitionem hanc intelligi debere de proportionali defectu, & excessu. Nam si de quocūque intelligeretur, esset ait, quatuor hi numeri 4. 3. 6. 5. in eadem proportione. Si enim primi & tertij, vt pote 4. & 6. sumantur



æque

aque multiplices numeri, vt dupli, 8. & 12. Item secundi & quarti nempe 3. & 5. aque multiplices, dupli quoque, 6. & 10. excedet tam 8. multiplex primi, 6. multiplicem secundi, quam 12. multiplex tertij 10. multiplicem quarti. Idemque cernitur, si primi, & tertij sumantur quadrupli 16. & 24. secundi vero, ac quarti capiantur tripli 9. & 15. Si igitur sufficit, vt aque multiplicia accepta vno excedant se se quomodocunque, & non requiritur, vt proportionaliter se mutuo superent, erit eadem proportio 4. ad 3. que est 6. ad 5. quod falsum est, cum proportio 4. ad 3. sit sesquitertia, proportio vero 6. ad 5. sesquiquinta. Intelligendus igitur est defectus, aut excessus aque multiplicium, proporttonalis: Ita enim fiet, non esse eandem proportionem 4. ad 3. que est 6. ad 5. quod eorum aque multiplices non se se excedant proportionaliter, vt constat. Verumtamen dicendum est, Campanum mirum in modum hallucinatum fuisse. Quamuis enim numeri aque multiplices ab eo prolati se se vna excedant, tamen quam plurimi alij reperiuntur, quorum multiplex primi excedet quidem multiplicem secundi, vel aqualis erit; at multiplex tertij deficiet a multiplice quarti. Si enim in eius exemplo, primi & tertij sumantur quadruplices 16. & 24. At secundi & quarti, quintuplices sumantur, 15. & 25. excedet quidē 16. multiplex primi, 15. multiplicem secundi; At 24. multiplex tertij non excedet 25. multiplicem quarti, sed deficiet. Quod si primi, & tertij sumantur tripli 12. & 18. At secūdi, & quarti sumantur quadrupli, 12. & 20. erit 12. multiplex primi aqualis 12. multiplici secundi; At vero 18. multiplex tertij, aqualis non erit 20. multiplici quarti, sed ab eo deficiet. Cum igitur nō deprehendātur quælibet aque multiplicia dictorū numerorū sic se habere, vt si multiplex primi excedit multiplex secūdi, multiplex tertij excedat quoq; ne

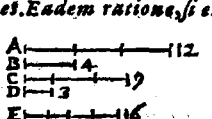
ceſſario multiplex quarti; quæuis id in nonnullis æque multiplicibus ita eſſe contingat: non dicentur, iuxta hanc definitionem 6. dicti numeri eandem habere proportionem, vt ad huc clarius ex 8. definitione conſtabit.

CAETERVM definitio iſta complectitur etiam tres magnitudines eandem habentes proportionem, ſi modo ſecundæ bis ponatur, vt quatuor habeantur. Exempli cauſa; Eadem dicetur proportio 9. ad 6. quæ 6. ad 4. quoniam æque multiplicia quæcunque ſumpta ad 9. & 6. vel vna deficiunt ab æque multiplicibus ſumptis ad 6. & 4. vel æqualia ſunt, vel vna excedunt, &c.

VII.

EANDEM autem habentes rationem magnitudines, Proportionales vocentur.

VT ſi magnitudinum A, B, C, D, eadem ſit proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicentur eæ magnitudines proportionales. Eadem ratione, ſi eadem ſit proportio E, ad F, quæ F, ad G, dicentur magnitudines E, F, G, proportionales. Sunt autem quædã magnitudines proportionales continuæ, inter quas reperitur proportionalitas continua, quales ſunt magnitudines E, F, G: Quadam vero proportionales ſunt non continuæ, ſed diſcretæ, cuiuſmodi ſunt magnitudines A, B, C, D. In his enim interruptio fit proportionum; in illis vero nequaquam, vt dictum eſt in 4. definitione.



VIII.

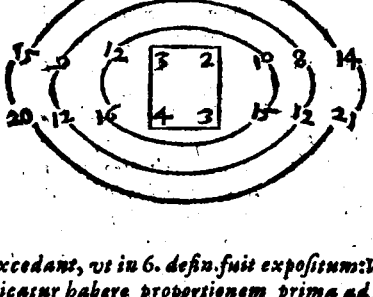
CVM vero æque multiplicium multiplex primæ magnitudinis exceſſerit multiplicem ſecundæ; At multiplex tertiæ non exceſſerit multiplicem quartæ; tunc pri-

ma ad secundam maiorem rationem habere dicetur, quam tertia ad quartam.

DECLARAT hic Euclides, quamnam conditionem habere debeant quatuor magnitudines, vt maiorem dicatur habere proportionem prima ad secundam, quam tertia ad quartam, dicens. Si sumpta sint aque multiplicia prima & tertia; Item alia aque multiplicia secũda & quarta; deprehensumque fuerit aliquando, (licet non semper) multiplex prima maius esse multiplice secunda, multiplex autem tertia nõ esse maius multiplice quarta, sed vel minus vel aquale; dicetur maior esse proportio prima magnitudinis ad secundam, quam tertia ad quartem: vt perspicuum est in apposito exemplo, in quo primæ magnitudinis A, & tertia C, sumpta sint triplicia E, & F; secunda vero B, & quarta D, quadruplicia G, & H. Et quoniam E, multiplex prima maius quidem est quam H, multiplex secunda; At F, multiplex tertiæ maius nõ est quam H, multiplex quarta, immo minus; dicetur maior esse proportio A, prima magnitudinis, ad B, secundam, quam C, tertia, ad D, quartam.

NON est autem necesse, vt quatuor magnitudinum, prima ad secundam dicatur maiorem habere proportionẽ quã tertia ad quartã, aque multiplicia secundũ quamuis multiplicationem sic se habere, vt multiplex quidem prima excedat multiplex secunda, at multiplex tertia non excedat multiplex quarta; sed satis est, vt secundum aliquam multiplicationem ita se habeant. Potest namque interdum fieri, vt tam multiplex prima maius sit multiplice secunda, quã multiplex tertia multiplice quarta: Item vt & multiplex prima minus sit multiplice secũda, & multiplex tertia multiplice quarta: Tamẽ quia hoc non contingit in omni multiplicatione, sed aliquando multiplex prima superat quidem multiplex secunda, at multiplex tertia vel minus est, vel aquale multiplici quarta: propterea maiorẽ dicetur habere proportionẽ prima magnitudo ad secundam, quã tertia ad

quartam, non autem eandem, vt perſpicuum eſt in appoſito exemplo.



ITAQVE vt quatuor magnitudines dicãtur proportionales, neceſſe eſt, vt aquemultiplicia earũ, iuxta quaſcunque multiplicationes accepta, vel una deficiãt, vel una aqualia ſint, vel unà excedant, vt in 6. defin. fuit expoſitum: Vt autem maiorem dicatur habere proportionem prima ad ſecundam, quam tertia ad quartam, ſatis eſt, vt ſecundum aliquam multiplicationem, multiplex prima excedat multiplex ſecũda, multiplex vero tertia non ſuperet multiplex quarta, quamuis iuxta innumeras alias multiplicationes, aque multiplicia prima, ac tertia vna excedant aque multiplicia ſecunda, & quarta.

QVOD ſi quando è contrario multiplex prima deficiat a multiplici ſecunda, non autem multiplex tertia a multiplici quarta, dicetur prima magnitudo ad ſecundam minorem habere proportionem, quam tertia ad quartam: quamuis ſecundum plurimas alias multiplicationes, aque multiplicia prima & tertia vna deficiant ab aque multiplicibus ſecunda, & quarta. Vt in eiſdem numeris propoſiti exempli, minor dicetur propertio 2. ad 3. quam 3. ad 4. &c.

CVR EVCLIDES IN DEFIN. VI. & VIII. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum aque multiplicia definierit.

QVONIAM mirum alicui videri poſſit, cur Euclides tum demum quatuor magnitudines eandem dixerit habere proportionem, hoc eſt, ita eſſe primam ad ſecundam, vt

eſt

est tertia ad quartam, cum aquemultiplicia prima ac tertia iuxta quamcunque multiplicationem, & aquemultiplicia secunda ac quarta iuxta quamcunque etiam multiplicationem accepta ita se habent, vt quotiescunque multiplex prima maius est quàm multiplex secunda, multiplex quoque tertia maius sit quàm multiplex quarta; quotiescunq; vero multiplex prima æquale est multiplici secundæ, multiplex etiam tertia æquale sit multiplici quartæ; quotiescunque denique multiplex prima minus est quàm multiplex secunda, multiplex etiam tertia minus sit quàm multiplex quarta: Item quare tum demum quatuor magnitudinum primæ ad secundam maiorem esse proportionem voluerit, quàm tertia ad quartam, cum aliqua aquemultiplicia prima ac tertiæ, & aliæ aquemultiplicia secundæ ac quartæ accepta ita se habent, vt multiplex primæ sit maius quàm multiplex secundæ, at multiplex tertiæ maius nõ sit, quàm multiplex quartæ, sed vel æquale, vel minus. Quoniam, inquam, mirum alicui videri hoc posse, quòd ex illo excessu, æqualitate, et defectu aque multiplicium eo ordine sumptorum non statim appareat similitudo proportionum, dissimilitudoue: aperiendum videtur hoc loco, quare ita magnitudines tum proportionales, tum non proportionales definiere voluerit Euclides.

AD hanc difficultatem respondetur, Euclidem eas magnitudines voluisse appellare proportionales, quarum aque multiplicia ita se habent, vt dictum est, quia non habuit quid notius, per quod explicare potuisset magnitudines tam incommensurabiles, quàm commensurabiles eandem proportionem, vel non eandem habentes: neque vero opus esse, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc aut illo modo definiatur, sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius definitionem traditam eidem cõuenire, demonstretur. Id quod in alijs etiam definitionibus cernitur. Nam quemadmodum Euclides definit 10. lib. 1. angulum rectum appellauit eum, qui fit à linea super aliam lineam ad angulos æquales cadente, ita vt nunquam vi concedendum sit, angulum quempiam esse rectum, nisi prius constiterit, eum ab huiusmodi linea effici. Item quemadmodũ

definitione ultima lib. 3. definiuit similia circulorũ segmenta esse, in quibus anguli existentes sunt æquales, ita vt tũc solum ei concedendum sit, segmenta esse similia, cum probauerit angulos in eis existentes esse æquales: sic etiã defin. 6. & 8. huius lib. vocauit quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales, quarum æquemultiplicia eã conditionem habent, quam explicauit, ita vt nunquam ei credendum sit, cũ quatuor magnitudines appellabit eandem habere proportionem, vel non eandem, nisi prius demonstrauerit, conditionem eam illis magnitudinibus conuenire. Sed quanquam responsio hæc vera sit, ac propria, tamen quia ex illa definitione non videtur colligi posse, vere magnitudines, quarum æque multiplicia illam conditionem habent, esse proportionales, vel non proportionales; etiamsi eas solũ Euclides velit appellare proportionales, vel non proportionales: explicabimus paulo accuratius, Euclidem recte eo modo definiuisse magnitudines proportionales, atque adeo sine vlla dubitatione concedi posse à quouis, illas, quibus defin. 6. conuenit, vere eandem habere proportionem; illas vero, quibus definitio 8. conuenit, non eandẽ proportionẽ habere.

QVOD vt planius fiat, reuocandum ad memoriam est, duplicem esse proportionem; Rationalem, quæ inter quantitates incõmensurabiles existit, atq; adeo omnis in numeris reperiri potest. Et irrationalem, quæ inter quantitates incommensurabiles existit, & nullo modo in numeris potest reperiri. Si igitur Euclides de Rationalibus duntaxat proportionibus disputationem instituisset, potuisset quatuor magnitudines proportionales definire eo modo, quo lib. 7. defi. 20. proportionales quatuor numeros definiuit, nimirum: Magnitudines proportionales sunt, cum prima secunda, & tertia quarta, æquemultiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe (vt nos ad eam definitionem addidimus) cũ prima secundam, & tertia quartam, æqualiter cõtinet, eãdemq; insuper illius partẽ, vel easdẽ partes. Nẽ proportionales vero magnitudines ita definire potuisset. Magnitudines nõ proportionales sũt, hoc est, prima ad secundã habet maiorẽ proportionẽ, quã tertia ad quartã, cũ prima secũda magis multiplex est, vel maior pars, maioresue partes; quã ter-

tia quar-

tiaquarta: Vel certe cum prima secundam sapius continet, quam tertia quartam, siue eadem pars, aut partes vbicunque superfint, siue non; Vel cũ prima secundã toties continet, quoties tertia quartam, sed prima maiorem insuper partẽ, maioresue partes secunda includit, quam tertia quarta. Patuisset, inquam, Euclides ita definire magnitudines proportionales, ac non proportionales, si de solis rationalibus proportionibus ageret: quia omnes proportiones magnitudinum exhiberi possunt in numeris, ac proinde definiri, vt numerorum proportiones eadem, vel diuersa, vt diximus. Nam proportio numerorum (vt ex Campano, aliisque scriptoribus, defin. 24. lib. 7. adiunximus) est habitudo quadam vnius numeri ad alterum, secundum quod illius est multiplex, vel pars, parsue. Vel certe secundum quod illum continet semel, aut aliquoties, & aliquã insuper illius partem, vel partes. Quæ omnia perspicua sunt tum ex definitionibus quinque, specierum proportionis rationalis tam maioris inæqualitatis, quam minoris inæqualitatis, de quibus supra egimus, tũ ex ijs, quæ in defin. 20. & 24. lib. 7. scripsimus.

QVONIAM vero Euclides non solum proportiones Rationales, sed Irrationales etiam complecti voluit, non potuit eo modo quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales definire: propterea quod in proportione irrationali maior magnitudo neque multiplex esse potest minoris, neque eam semel aut aliquoties, & insuper aliquam eius partem aut partes continere: Minor item maioris neque pars esse potest, neque partes; quippe cum magnitudines irrationalem habentes proportionem incommensurabiles sint, ita vt nullam partem aliquotam communem, quamuis minimam, possint habere. Quo circa coactus est se se conuertere ad proportiones magnitudinum rationales, hoc est, ad proportiones numerorum, cũ omnis proportio rationalis, siue magnitudinum commensurabilium sit, vt proportio numeri ad numerum, vt lib. 10. propos. 5. demonstratur. Coactus, inquam, est inuestigare aliquid, quod certũ sit conuenire quibuslibet quatuor numeris siue magnitudinibus commensurabilibus, eandẽ habentibus proportionem, vel non eandem: adeo vt, si idem illud conue-

ntro. demonstretur quatuor magnitudinibus, etiam incommensurabilibus, sive optime magnitudines illæ quatuor proportionales etiam dici possint, vel non proportionales: quandoquidem eandem habent proprietatem, quam quilibet quatuor numeri proportionales, vel non proportionales, immo quam quælibet quatuor magnitudines commensurabiles eidem habentes proportionem, vel non eandem, necessario habere demonstratum. Neque enim aliunde cognoscere, vel explicare aliter possumus magnitudines incommensurabiles proportionales esse, aut non proportionales, nisi per aliquid, quod certum sit convenire, vt diximus; numeris quibuscunque, vel magnitudinibus commensurabilibus, eandem, vel non eandem habentibus proportionem, in quibus euidenter similitudo, dissimilitudoue proportionis cernitur. Quemadmodum quia quando in circulorum segmentis anguli æquales existentes, sunt commensurabiles quatuor rectis, hoc est, quando sunt eadem pars, vel eadem partes quatuor rectorum, sunt quoque ipsa segmenta eadem pars, vel eadem partes circulorum, vt ad finem lib. 6. demonstrabimus; vt merito similia appellentur, ac propterea & omnia segmenta alia, in quibus sunt anguli æquales, etiamsi non sint commensurabiles quatuor rectis, dicatur quoque similia: quandoquidem, quando anguli quatuor rectis commensurabiles sunt, vere illa segmenta similia sunt, hoc est, eadem partes circulorum, licet hoc in segmentis, quando anguli in eis existentes quatuor rectis sunt incommensurabiles, non cernatur: quod tunc segmenta neque eadem pars, neque eadem partes possint esse circulorum, sed ipsis circulis omnino incommensurabilia existant. Neque enim aliud indicium habere possumus, segmenta similia esse aut dissimilia, nisi angulorum in eis existentium æqualitatem, vel inæqualitatem, ex qua veram similitudinem, aut dissimilitudinem segmentorum circulis commensurabilium colligamus. Quam ob rem sicut nemo similitudinem harum segmentorum in dubium reuocat, quamquam hæc similitudo in segmentis, quæ circulis incommensurabilia sunt, non ita euidenter appareat, vt in segmentis, quæ circulis sunt commensurabilia; ita non recte fecerit, qui similitudinem proposita

num in

num in magnitudinibus incommensurabilibus in dubium venerit, quando competerit, illis conuenire, quod omnibus omnigenis magnitudinibus proportionem eandem rationalem habentibus conuenire certum sit, licet hac proportionum similitudo non tam euidens sit in magnitudinibus incommensurabilibus.

ITAQVE quoniam, propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij aequemultiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi ac quarti aequemultiplicibus secundum quamuis etiam multiplicationem, semper verum est, vt mox demonstrabimus, si multiplex primi maior est multiplice secundi, multiplicem tertij maiorem quoque esse necessario multiplicis quarti: Et si ille aequalis est, hunc quoque esse aequalem; & si minor, minorem: Et contra quia, propositis quatuor numeris, sumptisque aequemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem. item aequemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit, quam multiplex quarti: Et si illo existente aequali, hic quoque aequalis sit; & illo existente minore, hic similiter minor existat, perpetuo verum est, quatuor numeros esse proportionales: Rursus quia propositis quatuor numeris, quorum primus ad secundum maiorem proportionem habeat, quam tertius ad quartum, sumptisque aequemultiplicibus primi ac tertij, item aequemultiplicibus secundi ac quarti, necessario interdum accidit, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex vero tertij non sit maior multiplice quarti: Et contra quia quatuor propositis numeris, sumptisque aequemultiplicibus primi ac tertij, item aequemultiplicibus secundi ac quarti, si accidat nonnunquam, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, at multiplicem tertij non maiorem multiplice quarti, sine vlla dubitatione verum est, maiorem esse proportionem primi ad secundum, quam tertij ad quartum. Quoniam, inquam, ita se res semper habet in numeris, atq; adeò & in magnitudinibus commensurabilibus, ita vt contrarium

nunquam

nunquam inueniatur, non immerito dicentur quacunque quatuor magnitudines, etiam incommensurabiles, eandem habere proportionem, cum sumptis aquemultiplicibus prima ac tertia iuxta quamuis multiplicationem, item aquemultiplicibus secunda ac quarta secundum quamuis etiam multiplicationem, perpetuo deprehenditur, multiplicem tertia maiorem esse multiplice quarta, quotiescunque multiplex prima maior est multiplice secunda; multiplicem vero tertia aqualem esse multiplici quarta, quando multiplex prima aqualis est multiplici secunde; multiplicem denique tertia minorem esse multiplice quarta, hoc ipso, quod multiplex prima minor est multiplice secunde. Eadem ratione iure optimo dicentur quatuor quacunque magnitudines tã commensurabiles, quàm incommensurabiles, non habere eandem proportionem, sed maiorem esse proportionem primæ ad secundam, quam tertiæ ad quartam, cum, sumptis aquemultiplicibus, vt dictum est, interdum contingit, multiplicem prime esse maiorem multiplice secunde, multiplicem vero tertie non maiorem multiplica quarte; quandoquidem prior conditio in omnibus numeris proportionalibus, posterior autem in non proportionalibus perpetuo reperitur, vt iamiam demonstrabimus; nullumque aliud indicium habere possumus, quo magnitudines incommensurabiles cognoscantur esse proportionales, vel non proportionales; præsertim cum magnitudines incommensurabiles alijs magnitudinibus, quæ hoc modo proportionales esse demonstrantur, sæpenumero alia via ostendantur eandem habere proportionem, quam numerus ad numerum, vt nullo modo dubitandum sit, quin omnes magnitudines, etiam incommensurabiles, quarum aquemultiplices ita se habent, vt in 6. def. dictum est, sint proportionales, &c. Nisi enim hoc uerum esset, sequeretur haud dubie ex illa proportionalitate aliquando absurdum aliquod manifestum: quod tamen hactenus non accidit, sed potius ea, quæ ex magnitudinibus in eo sensu proportionalibus demonstrantur, verissima esse plerunque alia via, vt diximus, ostenduntur; vt posthac etiam demonstrabimus. Quæ cum ita sint, liquido constare existimo, cur Euclides in duabus illis defin. adhibuerit (& qui-

dem

dem recte) magnitudinum propositarum aquemultiplices magnitudines. Sed iam id, quod polliciti sumus, Geometrice demonstremus, adscitis nonnullis propositionibus lib. 7. quæ nullo modo ex 6. & 8. defin. aut ex demonstrationibus huius lib. 5. pendent, vt commodissime ante lib. 5. possint demonstrari; atque adeo hic assumi, vt iam demonstrata. Hoc autem efficiemus quatuor propositionibus, quæ sequuntur.

I.

PROPOSITIS quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunque etiã multiplicationem; si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit quoque multiplex tertij maior multiplice quarti; & si multiplex primi æqualis sit multiplici secundi, erit & multiplex tertij æqualis multiplici quarti; si denique multiplex primi sit multiplice secundi minor, erit & multiplex tertij multiplice quarti minor.

HABEAT numerus primus A, ad secundum B, eandem proportionem, quam tertius C, ad quartum D; sumanturque primi A, et tertij C, aquemultiplices E, F: Item secundi B, & quarti D, aquemultiplices G, H, qualiscunque hæc multiplicatio sit. Dico si E, multiplex primi A, maior est quam G, multiplex secundi B, maiorem quoque esse F,

mul-

E,9.	A,3.	C,6.	F,18.
G,4.	B, 2.	D,4.	H, 8.
E,18.	A,3.	C,6.	F, 36.
G,18.	B,2.	D,4.	H,36.
E,12.	A,3.	C,6.	F, 24.
G,14.	B,2.	D,4.	H,28.

multiplicē tertij C, quàm H, multiplicem quarti D. Et si E, æqualis sit ipsi G, æqualem quoque esse F, ipsi H. Si denique E, minor sit quàm G, minorem quoque esse F, quàm H. Quoniam enim est, vt A, ad B, ita C, ad D; a erit permutando etiam, vt A, ad C, ita B, ad D: b Vt autem A, ad C, ita est E, ad F; quòd idem numerus ipsos A, C, multiplicans produxerit ipsos E, F, quippe cum E, & F, ipsorum A, & C, sumpti sint æquemultiplices. Et eadem de causa, vt B, ad D, ita est G, ad H. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt E, ad F, ita G, ad H, c Et permutando, vt E, ad G, ita F, ad H. Quocirca si E, maior est quam G, erit quoque F, maior quàm H, vt in primo exemplo. Si vero F, æqualis est ipsi G, erit quoque F, ipsi H, æqualis, vt in secundo exemplo: Si denique E, minor est quàm G, erit quoque F, minor quàm H, vt in tertio exemplo. Quod erat demonstrandum.

a 13. septimi.
b 17. septimi.
c 13. septimi.

II.

PROPOSITIS quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, si sumantur æquemultiplices primi ac tertij, item æquemultiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit, quàm multiplex secundi, multiplex autem tertij non maior, quàm multiplex quarti.

HABEAT primus numerus A, ad secundum B, maiorem proportionem, quàm tertius C, ad quartum D. Dico fieri posse, vt sumptis aquemultiplicibus primi A, & tertij C, item aquemultiplicibus secundi B, & quarti D, multiplex ipsius A, primi sit maior quàm multiplex ipsius B, secundi, at multiplex ipsius C, tertij maior non sit, quàm multiplex ipsius D, quarti. Multiplicantes enim se mutuo numeri B, D, faciant E. Et quoniam D, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur genitum ex C, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque D, eundem genitũ ex C, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur D, genitum ex C, in E, per F; fietque propterea ex D, in F, numerus, quem D, per F, metitur, ex pronun. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex C, in E. Quia igitur idem numerus gignitur ex D, primo in F, quartum, qui ex C, secundo fit in E, tertium, a erit vt D, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad F, quartum: Et conuertendo, vt C, ad D, ita F, ad E.

K, 56.	H. 7		O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.		A, 3.	C, 4.
	E, 6.		B, 2.	D, 3.
M, 54	N, 6.		P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.		O. 60	I, 20.
F, 8.	G, 22.		A, 3.	C, 1.
	E, 80.		B, 8.	D, 10.
M, 160	N, 80.		P, 24.	L, 39.

a 19. septimo.

RVRSVS quia B, metitur E, ex pronunc. 7. lib. 7. & E, metitur procreatum ex A, in E, ex eodem pronunciato; metietur quoque B, eundem procreatum ex A, in E, ex pronunc. 11. lib. 7. Metiatur B, procreatum ex A, in E, per FG, fietque idcirco ex B, in FG, numerus, quem B, metitur per FG, ex pronunc. 9. lib. 7. hoc est, numerus idem, qui fit ex A, in E. Quia igitur idem numerus ex B, primo in FG, quartum, & ex A, secundo in E, tertium gignitur, b erit vt B, primus ad A, secundum, ita E, tertius ad FG, quartum: Et conuertendo, vt A, ad B, ita FG, ad E. Quoniã ergo est, vt FG,

b 19. septimi.

ad

ad E, ita A, ad B; Est autem proportio A, ad B, posita maior, quàm C, ad D; erit quoque proportio FG, ad E, maior quàm C, ad D: Ostensum autem est, esse vt C, ad D, ita F, ad E. Igitur proportio FG, ad E, maior quoque erit proportione F, ad E, ac proinde numerus FG, maior erit numero F: quæ omnia ex ijs, quæ in defin. 20. lib. 7. scripsimus, perspicue consequuntur. Superet igitur FG, ipsum F, numero G.

SVMANTVR iam ipsorum F, G, C, aque multiplices K, H, I, ea lege, vt H, sit quidem maior quàm E, at I, non minor quàm D, eritque ex scholio propos. 5. lib. 7. totus KH, ita multiplex totius FG, vt est multiplex K, ipsius F, vel I, ipsius C. Sumantur rursus ipsorum D, E, aquemultiplices L, M N, ea lege, vt L, sit multiplex ipsius D, proxime maior quàm I; hoc est, tales aque multiplices, vt subtracto numero D, ex L, reliquus numerus maior non sit, quàm I, sed vel aqualis, vt in secundo exemplo, vel minor, vt in primo exemplo contingit. Et quoniã ostensum est ita esse D, ad C, vt E, ad F; & ita est C, ad I, vt F, ad K, ex cõstructione, quòd I, K, sumpti sint ipsorum C, F, aquemultiplices; a erit quoque ex aquo, vt D, ad I, ita E, ad K.

a 14. septimi.

K, 56.	H. 7.		O, 21.	I, 28.
F, 8.	G, 1.		A, 3.	C, 4.
	E, 6.		B, 2.	D, 3.
M, 54	N, 6.		P, 20.	L, 30.
K, 160.	H, 440.		O. 60	I, 20.
F, 8.	G, 22.		A, 3.	C, 1.
	E, 80.		B, 8.	D, 10.
M, 160.	N, 80.		P, 24.	L, 39.

PRAETEREA quoniam ostensum est esse D, ad C, vt E, ad F; erit permutando quoque, D, ad E, vt C, ad F. Vt autem D, ad E, ita est L, ad M N; quòd idem numerus ipsos D, E, multiplicans fecerit L, M N, quippe cum L, M N, sumpti sint ipsorũ D, E, aquemultiplices: Et eadem de causa, vt C, ad F, ita est I, ad K. Igitur ex lemmate propos. 14. lib. 7. erit quoque, vt L, ad M N, ita I, ad K, &

permu-

permutando, vt L, ad I; ita M N, ad K.

QVIA ergo est, vt totus L, ad I, ita totus M N, ad K: Et vt D, ex L, ablatus ad eundem I, ita E, ex M N, ablatus ad eundem K; erit quoque ex theor. 6. scholij propos. 22. lib. 7. vt reliquus ex L, ad I, ita reliquus ex M N, ad K: Est autem reliquus ex L, non maior quàm I, sed vel minor, vt in priori exemplo, vel aqualis, vt in posteriori; propterea quòd reliquus ex L, cum D, facit ipsum L, multiplicem ipsius D, proxime maiorem ipso I, ex constructione. Igitur & & reliquus ex MN, maior non erit quàm K; atque idcirco si ex MN, detrahatur N, ipsi E, aqualis, erit reliquus M, vel minor ipso K, vt in priori exemplo, vel aqualis, vt in posteriori. Cum ergo H, multiplex ipsius G, sit maior quàm E, vel N, ex constructione; erit totus KH, toto MN, maior.

DENIQVE sumpto O, ita multiplici ipsius A, vt KH, multiplex est ipsius FG, vel I, ipsius C: Item P, ita multiplici ipsius B, vt MN, multiplex est ipsius E, vel L, ipsius D: quoniam ostensum est, ita esse FG, ad E, vt A, ad B, sumptique sunt ipsorum FG, & A, primi ac tertij, aquemultiplices K H, & O; item ipsorum E, & B, secundi ac quarti aquemultiplices M N, & P, sequitur ex antecedente propos. si KH, maior est quam M N, ipsum quoque O, maiorem esse quàm P. Cum ergo KH, ostensus sit maior quàm M N, erit quoque O, maior quàm P. Quocirca cum O, I, sint aquemultiplices ipsorum A, C, primi ac tertij; & P, L, aquemultiplices ipsorum B, D, secundi ac quarti, demonstratumque sit, maiorem esse O, quàm P, sit autem I, minor quàm L, ex constructione; fieri potest, vt existente maiore proportione primi A, ad secundum B, quàm tertij C, ad D, quartum, sumptisq; aquemultiplicibus, vt dictum est, multiplex primi, nimirum O, maior sit quàm P, multiplex secundi, multiplex autem tertij, nimirum I, maior non sit quàm L, multiplex quarti. Quod demonstrandum erat.

QVOD si minor sit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, sumanturque aquemultiplices primi ac tertij, item aquemultiplices secundi ac quarti, fieri quoque potest, vt nonnunquã multiplex primi sit minor multiplice

secundi

secũdi, multiplex vero tertij nõ sit multeplice quarti minor.

IN eodem enim exemplo, minor est proportio C, primi ad D, secundum, quam A, tertij ad B, quartum, demonstratumque est, I, multiplicem primi C, minorem esse, quam L, multiplicem secundi D, at O, multiplicem tertij A, maiorem esse quam P, multiplicem quarti B.

III.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque æquemultiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æquemultiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationem, si multiplice primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessario, quam multiplex quarti: & illo existente æquali, hic quoque semper sit æqualis; illo denique existente minore, hic quoque perpetuo minor sit: erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum.

E, 9	A, 3 | C, 6	F, 18
G, 4	B, 2 | D, 4	H, 8
E, 18	A, 3 | C, 6	F, 36
G, 18	B, 2 | D, 4	H, 36
E, 12	A, 3 | C, 6	F, 24
G, 14	B, 2 | D, 4	H, 28

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumanturque primi A, & tertij C, æquemultiplices quæcunque E, F. Item secundi B, & quarti D, æquemultiplices G, H, qualescunque etiam hæc sint multiplicatio. Dico si E, F, multiplices primi ac tertij semper sint vel maiores, quam G, H, multiplices secundi & quar-

ti s vel

ti, vel æquales, vel minores, ita esse A, primum ad B, secundum, vt C, tertium ad D, quartum. Si namque foret maior proportio A, ad B, vel minor, quàm C, ad D, fieri posset, vel vti in antecedente propos. demonstratum est, vt E, multiplex primi esset aliquando maior, aut minor, quàm G, multiplex secundi, at F, multiplex tertij non maior, aut minor quàm H, multiplex quarti. Quod est contra hypothesin. Est ergo A, ad B, vt C, ad D. Quod erat ostendendum.

IIII.

PROPOSITIS quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æquemultiplicibus, item secundi & quarti æquemultiplicibus; si quando contingat, multiplicem primi maiorem esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij non maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, sumptisque ipsorum A, & C, primi ac tertij æquemultiplicibus E, & F, item ipsorum B, & D, secundi ac quarti æquemultiplicibus G, & H, sit E, multiplex primi A, maior quàm G, multiplex secundi B, at F, multiplex tertij C, nō maior quàm H, multiplex quarti D. Dico maiorē esse proportionē primi A, ad B, secundū, quàm C, tertij ad D, quartū. Quoniam enim maior est E, quàm G, at F, nō maior quàm H, erit maior proportio E, ad G, quam F, ad H, cum illa sit proportio maioris inæqualitatis, hæc vero vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Igitur ex theor. 10. propos. 22. lib. 7, erit quoque permutando maior proportio E, ad F, quam G, ad H. 2 Est autem, vt E, ad F, ita A, ad C, 2 17. sequod *idem numerus ipsos A, C, multiplicās procreauerit E, ptimi.*

E, 21.	A, 3.	C, 4	F, 28
G, 20.	B, 2.	D, 3.	H, 30.

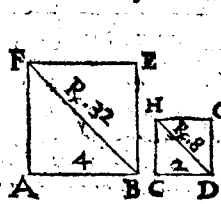
& F; quippe cum E, F, æquemultiplices sint ipsorum A, C; Eademque de causa est, vt G, ad H, ita B, ad D. Maior igitur erit quoque proportio A, ad C, quàm B, ad D: Et permutando, ex theor. 10. propos. 22. lib. 7. maior erit etiam proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod ostendendum erat.

QVOD si multiplex primi sit minor multiplice secundi, sed multiplex tertij non sit minor multiplice quarti; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum.

E, 28.	A, 4.	C, 3.	F, 21.
G, 30.	B, 3.	D, 2.	H, 20.

EADEM enim omnino demonstratio est, si pro maiore proportione dicatur vbique minor proportio, nulla alia re mutata. Vt in hoc exemplo apparet, vbi quatuor numeri sunt A, B, C, D, & E; multiplex primi A, minor est quàm G, multiplex secundi B, sed F, multiplex tertij C, minor non est, quàm H, multiplex quarti, &c.

SED demonstremus iam, in magnitudinibus, quæ aliis incommensurabiles sunt, & quæ ex defin. 6. proportionales sunt, eam plerunque reperiri proportionem, quæ in numeris exhiberi possit: adeo vt vere proportionales sint magnitudines, quibus definitio 6. conuenit, quandoquidem ex magnitudinibus proportionalibus in eo sensu sumptis verum consequitur, & nihil absurdi inde inferri potest. Hoc enim paulò ante demonstraturos nos etiam recepimus. Sit ergo recta AB, verbi gratia, rectæ CD, dupla, et super ipsas rectas describãtur quadrata ABEF, CDGH, cũ diametris BF, DH. Et quia ex scholio propos. 47. lib. 1. tam quadratum diametri BF, quadrati lateris AB, hoc est, quadrati ABEF, quã quadratũ diametri DH, quadrati lateris CD, hoc est, quadrati CDGH, duplum est; si ponatur latus AB, 4. & latus CD, 2. erit quadratum ABEF, 16. & quadratum diametri BF, eius duplum, 32. ac proinde diameter ipsa BF, erit radix quadrata numeri 32. quæ numeris expri-



mi

mi nequit, cum ea maior sit quàm 5. minor autem quàm 6. nullusque numerus inter 5. & 6. medius, hoc est, compositus ex 5. & fractione aliqua unitatis, in se ductus possit numerum integrum 32. producere, vt ex Lemmate sequenti perspicuum fiet. Quadratum autem GDGH, erit 4. & quadratum diametri DH, eius duplum, 8. ac proinde diameter ipsa DH, erit radix quadrata numeri 8. quæ numeris etiam exprimi nequit, cum ea maior sit quàm 2. minor autem, quàm 3, &c. ita vt proportio tam AB, ad BF, quàm CD, ad DH, sit irrationalis, diameterque propterea BF, lateri AB, & diameter DH, lateri CD, incommensurabilis. Vides igitur, id quod Euclides propos. vltima lib. 10. demonstrauit ex ijs, quæ lib. 6. de magnitudinibus proportionalibus per defin. 6. huius 5. lib. demonstrata sunt, Diametrum nimirum quadrati lateri eiusdem quadrati esse incommensurabilem, esse re ipsa verissimum, quippe cum idem nos alia via sine proportionibus hoc loco ostenderimus.

RVRSVS quoniam diametri BF, DH, diuidunt angulos rectos quadratorum bifariam, vt in scholio propos. 34. lib. 1. & in coroll. 2. propos. 4. lib. 2. ostendimus, erunt anguli ABF, AFB, CDH, CHD, semirecti, ideoque inter se æquales. Cum igitur & recti anguli A, C, sint æquales, æquiangula erũt triangula ABF, CDH. Quare 2 erit, vt AB, ad BF, ita CD, ad DH; Et permutando, vt AB, ad CD, ita BF, ad DH. Est autem posita recta AB, rectæ CD, dupla. Igitur & BF, ipsius DH, dupla erit. Itaque cum ex defin. 6. huius lib. eo deducti simus, vt credamus diametrum BF, diametri DH, esse duplam, quamuis vtraque diameter ad suum latus habeat proportionem irrationalem, (Num propos. 4. lib. 6. ex qua ostendimus, ita esse AB, ad BF, vt CD, ad DH, pendet ex propos. 2. & hæc ex 1. eiusdem lib. 6. Prima autẽ propos. lib. 6. vim suam accipit ex defin. 6. huius 5. lib. Item permutata proportio, qua hic etiam vsi sumus, sine eadem defin. 6. demonstrari non potest in magnitudinibus incommensurabilibus, vt ex propos. 16. lib. 5. constat.) videamus, an aliunde cognoscere possimus, diametrum BF, diametri DH, vere duplam esse, vt ex defin. 6. conclusum est, hoc ipso, quòd latus AB, lateris CD, duplum ponitur, etiamsi proportio tã

2 4. sexti.

lateris AB, ad diametrum BF, quàm lateris CD, ad diametrum DH, irrationalis sit. Hoc autem sine proportionibus facile ita cognoscemus. Quoniam latus AB, lateris CD, duplum est, erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum AE, quadrati CG, quadruplum. Posito ergo quadruto AE, 4. erit quadratum CG, 1. Et quia tam quadratum diametri BF, quadrati AE, quàm quadratum diametri DH, quadrati CG, ex scholio propos. 47. lib. 1. duplum est; erit quadratum diametri BF, 8. & quadratum diametri DH, 2. atque idcirco illud huius quadruplum erit. Quocirca ex scholio propos. 4. lib. 2. recta BF, rectæ DH, dupla erit. Vides ergo rursus, si procedamus per ea, quæ ex defin. 6. huius lib. de magnitudinibus proportionalibus demonstrata sunt, nos peruenisse ad cõclusionem veram, nimirum diametros duorum quadratorum sum habere proportionem inter se duplam, si latus vnius sit lateris alterius duplum: vt dubium non sit, quin magnitudines verè proportionales sint, quarum æque multiplicia eam conditionem habẽt, quam definitio 6. præscribit. Porrò ex regulis quoque numerorum irrationalium, quæ in Algebra traduntur, constat diametrum BF, hoc est, R. 32. habere duplam proportionem ad diametrum DH, id est, ad R. 8. Nam sine R. 32. dimidatur per R. 8. Quotiens fit R. 4. hoc est, numerus 2. qui proportionem diametri BF, ad diametrum DH, denominat; sine R. 8. multiplicetur per 2. producitur R. 32. Atque hoc modo omnia, quæ de magnitudinum incommensurabilium proportionibus demonstrantur ex defin. 6. huius lib. explicari poterunt per regulas numerorum irrationalium. Quæ res argumento rursum est, magnitudines, quibus definitio 6. huius lib. conuenit, vere esse proportionales; quandoquidem calculus numerorum irrationalium cum demonstrationibus, quæ ex ea defin. pendent, perpetuo consentire comperitur, vt ijs, qui in Algebra præceptis versati sunt, notissimum est.

LEMMA.

QVOD autem nullus numerus compositus ex

5. & fractione aliqua vnitatis, quamuis vnitas in infinitũ secetur, gignere possit integrũ numerũ 32. hoc modo facile demonstrabimus. Sit enim numerus 5. cum quacunque fractione $\frac{1}{7}$. hoc modo $5\frac{1}{7}$. reuoceturque, vt in Arithmetica tradidimus, ad hanc vnicam fractionem $\frac{36}{7}$. Certum autem est, denominatorem 7. non metiri numeratorẽ 38. Alioquin diuisis 38. per 7. fieret Quotiẽs numerus integer sine fractione, quod est contra hypothesin. Multiplicetur iã fractio $\frac{36}{7}$. in se, (quod fiet, vt in Arithmetica diximus, demonstrabimus q; ad finẽ lib. 9. si tã numerator 38. in se, quã denominator 7. in se ducatur.) gignaturq; fractio $\frac{1444}{49}$. ita vt numerator huius 1444. sit quadratus numeratoris illius 38. & denominator 49. quadratus denominatoris 7. Et quia latus 7. non metitur latus 38. vt ostendimus, a non metietur quoque quadratus 49. quadratũ 1444. Quare diuiso quadrato 1444. per quadratũ 49. quotiẽs non erit numerus integer, sed ei adhærebit fractio aliqua. Alias quadratus 49. metiretur quadratũ 1444. cuius contrariũ demonstrauimus. Atq; eadẽ ratione demonstrabitur, quẽcunque numerũ integrum cũ fractione qualibet in seipsum ductũ gignere numerũ integrũ cum fractione. Quòd si fractio, cuius numerator denominatore minor sit, in se ducatur, producetur sẽper fractio, cuius numerator ẽt minor ẽ denominatore. Nã cũ numerator fractionis producta sit numerus quadratus numeratoris datæ fractionis, denominator aũt quadratus numerus denomina-

a 16. 8. Euan.

toris, si aũt datæ fractionis numerator minor denominatore, erit quoq; illius quadratus numerus quadrato huius minor. Ita ex $\frac{2}{3}$ in se gignitur fractus numerus $\frac{4}{9}$. cuius numerator denominatore minor est. Itaque quæcunque fractio in se multiplicata gignit numerum non integrum, nisi quando numerator datæ fractionis à denominatore numeratur, sed ea fractio numerus integer potius est: qualis est fractio $\frac{200}{25}$. quæ 4. integras vnitates constituit.

IX.

PROPORTIO autem in tribus terminis paucissimis consistit.

QVONIAM omnis Analogia, seu proportionalitas, quam interpres, vt dictum est, proportionem nominat, similitudo est duarum, vel plurium proportionum; omnis autẽ proportio habet & antecedentem terminum, & consequentem, necesse est, in omni proportionalitate reperiri, vt minimum, duos terminos antecedentes, ac duos consequentes.

Quare si proportionalitas fuerit non continua, requirentur saltem quatuor termini, siue magnitudines; At vero si fuerit cõtinua, erunt cum minimum tres termini; quoniam terminus medius bis sumitur, cum sit consequens terminus vnius proportionis, & antecedens alterius: Atque hic est minimus numerus terminorum proportionalitatis. Nam in duobus terminis quibuscunque solum proportio, non autem proportionalitas reperitur.

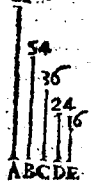
X.

CVM autem tres magnitudines proportionales fuerint; Prima ad tertiam

dupli-

duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines proportionales fuerint; prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundam: Et semper deinceps, vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

VELVTI si sint magnitudines A,B,C,D,E, continuo proportionales, ita vt ea sit proportio A, ad B, qua B, ad C; & C, ad D; & D, ad E: proportio A, magnitudinis prima ad C, magnitudinem tertiam, dicitur duplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quoniam inter A, & C, duæ proportiones reponuntur, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B, & B, ad C, vt propterea proportio A, ad C, intercipiat quodãmodo proportionem A, ad B, duplicatam, id est, bis ordine positam. At proportio A, magnitudinis prima ad D, magnitudinem quartam, dicitur triplicata eius proportionis, quam habet A, magnitudo prima ad B, magnitudinem secundam: quia inter A, & D, reperiuntur tres proportiones, quæ æquales sunt proportioni A, ad B; nimirum proportio A, ad B; B, ad C; & C, ad D, atque idcirco proportio A, ad D, includit quodammodo proportionẽ A, ad B, triplicatam, id est, ter ordine positam. Sic quoque proportio A, ad E, dicitur quadruplicata proportionis A, ad B: propterea quod quatuor proportiones interijciuntur inter A, & E, quæ æquales sunt proportioni A, ad B, &c.



QVOD si e contrario ea sit proportio E, ad D, qua D, ad C; & C, ad B; & B, ad A; dicetur proportio E, ad C, duplicata proportionis E, ad D; At vero proportio E, ad B, dicetur triplicata proportionis E, ad D; sic quoque proportio E, ad A, dicetur quadruplicata proportionis E, ad D, &c.

INTERPRETES nonnulli colligunt ex hac diffinitione, si proponantur plures quantitates continuo proportionales, proportionem prima quantitatis ad tertiam, esse duplam proportionis prima quantitatis ad secundam, eo quod Euclides illam vocet duplicatam proportionem huius. Eodem modo volunt, proportionem prima quantitatis ad quartam, esse triplam proportionis, quam habet prima quantitas ad secundã, &c. Quod tamen nulla est ratione concedendum. Neque enim Euclides hoc significare voluit, sed docuit tantummodo, proportionem prima quantitatis ad tertiam, appellari duplicatam eius proportionis, quam habet prima quantitas ad secundam; propterea quod inter primam quantitatem, ac tertiam reperitur quodammodo proportio primæ quantitatis ad secundam duplicata; quippe cum inter primam quantitatem, ac tertiam interponantur duæ proportiones æquales ei proportioni, quam habet prima quantitas ad secundam, & sic de cæteris, vt diximus. Non autem intelligit, illam duplam esse huius, ne Theorema proponeret, quod merito quispiam concedere recusaret. Quis enim affirmabit, in his numeris continue proportionalibus 25. 5. 1. proportionem 25. ad 1. duplam esse proportionis 25. ad 5. cum potius eam quis dixerit esse quintuplam? At vero, illam dici huius duplicatam ad sensum expositum, nemo inficiabitur, eo quod bis sit posita, & continue, proportio 25. ad 5. Deinde quo modo erit proportio 1. ad 25. dupla proportionis 1. ad 5. cum illa minor sit, hæc autem maior? Nam per propos. 8. huius lib. quantitas 1. ad quantitatem 5. maiorem proportionem habet, quam ad quantitatem 25; propterea quod 25. maior est, quam 5. Dicetur tamen illa huius duplicata, ob causam tam explicatam, licet sit eius quinta pars. Quare erit proportio 25. ad 1. dicitur duplicata proportionis quincuplæ; tamen decupla proportio est eiusdem dupla. Quemadmodum etiam proportio octupla dupla est proportionis quadruplæ, cũ tamen quadrupla duplicata sit sedecupla, vt hic patet 16. 4. 1. Deniq; in tribus magnitudinibus æqualibus, vel in tribus æqualibus numeris, 4. 4. 4. atque adeo continue proportionalibus, qui fieri potest, vt proportio primi ad tertiũ dupla sit propor-

tionis

tionis primi ad secundum, cum sit omnino eadem? duplicata tamen dicetur illa huius, propterea quod hac ordine bis posita est continue inter primum numerum & tertium.

SED auctores, qui proportionem prima quantitatis ad tertiam volunt esse duplam proportionis, quam prima quantitas habet ad secundam, (inter quos auctores est etiam Federicus Commandinus hoc loco: quod valde miror, cum alioquin Mathematicus sit praestantissimus) dicunt in hac defin. requiri terminos inaequales, primamque debere esse maiorem; ita vt definitio haec intelligenda sit necessario de proportione continua maioris inaqualitatis. Quare mirum non est, vt aiunt, neque proportionem 1. ad 25. proportionis 1. ad 5. neque proportionem 4. ad 4. proportionis 4. ad 4. duplam esse. Verum haec expositio non solum vera non est, sed Euclidi prorsus est contraria: quippe qui assumat plerisque in locis, triplicatam proportionem reperiri in proportione minoris inaqualitatis. Locus clarissimus est, vt alios omittam, in propos. 12. lib. 12. vbi demonstrat, similes conos, & cylindros in triplicata rõne esse diametrorum, qua in basibus. Nam si referatur maior conus, vel cylindrus ad maiorem; necessario in secunda parte eius demonstrationis, assumit Euclides demonstratum esse propos. 8. eiusdem lib. 12. pyramides similes, etiamsi minor ad maiorem referuntur, in triplicata esse homologorum laterum ratione; vt eo in loco annotauimus. Huc accedit, propositiones illas, in quibus figura aliqua demonstrãtur habere rationem laterum homologorum duplicatam, vel triplicatã, cuiusmodi est 19. & 20. lib. 6. & 11. 12. 18. 19. lib. 8. & 33. lib. 11. & 12. 18. lib. 12. non fere vniuersales, si solum de proportione maioris inaqualitatis essent intelligenda. Explicanda ergo est haec definitio, vt nos expositimus.

ITAQVE hoc loco Euclides explicat tantum, quidnam intelligendum sit nomine proportionis duplicatae, triplicatae, &c. vt demonstrationes sequentium librorum percipiantur, rebusque possint materialibus accommodari. Non autem determinat, quanam proportio sit alterius dupla, vel triplae, vel quadrupla, &c. Exempli gratia, quoniam ex propositione 20. lib. 6. constat, proportionem quadrati ad quadratum

duplicatam

duplicatam esse proportionis, quam habet latus prioris quadrati ad latus posterioris, colligendum erit, si continuetur proportio laterum in tribus terminis, proportionem quadrati ad quadratum, esse eam, qua est primi termini ad tertium; ita vt si prioris quadrati latus fuerit trium palmorum, posterioris autem vnius palmi, prius quadratum ad posterius, habeat proportionem quam 9. ad 1. ita vt illud nouies hoc complectatur. Nam proportio 9. ad 1. qua est noncupla, dicitur iuxta hanc definitionem, duplicata proportionis tripla, qualis est 9. ad 3. vel 3. ad 1. vt in his numeris 9. 3. 1. perspicuum est. Non autem inferendum erit, proportionem quadrati ad quadratum, duplo esse maiorem proportione lateris ad latus. Sic etiam quadratum posterius ad prius proportionem habebit, quam 1. ad 9. ita vt illud sit huius nona pars, propterea quod proportio 1. ad 9. dicitur duplicata proportionis 1. ad 3. vt in eisdem his numeris 1. 3. 9. manifestum est. Simili ratione, quoniam lib. 12. propos. vltima, demonstratur spheras inter se rationem habere suarum diametrorum triplicatam, colligendum erit, sphæram illam, cuius diameter continet tres palmos, ad sphæram, cuius diameter est vnius palmi tantum, proportionem habere quam 27. ad 1. Hæc enim triplicata dicitur tripla proportionis, vt hic apparet. 27. 9. 3. 1. &c. Sic etiam propositis duabus spharis, quarum diametri proportionem habent decuplam, habebunt sphæra ipsa proportionem millecuplam, cum hæc sit decupla triplicata, vt hic patet, 1000. 100. 10. 1. Quis autem dixerit vnquam, millecuplam proportionem esse triplo tantummodo maiorem proportione decupla, & non potius trigecuplam decupla esse triplam?

CAETERVM proposita quacunque proportione rationali, si eius denominator in se ipsum multiplicetur, exurget denominator proportionis, quæ duplicata dicitur proposita proportionis. Vt quia ex multiplicatione 4. denominatore scilicet proportionis quadruplæ, in se, producitur 16. ideo proportio sedecupla dicetur duplicata quadruplæ proportionis, vt hic cernitur 16. 4. 1. Item hic 48. 12. 3. E contrario, cum ex multiplicatione $\frac{1}{4}$. denominatore videlicet proportionis sub quadruplæ, in se, producatur $\frac{1}{16}$. dicetur proportio subse-

decupla

decupla, duplicata proportionis subquadrupla. Quod si denominator rursus in illud productum multiplicetur, procreabitur denominator proportionis triplicatæ: ut in priori exemplo, ex multiplicatione 4. in 16. producuntur 64. denominator proportionis, quæ quadrupla dicitur triplicata, ut hic vides, 64. 16. 4. 1. Item hic 192. 48. 12. 3. Rursus si in posterius hoc productum multiplicetur idem denominator, inuenietur denominator proportionis quadruplicatæ, atque ita de cæteris. Itaque proportionis duplicatæ denominator producitur ex denominatore propositæ proportionis bis posito, atq; ita multiplicato. Vt numerus denominans proportionem duplicatã proportionis triplæ, producitur ex 3. denominatore triplæ proportionis bis posito, in hunc modum 3. 3. ac sic multiplicato: Nam ter tria faciunt 9. denominatorem noncuplæ proportionis, quæ duplicata dicitur triplæ, ut hic cerni potest 9. 3. 1. Item hic 18. 6. 2. At vero denominator proportionis triplicatæ gignitur ex proposita proportionis denominatore ter posito, & sic multiplicato. Vt in dato exemplo, denominator triplicatæ proportionis, nempe 27. procreatur ex 3. ter posito sic 3. 3. 3. atque ita multiplicato, dicēdo ter tria ter, &c. Ita proportio quadruplicata exoriētur ex denominatore quater posito. Quintuplicata ex eodē quinquies posito, atque ita multiplicato, &c. Itaque duplicatio, triplicatio, quadruplicatio, etc. proportionis cuiuslibet, de qua in hac desi. agitur, nihil aliud est, quã multiplicatio denominatorũ proportionũ intermediarũ inter se. Ex hac enim multiplicatione creatur denominator proportionis, quam extremi termini inter se habent, qua propterea illius proportionis, cuius denominator multiplicatus est, duplicata dicitur, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. prout. videlicet denominator bis positus est, vel ter, vel quater, &c. atque sic multiplicatus fuit, vt exposuimus. Verbi gratia, propositis hisce quatuor numeris continue proportionalibus in proportione quadru-

Denominatores	4	4	4	
Num. propor.	192	48	12	3

pla, primus 192. ad quartum 3. proportionẽ habet denominatum 64. qua proportio dicitur triplica-

ta proportionis quadruplæ: quia denominator 64. proportionis extremorum 192. & 3. producitur ex denominatore 4. proportionis quadruplæ ter posito, ob tres proportiones quadruplas inter extremos interiectas, atque ita multiplicato, dicenda quater quatuor sunt 16. & quater 16. sunt 64. Sic etiam inuersis ijsdem numeris, vt sint continuæ proportionales in proportione subquadruplæ, primus 3. ad quartum 192. proportionem habet denominatam à $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. qua proportio dicitur triplicata proportionis subquadruplæ: quia denominator $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. proportionis primi numeri 3. ad quartum 192. producitur ex denominatore $\frac{1}{4}$ proportionis subquadruplæ ter positi, & sic multiplicato, ob tres proportiones subquadruplas inter extremos interpositas. Nam ex $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. & ex $\frac{1}{1}\frac{1}{6}$. in $\frac{1}{4}$. fit $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. Nihil obstat ergo, quo minus proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. denominata dici possit triplicata proportionis subquadruplæ 3. ad 12. quanquam illa minor sit, quam hæc: quia videlicet denominator $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. productus est ex denominatore $\frac{1}{4}$. ter posito, & sic multiplicato, vt diximus. Non tamen proportio 3. ad 192. à $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. denominata dici potest triplo maior proportione subquadruplæ 3. ad 12. quia denominator $\frac{1}{4}$. triplicatus non facit denominatorem $\frac{1}{6}\frac{1}{4}$. sed $\frac{3}{4}$ atque ita proportio subsesquitertia dicetur tripla proportionis subquadruplæ: sicut etiam non proportio à 64. denominata, sed proportio duodecuplæ, est proportionis quadruplæ triplæ; propterea quod denominator 4. triplicatus non producit denominatorem 64. sed 12. Porro continuatis quotcunque numeris proportionalibus, siue maiores cum minoribus, siue minores cum maioribus conferantur, denominatorem proportionis primi ad vltimum gigni ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis, demonstrabimus ad defin. 5. lib. 6. Proportionem autem aliquam tum primum esse alterius duplam, vel triplam, &c. cum illius denominator huius denominatoris duplus est, vel triplus, &c. ita vt proportio decupla sit duplæ quintuplæ, & sextupla sit

Denominatores	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
Num proport.	3	12	48	192

tripla

tripla dupla, &c. ostendemus ad finem lib. 9. tractatumq. est hoc argumentum copiose à Rodulpho Volumnio in Disputatione de proportione proportionum. Nunc satis sit, hoc ipsum communi hominum iudicio ex sensibilibus rebus confirmare. Si igitur Agens aliquod ad Patiens proportionem habeat verbi gratia decuplam, ita vt Agens sit 10. & Patiens 1. quis tam mente captus erit, qui non statim intelligat, si idem Agens augeatur, vt fiat 20. Patiens autem maneat 1. Agens tunc duplo maiorem habere potentiam respectu eiusdem Patientis, quàm prius? Quare proportio vigecupla, cuius denominator 20. duplus est denominatoris 10. dupla est proportionis decupla, non autem proportio centupla, vt auctores contraria sententia volunt. sed tamen hac proportio centupla dicetur duplicata proportionis decuplæ propter multiplicationem denominatoris 10. in se, & propter duas proportiones decuplas, quæ inter numeros centuplã proportionẽ habentes interijciuntur, vt hic apparet, 100, 10: 1. Sic etiã si e contrario, Agens aliquod ad Patiens habeat proportionem verbi gratia subdecuplam, ita vt Agens sit 1. & Patiens 10. quis tam hebes fuerit, ac rudis, qui non intelligat, Agens, quod sit 2. duplo esse potentius respectu eiusdẽ Patientis 10. quàm Agens 1. Cũ ergo Agens 2. ad Patiens 10. habeat proportionẽ subquintuplã, cuius denominator $\frac{1}{5}$. vel $\frac{2}{10}$. conflatur ex denominatore $\frac{1}{10}$ bis sumpto, erit profecto proportio subquintupla proportionis subdecuplæ dupla, non aũt illa, quæ subcẽtupla est, vt prædicti auctores volunt, cũ hac longe minor sit, quã subdecupla. Dicetur tamẽ proportio subcẽtupla proportionis subdecuplæ duplicata, propter causã sæpius explicatã, vt his patet, 1. 10. 100.

EX his, quæ diximus, non obscure colligi potest, proportionem duarum quantitatum, quibus nullum interponitur medium, sapere naturam quodammodo linea, cum ex nulla alia proportione producatur: Proportionem vero, cuius quantitates intercipiunt vnicum medium in continua proportionalitate, habere conditionem superficiei quadratæ, quoniam gignitur ex duabus proportionibus æqualibus; quemadmodum & quadratum ex duabus lineis æqualibus conficitur. Denique proportionem, cuius quan-

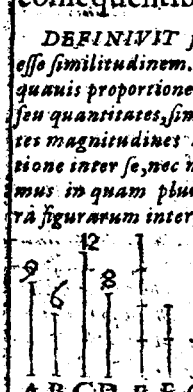
titatibus

titatibus duo media in continua proportionalitate interijciuntur, obtinere naturam solidi, atque adeo cubi, cum oriatur ex tribus aequalibus proportionibus, quemadmodum etiã cubus ex tribus lineis aequalibus consurgit. Verum de his plura inuenies apud Arithmeticos, qui Algebra regulam exposuerunt.

XI.

HOMOLOGAE, seu similes ratione magnitudines, dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.

DEFINIVIT supra proportionalitatem, proportionum esse similitudinem. Docet iam, non solũ in proportionalitate quauis proportiones dici similes; Verũ etiam terminos ipsos, seu quantitates, similes dici, homologasve; dicens, antecedentes magnitudines appellari homologas, seu similes proportione inter se, nec non consequentes inter se, vt intelligeremus in quam plurimis demonstrationibus, quanam latera figurarum inter se comparata, antecedentia debeant esse



proportionum, & quanam consequentia, vt in 6. lib. perspicuum fiet. Si igitur est proportio A, ad B, quæ C, ad D; dicetur quantitas A, similis quantitati C; & B, similis ipsi D. Propter similitudinem enim proportionum, necesse est, vtramque magnitudinem antecedentem vel aequalem esse vtrique consequenti, vel eodem modo maiorem, aut minorem: Alias non haberet vtraque antecedens ad vtramque consequentem proportionem eandem. Exemplum habes in magnitudinibus propositis, in quibus antecedentes maiores sunt eodem modo consequentibus, vtpote dimidio maiores. Aliud exemplum vides in magnitudinibus E, F, G, continue proportionalibus, vbi tam E, & F, homologæ sunt, quam F, & G; vt constat. Atque hanc ob causam Euclides in defin. 6.

& 8. iussit accipi æque multiplicia primæ & tertiæ magnitudinum, hoc est, antecedentium: Item alia æque multiplicia secundæ, & quartæ magnitudinum, nimirum consequentium. Ha enim similes sunt in magnitudinibus proportionalibus, vt ex hac definitione constat: in magnitudinibus vero non proportionalibus dissimiles.

ORONTIVS, & nonnulli alij interpretes, longe aliter definitionem hanc exponunt. Putant enim Euclidē docere, in magnitudinibus proportionalibus varie inter se conferri posse & antecedentes magnitudines; & consequentes; veluti in sequentibus definitionibus patebit. Verum si verba definitionis diligentius ponderentur, & vsus eiusdem in 6. lib. consideretur, nostram expositionem huic anteferendam esse, nemo dubitabit.

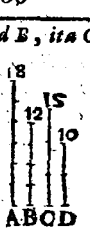
XII.

ALTERNA ratio, est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

EXPLICAT hic quosdam modos argumentandi in proportionibus, quorum frequentissimus est vsus apud Geometras. Hi autem sunt numero sex. Primus dicitur proportio alterna, siue permutata: Secundus, inuersa, seu proportio e contrario: Tertius, compositio rationis, seu coniuncta proportionalitas: Quartus, diuisio rationis, vel disiuncta proportionalitas; Quintus, conuersio rationis, siue euersa proportionalitas: Sextus denique vocatur proportio ex æqualitate, seu æqua proportio. Alterna igitur seu permutata proportio, inquit, est, cum propositis quatuor magnitudinibus proportionalibus, infertur eandem esse proportionem antecedentis prioris proportionis ad antecedentem posterioris, quam habet consequens illius ad consequentem huius. Vt si ponamus proportionem A, ad B, quam C, ad D, & propterea concludamus, eandem esse proportionem A, ad C, quæ est B, ad D, dicemur argumentari a permutata proportione. Graci scriptoris in hac argumentatione vtuntur hoc fere modo loquendi: Vt est A,

ad B,

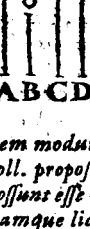
ad B, ita C, ad D; Igitur permutando, seu vicissim, erit quoque A, ad C, vt B, ad D. Firmam autē esse huiusmodi illationem, demonstrabitur propos. 16. lib. huius. Caterum in hoc modo argumentādi, necesse est, omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, vt inter binas vt vt assumptas proportio esse possit. Non enim recte infertur. Vt linea A, ad lineam B, ita numerus C, ad numerum D; ergo permutando, vt linea A, ad numerum C, ita linea B, ad numerum D; cum nulla sit proportio linea ad numerum, aut contra, vt perspicuum est ex defin. 5. In alijs autem modis aegumentandi, qui sequuntur; possunt esse priores magnitudines in vno genere magnitudinis, & posteriores in alio genere magnitudinis, vt ex demonstrationibus huius lib. 5. constabit.



XIII.

INVERSA ratio, est sumptio consequētis, ceu antecedentis, ad antecedentem, velut ad consequentem.

VT si ex eo, quod est A, ad B, vt C, ad D, inferamus, ita esse B, ad A, vt D, ad C, hoc est, consequentes ad antecedentes referamus; dicemur argumentari ab inuersa proportione. In hac argumentatione sic fere loquuntur auctores. Vt est A, ad B, ita C, ad D; Igitur conuertendo, vel e contrario, erit quoque B, ad A, vt D, ad C; Quem quidem modum argumentandi certum esse, ostendetur in coroll. propos. 4. huius lib. Porro duae priores magnitudines possunt esse vnius generis, & posteriores alterius. Recte namque licebit inferre: vt se habet linea A, ad lineam B, ita se habet triangulum; seu numerus C, ad triangulum, seu numerum D; Igitur inuertendo vt linea B, ad lineam A, ita triangulum, seu numerus D, ad triangulum, seu numerum C, vt ex coroll. propos. 4. constabit.

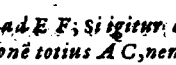


COM-

XLIIII.

COMPOSITIO rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, ceu vnius, ad ipsam consequentem.

SIT proportio AB, ad BC, qua DE, ad EF; si igitur ex hoc colligatur, eam quoque esse proportionē totius AC, nempe antecedentis cum consequente, ad BC, consequētem, quā habet tota DF, antecedens nimirū cum consequente, ad EF, consequentem; dicetur huiusce modi argumentatio compositio rationis, eo quod ex antecedente, & consequente componatur aliud nouum antecedens. Hunc autem modum dicendi apud Graecos scriptores reperies in hac argumentatione; Vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; componendo ergo erit & AC, ad BC, vt DF, ad EF. Demonstrabitur hic modus argumentandi hoc lib. propo. 18.



HVIC modo argumentandi per compositionem rationis addi possunt alij duo. Primus dici potest, Compositio rationis conuersa; quando nimirum sumitur antecedens, & consequens, veluti vna, qua cum antecedente conferatur. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusque; Ergo vt AC, ex antecedente, & consequente conflata, ad antecedentem AB, ita est DF, ex antecedente & consequēte composita, ad antecedentem DE. Quam argumentationem esse validam, demonstrabimus ad propos. 18. huius lib. In qua quidem hoc modo dicendi vti poterimus, Ergo per compositionem rationis conuersam.

ALTER modus dici potest, Compositio rationis contraria; quando nimirum refertur eadem magnitudo antecedēs ad antecedentem, & consequentem, eam ad vnam. Vt si est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, inferimusque per compositionem rationis contrariam; Igitur erit vt AB, antecedens ad totam AC, ex antecedente, & consequente compositam, ita DE, antecedens ad DF, ex antecedente, & consequente compositam. Atque hanc argumentandi formulam valere, ad propos. 18. huius lib. ostendemus.

XV.

DIVISIO rationis, est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens, ad ipsam consequentem.

VT si dicatur, quæ proportio est totius AB, ad CB; ea est totius DE, ad FE; Igitur erit AC, excessus, quo antecedens consequentem superat, ad CB, consequentem, vt DF, excessus, quo consequentem excedit antecedens, ad FE, consequentem. In diuisione autem hac rationis ita loquuntur auctores; ergo diuidendo, &c. Hac porro illatio ostenderetur propos. 17. huius lib.

POSSVNT etiam huic argumentandi modo adiungi alij duo. Primum Diuisionem rationis conuersam dicere possumus; quando nimirum consequens ad excessum, quo consequentem superat antecedens, refertur. Vt si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, concludimusque per diuisionem rationis conuersam; Ergo erit, vt CB, consequens ad AC, excessum, quo antecedens consequentem superat, ita FE, consequens ad DF, excessum, quo antecedens superat consequentem. Valere autem hanc argumentationem, ostendemus ad 17. propos. huius lib.

PERSPICVVM autem est, vt vtraque harum argumentationum per Diuisionem rationis locum habeat, nimirum & illa Euclidis, & nostra, antecedentem debere esse maiorem consequente. Aliàs Diuisio fieri non posset.

ALTER modus appellari potest Diuisio rationis contraria; quando videlicet confertur antecedens cum excessu, quo consequens antecedentem superat. Vt cum dicimus. Ita se habet AC, ad AB, vt DF, ad DE. Igitur erit quoque per diuisionem rationis contrariam vt AC, antecedens ad CB, excessum, quo consequens antecedentem superat, ita DF, antecedens ad FE, excessum, quo antecedentem superat consequens. Qui modus argumentandi demonstrabitur etiam à nobis ad propos. 17. huius lib.

PORRO

PORRO manifestum est, in hac Diuisione rationis contrariæ consequentem debere esse maiorem antecedente, vt sumi possit excessus, quo consequens antecedentē superat.

XVI.

CONVERSIO rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsam consequentem.

QVOD si colligamus hoc modo. Sicut est tota magnitudo AB, ad CB, ita tota DE, ad FE; Igitur ita etiam erit eadem AB, ad AC, excessum, quo consequentem superat antecedens, vt DE, ad DF; Dicemur per conuersionem rationis argumentari. Vnde sic ferè loquuntur scriptores. Igitur per conuersionem rationis, &c. Confirmabitur autem hic argumentandi modus in coroll. propos. 19. huius lib.

A 6 C 4 B

D 12 F 8 E

LIQVIDO etiam constat, in hoc modo argumentandi per conuersionem rationis antecedentem debere consequentem superare, vt excessus, quo antecedens consequentem superat, sumi possit.

XVII.

EX æqualitate ratio est, si plures duabus sint magnitudines, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur, & in eadem ratione: cum vt in primis magnitudinibus prima ad vltimam, sic & in secundis magnitudinibus prima ad vltimam sese habuerit.

VEL aliter. Sumptio extremorum, per subductionem mediorum.

SINT plures magnitudines duabus A, B, C, & totidē

D, E, F, sintque bina ac bina in eadem proportione, hoc est, A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Si igitur inferatur, propterea eam esse proportionem A, ad C, prima ad vltimam in primis magnitudinibus, quæ est D, ad F, prima magnitudinis ad vltimam in secundis magnitudinibus: dicetur huiusmodi argumentandi formula desumpta ex æquo, siue ex æqualitate, in qua scilicet extremæ magnitudines, subductis mediis, colliguntur habere vnam, eandemque inter se proportionem, vt in altera definitione exprimitur. Quoniam vero duobus modis ex æqualitate licet argumentari in proportionibus, vno quidem, quando sumimus binas ac binas magnitudines in eadem proportione, ordinate procedendo, alterato vero, cum ordo inuertitur; explicat Euclides duabus sequentibus definitionibus, quid sit Ordinata proportio, & quid proportio Perturbata.

XVIII.

ORDINATA proportio est, cum fuerit, quemadmodum antecedens ad consequentem, ita antecedens ad consequentem: fuerit etiam, vt consequens ad aliud quidpiam, ita consequens ad aliud quidpiam.

VT quando fuerit A, ad B, vt D, ad E; Rursus vt B, consequens ad aliud quidpiam, vt ad C, ita E, consequens ad F, aliud quidpiam; dicetur talis proportio, Ordinata: quia idē ordo tam in primis tribus magnitudinibus, quàm in secundis seruatur; cum vtrobique conferatur primum prima cum secunda; deinde secunda cum tertia. Quando ergo in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Ordinata proportio, demonstratur propos. 22.

huius

huius lib. eam argumentationem esse bonam.

XIX.

PERTVRBATA autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & alijs, quæ sint his multitudine pares, vt in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens ad consequentem, ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: Vt autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam, sic in secundis magnitudinibus aliud quidpiam ad antecedentem.

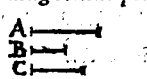
SIT autem sit, quemadmodum A, ad B, ita E, ad F; Deinde vt in primis magnitudinibus B, consequens ad C, aliud quidpiam, ita in secundis magnitudinibus aliud quidpiam D, ad E, antecedentem magnitudinem, nuncupabitur huiusmodi proportio, Perturbata: quòd non seruetur idem ordo in proportionibus magnitudinum; quippe cum in primis magnitudinibus conferatur prima cum secunda, at in secundis secunda cum tertia; deinde in primis secunda cum tertia, at in secundis prima cum secunda. Quando igitur in modo argumentandi ex æqualitate seruatur Perturbata proportio, demonstratur, eam argumentationem esse bonam, propos. 23. huius lib. Porro tam perturbata proportio, quam ordinata, semper infert ex æqualitate eandem extremarum proportionem, etiam si plures magnitudines ponantur, quam tres, vt ex propos. 22. & 23. huius lib. perspicuum fiet.

VTVNTVR Euclidis interpretes hoc libro, & in

alijs, vbi de proportionibus magnitudinum agitur, axiomate quodam, quod vt hic subijceremus, non inutile fore iudicauimus. Illud autem eiusmodi est.

QVAM proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quæuis magnitudo proposita ad aliquam aliã; & eandem habebit quæpiam alia magnitudo ad quamuis magnitudinem propositam.

VT, quam proportionem habet A, ad B, eandem habebit magnitudo proposita C, ad aliquam aliam, nempe ad D. Item eandem habebit quapiam alia E, ad propositam C. Quamuis enim ignoremus interdum, quænam sit quarta illa magnitudo, dubitandum tamen non est, eam esse posse in rerum natura, cum id contradictionẽ non implicet, vt Philosophi loquuntur, neque absurd i aliquid ex eo consequatur.



THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI sint quotcũque magnitudines quotcunque magnitudinum æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium.

SINT quotcunque magnitudines AB, CD, totidem magnitudinum E, F, æque multiplices. Dico magnitudines AB, CD, simul, tam esse multiplices magnitudinum E, F, simul, quam est multiplex AB, ipsius E, vel CD, ipsius F. Cum enim AB, CD, sint æque multiplices ipsarum E, & F, si AB, dividatur in magnitudines AG, GH, HB, ipsi E,

si E, æquales, & C D, quoque in magnitudines C I, IK, KD, ipsi F, æquales; (Diuidi autem poterit quælibet in partes omnino æquales, cum AB, C,D, sint ipsarum E,F, æque multiplices, atque ideo toties E, in AB, perfecte contineatur, quoties F, in C D, vt ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus, constat.) erunt magnitudines AG, GH, HB, tot numero, quot sunt magnitudines CI, IK, KD. Quoniam vero AG, & E, æquales inter se sunt, si ipsis addantur æquales C I, & F, [a] erunt AG, CI, simul, æquales ipsis E, & F, simul. Eodem modo erunt GH, & IK, simul æquales ipsis E, & F, simul; Necnó HB, & KD, eisdem E, & F. Quoties igitur E, in AB, vel F, in CD, continetur, toties & E, F, simul, in AB, CD, simul comprehenduntur: Ideoque, quam multiplex est AB, ipsius E, tam sunt multiplices AB, CD, simul, ipsarum E, & F, simul, vt constat ex ijs, quæ in defin. 2. huius lib. scripsimus. Quare si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum, &c. Quod erat demonstrandum.

A G H B C I K D

E F

[a] 2. pro.

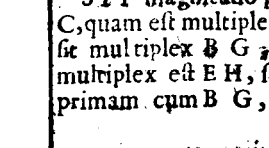
SCHOLIVM.

HOC idem demonstrabitur vniuerse propos. 12. in omni genere proportionis, tam rationalis, quàm irrationalis. Necessarium autem fuit, idipsum prius hoc loco in proportione multiplici demonstrare, quia ex eo alia propositiones demonstranda sunt, antequam propositio 12. possit demonstrari.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

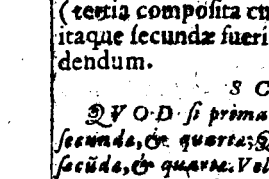
SI prima secundæ æque fuerit multiplex, atque tertia quartæ; fuerit autem & quinta secundę æque multiplex, atque sexta quartæ; erit & composita prima cum quinta, secundæ æque multiplex, atque tertia cum sexta, quartæ. ij.

SIT magnitudo prima A B, tam multiplex secundæ C, quam est multiplex D E, tertia, quartæ F; Rursus tam sit multiplex B G, quinta ipsius C, secundæ, quam multiplex est E H, sexta ipsius F, quartæ. Dico A B, primam cum B G, quinta compositam, tam multiplicem esse secundę C, quam multiplex est, D E, tertia composita cum sexta E H, ipsius F, quartæ: Cum enim A B, sint æque multiplices ipsarum C, F, erunt in A B, tot magnitudines ipsi C, æquales, quot sunt in D E, æquales ipsi F. Eadem ratione erunt & in B G, tot æquales ipsi C, quot sunt in E H, æquales ipsi F. Si igitur æqualibus multitudinibus A B, D E, addantur æquales multitudines B G, E H, erunt totæ multitudines A G, D H, æquales. Quare toties comprehenditur C, in A G, quoties F, in D H: Ideoque tam multiplex est A B, (prima composita cum quinta) ipsius C, secundæ, quam multiplex est D H, (tertia composita cum sexta) ipsius F, quartæ. Si prima itaque secundæ fuerit multiplex, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

QVOD si prima magnitudo, & tertia, æquales fuerint secundæ, & quartæ; Quinta vero & sexta, æquemultiplices secundæ, & quartæ. Vel prima, & tertia æquemultiplices fuerint secundæ & quartæ; At quinta & sexta, æquales secundæ, & quartæ: Erit eadem ratione, tota AG, (prima & quinta) tam multiplex secundæ C, quam multiplex est tota DH, (tertia ac sexta) ipsius F, quartæ. Semper enim AG, multitudo magnitudinum æqualium ipsi C, ostendetur æqualis esse ipsi DH, multitudini magnitudinum ipsi F, æqualium, vt perspicuum est in appositis figuris. Si vero tam prima & tertia, quam quinta, & sexta æquales ponãtur secundæ, & quartæ, luce clarius est, primã,



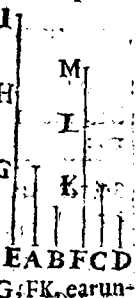
& quintam simul, atque tertiam & sextam simul, aque multiplices esse, nimirum duplices, secundæ & quartæ magnitudinum.

HOC quoque ab Euclide concludetur, in omni genere proportionis vniuerse propos. 24. sed operæ pretium fuit, idipsum prius in proportione multiplici demonstrare, vt ea, quæ sequuntur, demonstrari possint.

THEOR. 3. PROPOS. 3. iij.

SI sit prima secundæ æquemultiplex, atque tertia quartæ; sumantur autem æque multiplices primæ, & tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusque æque multiplex, altera quidem secundæ, altera autem quartæ.

SIT prima magnitudo A, tam multiplex secundæ B, quam multiplex est C, tertia quartæ D; sumanturque E, F, æque multiplices primæ & tertiæ A, & C. Dico ex æquo tam multiplicem esse E, ipsius B, secundæ, quam est F, ipsius D, quartæ. Nam cum E, & F, sint æque multiplices ipsarum A, & C; si distribuantur E, & F, in magnitudines ipsis A, & C, æquales, vt in EG, GH, HI, & FK, KL, LM, erunt tot partes in E, æquales ipsi A, quot sunt in F, æquales ipsi C. Quoniam verò EG, FK, æquales sunt ipsis A, & C; sunt autè A, & C, æque multiplices ipsarum B, & D, ex hypothesi; erunt & EG, FK, earundem B, & D, æque multiplices. Pari ratione erunt GH, KL. Item HI, LM, æque multiplices earundem B, & D; Quoniam igitur EG, prima magnitudo, tam est multiplex secundæ B, quam est multiplex FK, tertia quartæ D; Item GH, quinta tam multiplex est eiusdem



secun-

secundæ B, quam multiplex est KL, sexta eiusdem quartæ D, [a] Erit & E H, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est multiplex F L, composita ex tertia & sexta, quartæ D. Rursus cum sit EH, prima tam multiplex secundæ B, quam multiplex est F L, tertia quartæ D, vt proxime demonstratum est; sit autem & H I, quinta tam multiplex secundæ B, quam est L M, sexta multiplex quartę D; [b] Erit & E I, composita ex prima & quinta, tam multiplex secundæ B, quam est FM, composita ex tertia ac sexta, multiplex quartæ D. Eademque est ratio, si plures fuerint partes in E, & F. Si sit ergo prima secundæ æque multiplex, atque tertia quartę, &c. Quod ostendendum erat.

a 2. quinti.

b 2. quinti.

SCHOLIVM.

OSTENDETVR hoc theorema, propos. 22. non solum in magnitudinibus æque multiplicibus, sed etiam in omnibus, quæ bina sumpta eandem habent proportionem, siue rationalem, siue irrationalem, sed necessarium fuit ipsum prius hic in proportione multiplici demonstrare, vt insequens propos. 4. demonstrari possit.

iiij

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint.

SIT proportio A, ad B, quæ C, ad D, sumanturque primæ A, & tertiæ C, æque multiplices E, & F; Item secundæ B, & quartæ D, æque multiplices G, & H, iuxta quamuis multiplicationem: siue E, F, ita

multi-

multiplices sint ipsarum A, C, sicut G, H, ipsarum B, D, siue non, His positis, constat ex defin. 6. huius lib. si E, deficit a G, etiam F, deficere ab H: Et si E, æqualis est ipsi G, etiam F, æqualem esse ipsi H; Et denique si E, excedit G, etiam F, excedere H. Alioquin non esset, per defin. 6. eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, si earum æquemultiplicia non semper ita se haberent. Dico iam, multiplicia primæ ac tertiæ non solum vna deficere a multiplicibus secundæ ac quartæ, aut vna æqualia esse, aut vna excedere, vt diximus, sed eandem quoque inter se proportionem habere, nimirum ita esse E, multiplicem primæ A, ad G, multiplicem secundæ B, vt F. multiplicem tertiæ C, ad H, multiplicem quartæ D. Hoc est si rursus E, statuatur prima magnitudo; G, secunda; F, tertia, & H, quarta; sumantur que ipsarum E, F, æque multiplicia qualiacunque; Item ipsarum G H, quæcunque etiam æquemultiplicia; Multiplicia ipsarum E, F, à multiplicibus ipsarum G, H, vel una deficere, uel una æqualia esse, uel una excedere, ut uult definitio 6. Idem namque est, quatuor magnitudines eandem habere proportionem, & earum æquemultiplicia sumpta diximus, uel una deficere, uel una æqualia esse, uel una excedere. Capiantur enim rursus I, K, ipsarum E, F, æque multiplices; Item L, M, æque multiplices ipsarum G, H. Quoniam igitur tam multiplex est E, prima ipsius A, secundæ, quam F, tertia ipsius C, quartæ; sumptæ sunt autem & I, k, æque multiplices ipsarum E, F, primæ ac tertiæ: [a] Erunt quoque ex æquo I, K, æque multiplices ipsarum A, C, secundæ & quartæ. Eadem ratione erunt L, M, ipsarum B, D, æque multiplices. Et quia ponitur proportio A, primæ ad B, secundam, quæ C, tertiæ ad D, quartam, ostensæque sunt I, K, æque multiplices primæ & tertiæ A, C. Item L, M, æque multiplices secundæ & quartæ B. D, [b] fit ut si I, multiplex

[a] 23. quinti.

[b] 6. defi. quinti.

primæ

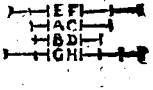
primæ deficit ab L, multiplici secundæ, etiam K, multiplex tertiæ necessario deficiat ab M, multiplici quartæ: & si I, æqualis est ipsi L, etiam K, ipsi M, sit necessario æqualis: & denique si I, excedit ipsum L, etiam K, excedat necessario ipsam M: Idemque ostendetur in quibuscunque æque multiplicibus magnitudinum E, & F, nec non magnitudinum G, & H: quia semper hæc æquemultiplicia, quæcunque sint, [a] æquemultiplicia quoque erunt magnitudinum A, C, & B, D. Itaque cum I, & K, sint æque multiplices primæ E, & tertiæ F; Item L, & M, æque multiplices secundæ G, & quartæ H; ostensumque sit, si I, multiplex primæ minor fuerit, quam L, multiplex secundæ, multiplicem tertiæ K, minorem quoque, esse, quam M, multiplicem quartæ, &c. atque hoc contingere in quacunque multiplicatione: [b] Erit, vt E, prima ad G, secundam, ita F, tertia ad H, quartam. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 3. quinti.

[b] 6. defi. quinti.

COROLARIVM.

HINC facile demonstrabitur Inuersa ratio, quam Euclides defi. 13. explicauit; hoc est, si quatuor magnitudines fuerint proportionales, easdem & contra, seu inuersa ratione proportionales esse. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico esse conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C. Sumptis enim E, F, æquemultiplicibus ipsarum A, C, primæ ac tertiæ; Item G, H, æquemultiplicibus ipsarum B, D, secundæ & quartæ: quoniam ex eo, quod A, prima ad B, secundam se habet, vt C, tertia ad D, quartam, [c] necessario sequitur, si E, multiplex primæ minor fuerit quam G, multiplex secundæ, vel æqualis, vel maior, etiam F, multiplicem tertiæ minorem esse, vel æqualem, vel maiorem, quam H, multiplicem quartæ; Perspicuum est, si è contrario G, maior fuerit quam E, vel æqualis, vel maior, etiam H, maiorem fore, vel æqualem, vel maiorem, quam F, secundum quamcunque multiplicationem sint sumpta hæc æque multiplicia. Nam si vtraque E, F, minor est, quam vtraque G, H, erit contra vtraque G, H, maior quam vtraque E, F: & si vtraque E, F, æqualis est vtrique G, H, erit è contrario, vtraque G, H, vtrique E, F, quoque æqualis: Et denique si vtraque E, F, maior est, quam



[c] 6. defi. quinti.

vtraque

vtraque G,H,erit vice versa, vtraque G,H,minor, quam vtraque E,F. Itaque quoniam primæ B, & tertiæ D,sumptæ sunt,æquemultiplicia G,H; Item secundæ A,& quartæ C, æquemultiplicia E, F, ostensumque est,G,H,vel vna excedere E, F, vel vna æqualiæ esse, vel vna deficere, secundum quamcunque multiplicationem eamultiplicia sumantur; a erit vt B, prima ad A, secundam, ita D, tertia ad C, quartam. Quod erat demonstrandum. a 6. defi. quint.

SCHOLIVM.

HAEC propositio cum suo corollario vera est, siue duæ magnitudines A,B,sint eiusdem generis cum duabus magnitudinibus C,D, siue non, vt ex demonstratione liquet.

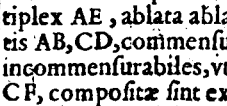
ORONTIVS quartum hoc Theorema sic conatur demonstrare. Postquam ex 3. propos. huius lib. ostendit I, K, esse æque multiplices magnitudinum A, C; Item L, M, esse æque multiplices magnitudinum B,D,infert statim per conuersum 6. definitionis, iuxta suam expositionem,ita esse I, ad L,vt K,ad M. Quare per eandem definitionem,inquit,erit quoque E,ad G, vt F, ad H. Qua quidem demonstratio admodum est vitiosa, tum quia secundum hunc sensum demonstratur idem per idem, nimirum datis quatuor magnitudinibus proportionalibus,æquemultiplices prima ac tertia ad æque multiplices secunda & quarta eandem habere proportionem,ex eo,quod ex 6. defin. vt ipse explicauit, æquemultiplices prima ac tertia ad æquemultiplices secunda & quarta eandem habent proportionem; quod est absurdum: tum etiam, quia eodem modo statim à principio licuisset illi inferre, sic esse, per 6. defin. E,ad G, vt F, ad H, sine acceptione nouarum magnitudinum æque multiplicium. Non enim est maior ratio in illis,quam in his. Reijcienda est ergo huiuscemodi demonstratio, vna cum expositione 6. definitionis, vt supra diximus. At iuxta nostram interpretationem eiusdem definitionis constat solum, si I,minor est,quam L, vel æqualis,vel maior, etiam K,minorem esse,vel æqualem,vel maiorem, quam M; quemadmodum & idem constat in æque multiplicibus E,F,G,H, & in quibuscunque alijs,si sumantur,

tur, pro vt inter se respondent. Vnde ex 6. defin. recte colligitur, ita esse E, primam ad G, secundam, vt est F, tertia ad H, quartam, quandoquidem illis 6. definitio conuenit.

V. THEOR. 5. PROPOS. 5.

SI magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota, totius.

ITA multiplex sit tota A B, totius C D, vt est multiplex A E, ablata ablatæ C F, siue A E, C F, ablatæ sint totis A B, C D, commensurabiles, vt in prima figura, siue incommensurabiles, vt in secunda figura. Item siue A E, C F, compositæ sint ex eisdem partibus, ex quibus totæ A B, C D, componuntur, vt in priori figura; siue non ex eisdem, vt in posteriori figura. Dico reliquam E B, ita esse multiplicem reliquæ F D, vt est tota A B, totius C D. Ponatur enim E B, ita multiplex cuiuspiam magnitudinis, videlicet ipsius G C, vt est A E, multiplex ipsius C F, vel tota A B, totius C D. Quoniam igitur A E, E B, æque



21. quinti. sunt multiplices ipsarum C F, G C; [a] erit tota A B, totius G F, ita multiplex, vt A E, ipsius C F, hoc est, omnes omnium, vt vna vnius: Sed tam multiplex etiam ponitur A B, ipsius C D, quam est multiplex A E, ipsius C F. Igitur A B, tam est multiplex ipsius G F, quam multiplex est ipsius C D; [b] atque idcirco æquales sunt G F, C D. Ablata igitur communi C F, æquales erunt G C, F D. Tam multiplex igitur erit E B, ipsius F D, quam multiplex est ipsius G C. Sed ita multiplex posita fuit E B, ipsius G C, vt A E, ipsius C F, hoc est, vt tota A B, totius C D. Quare tam multiplex est reliqua E B, reliquæ F D, quam est tota A B, totius C D: quod est propositum.

b 6. prop

ALI-

ALITER. Sit ita multiplex tota AB, totius CD, vt ablata AE, ablatæ CF. Dico reliquam EB, reliquæ FD, esse sic multiplicem, vt est tota totius. Posita enim GA, ita multiplici ipsius FD, vt est AE, ipsius CF, vel vt tota AB, totius CD: quoniam AE, GA, æque multiplices sunt ipsarum CF, FD; [a] erit tota GE, sic multiplex totius CD, vt AE, ipsius CF: Sed ita quoque multiplex est AB, eiusdem CD, vt AE, ipsius CF, ex hypothesi. Aeque multiplices sunt igitur GE, AB, ipsius CD; [b] atque adeo inter se æquales. Quare, dempta communi AE, æquales erunt GA, EB: Ideoque æque multiplices ipsius FD; cum GA, sit multiplex posita ipsius FD: Atqui ita est multiplex posita GA, ipsius FD, vt AB, ipsius CD. Igitur & EB, reliqua sic erit multiplex ipsius FD, reliquæ, vt AB, tota totius CD; quod est propositum. Si magnitudo itaque magnitudinis æque fuerit multiplex, &c. Quod erat demonstrandum.

G A E B
C F D

G A E B
C F D

a 1. quinti.

b 6. pro.

SCHOLIVM.

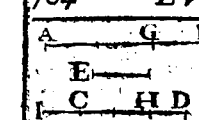
VNIVERSE idipsum demonstrabitur præpos. 19. in magnitudinibus cuiuscunque proportionis, & non tantum multiplicis, vt hic est factum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ magnitudines duarum magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædam sint earundem æque multiplices: & reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarum multiplices.

SINT magnitudines AB, CD, æque multiplices ipsarum E, F; & detractæ AG, CH, earundem E, F, æque

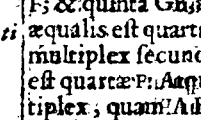
multi-



multiplices. Dico reliquas GB, HD, aut esse æquales eisdem E, F, aut certe earundem æque multiplices. Cum enim AB, sit multiplex ipsius E, & ablata quoque AG, eiusdem E, multiplex; erit reliqua GB, vel æqualis ipsi E, vel eius multiplex; aliàs inæqualis, vel non multiplex magnitudo addita multiplici, componeret multiplicem, quod est absurdum. Sit igitur primum GB, æqualis ipsi E. Dico etiam HD, ipsi F, esse æqualem. Ponatur enim CI, æqualis ipsi F. Et quia prima AG, tam est multiplex secundæ E, quam CH, tertia multiplex est quartæ F; & quinta GB, æqualis est secundæ E, sicut & CI, sexta æqualis est quartæ F; [a] erit AB, prima cum quinta, ita multiplex secundæ E, vt HI, tertia cum sexta, multiplex est quartæ F. Atqui CD, ipsius F, erat quoque tam multiplex, quam AB, multiplex est ipsius E, Aeque multiplices igitur sunt HI, CD, ipsius F. [b] Ideoq. æquales inter se. Quare, dempta CH, communi, remanebunt CI, HD, æquales. Cum igitur CI, posita sit æqualis ipsi F, erit quoque HD, eidem F, æqualis. Quod est propositum.

a 2. quinti

b 6. pro.



SIT deinde GB, multiplex ipsius E. Dico ita quoque esse multiplicem HD, ipsius F. Posita namque CI, ita multiplici ipsius F, vt est multiplex GB, ipsius E; [c] erit, vt prius AB, ita multiplex ipsius E; ve HI, multiplex est ipsius F. [d] Quare iterum æquales erunt HI, CD; atque adeo dempta communi CH, & reliquæ CI, HD, æquales erunt: Sed CI, est ita multiplex ipsius F, vt GB, ipsius E, multiplex est, ex hypothesi. Igitur & HD, tam multiplex erit ipsius F, quam GB, ipsius E, multiplex est. quod est propositum. Si duæ itaque magnitudines duarum magnitudinum fint æque multiplices, &c. Quod ostendendum erat.

c 2. quinti

d 6. pro.

SCHOLIVM.

HOC quoque ostendemus vniuersè propos. 24. in omni genere proportionis.

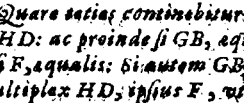
BRE-

BREVIVS. totam propos. ita demonstrabimus. Quoniam AB, CD, sunt ipsarum E, F, aquemultiplices; erunt in AB, tot magnitudines aquales ipsi E, quot sunt magnitudines in CD, aquales ipsi F. Rursus quia AG, CH, earundem E, F, aquemultiplices sunt; erunt quoque in AG, tot magnitudines ipsi E, aquales, quot sunt magnitudines in CH, ipsi F, aquales. Si igitur ex aqualibus multitudinibus AB, CD, demantur multitudines aquales AG, CH; remanebunt multitudines GB, HD, aquales. Quare tecies continebitur E, in GB, quoties F, continetur in HD: ac proinde si GB, aqualis sit ipsi E, erit quoque HD, ipsi F, aqualis: Si autem GB, multiplex sit ipsius E; erit ita multiplex HD, ipsius F, vt GB, multiplex est ipsius E: quandoquidem tecies E, in GB, continetur, quoties F, in HD, existit, vt ostensum est.

THEOR. 7. PROPOS. 7. vij.

AEQVALES ad eandem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales.

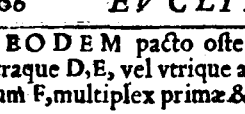
SINT duæ magnitudines A, B, æquales inter se, & tertia quæuis C. Dico A, & B, habere eandem proportionem ad C. Item C, viciſſim ad A, & B, eandem quoque proportionem habere. Sumantur D, E, æque multiplices ipſarum æqualium A, B; [a] eruntque D, E, æquales inter ſe. Capiatur rurſus F, vtcunque multiplex ipſius C. Quoniam igitur D, E, æquales ſunt, ſit vt vtraque vel minor ſit, quam F, vel æqualis, vel maior, iuxta quamcunque multiplicationem ea multiplicia ſumantur. Quare cum D, E, æque multiplices primæ A, & B, tertiæ, minores ſint ipſa F, multiplice ſecundæ & quartæ C, (eſt enim C, inſtar duarum magnitudinum, &c.) vel æquales, vel maiores; erit ea proportio primæ A, ad C, ſecundam, quæ tertiæ B, ad C, quartam.



[a] 26. prom

[b] 6 def. quinti.

EODEM pacto ostendemus F, vel minorem esse vtraque D,E, vel vtrique æqualem, vel maiorem. Igitur cum F,multiplex primæ & tertiæ C,vna deficiat à D, & E, æque multiplicibus secundæ A,& quartæ B; vel vna æqualis sit,vel maior;

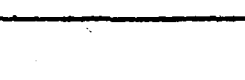


a 6.defi. quinti. a Erit quoque ea proportio primæ C,ad secundam A,quę tertiæ C, ad quartam B; quod est propositum. Posset breuius secunda hæc pars ostendi per coroll. 4. propos. ex inuersa ratione. Cum enim ostensum iam sit, esse A,ad C,vt B,ad C,erit conuertendo C,ad A,vt C,ad B. Aequales ergo ad eandem,eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est,nihil posse in hac propos. colligi ex defin.6. iuxta expositionē Campani ac Orontij. Neque enim per demonstrationem constat, vtramque multiplicem D,& E,eandem habere proportionem ad multiplicem F,sed solum,cum illa sint æquales, vtramque esse vel minorē, vel æqualem,vel maiorem multiplici F. Idemque cernitur in omnibus fere propositionibus, qua per 6. definitionem propositū colligunt: Vt merito illa expositio reiecta sit à nobis.

EODEM fere modo ostendemus, æquales magnitudines ad alias inter se æquales, eandem habere rationem, si loco multiplicis F, sumantur duæ æque multiplices: quod Euclides, ob facilitatem omisit, vtitur tamen eo nonnunquam in ijs,qua sequuntur, perinde ac si in hac propos. 7. esset demonstratum. Sint enim tam A, & B, inter se æquales,quam C,& D, inter se. Dico esse A, ad C, vt B, ad D.



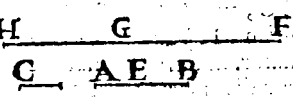
b 6.prop. *Sumptis enim E, & F, æque multiplicibus ipsarum A, & B, prima, & tertia. Item G, & H, æque multiplicibus ipsarum C,& D,secunda,& quarta; b erunt tam E,& F,inter se æquales,quam G,& H, inter se. Quare si E, multi-*

plex

plex prima deficit à G, multiplice secunda, etiam F, multiplex tertia, ab H, multiplice quarta deficiet; & si æqualis, æqualis; & si superat, superabit. [a] *Eadem ergo est proportio A, prima ad C, secundam, quæ B, tertia ad D, quartam. Quod est propositum.* [a] 6. defi. Quinti.

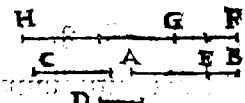
THEOR. 8. PROPOS. 8. viij

INÆQVALIVM magnitudinum maior ad eandem, maiorem rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem.



SINT magnitudines inæquales, AB, maior, & C, minor, Tertia autem quælibet D. Dico proportionem AB, ad D, maiorem esse proportione C, ad D. At è conuerso, maiorem esse proportionem D, ad C, quam D, ad AB. Intelligatur enim in AB, magnitudine maiore, magnitudo AE, æqualis minori C, vt sit reliqua EB. Vtraque deinde EB, AE, æqualiter multiplicetur; hac lege, vt GF, multiplex ipsius EB, maior quidem fit, quam D; At HG, multiplex ipsius AE, non fit minor eadem D, sed vel maior, vel æqualis. In priori figura necesse fuit sumere GF, HG, triplas ipsarum EB, AE; quia dupla ipsius AE, esset minor, quam D. Loco triplarum potuissent accipi quæcunque aliæ æquemultiplices maiores. In posteriori autem figura satis est, sumere ipsarum EB, AE, duplas GF, HG; quia vtraque GF, HG, maior est quàm D. Possent tamen pro duplis sumi quæcunque aliæ maiores æquemultiplices. Quoniã igitur duæ FG, GH, æque multiplices sunt duarũ

BE, EA; [a] erit & tota FH, ita multiplex totius AB, vt HG, ipsius AE, hoc est, ipsius C, cum æquales sint positæ C; & AE. Capiatur quoque ipsius D, multiplex IK, quæ proxime maior sit, quam HG, nempe dupla, vt in priori figura. Quod si dupla maior non fuerit quã HG, sumatur tripla, vel quadrupla, &c. In posteriori figura accepta est IK, ipsius D, quadrupla, quia tam dupla, quã tripla minor est, quam HG, at quadrupla iam maior est. Abscissa ergo LK, quæ æqualis sit ipsi D, non erit IL, maior, quam HG, (alias IK, non esset multiplex ipsius D, proxime maior quam HG; sed & IL, maior quoque esset quam HG. Quod si IK, dupla sit ipsius D, perspicuum est, IL, non esse maiorem, quàm HG, cum HG, posita sit non minor quam D, hoc est, quàm IL,) & idcirco HG, erit vel æqualis ipsi IL, vel maior. Et quia FG, maior est posita quam D; LK, vero æqualis eidem D; erit quoque FG, maior quam LK. Cum ergo HG, non minor sit quam IL, ut demonstratum est, sed vel æqualis, vel maior; erit tota FH, maior quam IK. Itaque cum FH, HG, sint æque multiplices primæ AB, & tertiæ C; atque IK, multiplex ipsius D, quæ instar est secundæ & quartæ: sit autem FH, multiplex primæ, maior quam IK, multiplex secundæ; At HG, multiplex tertiæ, non sit maior, quam IK, multiplex quartæ, immo minor, ex hypothesi; (sumpta enim est IK, multiplex ipsius D, maior quam HG.) [a] erit maior proportio AB, primæ ad D, secundam, quam C, tertiæ ad D, quartam.



QVONIAM uero è contrario IK, multiplex primæ D, (ponatur enim nũc D, prima ac tertia; At C, secunda & AB, quarta) maior est quam HG, multiplex secundæ C; At IK, multiplex tertiæ D, maior non est, quam FH, multiplex quartæ AB, immo minor, cum FH, maior sit, quam IK, vt ostensum est; [b] erit maior proportio D, primæ ad C, secundam, quam D, tertiæ ad AB, quartam: quod est propositum. Inæqualium igitur ma-

gni-

gnitudinum maior ad eandem, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

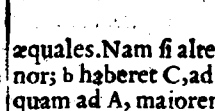
RECTE autem animaduertit Petrus Nonius in sua Algebra de Proportione agens, per hanc propos. 9. probari non posse, angulum rectum maiorem habere proportionem ad quemuis alium angulum, quam angulum semicirculi ad eundem illum angulum, quanquam rectus angulus maior sit angulo semicirculi: quia excessus anguli recti supra angulum semicirculi, qui est angulus contingentiæ, quantumuis multiplicatus superare nequit tertium illum angulum, quod tamen in huius propos. demonstratione requiritur. Nam F G, multiplex excessus E B, superare debet tertiam magnitudinem D, vt patuit. Neque hoc mirum cuipiam videatur. Nam angulus rectus ad angulũ semicirculi non dicitur proprie habere proportionem, cum eum excedat angulo contactus, qui eiusdem natura non est eũ vtroque angulo, quod ita multiplicari non possit, vt alterutrum illorum tandem excedat. Quemadmodum enim; si ad lineã vnius palmi addi posset punctum, vt fieret linea vno puncto lineam vnius palmi excedens; non diceretur proprie linea illa composita maior, quam linea vnius palmi, propterea quod excessus est indiuisibilis, & alterius naturæ; Item quũ admodum si ad figuram planam quamcumque apponeretur linea vnius palmi, nõ diceretur hæc magnitudo ex diuersis magnitudinibus conflata ad figuram illam planam habere proprie proportionẽ maioris inæqualitatis: quod excessus nõ sit eiusdem naturæ cum plana illa figura. Ita quoque non habet angulus rectus proprie ad angulum semicirculi proportionem maioris inæqualitatis; quippe cum angulo semicirculi adiectus sit angulus contactus, vt efficiatur angulus rectus; atque adeo rectus angulus angulum semicirculi excedat quantitate diuersa naturæ, vt dictum est. Itaque non solum ea magnitudines proportionem proprie nõ habent. quarum alterutra multiplicata alteram superare nequit, vt ad defin. 5. huius lib. diximus: sed neque ea proprie dicentur habere proportionẽ, vt idem Petrus Nonius annotauit, quarũ

excessus diuersam ab eis naturam habet, cuiusmodi sunt angulus rectus, & angulus semicirculi. Adeo vt tunc solū proprie magnitudines dicantur habere proportionem inter se, quando & alterutra multiplicata alteram superare potest, & excessus earum multiplicatus superare quoque potest vtramque. Fateor rem hanc esse perobscuram, & quæ vix rectè intelligi possit: Verum hoc prouenit ex indiuisibilitate anguli contactus per lineam rectam. Huius generis sunt alia nonnulla in rebus Geometricis, quæ verissima quidem sunt propter demonstrationem euidentem, sed alia ex parte talem inducunt difficultatem, vt ab ea non facile intellectui se expediat. Verbi gratia, Verissimum est, sphæram tangere planū in puncto, vt à Theodosio demonstratur propos. 3. lib. 1. Sed qua ratione fiat, vt hinc non sequatur, si globus continuè moueatur super planum, lineam rectam describi compositam ex punctis, nemo ad hunc vsque diem sic explicauit, vt omni ex parte difficultas sit sublata.

ix. **THEOR. 9. PROPOS 9.**

QVAE ad eandem, eandem habent rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales.

HABEANT primum A, & B, eandem rationem ad C; Dico A, & B, esse inter se æquales. Sit enim, si fieri potest, altera, nempe A, maior, & B, minor, a Erit igitur maior proportio A, maioris ad C, quam B, minoris ad eandem C; quod est contra hypothesim. Non ergo inæquales sunt A, & B, sed æquales. Habeat deinde C, eandem proportionem ad A, & B; Dico rursus A, & B, esse æquales. Nam si altera, nempe A, esset maior, & B, minor; b haberet C, ad B, minorem, maiorem proportionē, quam ad A, maiorem: quod est contra hypothesin. Non igitur maior erit A, quam B, sed æqualis. Quæ igitur ad



a 8. quinti.

b 8. quinti.

eandem

eandem, eandem habent rationem, &c. Quod demonstrandum erat.

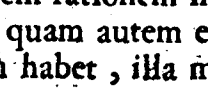
SCHOLIVM.

CONVERTIT hac propositio 9. utramque partem theorematis 7. vt manifestum est.

THEOR. 10. PROPOS. 10. x.

AD eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HABEAT primum A, ad C, maiorem proportionem, quam B, ad eandem C. Dico A, maiorem esse, quam B: Si enim A, foret ipsi B, æqualis, [a] haberent A, & B, eandem proportionem ad C: Si autem A, minor esset, quam B, [b] haberet B, maior ad C, proportionem maiorē, quàm A, minor ad eandem C, quod est contra hypothesin. Non est igitur A, æqualis vel minor quam B, sed maior. Habeat secūdo C, ad B, maiorem proportionem, quam ad A. Dico B, minorem esse quam A. Non enim æqualis erit B, ipsi A; [c] alioqui haberet C, eandem proportionem ad A, & B; quod est contra hyphothesin. Neque vero B, maior erit quam A, [d] alias haberet C, ad minorem A, maiorem proportionem quam ad B, maiorem: quod magis est contra hypothesin. Minor igitur est B, quàm A, quod est propositum. Ad eandem igitur magnitudinem rationem habentium, &c. Quod erat demonstrandum.



a 7. quinti.

b 8. quinti.

c 7 quinti.

d 8. quinti.

SCHOLIVM.

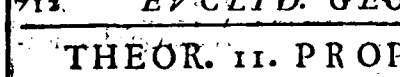
HAEC quoque propositio conuertit vtramque partem theorematis 8. vt perspicuum est.

xj

THEOR. 11. PROPOS. 11.

QVAE eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem.

SINT proportiones A, ad B, & C, ad D, eædem proportioni E, ad F. Dico & proportiones A, ad B, & C, ad D. eaſdem eſſe inter ſe, ſecũdum definitionem 6. hoc eſt ſumptis æquemultiplicibus ipſarum A, C; Item æquemultiplicibus ipſarum B, D; ſemper contingere, vt multiplices ipſarum A, C, a multiplicibus ipſarum B, D, vel vna deficiant, vel vna æquales ſint, vel vna excedant. Sumantur enim ad omnes antecedentes A, C, E, æque multiplices quæcũque G, H, I, & ad omnes conſequentes B, D, F, aliæ quæcunque æque multiplices K, L, M. Quoniam igitur ponitur eſſe A, prima ad B, ſecundam, vt E, tertia ad F, quartam; [a] ſit vt ſi G, multiplex primæ deficit a K, multiplice ſecundæ, deficiat quoque I, multiplex tertiæ ab M, multiplice quartæ; Et ſi G, æqualis eſt ipſi K, vel maior, æqualis quoque ſit I, ipſi M, vel maior; [b] Sed (vt eodem modo oſtendetur) ſi I, minor eſt, quam M, uel æqualis, vel maior. eſt quoque H, minor quam L, uel æqualis, uel maior: propterea quod ponitur eſſe E, prima ad F, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quare ſi G, multiplex primæ A, deficit a K, multiplice ſecundæ B, deficiet quoque H, multiplex tertiæ C, ab L, multiplice quartę D. Et ſi G, æqualis eſt, vel maior quam K, etiam H, æqualis erit, uel maior quam L. Idemque oſtendetũr accidere in quibuſcunque alijs æque muliplicibus [c] Quapropter erit A, prima ad B, ſecundam, ut C, tertia ad D, quartam. Quæ igitur eidem ſunt eædem rationes, & inter ſe ſunt eædem. Quod erat oſtendendum.



[a] 6. def. quinti.

[b] 6. def. quinti.

[c] 6. def. quinti.

SCHO-

SCHOLIVM.

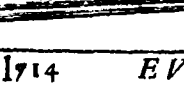
EADEM ratione, Quæ eisdem sunt eadem rationes, & inter se sunt eadem. Vt si sit, vt A, ad B, ita C, ad D, sit autem E, ad F, vt A, ad B, & G, ad H, vt C, ad D: erit quoque A, 3. B, 2: C, 6, D, 4. E, ad F, vt G, ad H. Quia enim E, 9. F, 6: G, 12, H, 8. proportiones E, ad F, & C, ad D, eadē sunt proportioni A, ad B, a erit ut E, ad F, ita C, ad D. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eadem sunt proportioni C, ad D. b erit quoque vt E, ad F, ita G, ad H. a 11. ḡn. b 11. ḡn.

RVRSVS, si sint proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F, eadem inter se: sit autem A, 3. B, 2: C, 6. D, 4: E, 9. F, 6. vt A, ad B, ita G, 12. H, 8. K, 12. L, 30. M, 20. G, ad H; & vt C, ad D, ita I, ad K; & vt E, ad F, ita L, ad M: erunt quoque proportiones G, ad H: I, ad K; & L, ad M, eadem inter se. Nam vt proxime in quatuor proportionibus ostensum est, vt G, ad H, ita est I, ad K; propterea quòd hæ proportiones similes sunt proportionibus A, ad B, & C, ad D. Eodem modo erit, vt I, ad K, ita L, ad M; cum proportiones I, ad K, & L, ad M, eadem sint proportionibus C, ad D, & E, ad F, quæ æquales sunt. Item erit, vt G, ad H, ita L, ad M; cum hæ proportiones eadem sint proportionibus A, ad B, & E, ad F, quæ æquales ponuntur. Eadem ratio est de pluribus.

THEOR. 12. PROPOS. 12. xij.

SI sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

QVOD in propos. 1. de proportione multiplici demonstrauit, ostendit hic de omni genere proportionis, etiam irrationalis. Sint ergo quotcunque magnitudines A, B; C, D; E, F, proportionales, hoc est, sit A, ad B, vt C, ad D, & E,



D, & E, ad F. Dico vt est vna antecedentium ad vnam ¦ consequentium, nimirum A, ad B, ita esse omnes antecedentes simul A, C, E, ad omnes consequentes simul B, D, F. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; & K, L, M, æque multiplicibus consequentium, [a] erunt omnes G, H, I, simul omnium A, C, E, simul ita multiplices, vt vna vnius, nempe vt G, ipsius A; & omnes, K, L M, simul omnium B, D, F, simul ita multiplices, vt vna vnius, nimirum vt K, ipsius B. Quoniam vero ponitur esse A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam, & vt alia E, tertia ad aliam F, quartam; [b] sit vt si G, multiplex primæ deficit a K, multiplice secundæ, deficiat quoque H, multiplex tertiæ ab L, multiplice quartæ, & I, ab M: Et si G, æqualis est ipsi K, vel maior, æqualis quoque sit H, ipsi L, & I, ipsi M, vel maior. Ac proinde si G, minor est, vel æqualis, vel maior quam K, & omnes G, H, I, simul omnibus K, L. M, simul minores sint, vel æquales vel maiores. [c] Quocirca vt est A, prima ad B, secundam ita erit A, C, E, tertia ad B, D, F, quartam. Si sint itaque magnitudines quotcunque proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

1. quinti.

6. def. quinti.

6. def. quinti.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

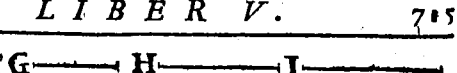
xiij.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam maiorē rationem habebit, quam quinta ad sextam.

SIT prima A, ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam: sit autem proportio C, tertiæ ad D, quar-

tam

tam maior, quã E, quinte ad F, sextam. Dico & proportionem A, primæ ad B, secundam esse maiorem quam E, quintæ ad F, sextam, secundum definitionem 8. hoc est, sumptis æque multiplicibus ipsarum A, F; Item æquemultiplicibus ipsarum B, F, contingere posse, vt multiplex ipsius A, excedat multiplicem ipsius B, at multiplex ipsius E, multiplicem ipsius F, non excedat. Sumptis enim G, H, I, æque multiplicibus antecedentium; Et K, L, M, æque multiplicibus consequentium, cum sit A, prima ad B secundam, vt C, tertia ad D, quartam; [a] fit vt si G, multiplex primæ excesserit K, multiplicem secundæ, excedat quoque H, multiplex tertiæ ipsam L, multiplicem quartę, &c. At quando H, excedit ipsam L, [b] non necessario I, excedit ipsam M, sed æqualis aliquando erit, vel minor; quod maior ponatur proportio C, primę ad D, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Igitur si G, excedit K, non necessario I, excedit M. [c] Maior est ergo proportio A, primæ ad B, secundam, quam E, tertiæ ad F, quartam. Quã ob rem si prima ad secundã eandẽ habuerit rationẽ, quam tertia ad quartã, &c. Quod ostendendũ erat.



a 6. defi. quinti.

b 8. defi. quinti.

c 8. def. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si proportio C, tertia ad D, quartam minor fuerit, quam E, quintæ ad F, sextam; erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor quam E, quintæ ad F, sextam. Si enim proportio C, ad D, minor est quam E, ad F, hoc est, proportio E, primæ ad F, secundam maior quam C, tertiæ ad D, quartam; [d] fit vt si I, excedit ipsam M, non necessario H, excedat ipsam L, sed aliquando deficiat, vel ei æqualis sit. [e] Sed si H, deficit ab L, vel æqualis est, etiam G, deficiet à K, vel ei erit æqualis, eo quod ponatur C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam. Quare si I, excedit ipsam M, non necessario G, excedet ipsam K, [f] atque idcirco maior erit proportio E, primæ ad F, secundam, quam

d 8. def. quinti.

e 6. def. quinti.

f 8 def. quinti.

tertia ad B, quartam, hoc est, proportio A, ad B, minor erit quam E, ad F. Quod est propositum.

EODEM modo. Si prima ad secundam, maiorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam, maiorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secundam, maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

QVOD si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartã, minorem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque multo magis ad secundam, minorem rationem habebit, quam quinta ad sextam.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: Si vero minor, & minor erit.

SIT enim A, prima ad B, secundam, vt C, tertia ad D, quartam. Dico si A, maior fuerit quam C, fore quoque B, maiorem quam D. Quod si A, æqualis fuerit ipsi C, æqualem quoque esse B, ipsi D: Si denique A, minor fuerrt quam C, minorem quoque esse B, ipsa D. Sit primum A, maior quam C, a eritque propterea proportio A, maioris ad B, maior quam C, minoris ad eãdem B. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; Proportio autem A, tertiæ ad B, quartam, maior est, vt ostendimus, quam C, quintæ ad B, sextam: b Maior quoque erit proportio C, primæ ad D, secundam, quam C, quintæ ad B, sextam. c Minor est ergo D,

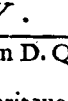
a 8. quinti.

b 13. 14. 15. quinti.

quam

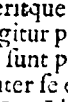
quam B; Ideoque B, maior erit quam D. Quod est propositum.

SIT deinde A, æqualis ipsi C,[a] eritque idcirco A, ad B, vt C, ad B. Quoniam igitur proportiones C, ad D, & C, ad B, eædē sunt proportioni A. ad B, [b] erunt quoque inter se eædem proportiones C, ad D, & C, ad B; [c] Ideoque æquales erunt B, & D. Quod est propositum.



a 7. quinti.
b 11. qn.
c 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C, [d] eritque ob hoc maior proportio C, maioris ad B, quam A, minoris ad B, eandem. Quoniam igitur est C, prima ad D, secundam, vt A, tertia ad B, quartam; est autem proportio A, tertiæ ad B, quartam minor, quam C, quintæ ad B, sextā: [e] Minor quoque erit proportio C, primę ad D, secundā, quam C, quintæ ad B, sextam; [f] Ideoque B, minor erit, quam D, quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.



d 8. quinti.
e 13. qn.
f 10. qn.

SCHOLIVM.

QVOD si secunda maior sit, vel æqualis, vel minor, quàm quarta. erit quoque eadem ratione prima maior, vel æqualis, vel minor, quam tertia. Sit enim primum B, maior, quàm D, vt in prima figura. Dico & A, maiorem esse, quam C. Cum enim B, maior sit quàm D; [g] erit maior proportio C, ad D, quàm C, ad B. Quia igitur est, vt prima A, ad secundam B, ita tertia C, ad quartam D. Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est maior, quàm C, quintæ ad B, sextā; [h] erit quoque proportio A, prima ad B, secundam maior, quàm C, quintæ ad B, sextam: [i] ac proinde A, maior erit, quàm C. quod est propositum.

g 13. qn.
h 13. qn.
i 10. qn.

DEINDE sit B, æqualis ipsi D, vt in secunda figura. Dico & A, ipsi C, esse æqualem. Cum enim B, ipsi D, sit æqualis; [k] erit C, ad B, vt C, ad D. Est autem quoque A, ad B, vt C, ad D. [l] Igitur erit quoque ita A, ad B, vt C, ad B; [m] propterea quæ A, ipsi C, æqualis erit. quod est propositum.

k 11. qn.
l 11. qn.
m 9. qn.

TERTIO sit B, minor quàm D, vt in tertia figura. Dico & A, minorem esse, quàm C. Cum enim B, minor sit quàm

D, erit

D; a erit minor proportio C, ad D, quam C, ad B. Quia igitur est, vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam: Proportio autem C, tertiæ ad D, quartam ostensa est minor, quàm C, quintæ ad B, sextam, b erit quoque proportio A, primæ ad B, secundam minor, quàm C, quintæ ad B, sextam. c Igitur maior erit C, quam A, ac proinde A, minor erit, quam C. quod est propositum.

a 8. quinti

b 13. quinti

c 10. quinti

BREVIVS. Si B, maior est, quam D, & A, dicatur non maior, quam C, sed vel minor, vel æqualis, d erit quoque B, minor, quàm D, vel æqualis, quod est contra hypothesin. Eademq. ratio est in alijs casibus.

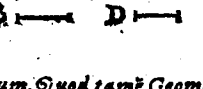
d 14. quinti.

VEL. sic. Si est A, ad B, vt C, ad D; erit conuertendo B, ad A, vt D, ad C. Ergo si B, maior est, vel minor, vel æqualis ipsi D; e erit quoque A, maior, vel minor, vel æqualis ipsi C.

e 14. quint.

NON demonstrauit autem Euclides, si prima maior est, vel æqualis vel minor, quam secunda, tertiam quoque maiorem esse, vel æqualem, vel minorem, quam quartam; (quo tamen argumentandi modo pleriq. Geometrarum tũ veterum, tum recentiorum vtuntur) quia id perspicuum est ob similitudinem proportionum. Hinc enim fit, si vtraque est proportio maioris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem, id est, primam ac tertiam, maiorem esse vtraque magnitudine consequente, hoc est, secunda ac quarta: Si vero vtraque proportio est æqualitatis, vtramq. magnitudinem antecedentem vtriq. consequenti æqualem esse. Si denique vtraque proportio est minoris inæqualitatis, vtramque antecedentem magnitudinem vtraque consequente esse minorem.

VERBI gratia, si est vt A, ad B, ita C, ad D; erit vtraque proportio vel maioris inæqualitatis, vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis. Quocirca si A, prima maior est quã B, secunda, erit & C, tertia maior quã D, quarta; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor. Quod est propositum. Quod tamẽ Geometrice ostendemus cũ Federico Commandino, licet id nõ sit necessarium, ad prop. 16. huius lib.

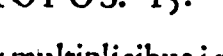


THEO-

THEOR. 15. PROPOS. 15. xv

PARTES cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur:

SINT partium A, & B, æque multiplices CD, & EF. Dico ita esse CD, ad EF, vt A, ad B. Cum enim CD, & EF, sint



æque multiplices ipsarum A, & B, continebitur A, tories in CD, quoties B, in EF. Diuidatur ergo CD, in partes CH, GH, HD, æquales ipsi A, & EF, in partes EI, IK, KF, æquales ipsi B, [a] eritq; CG, ad EL vt A, ad B, quod CG, & A, æquales inter se sint, necnõ EI, & B. Eadẽ ratione erit GH, ad IK, & HD, ad KF, vt A, ad B, [b] ideoq; CG, GH, HD, ad EI, IK, KF, eandẽ habebũt proportionẽ. Quocirca vt CG, ad EI, hoc est, vt A, ad B, [c] ita erit CD, ad EF, nẽpe omnes CG, GH, HD, simul ad omnes EI, IK, KF, simul. quod est propositum. Partes itaque cum pariter multiplicibus, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 7. quinti
[b] 8. quinti.
[c] 12. gn.

THEOR. 16. PROPOS. 16. xvj.

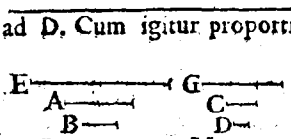
SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

HIC demonstratur Alterna, siue Permutata proportio, seu ratio, quæ defin. 12 explicata est. Sit enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim, seu permutando, esse quoque A, ad C, vt B, ad D. Sumantur enim ipsarum A, B, primæ ac secundæ, æque multiplices E, F, Item ipsarum C, D, tertiæ & quartæ æque multiplices G, H; [d] eritque E, ad F, vt A, ad B, cum E, & F, sint pariter multiplices partium A, & B. Eadem ratione erit G, ad H, vt C,

[d] 15. gn.

ad D.

ad D. Cum igitur proportiones E, ad F, & C, ad D, sint eędem proportioni A, ad B; erunt & ipsæ inter se eædem. Rursus quia proportiones E, ad F, & G, ad H, eædem sunt proportioni C, ad D; erunt & ipsæ eædem inter se; hoc est, vt est E, prima ad F, secundam, ita erit G, tertia ad H, quartam. Quare, si E, prima maior est quam G, tertia, uel æqualis, uel minor, erit quoque F, secunda maior quam H, quarta, uel æqualis, uel minor, in quacunque multiplicatione accepta sint æquemultiplicia E, F, & æquemultiplicia, G, H. Est igitur A, prima ad C, secundam, ut B, tertia ad D, quartam (cum E, & F, sint æque multiplices primæ A, ac tertiæ B; At G, & H, æque multiplices C, secundæ, & D, quartæ, & ille ab his una deficiant, uel una æquales sint, uel una excedant, &c.) quod est propositum. Si quatuor igitur magnitudines proportionales fuerint, & uicissim proportionales erunt. Quod ostendendum erat.



a 11. qn.

b 11. qn.

c 14. qnti.

d 6. defi. quinti.

SCHOLIVM.

PORRO demonstratio huius propos. locum solum habet quando quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Nam si duæ A, B, essent vnius generis, & duæ C, D, alterius; essent quoque multiplices E, F, vnius generis, in quo videlicet sunt A, B, & multiplices G, H, alterius; in quo nimirum existunt C, D. Quare non posset dici E, maior quam G, vel æqualis, vel minor; ac proinde nihil colligeretur ex defin. 6. huius lib. Vsurpanda igitur erit permutata proportio in solis quatuor magnitudinibus eiusdem generis. Quod nonnulli philosophi non aduertentes in graues errores incidunt, cum eam adhibeant in rebus diuersorum generum.

EX hoc & illud demonstrabitur, quod ad finem scholij propos. 14. ex ipsa similitudine proportionem ostendimus, recepimusque nos demonstraturos hoc loco, videlicet,

SI prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima vero, quam secunda, maior fuerit: Erit & tertia maior, quam quarta; Et si æqualis, æqualis; & si minor, minor.

QVANQVAM id, quod hic proponitur, per se notũ sit, vt ad propos. 14. diximus, demonstrabimus tamen illud cum Federico Commandino, hoc modo. Sit vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam. Dico, si A, prima maior est, quam B, secũda; & C, tertiam maiorem esse quarta D. & si est æqualis, æqualem; & si minor, minorem. a *Erit enim permutando, vt A, ad C, ita B, ad D.* b *Quare si A, prima maior est, quam B, tertia, erit & C, secunda maior, quam D, quarta; & si æqualis, æqualis, & si minor, minor. Quod est propositum.*

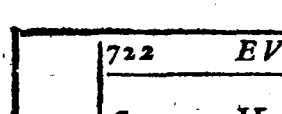
a 16. qn.
b 14. qn.

SED & hac demonstratio locum duntaxat habet, cum quatuor magnitudines sunt eiusdem generis. Quare satius est illud ex natura proportionum monstrare, vt à nobis ad propos. 14. factum est. Ita enim verum erit semper id, quod proponitur, etiamsi magnitudines A, B, in vno genere, & C, D, in alio contineantur: immo vero licet A, B, sint quantitates continuæ, & C, D, numeri, &c.

THEOR. 17. PROPOS. 17. xvij.

SI compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt.

HOC loco demonstrat Euclides Diuisionem rationis, quam defin. 15. explicauit. Sint enim compositæ magnitudines AB, CB, & DE, FE, proportionales, hoc est, sit AB, ad CB, vt DE, ad FE. Dico & diuisas easdem proportionales esse, hoc est, vt est AC, ad CB, ita esse DF, ad FE,



in eo sensu, quem definitione 6. expositimus. Ipsarũ enim AC, CB, DF, FE, æque multiplices capiantur eodem ordine GH, HI, KL, LM; a eritque GI, ita, multiplex ipsius AB, vt est GH, ipsius AC, hoc est, vt KL, ipsius DF. Sed vt est multiplex KL, ipsius DF, b ita, quoque multiplex est KM, ipsius DE. Aeque multiplices ergo sunt GI, KM, ipsarum AB, DE. Capiatur rursus IN, MO, æque multiplices ipsarum CB, FE. Quoniam igitur sic est multiplex HI, prima secundæ CB, vt LM, tertia, quartæ FE: Item tam est multiplex IN, quinta secundæ CB, quam multiplex est MO, sexta quartæ FE; c erit & HN, sic multiplex secũdæ CB, vt LO, multiplex est quartæ FE. Itaque cum sit AB, prima ad CB. secũdam, vt DE, tertia ad FE, quartã; sumptæq; sint æque multiplices GI, KM, primæ ac tertiæ AB, DE: Item secũdæ & quartæ CB, FE, æque multiplices HN, LO, d fit vt si GI, multiplex primæ AB, deficit ab HN, multiplice secundæ CB, etiã KM, multiplex tertiæ DE, deficiat ab LO, multiplice quartæ FE; & si æqualis, æqualis; & si excedit, excedat. Qd si deficiat tã GI, ab HN, quã KM, ab LO, ablatis cõibus HI, LM, deficiet quoque GH, ab IN, & KL, ab MO. Et si GI, æqualis fuerit ipsi HN, & KM, ipsi LO, ablatis communibus HI, LM, erit & GH, æqualis ipsi IN, & KL, ipsi MO. Et si denique GI, excesserit ipsam HN, & KM, ipsam LO, ablatis communibus HI, LM, excedet quoque GH, ipsam IN, & KL, ipsam MO. Quam ob rem cum GH, KL, sumptæ sint æque multiplices primæ AC, & tertiæ DF: Item IN, MO, æque multiplices secundæ CB, & quartæ FE, ostensum que sit, (in quacunque multiplicatione illæ æque multiplices fuerint acceptę) æque multipiices primæ & tertiæ ab æque multiplicibus secundæ & quartæ vel una deficere, vel æquales esse, vel vna excedere; e Erit AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia, ad FE, quartam. quod est propositũ. Si compositæ igitur

a 1. quinti.
b 1. 5.
c 2. 5.
d 6. def. quinti.
e 6. def. quinti.

ma-

magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EX his facile demonstrabimus modum illum argumentandi, quem definitione 15. Diuisionem rationis conuersam diximus: Hoc est, si est, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; esse quoque vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. quod ita patet. Quoniã est vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] *erit diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur conuertendo erit quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.*

A 12 C 4 B

D 6 F 2 E

a 17. qn.

NVLLO etiam negotio demonstrabitur modus ille argumentandi, quem ad eandem defi. 15. Diuisionem rationis contrariam appellauimus, & in quo antecedens magnitudo minor est quam consequens, non autem maior, vt in Diuisione rationis, quam Euclides definiuit, & ea, quam proxime demonstrauimus. Sit enim vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico esse quoque per Diuisionem rationis contrariam, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. [b] *Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Ac proinde conuertendo rursus, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.*

b 17. qn.

THEOR. 18. PROPOS. 18. xviij.

SI diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt.

DEMONSTRAT hoc loco Euclides compositionem rationis, quam definitione 14. descripsit. Sint enim diuisæ magnitudines AB, BC, & DE, EF, proportionales, hoc est, AB, ad BC,

A B C

D E F

H G

vt DE,ad EF. Dico & compositas proportionales esse,hoc est, vt est AC,ad BC,ita esse DF,ad EF. Si enim non est, vt A C, ad BC,ita DF,ad E F, habebit DF, ad aliquam magnitudinem minorem ipsa E F, vel maiorem,eandem proportionem,quam A C, ad BC. Habeat primum DF,ad GF,minorem ipsa EF,si fieri potest, eandem proportionem,quam A C,ad B C. Quoniam igitur
a17.qn. est,vt AC, ad BC, ita D F,ad G F; a Erit diuidendo quoque,vt AB,ad BC,ita DG,ad GF: Sed vt AB,ad BC,ita
b11.qn. posita quoque est DE,ad EF. b Igitur erit etiam, vt DG, prima ad GF,secundam,ita DE,tertia ad EF, quartam.
c14.qn. Cum ergo DG,prima maior sit, quàm D E, tertia, c erit quoque GF,secunda maior quàm EF,quarta, pars quàm totum. Quod est absurdum.

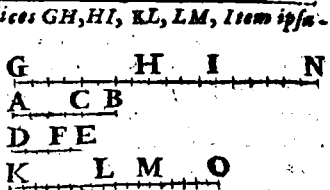
HABEAT deinde,si fieri potest,D F,ad HF, maiorem ipsa EF,eandem proportionem, quam A C, ad BC.
d17.qn. Quoniam igitur est,vt AC,ad BC,ita DF,ad HF; d erit diuidendo quoque vt AB,ad BC,ita DH,ad HE. Sed vt AB,
e11.qn. ad BC,ita posita etiam est D E, ad EF. e Igitur erit quoque,vt DH,prima ad HF,secundam,ita DE,tertia ad EF, quartam. Cum ergo DH,prima minor sit quàm D E, tertia,f erit quoque HF,secunda minor quàm EF, quarta,totum quàm pars.quod est absurdum. Non igitur habebit DF,ad minorem ipsa EF,aut ad maiorem, eandem proportionem,quam AC,habet ad BC. Ergo D F, ad ipsam EF,erit,vt AC,ad BC.quod est propositum. Itaque si diuisæ magnitudines sint proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HANC propositionē demonstrant nonnulli cum Campano eadem ferme ratione, qua antecedentem propositionē Euclides demonstrauit,hoc videlicet modo. Sint diuisæ magnitudines AC, CB, DF, FE, proportionales, hoc est, A C, ad C B, vt D F, ad F E. Dico eas etiam compositas proportionales esse,vt AB,quidem ad C,B,ita DE. ad FE. Sumantur enim,vt in antecedente propositione,ipsarum AC,

CB,

CB, DF, FE, aque multiplices GH, HI, KL, LM, Item ipsarum CB, FE, alia aque multiplices IN, MO, [a] erunt q. rursus GI, KM, ipsarum AB, DE, aque multiplices. [b] Itē HN, LO, ipsarum CB, FE, vt in precedenti Theoremate ostensum est. Quoniam vero ponitur esse AC, prima ad CB, secundam, vt DF, tertia ad FE, quartam, sumptaq. sunt GH, KL, aque multiplices prima ac tertia AC, DF. Item secunda & quarta CB, FE, aque multiplices IN, MO, [c] sit vt si GH, multiplex prima AC, deficit ab IN, multiplice secunda CB, etiam KL, multiplex tertia DF, deficiat ab MO, multiplice quarta FE, & si aqualis, aqualis; & si excedit, excedat. Quod si desemat tam GH, ab IN, quàm KL, ab MO, additis communibus HI, LM, deficiet quoque GI, ab HN, & KM, ab LO. Et si GH, aqualis fuerit ipsi IN, & KL, ipsi MO; additis communibus HI, LM, erit & GI, ipsi HN, aqualis, & KM, ipsi LO. Et denique si GH, excesserit ipsam IN, & KL, ipsam MO, additis communibus HI, LM, excedet quoque GI, ipsam HN, & KM, ipsam LO. Quoniam ergo si GI, multiplex prima AB, defecit ab HN, multiplice secunda CB, etiam KM, multiplex tertia DE, deficit ab LO, multiplice quarta FE, & si aqualis, aqualis, & si excedit, excedit; [d] erit AB, prima ad CB, secundam, vt DE, tertia ad FE, quartam. Quod est propositum. Itaque si diuise magnitudines sint proportionales, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 1. quinti

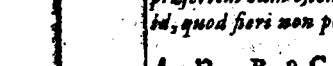
[b] 2. quinti

[c] 6. defi. quinti.

[d] 6. defi. quinti

VERVM hac demonstratio non recte colligit propositum ex defin. 6. propterea quòd HN, LO, non sunt ita multiplices ipsarum CB, FE, vt multiplices accepta sunt IN, MO, earundem CB, FE. Vnde merito dubitare quis posset, an secundum quamcunque multiplicationem aque multiplices seruent eam conditionem defectus, aqualitatis, atque excessus, quam Euclides in 6. defin. postulauit; quandequidem in hac demonstratione liberum non est assumere ipsarum CB, FE, quascunque aquemultiplices, sed tales dunta-

xat, quales consurgunt ex HI, IN, & ex LM, MO, multiplicibus acceptis. Id quod in antecedentis propositionis demonstratione obiici non potest: quippe cum IN, MO, sumpta sint ipsarum CB, FE, aquemultiplices qualescunque, ipsaque eadem remanent aquemultiplices earundem CB, FE, in diuisa proportionalitate. Quam ob rem prefetenda est Euclidis demonstratio huic demonstrationi Campani. Libuit autem eam quoque explicare, ne eã studiosus Lector, relicta illa Euclidis, arriperet, ut bonam: præsertim cum ostensiua sit, illa uero Euclidis ducat nos ad id, quod fieri non potest.



HINC facile etiam confirmabimus duos illos modos argumentandi, quos ad defi. 14. descripsimus. Priorem diximus compositionem rationis conuersã. Sit enim ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam, esse quoq; ut AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quoniam enim est, ut AB, ad BC ita DE, ad EF, a erit conuertendo, ut BC, ad BD, ita EF, ad DE. a Igitur & componendo erit, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE, quod est propositum. a 18. quinti.

POSTERIOREM modum uocauimus compositionem rationis contrariam. Sit ergo rursus, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam, esse quoque ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quoniam enim est, ut AB, ad BC, ita DE ad EF, b erit conuertendo, ut BC, ad AB, ita EF, ad DE. b Igitur & componendo erit, ut AC, ad AB, ita DF, ad DE: ac proinde conuertendo rursus erit, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum. b 18. quinti.

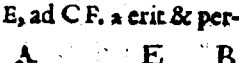
xix

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum, se habebit.

QVOD

QVOD in propos. 5. demonstratum est de multipli ci proportione, hoc loco de omni proportione, etiam irrationali demonstratur. Sit enim tota A B, ad totam C D, vt ablata A E, ad ablatam C F. Dico & reliquam E B, esse ad reliquam FD, ut est tota AB, ad totam C D. Cum enim sit A B, ad C D, vt A E, ad C F. a erit & permutando A B, ad A E, ut C D, ad C F. b Diuidendo ergo erit E B, ad A E, ut F D, ad C F. c Quare permutando rursus erit E B, ad F D, ut A E, ad C F, hoc est, ut tota A B, ad totam C D, cum posita sit A B, ad C D, ut A E, ad C F. Si igitur quemadmodum totum ad totum &c. Quod demonstrandum erat.

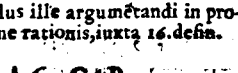


a 16. qn.
b 17. qn.
c 16. qn.

COROLLARIVM.

HINC facile demonstrabitur modus ille argumentandi in proportionibus, qui sumitur à conuersione rationis, iuxta 16. defin.

SIT enim, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE, d erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur & conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: e ac propterea componendo quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.



d 17. qn.
e 18. quinti.

SCHOLIVM.

OMNES Euclides interpretes conuersionem rationis demonstrãt hac ratione. Quoniam est, ut AB, ad CB, ita DE, ad FE; f erit permutando, ut tota AB, ad totam DE, ita CB, ablata ad ablatam FE. g Igitur ut tota AB, ad totam DE, ita erit quoque reliqua AC, ad reliquam DF. Et proinde permutando rursus, ut AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

f 16. quinti.
g 19. quinti.

SED quis non uidet hanc demonstrationẽ conuenire solum magnitudinibus eiusdem generis, cum in ea usurpetur alterna, siue permutata proportio, quæ nim tantum habet in eiusdem generis magnitudinibus, ut & in defin 12. & in propos. 19. monuimus? Quare cum Euclides, & alij Geometræ modũ hunc argumentandi à conuersione rationis adhi-

beant in omnibus magnitudinibus, etiam non eiusdem generis, reiecta hac communi interpretum demonstratione, nostram aliam excogitauimus, quæ omnibus magnitudinibus congruit. Ea enim locum habet, etiamsi priores duæ quantitates A B, C B, sint vnius generis, nimirum lineæ, posteriores vero duæ D E, F E, alterius generis, nimirum vel superfices, vel anguli, vel corpora, vel denique numeri: propterea quod in ea non assumpta fuit alterna, siue permutata proportio.

xx. THEOR. 20. PROPOS. 20.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binę & in eadem ratione sumantur; ex æquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertię fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextę: sin illa minor, hæc quoque minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F, sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem F, sexta. Cum enim A, maior sit quam C, a erit maior proportio A, ad B, quam C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita ad D, ad E. b Maior igitur proportio quoque erit D, ad E, quã C, ad B. At vt C, ab B, ita est F, ad E. (Cum enim sit B, ad C, ut E, ad F, erit conuertendo vt C, ad B, ita F, ad E.) Maior igitur quoque proportio erit D, ad E, quam F, ad E, c Quare D, maior erit, quam F. Quod est propositum.

a 8. quinti.

b 13 5n.

c 10. 5n.

SIT

SIT deinde A, æqualis ipsi C. Dico & D, æqualem esse ipsi F. Cum enim A, sit ipsi C, æqualis, [a] erit A, ad B, ut C, ad B. Est autem vt A, ad B, ita D, ad E, [b] Igitur erit & D, ad E, ut C, ad B: At ut C, ad B, ita est F, ad E, per inuersam rationem, uti prius. Quare erit quoque D, ad E, vt F, ad E; [c] Ideoque æquales erunt D, & F. Quod est propositum.

a 7. qn.
b 11. qn.
c 9. quinti.

SIT tertio A, minor quam C. Dico & D. minorem esse, quam F. Cum enim A, minor sit quam C, [d] erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B. Sed ut A, ad B, ita est D, ad E. [e] Minor ergo quoque proportio est D, ad E, quam C, ad B. Est autem conuertendo, ut prius, ut C, ad B, ita F, ad E. Igitur minor est quoque proportio D, ad E, quã F, ad E, [f] propterea quæ D, minor erit quam F. Quod est propositũ. Si sint itaque tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c.

d 8. quinti.
e 13. qn.
f 10. qn.

SCHOLIVM.

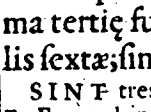
PORRO propositione 12. ostendet Euclides, A, & D, magnitudines non solum esse maiores, vel æquales, vel minores duabus magnitudinibus C, & E, vt hic demonstrauit, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex æqualitate: quod quidē demonstrare non poterat, nisi prius theorema hoc ostendisset, vt ex eadem propositione 22. erit perspicuum.

THEOR. 21. PROPOS. 21. xxj.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit:

erit & quarta, quã sexta, maior. Quod si prima tertię fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sextæ; sin illa minor, hæc quoq; minor erit.

SINT tres magnitudines A, B, C, & totidem D, E, F, quę binæ, & in eadem ratione sumantur; sitque earum proportio pertubata, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F, & vt B, ad C, ita D, ad E: Sit autem primum A, prima maior quam C, tertia. Dico & D, quartam esse maiorem sexta.



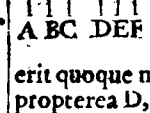
a 8. quinti. F. Cum enim A, maior sit quam C, a erit maior proportio A, ad B, quã C, ad B: Est autem vt A, ad B, ita E, ad F. b Maior ergo quoque proportio est E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero vt B, ad C, ita est D, ad E, erit conuertendo vt C, ad B, ita E, ad D. Quare maior quoque erit proportio E, ad F, quam E, ad D, c Ideoque maior erit D, quam F. Quod est propositum.

b 13. qn. c 10. qn.

SIT deinde A, ipsi C, æqualis. Dico D, quoque, ipsi F, esse æqualem. Cum enim A, sit æqualis ipsi C, d erit A, ad B, vt C, ad B: Sed vt A, ad B, ita est E, ad F. e Igitur erit vt C, ad B, ita E, ad F: Est autem, ex inuersa ratione, vt C, ad B, ita E, ad D, veluti prius. Igitur erit quoque vt E, ad F, ita E, ad D; f atque idcirco D, ipsi F, æqualis erit. Quod est propositum.

d 7. quinti e 11. qn. f 9. quinti.

SIT tertio A, minor, quam C. Dico & D, minorem esse quam F. Cum enim A, sit minor quam C, g erit minor proportio A, ad B, quam C, ad B: Vt autem A, ad B, ita est E, ad F. h Minor est ergo proportio E, ad F, quam C, ad B. Quoniam vero, vt ante, ex inuersa ratione, est vt C, ad B, ita E, ad D; erit quoque minor proportio E, ad F, quam E, ad D; ac propterea D, minor erit quam F, quod est propositum. Si igitur sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, &c. Quod ostendendum erat.



g 8. quinti. h 13. qn. 10. qn.

SCHO-

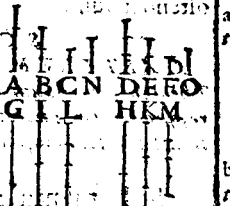
SCHOLIVM.

CAETERVM propos. 23. ostendet Euclides duas magnitudines A, & D, non solum esse maiores, vel aquales, uel minores duabus magnitudinibus C, & F, sed etiam illas ad has eandem habere proportionem ex aqualitate: quod quidem sine auxilio huius theorematis demonstrare non poterat, ut ex propos. illa 23. patebit.

THEOR. 22. PROPOS. 22. xxij.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur; Et ex æqualitate in eadem ratione erunt.

IAM hic demonstrat Euclides modum argumentandi in proportionibus ex æqualitate, quando proportio est ordinata. Sint enim primum tres magnitudines A, B, C; & aliæ tres D, E, F: sitque A, ad B, vt D, ad E; & B, ad C, vt E, ad F. Dico quoque ex æqualitate esse A, ad C, ut D, ad F. Sumptis enim ipsarum A, D, æquemultiplicibus G, H: Item ipsarum B, E, æquemultiplicibus I, K: Item ipsarum C, F, æquemultiplicibus L, M; cum sit A, prima ad B, secundam, vt D, tertia ad E, quartam, [a] erit quoque G, multiplex primæ A, ad I, multiplicem secundæ B, vt H, multiplex tertiæ D, ad K, multiplicem quartæ E. Eadem ratione, cum sit B, prima ad C, secundam, vt E, tertia ad F, quartam; [b] erit I, multiplex primæ B; ad L, multiplicem secundæ C, vt K, multiplex tertiæ E, ad M, multiplicem quartæ F. Quoniam igitur sunt tres magnitudines G; I, L, & aliæ tres H, K, M, quæ binæ in eadem proportione sumuntur; [c] fit vt si G, prima superat tertiam L, superet necessario quoque H, quarta sextam M; Et si æqualis, æqualis; Et si deficit, deficiat. Itaque cum G, H;



a 4. quinti.

b 4. quinti.

c 10. quinti.

æquemultiplices primę A, & tertiæ D, uel deficiant una ab L, M, æquemultiplicibus secundę C, & quartæ F, uel una æquales sint, uel una excedant: in quacunq; multiplicatione sumpta sint ea multiplicia; a erit A, prima ad C, secundam, ut D, tertia ad F, quartam. Quod est propositum.

6. def. 5.

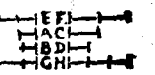
DEINDE sint plures magnitudines tribus, ita vt sit etiam C, ad N, ut F, ad O. Dico adhuc esse ut A, ad N, ita D, ad O. Cum enim iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, ut D, ad F: ponatur autem C, ad N, ut F, ad O, erunt tres magnitudines A, C, N, & aliæ tres D, F, O, quæ binæ in eadem ratione sumuntur. Ergo ex æquali tate in tribus magnitudinibus ostensa, rursus erit, ut A, ad N, ita D, ad O. Eodemque modo ivem nstendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor; sicut id in quatuor demonstratum fuit per tres; Et sic de pluribus. Itaque si sint quotcunque magnitudines, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

CAETERVM non videtur hoc loco dissimulandum Theorema quoddam antiquis Mathematicis valde familiare, quanquam à nemine, quod sciam, sit adhuc demonstratum. Id autem eiusmodi est.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; Habebunt etiam æque multiplices primæ ac tertiæ, ad secundam & quartam eãdem rationẽ: Item æque multiplices secundæ & quartæ ad primã & tertiã, eandẽ

rationem habebunt. Et contra, eandem rationem habebunt secunda & quarta ad æquemultiplices primæ & tertiæ: Item prima ac tertia ad æquemultiplices secundæ & quartæ, rationem habebunt eandem.



SIT enim vt A, prima ad B, secundam, ita C, tertia ad D, quartam; sumanturq. E, F, ipsarum A, C, æquemultiplices: Item G, H, æquemultiplices ipsarum B, D. Dico ita esse E, ad B, vt F, ad D: Itē ita G, ad A, vt H, ad C. Et contra, ita esse B, ad E, vt D, ad F: Item ita A, ad G, vt C, ad H. Quoniam enim est, vt E, ad A, ita F, ad C, ex constructione, cum vtrobique sit eadem proportio multiplex; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; a *erit ex æquo, vt E, ad B, ita F, ad D. Rursus quia est, vt G, ad B, ita H, ad D, quod vtrobique sit eadem proportio multiplex, ex constructione; estq. vt B, ad A, ita D, ad C; (Cum enim ponatur, vt A, ad B, ita C, ad D, erit conuertendo, vt B, ad A, ita D, ad C.)* b *erit ex æquo, vt G, ad A, ita H, ad C.*

a 22. quinti.

b 22. quinti.

DEINDE, quia est vt B, ad A, ita D, ad C, per inuersam rationem; Et vt A, ad E, ita C, ad F, quod ex constructione vtrobiq. sit eadem proportio submultiplex; c *erit ex æquo, vt B, ad E, ita D, ad F. Rursus quia ponitur, vt A, ad B, ita C, ad D; estque vt B, ad G, ita D, ad H, quod ex constructione sit vtrobique eadem proportio submultiplex;* d *erit ex æquo, vt A, ad G, ita C, ad H. Quod est propositum.*

c 22. quinti.

d 22. quinti.

EX quo constat modus argumentandi, quo frequentissime vtuntur Geometra, maxime Archimedes, Apollonius Pergaus, Theon, & alij. Videlicet, vt A, ad B, ita est C, ad D. Ergo vt E, dupla, vel tripla, vel quadrupla, &c. ipsius C, ad D. Item vt A, ad B, ita est C, ad D. Igitur vt A, ad duplum, vel triplum, vel quadruplum, &c. ipsius B, nimirum ad G, ita erit quoque C, ad duplum, vel triplum, vel

quadruplum, &c. ipsius D, videlicet ad H.

xxiij.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI sint tres magnitudines, aliæq. ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DE'MONSTRATVR hic ratio ex æqualitate, quando proportio est perturbata. Sint enim tres magnitudines A,B,C, & aliæ tres D,E, F, sitque perturbata earum proportio, hoc est, sit vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico quoque ex æqualitate esse vt A, ad C, ita D, ad F. Sumptis enim ipsarum A,B,D, æquemultiplicibus G,H, I; Item ipsarum C,E,F, æquemultiplicibus K,L, M;

a 15. *quinti.* [a] Erit vt A, ad B, ita G, ad H, cum G, H, sint ipsarum A,B, æquemultiplices: At vt A, ad B, ita est E, ad F; b Igitur vt G, ad H, ita quoque est E, ad F; c Sed vt E, ad F, ita est quoque L, ad M; quod L, M, sint ipsarum E, F, æquemultiplices. d Igitur erit quoque vt G, ad H, ita L, ad M. Rursus quoniam est B, prima ad C, secundam, vt D, tertia ad E, quartam; e erit quoque vt H, multiplex primæ B, ad K, multiplicem secundæ C, ita I, multiplex tertiæ D, ad L. multiplicem quartæ E. Quia igitur sunt tres magnitudines G,H,K, & aliæ tres I, L, M, quæ binæ in eadem ratione sumuntur, estq. earum proportio perturbata; cum ostensum sit esse vt G, ad H, ita L, ad M: Et vt H, ad K, ita I, ad L; f fit vt si G, prima superat tertiam K, superet quoque quarta I, sextam M; & si æqualis, æqualis; & si deficit, deficiat. Itaque cum G, & I, æquemultiplices primæ A, & tertiæ D, à K, & M, æquemultiplicibus se-

b 11. *quinti.*

c 15. *quinti.*

d 11. *quinti.*

e 4. *quinti*

f 21. *quinti.*

cundæ

cundæ C, & quartæ F, vel vna deficiant, vel vna æquales sint, vel vna excedant; [a] erit vt Λ, prima ad C, secundam, ita D, tertia ad F, quartam. quod est propositum. Itaque si sint tres magnitudines, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 26 defi. quinti.

SCHOLIVM.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, fueritq. earum proportio perturbata, nimirum si fuerit A, ad B, vt F, ad O; & B, ad C, vt E, ad F; & C, ad N, vt D, ad E. Dico adhuc esse vt A, ad N, ita D, ad O. quanquam proportio ex aqualitate, quando proportio est perturbata, apud Geometras in vsu non sit in pluribus magnitudinibus, quàm in tribus. qua causa fuit, cur Euclides antecedentem propositionem de quotquot magnitudinibus, hanc autem de tribus duntaxat proposuerit, quamuis vera etiam sit de pluribus. quod ita probatur. Cum iam sit ostensum in tribus magnitudinibus, esse A, ad C, vt E, ad O; Ponatur autem esse ita C, ad N, vt D, ad E, erunt tres magnitudines A, C, N, & alia tres D, E, O, qua bina in eadem sumuntur proportione, & earum proportio est perturbata. Ergo rursus ex aqualitate in tribus magnitudinibus ostensa, erit vt A, ad N, ita D, ad O. Eodemq; modo idem ostendetur in quinque magnitudinibus, per quatuor, sicut id in quatuor fuit demonstratum, per tres. Et sic de pluribus. Quod est propositum.

THEOR. 24. PROPOS. 24. xxiiij.

SI prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

QVOD

QVOD propositione 2 demonstrauit Euclides de sola proportione multiplici, demonstrat hoc loco de omni proportione, etiam irrationali. Sit enim A B, prima ad C, secundam, vt D E, tertia ad F, quartam; Item B G, quinta ad C, secundam, vt E H, sexta ad F, quartam. Dico ita esse A G, compositam ex prima ac quinta, ad secundam C, vt est D H, composita ex tertia & sexta, ad quartam F. Cum enim sit vt B G, ad C, ita E H, ad F; erit conuertendo vt C, ad B G, ita F, ad E H. Quoniam igitur est A B, ad C, vt D E, ad F; & C, ad B G, vt F, ad E H; a erit ex æquali A B, ad B G, vt D E, ad E H. b Componendo igitur erit vt tota A G, ad B G, ita tota D H, ad E H. Itaque cum rursus sit A G, ad B G, vt D H, ad E H; & B G, ad C, vt E H, ad F: c erit ex æquali A G, ad C, vt D H, ad F. quod est propositum. Si prima igitur ad secundam eandem habuerit rationem, &c. Quod erat demonstrandum.

a 22. qn, b 18. qn

c 22. quinti.

SCHOLIVM.

HAEC propositio vera est, siue magnitudines AB, BG, & C, sint eiusdem generis cum magnitudinibus DE, EH, & F, siue non, vt ex demonstratione constat.

EODEM fere modo ostendetur in omni genere proportionis id, quod Theoremate sexto huius lib. demonstratum est in multiplicibus magnitudinibus duntaxat, Videlicet.

SI duæ magnitudines ad duas magnitudines eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habeant ad easdem eandem proportionem: & reliquæ ad easdem eandem proportionem habebunt.

HABEANT enim AG, DH, ad C, & F, eandem proportionem, hoc est, sit AG, ad C, vt DH, ad F. Item de-

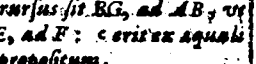
tracta

tracta AB, DE, ad easdem C, E, eandem habeant proportionem; ita vt sit quoque AB, ad C, vt DE, ad F. Dico & reliquas BG, EH, eandem habere proportionem ad easdem C, F, hoc est, esse BG, ad C, vt EH, ad F. Cum enim sit vt AB, ad C, ita DE, ad F, erit conuertendo vt C, ad AB, ita F, ad DE. Quoniam igitur est AG, ad C, vt DH, ad F, & C, ad AB, vt F, ad DE: [a] *erit ex aequalitate AG, ad AB, vt DH, ad DE.* [b] *Diuidendo ergo erit quoque vt BG, ad AB, ita EH, ad DE. Itaque cum rursus sit BG, ad AB, vt EH, ad DE; & AB, ad C, vt DE, ad F:* [c] *erit ex aequali BG, ad C, vt EH, ad F. Quod est propositum.*

[a] 22. quinti.
[b] 17. quinti.
[c] 22. quinti.

THEOR. 25. PROPOS. 25. XXV.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.



SIT enim AB, ad CD, vt E, ad F, sitq. AB, omnium maxima, & F, minima. Dico duas A B, & F, simul esse maiores duabus CD, & E, simul. Auferatur enim ex AB, magnitudo AG, æqualis ipsi E; & ex CD, alia CH, æqualis ipsi F. Erit igitur AG, ad CH, vt E, ad F, hoc est, vt AB, ad CD. Quare cum sit tota AB, ad totam CD, vt ablata AG, ad ablatam CH: [d] erit quoque vt tota A B, ad totam C D, ita reliqua GB, ad reliquam HD: Est autem AB, (cum sit omnium maxima) maior, quam CD. Igitur & GB, maior erit quam HD. Quoniam vero AG, & E, æquales sunt; si ipsis addantur æquales F, & CH, nimirum F, ipsi AG, & CH, ipsi E; fient A G, & F, simul æquales ipsis E, & CH, simul. Additis igitur inæqualibus G B, & HD, fient AB, & F, simul maiores quam E, & CD, simul, cum GB, sit maior quam HD. Quod est propositum. Si ergo quatuor magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 19. quinti.

SCHOLIVM.

NECESSARIO autem sequitur, si antecedens magnitudo vnius proportionis fuerit omnium màxima, consequentem alterius esse omnium minimam; vt in proposito exemplo vernere licet. Cum enim sit vt AB, ad CD, ita E, ad F; & AB, prima maior quam tertia E; a erit quoque CD, secunda maior quam F, quarta. Item quia maior est AB, quam CD, erit quoque E, maior quàm F, ob eandem proportionem AB, ad CD, & E, ad F, vt in scholio propos. 14. ostendimus. Quod si è contrario antecedens vnius proportionis fuerit omnium minima, erit consequens alterius omnium maxima, vt constat, si dicatur esse F, ad E, vt CD, ad AB. Debent quoque omnes quatuor magnitudines esse eiusdem generis, alias non posset vna magnitudo componi ex maxima & minima; immo neque ex reliquis duabus. Addit hoc in loco Federicus Commandinus theorema aliud huic 25. non multum dissimile, videlicet,

a 14. quinti.

SI tres magnitudines fuerint proportionales: Maxima & minima maiores erunt quam dupla reliquæ.

SIT vt A, ad B, ita B, ad C, sitq. A, maxima, & C, minima. Dico A, & C, simul maiores esse dupla ipsius B. Sumpta enim D, ipsi B, aequali, erit, vt A, ad B, ita D, ad C. Igitur A, & C, simul maiores erunt, quàm B, & D, simul, b vt proxime demonstratum est, hoc est, quam dupla ipsius B. Quod est propositum.

b 25. quinti.

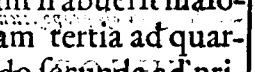
HIC finem Euclides imponit quinto libro. Verum quia Campanus, & nonnulli alij adijciunt alias quasdam propositiones, quibus sæpenumero grauissimi Scriptores, vt Archimedes, Apollonius, Ioannes Regiomontanus, & alij vtuntur, easque quasi essent Euclidis, citant; placuit eas huic quinto libro annectere, & maxima, qua fieri potest, breuitate demonstrare, necnon in numerum, ac seriem propositionum

tionum Euclidis referre. Omnes autem traduntur de magnitudinibus improportionalibus, quarum primis hæc est.

THEOR. 26. PROPOS. 26. xxvj.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem, quam quarta ad tertiam.

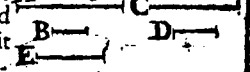
HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico proportionem B, ad A, minorem esse proportione D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; eritq. proportio A, ad B, maior quoque quam E, ad B; [a] ac propterea A, maior erit quam E. [b] Quare minor erit proportio B, ad A, maiorem, quam B, ad E, minorem: Sed vt est B, ad E, ita est conuertendo D, ad C. Igitur proportio B, ad A, minor est quoque, quam D, ad C. Quod est propositum.



[a] 10. quinti.
[b] 8. quinti.

SCHOLIVM.

EODEM fere modo demonstrabimus, si prima ad secundam habuerit minorem proportionem, quam tertia ad quartam, conuertendo maiorem esse proportionem secundæ ad primam, quam quartæ ad tertiam; dummodo vocem, maioris, mutemus in vocem, minoris, & contra.



SIT enim minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico, conuertendo, B, ad A, maiorem habere proportionem, quã D, ad C. Intelligatur enim esse E, ad B, vt C, ad D; Eritq. proportio A, ad B, etiam minor, quam E, ad B, [c] ac propterea A, minor erit, quam E. [d] Quare maior erit proportio B, ad A, minorem, quam B, ad E, maiorem: Sed vt B, ad E, ita

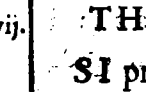
[c] 10. quinti.
[d] 8. quinti.

est conuertendo D, ad C. Igitur & proportio B, ad A, maior est, quam D, ad C. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D; erit maior proportio C, ad D, quam A, ad B. [a] *Igitur conuertendo minor erit proportio D, ad C, quam B, ad A, ac proinde maior erit proportio B, ad A, quam D, ad C. Quod est propositum.*

THEOR. 27. PROPOS. 27.

SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem proportionem, quam secunda ad quartam.



HABEAT enim A, ad B, maiorem proportionem, quam C, ad D. Dico permutando maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam B, ad D. Intelligatur namque esse E, ad B, vt C, ad D, eritq. proportio A, ad B, maior etiam quam E, ad B: [b] Ideoque A, maior erit quam E. [c] Quare maior erit proportio A, ad C, quam E, ad C. [d] Quoniam vero permutando est, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, maior quoque erit quam B, ad D. Quod est propositum.

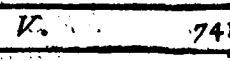
SCHOLIVM.

SIMILITER ostendemus, si prima ad secundam minorem habuerit proportionem, quam tertia ad quartam, vicissim prima ad tertiam minorem esse proportionem, quã secunda ad quartam.

SIT namque minor proportio A, ad B, quam C, ad D. Dico permutando, minorem quoque esse proportionem A, ad C, quã B, ad D. Intelligatur n. esse E, ad B, vt C, ad D;

Eritque

Eritque proportio A, ad B, minor quoque, quam E, ad B; a Ac propterea A, minor erit, quã E. b Quare minor erit proportio A, ad C, quam E, ad C, c Sed permutando, vt E, ad C, ita B, ad D. (cum posita sit E, ad B, vt C, ad D.) Igitur proportio A, ad C, minor quoq; erit, quã B, ad D. Quod est propositũ.



a 10. quinti. b 8. quinti c 16. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio A, ad B, quam C, ad D, erit maior proportio C, ad D, quàm A, ad B. d Ergo permutando, maior etiam erit proportio C, ad A, quam D, ad B: e ac proinde conuertendo, minor erit proportio A, ad C, quàm B, ad D. Quod est propositum.

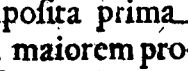
d 27. quinti. e 26. quinti.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

xxviij.

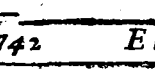
SI prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: Habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam.

SIT maior proportio A B, ad BC, quam DE, ad EF. Dico & componendo maiorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, maior quoque, quam GB, ad BC; f Ideoque AB, maior quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, maior quam GC; g maiorque proptereà erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, h vt est GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Maior ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.



f 10. quinti. g 8. quinti. h 18. quinti.

SCHOLIVM.



EADEM ratione ostendemus, si proportio prima ad secundam minor fuerit, quam tertia ad quartam, minorem quoque esse proportionem primæ et secundæ simul, ad secundam, quam tertiæ & quartæ simul, ad quartam.

SIT enim minor proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF; Dico componendo minorem esse proportionem AC, ad BC, quam DF, ad EF. Intelligatur enim esse GB, ad BC, vt DE, ad EF; eritque proportio AB, ad BC, minor quoque, quam GB, ad BC; a ideoque AB, minor erit, quam GB. Addita ergo communi BC; fiet AC, minor, quam GC; b minorque proptereà erit proportio AC, ad BC, quam GC, ad BC. Sed componendo, vt GC, ad BC, ita est DF, ad EF. (quod posita sit GB, ad BC, vt DE, ad EF.) Minor ergo etiam erit proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Quod est propositum.

a 10. quinti.
b 8. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF; erit maior proportio DE, ad EF, quàm AB, ad BC; c Igitur componendo, maior quoque proportio erit DF, ad EF, quàm AC, ad BC, ac propterea, minor erit proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. quod est propositum.

c 28. 4n.

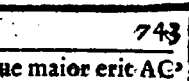
xxix. THEOR. 29. PROPOS. 29.

SI composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cũ quarta ad quartam: Habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem proportionem, quam tertia ad quartam.

SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico & diuidendo maiorem esse proportionem AB, ad BC, quam DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF, eritque proportio AC, ad BC, maior quo-

que

que proportione G C, ad BC: [a] ideoque maior erit AC, quam G C. Ablata ergo communi B C; maior erit A B, quam G B: [b] Ac propterea maior erit proportio A B, ad B C, quam G B, ad BC. [c] Sed diuidendo, vt est GB, ad BC, ita est DE, ad EF. (Posita namque est G C, ad B C, vt D F, ad EF.) Igitur maior quoque erit proportio AB, ad BC, quam D E, ad E F. Quod est propositum.

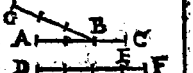


a 10. quinti. b 8. dn. c 17. dn.

SCHOLIVM.

QVOD si prima cum secunda ad secundam, minorem proportionem habuerit, quam tertia cum quarta, ad quartam; habebit & diuidendo prima ad secundam, proportionem minorem, quam tertia ad quartam.

SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico diuidendo quoque minorem esse proportionẽ AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Intelligatur enim esse GC, ad BC, vt DF, ad EF; erit q; proportio AC, ad BC, minor quoque, quã GC, ad BC: [d] *ideoque minor erit AC, quàm GC. Ablata ergo communi BC; minor erit AB, quàm GB:* [e] *Ac propterea minor erit proportio AB, ad BC, quàm GB, ad BC:* [f] *Sed diuidendo est, vt GB, ad BC, ita, DE, ad EF. (Posita namque est GC, ad BC, vt DF, ad EF.) Igitur minor quoque proportio erit AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quod est propositum.*



d 10. quinti. e 8. qnti f 17. dn.

ALITER. Quoniam minor proportio est AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quam AC, ad BC. [g] *Igitur & diuidendo, maior erit proportio DE, ad EF, quam AB, ad BC: atque idcireo minor erit proportio AB, ad BC, quam DE, ad EF. Quod est propositum.*

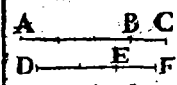
g 29. quinti.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI composita prima cum secunda, ad secundam habuerit maiorem proportionẽ, quam composita tertia cum quarta, ad

XXX.

quartam: Habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta, ad tertiam.

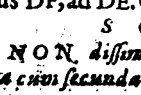


SIT maior proportio AC, ad BC, quam DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis, minorem esse proportionem AC, ad AB, quam DF, ad DE. Cum enim sit AC, ad BC, maior proportio, quam DF, ad EF; a erit & diuidendo, maior proportio AB, ad BC, quã DE, ad EF. b Quare conuertendo, minor erit proportio BC, ad AB, quam EF, ad DE; c Ac propterea & componendo, minor erit proportio totius AC, ad AB, quam totius DF, ad DE. Quod est propositum.

a 29. qn.
b 26. qn.
c 28. qn.

SCHOLIVM.

NON dissimili ratione ostendemus, si composita prima cum secunda minorem habuerit proportionem ad secundam, quam composita tertia cum quarta ad quartam, per conuersionem rationis, maiorem esse proportionem primæ ad secundam, quam tertiæ & quartæ ad tertiam.



SIT enim minor proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF. Dico per conuersionem rationis maiorem esse proportionem AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Cum enim minor sit proportio AC, ad BC, quã DF, ad EF; d erit & diuidendo minor proportio AB, ad BC, quàm DE, ad EF. Quare e conuertendo, erit maior proportio BC, ad AB, quàm EF, ad DE: f Ac proinde & componendo maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum.

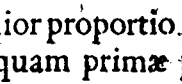
d 29. qn.
e 26. qn.
f 30. quinti.

ALITER. Quoniam minor est proportio AC, ad BC, quàm DF, ad EF; erit maior proportio DF, ad EF, quàm AC, ad BC. g Ergo per conuersionem rationis minor erit proportio DF, ad DE, quàm AC, ad AB: Hoc est, maior proportio erit AC, ad AB, quàm DF, ad DE. Quod est propositum.

g 30. qn.

THEOR. 31. PROPOS. 31. xxxj.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate maior proportio primę priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

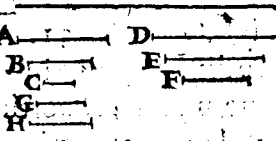


SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B quam D, ad E: Item maior B, ad C, quam E, ad F. Dico ex æqualitate maiorem quoque esse A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, vt E, ad F; eritque propterea proportio B, ad C; maior, q̃ G, ad C; a Ideoque B, maior erit quam G. Quare b maior erit proportio A, ad G, minorem, quam A, ad B, maiorem: Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Multo ergo maior erit proportio A, ad G, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E; eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G; c Ideoq. A, maior erit, quam H. d Quare maior quantitas A, ad C, habebit maiorem proportionem, quam minor quantitas H, ad eandē C: e Atqui vt H, ad C, ita est, ex æqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo propórtio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

a 10. qn.
b 8. qnti
c 10. qn.
d 8. quinti.
e 22. quinti.

SCHOLIVM.

EADEM ratione ostendemus, si fuerit proportio A, ad E,



ad B, qua D, ad E; At B, ad C, maior quam E, ad F, Vel contra, si proportio A, ad B, fuerit maior quam D, ad E; At B, ad C, eadem, qua E, ad F, ex aqualitate maiorem esse quoque proportionem A, ad C, quam D, ad F.

SIT enim primum A, ad B, vt D, ad E, sed maior proportio B, ad C, quam E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F, eritque propterea proportio B, ad C, maior, quam G, ad C: a Ideoque B, maior erit quam G. b Quare maior erit proportio A, ad G, quam A, ad B. Ponitur autem A, ad B, vt D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit, quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E, eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G, c Ideoque A, maior erit, quã H. d Quare maior erit proportio A, ad C, quam H ad C. e Atqui vt H, ad C, ita est, ex aqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo proportio quoque erit A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

a 10. quinti. b 8. quinti. c 10. quinti. d 8. quinti. e 22 quinti.

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quam D, ad E, sed B, ad C, vt E, ad F. Intelligatur esse G, ad C, vt E, ad F, eritque propterea etiam B, ad C, vt G, ad C: f Ideoque B, ipsi G, aqualis erit. g Quare erit A, ad G, vt A, ad B. Ponitur autem proportio A, ad B, maior quam D, ad E. Igitur & proportio A, ad G, maior erit quam D, ad E. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt D, ad E. eritque propterea maior proportio A, ad G, quam H, ad G, h Ideoque A, maior erit, quam H. i Quare maior proportio erit A, ad C, quam H, ad C. k Atqui vt H, ad C, ita est, ex aqualitate, D, ad F. (quoniam vt D, ad E, ita est H, ad G; & vt E, ad F, ita G, ad C.) Maior ergo erit quoque proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

f 9 quin. g 7. quinti. h 10. quinti. i 8. quin. k 22. quinti.

NON dissimiliter demonstrabimus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam proportionem extremarum esse minorem. Idemque eueniet, si fuerit A, ad B, vt D, ad E; sed minor sit proportio B, ad C, quam E, ad F. Aut contra, si proportio A, ad B, fuerit minor, quam D, ad

E, at B, ad C, sit, vt E, ad F. Eadem namque semper erit demonstratio, si modo vocem, maioris, vbique permutes in vocem, minoris, vt patet.

QVOD si plures fuerint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum, sine vna tantum maior, quã vna, vel dua. &c. ostendemus maiorem vel minorem quoque esse proportionem primæ priorum ad vltimam, quam primæ posteriorum ad vltimam, ea methodo, quam propos. 22. tradidimus: adhibendo propos. 22. loco huius propos. 3 1. quando tres magnitudines vnius ordinis proportionales sunt tribus magnitudinibus alterius ordinis. Item vsurpanda hoc scholium, quando vna tantum proportio in tribus magnitudinibus æqualis est vni tãtũ proportioni in tribus magnitudinibus alterius ordinis.

NAM si maior est proportio A, ad B, quam E, ad F; & maior B, ad C, quam F, ad G, & maior C, ad D, quam G, ad H; [a] *erit ex æquo maior proportio A, ad C, quam E, ad G. Quia igitur rursus maior proportio est A, ad C, quam E, ad G; & maior C, ad D, quam G, ad H;* [b] *erit quoque ex æquo maior proportio A, ad D, quam E, ad H.*

A.	B.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

a 31. gn.

b 31. gn.

QVOD si tres magnitudines A, B, C, tribus E, F, G, proportionales sint, sed maior sit proportio C, ad D, quam G, ad H: [c] *erit ex æquo A, ad C, vt E, ad G. Ergo ex hoc scholio, maior proportio erit A, ad D, quam E, ad H.*

c 22. quinti.

SI vero maior proportio sit A, ad B, quam E, ad F; sed tres B, C, D, proportionales sint tribus F, G, H, erit hoc scholio, maior proportio A, ad C, quam E, ad G; Et rursus maior A, ad D, quam E, ad H.

SI autem maior sit proportio A, ad B, quã E, ad F: sed B, ad C, vt F, ad G; at maior proportio C, ad D, quam G, ad H. Vel A, ad B, vt E, ad F, sed maior proportio B, ad C, quam F, ad G; at C, ad D, vt G, ad H, erit semper ex hoc scholio, maior proportio A, ad C, quam E, ad G: ac proinde rursus maior A, ad D, qua E, ad H &c.

A.	E.
B.	F.
C.	G.
D.	H.

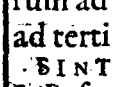
IDEM

IDEM concludes, si omnes proportiones unius ordinis sint minores omnibus proportionibus alterius ordinis, uel una uel duæ. Item si sint plures magnitudines, ut propositione 22. diximus.

xxxij. THEOR. 32. PROPOS. 32.

SI sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.

SINT tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, sitque maior proportio A, ad B, quam E, ad F, Item maior B, ad C, quam D, ad E, Dico esse quoque maiorem proportionem ex æqualitate A, ad C, quam D, ad F. Intelligatur enim esse G, ad C, ut D, ad E, eritque propterea proportio B, ad C, maior quam G, ad C. a Ideoq. maior erit B, quam G. b Quare maior erit proportio A, ad G, minorem, quã eiusdem A, ad B, maiorem; Est autem proportio A, ad B, maior quam E, ad F. Multo ergo maior est proportio A, ad G, quam E, ad F. Intelligatur rursus esse H, ad G, vt E, ad F; Eritque propterea maior proporto A, ad G, quam H, ad G; c ideoque maior erit A, quam H. d Quocirca A, maior ad C, maiorem habebit proportionem, quam H, minor ad eandem C. e At ut H, ad C, ita est ex æqualitate, D, ad F. (Quoniam ut D, ad E, ita est G, ad C: & ut E, ad F. ita est H, ad G.) Maior ergo etiam est proportio A, ad C, quam D, ad F. Quod est propositum.

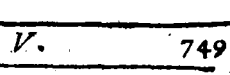


a 10. quinti. b 8. quinti. c 10. quinti. d 8. quinti. e 23. quinti.

SCHO-

SCHOLIVM.

EADEM ratione, si fuerit proportio A, ad B, qua E, ad F, At B, ad C, maior quam D, ad E. Vel contra, proportio A, ad B, maior, quam E, ad F, At B, ad C, eadem, qua D, ad E, ostendemus, ex aequalitate maiorem esse proportionem A, ad C, quam D, ad F, ut in proposita figura perspicitur.



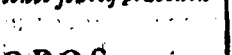
HAVD secus ostendemus, si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint, etiam extremorum proportionem esse minorem, &c.

QVOD si fuerint plures magnitudines tribus, demonstrabimus, maiorem quoque vel minorem esse proportionem primae priorum ad ultimam, quam prima posteriorum ad ultimam, ea arte, qua usi sumus propos. 23. &c. Quae omnia perspicua sunt, si diligenter demonstrationes scholij praecedentis propos. considerentur.

THEOR. 33. PROPOS. 33. xxxiij.

SI fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum.

SIT maior proportio totius AB, ad totam CD, quam ablatae AE, ad ablatam CF. Dico & proportionem reliquae EB, ad reliquam FD, maiorem esse, quam totius AB, ad totam CD. Cum enim maior sit proportio AB, ad CD, quam AE, ad CF; [a] erit quoque permutando, maior proportio AB, ad AE, quam CD, ad CF; [b] ac proinde rea, per conuersionem rationis, minor erit proportio AB, ad EB, quam CD, ad FD, [c] Permutando igitur, minor quoque erit proportio AB, ad CD, quam EB, ad FD, hoc est, EB, reliqua ad reliquam FD, maiorem habebit



[a] 27. quinti. [b] 30. q. [c] 27. q.

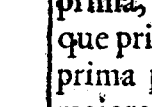
bebit proportionem, quam tota AB, ad totam CD. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

QVOD si tota ad totam habuerit minorem proportionē, quam ablata ad ablatam, habebit & reliqua ad reliquam maiorem proportionem, quam tota ad totam, vt ex modo demonstrandi liquet, ponendo semper vocem, minoris, pro voce maioris, & vocem, maioris, pro voce, minoris.

xxxiiij. THEOR. 34. PROPOS. 34.

SI sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam; & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem proportionem; quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem autem; quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.



SINT primum tres magnitudines A, B, C, & aliæ tres D, E, F, Sit autem maior proportio A, ad D; quam B, ad E; Itē maior B, ad E, quam C, ad F. Dico proportione ipsarum A, B, C, simul ad ipsas D, E, F, simul maiorem esse proportione ipsarum B, C, simul ad ipsas E, F, simul; minorem vero, proportione A, ad D; maiorem denique etiam propor-

tione

tione C, ad F. Cum enim maior sit proportio A, ad D, quam B, ad E; a erit permutando maior A, ad B, quam D, ad E, b Igitur componendo, maior erit proportio ipsarum A, B, simul ad B, quam ipsarum D, E, simul ad E; c Permutando ergo rursus, maior erit proportio A, B, simul ad D, E, simul, quam B, ad E. Itaque cum tota A, B, ad totam D, E, maiorem habeat proportionem, quam ablata B, ad ablatam E; d habebit quoque reliqua A, ad reliquam D, maiorem proportionem, quam tota A, B, ad totam D, E. Eadem ratione, maior erit proportio B, ad E, quam totius B, C, ad totam E, F. Multo ergo maior erit proportio A, ad D, quam B, C, totius ad totam E, F. e Permutando igitur, maior erit proportio A, ad B, C, quam D, ad E, F; f & componendo ergo maior est proportio totius A, B, C, ad B, C, quam totius D, E, F, ad E, F. g Et rursus permutando, maior proportio omnium A, B, C, simul ad omnes D, E, F, simul quam B, C, ad E, F, quod est primum.

a 27. gn.
b 28. gn
c 27. gn
d 33. gn.
e 27. gn.
f 28. gn.
g 27. gn.

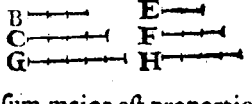
ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C, ad totam D, E, F, quam ablatæ B, C, ad ablatam E, F, h erit & maior proportio reliquæ A, ad reliquam D, quam totius A, B, C, ad totam D, E, F, quod est secundum.

h 33. gn

QVONIAM vero maior est proportio B, ad E, quam C, ad F; i erit permutando maior quoque B, ad C, quam E, ad F; k & componendo, maior totius BC, ad C, quam totius E, F, ad F; l & rursus permutando, maior B, C, ad E, F, quam C, ad Ad F. Est autē maior proportio A, B, C, ad D, E, F, vt ostendimus, quam B, C, ad E, F, Multo ergo maior erit proportio omnium A, B, C, ad omnes D, E, F, quā ultimæ C, ad ultimā F, quod est tertiū.

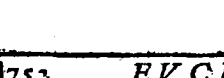
i 27. gn.
k 28. gn.
l 27. gn.

DEINDE sint quatuor magnitudines vtrobiq; cū ea dē hypothesi, hoc est, sit quoq. maior proportio tertiæ C, ad F, tertiā, quā G, quartæ ad H. quartam. Dico eadē consequi,



Vt enim iam in tribus est ostensum, maior est proportio B, ad E, quam B, C, G, ad E, F, H. Multo ergo maior

erit



erit A,ad D,quam B,C,G,ad E, F. H, [a] Permutando ergo minor erit A,ad B,C,G, quã D,ad E,F,H, [b] & componendo maior A,B,C,G,ad B,C, G,quam D,E,F,H,ad E,F,H,[c] & permutando A, B, C,G, ad D, E, F, H, maior quam B, C, G, ad E, F, H. quod est primum.

ITAQVE cum sit maior proportio totius A, B, C,G, ad totam D,E,F,H,quam ablatæ B,C,G,ad ablatam E,F, H,[d] erit & reliquę A, ad reliquam D, maior proportio, quam totius A, B, C, G, ad totam D,E,F,H. quod est secundum.

QVONIAM vero,vt in tribus est demonstratum,maior est proportio B,C,G,ad E,F,H,quam G,ad H;& maior A,B,C,G,ad D,E,F,H,quam B,C,G,ad E,F,H,vt fuit ostensum;multo maior erit proportio A, B,C,G,ad D,E, F, H, quam vltimæ G,ad vltimam H; quod est tertium.

EADEM arte concludes,eadem consequi in quinque magnitudinibus per quatuor;& in sex per quinque,& in septem,per sex,&c. quemadmodum ostendimus in quatuor,per tres.Constat ergo totum Theorema,&c.

FINIS ELEMENTI QVINTI.

EVCLIDIS ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.

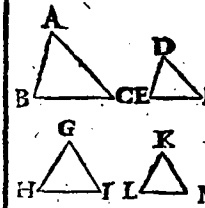
I.

SIMILES figuræ rectilineæ sunt, quę & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.

VT triangula *ABC*, *DEF*, *similia* dicentur, *si fuerint æquiangula*, *ita vt* angulus *A*, *angulo D*; *& B*, *ipsi E*; *& C*, *ipsi F*, *æqualis sit*: *Item latera circa æquales angulos proportionalia*, *hoc est*, *vt AB*, *ad AC*, *ita DE*, *ad DF*; *& vt AB*, *ad BC*, *ita DE*, *ad EF*, *& vt AC*, *ad CB*, *ita DF*, *ad FE*.

QVOD *si anguli vnius æquales fuerint angulis alterius*, *singuli singulis*, *at latera circa æquales angulos non proportionalia*, *aut contra*; *non dicentur tales figuræ similes*: *cuiusmodi sunt quadratum*, *& figura altera parte longior*. *Hæ etenim figuræ habent quidem angulos æquales*, *vt-*

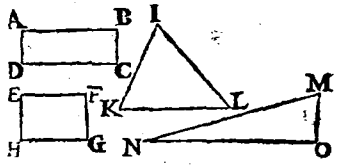
pote rectos, at latera vnius lateribus alterius proportionalia non sunt, quippe cum latera quadrati circa quemuis angulum rectum habeant proportionem aqualitatis, latera vero figura altera parte longioris circa quemuis angulum rectum, proportionem inaqualitatis. Ex quibus constat, omnes figuras rectilineas aquiangulas, & aquilateras, quæ & angulos & latera habent numero aqualia, esse similes, quanquam inter se maxime sint inaquales. Cuiusmodi sunt triangula aquilatera GHI, KLM. Propter laterum enim aqualitatē, erit GH, ad GI, vt KL, ad KM. Item GH, ad HI, vt KL, ad LM, & GI, ad IH, vt KM, ad ML, cum semper sit proportio aqualitatis. Idem dicendum est de quadratis, pentagonis aquilateris & aquiangulis, nec non de hexagonis, heptagonis, octogonis, & de alijs id genus figuris rectilineis aquiangulis, atque aquilateris.



I I.

RECIPROCAE autem figuræ sunt, cum in utraque figura antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.

VT si in parallelogrammis ABCD, EFGH, latera AB, BC, ita proportionalia fuerint lateribus EF, FG, vt vtrobique sit et antecedens, & consequens diuersarum proportionum, hoc est, vt sit ea proportio AB, ad EF, quæ FG, ad BC, seu eadem AB, ad FG, quæ EF, ad BC; (vtroque enim modo AB, est antecedens vnius proportionis & BC, consequens alterius, in figura ABCD, quemadmodum & primo modo EF, est consequens vnius, & FG, antecedens alterius; vel secundo modo FG, conse-



quens,

quens, & EF, antecedens, in figura EFGH,) dicentur huiusmodi parallelogramma reciproca, quamuis similia non sint. Similiter erunt triangula IKL, MNO, recipooca, si fuerit vt IK, ad MN, ita MO, ad IL; vel vt IK, ad MO, ita MN, ad IL. Neque memini me inuenisse apud Geometras vsum reciprocarum figurarum in alijs figuris, quàm in parallelogrammis, & triangulis.

III.

SECVNDVM extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cum vt tota ad maius segmentum, ita maius ad minus se habuerit.

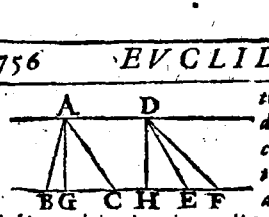
SI linea recta quauis AB, ita diuidatur in C, inaqualiter, vt sit, quemadmodũ tota AB, ad maius segmentũ AC, ita AC, maius segmentum ad CB, minus segmentum; dicetur diuisa esse secundum extremam, & mediam rationem.

Quam quidem diuisionem docebit Euclides propos. 30. huius lib. eamque sub alijs verbis iam docuit lib. 2. propos. 11. vt fiet perspicuum propos. 30. huius. lib. Sunt autem pene innumera dignitates, atque vtilitates linea hoc modo diuisa, vt ex libris Stereometria constabit, praesertim lib. 13. vt non immerito à quibusdam dicta sit diuina proportio, in quam linea eo modo est Diuisa.

IIII.

ALTITVDO cuiusque figuræ est linea perpendicularis a vertice ad basin deducta.

SI a vertice A, trianguli ABC, ad basin BC, perpendicularis ducatur AG, dicetur haec perpendicularis, altitudo trianguli ABC; ita vt tantam dicatur habere altitudinem



triangulum, quanta est perpendicularis AG. Sic etiã perpendicularis DH, ducta a D, vertice trianguli DEF, ad basin EF, ad partes E, protractam, appellabitur altitudo trianguli DEF. Itaque si duarum figurarum perpendiculares a verticibus ad bases (siue ipsa protracta sint, siue non) demissæ, fuerint æquales, eandem dicentur huiusmodi figura habere altitudinem. Tunc autem huiusmodi perpendiculares erunt æquales, cum bases figurarum, ac uertices in eisdem constituti fuerint parallelis, cuiusmodi sunt perpendiculares AG, DH, triangulorum ABC, DEF, in eisdem parallelis constitutorum. Cum enim anguli AGH, DHG, interni ex eadem parte sint duobus rectis æquales, immo duo recti; a erunt recta AG, DH, parallela; Sunt autem & AD, GH, parallela, eo quod ponantur triangula in eisdem esse parallelis constituta. Igitur parallelogrammum erit ADHG; b ac propterea latera opposita AG, DH, æqualia erunt. Eandem igitur dicentur ea triangula habere altitudinem. Quod si in eisdem triangulis vertices ponantur C, & F, bases vero AB, & DE; non habebunt ea eandem altitudinem. Perpendicularis enim ducta ex F, ad Basin DE, protractam æqualis non est perpendiculari ex C, ad basin AB, deducte, tum nec triangula ipsa in eisdem parallelis possint constitui, vt manifestum est.

a 28. primi.

b 34. primi.

RECTE vero ab Euclide altitudo figura cuiusnis definita est per lineam perpendicularem, qua a vertice ad basin deducitur: quoniam, vt scribit Ptolemæus in libello de Anælemmate, & referente Simplicio, in libro de dimensione, mensura cuiuscunque rei debet esse stata, determinataque, & non indefinita: Inter omnes autem rectas lineas, penes quas merito Geometræ, sicut & vulgus, omnia metiuntur, sola linea perpendicularis certa est, determinataque longitudinis, alia autem omnes incertæ indeterminataque. Qua de re plura scripsimus ad initium commentariorum, quos in sphæram Ioan. de sacro bosco edidimus.

V.

RATIO ex rationibus componi dici-

tur,

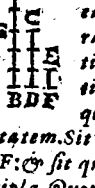
citur, cum rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.

QVONIAM denominator cuiuslibet proportionis exprimit, quanta sit magnitudo antecedens ad consequentem; (vt denominator quadruplæ proportionis, nempe 4. ostendit, in quauis proportione quadruplæ antecedentem magnitudinem quater continere consequentem; denominator vero proportionis subquadruplæ, videlicet $\frac{1}{4}$. indicat antecedentem esse partem quartam consequentis, &c.) dici solet propterea denominator a Geometris, quantitas proportionis; vt idem significet quantitas alicuius proportionis, quod denominator. Vult igitur hac definitio, proportionem aliquam ex duabus, vel pluribus proportionibus componi, quando harum denominatores, seu quantitates inter se multiplicatæ effecerint illam proportionem, seu (vt vertit Zamberrus) effecerint illius proportionis quantitatem, siue denominatorem. Vt proportio duodecuplæ componi dicitur ex duplæ, & sextuplæ; quoniam denominator proportionis duodecuplæ, nimirum 12. producitur ex multiplicatione denominatoris duplæ proportionis, nempe ex 2. in denominatorem sextuplæ, hoc est, in 6. Sic eadem proportio duodecuplæ dicitur componi ex triplæ & quadruplæ. Nam ex multiplicatione 3. in 4. producitur idem denominator 12. duodecuplæ proportionis. Eadem ratione proportio trigecuplæ componi dicitur ex duplæ, triplæ, & quintuplæ. Nam harum denominatores 2. 3. 5. inter se multiplicati gignunt 10. denominatorem illius. Sic etiam proportio duplæ dicetur componi ex sesquialteræ, & sesquitertiæ: quia sesquialteræ denominator $1\frac{1}{2}$. ductus in $1\frac{1}{3}$. denominatorem sesquitertiæ gignit 2. denominatorem duplæ. Rursus eadem proportio duplæ componetur ex sesquiseptimæ, & supertripartiente quartas. Nam harum proportionum denominatores $1\frac{1}{7}$. $1\frac{3}{4}$. inter se multiplicati procreant 2. denominatorem duplæ. Item eadem duplæ proportio componi dicetur ex subsesquiquartæ, & duplæ sesquialteræ; propterea quod harum denominatores $\frac{4}{5}$. $2\frac{1}{2}$. inter se multiplicati producunt quoque eundem denominatorem 2. proportionis duplæ.

Atque ita ex infinitis alijs proportionibus componi dicetur dupla proportio: quod etiam de quauis alia proportione dici potest, vt paulo post patebit.

PORRO quemadmodum in magnitudinibus continue proportionalibus, proportio prima ad vltimam componi dicitur ex proportione prima ad secundam, & secunda ad tertiam, et tertia ad quartam, &c. cum illa ex his intermedijs constet, & illius denominator ex harum denominatoribus inter se multiplicatis producatur, vt quinto libro defin. 10. exposuimus: ita vt si fuerint duæ proportiones æquales intermediæ, ex quibus dicitur componi, dicatur proportio prima magnitudinis ad vltimam duplicata proportionis primæ ad secundam; si tres, triplicata, &c. Sic etiam in magnitudinibus quibuscunque ordine positis, proportio prima ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam, & tertiæ ad quartam, &c. donec extiterit proportio; quoniam denominator proportionis primæ magnitudinis ad vltimam consurgit ex denominatoribus proportionum intermediarum inter se multiplicatis. Quod quidem primum inductione quadã Theonis Alexandrini, quam hoc loco adducit, confirmabimus: Deinde vero idem duabus demonstrationibus, quarum vna traditur ab Eutocio Ascalonita lib. 2. Archimedis de sphæra & Cylindro, theoremate 4. & in 1. lib. Apollonij Pergæi de conicis elementis, propos. 11. Altera autem a Vitellione lib. 1. propos. 13. suæ Perspectiuæ, comprobabimus.

THEON igitur rem propositam ita conatur absoluere.



Habeat AB, ad CD, rõnem datã, veluti duplam, aut triplã, aut quamlibet aliam; & CD, ad EF, eandẽ quoque datã. Dico quod ipsius AB, ad EF, ratio constat ex AB, ad CD, & ex CD, ad EF, ratione, vel quod ipsius AB, ad CD, rationis quantitas multiplicata in ipsius CD, ad EF, rationis quantitatẽ efficit ipsius AB, ad EF, rationis quantitatem. Sit enim primum AB, quã CD, maior; & CD, quã EF: & sit quidem AB, ipsius CD, dupla, & CD, ipsius EF, tripla. Quoniam igitur CD, ipsius EF, tripla est, ipsius autẽ CD, dupla est AB; erit AB, ipsius EF, sextupla. Quoniam si

triplum alicuius duplicamus, sit sextuplum; hoc enim est proprie compositio. Vel sic. Quoniam AB, dupla est ipsius CD, dividatur AB, in ipsis CD, aequalia, hoc est, AG, & GB: & quoniam CD, ipsius EF, tripla est; aequalis autem est AG, ipsi CD; & AG, igitur ipsius EF, tripla est: Id propterea & GB, ipsius EF, tripla est. Tota igitur AB, ipsius EF, sextupla est. Ipsius igitur AB, & EF, ratio connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.

SIMILITER autem, & si minor fuerit CD, utraque ipsarum AB, & EF, idipsum colligitur. Sit enim rursus AB, ipsius CD, tripla, At CD, ipsius EF, sit dimidia. Et quoniã CD, ipsius EF, dimidia est, ipsius autem CD, tripla est AB, erit AB, sesquialtera ipsius EF. Si enim alicuius dimidium triplicamus, habebit ipsum semel, et dimidium. At quoniam AB, ipsius CD, tripla est, & CD, ipsius EF, dimidia: qualium AB, aequaliũ ipsi CD, triũ, talium est EF, duorum. Quare sesquialterum est AB, ipsius EF. Igitur ratio ipsius AB, ad EF, connectitur per CD, medium limitem, composita ex ipsius AB, ad CD, & CD, ad EF, ratione.

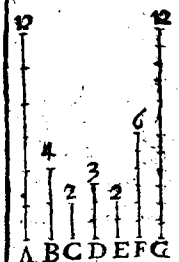
SED iam rursus sit CD, utraque ipsarum AB, & EF, maior, & sit quidem AB, ipsius CD, dimidium, & CD, ipsius EF, sesquitertium. Quoniam igitur, qualium est AB, duorum, taliũ est CD, quatuor, qualium autem CD, quatuor, talium EF, trium. Et qualium igitur AB, duorum, talium EF, triũ. Connectitur igitur rursus ratio ipsius AB, ad EF, per CD, medium limitem, quæ duorũ est ad tria. Similiter quoque & in pluribus, & in reliquis casibus. Et manifestum est, quod si a composita ratione quauis una compositarum auferatur, uno simplicium etecto, reliqua compositarum assumetur.

Hæc adverbum desumpsimus ex Theone, iuxta interpretationem Zamberti.

EVTOCII vero demonstratio ita se habet.

SINT tres magnitudines A, B, C. Dico proportionem

A, ad C, cõponi ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Quod quidem facile demõstrabitur, assumpto prius hoc principio, Quantitatem, seu denominatorem cuiusuis proportionis multiplicatum in consequentem magnitudinẽ proportionis eiusdem, producere antecedentem. Cum enim denominator indicet habitudinem antecedentis ad consequentem, necesse est, consequentem sumptam secundum denominatorem, hoc est, multiplicatam in denominatorem, restituere antecedentem. Vt quia 12. ad 3. habent proportionem quadruplam, id circo 3. multiplicata in 4. producunt 12. Itẽ quia 4., ad 20. habent proportionem subquintuplam, cuius denominator est $\frac{1}{5}$ sit, vt $\frac{1}{5}$. in consequentem 20. efficiat 4. &c. Sit igitur proportionis A, ad B, denominator D, proportionis vero B, ad C, denominator sit E, et D, multiplicans E, producat F. Dico F, esse quantitatem, siue denominatorem proportionis A, ad C, hoc est, si multiplicetur F, in C, produci A, Producatur namque G, ex multiplicatione F, in C. Dico G, ipsi A, aqualem esse, ac proinde & A, fieri ex F, in C. Cum enim D, sit denominator proportionis A, ad B, si multiplicetur D, in E, producetur A. Eadem ratione si E, multiplicetur in C, producetur B. Quoniam igitur F, & E, multiplicantes C, producunt G, & B, (nam ex F, in C, fit G, & ex E, in C, fit B, vt dictum est,) a *erit vt F, ad E, ita G, ad B. Rursus quia D, multiplicans E, & B. producit F, & A,* b *erit vt E, ad B, ita F, ad A, & permutando vt E, ad F, ita B, ad A, & conuertendo rursus, vt E, ad E, ita A, ad B: Vt autem F, ad E, ita ostensum est esse G, ad B. Igitur vt A, ad B, ita G, ad B; Ideoque aquales erunt quantitates A, & G. Quam ob rem cum G, producatur ex F, in C, producetur quoq; A, ex F, in C. propterea que F, quãtitas erit proportionis A, ad C. Quod est propositũ.*



a 18 sep.
b 17. sep.

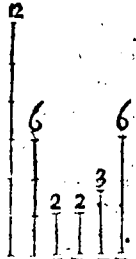
A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4
G, 100. F, 20.

SIMILIS ratio est in pluribus magnitudinibus: Semper enim proportio primæ ad vltimã componetur ex proportioni-

tionibus prima ad secundam, & secunda ad tertiam, & tertia ad quartam, &c. Vt si fuerint quatuor magnitudines A, B, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Nam si intelligantur tres magnitudines A, C, D, componetur proportio A, ad D, ex proportionibus A, ad C, & C, ad D, vt ostensum est: At vero eadem ratione proportio A, ad C, componitur ex proportionibus A, ad B, & B, ad C. Igitur proportio A, ad D, componitur quoque ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D. Quod est propositum. Idem cernes in §. 6. 7. vel quotcunque magnitudinibus.

VITELLIO denique huiusmodi affert demonstrationem.

SINT tres magnitudines A, B, C, Dico proportionem A, ad C, componi ex proportionibus A, ad B; & B, ad C. Hoc autem demonstrabitur, assumpto eadem principio Eutocij. Denominatorem videlicet proportionis multiplicatum in magnitudinem consequentē proportionis producere antecedentem magnitudinem. Sit namque D, denominator proportionis A, ad B; & E, denominator proportionis B, ad C, At F, denominator proportionis A, ad C. Demonstrandum est igitur F, produci ex D, in E, quod ita fiet. Quoniam quod ex F, prima quantitate in C, quartam producitur, aquale est ei, quod ex D, secunda in B, tertiam gignitur, cum semper producatur A; (nam ex F, denominatore in C, consequentem producitur A, antecedens; similiter ex D, denominatore in B, consequentem producitur antecedēs A,) a erit vt F, prima ad D, secundam, ita B, tertia ad C, quartam. Cum igitur E, sit denominator proportionis B, ad C; erit quoque E, denominator proportionis F, ad D. Quare E, multiplicans consequentem D, producet antecedentem F. Quod est propositum. Hæc Vitellio.



A, 100. B, 20. C, 5.
D, 5. E, 4.
F, 20.

a 19. sep.

ITEM

IDEM oſtendetur in pluribus magnitudinibus, vt prius ex Eutocio. Veluti, datis 6. magnitudinibus A, B, C, D, E, F, componetur proportio A, ad F, ex proportionibus A, ad B; B, ad C; C, ad D; D, ad E; & E. ad F. Nam vt oſtenſum eſt, proportio A, ad F, componitur ex proportione A, ad B, & B, ad F. Hac autem proportio B, ad F. componitur ex proportione B, ad C, & C, ad F: Et hac proportio C, ad F, componitur ex proportione C, ad D, & D, ad F: Atque hac tandem proportio D, ad F, componitur ex proportione D, ad E, & E, ad F. Igitur proportio A, ad F, ex omnibus proportionibus intermedijs componitur: hoc eſt, denominator proportionis A, ad F, gignitur ex quinque denominatoribus quinque proportionum intermediarum inter ſe multiplicatis.

A.B.C.D.E.F. 12.6.3.2.1.4.

EX his liquido conſtat id, quod ad defin. 10. lib. 5, docuimus: nimirum, Continuatis quotlibet quantitatibus cõtinue proportionalibus, proportionem primæ ad vltimam componi ex omnibus proportionibus intermedijs æqualibus, hoc eſt, de nominatorem proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex denominatore proportionis, quã prima habet ad ſecundam, in ſe ipſum multiplicato, & ex eodem in numerũ productum, & ſic deinceps, donec tot multiplicationes fiant vna minus, quot proportiones inter primam quantitatẽ, & vltimam ſunt interpoſitæ: Adeo vt duplicata proportio alicuius proportionis conſurgat, cum huius proportionis denominator bis ponitur, (propter duas æquales proportiones inter primam quantitatem, & tertiam poſitas) atq; ita in ſe multiplicatur; triplicata vero, quãdo idẽ denominator ter ponitur, (propter tres proportiones æquales inter primã quãtitatẽ, & tertiam poſitas) atq; ita multiplicatur, primum in ſe, deinde iterum in numerum productũ. Et ſic de quadruplicata, quintuplicata, & de alijs dicendum eſt in infinitum. Eſt enim eadem demonſtratio in magnitudinibus continue proportionalibus, & in magnitudinibus non proportionalibus: ſolum in illis denominatores æquales erunt. Vt ſi A, B, C, ponantur continue proportionales, æquales erunt denominatores D. E; & F. erit denominator proportionis duplicata, &c.

ETSI

ETSI autem demõstratio tam Eutocij, quam Vitellionis proprie quadrat in proportiones tantum rationales, cum vtraque propositionibus lib. 7. Euclidis nitatur: quia tamen, quæ de numerorũ proportionibus demonstrantur, conueniũt quoque magnitudinibus incommensurabilibus, hoc est, proportionibus irrationalibus, dici potest vtraque demonstratio omnibus proportionibus conuenire.

VERVM etiãsi non constaret, propositis pluribus magnitudinibus, denominatorẽ proportionis, quam prima ad vltimam habet, produci ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum inter se, vt demonstrauimus, nõ tamen propterea demonstrationes, in quibus compositio proportionum adhibetur, minus certæ erunt: quippe cum in illis hæc denominatorum multiplicatio nõ vsurpetur. Nam quẽadmodum, propositis pluribus magnitudinibus continue proportionalibus, primam ad tertiam dixit Euclides definit. 10. lib. 5. habere proportionem duplicatam eius, quam prima habet ad secundam; nimirum compositam ex duabus proportionibus intermedijs, æqualibus: primæ vero ad quartam habere proportionem triplicatam eius, quam prima ad secundã habet, hoc est, compositã ex tribus intermedijs proportionibus æqualibus & sic deinceps; nulla facta mentione multiplicationis denominatorum: Ita quoque, si ponantur ordine plures magnitudines eiusdem generis non continue proportionales, dicetur prima ad vltimã habere proportionem compositam ex omnibus proportionibus intermedijs, licet inter eas nõ sint omnes æquales, siue aliquæ sint maioris inæqualitatis, & aliquæ æqualitatis, & aliquæ minoris inæqualitatis, siue omnes eiusdem generis sint, solum eam ob causam, quod illæ proportiones intermediæ sint inter extremas duas magnitudines interiectæ; quemadmodum defin. 10. lib. 5. proportio prima ad tertiam dicebatur duplicata, hoc solo nomine, quia duæ proportiones æquales interpositæ sunt inter extremas duas magnitudines: Adeo vt non sit aliud discrimen inter hanc compositionem proportionum, & illam duplicationem, triplicationem, &c. quæ lib. 5. explicata est, quam quod in duplicatione, triplicatione, &c. proportionum interijciuntur proportiones omnes æqua-

les,

les, in compositione vero proportionum non necesse est, interpositas proportiones æquales esse. Multiplicatio tamen denominatorum vtilis est, vt sciamus, quanam sit illa proportio, quæ alterius dicitur duplicata, triplicata &c. vel quæ ex propositis proportionibus composita esse dicitur.

VERBI gratia. Vt sciamus, quæ proportio sit illa, quæ dicitur duplicata proportionis decuplæ, ponemus 10 denominatorem decuplæ proportionis bis hoc modo, 10. 10. & vnũ in alterum ducemus. Numerus enim genitus 100. denominator est proportionis, quæ decuplæ est duplicata. Vt autem habeamus denominatorem proportionis, quæ eiusdem decuplæ triplicata dicitur, ponemus 10. denominatorem ter hoc modo 10. 10. 10. & primum in secundum ducemus, & numerum productum 100. in tertium. Nam numerus hic procreatus 1000. denominat proportionem decuplæ triplicatam. Quod de alijs quoque proportionibus dicendum est. Sed hoc etiam discemus absque denominatorum multiplicatione. Nam si continuentur tres numeri in proportione data, vt in tractatu proportionũ, cũ de proportionalitate Geometrica agebamus, docuimus, habebunt duo extremi numeri proportionem datæ proportionis duplicatam: si vero continuentur quatuor numeri, habebunt extremi duo triplicatam proportionem datæ proportionis. Conferendus autem est maior cum minore, quando data proportio est maioris inæqualitatis; minor vero cum maiore, cum data proportio minor inæqualitatis est. Veluti si desideretur proportio decuplæ proportionis duplicata, continuabimus tres numeros in proportione decuplæ hoc modo, 1. 10. 100. Vel 3. 30. 300. Nam proportio 100. ad 1. vel 300. ad 3. quæ centuplæ est, dicetur decuplæ duplicata. Eodem modo proportio 1. ad 100. vel 3. ad 300. quæ subcentuplæ est, dicitur duplicata proportionis subdecuplæ 1. ad 10. vel 3. ad 30.

EADEM ratione vt cognoscamus, quanam sit proportio illa, quæ verbi gratia componi dicitur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, statuemus ordine harum denominatores hoc modo, 3. 2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. eosque inter se multiplicabimus, primum 3. in 2. deinde productum numerum 6. in $1\frac{1}{2}$. & huncrursus numerum procreatum 9.

in $1\frac{1}{3}$.

in $1\frac{1}{3}$. & sic deinceps, si plures essent denominatores. Vltimus enim productus 12. est denominator proportionis, quæ ex datis proportionibus cõponi dicitur; ita vt proportio duodecupla componi dicatur ex tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia. Hoc autẽ intelligemus etiam sine hac multiplicatione denominatorum. Si namque proportiones componentes continuentur in numeris, ita vt primus ad secundum habeat primam proportionem componentem, secundus ad tertium secundam, tertius ad quartum tertiam, quartus ad quintum quartam, & ita deinceps; erit proportio, quam primus numerus habet ad vltimum, composita ex datis proportionibus. Vt in proximo exemplo proportiones datæ, videlicet tripla, dupla, sesquialtera, & sesquitertia, continuantur in his numeris 36. 12. 6. 4. 3. Vel in his 108. 36. 18. 12. 9. Vel in his 12. 4. 2. $1\frac{1}{3}$. 1. Vbique enim primus numerus ad secundum proportionem habet triplam, secundus ad tertium duplam, tertius ad quartum sesquialteram, & quartus ad quintum sesquitertiam. Proportio ergo primi ad vltimum, quæ duodecupla est, componi dicitur ex quatuor illis proportionibus, vt prius. Quo pacto autem quotuis proportiones continuandæ sint in numeris integris minimis, docet Euclides lib. 8. propos. 4.

ITAQVE cum Euclides demonstrat hoc lib. propos. 23. aquiangula parallelogramma habere proportionem compositam ex duabus proportionibus, quas duo latera circa vnum angulum vnius habent ad duo latera circa angulum æqualem alterius, nihil aliud intelligit, quàm si duæ illa proportiones laterum continuentur in tribus quantitatibus, eam proportionem parallelogramma inter se habere, quam prima quantitas ad tertiam habet. Vt si proportio vnius lateris primi parallelogrammi ad vnum latus secundi fuerit, vt 8. ad 3. proportio vero alterius lateris ad alterum latus, vt 1. ad 2. nihil aliud est intelligendum, quam si sumantur tres numeri, 24. 9. 18. quorum primus ad secundum est, vt 8. ad 3. & secundus ad tertium, vt 1. ad 1. proportionem parallelogrammi primi ad secundum esse eandem, quam habet primus numerus 24. ad tertium 18. quæ est sesquitertia. Proportio enim 24. ad 18. componitur,

vt dictum est, ex proportionibus 24. ad 9. & 9. ad 18. hoc est, ex proportionibus 8. ad 3. & 1. ad 2. quas inter latera esse diximus.

PORRO quemadmodum interpretes nonnulli Euclidis volebant in defin. 10. lib. 5. duplicatam proportionem, & triplicatam, &c. verè esse maiorem illa, cuius duplicata, vel triplicata dicitur, nimirum duplam, vel triplam, &c. ac propterea eam definitionem esse intelligendam de magnitudinibus continue proportionalibus in proportione maioris inaqualitatis; quod tamen falsum esse ibi indicauimus: ita ijdem volunt etiam in hac compositione proportionum, extremorum proportionem, qua ex proportionibus intermedijs componi dicitur, vere esse maiorem qualibet intermediarum componentium, vtpote conflatam ex additione omnium intermediarũ proportionum inter se, ac proinde omnes intermedias proportiones debere esse minores extremorum proportione. Verum hoc falsum est, & Euclidi omnino repugnans, vt ex proximo exemplo, quod ex propos. 23. huius lib. protulimus, perspicuum est. Nam propositis tribus hisce numeris, 24. 9. 18. qui habent easdem proportiones ordine inter se, quas latera vnius parallelogrammi ad latera alterius parallelogrammi habent; erit proportio parallelogrammi ad parallelogrammum eadem, qua 24. ad 18. nimirum ex laterum proportionibus composita, vt Euclides demonstrat. Quis autem non videt proportionem 24. ad 18. qua sesquitertia est, multo minorem esse proportione 24. ad 9. qua dupla est superbipartiens tertias? Sed de hac re plura scribemus ad finem lib. 9.

HAEC cum ita sint, si quis velit habere quotlibet proportiones datam proportionem componentes, id est, quarum denominatores inter se multiplicati gignant data proportionis denominatorem, statuendi erunt inter duos numeros data proportionis quoscunque, tot numeri medij quicunque, quot proportiones componentes desiderantur, minus vno. Vt si quis velit tres proportiones, ex quibus centupla proportio componatur, satisfiet quæstioni, si inter 100. & 1. duos numeros ponamus medios, hoc modo, 100. 50. 10. 1. Nam extremorum proportio 100. ad 1. componitur ex intermedijs tri-

bus

bus, hoc est, ex dupla, quintupla, & decupla. Ita quoque si alios numeros statuas medios hoc modo, 100.10.3.1. componetur eadem proportio 100. ad 1. ex decupla, tripla sesquitertia, & tripla. Sic etiam vides hic, 2.3.1.10.1. duplam proportionem compositam esse ex quatuor, nimirum ex sub sesquialtera, tripla, subdecupla, & decupla. Quod si quis petat quotuis proportiones datam proportionem componentes, quæ etiam omnes datæ sint præter vnam, continuabimus ab vno extremo data proportionis omnes datas proportiones componentes ordine. Ha enim cum proportione, quam vltimus medius ad alterum extremum data proportionis habet, component datam proportionem. Vt si quis dicat, da mihi quinque proportiones, quarum quatuor sint, dupla, tripla, sesquialtera, & quintupla sesquitertia, componentes proportionem sesquialteram inter 9. & 6. statuemus hos quatuor numeros medios, 9. $4\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $\frac{3}{1\frac{1}{6}}$. 6. ita vt 9. ad $4\frac{1}{2}$. habeant proportionem duplam, & $4\frac{1}{2}$. ad $1\frac{1}{2}$. triplam, & $1\frac{1}{2}$. ad 1. sesquialteram: & 1. ad $\frac{3}{1\frac{1}{6}}$. quintuplam sesquitertiam. Ex his etenim quatuor, vna cum proportione $\frac{3}{1\frac{1}{6}}$. ad 6. quæ eadem est, quæ 1. ad 32. componitur proportio sesquialtera 9. ad 6. Idem eueniet, si data quatuor proportiones continuentur à minori extremo 6. hoc modo, 6.12.36.54.288.9. ita vt 12. ad 6. habeant proportionem duplam; & 36. ad 12. triplam; & 54. ad 36. sesquialteram; & 288. ad 54. quintuplam sesquitertiam. Nam quinta proportio 9. ad 288. eadem est, quæ prius $\frac{3}{1\frac{1}{6}}$ ad 6. qualis est 1. ad 32.

EX his nullo negotio satisfaciemus quæstioni, quæ quispiam postulas sibi dari quotuis numeros, qui inter se multiplicati procreent datum quemcunq. numerum. Si namq, sumantur duo numeri habentes proportionem à dato numero denominatam, & inter eos statuantur tot numeri quicunque minus vno, quot numeri desiderantur, erunt denominatores proportionum intermediarum, qui quæruntur. Nam ij inter se multiplicati producunt denominatorẽ proportionis extremorum, vt demonstratũ est, hoc est, numerũ datum. Veluti si quis petat tres numeros, ex quorum mutua multiplicatione gignantur 100. statuemus inter duos

numeros 500. 5. centuplam proportionem habentes, duos medios numeros quoscunque, hoc modo 500. 250. 50. 5. eruntq. tres quæsiti numeri, 2 5. 10. nimirum denominatores proportionum 500. ad 250. & 250. ad 50. & 50. ad 5. Nam ex 2. in 5. fiunt 10. & ex 10. in 10. fiunt 100. Quòd si quis postulet vnùm numerum, qui vna cum quotlibet alijs datis, si inter se multiplicentur, producat datum quemcunque numerum: Sumendi erunt rursus duo numeri proportionem habentes à dato numero, qui produci debet, denominatam, & ab alterutro eorum continuandæ proportiones à datis alijs numeris denominatæ. Denominator enim proportionis inter alterum numerum, & vltimum continuatorum erit numerus, quem quærimus. Vt si dentur hi quatuor numeri, 2. 3. 1 1/2. 5 1/3. quæraturq. quintus alius, qui in numerum ex illorum mutua multiplicatione productum ductus gignat datum hunc numerum 1 1/2. accipiemus duos numeros 9. & 6. proportionem sesquialteram habentes à dato numero 1 1/2. denominatam; & à 9. continuabimus quatuor psoportiones à 2. 3. 1 1/2. 5 1/3. denominatas, hoc modo, 9. 4 1/2 1 1/2. 1 3/6. 6. Quintus enim numerus quæsitus erit denominator proportionis 3/6. ad 6. nimirum 1/2. Nam quinque hi numeri 2. 3. 1 1/2. 5 1/3. 1/2. quorum priores quatuor dati sunt, quintus autem inuentus, inter se multiplicati procreant datum numerum 1 1/2. Idem quintus numerus 1/2. inuenietur, si quatuor proportiones à datis numeris denominatæ continuentur à numero 6. hoc modo, 6. 12. 36 54 288. 9. Denominater enim proportionis 9. ad 288. est 1/2. vt prius. Sic etiam si quarendi sint quatuor numeri, qui inter se multiplicati procreent 1. Statuemus inter quosuis duos numeros æquales proportionem æqualitatis ab 1. denominatam habentes, tres medios numeros quoslibet, vt hic vides, 4 2. 1. 3. 4. Nam denominatores proportionum 4. ad 2. & 2. ad 1, & 1. ad 3. & 3. ad 4. nimirum, 2. 2 1/3 3/4. sunt quatuor numeri, qui quærumtur, quippe cum inter se multiplicati gignant 1.

FACILIVS huiusmodi quæstiones soluuntur, si tot numeri quicunque, minus vno, quot petuntur, inter se multiplicentur, & per vltimum numerum productum, diuida-

tur

tur datus numerus, qui gigni debet. Quotiens enim & assumpti numeri, qui multiplicati inter sunt, erunt quos quærimus. Vt in proxima quæstione, si hi tres numeri, verbi gratia, 4. 5. 6. inter se multiplicentur, & per numerum productum 120. diuidatur 1. qui produci debet, fiet Quotiens $\frac{1}{120}$. Quatuor ergo numeri quæsiti sunt 4. 5. 6. $\frac{1}{120}$. Nam ex 4. in 5. fiunt 20. & ex 20. in 6. fiunt 120. & ex 120. in $\frac{1}{120}$. fit 1.

POSTREMO neque hoc prætermittendum est, videlicet: Quemadmodum, ordine positis quotcunque numeris, denominator proportionis extremorum producitur ex omnibus denominatoribus intermediarum proportionum, vt demonstrauimus; ita positis quotcunque numeris ordine, ita tamen, vt quilibet insequens sit suo antecedente maior, differentia extremorum coacernatur ex omnibus differentijs intermediorum numerorum. Vt hic 3. 7. 12. 20. 30. 100. 713. differentia inter 3. & 713. est 710. At differentia inter 3. & 7. est 4. Inter 7. & 12. est 5. Inter 12. & 20. est 8. Inter 20. & 30. est 10. Inter 30. & 100. est 70. Inter 100. denique & 713. est 613. quæ omnes differentiæ 4. 5. 8. 10. 70. 613. conficiunt 710. differentiam extremorum.

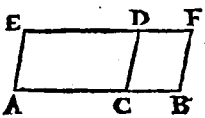
ATQVE hæc dicta sunt de quinque definitionibus ab Euclide hoc 6. lib. positis, quibus addendam esse censemus sequentem sextam, qua multum conducet, vt facilius intelligantur 27 28. 29. & 30. propositiones huius libri, & quam plurima alia decimi libr. Ea autem est eiusmodi:

VI.

PARALLELOGRAMMVM secundum aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam lineam. Excedere vero, quando occupat maiorem lineam, quam sit ea, secundum quam appli-

catur: ita tamen, vt parallelogrammum deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallelogrammo applicato, constituatque cum eo totum vnum parallelogrammum.

SIT data recta linea AB, supra quam constituatur parallelogrammum ACDE, quod non occupet totam lineam AB, sed desit CB; & ducta BF, parallela ipsi CD, donec cum ED, protracta conueniat in F, compleatur totum parallelogrammum ABFE. Parallelogrammum igitur AD, applicatum secundum rectam AB, deficere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, appelletur defectus.



RVRSVS sit data recta linea AC, supra quam constituatur parallelogrammum ABFE, quod habeat latus AB, maius recta data AC; & ducatur CD, ipsi BF, parallela. Parallelogrammum igitur AF, applicatum secundum rectam AC, excedere dicitur parallelogrammo DB, ita vt DB, vocetur excessus.

HIC autem defectus DB, vel excessus; in rectangulis quidem esse potest vel quadratum, vel altera parte longior figura: In non rectangulis autem vel Rhombus, vel Rhomboides, vt perspicuum est.

1. ## THEOR. 1. PROPOS 1.

TRIANGVLA & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

SINT duo triangula ABC, DEF, eandem habentia altitudinem, quorum bases BC, EF. Item duo parallelogramma CG, EH, eiusdem altitudinis, quorum eæ-

dem

dem baſes BC, EF. Dico ita eſſe triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH, vt eſt baſis BC, ad baſin EF. Hoc eſt, ſi baſis BC, ſtatuatur prima magnitudo, & baſis EF, ſecunda: At triangulum ABC, vel parallelogrammum CG, tertia, & triangulum DEF, vel parallelogrammum EH, quarta, æquemultiplicia primæ ac tertiæ ab æquemultiplicibus ſecundæ & quartæ vel vna deficere, vel vnà æqualia eſſe, vel vnà excedere, vt definitio 6. lib. 5. exigit. Collocentur enim tam triangula, quam parallelogrāma inter eaſdem parallelas GH, LN. (Nam vt in defin. 4. dictum eſt, triangula & parallelogramma tum demum eandem habebunt altitudinem, cum inter eaſdem fuerint conſtituta parallelas: ſic enim perpendiculares à verticibus ad baſes demiſſæ æquales erunt,) & ex BL, ſumantur quotcunque rectæ BI, IK, KL, ipſi BC, æquales; Item ex FN, abſcindantur quotcunque rectæ FM, MN, æquales rectæ EF. Deinde ex A, & D, deducantur rectæ AI, AK, AL; DM, DN. [a] Erunt igitur triangula ABC, AIB, AKI, ALK, ſuper æquales baſes, & inter eaſdem parallelas conſtituta, inter ſe æqualia. Eadem ratione æqualia erũt triangula DEF, DFM, DMN. Quam multiplex eſt ergo recta CL, rectæ BC, tam multiplex quoque erit triangulum ACL, trianguli ABC; & quam multiplex eſt recta EN, rectæ EF, tam quoque multiplex erit triangulum DEN, trianguli DEF, quia in tot triangula æqualia ſunt diuiſa tota triangula ACL, DEN, in quot rectas æquales ſectæ fuerunt totæ rectæ CL, EN. Quoniam vero ſi baſis CL, æqualis fuerit baſi EN, [b] neceſſario triangulum ACL, æquale eſt triangulo DEN, ac proinde ſi CL, maior fuerit quam EN, neceſſario ACL, maius eſt quam DEN, & ſi minor, minus; deficient propterea vna CL, recta, & triangulum ACL, æquemultiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ ABC,

[a] 38. pri

[b] 38. pri

ab EN, recta triplo DEN, æquemultiplicibus secundæ EF, & quartæ DEF, vel vna æqualia, erunt, vel vnà excedent, si ea sumantur, quæ inter se respondent. a Quare quæ proportio est primæ B C, ad secundam E F, basis ad basim, ea est tertiæ A B C, ad quartam DEF, trianguli ad triangulum. Sicut igitur basis ad basin, ita est triangulum ad triangulum. quod est propositum.

a 6. defi. quinti.

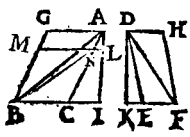
b 15. quinti. c 34. pri d 34. pri e 11. quinti.

QVONIAM autem b vt triangulum A B C, ad triangulum DEF, ita est parallelogrammum CG, (c quod duplum est trianguli A B C.) ad parallelogrammũ E H; (d quod est duplum trianguli D E F) perspicuum est, e ita quoque esse parallelogrammum ad parallelogrammum, vt est basis ad basin. Quod tamen eodẽ argumento confirmari potest, quo vsi sumus in triangulis, si prius ex punctis I, K, L, educantur rectæ parallelæ ipsi B G; nec non ex punctis M, N, parallelæ ipsi FH, &c. Triangula igitur & parallelogramma, quorum eadẽ fuerit altitudo; ita se habent inter se, vt bases. Quod erat demonstrandũ.

SCHOLIVM.

SED & conuersum huius demonstrabimus, Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem.



SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt basis B C, ad basin E F. Dico eorum altitudines, nimirum perpendiculares A I, D K, esse æquales. Si enim non sunt æquales,

sit

sit AI, si fieri potest, maior, quam DK. Abscissa igitur IL, ipsi DK, æquali, ductaque LM, ipsi BC, parallela, quæ latus AC, secet in N, coniunctaque recta BN; a erit NBC, triangulum ad triangulum DEF, vt basis BC, ad basin EF; cum altitudines LI, DK ponãtur æquales: Sed fuit etiam ABC, ad DEF, vt BC, ad EF. b Igitur triangula NBC, ABC, ad triangulum DEF, eandem habent proportionem; c Ac proinde æqualia erunt, pars & totum. Quod est absurdum. Non ergo inæquales sunt altitudines AI, DK, sed æquales. Eadem est ratio in parallelogrammis. Simili enim argumento ostendemus parallelogramma NMBC, AGBC, æqualia esse, si altitudines AI, DK, inæquales dicantur, & LI, DK, æquales.

a 1. sexti

b 11. 5n.

c 9. quinti.

ADDIT hoc loco Federicus Commandinus aliud theorema, quod nos breuius demonstrabimus. Videlicet.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines.

SINT duo triangula ABC, DEF; & parallelogramma AGBC, DEFH, habentia bases æquales BC, EF. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, est ad altitudinem DK. Si enim

sumantur rectæ IL, KM, basibus BC, EF, æquales, ducanturque rectæ LA, MD; d erit triangulum ALI, triangulo ABC, æquale, cum sint super bases æquales LI, BC, & inter easdem parallelas AG, IB. Eodem modo æquale erit triangulum DKM, triangulo DEF. e Quare erit, vt ABC, ad DEF, ita ALI, ad DKM. f Est autem, vt ALI, ad DKM, ita AI, ad DK. (Nam si bases ponantur AI, DK, erunt rectæ æquales LI, KM, altitudines.) Igitur & ABC, ad DEF, erit, vt AI, ad DK. Quod est propositum.

d 38. primi.

e 7. 5nti

f 1. sexti

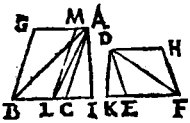
QVONIAM vero est, g vt ABC, ad DEF, ita pa-

g 15. 5n.

a 34. pri rallelogrammum AGBC, a quod trianguli ABC, duplum
b 34. pri eſt, ad parallelogrammum DEFH, b quod trianguli DEF,
c 11. qu. eſt duplum. c Erit quoque AGBC, ad DEFH, vt AI, ad DK. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, ſi rectæ ducantur LG, MH. Idem ſequetur, ſi triangula, & parallelogramma eandem habuerint baſin.

HOC vero conuertemus etiam, ad hunc modum.

TRIANGVLA, & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant.



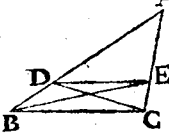
SIT triangulum ABC, ad triangulum DEF; & parallelogrammum AGBC, ad parallelogrammum DEFH, vt altitudo AI, ad altitudinem DK. Dico eorum baſes BC, EF, æquales eſſe. Si enim non ſunt æquales, ſit BC, ſi fieri poteſt, maior, quam EF. Abſciſſa igitur BL, ipſi EF, æquali, ductaque recta LA; erit, vt proxime demõſtrauimus, ABL, ad DEF, vt AI, ad DK: Sed vt AI, ad DK, ita ponitur eſſe ABC, ad
d 11. q. n. *DEF. d Igitur ABL, ABC, ad DEF, eandem habent proportionem;*
e 9. quinti. *e Ac proinde inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdum. Non ergo inæquales ſunt baſes BC, EF, ſed æquales. Eademque eſt ratio de parallelogrammis. Simili enim argumento ducta LM, ipſi GB, parallela, oſtendemus, parallelograma MGBL, AGBC, æqualia eſſe, ſi baſes BC, EF, dicantur inæquales, & BL, EF, æquales.*

IN omnibus autem his non variabitur demonſtratio, etiamſi triangula, & parallelogramma ſint rectangula, ita vt altitudines ſint ipſorum latera, vel vnum fuerit rectangulum, alterum vero non. Nos aſſumpſimus caſum difficiliorem, quando ſcilicet neutrum eſt rectangulum. Ita enim demonſtratio maiore indiget nonnunquam conſtructione.

THEOR. 2. PROPOS. 2. ij.

SI ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

IN triangulo ABC, ducatur primum recta DE, parallela lateri BC. Dico latera AB, AC, secta esse proportionaliter in D, & E, hoc est, esse vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. Ductis enim rectis CD, BE [a] erunt triangula DEB, DEC, super eandem basin DE, & inter easdem parallelas DE, BC, constituta, inter se æqualia. [b] Quare vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC: [c] Atqui vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est basis AD, ad basin DB; (cũ hæc triangula sint eiusdem altitudinis, vt constat, si per E, agatur parallela recta ipsi AB.) & eadem ratione, vt triangulum ADE, ad triangulum DEC, ita est basis AE, ad basin EC. [d] Vt igitur AD, ad DB, ita est AE, ad EC, (cum hæ duæ proportiones eædem sint proportioni trianguli ADE, ad triangulum DEB, & eiusdem trianguli ADE, ad triangulum DEC.) quod est propositum.



SECET deinde recta DE, latera AB, AC, proportionaliter. Dico DE, parallelam esse reliquo lateri BC. Ductis enim rursum rectis CD, BE, [e] erit vt basis AD, ad basin DB, ita triangulum ADE, ad triangulum DEB, cum sint eiusdem altitudinis: Ponitur autem vt AD, ad DB, ita AE, ad EC. [f] Igitur erit vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita AE, ad EC:

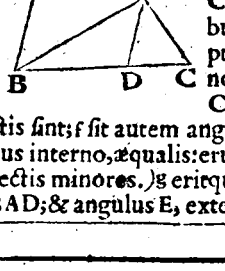
a 37. primi.
b 7. 5.
c 1. sexti
d 11. quinti.
e 1. sexti
f 11. quinti.

a 1. sexti Sed rursus a vt basis AE, ad basin EC, ita est triangulum ADE, ad triangulum DEC, cum sint altitudinis eiusdem.

b 11. qn. c 9. qnti b Igitur vt triangulum ADE, ad triangulum DEB, ita est triangulum idem ADE, ad triangulum DEC. c Aequalia ergo sunt triangula DEB, & DEC: Ac propterea, cũ eandem habeant basin DE, d 39. pri. d inter easdem erunt collocata parallelas. Igitur parallela est DE, ipsi BC. quod est propositum. Si itaque ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

iij. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basin: basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ a vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.



IN triangulo A B C, recta AD, secet primo angulum B A C, bifariam. Dico esse vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Agatur enim per B, recta BE, parallela ipsi AD, donec cũ CA. producta conueniat in E; (coibunt autem omnino B E, CA, propterea quod anguli C & CBE, minores sunt duobus rectis. Cũ enim C, & CDA, e minores duobus rectis sint; f sit autem angulus CDA, angulo C B E, externus interno, æqualis: erunt quoque C, & C B E, duobus rectis minores. g 29. pri. Igitur angulus BBA, æqualis alterno BAD; & angulus E, externo DAC. Cum igitur duo angu-

e 17. pri. f 29. pri.

li BAD,

li BAD, DAC, æquales ponantur; erunt & anguli EBA, & E, inter se æquales; [a] Ideoque & rectæ BA, EA, inter se æquales. [b] Vt igitur EA, ad AC, ita BA, ad eandem AC. [c] Atqui vt EA, ad AC, ita est BD, ad DC. cum in triangulo BCE, recta AD, sit parallela lateri BE. [d] Igitur vt BA, ad AC, ita est BD, ad DC. quod est propositum.

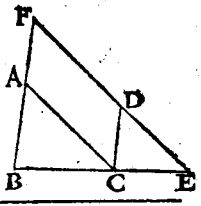
a 6. pri.
b 7. quinti.
c 2. sexti
d 11. gn.

SIT deinde vt BA, ad AC, ita BD, ad DC. Dico rectam AD, bifariam secare angulum BAC. Agatur enim rursus per B, recta BE, ipsi AD, parallela coiens cum CA, protracta in E. Quoniam igitur vt BA, ad AC, ita ponitur BD, ad DC, [e] Vt autem BD, ad DC, ita est EA, ad AC; (quod in triangulo BCE, recta AD, sit lateri BE, parallela) [f] Erit vt BA, ad AC, ita EA, ad eandem AC. [g] Aequales igitur sunt BA, & EB, inter se, [h] ac propterea anguli ABE, & E, æquales quoque erunt [i] Cum igitur angulus ABE, æqualis sit alterno BAD, & angulus E, externo DAC, erunt & duo anguli BAD, DAC, inter se æquales, quod est propositum. Itaque si trianguli angulus bifariam sectus sit, &c. Quod erat demonstrandum.

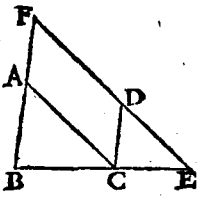
e 2. sexti
f 1. gn.
g 9. gn.
h 5. pri.
i 29. pri.

THEOR. 4. PROPOS. 4. iiij.

AEQVIANGVLORVM triangulorum proportionalia sunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

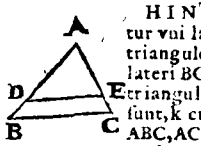


SINT æquiangula triangula ABC, DCE, sintque æquales anguli ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC, CDE. Dico esse AB, ad BC, ut DC, ad CE, & BC, ad CA, vt CE, ad ED; & AB, deniq; ad AC, vt DC, ad DE: Ita enim latera circa æqua-



ca æquales angulos sunt proportionalia, homologaque sunt ea latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur, hoc est, & antecedentia omnia æquales respiciunt angulos, & consequentia similiter. Constituantur latera BC, CE, secundum lineam rectam, ita ut angulus DCE, externus sit æqualis interno ABC, pariterque externus ACB, interno
a 17 pri. DEC, Et quia duo anguli ABC, ACB, a minores sunt duobus rectis: est autem angulo ACB, æqualis angulus
b 13. prō. DEC, erunt & anguli B, & E, duobus rectis minores. b Quare rectæ BA, & ED, productæ ad partes A, D, coibūt. Producantur ergo, & conueniāt in F. Quoniam uero angulus externus DCE, æqualis est interno oppositō ABC;
c 28. pri. c parallelæ erunt CD, & BF. Eadem ratione parallelæ erunt CA, & EF: quod angulus externus ACB, sit æqualis interno DEC. Parallelogrammum est igitur ACDF, d
d 34. pri. proptereaque recta AF, æqualis rectæ CD; & recta CA, rectæ DF. Quoniam igitur in triangulō BEF, recta AC, e
e 2. sexti parallela est lateri EF, e erit AB, ad AF, hoc est, ad DC,
f 16. gn. (quæ æqualis est ipsi AF,) ut BC, ad CE. Permutando igitur erit AB, ad BC, ut DC, ad CE. Rursus quia in eodem triangulo BEF, recta CD, parallela est lateri BF, g erit BC,
g 2. sexti ad CE, ut FD, hoc est, ut CA, (quæ æqualis est ipsi FD,) ad
h 16. gn. ED. Permutādo h igitur erit BC, ad CA, vt CE, ad ED. Cū igitur sit AB, ad BC, ut DC, ad CE, & BC, ad CA, ut CE,
22. gn. ad ED; i erit & ex æquali AB, ad CA, ut DC, ad ED. Quod est propositū. Æquiangulorum ergo triangulorum proportionalia sunt latera, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.



HINC fit, lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo simile. Ducatur enim in triangulo ABC, lateri BC, parallela DE. Dico triangulum ADE, toti triangulo ABC, esse simile. Æquiangula namque
k 29. pri sunt, k cum anguli ADE, AED, æquales sint anguli
l 4. sexti ABC, ACB, externis; & angulus A, communis. Quare vt demonstratum est, l habent latera circa æquales

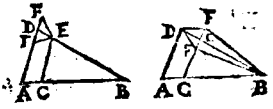
angulos

angulos proportionalia ; Ac proinde, ex definitione, similia sunt.

SCHOLIVM.

NON alienum à nostro instituto esse puto, si hic demonstremus duo theoremata, quorum primum Federicus Cõmandinus demonstrat in libello Archimedis de ijs, quæ vehuntur in aqua; Secundum vero in commentarijs in Apollonij Conica. Horum primum est.

SI ex duobus punctis cuiusuis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineam, duę parallelę inter se ad eas dem partes educantur, ita proportionem habeant eandem, quam rectæ inter i psas, & alterum extremum punctum incluſæ: Recta coninngens extremum vnius earum cum extremo prioris lineæ transibit per extremum alterius lineæ.



SIT recta AB, & ex pũctis A, & C, educantur duæ parallelæ AD, CE, proportionem habentes, quam AB. BC, ita vt sit AD, ad CE, sicut AB, ad BC; vel CE, ad AD, vt BC, Ad AB. Dico rectam, quæ coniungit extrema B, & E, transire per punctum D. Item rectam, quæ coniungit extrema B, & D, transire per punctum E. Si enim recta BE, non transit per D, coeat cum AD, in F. puncto, quod sit vel supra D, vel infra, vt in prima figura. Quoniam igitur per coroll. huius propos. triangula BAF, BCE, similia sunt; [a] erit, vt AB, ad AF, ita BC, ad CE: Et permutando, [b] vt AB. ad BC, ita AF, ad CE: Vt autem AB, [a] 24. sexti [b] 16. qu.

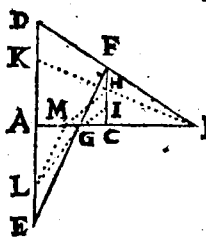
tem AB, ad BC, ita erat quoque A D, ad C E. a Igitur erit, vt AF, ad CE, ita AD, ad CE: b Ac propterea æquales erũt rectæ AF, AD, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo BE, per punctum D. Quod est primum.

a 11. qn. b 9. qn.

RVRSVS si recta BD, non transit per E, transeat per F, punctum, quod sit vel supra E, vel infra, vt in secunda figura. Quoniam ergo per coroll. huius propos. triangula BAD. BCF, similia sunt; c erit, vt AB, ad AD, ita BC, ad CF: d & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF: Vt autem AB, ad BC. ita quoque erat AD. ad CE. e Igitur erit, vt AD, ad CF, ita AD, ad CE: f Ac proinde æquales erunt rectæ CF, CE, pars & totum. Quod est absurdum. Transit ergo recta BD, per E. Quod est secundum.

c 4. sexti d 16. quinti. e 11. qn. f 9. qnti

HOC etiam verum est, quando duæ parallelæ in diuersas partes ducuntur, habentes eandem proportionem, quam segmenta rectæ inter parallelas conterminas, & punctum idem intra datam rectam. Vt in figura problematis 7. scholij propos. 17. si fuerint parallelæ AE, FC, in diuersas partes ducta, fueritque vt AE, ad CF, ita AG, ad CG, transibit recta EF, per G, hoc est, duæ rectæ EG, FG, vnam rectam constituent. Cũ enim sit, vt AE, ad CF, ita AG, ad CG; erit permutando quoque, vt AE, ad AG, ita CF, ad CG. Cũ ergo anguli alterni A, C, æquales sint; g erũt quoq; anguli AGE, CGF, æquales. Cum ergo AC, sit linea recta, constituent EG, FG, lineam quoq; rectam ex ijs, qua ex Proclo ad propos. 15, lib. 1. demonstrauimus.

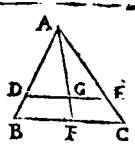


g 6. sexti.

ALTERVM vero est.

SI in triangulo quouis vni lateri parallela recta agatur; & ex quocunque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea: diuidentur linea parallela, & latus illud, in easdem rationes.

IN



IN triangulo ABC, ducta sit DE, lateri BC, parallela, & ex puncto F, quocunque ad angulum A, recta extendatur FA, secans DE, in G. Dico esse, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quoniam enim triangula AFB, AGD, ex coroll. huius propos. similia sunt; a *erit vt AF, ad BF, ita AG, ad DG,* b *& permutando, vt AF, ad AG, ita BF, ad DG, Atque eodem argumento concludemus esse, vt AF, ad AG, ita FC, ad GE.* c *Igitur erit, vt BF, ad DG, ita FC, ad GE, & permutando, vt BF, ad FC, ita DG, ad GE. Quod est propositum.*

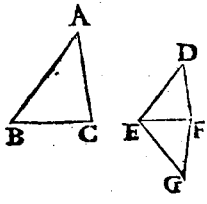
a 4. sexti
b 16. qu.
c 11. qu.

ALITER. Quoniam triangula ABF, ADG, similia sunt, nec nō triangula AFC, AGE, per coroll. huius propos. d *erit, vt BF, ad FA, ita DG, ad GA: Item vt FA, ad FC, ita GA, ad GE.* e *Ex aquo igitur, vt BF, ad FC, ita erit DG, ad GE. Quod erat demonstrandum.*

d 4. sexti
e 22. qu.

THEOR. 5. PROPOS. 5. V.

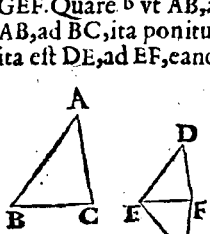
SI duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur.



HABEANT triangula ABC, DEF, latera proportionalia, sitque AB, ad BC, vt DE, ad EF, & BC, ad CA, vt EF, ad FD, & AB, denique ad AC, ut DE, ad DF. Dico triangula esse æquiangula, angulum scilicet A, æqualem esse angulo D, & angulum B, angulo E, & angulum C, angulo F. Sic enim anguli æquales respiciunt homologa latera. Fiat angulus FEG, æqualis angulo B; & angulus EFG, angulo C, conueniantque rectæ EG,

FG, in

FG, in G: a eritque reliquus angulus G, reliquo angulo A, æqualis. Aequiangula igitur sunt triangula A B C, GEF. Quare b vt AB, ad BC, ita est GE, ad EF: Vt autem AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. c Igitur vt GE, ad EF, ita est DE, ad EF, eandem: d propterea que æquales erunt GE, DE. Rursus, e quoniã vt BC, ad CA, ita est EF, ad FG: Vt autẽ B C, ad C A, ita ponitur EF, ad FD; f erit vt EF, ad FG, ita eadem EF, ad FD; g ideoq; æquales erunt FG, FD. Itaque cum latera E G, F G, æqualia sint lateribus D E, D F, vtrumque vtrique; & basis communis EF; h erunt anguli G, & D, æquales; i ac propterea & reliqui anguli GEF, GFE, reliquis angulis DEF, DFE, æquales erunt. Quamobrem cum angulus G, æqualis sit angulo A; erit & angulus D. eidem angulo A, æqualis; eodemq; modo angulus DEF, angulo B, & angulus DFE, angulo C, æqualis erit. quod est propositum. Si duo igitur triangula latera proportionalia habeant, &c. Quod ostendendum erat.

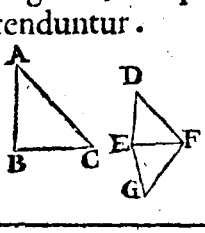


a 32. pri mi.
b 4. sexti
c 11. q̃n.
d 9. q̃nti
e 4. sexti
f 11. q̃n.
g 9. q̃n.
h 8. pri mi.
i 4. pri.

vj.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiãgula erunt triangula, æqualesq; habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur.



SIT angulus B, trianguli ABC, æqualis angulo E, trianguli D E F, sintque latera AB, BC, proportionalia lateribus DE, EF, hoc est, sit AB, ad BC, vt DE, ad EF. Dico reliquos angulos reliquis angulis æquales esse, angulum scilicet A, angulo D,

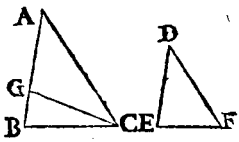
& an-

& angulum C, angulo F; Ita enim æquales anguli homologa latera respiciunt. Fiat angulo B, æqualis angulus FEG; & angulo C, angulus EFG; eritque, vt in præcedenti propos. dictum est, triangulum GEF, triangulo A B C, æquiangulum. Quare a vt AB, ad B C, ita est G E, ad EF: Sed vt AB, ad BC, ita ponitur DE, ad EF. b Igitur vt D E, ad EF, ita est GE, ad eandem EF; c atque idcirco DE, GE, æquales erunt. Itaque cum latera DE, EF, æqualia sint lateribus GE, EF, & anguli ipsis contenti æquales quoque; (nam angulo B, cui factus est æqualis angulus FEG, æqualis est positus angulus D E F, propterea que æquales ad inuicem erunt anguli DEF, GEF.) d erunt reliqui anguli D, EFD, reliquis angulis G, EFG, æquales. Cum ergo angulus G, sit æqualis angulo A, & angulus EFG, angulo C; erunt etiam angulis A, C, æquales anguli D, EFD, & ob id æquiangula erunt triangula A B C, D E F, quod est propositum. Si igitur duo triangula unum angulũ uni angulo æqualem, &c. Quod erat demonstrãdũ.

a 4. sexti
b 11. qu.
c 9. quin
d 4. pri.

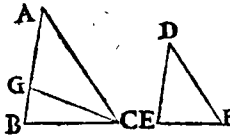
THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum verò simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: Aequiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.



SIT angulus A, trianguli A B C, æqualis angulo D, trianguli D E F, & latera A C, C B, circa angulum A C B, proportionalia lateribus D F, F E, circa angulum F, hoc est sit vt A C, ad CB, ita D F, ad F E, hac tamen lege, vt quilibet reliquorum angulorum B, & E, sit vel minor recto, vel non minor. Dico æquiangula esse trian

gula,



gula, angulos scilicet ACB, & F, circa quos sunt latera proportionalia, & angulos B, & E, æquales esse. Sit enim primum tam B, quam E, recto minor: Quo posito, si anguli A C B, & F, non sunt æquales, sit A C B, maior, quam F: fiatque ipsi F, æqualis A C G, Cum igitur, & angulus A, angulo D, ponatur æqualis, a erit & reliquus AGC, reliquo E, æqualis; ideoque triangula AGC, DE F. æquiangula erunt. Quare b vt AC, ad C G, ita erit D F, ad FE: Sed vt DF, ad FE, ita ponitur AC, ad CB. c Vt igitur AC, ad CG, ita erit eadem AC, ad C B, d ac propterea æquales erunt C G, C B, e & anguli C B G, C G B, æquales. Cum igitur angulus B, ponatur recto minor, erit & CGB, minor recto, ideoque ei deinceps AGC, recto maior; f cum A G C, CGB, sint duobus rectis æquales: Est autem ostensus angulus A G C, angulo E, æqualis. Maior igitur recto est quoque angulus E: Sed positus est etiam recto minor. Quod est absurdum.

a 32. pri.
b 4. sexti
c 11. qn.
d 9. qn.
e 5. pri.
f 13. pri.

SIT deinde tam B, angulus, quam E, recto non minor; eritque vt prius, angulus B, angulo C G B, æqualis, ideoque & CGB, recto non minor erit; ac propterea anguli CBG, C G B, in triangulo BCG, non minores erunt duobus rectis, sed vel maiores, vel æquales duobus rectis. quod est absurdum. g Sunt enim duobus rectis minores. Non ergo inæquales sunt anguli ACB, & F, sed æquales, atque h idcirco reliqui etiam anguli B, & E, æquales erunt, quod est propositum. Si duo itaque triangula vnum angulum vni angulo æqualem, &c. Quod demonstrandum erat.

g 17. pri.
h 32. pri.

SCHOLIVM.

ADDIDIT Euclides, vtrumque angulum reliquorum B, & E, debere esse vel minorem recto, vel non minorem. Nã alias, manente tota hypothesi, non sequeretur, triangula esse aequiangula. Si enim in eodem triangulo ABC, sit CG, aequalis ipsi CB, (quod fieri potest, quando angulus B, acutus est, & maior angulo A. Sic enim enim i erit latus C A, latere

i 19. pri.

C B,

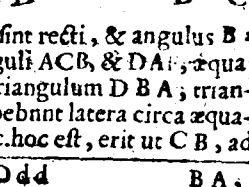
CB, maius, Si igitur ex C, ad internallum CB, circulus describatur, secabit is rectam AB, priusquam rectam AC, quæ longior est, quam CB, secet. Secabit autem ille circulus necessario rectam AB, propterea quod ob acutum angulum B, recta AB, intra eum circulum cadit: quippe cum infra contingantem lineam ducatur, quæ ad B, angulum rectum constituit cum CB, vt patet ex propos. 16. lib. 3.) habebunt duo triangula ABC, AGC, vnum angulum vni angulo æqualem, immo angulum A, communem; & circum alios angulos ACB, ACG, latera proportionalia, hoc est, a vt AC, ad CB, ita erit eadem AC, ad CG, cum æquales ponantur rectæ CB, CG, & tamen non sint vllo modo æquiangula triangula ABC, AGC, vt constat. Quod ideo euenit, quia non vterque angulorum ABC, AGC, minor est recto, vel non minor. Immo ABC, est quidem recto minor, AGC, vero recto maior. Cum enim CG, CB, latera æqualia sint, b & ideo anguli CBG, CGB, æquales; c erit vterque eorum recto minor, d ac propterea AGC, recto maior.

a 7. quinti.

b 5. pri. c 17. vel 32. pri. d 13. pri. viij.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

SI in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit: quæ ad perpendicularem triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.



IN triangulo ABC, angulus BAC, sit rectus, à quo ad basin perpendicularis agatur AD. Dico triangula ADB, ADC, similia esse & toti triangulo ABC, & inter se. Cum enim in triangulis ABC, DBA, anguli BAC, & ADB, sint recti, & angulus B, communis; e erunt & reliqui anguli ACB, & DAB, æquales. Æquiangulum est igitur triangulum DBA, triangulo ABC, fac propterea habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, &c. hoc est, erit vt CB, ad

e 32. pri.

f 4. sexti.

BA, ita BA, ad BD; & vt BA, ad AC, ita BD, ad DA; & vt BC, ad CA, ita BA, ad AD. Ita enim latera homologa, æqualibus angulis opponuntur, vt vult propos. 4. huius lib. Quare simile est triangulum ADB, toti triangulo ABC. Eodem modo ostendetur triangulum ADC, simile eidem triangulo ABC. Nam anguli BAC, & ADC, sunt recti, & angulus C, communis; [a] ac propterea reliqui anguli ABC, & CAD, æquales. Quare [b] vt BC, ad CA, ita est CA, ad CD; & vt CA, ad AB, ita CD, ad DA, & vt CB, ad BA, ita CA, ad AD. Sic enim opponuntur quoque homologa latera angulis æqualibus, ex præscripto propos. 4. huius lib. Non secus demonstrabitur, similia inter se esse triangula ADB, & ADC, cum anguli ADB, ADC, sint recti, & anguli ABD, CAD, ostensi æquales, nec non anguli BAD, ACD; Atque idcirco sit [c] vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; & vt DA, ad AB, ita DC, ad CA; & vt AB, ad BD, ita CA, ad AD. Si igitur in triangulo rectangulo, ab angulo recto in basin perpendicularis ducta sit, &c. Quod erat demonstrandum.

32. pri 4. sexti

4. sexti

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, perpendicularem, quæ in rectangulo triangulo ab angulo recto in basin demittitur, esse mediam proportionalem inter duo basis segmenta: Item vtrumlibet laterum angulum rectum ambientium, medium proportionale inter totam basin, & illud segmentum basis, quod ei lateri adiacet.

OSTENSVM est enim, esse vt BD, ad DA, ita DA, ad DC; ac propterea DA, esse mediam proportionalem inter BD, & DC: Item esse vt CB, ad BA, ita BA, ad BD: & idcirco BA, mediam esse proportionalē inter CB, & BD: Denique esse vt BC, ad CA, ita CA, ad CD; ideoque CA, esse proportionalem mediam inter BC, & CD. Quod est propositum.

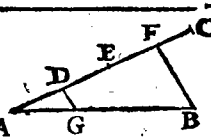
xj.

PROBL. 1. PROPOS. 9.

A DATA recta linea imperatam partem auferre.

IM-

IMPERETVR, vt ex linea AB, auferamus partem tertiam. Ex A, ducatur recta AC, vtcunque faciens angulum CAB; & ex AC, abscindantur

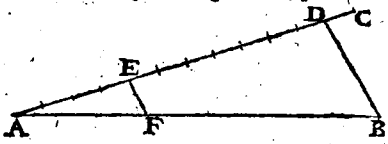


tot partes æquales cuiuslibet magnitudinis, quota pars detrahenda est ex AB, vt in proposito exemplo tres AD, DE, EF. Deinde ex F, ad B, recta ducatur FB, cui per D, parallela agatur DG. Dico AG, esse partem tertiam imperatam rectæ AB. Nam cum in triangulo AB F, lateri FB, parallela sit recta DG; [a] erit vt FD, ad DA, ita BG, ad GA. [b] Componendo igitur, vt FA, ad DA, ita BA, erit ad GA: Sed FA, ipsius AD, est tripla, ex constructione. Igitur & BA, ipsius AG, erit tripla; ideoque AG, tertia pars erit ipsius AB, quæ imperabatur. A data ergo recta linea imperatam partem abstulimus. Quod faciendum erat.

a 2. *sexti*
b 18. *quinti*.

SCHOLIVM.

QVOD si ex AB, auferenda sit pars non aliquota, sed qua plures aliquotas non efficientes vnam complectatur, nimirum qua continent quatuor vndecimas ipsius AB, sumenda erunt ex AC, vndecim partes æquales vsque ad D, punctum, ex quo ad B, recta ducatur DB; & huic parallela EF, ex E, termino quatuor partium.

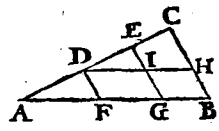


Nam AF, erit pars imperata. Erit enim rursus vt DA, ad AE, ita BA, ad AF. Quare, & conuertendo vt AE, ad AD, ita AF, ad AB: Est autem AE, pars continens quatuor vndecimas ipsius AD, ex constructione. Igitur & AF, eadem pars erit rectæ AB. Quod est propositum. Non aliter detrahetur ex AB, pars complectens quotcunque partes ipsius aliquotas non facientes vnam.

PROBL. 2. PROPOS. 10. xij.

DATAM rectam lineam insectam

similiter secare, vt data altera recta secta fuerit.



SIT recta AB, secanda similiter, vt secta est recta AC, in D, & E, hoc est, in partes, quæ sint partibus AD, DE, EC, proportionales. Coniungatur datæ duę lineæ ad A, facientes angulum quemcunque BAC, & cõnectatur recta BC. Deinde ex D, E, agantur DF, EG, parallelæ ipsi BC. Dico rectam AB, similiter esse sectam in F, & G, vt est secta AC, in D, & E. Nam [a] vt AD, ad DE, ita est AF, ad FG. Proportionales ergo sunt partes AF, FG, partibus AD, DE. Quod si ducatur DH, ipsi FB, parallela, secans EG, in I; [b] erit rursus, vt DE, ad EC, ita DI, ad IH, hoc est, ita FG, ad GB; [c] quòd FG, ipsi DI, & GB, ipsi IH æqualis sit. Quare proportionales quoque erunt partes FG, GB, partibus DE, EC. Eademque ratio est de pluribus partibus, si ex E, & C, ipsi AB, parallelæ agantur, &c. Itaque datam rectam lineam insectam similiter secuimus, vt data altera recta secta fuit. Quod faciendum erat.

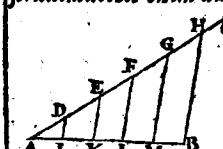
a 2. sexti

b 2. sexti

c 34. primi.

SCHOLIVM.

EX hoc problemate colligi potest facilis admodum via, ac ratio dividendi lineam rectam datam in partes quotcunque æquales: id, quod nos ad propos. 10. lib. 1. facturæ recepimus, & alia ium via idem ad propos. 40. lib. 1. demonstrauimus. Sit enim data recta AB, dividenda in quinque

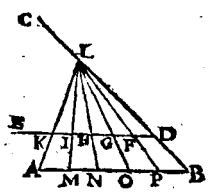


partes æquales. Ducta recta AC, faciente cum AB, quemcunque angulum CAB, sumantur ex ea quinque partes æquales AD, DE, EF, FG, GH. Quia igitur linea recta AH, vtcunque est diuisa, si ex H, ad B, ducatur recta HB, & huic ex punctis D, E, F, G, parallelæ agantur DI, EK, FL, GM; erit AB, similiter diuisa, vt AH, vt constat ex demonstratione huius problematis. Cum igitur AH, sit diuisa in quinque partes æquales,

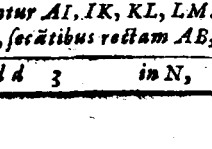
erit

erit & AB, in totidem aequales partes diuisa. Haud aliter in plures partes aequales diuidetur eadem recta AB.

HVIC rationi diuidendi lineam rectam in quotcunque partes aequales, adiungi possunt alia non iniucunde. vt propos. 10 lib. 1. sumus polliciti, atque ad propos. 40. lib. 1. demonstrauimus. Sit enim rursus data linea recta AB, diuidenda in quinque partes aequales. Ducatur ex B, recta BC, vtcunque faciens angulum cum AB; Deinde ex assumpto puncto D, siue supra B, siue infra, agatur DE. parallela ipsi AB, ex qua abscindantur quinque aequales partes DF, FG, GH, HI, IE, ea lege tamen, vt si D, est supra B. recta DE, ex quinque partibus aequalibus constans, minor sit, quàm AB, maior verò, si D, existit infra B. Postremo ex A, per E, recta ducatur AC, occurrēs ipsi BC, in C, puncto, à quo per puncta F, G, H, I, recta ducantur CK, CL, C M, C N, quas dico diuidere rectam AB, in quinque partes aequales. Cum enim D E, sit parallela ipsi AB, diuidentur EH, & AM, in triangulo CAM, proportionaliter, ex scholio propos. 4. huius lib. Cum ergo E H, secta sit bifariam in I, secta quoque erit A M, bifariam in N. Eadem ratione recta NL, in triangulo CNL; & recta M K, in triangulo CMK; & recta LB, in triangulo CLB, secta erit bifariam. Est ergo AN, ipsi NM; & NM, ipsi ML; & ML, ipsi LK; & L K, ipsi KB, aequalis; ac proinde AB, secta erit in quinque partes aequales. Quod est propositum.

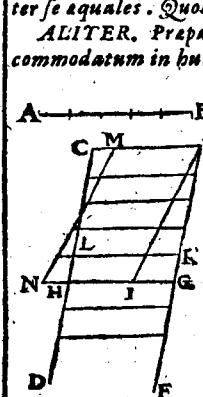


ALITER. Ab extremis punctis A, & B, educantur duae rectae BC, AD, inter se parallelae; hoc est, constituentes angulos A, B aequales: Et ex BC, abscindātur quatuor partes aequales BF, EF, FG, G H, vt sint tot partes, vna minus, in quot est linea diuidenda; His autem ex AD, totidem aequales resecentur AI, IK, KL, LM. Ductis igitur rectis EM, FL, GK, HI, secātibus rectam AB,



in N,O,P,Q, dico ipſam A B, ſectam eſſe in quinque partes æquales. Cum enim æquales ſint, & parallelæ GH, IK, a erũt & H I, G K, parallelæ; Eademque ratione parallelæ erunt GK, FL, EM. Quare cum A M, ſecta ſit in quatuor æquales partes, erit & A Q, ſimiliter in quatuor partes æquales diuiſa, vt conſtat ex demonſtratione huius 10. propoſ. Eadem ratione diuiſa erit & B N, in quatuor partes æquales, eo quod BH, in totidem eſt partes æquales diuiſa. Quare cum tam AN, quam BQ, æqualis ſit ſingulis partibus N O, O P, P Q; erunt omnes quinque partes AN, NO, OP, PQ, QB, inter ſe æquales. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Præparetur prius inſtrumentum huic rei accommodatum in hunc modum: Ductis duabus rectis inter ſe parallelis vtcunque CD, EF; ex vtraque abſcindantur partes inter ſe æquales quotcunque, ſaltem tot, in quot partes diuidenda proponitur linea, & binæ puncta correſpondentia lineis rectis iungãtur. Deinde beneficio circini capiatur longitudo rectæ AB, diuidendæ, eaque ex aliquo puncto lineæ CE, vt ex E, transferatur in inſtrumentum ad punctũ I, illius lineæ tranſuerſæ, quæ tot ſpatia terminat, in quot partes linea proponitur diuidenda, qualis in exẽplo eſt recta G H; ea enim includit quinque ſpatia. Poſtremo ex E, ad I, recta ducatur E I, quam dico diuiſam eſſe in quinque æquales partes. Cum enim GK, H L, æquales ſint, & parallelæ; b erunt quoque GH, KL, parallelæ. Eodemque modo omnes lineæ inter rectas CD, EF, inter ſe parallelæ oſtendentur. Quare, vt ex demonſtratione huius 10 propoſ. liquet, quemadmodum EG, diuiſa eſt quinque partes æquales, ita ſimiliter in totidem diuiſa erit E I. Nam ſi punctum E, ſumptum non fuerit idem quod E; vel C, producenda eſt I E, donec cum FE, vel DC, coeat. Tunc enim vt in hac 10. propoſ. probatum eſt, erunt rectæ E I, E G, ſimiliter diuiſæ.



Quòd

Quod si forte IE, nec cum FE, nec cum DC, concurrat, sed utrique sit parallela, erunt singula partes rectæ EI, singulis partibus rectæ EG, æquales. ob parallelogramma inter parallelas inclusa. Cum ergo omnes partes rectæ EG, sint æquales, erunt quoque omnes partes rectæ EI, æquales. Si igitur beneficio circini singulæ partes lineæ EI, transferantur in rectam propositam AB, ipsi EI, æqualem, diuisa erit & AB, in quinque partes æquales. Quod est propositum. 234. pri.

EST autem nonnunquam necesse lineas parallelas extra instrumentum producere. Vt si eadem linea transferatur ab M, usque ad N, punctum lineæ GH, protractæ, erit quoque MN, diuisa in quinque partes æquales. Vt constat, si ducatur ex M, ipsi EG, parallela, usque ad rectam GH: Vel si NM, producatur, donec cum GE, producta conueniat. Quod si linea dividenda fuerit admodum brevis, accipienda erunt partes parallelarum CD, EF, minores, &c. si vero linea sit longiuscula, & dividenda in paucas partes æquales; transferri poterit in duplo plura spatia, uel in triplo plura, uel quadruplo plura, &c. Nã duo, uel tria, uel quatuor spatia, &c. dabunt unam partem. Vt si dividenda sit in tres partes, transferaturq; in sex spatia, dabũt duo spatia unam partem: si transferatur in quindecim spatia, dabunt quinque spatia unam partem, propterea quod quinque spatia conficiunt tertiam partem quindecim spatiorũ. Sic si linea dividenda in duas æquales partes transferatur in octodecim spacia, dabunt nouem spatia unam partem; quippe cum nouem spatia constituant semissem octodecim spatiorum: & sic de cæteris.

EODEM modo, ad similitudinem huius propositionis, licebit nobis facili negotio sequens problema, quod non raro à Geometris adhibetur, demonstrare. quod est eiusmodi.

DATAM rectam secare in duas partes, quæ habeant proportionem quamcumque datam.

SIT secanda recta AB, in duas partes, quæ habeant proportionẽ inter se, quã recta C, & D. Ex A, ducatur linea

AE, faciens angulum A, quemcunque, ex qua abscindatur recta AF, ipsi C, & FG, ipsi D, aequalis: Ducta deinde GB, ducatur ei per F, parallela FH. Dico AB sectam esse in H, secundum proportionem C, ad D. Hoc autem manifestum est, a cum sit, vt AF, ad FG, atque adeo, vt C, ad D, ita AH, ad HB. a 2 sexti

POSTREMO inseremus huic loco theorema quoddam ad linearum etiam sectiones pertinens, desumptum ex Federico Commandino in libellum Archimedis de iis, qua vehuntur in aqua. Nimirum.

SI duæ rectæ lineæ secẽtur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet segmentis duobus.

SECENTVR rectæ AB, GD, proportionaliter in binis punctis E, F, & G, H, ita vt sit AE, ad EB, sicut CG, ad GD; Item AF, ad FB, vt CH, ad HD. Dico sectiones intermedias EF, GH, proportionales quoque esse cum duobus segmentis FB, HD; vel cũ duobus AE, CG, hoc est, esse FB, ad EF, vt HD, ad GH. Item AE, ad EF, vt CG, ad GH. Cum enim sit, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD, erit componendo, vt AB, ad EB, ita CD, ad GD: Item cum sit, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD, erit componendo, vt AB, ad FB, ita CD, ad HD, & conuertendo vt FB, ad AB, ita HD, ad CD; Et vt AB, ad EB, ita CD, ad GD. b Erit ex aqua, vt FB, ad EB, ita HD, ad GD, Et conuertendo, vt EB, ad FB, ita GD, ad HD: Et per conuersionem rationis, vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, & dividendo, vt FB, ad EF, ita HD, ad GH, Quod est primum. b 22. 5.

REVERSVS, quia est, vt AE, ad EB, ita CD, ad GD, Et vt EB, ad EF, ita GD, ad GH, vt ostensum est; erit ex aqua, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH, Quod est secundum.

BRE-

BREVIVS idem demonstrabitur hoc modo. Conueniant duo puncta A, & C, in vnum, vt fiat angulus BCD, vel BAD, iungantur que rectæ DB, HF, GE, Quia igitur ponitur, vt AE, ad EB, ita CG, ad GD, [a] *Parallela erit GE, ipsi DB. Rursus, cum ponatur, vt AF, ad FB, ita CH, ad HD;* [b] *Parallela erit quoque HF, ipsi DB.* [c] *Quare & GE, HF, inter se parallelæ erunt: Ac propterea* [d] *erit, vt AE, ad EF, ita CG, ad GH. Quod est secundum.*

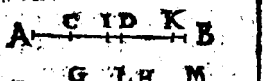
[a] 2. sexti
[b] 2. sexti
[c] 30. pri.
[d] 2. sexti

EODEM modo, si puncta extrema B, D, conueniant in vnum, &c. ostendemus esse, vt BF, ad EF, ita HD, ad GH, & conuertendo, vt EF, ad FB, ita GH, ad HD. Quod est primum.

IDEM verum est, si magnitudines AB, CD, sint diuersæ, vt v. g. AB, superficies, & CD, linea, vel corpus, vt ex priori demonstratione constat.

SED neque omittendum videtur hoc loco theorema quod sequitur.

SI linea recta sit secta in quotcunque partes Arithmetice proportionales, & alia recta secetur in totidem partes, quæ eadem inter se, quæ illæ proportiones habeant: erunt quoque partes huius lineæ Arithmetice proportionales.



RECTA linea AB, secta sit in partes AC, CD, DB, Arithmetice proportionales, hoc est habentes eundem excessum: [e] *Secetur autem recta EF, in partes EG, GH, HF, illis proportionales. Dico has partes eundem quoque habere excessum, hoc est, Arithmetice esse proportionales: Sit .n. CI, ipsi AC, & DK, ipsi CD, æqualis: vt ID, sit excessus inter CD, AC, & KB, excessus inter DB, CD, atque adeo ipsi ID, æqualis. Sit quoque GL, ipsi EG, & HM, ipsi GH, æqualis; vt LH, excessus sit inter GH, EG, & MF, excessus inter HF, &*

[e] 16. sex.

GH. pro-

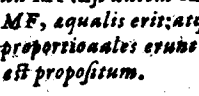
GH. Probandum est, excessus LH, MF, æquales esse. Quoniã igitur est, vt AC, ad CD, ita EG, ad GH, erit permutando quoque vt AC, ad EG, ita CD, ad GH. Item quoniam est, vt CD, ad DB, ita GH, ad HF, erit quoque permutando, vt CD, ad GH, ita DB, ad HF. Atque ita si plures fuerint partes, habebunt semper partes lineæ AB, ad partes lineæ EF, singulæ ad singulas, eandem proportionem, quamuis partes vnius lineæ non sint continuæ proportionales. Itaque cũ sit, vt CD, ad GH, ita AC, ad EG, hoc est, ita CI, ad GL, a erit quoque reliqua ID, ad reliquam LH, vt tota CD, ad totam GH. Rursus quia est, vt DB, ad HF, ita CD, ad GH, hoc est, ita DK, ad HM, b erit quoque reliqua KB, ad reliquam MF, vt tota DB, ad totam HF, vel vt ablata DK, ad ablatam HM, hoc est, vt CD, ad GH. Erat autem quoque ID, ad LH, vt CD, ad GH, c Igitur erit vt ID, ad LH, ita KB, ad MF. Est autem ID, ipsi KB, æqualis. d Igitur & LH, ipsi MF, æqualis erit: atque idcirco EG, GH, HF, Arithmetice proportionales erunt, cum excessus habeant æquales. Quod est propositum.

a 19. 4n

b 19. 4n.

c 11 4n

d 14. 4n.



HOC theorema nullo modo conuerti potest. Non enim sequitur, si duæ lineæ secta sint in partes Arithmetice proportionales, partes vnius habere easdẽ proportiones, quas partes alterius habent. Nam si lineæ EF, secunda pars flatuatur GM, ita vt excessus intra EG, GM, sit LM. Deinde ipsi GM, post M, sumatur portio ipsi GM, æqualis, eique adiiciatur idẽ excessus LM, sient tres partes Arithmeticæ proportionales in lineæ EF; & tamen non habent easdem proportiones inter se, quas habent partes lineæ AB: quippe cum minor sit proportio EG, ad GM, quam EG, ad GH, hoc est, quam AB, ad CD.

c 8. 4n.

INFERVR hinc illud hoc theorema.

SI duæ lineæ inæquales ad alias duas eãdem habeãt proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem, erit quoque ex-

cessus

ceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum vna ad vnam poſteriorum.

VT in ſuperiori figura, quoniam erat, ut AC, ad EG, hoc eſt, ut CI, ad GL, ita CD, ad GH; oſtenſum eſt ita quoque eſſe exceſſum ID, ad exceſſum LH, ut CD, ad GH, Itaque ſi AC, CD, ſint dupla, aut dimidiata partes ipſarum EG, GH, erit quoq; ID, dupla, uel pars dimidiata ipſius LH, &c.

EX his quoque hoc problema abſoluemus.

LINEAM rectam datam in quotuis partes Arithmetice proportionales ſecare.

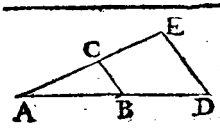
SIT enim recta EF, ſecanda in tres partes Arithmetice proportionales. Sumantur tres recta AC, CD, DB, quomodocunque Arithmetice proportionales componentes rectam lineam AB. Si igitur data recta EF, a fecetur ſimiliter in G, H, ut AB, in CD, ſecta eſt, erunt partes EG, GH, HF. Arithmetice proportionales, ut demonſtratum eſt. a 10 ſex.

HAEC omnia uera etiam ſunt in numeris, & in quibuſ uis alijs magnitudinibus, cum ſemper eadē ſit demōſtratio. Atque ex his deſumpſimus in 10. regula proportionalitatis Arithmeticæ poſtremam rationem diſtribuendi datū numerum in quotuis partes Arithmetice proportionales. Nā per eam diuiditur datus numerus in partes, quæ eaſdem habēt proportiones, quas aſſūpti numeri proportionalitatis Arithmeticæ, cum ſemper fiat ut ſumma aſſumptorum numerorū, ad datum numerū, ita ſinguli numeri aſſumpti ad aliud. Hinc enim fit, numeros aſſumptos cum partibus dati numeri inuētis eandem habere proportionem. Quare vt hic oſtenſum eſt, partes inuentæ ſunt Arithmetice proportionales.

PROBL. 3. PROPOS. 11. x.

DVABVS datis rectis lineis tertiam proportionalem adinuenire.

SINT duæ rectæ AB, AC, ita diſpoſitæ, vt efficiant angulum

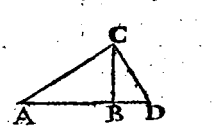


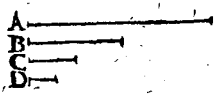
gulum A, quemcunque, fitque inuenienda illis tertia proportionalis, ſicut quidē AB, ad AC, ita AC, ad tertiam. Producatur AB, quam volumus eſſe antecedentem, & capiatur BD, æqualis ipſi AC, quæ conſequēs eſſe debet, ſiue media. Deinde ducta recta BC, agatur illi ex D parallela DE, occurrens ipſi AC, productæ in E. Dico CE, eſſe tertiam proportionalem, hoc eſt, eſſe vt AB, ad AC, ita AC, ad CE. Cum enim in triāgulo ADE, lateri DE, parallela ſit recta BC; [a] erit vt AB, ad BD, ita AC ad CE: [b] Sed vt AB, ad BD, ita eadem AB, ad AC, æqualem ipſi BD. Vt igitur AB, ad AC, ita AC, ad CE; quod eſt propoſitum. Duabus ergo datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum.

a 2. ſexti
b 7. quinti.

SCHOLIVM.

ALITER idem demonſtrabimus, hoc modo. Duæ rectæ datæ AB, BC, conſtituantur ad angulum rectum ABC, & coniūgatur recta AC. Producta autem AB, antecedēte, ducatur ex C, ad AC, perpēdicularis CD, occurrēs ipſi AB, producta in D. Dico BD, eſſe tertiam proportionalē. Cum enim in triangulo ACD, angulus ACD ſit rectus, & ab eo ad baſin AD, deducta perpendicularis CB; erit per coroll. propoſ. 8, huius lib. BC, media proportionalis inter AB, & BD, hoc eſt, vt AB, ad BC, ita erit BC, ad BD, Quod eſt propoſitum.

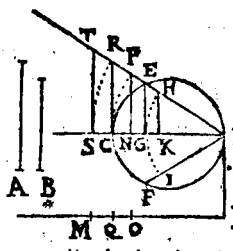




INVENTA autem tertia linea cōtinue proportionali, ſi primam omiſeris, & alijs duabus tertiā inueneris, habebis quatuor lineas cōtinue proportionales. Vt ſi lineis A, & B, adinueniatur tertia proportionalis C, & duabus B, & C, tertia proportionalis D, erunt quatuor lineæ A, B, C, D, continue proportionales. Eadem arte reperietur quinta proportionalis, ſexta, ſeptima, octaua; & ſic in infinitum.

EXPE-

EXPEDITIVS reperiemus quotlibet lineam continuè proportionales in data proportione, hoc modo. Sit primum data proportio lineæ A, maioris ad minorem B. Circa rectam C D, ipsi A, æqualem describatur circulus CEDF, in quo applicentur DE, DF, ipsi B, æquales. Applicata autem regula punctis E, F, ducatur recta EG, quæ ad CD, perpendicularis erit. Cum enim recta DC, per centrum transiens secet arcum ECF, bifariam, (ablatis enim æqualibus arcubus D E, DF, ex semicirculis æqualibus DEC, DFG, reliqui arcus C E, C F, æquales erunt.) secabit eadem & rectam ductam E F, bifariam, per ea, quæ in scholio propos. 27. lib. 3 ostendimus. a Igitur & ad angulos rectos. Et quoniam, si duceretur recta EC, b angulus ad E, in semicirculo rectus esset; erit ex coroll. propos. 8. huius lib. D E, media proportionalis inter C D, D G: ac proinde D G, erit tertia proportionalis ipsis C D, DE, hoc est, datis duabus A, & B. Quòd si ex D, per G, arcus describatur secans rectas DF, DF, in H, I, applicataq. regula ad puncta H, I, ducatur recta HK; erit D K, quarta proportionalis. Nam propter angulos H D G, I D G, (qui c ob æquales arcus EC, FC, æquales sunt) d arcus HG, I G, æquales erunt; ac propterea, ex scholio propos. 27 lib. 3. recta ducta HI, bifariam secabitur in K; e ideoque & ad angulos rectos. f Parallela ergo sunt EG, H K. g Vt igitur recta E D, ad DG, ita erit DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor lineæ C D, DE, DG, DK, continuè proportionales. Quòd si ex D, per K, alius arcus describatur secans rectas DE, D F, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.



DEINDE sit data proportio lineæ B, minoris ad maiorem A. Ductis duabus rectis DC, LM, ad DL, perpendicularibus, abscindantur rectæ DN, LO, minori B, æquales, applicataque regula ad puncta O, N, ducatur recta N P. h qua ad DC, perpendicularis erit, i cum sit parallela ipsi

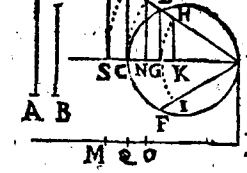
DL.

a 3. ter.
b 31. ter
c 27. ter
d 26. ter
e 3. tert.
f 28. pri
g 2. vel 4. sexti.
h 29. pri
i 33. pri

DL. Sumpta deinde recta DC, aquali ipsi A, maiori, describatur ex D, per C, arcus secans rectam NP, in P, extendaturque ex D, per P, recta DPT, eritq. DP, ipsi DC, hoc est, ipsi A, aqualis. Abscissa quoque LQ, ipsi DC, aquali, applicataq. ad puncta Q, C, regula. ducatur recta CR, qua eadem ratione ad DC, perpendicularis erit, & ipsi NP, parallela. a Et quoniam est, vt ND, ad DP, hoc est, vt B, ad A, (quod ND, DP, ipsis B, A, acceptæ sint æquales) ita CD, ad DR, hoc est, ita DP, ad DR; erunt tres rectæ ND, DP, DR, continue proportionales; ideoq. DR, ipsis B, A, tertia proportionalis erit. Quòd si ex D, per R, arcus describatur secans DC, in S, & recta DS, aqualis auferatur LM, applicataque regula ad puncta M, S, recta ducatur ST, erit DT, quarta proportionalis. Nam eadem ratione erit ST, ipsi CR, parallela, & ad DC, perpendicularis. b Quare erit, vt CD, ad DR, hoc est, vt A, ad DR, ita SD, id est, DR, ad DT. Sunt ergo quatuor linea ND, DP, DR, DT, continue proportionales. Quòd si ex D, per T, alius arcus describatur secans rectam DC, protractam, inuenietur eadem arte quinta proportionalis, atque ita in infinitum.

a 2. vel 4. sexti.

b 2. vel 4. sexti



EX his sine magno labore inter duas rectas datas reperiemus duas medias proportionales, non quidem Geometrice omnino, sed quasi attentando, & praxim ipsarum iterum atque iterum repetendo, donec id, quod quarimus, assequamur. Vt si inter CD, DK, inuenienda sint dua media proportionales, descripto circa maiorem CD, circulo CEDF, erigemus ex K, ad CD, perpendicularem KH, ducemusq; DH, ea lege, vt ex puncto E, (vbi DH, circumferentia occurrit) perpendicularis ad DC, demissa EG, auferat rectam DG, recta DH, aqualem, hoc est, vt arcus ex D, per H, descriptus transeat per punctum G. Hoc enim facto, erunt DE, DH, inter CD, DK, media proportionales. Nam vt ostendimus, est vt CD, ad DE, ita DE, ad DG, ex coroll. pro-

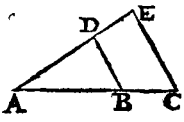
pos.

pos. 8. huius lib. [a] *Et vt DE, ad DG, ita DH, hoc est, DG, ad DK. Sunt ergo quatuor rectæ CD, DE, DH, DK, continuè proportionales, ac proinde DE, DH, inter CD, DK, mediæ proportionales sunt. Quod si rectæ DH, DG, comperiantur non esse æquales, si quidem DH, fuerit minor, eleuanda erit DH, magis; si verò maior, magis deprimenda, donec deprehendantur æquales DH, DG.* a 2. vel 4. sexti.

PROBL. 4. PROPOS. 12. X.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

SINT tres lineæ rectæ AB, BC, AD, quibus inuenienda sit quarta proportionalis; sicut quidē AB, ad BC, ita AD, ad quartam Disponantur primæ duæ AB, BC, secundum lineam rectam, quæ sit AC: Tertia verò AD, cum prima AB, faciat angulum A, quēcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per C, parallela ducatur CE, occurrens rectæ AD, productæ, in E, puncto. Dico DE, esse quartam proportionalem. Cum enim in triangulo ACE, lateri CE, acta sit parallela BD; [b] erit vt AB, ad BC, ita AD, ad DE. Quare DE, quarta est proportionalis; ac propterea, tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenimus. Quod faciendum erat.



b 2. sext.

SCHOLIVM.

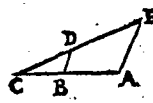
HINC facile elicimus, quonam pacto, datis duabus rectis lineis, duæ aliæ in eadem cum illis proportione reperiri possint. Si enim datæ sint duæ rectæ lineæ A, B, in quacunque proportione, si tertia qualibet accipiatur C, & ei quarta proportionalis inueniatur D, vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; factum erit, quod proponitur. Eadem arte inuenientur sex lineæ, octo, decem,

duo-

duodecim, &c. quarum bina semper eandem habeant proportionem.

OSTENDEMVS etiam tum Pappo sequens problema. Videlicet.

TRIBVS datis rectis lineis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam.



SINT tres rectæ AB, BC, CD, oportetq. inuenire quartam, quæ ad CD, tertiam sit, vt AB, prima ad BC, secundam. Disponantur prima duæ AB, BC, in directum, vt faciant rectam AC: Tertia vero CD, cum secunda BC, faciat angulum C, quemcunque. Deinde ex B, ad D, recta ducatur BD, cui per A, parallela ducatur AE, occurrens rectæ CD, productæ in E. Dico ED, esse quartam, hoc est, esse ED, ad DC, tertiam, vt est AB, prima ad BC, secundam. Hoc autem manifestum
a 2. sex. *est, a cum AC, EC, proportionaliter secentur in B, & D, punctis.*

ALITER. Ex secunda CB, fiat prima, & ex prima
b 12. sex *AB, fiat secunda, b vsque inueniatur tribus CB, BA, CD, quarta proportionalis DE: Vt sit secunda CB, ad primam BA, vt tertia CD, ad quartam DE. Erit enim & conuertendo AB, prima ad BC, secundam, vt DE, quarta ad CD, tertiam.*

ix. ## PROBL. 5. PROPOS. 13.

DVABVS datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire.

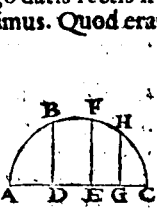
SINT duæ rectæ AB, BC, quibus media inuenienda est, proportionalis, dispositæ secundum lineam rectam AC. Diuisa AC, bifariam in E, ex E, centro, & interuallo EA, vel EC, semicirculus de-

scribatur,

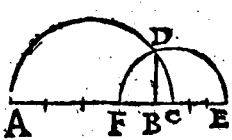
scribatur ADC: Deinde ex B, ad AC, perpendicularis educatur BD, ad circumferentiam vsque. Dico BD, esse mediam proportionalem inter AB, & BC. Ductis enim rectis AD, CD; a erit angulus ADC, rectus in semicirculo. Cum igitur ex angulo recto ADC, trianguli rectanguli ADC, deducta sit ad basin AC, perpendicularis DB; erit per corollarium propos. 8. huius lib. BD, media proportionalis inter AB, & BC. Duabus ergo datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenimus. Quod erat faciendum. a 31. ser.

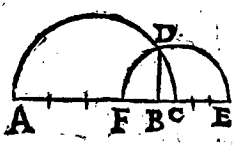
SCHOLIVM.

PERSPICVVM hinc fit, lineam rectam, quæ in circulo à quouis puncto diametri ipsi diametro perpendicularis ducitur ad circumferentiam vsque, mediam esse proportionalem inter duo diametri segmenta, quæ à perpendiculari facta sunt. Detur enim semicirculus ABC, & ex puncto D, diametri AC, ducatur ad circumferentiam recta DB, perpendicularis ipsi AC. Dico DB, esse proportionalem mediam inter AD, & DC: Id quod liquido constat ex demonstratione huius problematis. Si enim ducantur rectæ AB, CB; b fiet angulus ABC, rectus. Quare per coroll. propos. 8. constat propositum. Eadem ratione erit perpendicularis EF, media proportionalis inter AE, & EC. Item GH, inter AG, & GC, atque eodem modo de alijs quibuscunque dicendum est, quæ ex quibusuis punctis diametri ad ipsam diametrum perpendiculares ducentur. b 31. ser.



QVANDO minor data linea est valde exigua, secabit perpendicularis BD, nimis oblique circumferentiam in D. Quare vt exquisitius tunc punctum D, inueniatur, multiplicabimus minorem lineam BC, quoties libuerit. v. g. sumemus BE, ipsius BC, quadruplam, maiorem vero lineam AB, in tot partes æquales secabimus, quotuplex est BE, ipsius BC: sitq. vna pars BF:



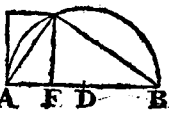


ita vt eandem proportionem habeat AB, ad BF, quam BE, ad BC. Ac tandem circa EF, circulus describatur secans BD, in D: eritq. BD, media proportionalis inter BF, BE, vt in hoc scholio demonstrauimus. Dico eandem esse mediam proportionalem inter AB, BC. Cum enim sit vt prima AB, ad secundam BF, ita tertia BE, ad quartam BC; a erit rectangulum sub AB, prima, & BC, quarta, æquale rectangulo sub BF, secunda, & BE, tertia. b Sed hoc æquale est quadrato BD. Igitur & illud. c Quapropter BD, media proportionalis est inter AB, BC. Non autem te moueat, quod citauerimus propos. 16. & 17. huius, quæ nondum sunt demonstrata: quia hac demonstratio cum sua constructione differri potest post propos. 17. huius, ita vt nullum periculum sit petitionis principij, vt Philosophi loquuntur.

a 16. sex.
b 17. sex
c 14. sex

EX PELETARIO.

DATA recta linea, aliam rectam, (quæ minor non sit, quam dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius.



SIT data recta AC, & diuidenda proponatur recta AB, (quæ minor non sit, quam dupla ipsius AC, sed vel dupla, vel maior) ita vt inter huius segmenta, media proportionalis sit AC. Disponantur rectæ AB, AC, ad angulum rectum BAC, & diuisa AB, bifariam in D, ex D, centro, interuallo autem DA, vel DB, semicirculus describatur AEB. Deinde per C, ducatur ipsi AB, parallela CE, secans, vel tangens circumferentiam in E, puncto: (Secabit autem necessario CE, circumferentiam, vel tanget. Nam si minor sit quàm dimidium rectæ AB, hoc est, minor, quàm semidiameter ad an-

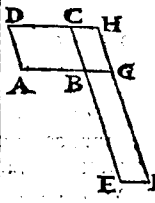
gulos

gulos rectos erecta ex D, secabit circumferentiam; tanget autem eandem circumferentiam, si æqualis sit dimidio rectæ AB, hoc est, æqualis semidiametro ex D, ad angulos rectos eductæ. Cum ergo positum sit, AC, non esse maiorem dimidio rectæ AB, secabit necessario AC, circumferentiam, aut tanget.) à quo demittatur ad AB, perpendicularis EF. Dico AC, esse mediam proportionalem inter segmenta AF, FB. Ductis enim rectis AE, BE, erit vt iam est demonstratum, ex coroll. propos. 8. huius lib. EF, media proportionalis inter AF, & FB. [a] *Cum igitur EF, æqualis sit ipsi AC, eo quod parallelogrammum sit ACEF; (Est enim CE, ipsi AF, parallela per constructionem,* [b] *& AC, ipsi EF, propter angulos rectos CAF, & EFA,) erit & AC, media proportionalis inter AF, & FB. Quod est propositum.*

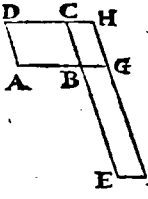
a 37. primi.
b 28. primi

THEOR. 9. PROPOS. 14. xiij.

AEQVALIVM & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorum vnum angulum vni angulo æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos; illa sunt æqualia.



SINT duo parallelogramma æqualia ABCD, BEFG, habentia angulos ABC, EBG, æquales. Dico latera circum hosce angulos esse reciproca, hoc est, esse vt AB, ad BG, ita EB, ad BC. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt AB, & BG, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, EBG, sint æquales, erunt & EB, BC, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex



Proclo demonſtrauimus. Producantur iam DC,& FG, donec coeant in H. Quoniam igitur æqualia ſunt parallelogramma DB,BF: a erit vt DB,ad BH,ita BF,ad idem BH:Sed vt DB,ad BH, b ita eſt AB, baſis ad baſin BG, quod parallelogramma ſint eiuſdem altitudinis; & ſimiliter vt BF,ad BH,ita eſt baſis EB,ad baſin BC. Igitur vt AB,ad BG,ita eſt BB,ad BC. Quod eſt propoſitũ

a 7. quin
b 1. ſext.

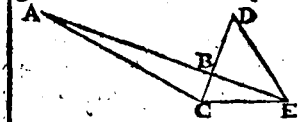
E CONTRARIO ſint iam latera circa æquales angulos ABC,EBG, reciproca, hoc eſt, vt AB,ad BG, ita EB,ad BC. Dico parallelogramma DB, BF, eſſe æqualia. Facta enim eadem conſtructione; cum ſit, vt AB, ad EG,ita EB,ad BC: c Vt autem AB,ad BG,ita DB,ad BH; & vt EB,ad BC,ita BF,ad idem BH; erit quoque vt DB, ad BH,ita BF, ad idẽ BH. d Atq. idcirco æqualia erunt parallelogrãma DB, BF. Aequalium igitur,& vnũ vni æqualem habentiũ angulum,&c. Quod erat demonſtrandum.

c 1. ſex.
d 9. 5.

xiiij.

THEOR. 10. PROPOS 15.

AEQVALIVM, & vnum vni æqualem habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum triangulorum vnũ angulum vni æqualem habentium reciproca ſunt latera, quæ circum æquales angulos, illa ſunt æqualia.



SINT duo triangula, æqualia ABC,DBE, habentia angulos, qui ad B, æquales. Dico latera circa hoſce angulos eſſe reciproca, hoc eſt, eſſe vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Coniungantur enim triangula ad angulos æquales, ita vt AB, BE, vnam efficiant lineam rectam. Quo facto, cum anguli ABC, DBE, ſint æquales; erunt & DB, BC, vna recta

linea,

linea, vt demonstratum est ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo. Ducta igitur recta CE, quoniam æqualia sunt triangula ABC, DBE, [a] erit vt ABC, ad BCE, ita DBE. ad idē BCE, Sed vt triangulum ABC, ad triangulum BCE, [b] ita est basis AB, ad basin BE, quod hæc triangula eiusdem sint altitudinis; & similiter vt DBE, ad BCE, ita est basis D B, ad BC. Quare vt A B, ad B E, ita est D B, ad B C. Quod est propositum.

[a] 7. qn.
[b] 1. sexti

IAM vero contra, sint latera circa angulos æquales, qui ad B, reciproca, hoc est, vt AB, ad BE, ita DB, ad BC. Dico triangula ABC, DBE, esse æqualia. Facta enim constructione eadem, cum sit vt AB, ad BE, ita DB, ad BC; vt autem AB, ad BE, [c] ita triangulum A B C, ad triangulum BCE; & vt DB, ad BC, ita triangulum DBE, ad triangulū idem BCE; Erit vt ABC, ad BCE, ita DBE, ad idem BCE, [d] propterea æqualia erunt triangula ABC, DBE. Aequalium igitur, & vnum vni æqualem habentium angulum, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 1. sexti
[d] 9. qn.

THEOR. 11. PROPOS. 16. XV.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectãgulum, æquale est ei, quod sub medijs comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

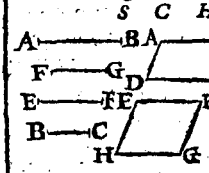
SINT quatuor rectæ proportionales AB, FG, EF, BC; vt quidem A B, ad F G, ita E F, ad B C: Sitque rectangulum ABCD, comprehensum sub extremis A B, B C; rectangulum vero E F G H, comprehensum sub medijs E F, F G: Dico rectangula A C, EG, esse æqualia. Cum enim anguli recti B, & F, sint æquales, & sit vt A B, ad F G, ita E F, ad B C; erunt latera circa æquales an-

a 14. sex. gulos B,& F,reciproca.[a] Quare parallelogramma AC, EG,æqualia erunt. Quod est propositum.

CONTRA vero, sint iam æqualia rectangula AC, EG. Dico quatuor rectas lineas AB,FG,EF,BC,esse proportionales,hoc est,esse vt AB,ad FG,ita EF,ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC,EG, habeantque angulos æquales,nempe rectos B, & F, b erunt latera circa hosce angulos reciproca;sicut quidem AB,ad FG,ita EF, ad BC. Itaque si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

b 14. sex.

SCHOLIVM

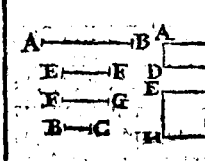


IDEM verum est, etiamsi parallelogramma AC, EG, nõ sint rectangula, dummodo sint æquiangula,ita vt anguli dictis rectis lineis comprehẽsi sint æquales. Veluti manifestum est in hac figura. Eadẽ enim prorsus est demonstratio.

xvj.

THEOR. 12. PROPOS. 17.

SI tres rectæ lineæ sint proportionales: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei; quod à media describitur, quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt.



SINT tres lineæ rectæ AB, EF, & BC, proportionales; vt quidem AB,ad EF,ita EF,ad BC: sitque rectangulum AB CD, contentum sub extremis AB, BC,& quadratũ mediæ EF, sit EFGH. Dico æqualia

esse

esse rectangulum AC, & quadratum EG. Sumpta enim recta FG, quæ æqualis sit ipsi EF, erunt quatuor lineæ AB, EF, FG, BC, proportionales; vt quidem AB, ad EF, ita FG, ad BC; eritque quadratum EG, comprehensum sub medijs EF, FG, propter æqualitatem rectarum EF, FG. [a] Quare rectangulum AC, comprehensum sub extremis AB, BC, æquale est quadrato EG, hoc est, rectangulo sub medijs EF, FG, comprehenso: Quod est propositum.

[a] 16. sexti.

SED sint iam æqualia rectangulum AC, & quadratum EG. Dico esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Cum enim æqualia sint rectangula AC, & EG; [b] erit vt AB, ad EF, ita FG, ad BC: [c] Vt autem FG, ad BC, ita est EF, ipsi FG, æqualis, ad eandem BC. Quare vt AB, ad EF, ita est EF, ad BC. Si tres igitur rectæ lineæ sint proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

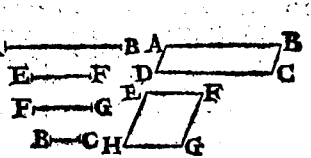
[b] 16. sexti. [c] 7. quinti

COROLLARIVM.

EX posteriori huius theorematis parte efficitur, quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quæ comprehendunt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ AB, BC, comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ EF, ostensum fuit, esse vt AB, ad EF, ita EF, ad BC. Quare EF, media est proportionalis inter AB, & BC.

SCHOLIVM.

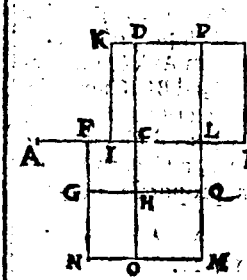
EADEM omnino consequuntur, etiamsi parallelogramma non sint rectangula, dummodo sint æquiangula, ita vt EG, sit Rhombus, & AC, Rhomboides.



Non enim dissimilis erit in his demonstratio, vt figura indicat.

LIBET hoc loco cum Peletario demonstrare problema non inutile ad lineas proportionales spectans: quod est eiusmodi.

SECTA linea recta in duas partes vtcũque, alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continue proportionales.



SIT recta AB, diuisa in C vtcunque, oporteatque partem CB, ita secare in duas alias partes, vt omnes tres partes continue proportionales sint. Secetur AC, bifariam in F, & FC, iterum bifariam in I, vt CI, quarta pars sit primæ partis AC; & ex B, I, erigantur duæ perpendiculares BE, IK, primæ parti AC, æquales, ducaturque recta EK, ita vt rectangulum IE, cõprehensum sit sub AC, primæ parte, & recta IB, composita ex altera parte BC, & ex CI, quarta parte primæ partis. Et quoniam AC, diuisa est bifariam in F, eique addita in rectum CB, a erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato ex CF, æquale quadrato ex BF: Est autem rectangulum IE, minus rectãgulo sub AB, BC, una cum quadrato ex CF (Ducta enim CD, ad AB, perpendiculari, erit rectangulum CE, contentum sub AC, CB, minus rectangulo sub AB, BC: At rectangulum CK, quadrato ex CF, æquale, cum vtrumque quarta pars sit quadrati ex AC; rectangulũ quidem CK, b quia sic est rectangulum CK, vt quadratum ex AC, hoc est, ad rectangulum sub AC, CD, ut CI, ad CA; ac proinde cum CI, sit quarta pars rectæ AC, erit & CK, quarta pars quadrati ex AC; At uero quadratum ex CF, quarta pars est eiusdẽ quadrati ex AC, ex scholio propos. 4. lib. 2.) Igitur minus quæ erit quadrato ex BF. Si igitur c fiat quadratũ rectãgulo IE, æquale, erit eius latus minus rectæ FB, maius autem quã FG, quippe cum quadratum ex FC, æquale sit ostensum rectangulo CK, ac propterea minus rectangulo IE. Sit ergo

6. secũdi.

a

b 1. sexti

c 14. secundi.

latus

latus illud FL. Dico partem CB, ita sectam esse in L, ut tres partes AC, CL, LB, sint continue proportionales. Describatur enim ex FL, quadratum FM, rectaque DC, extendatur ad O, & latus ML, ad P: sumptisque duabus FG, IQ, ipsi CF, aequalibus, ducatur recta GQ, secans CO, in H. Erit & CG, quadratum rectae CF, ob aequalitatem rectarũ CF, FG. Et quia ablatis aequalibus FC, FG, ex aequalibus FL, FN, reliqua CL, GN, aequales sunt; a & est CL, ipsi HQ, & GN, ipsi HO, aequalis; aequales quoque erunt HQ, HO; ideoque HM, quadratum erit rectae CL. Rursus quia tam rectangulum CQ, comprehenditur sub CL, & CH, sive CF, semisse ipsius AC, quam rectangulum GO, sub GN, sive CL, & GH, sive CF, semisse eiusdem AC, sive CD; b erunt duo rectangula CQ, GO, simul aequalia rectangulo CP, comprehenso sub eadem CL, & CD, quae ipsis CH, GH, simul aequalis est. Itaque cum rectangulum IE, quadrato FM, aequale sit; & rectangulum CK, quadrato CG; & rectangulum CP, duobus rectangulis CQ, GO, simul: erit reliquum rectangulum LE, comprehensum sub BE, sive AC, & BL, reliquo quadrato HM, aequale. Quocirca, cum datis tribus rectis AC, CL, LB, rectangulum LE, sub extremis AC, BL, comprehensum aequale sit quadrato HM, media CL; c erunt ipsa tres linea AC, CL, LB, continue proportionales. Quod est propositum.

a 34. primi.

b 1. secundi.

c 17. sexti.

IN numeris idem problema ita perficietur. Posteriori parti numeri propositi adiiciatur prioris partis pars quarta, & conflatus numerus in priorem partem ducatur. Huius deinde producti numeri quadrata radix eruatur. Ne si ex radice inuenta dematur semissis prioris partis, reliqua fiet secunda pars proportionalis, quam si ex posteriori parte dati numeri subtrahas, reliqua erit tertia pars. Veluti si linea AB, ponatur 76. pars autem AC, 36. & CB, 40. adiiciemus CI, hoc est, 9. quartam partem prioris partis 36. ad CB, id est, ad 40. posteriorem partem, & conflatum numerum 49. lineam scilicet IB, in priorem partem 36. siue in lineã AC, ducemus, atq; ex producto numero 1764. hoc est, ex rectangulo IE, radicem quadratam eruemus 42. pro linea FL, ex qua si detrahemus CF, semissem partis AC, nimirum 18. reliqua erit pars CL, 24. Hac ablata ex

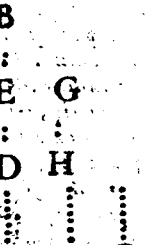
•

tota posteriori parte CB, 40. remanebit tertia pars LB, 16. Sunt ergo tres partes AC, CL, LB, numeri AB, 76. hæ tres, 36. 24. 16. continuæ proportionales. Ex quo constat, quando radix quadrata extrahi nequit ex eo producto, problema effici non posse in numeris. Atque hinc intelligentur ea, quæ lib. 5. in tractatione proportionum prope finem scripsimus, cum de ortu proportionalitatis Geometricæ ex Arithmeticæ proportionalitate ageremus.

SED quando hactenus cum Euclide de lineis proportionalibus disputauimus, non alienum erit a nostro instituto, de eisdem quoque cum Pappo Alexandrino disserere, qui datis duobus terminis ex tribus cuiuscunque Medietatis, siue Arithmeticæ, siue Geometricæ, siue Harmonicæ, tertium inquirit: Et in Geometrica proportionalitate aliter, quàm ab Euclide factum est. Hoc autem exequemur sequentibus propositionibus, quarum prima hæc sit.

I.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Arithmetica proportionalitate inuenire.



SINT data duæ rectæ AB, & C, (quæ per unitates in longum dispositas hic repræsentantur) inter quas media proportionalitate Arithmetica sit inuenienda. Minori C, ponatur æqualis FH, & ex maiore AB. abscindatur alia æqualis AD. Diuiso autem segmento BD, bifariam in E, sumatur ipsi DE, æqualis HG. Dico FG, esse mediam Arithmeticè proportionalem inter AB, & C. Excedit enim AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH; siue DE. Cum ergo duo excessus BE, DE, sint æquales, ex constructione, liquido constat rectas AB, FG, & C, Arithmeticè proportionales esse.

HINC efficitur, mediam lineam FG, esse semissem summæ ex extremis constatæ. Cum enim tam AD, quàm C,

ipsi,

ipsi FH, sit aequalis, erit summa ex AD, & C, ipsius FH; dupla: Est autem & DB, ipsius HG, dupla. a Igitur & summa ex AB, & C, totius FG, dupla erit; ac proinde FG, semissis erit summa extremarum. Quod est propositum. a 1. anti

II.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura, datae duae rectae AB, & FG, quibus inuenienda sit tertia minor in Medietate Arithmetica. Ex minore FG, detrahatur recta GH, excessui BE, quo AB, ipsam FG, superat, aequalis: & ipsi FH, ponatur aequalis C. Dico C, esse tertiam proportionalem minorem. Excedit. n. AB, ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH: qui quidem duo excessus BE, GH, ex constructione, aequales sunt.

III.

DATIS duabus rectis lineis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire.

SINT in eadem figura datae duae rectae C, & FG, quibus inuenienda sit tertia maior in Medietate Arithmetica. Sumatur AE, ipsi FG, aequalis, eique addatur EB, excessui GH, quo FG, ipsam C, superat, aequalis. Dico AB, esse tertiam proportionalem maiorem; ita vt tres AB, FG, & C, sint proportionales Arithmetice. Nam AB, excedit ipsam FG, excessu BE; & FG, ipsam C, excessu GH. Cum ergo duo excessus BE, GH, ex constructione, sint aequales, patet propositum.

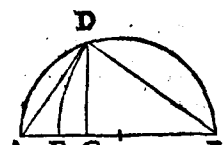
ITA QVE datis duobus numeris inaequalibus 30. 16. si semissis excessus, nimirum 7. minori 16. adijciatur, constabitur medius proportionalis Arithmetice, 23. vt hic apparet, 30. 23. 16. Vel medius terminus habebitur, si summa extremorum semissis sumatur; vt in eodem exemplo patet. Summa enim extremorum est 46. & eius semissis 23. medium terminum constituit.

SI vero ex minore 16. detrahatur excessus 14. reliquum erit minus extremum 2. in Medietate Arithmetica, vt hic vides, 30. 16. 2.

SI denique maiori 30. adijciatur excessus 14. conficietur maius extremum 44. in proportionalitate Arithmetica, vt hic patet. 44. 30. 16.

IIII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire.



SINT datæ rectæ AB, BC, eundem terminum B, habentes, inter quas inuenienda sit media Geometrice proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, excitetur ex C, ad AB, perpendicularis CD; & ex B, per D, arcus describatur secãs AB, in E. Dico BE, mediam proportionalem esse inter AB, BC, in proportionalitate Geometrica: Ductis enim rectis AD, BD; [a] *erit angulus ABD, rectus. Igitur ex 8 coroll. propos. 8. huius lib. rectæ BD, hoc est, ipsi æqualis BE, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod est propositum.*

a 31. ter 19.

V.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in proportionalitate Geometrica inuenire.

SINT in eadem figura datæ rectæ AB, BE, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Geometrice proportionalis. Descripto circa maiorem AB, semicirculo ADB, describatur ex B, per E, arcus secans circumferentiam ADB, in D, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur DC. Dico BC, tertiam proportionalem esse ipsis AB, BE. Ductis enim rectis AD, BD; [b] *erit*

b 21. ter.

angu-

angulus ADB, rectus. Igitur ex coroll. propos. 8. huius lib. erit BD, hoc est, ipsi aequalis BE, media proportionalis inter AB, BC: Id est, erit AB, ad BE, vt BE, ad BC. Quod est propositum.

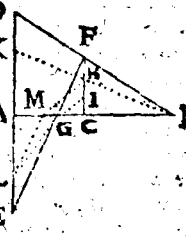
VI.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire.

SINT in eadem figura data recta CB, BE, eundem terminum B, possidentes, quibus inueniendа sit maior tertia Geometrice proportionalis. Ex C, termino minoris excitetur ad EB, perpendicularis CD, quam arcus ex B, per E, descriptus secet in D. Ducta autem recta BD, excitetur ad eam in D, perpendicularis DA, secans BE, productam in A, Dico AB, tertiam proportionalem esse ipsis CB, BE. Quoniam enim angulus ADB, rectus est, erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BD, hoc est, BE, ipsi aequalis, media proportionalis inter BC, & AB: Hoc est, erit CB, ad BE, vt BE, ad AB. Quod est propositum.

VII.

DATIS duabus rectis lineis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire.

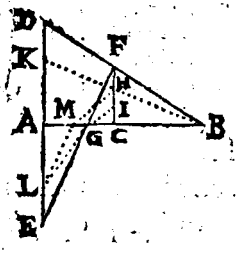


SINT datae rectae AB, BC, eundem terminum B, possidētes, inter quas inueniendа sit media Harmonice proportionalis. Ducta per A, ad AB, perpēdicularі DE, ponantur aequales AD, AE, quantacunque. Excitetur quoque ex C, ad AB, perpendicularis CF, secans ductam rectam BD, in F, puncto, ex quo ad E, recta ducatur FE, secans AB, in G. Dico BG, esse media-

diam Harmonice proportionalem inter AB, BC, Hoc est, esse AB, primam ad tertiam BC, vt AG, excessum inter primam AB, ac mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC: a Quoniam enim CF, parallela est ipsi DE, ob rectos angulos A, C, erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BCF, triangulo BAD, simile: hoc est, erit vt AB, ad AD, ita BC, ad CF; & permutando, vt AB, ad BC, ita AD, ad CF, hoc est, ita AE, ad CF. Rursus ob similitudinem triangulorum AEG, CFG, b erit vt AE, ad AG, ita CF, ad CG; & permutando vt AE, ad CF, ita AG, ad GC. Erat autem vt AE, ad CF, ita AB, ad BC. Igitur erit quoque AB. ad BC, prima linea ad tertiam, vt AG, excessus inter primam AB, & mediam BG, ad GC, excessum inter mediam BG, & tertiam BC. Quod est propositum.

a 28. 6n.

b 4 sexti



NON determinantur autem magnitudines rectarum AD, AE, quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem media BG, inuenietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL. Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LH: quam dico per G, transire. Si enim transeat per aliud punctum, vt per M, inter A, & G, ostendemus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AM, ad MC. Fient enim rursus triangula æquiangula ALM, MHC, si recta est HML. Est autem vt AB, ad BC, ita AG, ad GC, vt ostensum est. Igitur erit quoque AM, ad MC, vt AG, ad AC, quod est absurdum. Nam c minor est proportio AM, ad GC, quam AG, ad GC: Sed adhuc minor est proportio AM, ad MC, quam ad GC. Multo ergo minor erit proportio AM, ad MC, quam AG, ad GC, Non ergo ita est AM, ad MC, vt AG, ad GC: ac propterea HL, non secabit AG, in M. Eodem modo non secabit GC. Transit

c 8. quinti.

igitur

igitur per G: atque idcirco eadem media BG, inuenietur per rectas AK, AL, æquales.

VIII.

DATIS duabus rectis lineis, minorem extremitatem in Harmonica Medietate inuenire.

SINT in eadem figura datæ rectæ AB, BG, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia Harmonice proportionalis. Ducta DE, ad AB, perpendiculari, ponantur æquales AD, AE, quantacunque: iuncta autem recta RD, ducatur ex E, per G, recta secans BD, in F, puncto, ex quo ad AB, perpendicularis demittatur FC. Dico BC, ipsis AB, BG, esse Harmonice proportionalem, Hoc est, esse AB, primam ad BC, tertiam, vt est AG, excessus inter primam & secundam, ad GC, excessum inter secundam ac tertiam. Quod quidem demonstrabitur, vt in præcedenti propositione.

NON determinantur etiam hic magnitudines rectarum AD, AE, quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BC, reperietur. Sint enim aliæ æquales AK, AL: Ducta autem recta BK, secet perpendicularem CF, in H, iungaturque recta LG, quam dico cadere in H. Si enim cadat infra, vt in I, ostendemus eodem modo, esse vt AB, ad BC, ita AK, ad CH, hoc est, ita AL, ad CH. Vt autem AB, ad BC, ita erat AG, ad GC. Erit igitur quoque vt AG, ad GC, ita AL, ad CH. Et quia si recta linea est LGI, ob similitudinem triangulorum ALG, CIG, a est vt AL, ad AG, ita CI, ad GC, erit permutando, vt AL, ad CI, ita AG, ad GC. Cum ergo ostensum sit esse vt AG, ad GC, ita AL, ad CH, erit AL, ad CH, vt ad CI. b Æquales sunt igitur CH, CI, totum & pars, quod est absurdum. Non ergo cadet LG, infra H: eodemque modo ostendemus non cadere supra. Cadit ergo in H, vbi BK, perpendicularem CF, secat; ac proinde ex H, demissa perpendicularis

a 4. sexti

b 9. 5n.

HC,

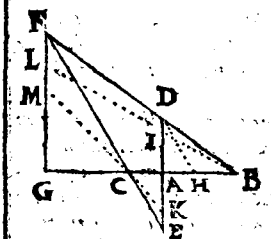
HC, ad AB, exhibebit eandem tertiam minorem BC, proportionalem Harmonice.

HINC sequitur, datis tribus rectis Harmonice proportionalibus, minimam esse maiorem excessu, quo media minimam superat. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita AG, ad GC; sit autem AB, prima maior quàm AG; excessus inter
a 14. 4n. *primam AB, & mediam BG; a erit quóque BC, tertia maior quàm GC, excessus inter medium BG, & minimam BC.*

IX.

DATIS duabus lineis rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT datæ rectæ AB, BC, eundem habentes terminum B, quibus inuenienda sit maior tertia Harmonice proportionalis. Ducta per A, ad BC, perpendiculari DE, ponantur æquales AD, AE, quantacunque, ducaturque recta BD, quæ productam secet EC, producta in F, puncto, (quod autem conueniant BD, EC, mox demonstrabimus) ex quo ad BC, productam demittatur perpendicularis FG. Dico GB, ipsis CB, BA, Harmonice proportionalem esse: Hoc est, esse GB, primam ad BA, tertiam, vt GC, excessum inter primam GB, & mediam



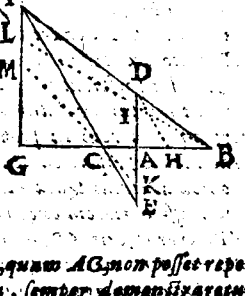
b 28. pri mi. *BC, ad CA, excessum inter mediam CB, & tertiam BA. b Quoniam enim GF, ipsi AD, parallela est, ob angulos rectos G, A; erit ex scholio propos. 4. huius lib. triangulum BAD, triangulo BGF, simile: id est, erit vt GB, ad GF, ita BA, ad AD; & permutando, vt GB, ad BA, ita GF, ad AD, hoc est, ad AE. Rursus ob similitudinem triangulorum FGC, EAC,*
c 4. sexti *c erit vt FG, ad GC, ita EA, ad CA; & permutando vt FG, ad AE, ita GC, ad CA. Erat autem vt FG, ad AE, ita GB, ad BA. Igitur erit quoque vt GB, prima, ad BA, tertiam, ita GC, excessus inter primam GB, & mediam BC, ad CA,*

exces-

excessum inter mediam BC, & tertiam BA; Quod est, propositum.

QVOD autem BD, EC, conueniant, sic probabitur. Quoniam BC, ponitur media, & BA, tertia, siue minima, maior erit BA, tertia quam CA, excessus, quo media BC, minimam BA, superat, vt ad finem antecedentis problematis ostendimus. Nisi enim maior esset AB, quam AC, non posset reperiri tertia maior; tum ea inuenta, semper demanabit aretur tertia AE, maior excessu AC, quo media tertiam superat. Abscindatur ergo AH, ipsi AC, aequalis, connectaturq; recta HD. Quoniam igitur latera AE, AC, lateribus AD, AH, aequalia sunt, angulosq; comprehendunt aequales, vtpote rectos, siue ad verticem A; erunt & anguli ACE, AHD, aequales: qui cum alterni sint; erunt rectae EC, HD, parallelae: ac proinde anguli interni DHC, HCF, duobus rectis aequales erunt. Cum ergo angulus DHC, maior sit interno angulo B, erunt duo anguli DCF, CBK, duobus rectis minores. Quocirca BD, EC, coibunt ad propositum.

NON determinantur quoq; hic magnitudines rectarum AD, AE: quia vtcunque sumantur siue maiores, siue minores, eadem tertia BG, reperietur. Sint enim aliae aequales AI, AK: Ducta autem recta BI, quae producta secet perpendicularem FG, in L, ducatur KC, quam producam dico cadere in L. Si enim cadat infra, vt in M; ostendemus eodem modo, esse vt GB, ad BA, ita GL, ad AI, id est, ad AK. Vt autem GB, ad BA, ita erat GC, ad CA. Erit igitur, vt GC ad CA, ita GL, ad AK. Et quia, si recta linea est KCM, ob similitudinem triangulorum GMC, AKC est vt GM, ad GC, ita KA, ad AG, erit permutando, vt GM, ad KA, ita GC, ad CA. Cum ergo ostensum sit, esse vt GL, ad AK, ita GC, ad CA, erit quoque GM, ad AK, vt GL, ad AK. Aequales sunt igitur GM, GL, pari & totum, quod est absurdum. Non ergo cadet KC, infra L: eademque ratione ne-



a 4. pri.
b 27. pr.
c 29. pr.
d 16. pri.
e 13. pro.
f 4 sexti.
g 9. quinti.

que supra cadet. Cadit ergo in L, vbi BI, producta perpendicularem FC, secat; ac proinde ex L, demissa perpendicularis LG, ad GB, cadet in G, exhibebitque eandem tertiam GB, maiorem, Harmonice proportionalem.

EX his perspicuum est, quando duo numeri proportionē habent duplam, vel dupla maiorem, illis non posse adiungi tertium maiorem in proportionalitate Harmonica, vt in tractatione proportionū in 3. regula proportionalitatis Harmonica diximus. Quia enim ostendimus, BA, minimam lineam esse maiorem excessu AC, quo media BC, minimam AB, superat; erit AB, maior semisse ipsius BC; ac proinde BC. ad AB, media ad minimam, minorem proportionem habebit, quam duplam. Quod si BC, ad AB, esset dupla, vel maior quam dupla, esset AB, vel aqualis ipsi AC, vel minor. Quare vt ostensum est, non posset reperiri tertia maior in Harmonica proportionalitate: quia EG, cum BD, non coiret.

SED demonstrauimus etiam cum Io. Baptista Benedicto, qua ratione ijdem termini proportionalitatis Harmonicæ in numeris reperiantur. Hinc enim patebit ratio quarundam praxium, quas in tractatione proportionum in lib. 5, explicauimus. Vtemur autem nonnullis propositionibus libri 7. cum ea ex lib 5. & 6. non pendeant, atque idcirco ante hos libros demonstrari possint. Hinc igitur exordium sumemus.

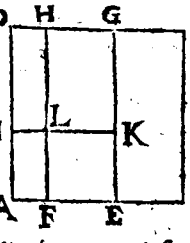
X.

EX datis quibusuis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales, quorum extremi eādem proportionem habeant, quam dati duo numeri, reperire.

EX qualibet recta AB, describatur quadratū ABCD, Sumptisque duabus partibus aqualibus BE, EF, in latere AB, ducantur EG, FH, ipsis AD, BC, parallelæ. Item sumpta recta AI, aquali ipsi BE, vel EF, agatur IK, ipsis AB, DC, parallela secans FH, in L. Erit rectangulum AG, con-

tentum

sentum sub AB, (id est, sub summa rectarum AE, EB; a cui EG, sit ipsi BC, ideoq; ipsi AB, aqualis) & AE (maiore scilicet parte summæ AB.) Rectangulum vero EC, continebitur sub AB, (hoc est, sub eadē summa rectarum AE, EB,) & EB, (minore videlicet parte eiusdem summæ AB.) Tam denique rectangulum AK, quam GL, sub partibus AE, EB, comprehendetur; propterea quod AI, sumpta est ipsi EB, aqualis; & HL, LK, ipsis AE, EB, aquales. b Cum enim FH, ipsi AD, hoc est, ipsi AB; & FL, ipsi AI, hoc est, ipsi EB, sit aqualis: erit reliqua HL, reliquæ AE, aqualis: at c KL, ipsi EF, siue ipsi EB, aqualis est. Ex quo fit, duo rectangula AK, KH, simul cantinere duplū eius, quod sub partibus AE, EB, continetur. Dico rectangulum AG; & summam duorū rectangulorum AK, KH; & rectangulum EC, constituere proportionalitatē Harmonicā: hoc est, vt est AG, primum, ad EC, tertium, ita esse IH, excessum inter primum AG, & secundum HLI AEG, ad AL, excessum inter secundum HLI AEG, & tertium EC, siue FG, d quod ipsi EC, aquale est. Nam cum HL, ipsi AE; & LF, ipsi EB, aqualis sit, vt ostendimus; e erit AE, ad EB, vt HL, ad LF. Vt autem AE, ad EB, f ita est AG, ad EC: Et vt HL, ad LF, ita est HI, ad AL. Igitur erit quoque AG, primum ad EC, tertium, vt HI, excessus inter primum ac medium, ad AL, excessum inter medium ac tertium. Quod erat propositum.



a 34. primi

b 34. primi.

c 34. primi.

d 36. primi

e 7. quinti

f 1. sexti

ITA QVE si AE, ponatur 6. & EB, 4. erit summa AB, 10. quam si ducamus in AE, & EB, fiet AG, 60. & EC, 40. Duplum autē eius, quod fit ex AE, in EB, hoc est, HLI AEG, fiet 48. medium Harmonicum. Tres igitur numeri Harmonice proportionales erunt 60, 48. 40. quorum extremi eandem proportionem habent, quam dati numeri 6. 4. Cum enim eadem summa 10. ex 6. & 4. collecta multiplicans utrumque 6. 4. produxerit extremos 60. 40. g erit 60. ad 40. vt 6. ad 4. Quod etiam patet ex figura. h Est enim AG, id

g 17. septimi.

h 1. sexti

est, 60. ad EC, id est, ad 40. vt AE, id est, 6. ad EB, id est, ad 4.

HAC arte, si summa quorumlibet duorum numerorum datorum ducatur in vtrumque seorsum, gignentur extremi termini proportionalitatis Harmonica eandem habentes proportionem, quam dati duo numeri: Medius autem terminus erit numerus duplus eius, qui fit ex multiplicatione datorum duorum numerorum inter se.

FIT his facile etiam inuenimus tres numeros harmonice proportionales, quorum extremi proportionem habeant datã, & medius sit dato numero æqualis. Vt si extremi debeant habere proportionem quintuplam, medius sit 30. sumendi sunt 5. & 1. in data proportione, & eorum summa 6. in vtrumque ducenda, vt fiant 30. & 6. inter quos statuatur medius 10. qui duplus est producti ex multiplicatione datorum numerorum 5. & 1. vnius in alterum: erunt 30. 10. 6. harmonice proportionales, vt dictum est. Deinde datus medius 30. diuidatur per medium inuentum 10. & Quotiens 3. per tres inuentos 30. 10. 6. multiplicetur. Ita enim fient tres numeri quæsiti 90. 30. 18.

ALITER.

INTER datos duos numeros 6. 4. statuitur medius Arithmetice proportionalis, 5. nimirum semissis eorũ summæ, hoc modo. 6. 5. 4. Deinde medius 5. in extremos 6. & 4. ductus gignat 30. & 20. inter quos statuatur medius 24. quem extremi inter se multiplicati produxêre, hoc modo, 30. 24. 20. Dico hos tres esse Harmonice proportionales. Quoniã enim tres numeri 60. 48. 40. qui fiunt ex summa 10. datorũ numerorum 6. 4. in datos numeros 6. & 4. & ex 4. in 6. bis, dupli sunt trium numerorum hic inuentorum, quòd hi producti sint ex semisse summæ datorum numerorum in datos numeros, & ex 4. in 6. semel, vt perspicuũ est: erit quoque tam excessus inter 60. & 48. duplus excessus inter 30. & 24. quàm excessus inter 48. & 40. ipsius excessus inter 24. et 20. vt ad propos: 10. ostendimus. Cum ergo tres numeri 60. 48. 40. sint Harmonice proportionales, vt in præcedenti problemate demõstrauimus; erunt quoque eorũ semisses, 30. 24. 20.

60. 48. 40.

30. 24. 20.

eædem

a eadem habentes proportiones, Harmonice proportionales: quandoquidem & excessus eandem proportionem habent, quam excessus numerorum, 60. 48. 40. quippe cum excessus numerorum 30. 24. 20. semissis sint horum numerorum 60. 48. 40. excessuum, vt dictum est. a 15. dn.

XI.

DATIS duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & BC, 10. inter quos inueniendus sit medius proportionalis Harmonice. Dematur ex maiore AB, 15 numerus BD, minori BC, 10. aqualis,

A ... E .. D ..... B C

& reliquus numerus AD, 5. nimirum differentia datorum numerorum, ducatur in minorem BC, 10. productusque numerus 50. diuisus per AC, 25. summam datorum numerorum, faciat Quotientem DE, 2. qui additus minori BD, 10. faciat DE, 12. Dico BE, esse medium proportionalem Harmonice inter AB, BC, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AD, in BC, fit, diuiso per AC, Quotiens est DE; producetur idem numerus diuisus ex DE, Quotiente in diuisorem AC, vt constat ex defin. Diuisionis. Quia igitur idem numerus fit ex AC, primo, in DE, quartum; qui ex BC, vel BD, secundo, in AD, tertium; b erit AC, primus ad BC, secundum, vt AD, tertius ad DE, quartum: Et diuidendo, AB, ad BC, primus datus ad tertium datum, vt AE, excessus inter primum AB, & medium inuentum, BE, ad DE, excessum inter medium BE, & BD, siue tertium BC. Sunt ergo AB, BE, BC, nimirum 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum. b 29. septimi vel 16. sexti.

ITAQVE si differentia datorum numerorum ducatur in minorē, numerusq; productus diuidatur per datorū numerorū summā, ac deniq; Quotiēs minori adijcietur, cōstabitur medius terminus Harmonicæ proportionalitatis.

XII.

DATIS duobus numeris, minorem

extremum in proportionalitate Harmonica inuenire.

SINT duo numeri dati AB, 15. & AC, 12. quibus inueniẽdus est minor Harmonice proportionalis. Addatur BD,

A . . . . . E . . C . . . B . . . D

aequalis ipsi BC, excessui inter datos numeros. Per hanc summam AD, 18. colligam ex maiore numero, & differentia datorum numerorum, diuidatur numerus 36. factus ex minore dato AC, in BC, differentiam datorum numerorum: et Quotiens CE, ex minore dato AC, detrahatur. Dico reliquum AE, 10. esse terminum tertium minorem quaesitum, hoc modo, 15. 12. 10. Quoniam enim numero, qui ex AC, in BC, fit, diuiso per AD, Quotiens est CE. producetur idem numerus diuisus ex CE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato, vt ex Diuisionis defin. manifestum est. Quia igitur idem numerus gignitur ex AD, primo, in CE, quartum, qui ex

A . . . . . E . . C . . . B . . . D

19. sep. vel 16. sexti. *BC, secundo in AC, tertium: erit AD, primus ad BC, secundum, hoc est, ad BD, vt AC, tertius ad CE, quartum. Et diuidendo, AB, ad BD, hoc est ad BC, vt AE, ad CE. Et permutando, AB, primus datus ad AE, tertium inuentũ, vt BC, excessus inter primum AB, & medium AC, ad CE, excessum inter medium AC, & tertium AE. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, id est 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum.*

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectã diuidatur numerus ex minore numero in differentiam eandem datorũ numerorũ procreatus, Quotiensq; ex minore dato detrahatur, reliquus fiet minor extremus in proportionalitate Harmonica.

ALITER.

SINT rursum dati duo numeri AB, 15. & AC, 12.

quibus

quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Maiori AB, addatur B D, aequalis differentiæ B C, 3. datorum

A ..... E .. C ... B ... D

numerorum. Et per summam A D, 18. diuidatur numerus 180. ex multiplicatione datorum numerorum AB, AC, hoc est, 15. 12. inter se procreatus, sitque Quotiens AE, 10. Dico AE, minorem extremũ esse in Medietate Harmonica. Quoniam enim numero, qui ex AB, in AC, gignitur, diuiso per AD, Quotiens fit AE, producetur idem numerus diuisus ex AE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato, vt ex defin. Diuisionis constat. Quia igitur idem numerus fit ex A D, primo in AE, quartum, qui AB, secundo in A C, tertium; erit AD, primus ad AB, secundum vt AC, tertius ad AE, quartum; ac proinde cum A D, maior sit, quam A B, erit quoque AC, maior quam AE. Quare erit & diuidendo BD, id est, BC, ad AB, vt CE, ad AE: Et conuertendo AB, ad BC, vt AE, ad CE; Et permutando AE, primus ad AE, tertium inuentum, vt BC, excessus inter primũ AB, & medium AC, ad CE, excessum inter medium A C, & tertium A E. Sunt igitur tres numeri AB, AC, AE, hoc est, 15, 12. 10. Harmonice proportionales. Quod erat propositum. a19. sept. vel 16. sexti.

ITAQVE si per summam ex maiore numero, & ex differentia datorum numerorum collectam diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorũ inter se procreatus, erit Quotiens minor terminus extremus Harmonicæ Medietatis.

XIII.

DATIS duobus numeris, maiorem extremum in Harmonica proportionalitate inuenire.

SINT dati duo numeri AB, 10. & AC, 12. quibus inueniendus sit tertius maior in Medietate Harmonica. Ex minore

A ..... D .. B .. C .. E

AB, detrahatur BD, aqualis differentiæ BC, 2. datorum numerorum. Et per reliquum numerum AD, 8. diuidatur numerus 24. factus ex maiore numero AC, 12. in differentiam datorum numerorum BC, 2. vel BD. Quotiens autem CE, 3. maiori numero AC, 12. adijciatur. Dico summam AE, 15. esse terminum maiorem in proportionalitate, siue Medietate Harmonica. Hoc est, tres numeros AE, AC, AB, nimirum 15. 12. 10. esse Harmonica proportionales. Quoniam enim numera, qui ex AC, in BD, fit, diuise per AD, Quotiens sit CE, producetur idem numerus diuisus ex CE, Quotiente in diuisorem AD, multiplicato. Quia igitur idē numerus gignitur ex AC, primo in BD, quantum qui ex CE, secundo in AD, tertiam, erit AC, primus ad CE, secundum, vt AD, tertius ad BD, quantum. Et componendo AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc est, ad BC. Et permutādo AE, primus ad AB, tertiū, vt CE, excessus inter primū AE, & medium AC, ad excessum BC, inter medium AC, & tertium AB. Sunt igitur tres numeri AE, AC, AB, nimirum 15. 12. 10. Harmonice proportionales. Quod est propositum.

219. pro. del 18. sexti.

IT AQVE Datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex maiore numero in differentiam datorum numerorum procreatus. Quotiensque maiori numero adijciatur, conflabitur maior terminus extremus Medietatis Harmonicæ.

A L I T E R.

SINT rursum duo dati numeri AB, 10 & AC, 12. quibus inueniendus sit maior in Harmonica Medietate. Ex minore AB, demat BD, aqualis excessui BC, datorum numerorum: Et per reliquū numerum AD, 8. diuidatur numerus 120. factus ex multiplicatione datorum numerorum AB, 10. & AC, 12. procreatus. Quotiensque sit AE, 15. Dico AE, esse terminum maiorem in proportionalitate Har-

A ..... D .. B .. C .. E

monica. Quoniam enim numerus ex AB, in AC, di-

uiso

uiso per AD, Quotiens est AE, producetur idem numerus diuisus ex AE, Quotiẽte in diuisorem AD, ex defin. Diuisionis. Quia igitur idẽ numerus gignitur ex AB, primo in AC, quartum, qui ex AD, secundo in AE, tertium; a erit AB, primus ad AD, secundum, vt AE, tertius ad AC, quartum; ac proinde cum AB, maior sit quam AD, erit & AE, maior quam AC. Et cum sit, vt AE, ad AC. ita AB, ad AD, erit per cõuersionem rationis AE, ad CE, vt AB, ad BD, hoc est, ad BC. Et permutando AE, primus inuenius ad AB, tertiũ, vt CE, excessus inter primũ AE, & mediũ AC, ad BC, excessum inter medium AC, & tertium AB. Igitur tres numeri AE, 14. AC, 12. AB, 10. Harmonice proportionales sunt. Quod est propositum.

a 19. sept. vel 16. sexti.

ITAQVE datis duobus numeris, si eorum differentia ex minore auferatur, & per reliquum numerum diuidatur numerus ex multiplicatione datorum numerorum inter se genitus, dabit Quotiens maiorem terminum extremum Medietatis Harmonicæ.

POSTREMO libet quoque ex Pappo praxes illas demonstrare, quibus ad finẽ tractationis proportionũ ex æqualitatis proportione omnes proportiones rationales, & vicissim ex inæqualitatis proportione qualibet æqualitatem, ac denique ex quauis proportionalitate Geometrica & Geometricum, et Arithmeticam, & Harmonicam oriri docuimus. Sic ergo ex proportionalitate Geometrica tam æqualium terminorum, quam inæqualium, gignitur proportionalitas alia Geometrica inæqualium terminorum.

XIIII.

PROPOSITIS tribus terminis Geometrice proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta: ac sũma conflata ex secundo & tertio semel: ac tertius semel, sunt Geometrice proportionales.

SINT

SINT tres termini continue proportionales Geometrice, A, B, C: sitque D, summa ex A. semel, & B. bis, & C. semel collecta: At E, summa ex B, & C. semel conflata, ac denique

A,	1.	*B,*	1.	*C,*	1.	*A,*	12.	*B,* 6. *C,* 3.
D,	4.	*E,*	2.	*F,*	1.	*D,*	27.	*E,* 6. *F* 3.

F, ipsi C, aqualis. Dico D, E, F, Geometrice quoque proportionales esse. Cum enim sit A, ad B, vt B ad C; erit quoque
12. 5. *componendo A, B, simul ad B, vt B C, simul ad C.* 2 *Igitur omnes antecedentes simul, nimirum A, B, & B, C, ad omnes consequentes simul, nimirum ad B, C, vt vna antecedens, hoc est, B, C, ad vnam consequentem C. Est autem D, aqualis ipsis A, B, & B, C: Et E, ipsis B, C: ac denique F, ipsi C. Igitur erit quoque D, ad E, vt E, ad F: ac proinde D, E, F, Geometrice sunt proportionales. Quod est propositum.*

HINC manifestum est, si termini A, B, C,

A.	*B.*	*C.*	*sint aquales; D, E, F, esse duplos. Nam B, C, simul dupli erunt ipsius C; ac propterea & E, ipsius F: quod E, ipsis B, C, & F, ipsi C, sit aqualis. Cum ergo D, E, F, sint continue proportionales,*
1.	1.	1.	
D.	*E.*	*F.*	
4.	2.	1.	*ipsi erunt in dupla proportione. Quod si termini aquales A, B, C, sint vnitates, generabitur dupla proportionalitas D, E, F, in minimis terminis 4. 2. 1. propterea quod F, aqualis est ipsi C, hoc est, vnitati.*
A.	*B.*	*C.*	
4.	2.	1.	

SI vero A, B, C, sint dupli, erunt geniti D, E, F, tripli. Nam si B, ipsius C, duplus est; erit summa ex B, C, collecta, id est, E, ipsius C, hoc est, ipsius F, triplus: ac proinde D, E, F, continuam proportionem triplam habebunt. Atque eodem modo ex triplis orientur quadrupli, ex quadruplis quintupli, & sic in infinitum.

A.	*B.*	*C.*	*A. T si termini A, B, C, sint dupli inuerso ordine, erunt D, E, F, geniti, sesquialteri. Nam cum B, sit semissis ipsius C; erit summa ex B, C, collecta, hoc est, E. ipsius C, sine ipsius F, sesqui-*
1.	2.	4.	
D.	*E.*	*F.*	
9.	6.	4.	

altera.

altera. Eodem modo, si A, B, C, sint conuerso ordine tripli, erunt procreati D, E, F, sesquitertij. Nam B, erit ipsius C, tertia pars. Igitur summa ex B, C, conflata, id est, E, continebit C, siue F, semel, et insuper eius partem tertiã: ac propterea D, E, F, habebunt continuam proportionem sesquitertiam. Pari ratione ex quadruplis inuersis nascentur sesquiquarti, & ex inuersis quintuplis sesquiquinti, atque ita in infinitum. Non aliter monstrabimus, aliarum proportionum generationes ex alijs proportionibus recte esse prascriptas in tractatione proportionum. Item recte quamcumque proportionem inaqualitatis ad aqualitatem reuocari: quippe cum in ea reductione retexamus quodammodo operationem, qua inaqualitatis proportionem ex aqualitate gigni tradidimus.

A. B. C.
1. 3. 9.

D. E. F.
16. 12. 9.

XV.

PROPOSITIS tribus terminis siue æqualibus, siue inæqualibus, Geometrice proportionalibus; Sũma ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta: ac sũma ex primo, secũdo, & tertio semel cõflata: ac deniq; tertius semel, sũt Arithmetice proportionales.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C: sitq; D, summa collecta ex A, bis, ex B, bis, & ex C, semel. At

A, 1. B, 1. C, 1. A, 12. B, 6. C, 3.

D, 5. E, 3. F, 1. D, 39. E, 21. F, 3.

E, summa confluta ex A, B, C, semel: At denique F, ipsi C, aqualis. Dico D, E, F, esse Arithmetice proportionales. Quoniam enim summa ex A, bis, & B, bis, & C, semel, hoc est, terminus D, superat summam ex A, B, C, semel, hoc est, terminum E, aggregato ex A, B, semel collecto. Item summa ex

A, B, C,

A, B, C, hoc est, terminus E, superat terminum C, siue F, eodem aggregato ex A, B, semel collecto; erit idem excessus inter D, & E, qui inter E, & F; ac propterea D, E, F, Arithmeticam proportionalitatem, siue Medietatẽ constituent, Quod est propositũ.

A. B. C. 3. 20. 1.
D. E. F. 47. 24. 1.

EADEM prorsus ratione orietur proportionalitas Arithmetica ex tribus terminis quibuscunque, etiamsi non sint proportionales; vt in hoc exemplo perspicuum est.

XVI.

PROPOSITIS tribus terminis siue equalibus, siue inæqualibus, Geometrice proportionalibus; Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel: ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel: & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonice proportionales sunt.

SINT tres termini Geometrice proportionales A, B, C: sitque D, summa collecta ex A, bis, ex B, ter, & ex C, semel: At E, summa ex B, bis, & C, semel conflata: Ac denique F, summa ex B, semel, & C, semel collecta. Dico D, E, F, constituere proportionalitatem, siue Medietatem Harmonicam.

A, 2. B, 1. C, 1. — A, 12. B, 6. C, 3.
D, 6. E, 3. F, 2. — D, 45. E, 15. F, 9.

Quoniam enim est, vt A, ad B, ita B, ad C; erunt ex scholio propos. 22. lib. 5, vt A, bis ad B, ita B, bis, ad C. Igitur componendo, vt A, bis, & B, semel, ad B, ita B, bis, & C, semel
212. gn. *ad C. Igitur vt omnes antecedentes simul, nimirum A, bis, & B, ter, & C, semel, hoc est, terminus D, ad omnes consequentes simul, nimirum ad summam ex E, C, id est, ad F; ita vnum antecedens, nimirum A, bis, & B, semel ad B. Est autem*

autem A, bis, & B, semel excessus, quo A, bis, & B, ter, & C, semel, superant B, bis, & C, semel, hoc est, excessus inter D, primum terminum, & medium E: At B, excessus, quo B, bis, & C, semel, superant summam ex B, C, hoc est, excessus inter E, medium, & F, tertium. Igitur erit vt D, primus ad F, tertium, ita excessus inter primum & medium, ad excessum inter medium ac tertium; ideoq. D, E, F, Harmonicè proportionales erunt. Quod est propositum.

SEMPER autem minimi termini procreantur D, E, F, quando dati termini A, B, C, sunt vnitates; vt in exemplis prolatis manifestum est. Quando autem A, B, C, non sunt vnitates, etiamsi in sua proportione minimi sint, non semper creantur minimi termini D, E, F. Id quod liquido constat in his exemplis. In primo enim exemplo, ex mini-

A, 9. B, 6. C, 4. | A, 1. B, 4. C, 16. | A, 9. B, 12. C, 16.

D, 40. E, 16. F, 10. | D, 30. E, 24. F, 20. | D, 70. E, 40. F, 28.

mis terminis proportionis sesquialterae, & in secundo ex minimis terminis subquadruplae proportionis, & in tertio ex minimis terminis subsesquitertiae proportionis, gignuntur tres in proportionalitate Harmonica non minimi. Quod si termini inuertantur, tum demum (quod mirum est) minimi termini Mediet atis Harmonicae procreabuntur, vt hae exempla demonstrant.

A, 4. B, 6. C, 9. | A, 16. B, 4. C, 1. | A, 16. B, 12. C, 9.

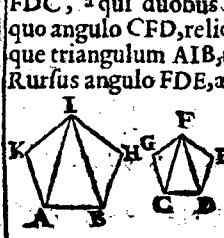
D, 35. E, 21. F, 15. | D, 45. E, 9. F, 5. | D, 77. E, 33. F, 21.

PROBL. 6. PROPOS. 18. xix.

A DATA recta linea dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere.

SIT

SIT data recta AB, super quam describendum sit rectilineum rectilineo CDEFG, simile similiterque positum. Ducantur ex quolibet angulo, vt ex F, ad singulos angulos oppositos rectæ lineæ, quæ rectilineum resoluant in triangula CDF, DEF, FGC. Deinde angulo DCF, æqualis fiat angulus BAI; & angulo CDF, angulus ABI, coeantque rectæ AI, BI, in puncto I; (coibunt enim omnino, propterea quod duo anguli IAB, IBA, duobus rectis minores sunt, cũ æquales sint duobus angulis FCD, FDC, [a] qui duobus rectis sunt minores.) [b] eritq. reliquo angulo CFD, reliquus angulus AIB, æqualis; totumque triangulum AIB, toti triangulo CFD, æquiangulum. Rursus angulo FDE, æqualis fiat angulus IBH; & angulo



DFE, angulus BIH: Et [c] quia duo anguli EDF, EFD, minores sunt duobus rectis; erunt quoque duo anguli HBI, HIB, duobus rectis minores; [d] proinde rectæ BH, IH, coibunt. Coeant ergo in puncto H; eritq. eadem ratione triangulum BHI, triangulo DEF, æquiangulum. Præterea angulo CFG, fiat æqualis angulus AIK; & angulo FCG, angulus IAK: [d] Et quia duo anguli GCF, GFC, minores sunt duobus rectis: erunt & duo anguli KAI, KIA, duobus rectis minores; atque idcirco rectæ AK, IK, conuenient in aliquo puncto. Conueniant ergo in K: eritque triangulum quoque AKI, triangulo CGF, æquiangulum. Atque ita procedatur, donec absoluantur omnia triangula rectilinei propositi, si plura extiterint. Dico igitur, rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG, simile esse, similiterq. positum. Cum enim angulus IAB, constitutus sit æqualis angulo FCD; & angulus IAK, angulo FCG; erit totus angulus BAK, toti angulo DCG, æqualis: Eademque ratione, angulus ABH, angulo CDE, æqualis erit; & reliqui reliquis, vt constat ex constructione; cum singulæ partes vnius singulis partibus alterius factæ sint æquales. Quare æquiangulum erit rectilineum ABHIK, rectilineo CDEFG. Quoniam vero [e] ita est AB, ad BI, vt CD, ad

DF,

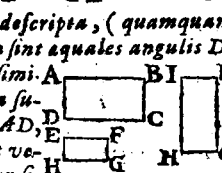
a 17. pri
b 32. pri
c 17. pri
d 17. pri
4. sext.

DF:& ita BI, ad BH, vt DF, ad DE: [a] erit ex æquo ita AB,ad BH, vt CD, ad DE. Quare latera circa æquales angulos ABH,CDE,proportionalia sunt, [b] quemadmodum & latera circa æquales angulos H,& E,proportionalia sunt, ob triangula æquiangula BHI,DEF. [c] Rursus ita est HI,ad IB,vt EF,ad FD: & ita IB,ad IA,vt FD, ad FC: & ita IA,ad IK,vt FC, ad FG. [d] Igitur ex æquo erit ita HI,ad IK, vt EF, ad FG, & ideo latera quoque circa æquales angulos HIK,EFG, proportionalia erunt, & sic de cæteris. Quamobrem rectilinea,cum sint æquiangula,habeantq. latera circa æquales angulos proportionalia, similia sunt,similiterq. descripta. A data ergo recta linea,dato rectilineo simile similiterq. positum rectilineum descripsimus,Quod faciendum erat.

a 22. 6n
b 4. sext.
c 4. sex.
d 22. 6n

SCHOLIVM.

DICVNTVR autem rectilinea super lineas rectas descripta,esse similia & similiter posita, quando anguli æquales constituuntur super ipsas rectas lineas,& tam reliqui æquales anguli, quàm latera proportionalia semper ordine sese consequuntur. Vt triangula ABC,DEF, non solùm erunt similia, sed etiam super rectas BC, EF, similiter descripta,si anguli B,C,aquales fuerint angulis E,F; & ita sit AB, ad BC, vt DE, ad EF, &c. At supra rectas BC,DE,non dicentur similiter esse descripta, (quamquam similia sint.) cum anguli B, C, non sint æquales angulis D, E. Similiter rectangula AC, EG, similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HG, quoniam vt AD, ad DC, ita est EH, ad HG, &c. At vero rectangula AC, IG, non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, IH, vel super rectas AD, HG.



CAE-

CAETERVM omnes figuræ secundum constructionem huius problematis descriptæ, sunt necessario similiter positæ, vt patet in rectilineis ABHIK, CDEFG, super lineas AB, & CD, descriptis. Item omnes aquilateræ figuræ, & æquiangulæ, sunt quoque positæ similiter super qualibet earum latera.

FORMASSIS autem expeditius Problema propositum conficiemus ad hunc modum. Sit dato rectilineo ABCDEF, super datam rectam G, vel aliam ei æqualem, describendum simile rectilineum, similiterque positum. Productis duobus lateribus AB, AF, circa angulum A, educantur ex A, per omnes alios angulos rectæ AC, AD, AE, quantumlibet. Deinde ex AB, abscindatur AH, æqualis datæ rectæ G, vel certe ex ipsa AB, vlterius producta, si forte G, fuerit maior, quam AB. Post hæc per H, ducatur recta HI, lateri BC, parallela, & per I, recta IK, lateri CD, parallela, & sic deinceps, donec omnia latera fuerint habeant parallelas, demptis duobus lateribus productis AB, AF, factumq. erit, quod proponitur: hoc est, figura AHIKLM, super rectam AH, datæ rectæ G, æqualem, similis erit, similiterq. posita figuræ propositæ ABCDEF, super rectam AL, constitutæ. Cum enim angulus HAM, sit communis; & anguli ABC, AFE, æquales sint angulis AHI, AML; Item anguli ACB, ACD, æquales sint angulis AIH, AIK, hoc est, toti angulo BCD, æqualis sit angulus totus HIK; Eodemq. modo anguli CDE, DEF, æquales sint angulis IKL, KLM: Æquiangula erunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM. Sed & latera circum æquales angulos habent proportionalia. Cum enim triangula AHI, AIK, AKL, ALM, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. triangulis ABC, ACD, ADE, AEF; Erit, b vt AB, ad BC, ita AH, ad HI. Rursus, vt BC, ad CA, ita HI, ad IA. Et vt CA, ad CD, ita IA, ad IK: ac proinde ex æquo, vt BC, ad

29. pri

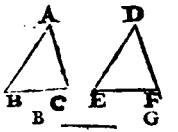
b 4. sex.

CD,

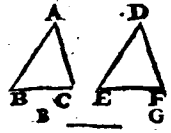
CD, ita HI, ad IK. &c. Igitur, ex defin. similia sunt rectilinea ABCDEF, AHIKLM, atque adeo similiter posita, per ea, quæ proxime hoc scholio scripsimus.

THEOR. 13. PROPOS. 19. xvij.

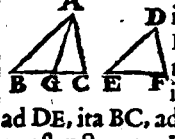
SIMILIA triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.



SINT triangula similia ABC, DEF, habentia angulos æquales B, & E: Item C, & F, &c. Et sit vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, &c. Dico triangula inter se rationem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa BC, & EF, vel AB, & DE, vel AC, & DF: Hoc est, si homologis lateribus BC, EF, inueniatur tertia proportionalis BG: ita esse triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectam BC, ad rectam BG: ac proinde cum ex defin. 10 lib. 5. proportio BC, ad BG, dicatur duplicata proportionis BC, ad EF: proportionem trianguli ad triangulum dici quoque duplicatam proportionis laterum homologorum BC, EF. Ita vt nihil aliud sit, triangula duo, vel duas quaslibet figuras similes, similiterq. positas, habere proportionem duorum laterum homologorum duplicatam, quàm ita esse triangulum ad triangulum, vel figuram ad figuram, vt est prima linea ad tertiam, cum tres lineæ fuerint continue proportionales in proportione duorum laterum homologorum: quales hic sunt tres lineæ rectæ BC, EF, BG, continue proportionales in proportione homologorum laterum BC, EF. Sint ergo primum latera BC, EF, æqualia, ac proinde & tertia proportionalis BG, illis æqualis: ita vt proportio BC, ad BG, quæ duplicata dicitur proportionis lateris BC, ad latus EF, sit proportio æqualitatis. Quoniam igitur triangula ABC, DEF, habent quoque proportionem æqualitatis, a quod ipsa inter se æqualia sint, ob angulos B, C, angulis E, F, æquales, & æqualitatem laterum BC, EF, a 26. pri



quibus adiacent: erit triangulum ad triangulum, vt recta B C, ad rectam BG. Cum ergo hæc proportio dicatur duplicata proportionis laterum homologorum BC, EF; dicetur quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, proportionis, quam latus BC, ad latus EF, habet, duplicata. Quod etiam hinc constare potest. Quoniam, vt dictum est, triangula ABC, DEF, æqualia sunt, hoc est, proportionem æqualitatis habent, sicut & latera homologa BC, EF: Proportio autem æqualitatis duplicata solum efficit proportionem æqualitatis: (Positis enim tribus magnitudinibus æqualibus, dicetur prima, ad tertiam habere proportionem duplicatam proportionis, quam habet prima ad secundam, vt constat ex definitione 10. lib. 5. cum tamen prima ad tertiam habeat proportionem æqualitatis, sicuti & prima ad secundã,) habebit triangulum ABC, ad triangulum DEF, proportionem duplicatam eius, quam habet latus B C, ad latus EF. Quod est propositum.



a 11. fex

SIT deinde BC, latus latere EF, maius; & ex BC, [a] abscindatur rectis BC, EF, tertia proportionalis BG, ducaturq. recta AG. Quia igitur est vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit permutando vt AB, ad DE, ita BC, ad EF: Vt autem B C, ad E F, ita est per

b 11. 5

constructionem EF, ad BG. Vt ergo AB, ad DE, [b] ita erit EF, ad BG. Quare cum triangula ABG, DEF, habeant latera circa angulos B, E, æquales reciproca, [c] ipsa inter se æqualia erunt; & propterea vt triangulum A B C, ad

c 15. fex

d 7. 5.

triangulum DEF, [d] ita erit idem triangulũ ABC, ad triangulum A B G. Vt autem triangulum A B C, ad triangulum ABG, eiusdem altitudinis, [e] ita est basis B C, ad basin BG. Igitur vt triangulum A B C, ad triangulum, D E F, ita est B C, ad B G. Atqui cum tres lineæ B C, E F, B G, sint continue proportionales, proportio primæ BC, ad tertiam BG, duplicata dicitur proportionis B C, primæ ad EF, secundam. Igitur & triangulum

e 1. fex.

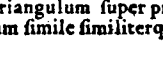
ABC,

ABC, ad triangulum DEF, proportionem habet duplicatam proportionis lateris BC, ad latus EF. Similia igitur triangula inter se sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; vt est prima ad tertiam, ita esse triangulum super primam ddscriptum ad triangulum supra secundam simile similiterque descriptum.

SINT enim tres recta proportionales A, B, C; & super primam A, & secundam B, constituta triangula A, & B, similia, similiterque



descripta. Dico, vt est recta A, prima ad rectam C, tertiam, ita esse triangulum A, ad triangulum B. Nam proportio recta A, ad rectam C, est, per definitionem, duplicata proportionis recta A, ad rectam B. [a] *Cum igitur triangulum A, ad triangulum B, habeat quoque proportionem duplicatam recta A, ad rectam B; erit vt recta A, ad rectam C, ita triangulum A, ad triangulum B.* a 19. sex

EODEM modo ostendes, ita esse triangulum supra secundam ad triangulum supra tertiam simile similiterque descriptum, vt est prima linea ad tertiam. Sint enim proportionales tres C, B, A, & super B, secundam, & A, tertiam constituantur triangula similia similiterq. posita B, & A. Dico, vt est recta C, ad rectam A, ita esse triangulum B, ad triangulum A. Nam proportio C, ad A, duplicata est proportionis C, ad B, hoc est, recta B, ad rectam A. [b] *Cum igitur & triangulum B, ad triangulum A, habeat proportionem duplicatam recta B, ad rectam A, quoniam B, & A, sunt latera homologa: Erit vt C, recta ad rectam A, ita triangulum B, ad triangulum A.* b 19. sex

SCHOLIVM.

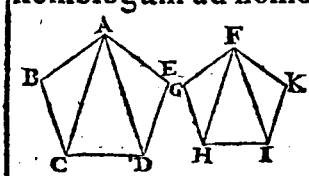
ITAQVE si proportio lateris BC, ad latus EF, nota sit in numeris, nimirum vt 6. ad 5. cognoscemus quoque ex hac propos. 19. in numeris, quam proportionem habeat triangulum ABC, ad triangulū DEF. Si enim propor-

tio 6. ad 5. continuetur in tribus numeris, hoc modo 36. 30. 25. erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. hoc est, habebit proportionem, cuius denominator est $1\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. *Quia enim proportio 36. ad 25. est duplicata proportionis 36. ad 30. siue 6. ad 5. quam latera homologa ponuntur habere: Habent autem & triangula proportionem laterum homologorum duplicatam, vt hoc theoremate ostensum est; erit triangulum ad triangulum, vt 36. ad 25. Eandem proportionem triangulorum cognoscemus, si denominatorem proportionis laterum homologorum, nimirum* $1\frac{1}{5}$. *in se multiplicemus. Productus enim numerus* $\frac{5}{2}\frac{6}{5}$. *id est,* $1\frac{1}{2}\frac{1}{5}$. *erit denominator proportionis, qua duplicata est proportionis laterum, ac proinde & denominator proportionis triangulorum, quòd hæ etiam duplicata sit eiusdem proportionis laterum.*

SIC etiam, si latera homologa haberent proportionem, quam 10. ad 1. haberent triangula proportionem, quam 100. ad 1. cum hæc illius sit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam quia denominator decupla proportionis, id est, 10. in se multiplicatus gignit 100. denominatorem proportionis, qua decupla duplicata est.

xviij. ## THEOR. 14. PROPOS. 20.

SIMILIA polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.



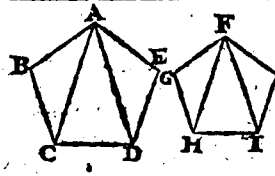
SINT polygona similia ABCDE, FGHIK, habentia angulos æquales BAE, GFK; Item angulos B, G, & sic deinceps: habeant autem latera proportionalia circa angulos æquales; vt quidem AB, ad BC, ita FG, ad GH; & vt BC, ad CD, ita GH, ad HI, &c. Dico primum, hæc polygona

diuidi

diuidi in triangula similia, quæ sint numero æqualia. Ab angulis. n. BAE, GFK, rectæ educantur ad singulos angulos oppositos, quæ sint AC, AD, FH, FI; diuisaque erunt polygona in triangula numero æqualia. Quoniam vero angulus B, æqualis est angulo G, ex hypothesi, & circa ipsos latera proportionalia; [a] æquiangula erunt triangula ABC, FGH, habentia angulos BAC, GFH, æquales; Itē angulos ACB, FHG, lateribus homologis oppositos: [b] Ideoque latera habebunt circa æquos angulos proportionalia, ac propterea inter se similia erunt: Eadem ratione erunt similia triangula AED, FKI, habentia angulos EAD, KFI, & angulos ADE, FIK, æquales. Deinde [c] quia est vt AC, ad CB, ita FH, ad HG. ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; vt autem CB, ad CD, ita est, ex hypothesi, HG, ad HI, ob similitudinem polygonorum: [d] erit ex æquo vt AC, ad CD, ita FH, ad HI. Et quoniam angulus BCD, æqualis ponitur angulo GHI; est autem & ablatus ACB, ostensus æqualis ablato FHG; erit & reliquus ACD, reliquo FHI, æqualis. [e] Quare triangula ACD, FHI, cum habeant latera circa æquales angulos ACD, FHI, proportionalia, æquiangula erunt, ideoque similia. Eademque ratio est de alijs omnibus triangulis, si plura fuerint.

a 20. sexti
b 24. sexti
c 4. sexti
d 22. 5.
e 6. sexti

DICO præterea, triangula hæc esse homologa totis polygonis, hoc est, ita esse quodlibet triangulum in vno polygono ad suum correspondens triangulum in altero polygono, vt polygonum ad polygonum. Quoniam enim similia sunt triangula ABC, FGH, erit eorū proportio duplicata proportionis homologorum laterum AC, FH. Atque eodem argumento proportio triangulorum ACD, FHI, duplicata erit proportionis eorundem laterum homologorum AC, FH. Quare vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita erit triangulum ACD, ad triangulum FHI, cum vtraque hæc proportio triangulorum sit duplicata eiusdem proportionis lateris AC, ad latus FH. Neque dissimili ratione concludetur quoque esse triangulum ADE, ad triangulum FIK, vt ACD, ad FHI: Atque ita deinceps, si plura fuerint triangula. Sunt



igitur proportionalia trian gula vnius polygoni cũ triã gulis alterius, ita vt triangu la vnius sint antecedẽtia, & triãgula alterius consequen tia proportionũ. Vt aũt vnũ antecedẽs ad vnũ cõsequẽs, ita sunt omnia antecedentia ad oĩa cõsequentia. Igitur vt quodli bet triangulũ vnius polygoni ad sibi respondẽs triangulum alterius, ita erit totum polygonũ ad totũ polygonũ; ideoq; triãgula homologa erũt totis polygonis.

a 12. qn.

DICO postremò, polygona inter se proportionem habere duplicatam eius, quam habent latera homologa, hoc est, si homologis lateribus, verbi gratia, AB, FG, inueniatur tertia linea proportionalis, ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt est prima linea AB, ad tertiam inuentam: ac proinde, cum proportio AB, ad illam tertiam, dicatur duplicata proportionis AB, ad FG, dici quoque proportionem polygoni ad polygonum duplicatam proportionis laterum homologorum AB, FG. Cum enim sit, vt triangulum ABC, ad triangulum FGH, ita polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK; Triangulum vero ABC, ad triangulum FGH, b habeat proportionem duplicatam eius, quam habent latera homologa AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiã inuentam; habebunt quoque polygona inter se proportionem duplicatam proportionis eorundem laterum homologorum AB, FG, hoc est, eandem, quam habet AB, ad illam tertiam inuentã. Itaque similia polygona in similia triangula diuiduntur, &c. Quod demonstrandũ erat.

b 19. sexti.

COROLLARIVM.

HINC manifestum est, si fuerint tres rectæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum super primam descriptum, ad polygonum super secundã simile similiterq; descriptũ: Vel ita esse polygonum super secundã descriptũ ad polygonũ super tertiam simile similiterq; descriptum.

HOC non aliter demonstrabitur ex hoc theoremate, quã ostensum fuit corollarium præcedentis theorematis ex suo

theore-

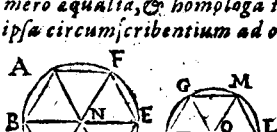
theoremate. Vt perspicuum est in hac figura apposita.

SCHOLIVM.

QVANDO polygona similia sunt pentagona, vt in figura, demonstrabitur etiam hoc modo triangula media ACD, FHI similia esse. Quoniã anguli ACB, FHG, æquales sunt, ob similitudinem triangulorum ABC, FGH; si auferantur ex angulis BCD, GHI, qui æquales etiam sunt, ob similitudinem polygonorum: æquales erunt & reliqui anguli ACD, FHI. Eademq; rõne æquales ostendẽtur anguli ADC, FIH: ac propterea a & reliqui CAD, HFI, æquales erũt. Igitur cũ aquiangula sint triangula ACD, FHI, b habebũt latera circa angulos æquales proportionalia, ac proinde similia erunt. a 32. primi b 4. sexti.

AT vero quando polygona habent plures angulos, demonstrandum est, triangula media similia esse, ex æqualitate, & propos. 6. huius lib. vt in propositione factum est: quia non possunt probari anguli æquales, præter vnum, qui videlicet prope præcedens triangulum simile existit, qualis est angulus ACD, & FHI. Nam angulus ADC, ostendi non potest æqualis angulo FIH; quod tunc alia adhuc triangula supersint vsque ad triangula similia AED, FKI; &c. Hoc ideo dixerim, ne quis existimet, frustra in propos. nos dixisse, ita esse AC, ad CE, vt FH, ad HG: Et ita CB, ad CD, vt HG, ad HI; ac proinde ex æqualitate ita AC, ad CD, vt FH, ad HI; ideoque cum anguli ACD, FHI, sint æquales, similia esse triangula ACD, FHI. Hæc enim demonstratio est omnino necessaria, conuenitq; omnibus polygonis quotcunque angulorum; cum omnia triangula media eo modo ostendantur esse similia, vt perspicuũ est. Nam si triangula ADE, FIK, nõ essent vltima, demonstrarẽtur similia hoc modo. Quoniã est vt AD, ad DC, ita FI, ad IH, ob similitudinẽ triangulorũ ACD, FHI: Itẽ vt DC, ad DE, ita IH, ad b IK, ob similitudinẽ polygonorum; erit ex æquo, vt AD, ad DE, ita FI, ad IK. Et quia angulus CDE, æqualis ponitur angulo HIK: Est autẽ & ablatus ADC, ostẽsus ablato FIH, æqualis; erit & reliquus ADE, reliquo FIK, æqualis. c Quare triangula ADE, FIK, similia erunt, cũ habeant latera circa æquales angulos ADE, FIK, proportionalia. Atque ita deinceps, si fuerint plura triangula. c 6. sexti.

QVOD si polygona similia, fuerint æquilatera, & æquiangula, diuidentur quoque in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis e centris circulorũ ipsa circumscribentium ad omnes angulos rectis lineis. Sint enim polygona similia, æquilatera, & æquiangula ABCDEF, GHIKLM, quæ circũscribantur a circulis circa centra N, O, ex quibus rectæ ducantur NA, NB, &c. Dico triangula NCD, OIK, similia esse, et homologa totis polygonis. Quoniã enim anguli CND, IOK, æquales sunt; (quod æque submultiplices sint quatuor rectorum. Nam vtrumque spatium N, & O, quatuor rectis æquivalens, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 1. diuiditur in angulos & numero, & magnitudine æquales. Cum enim anguli



a 27 ter tij. in centro N, insistant æqualibus arcubus, a ipsi inter se æquales erunt: eademque ratione anguli in centro O, æquales erunt.) Sunt autem & latera circum ipsos proportionalia, cum vbique sit proportio æqualitatis; b Similia erũt triangula NCD, OIK. Eademque est ratio de cæteris. At vero hæc triangula esse homologa totis polygonis, nullo negotio demonstrabitur. Cum enim tota polygona sint ipsorum triangulorum æque multiplicia, vt patet, c habebunt vtique eandem cum ipsis proportionem.

b 6. sexti

c 15. 5. quæ eandem cum ipsis proportionem.

PORRO ex hoc theoremate perfacile demonstrabimus theorema illud, quod iam aliter in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, Nimirum.

SI linea recta dupla fuerit lineæ rectæ, quadratum illius quadruplum erit quadrati huius: Et contra, si quadratum quadruplum fuerit quadrati, latus illius duplum erit lateris huius.

SIT primum recta A, dupla rectæ B. Dico quadratum A, quadruplum esse quadrati B. Cum enim omnia quadrata sint similia, vt constat ex defin. 1. huius lib. erit, per hãc

propos.

propoſ. proportio quadrati A, ad quadratum B, duplicata proportionis laterum homologorum A, & B; qua cum inter ſe proportionem habeant duplã; erit proportio quadratorum quadrupla. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplæ proportionis, vt hic apparet. 1. 2. 4.

SIT deinde quadratum A, quadruplum quadrati B. Dico latus A, duplum eſſe lateris B. Cum enim proportio quadratorum, qua ponitur quadrupla, duplicata ſit proportionis laterum homologorum, vt dictum eſt; habebunt latera homologa A, & B, proportionem duplam. Nam quadrupla proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in exemplo adducto ſuperius apparet.

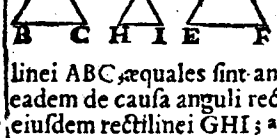
ITA QVE ſi proportio lateris AB, ad latus FG, in polygonis, qua in propoſ. deſcripſimus, nota ſit in numeris, nimirum vt 5. ad 4. cognoſcemus quoque ex hac propoſ. 20. in numeris, quam proportionem habeat polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK. Si enim proportio 5. ad 4. continuetur in tribus numeris, hoc modo, 25. 20. 16. erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. hoc eſt, habebit proportionem, cuius denominator eſt $1\frac{9}{16}$. Quia enim proportio 25. ad 16. eſt duplicata proportionis 25. ad 20. ſiue 5. ad 4. quam homologa latera AB, FG, ponuntur habere; demonſtratumque eſt hoc theoremate, polygona quoque habere duplicatã proportionem eius, quam latera homologa habent, erit polygonum ad polygonum, vt 25. ad 16. Idem denominator proportionis polygonorum cognoſcetur, ſi denominator proportionis laterum homologorum, nimirum $1\frac{1}{4}$. in ſe multiplicetur. Productus enim numerus $\frac{2}{1}\frac{5}{6}$. id eſt, $1\frac{9}{1}\frac{}{6}$. erit denominator proportionis, qua duplicata dicitur eius, quam latera homologa habent, ex iis, qua in defin. 10. lib. 5. ſcripſimus; ac proinde & denominator proportionis polygonorum, cum hæc ſit etiam duplicata eiuſdem proportionis laterum homologorum.

SIC etiam, ſi latera homologa haberent proportionem decuplam, haberent polygona proportionem centuplam, cũ hac illius ſit duplicata, vt hic apparet, 100. 10. 1. Vel etiam

quia denominator 10. proportionis decuplæ in se multiplicatus gignit denominatorem 100. proportionis centuplæ, quæ decupla duplicata dicitur.

xx. THEOR. 15. PROPOS. 21.

QVAE eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.



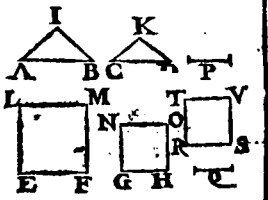
SINT rectilinea ABC, DEF, rectilineo GHI, similia. Dico & ipsa inter se esse similia. Cum enim propter similitudinem, anguli rectilinei ABC, æquales sint angulis rectilinei GHI; Item, eadem de causa anguli rectilinei DEF, æquales angulis
a 1. pron. eiusdem rectilinei GHI; [a] erunt anguli rectilinei ABC, æquales angulis rectilinei DEF. Rursus cum ob eandem similitudinem, latera rectilinei ABC, proportionalia, sint lateribus rectilinei GHI, ea videlicet ijs, quæ circũ æquales sunt angulos: Item eandem ob causam, latera, rectilinei DEF, proportionalia lateribus eiusdem rectilinei GHI; b 11. gn. [b] erunt quoque latera rectilinei ABC, lateribus rectilinei DEF, proportionalia, ea nimirum ijs, quæ angulos ambiunt æquales. Atque adeo per definitionem, similia existent rectilinea ABC, DEF. Quæ igitur eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia. Quod erat ostendendum.

xxj. THEOR. 16. PROPOS. 22.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: Et ab eis rectilinea similia similiterque descripta, proportionalia erunt. Et si a rectis lineis similia similiterque descripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipsæ etiam rectæ lineæ proportionales erunt.

SINT

SINT primum quatuor rectæ AB, CD, EF, GH, proportionales, vt quidem AB, ad CD, ita EF, ad GH; Constituanturque super AB, CD, duo quæcunq; rectilinea similia similiterque descripta ABI, CDK; Item super EF, GH, alia duo quæcunque, rectilinea similia similiterque descripta, EFML, GHON. Dico & hæc rectilinea esse proportionalia, vt quidem ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. [a] Inueniatur enim rectis AB, CD, tertia proportionalis P; & rectis EF, GH, tertia proportionalis Q. [b] eritque ex æquo, vt AB, ad P, ita EF, ad Q: Vt autem AB, ad P, ita est rectilineum ABI, ad rectilineum CDK, simile similiterque descriptum, ex corollario propositionis 20. huius lib. vel si fuerint triangula, ex coroll. propos. 19. Et eadem ratione, vt EF, ad Q, ita rectilineum EM, ad rectilineum GO. [c] Igitur vt ABI, ad CDK, ita erit EM, ad GO. Quod est propositum.



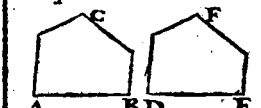
DEINDE sint ABI, CDK, EM, GO, rectilinea proportionalia. Dico quatuor rectas AB, CD, EF, GH, esse quoque proportionales, vt quidē AB, ad CD, ita EF, ad GH. [d] Inueniatur enim tribus rectis AB, CD, EF, quarta proportionalis RS, super quā describatur rectilineū RSVT, simile rectilineo EM, similiterque positum; [e] & ob id rectilineo GO. Quoniam igitur est, vt AB, ad CD, ita EF, ad RS; erit quoque, vt iam est ostensum, vt ABI, ad CDK, ita EM, ad RV. Vt autem ABI, ad CDK, ita quoque ponitur EM, ad GO. [f] Igitur erit vt EM, ad RV, ita EM, ad GO; [g] Atque idcirco æqualia erunt RV, GO. Quæ cum sint similia similiterque posita, consistent necessario, vt mox ostendemus, super rectas RS, GH, æquales. [h] Quare erit vt EF, ad RS, ita EF, ad GH. Ponitur autem EF, ad RS, vt AB, ad CD. [i] Igitur erit quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Quamobrem si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

a 11. sex.
b 22. qn.
c 11. 5n.
d 12. sex.
e 21. sex.
f 11. qn
g 9. gnti
h 7. quin
ti.
i 11. gn.

LEM-

LEMMA.

QVOD autem æqualia rectilinea similia similiterque descripta, qualia sunt GO, RV, consistant super rectas æquales, ita ostendetur. Si.n. inæquales sunt GH, RS; sit GH, maior. Cum igitur, ob similitudinem rectilineorum, sit vt GH, ad HO, ita RS, ad SV, ponatur autem GH, maior quam RS,[a] erit quoque HO, maior quã SV, & propterea rectilineum GO, maius rectilineo RV, cum hoc intra ipsũ possit constitui; quod est absurdum, cum sit contra hypothesin. Non ergo inæquales sũt rectæ GH, RS, Quod est propositũ.



ALITER.

Sint duo rectilinea ABC, DEF, æqualia, & similia similiterque posita. Dico latera homologa, cuiusmodi sũt rectæ AB, DE, esse æqualia. Si enim non credantur æqualia, sit AB, maius, quã DE, inueniaturque rectis AB, DE, tertia proportionalis G. Quoniam ergo est, vt AB, ad DE, ita DE, ad G, Est autem AB, maior, quam DE, Erit quoque DE, maior, quam G, ac propterea multo maior AB, quam G. Vt vero AB, ad G, ita est rectilineum ABC, ad rectilineum DEF, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. Igitur cum AB, maior sit, quam G, erit quoque rectilineum ABC, maius rectilineo DEF, quod est absurdũ, cum positum sit æquale. Non ergo maior est AB, recta quam recta DE. Sed neque minor erit eadem ratione; quia & rectilineum ABC, minus

ostẽ-

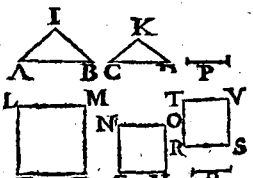
ostenderetur rectilineo DEF, quod est contra hypothesin. Quare æquales sunt rectæ AB, DE.

SCHOLIVM.

EODEM modo, si fuerint tres recta proportionales; erunt & rectilinea similia similiterque descripta ab eis, proportionalia, &c. Si enim

sumatur linea media, eiusque rectilineum bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor rectilinea proportionalia, vt hic Euclides demonstrauit. Cum igitur id, quod à secunda est descriptum, æquale sit ei, quod à tertia, immo idem; manifestum est, quod proponitur.

BREVIVS tota hac propositio demonstrabitur, hoc modo. Ponatur primum esse vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. Dico esse quoque vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO, a Cum enim sit proportio rectilinei ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD. Item proportio rectilinei EM, ad rectilineum GO, duplicata proportionis EF, ad GH, erunt proportiones ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium AB, ad CD, & EF, ad GH. Quod est primum.



a 19. vel 20. sexti

PONATVR deinde esse vt ABI, ad CDK, ita EM, ad GO. Dico esse quoque vt AB, ad CD, ita EF, ad GH. b Cum enim sit proportio ABI, ad CDK, duplicata proportionis AB, ad CD: Item proportio EM, ad GO, duplicata proportionis EF, ad GH: Erunt proportiones AB, ad CD, & EF, ad GH, æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ ABI, ad CDK, & EM, ad GO, æquales ponuntur. Quod est secundum.

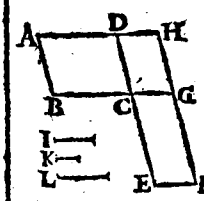
b 19. vel 20. sexti

THEOR. 17. PROPOS. 23. xxiiij.

AEQVIANGVLA parallelogramma

ribus

inter se rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur:



SINT parallelogramma æquiangula AC, CF, habentia angulos BCD, ECG, æquales. Dico proportionem eorum esse compositam ex duabus proportionibus, quas habent duo latera vnius circa angulum æqualem, ad duo latera alterius circa angulum æqualem, ita vt antecedentia proportionum sint in vno Parallelogrāmo, & consequentia in altero; hoc est, proportionem AC, parallelogrammi ad parallelogrāmum CF, compositam esse ex proportionibus rectæ BC, ad CG, rectam, & rectæ DC, ad rectam CE; Vel etiam ex proportionibus rectæ BC, ad rectam CE, & rectę DC, ad rectam CG. Id est, si sumantur tres lineæ I, K, L, ita vt I, ad K, sit, sicut BC, latus ad latus CG, & K, ad L, vt latus DC, ad latus CE; ita esse parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, vt est recta I, ad rectam L: ac proinde cum ex defin. 5. huius lib. proportio I, ad L, componi dicatur ex proportionibus I, ad K, & K, ad L; proportionem quoque parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, dici compositam esse ex eisdē proportionibus, hoc est, ex proportionibus BC, ad CG, & DC, ad CE. Coniungantur enim parallelogramma ad angulos æquales, ita vt BC, CG. efficiant vnā lineam rectam: Quo posito, cum anguli BCD, ECG. sint æquales, erunt & DC, CE, vna recta linea, vt ad propos. 15. lib. 1. ex Proclo demonstrauimus. Producantur deinde AD, FG, donec conueniant in H; Sumptaque recta I, quacunque, [a] inueniatur tribus BC, CG, & I, quarta proportionalis K: Item tribus DC, CE, & K, quarta proportionalis L. Quoniam igitur est, [b] vt BC, ad CG, ita AC, ad CH, Vt autem BC, ad CG, ita posita est I, ad K, [c] erit quoque vt AC, ad CH, ita I, ad K. Eodemque argumentō ostēdes esse, vt HC, ad CF, ita K, ad L. Nam vt DC, ad CE, [d] ita est HC, ad CF. Cum ergo posita sit K, ad L, vt DC, ad

a 12. sex

b 1. sexti

c 11. gn.

d 1 sexti

CE, erit

CE, erit quoque HC, ad CF, vt K, ad L: [a] Ex æquo igitur erit, vt AC, ad CF, ita I, ad L. Sed proportio I, ad L, per 5. defin. huius lib. componitur ex proportionibus BC, ad CG; & DC, ad CE. Ex his eisdem ergo proportionibus cõponetur quoque proportio parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF. Eademque ratione ostendemus, proportionem AC, ad CF, componi ex proportionibus BC, ad CE, & DC, ad CG, dummodo parallelogramma ita coniungantur ad angulos æquales, vt BC, CE, efficiant unam rectam lineã, &c. Aequiangula itaq; parallelogrãma inter se rationẽ habent, &c. Quod erat ostendendũ. a 22. 6.

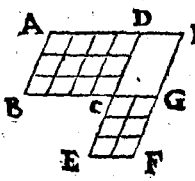
SCHOLIVM.

EXPEDITIVS idem demonstrabitur hoc modo. Coniunctis parallelogrammis, vt prius; [b] *Cum sit vt AC, ad CH, ita BC, ad CG, & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE;* b 1. sexti *Proportio autem AC, ad CF, componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus AC, ad CH & CH, ad CF; componetur quoque eadẽ proportio AC, ad CF, ex proportionibus BC, ad CG. & DC, ad CE, quæ illis intermedijs sunt æquales. Quod est propositum.*

HANC porro prop. demonstrat etiam Euclides in numeris lib. 8. prop. 5.

ITAQVE si proportiones laterum, nimirum BC, ad CG, & DC, ad CE, notæ sint in numeris, veniemus quoque ex hac prop. 23. in cognitionem proportionis parallelogrammi AC, ad parallelogrammum CF, in numeris, hoc modo. Sit proportio BC, ad CG, eadem, quæ 11. ad 5. & DC, ad CE, eadem, quæ 7. ad 11. atque hæ duæ proportiones continuentur in tribus numeris 77. 35. 55. ita vt sit 77. ad 35. sicut 11. ad 5. & 35. ad 55. vt 7. ad 11. Et quia proportio 77. ad 55. componitur ex proportionibus 77. ad 35. & 35. ad 55. hoc est, ex proportionibus laterũ, erit vt 77. ad 55. ita parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, [c] *quod proportio parallelogrammorum sit etiam composita ex eisdẽ proportionibus laterum: hoc est, proportio parallelogrammorũ denominabitur à* $1\frac{2}{5}\frac{2}{5}$. *Cõtinuabũtur aũt duæ datæ proportiones in tribus numeris vel ex ijs, quæ prop. 4. lib. 8.* c 23. sexti.

demonstrantur, vel certe hoc modo. Posita priore proportione 11. ad 5. fiat vt 7. ad 11. (qua est posterior proportio) ita 5. ad aliud, inuenieturque numerus $7\frac{6}{7}$. Ita ergo habebimus tres numeros habentes duas illas proportiones, 11. 5. $7\frac{6}{7}$. Quod si tertius reuocetur ad hanc vnicam fractionem $\frac{55}{7}$. & alij duo numeri per denominatorē 7. multiplicentur, erunt duo producti numeri 77. 35. & numerator 55, tres numeri integri in eisdem proportionibus.



SIC etiam si proportiones laterum sint, vt 4. ad 2. & 3. ad 3. continuabuntur duæ hæ proportiones in hisce tribus numeris 4. 22. Vel in hisce minimis 2. 1. 1. Et quia primus ad tertium est duplus, erit quoque parallelogrammorum proportio dupla. Id quod ex hac figura perspicuum est. Nam si latus BC, diuidatur in 4. partes æquales, & CG, in 2. At DC, in 3. & CE, in 3. ita vt BC, ad CG, proportionem, habeat duplam, at DC. ad CE, proportionem æqualitatis, vt positum est: ducantur autem per puncta diuisionum lateribus parallelæ, continebit parallelogrammum AC, 12. rhombos æquales, at CF; solum 6. atque adeo parallelogrammum AC, ad parallelogrammum CF, duplam proportionem habebit, vt dictum est.

PERSPICVVM autem est, alteram proportionum componentium posse esse maiorem proportione compositæ, & æqualem. In priori enim exemplo proportio lateris BC, ad CG, est vt 11. ad 5. hoc est, cuius denominator est $2\frac{1}{5}$. qua maior est proportione parallelogrammorum, cum huius denominator sit $1\frac{2}{5}\frac{2}{5}$. In posteriori vero exemplo proportio lateris BC, ad CG, est dupla, quemadmodum & proportio parallelogrammorum. Vt vel hinc etiam constare possit, hanc proportionum compositionem non esse additionem, vt nonnulli interpretes volunt: Item proportionem maioris inæqualitatis posse componi tum ex proportione minoris inæqualitatis, tum ex æqualitatis proportione, quod ijdem interpretes negant. In exemplo namque

priori proportio lateris DC, ad CE, est minoris inæqualitatis, in posteriori vero, æqualitatis. Sed hæc de re plura scribemus ad finem libri 9.

DEMONSTRAT hoc loco Federicus Commandinus nonnulla alia, quæ vel ad compositionem proportionū pertinent, vel ex ea demonstrantur, non inutilia, quæ nos quoque afferre decreuimus, mutatis tamen nonnihil demonstrationibus; Sunt autem ea, quæ sequuntur.

I.

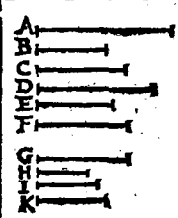
TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habent ex lateribus æqualem angulum comprehendentibus compositam.

SINT triangula ABC, DEF, angulum C, angulo F, habentia æqualem. Dico proportionem trianguli ABC, ad triangulum DEF, compositam esse ex lateribus, hoc est, ex proportione BC, ad EF, & ex proportione AC, ad DF; Vel ex proportione BC, ad DF, & ex proportione AC, ad EF. Completis enim parallelogrammis CG, FH, erunt ea æquiangula; [a] atque adeo eorum proportio ex lateribus componetur. Cum ergo triangula ABC, DEF, cum ipsis, [b] quorum sunt dimidia, [c] eandem habeant proportionem; Erit quoque proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita ex proportionibus laterū BC, AC, ad latera EF, DF. [a] 23. sexti. [b] 34. primi. [c] 15. quinti.

II.

PROPORTIONEM ex duabus proportionibus, vel pluribus componere.

HOC, quo modo fiat, facile colligitur ex demonstratione huius propos. 23. Sint enim tres proportiones A, ad B; C, ad D; & E, ad F; in lineis exhibitæ. Oportet ex ipsis vnam proportionem componere. Fiat vt A, ad B, ita G, ad [d] 12. sex.

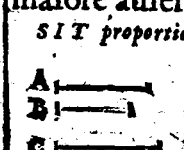


H; & vt C, ad D, ita H, ad I; & vt E, ad F, ita I, ad K. Dico proportionem G, ad K, compositam esse ex tribus datis proportionibus. Cum enim ea composita sit ex proportionibus G, ad H: H, ad I: & I, ad K, per defin. 5. huius lib. composita etiam erit ex proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, & F; quod his illa sumpta sint æquales.

III.

PROPORTIONEM minorem ex maiore auferre.

SIT proportio A, ad B, minor auferēda ex proportione maiore C, ad D. 212. *sexti.* *Fiat, vt A, ad B, ita C, ad E; statuaturque E, terminus medius inter C, & D. Dico ablatam esse proportionem A, ad B, ex proportione C, ad D, reliquamque esse proportionem E, ad D. Cum enim proportio C, ad D, componatur ex proportionibus C, ad E, & E, ad D: Si proportio C, ad E, hoc est, A, ad B, auferatur, relinquetur proportio E, ad D.*

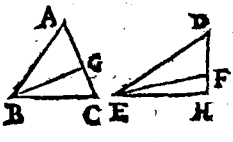


VERVM hæc compositio, & detractio proportionum non est additio, & subtractio propria, quia alias totum esset æquale parti, & minus, & maior proportio posset detrahi ex minore, vt ad finem lib. 9. ostendemus.

IIII.

TRIANGVLA, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, eandem proportionem habent, quam rectangula, quæ sub lateribus æqualem angulum comprehendentibus continentur.

SINT triangula ABC, DEF, angulum A, angulo D, habentia æqualem. Dico esse triangulum ABC, ad triangulum



gulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulũ sub DE, DF. Ductis enim ad AC, DF, perpẽdicularibus BG, EH; erunt triangula ABG, DEH, æquiangula, vt constat ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. cum duo anguli A, AGB, duobus angulis D, DHE, sint æquales. a Igitur erit, vt GB, ad BA, ita HE, ad ED: Vt autẽ GB, ad BA, b ita est rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC. (Nam si bases ponantur GB, BA, erit eorum eadem altitudo AC) Et eadem ratione, vt HE, ad ED, ita est rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF. c Rectangulum igitur sub BG, AC, ad rectangulum sub AB, AC, est, vt rectangulum sub EH, DF, ad rectangulum sub DE, DF; & permutando, rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Sed vt rectangulum sub BG, AC, ad rectangulum sub EH, DF, d ita est triangulum ABC, ad triangulũ DEF, e quod hæc triangula sint rectangulorum illorum dimidia. (Habent enim easdem cum illis bases AC, DF, altitudinesque easdem BG, EH; ac proinde inter easdem cum illis parallelas sunt constituta.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF. Quod est propositum.

a 4. sexti
b 1 sex.
c 11. qu.
d 15. fin.
e 41. primi.

ALITER, & facilius. Ex theoremate 1. huius scholij, proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, composita est ex proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF: Sed & proportio rectanguli sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, ex eisdem proportionibus AB, ad DE, & AC, ad DF, composita est. Igitur erit triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt rectangulum sub AB, AC, ad rectangulum sub DE, DF, quod est propositum.

f 23. sexti.

V.

PARALLELOGRAMMA inter

se æquiangula, eandem habent proportionem, quam rectangula sub lateribus ipsorum æqualem angulum continentibus comprehensa.

SINT parallelogramma ABCD, EFGH, æquiangula inter se, quorum anguli B, & F, sint æquales. Dico esse, vt parallelogrammum BD, ad parallelogrammum FH, ita rectangulũ sub AB, BC, ad rectangulũ sub EF, FG. Ductis enim diametris AC, EG, quæ angulos æquales B, F, subtendunt; habebunt triangula ABC, EFG, angulum B, angulo F, æqualem. Quare, vt iam demonstrauimus, erit, vt triangulum ABC, ad triangulum EFG, ita rectãgulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. [a] *Cum ergo parallelogramma BD, FH, eandem habeant proportionem, quam triangula ABC, EFG:* [b] *quòd hæc ipsorum sint dimidia;* [c] *erit quoque vt parallelogrammum BD, ad FH, parallelogrammum, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub EF, FG. Quod est propositum.*

a 15. 5n.
b 34. primi.
c 11. 5n.

VI.

TRIANGVLA, & parallelogramma inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

SINT triangula ABC, DEF, & parallelogramma CG, EH, quorum altitudines AI, DK. Dico eorum proportionem compositam esse ex proportione basis BC, ad basin EF, & proportione altitudinis AI, ad altitudinẽ DK. Sint enim primum altitudines æquales, bases vero vel æquales etiam, vel inæquales: Fiatque, vt BC, ad EF, ita L, ad M; Vt autem AI, ad DK, ita M, ad N. Quo facto erit M, ipsi N, æqualis, quòd & AI, ipsi DK, æqualis ponatur: [d] *Ac proinde erit L, ad N, vt L, ad M, hoc est, vt BC, ad EF.* [e] *At*

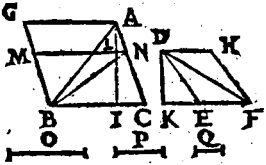
d 7. 5nti
e 1. sexti

vero,

vero, vt BC, ad EF, ita est triangulum ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH. [a] Igitur quoque erit, vt L ad N, ita triangulũ ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum EH: Sed proportio L, ad N, cõposita est ex proportione L, ad M, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF, & ex proportione M, ad N, hoc est, altitudinis AI, ad altitudinem DK. Proportio ergo trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelogrammi CG, ad parallelogrammum EH, ex eisdem proportionibus est composita. Quod est propositum.

a 11. 5.

SINT iam altitudines AI, DK, inæquales, & AI, maior; bases vero BC, FF, vel æquales, vel etiam inæquales. Fiat, vt AI, ad DK, ita O, ad P; & vt BC, ad EF, ita P, ad Q. Abscissa deinde IL, æquali ipsi DK; ducatur per



L, ipsi BC, parallela LM, secans AC, in N, iungaturque recta BN. Quoniam igitur est triangulum ABC, ad triangulum NBC; & parallelogrammum CG, ad parallelogrammum CM, vt altitudo AI, ad altitudinem IL, vel ad DK, ipsi IL, æqualem, hoc est, vt O, ad P, per ea, quæ ad 1. propos. huius lib. ex Commandino ostendimus; quod triangulorum, & parallelogrammorum eadem sit basis BC: Et vt triangulum NBC, ad triangulum DEF, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum EH, [b] ita est basis BC, ad basin EF, (cum eadem sit altitudo) hoc est, ita P, ad Q: [b] erit ex æquo ABC, ad DEF, & CG, ad EH, vt O, ad Q. Quare cum proportio O, ad Q, componatur ex proportione O, ad P, hoc est, ex proportione altitudinis AI, ad altitudinem DK; & ex proportione P, ad Q, hoc est, ex proportione basis BC, ad basin EF: Ex eisdem proportionibus componetur proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, & parallelo-

b 1. sexti
c 22. 5.

grammi CG, ad parallelogrammũ EH. Quod eſt propoſitũ.

EODEM pacto oſtendetur proportio trianguli DEF, cuius altitudo minor eſt, ad triangulum ABC, & parallelogrammi EH, ad parallelogrammum CG, compoſita eſſe ex proportione baſis EF, ad baſin BC, & proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI. Si enim fiat, vt EF, ad BC, ita Q, ad P; & vt DK, ad AI, ita P, ad O, & reliqua fiant, vt prius; a erit triangulum DEF, ad triangulum NBC, & parallelogrammum EH, ad parallelogrammum CM, vt EF, ad BC, hoc eſt, vt Q, ad P. Item triangulum NBC, ad triangulum ABC, & parallelogrammum CM, ad parallelogrammum CG, vt LI, ſeu DK, ad AI, hoc eſt, vt P, ad O; ex iis, quæ ad propoſ. 1. huius lib. ex Commandino demonſtrauimus. b Ex æquo igitur erit, vt DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ita Q, ad O. Quocirca cum proportio Q, ad O, componatur ex proportione Q, ad P, hoc eſt, ex proportione baſis EF, ad baſin BC; & ex proportione P, ad O, id eſt, ex proportione altitudinis DK, ad altitudinem AI; componetur etiam proportio DEF, ad ABC, & EH, ad CG, ex eiſdem proportionibus. Quod eſt propoſitum.

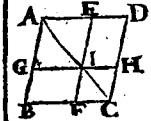
a 21. ſexti

b 22. quinti.

xxij.

THEOR. 18. PROPOS. 24.

IN omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti, & inter ſe ſunt ſimilia.



ESTO parallelogrammum ABCD, in quo ducatur diameter AC, & per quodlibet eius punctum I, ducantur duę rectæ EF, GH, parallelæ lateribus parallelogrammi. Dico parallelogramma FG, FH, circa diametrum, ſimilia eſſe & toti parallelogrammo, & inter ſe ſe. Quod enim æquiangula ſint toti, facile oſtendetur. Nam angulus GAE, idem eſt, qui angulus BAD; c & angulus externus AEI, æqualis interno ADC; & angulus AGI, externus interno ABC, & angulus EIG, externus interno BFI; & hic externus interno BCD. Quare æquiangulum eſt EG, parallelo-

c 29. pri.

gram-

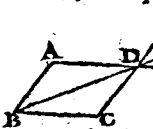
grammum parallelogrammo B D: Et eadem ratione, eidem BD, æquiangulum erit FH. Quod autem latera circa æquales angulos habeant proportionalia lateribus totius, hoc modo demonstrabimus. Cum triangulum AGI, æquiangulum sit triangulo ABC, & triangulum AEI, triangulo ADC, vt perspicuũ est ex 29. propos. lib. 1. vel etiã ex coroll. propos. 4. huius lib. [a] erit vt AB, ad BC, ita AG, ad GI, atque ita latera circa æquales angulos B, & G, proportionalia sunt. Rursus [b] erit vt B C, ad CA, ita GI, ad IA; Item vt CA, ad CD, ita IA, ad IE. [c] Ex æquo igitur, vt BC, ad CD, ita est GI, ad IE, ac propterea & latera circa æquales angulos BCD, GIE, proportionalia existunt. Non aliter demonstrabuntur latera circa reliquos angulos æquales, esse proportionalia. Quare per definitionem, simile erit parallelogrammum E G, toti parallelogrammo B D. Eadem arte ostendes parallelogrammum FH, simile esse eidem parallelogrammo B D; [d] atque adeo & ipsa inter se similia erunt. In omni ergo parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 4. sexti
[b] 4. sexti
[c] 22. 5.
[d] 21. sex.

SCHOLIVM.

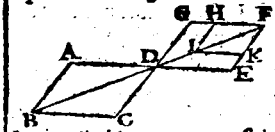
INTELLIGENDA autem sunt parallelogramma circa diametrum totius esse talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifestum est ex forma demonstrationis.

QVOD si circa diametrum alicuius parallelogrammi productam constituat parallelogrammum altud, ita vt duo huius latera rectas duas componãt lineas cum duobus lateribus alterius, vel certe illa his sint parallela, ijsdem fere medijs ostendetur, hoc illi esse simile. Parallelogrammi enim ABCD, diameter BD, sit producta ad F, circa quam constituat parallelogrammũ DEFG, cuius duo latera DE, DG, rectas lineas efficiant cum AD, DC, lateribus parallelogrãmi AC. Dico parallelogrammum GE, simile esse parallelogrãmo AC. Quod enim ambo inter se sint æquiangula, facile ostendetur. [c] *Nã quia angulus A,* [c] 29. pri.



æqualis eſt angulo alterno ADG, huic autem æqualis quo-

a34.pri.



que eſt alternus angulus G; erũt æquales anguli A, & G, a Quæ-

b15.pri.

c34.pri.

ve his oppoſiti C, & E, æquales quoq; erũt. b Rurſus quia anguli ADC, GDE, aduertitè, ſũt æqua les, c erũt his quoq; oppoſiti ABC, GFE, æquales. Igitur æqui-angula ſunt GE, AC, parallelogramma. Quod aũt latera ha beant proportionalia circum æquales angulos, hac ratione fiet perſpicuum. Cum triangulum BAD, æquiangulum ſit triangulo DGF, & triangulum BCD, triangulo DEF, vt eõ

d4.ſexti

dem ex propoſ. 29 lib. 1. d Erit vt BA, ad AD, ita DG, ad GF. Rurſus vt AD, ad DB, ita GF, ad FD, et vt DB, ad DC,

e22.qn.

ita FD, ad FE, e ac propterea ex æquo vt AD, ad DC, ita GF, ad FE. Sũt igitur latera circa angulos A, ADC, proportionalia lateribus circa angulos G, GFE, qui illis æquales ſunt. Nõ ſecus oſtẽdes, reliqua latera circa angulos æquales proportionalia eſſe. Quare ſimilia ſũt parallelogrãma AC, GE.

QVOD ſi circa eandem diametrum conſiſtat parallelogrammum HIKF, habens latera parallela lateribus parallelogrammi AC, idem demonſtrabitur. Nam productis AD, CD, donec occurrant rectis FK, FH, productis in E, & G; erit

f4.ſex.

g21.ſex.

HK, ſimile ipſi GE, f vt Euclides demonſtrauit. Atqui eidẽ GE, ſimile eſt quoque AC, vt nunc oſtendimus. g Igitur & HK, AC, inter ſe ſimilia ſunt. Quod eſt propoſitum.

SED & abſoluamus cum Polotario ſequens problema.

DATIS duobus parallelogrammis æqui angulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare.

DVO parallelogrãma æquiangula, ſed non ſimilia, ſint

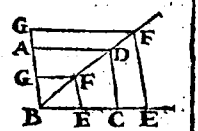
ABCD, CEFG; & ex ABCD, abſcindendum ſit parallelogrammum ipſi CEFG, ſimile. Coniungantur ambo ad angulos æquales BCD, ECG, ita vt ſit vna linea recta BCG, & propterea, vt ad propoſ. 15. lib. 1. demonſtratũ

eſt,

est, ECD, quoque una recta linea. Deinde ducta diameter FC, producatur, donec in H, secet vel latus AD, vel latus AB, (Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset simile ipsi CF, vt demonstratum est, quod est contra hypothesim) & per H, ducatur HI, parallela ipsi AB, vel ipsi AD. Dico parallelogrammū abscissum HC, simile esse ipsi CF. Si enim totum parallelogrammum KL, compleatur, erunt HC, CF, circa diametrum. Quare inter se similia erunt, vt Euclides demonstrauit in hac propositione.

EADEM autem arte fere alterutrum ipsorum augeri poterit, vt fiat simile alteri. Sit enim augendum ABCD, vt fiat ipsi CE-FG, simile. Coniungantur vti prius, & diameter FC, extendatur, donec in H, secet vel latus BA, protractū, vel latus DA, protractum. Neque enim in punctum A, cadet: quia AC, esset ipsi CF, simile, vt demonstratum est, quod non ponitur. Deinde per H, ducatur HI, parallela ipsi AD, vel ipsi AB, donec secet vel latus CD, protractum, vel CB, protractum in I. Dico parallelogrammum auctum HC, simile esse parallelogrammo CF. Nā si compleatur totum parallelogrammum KL, consistent HC, CF, circa diametrum; a *Quare similia inter se erunt.* a 24. sex.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione huius theorematis facta ab Euclide, & ex probatione theorematis à nobis propositi in hoc scholio, parallelogramma circa eandem diametrum non solum esse similia, verum etiam similiter posita. Vnde proposito quouis parallelogrammo ABCD, si maius debeat describi illi simile similiterque positum, producendum erit latus vnum, nempe BC; Atque ex E, quolibet puncto vltra C, ipsi CD, parallela EF, ducenda, secans diametrum BD, productam in F, & per F, ducenda FG, parallela ipsi AD, occurrens rectæ BA, productæ in G. b *Erit enim parallelogrammum GE, simile similiterque positum ipsi AC, & maius eodē. Quod si minus debent describi, sumendum erit punctum E, citra C, & reliqua*



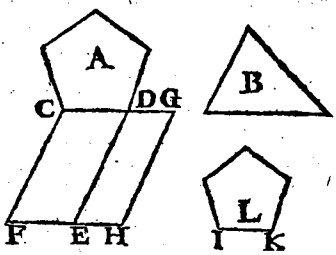
b 24. sex.

peragenda, vt prius, vt figura indicat.

xxv.

PROBL. 7. PROPOS. 25.

DATO rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere.



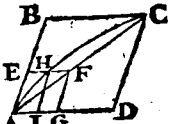
SINT data duo rectilinea A, & B; sitque constituendũ aliud rectilineum, quod simile quidem sit ipsi A, æquale vero ipsi B. Super CD, vnũ latus rectilinei, cui simile debet constitui, [a] constituatur parallelogrammum CE, in quouis angulo, æquale rectilineo A; Et super rectam DE, in angulo EDG, qui æqualis sit angulo DCF, parallelogrammum DH, æquale ipsi B, eritq; tam CDG, quam FEH, linea vna recta, vt demonstratum est propos. 45. lib. 1. [b] Inueniatur iam inter rectas CD, DG, media proportionalis IK; [c] super quam constituatur rectilineum L, simile ipsi A, similiterque positum. Dico L, æquale esse alteri rectilineo B. Cum enim sint proportionales tres rectæ CD, IK, DG; erit per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. vt CD, prima ad DG, tertiam, ita A, rectilineum super primam CD, ad rectilineum L, super IK, secundam simile similiterque descriptum: [d] Vt autem CD, ad DG, ita est parallelogrammum CE, ad parallelogrammum DH, eiusdem altitudinis. [e] Igitur erit vt CE, ad DH, ita A, ad L. [f] Vt autem CE, ad DH, ita est A, ad B: propterea quod parallelogrammum CE, rectilineo A; & parallelogrammum DH, rectilineo B, constructum est æquale. [g] Quare erit vt A, ad B, ita A, ad L; [h] proptereaque æqualia erunt rectilinea B, & L. Est autem & L, simile ipsi A, similiterque positum per

a 44. vel 45. pri.
b 17. sex.
c 18. sex.
d 1. sex. ti
e 11. dn.
f 7. dnti
g 11. dn.
h 9. dn.

constructionē. Dato igitur rectilineo simile similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituimus. Quod erat faciendum.

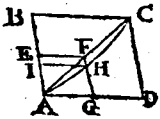
THEOR. 19. PROPOS. 26. xxiij.

SI à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circum eandem cum toto diametrum consistit.



EX parallelogrammo BD, abscissum sit parallelogrammum EG, simile ei similiterque positum, habens cum ipso angulum communem EAG. Dico EG, consistere circa diametrum totius BD. Ducantur enim rectæ AF, CF, quæ si fuerint vna linea recta, perspicuum est, cum AF, sit diameter ipsius EG, & AC, diameter ipsius BD, parallelogrammum EG, consistere circa diametrum AFC, totius parallelogrammi. Quod si AF, CF, non dicantur efficere lineam rectam, ducatur totius parallelogrammi diameter AC, secans latus EF, in H, puncto, per quod ipsi FG, parallela agatur HI. Quoniam igitur parallelogramma BD, EI, sunt circa eandem diametrum AHC; [a] ipsa erunt similia, similiterque posita. [b] Quare erit vt BA, ad AD, ita EA, ad AI. Sed vt BA, ad AD, ita quoque est EA, ad AG, quod parallelogramma BD, EG, ponantur etiam similia, similiterque posita. [c] Igitur erit vt EA, ad AI, ita EA, ad AG, [d] Ac propterea æquales erunt rectæ AI, AG, pars, & totum: quod est absurdum.

[a] 24. sex.
[b] 1. def. sexti
[c] 11. 9. [n]
[d] 9. quinti.



QVOD si dicatur recta AHC, secare alterum latus FG, Tunc ducta HI, parallela ipsi EF, [e] erunt rursus similia, parallelogramma BD, IG, similiterque posita, [f] Quare erit vt DA, ad AB, ita GA, ad AI: Sed vt DA, ad AB, ita quoque est GA,

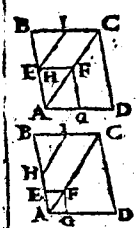
[e] 24. sex.
[f] 1. def. sexti.

ad AE,

ad AE, ob similitudinem parallelogrammorum B D, EG.
a 11. qn. a Igitur erit vt GA. ad AI, ita GA, ad AE, b ideoque æquales erunt rectæ AI, AE; pars & totum: Quod est absurdũ.
b 9. quinti. Constituunt ergo rectæ A F, FC, vnam rectam lineam; hoc est, ducta diameter A C, transit per punctum F; & ducta diameter A F, cadit in punctum C. Itaque si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ALITER idem theorema demonstrabimus ostensiue, hoc modo. Diuisis lateribus AB, BC, bifariam in punctis H, I, siue punctum H, cadat in pũctum E, siue supra siue infra, ducantur rectæ HI, AF. Quoniam igitur, propter similitudinem parallelogrammorum, est vt AB, ad BC, ita AE, ad EF; Vt autem tota AB, ad totam BC, c ita est dimidia HB, ad dimidiam BI; d Erit vt HB, ad BI, ita AE, ad EF. Triangula igitur HBI, AEF, cum habeant circa angulos B, E, (qui æquales sunt, ob similitudinem parallelogrammorum B D, EG: Vel quia vnus est internus, & alter externus in parallelis BC, EF, e qua parallelæ sunt, cum vtraque parallela sit ipsi AD,) latera proportionalia, f erunt æquiangula, habebuntque æquales angulos BHI, EAF, externum, & internum inter rectas HI, AF. g Quare parallelæ erunt rectæ HI, AF. Quoniam vero recta, quæ ex puncto A, ad punctum C, duci cõcipitur, h parallela quoque est rectæ HI. propterea quod latera AB, BC, trianguli tunc cõstituti ABC, proportionaliter essent secta in H, & I, vtpote bifariam; efficitur, vt ducta recta A C, eadem fiat quæ AF, transeatque per punctum F, cum ex puncto A, solũ vna linea parallela rectæ H I, possit duci, vt manifestum est. Consistunt ergo BD, EG, parallelogramma similia, similiterque posita circa eandem diametrum AFC. Quod est propositum.

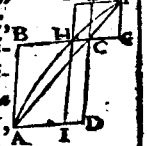


c 15. qn. d 1. qn.

e 30. pri. f 6. sexti g 28. pri h 2. sexti

QVOD

QVOD si duo parallelogramma similia similiterque posita non habeant angulum communem, sed vnum sit extra aliud, hac tamen lege, vt ita sint connexa inter se secundum duos eorum angulos æquales, vt duo latera vnius cum duobus lateribus alterius duas rectas lineas constituant: demonstrabimus ijsdem fere medijs, ea circa eandem consistere diametrum. Sint enim duo parallelogramma similia similiterq. posita BD, EG, quæ ad angulos æquales BCD, GCE, ita coniungantur, vt lineæ BC, CG, in directum iaceant, & ob id, per ea, quæ ad propos. 15. lib. 1. ostendimus, lineæ DC, CE, vnam quoque lineam rectam componant. Dico parallelogramma BD, EG, circa eandem consistere diametrum, hoc est, diametrum AC, cum diametro FC, vnam rectam lineam conficere. Si enim AC, FC, non faciunt vnam lineam rectam, ducatur ex A, ad F, linea recta secans BC, in H, puncto, per quod agatur HI, parallela ipsi CD, occurrens rectæ FE, producta in K. Quoniam igitur parallelogramma BI, KG, circa eandem diametrum AHF, producta consistunt, efficiuntq. duas rectas BH, HI, cum duabus rectis HG, HK, duas lineas rectas, ipsa erunt similia similiterq. posita, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Quare erit vt HB, ad BA, ita FK, ad KH. [a] Habet autem CB, maior ad BA, proportionem maiorem, quam HB, minor ad eandem BA; & est vt CB, ad BA, ita FE, ad EC, eo quod parallelogramma BD, EG, ponuntur similia similiterq. descripta. Igitur & FE, ad EC, hoc est, ad sibi æqualem KH, maiorem habebit proportionem, quam HB, ad BA hoc est, quam FK, ad KH. Quam ob rem si FE, ad KH, maiorem habeat proportionem, quam FK, ad eandem KH; [b] erit EF, maior quam FK; pars quam totum. Quod est absurdum.



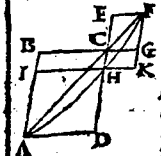
a 28. quin.

b 10. 5.

QVOD si quis dicat, rectam AHF, secare latus CD, Tunc per H, ducta recta BC, parallela HI, quæ occurrat rectæ FG, protractæ in K; erunt rursus similia similiterque posita parallelogramma ID, EK, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. ostendimus. Quare erit vt HD, ad DA, ita FK, ad KH. [c] Habet autem CD, ad DA, maiorem proportio-

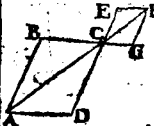
c 8. quin.

nem,



nem, quam HD, ad DA; Et est vt CD, ad DA, ita FG, ad GC; propterea quod parallelogramma BD, EG, similia similiterq. posita sunt concessa. Igitur & FG, ad GC, hoc est, ad sibi aqualem K H, maiorem habebit
a 1.5. proportionem, quam FK, ad KH; a ideoq. FG, maior erit, quam FK; pars quam totum: Quod est absurdum.

OSTENSIVE idem hac ratione ostendetur: Quoniam propter similitudinem parallelogrammorum BD, EG, anguli, B, E, sunt aquales, estq. vt AB, ad BC, ita CE, ad EF; habebunt triangula ABC, CEF, circa angulos aquales B,
b6.sex. & E, latera proportionalia; b atque idcirco aquiangula



erunt, habebuntq. angulos BCA, EFC, aquales. Addito ergo communi angulo
c29.pri BCF, erunt duo anguli BCA, BCF, duobus angulis EFC, BCF, aquales: c Sed hi inter parallelas BC, EF, aquales sunt duobus rectis. Igitur & BCA, BCF, duobus erunt rectis aquales;
d14.pri d At propterea AC, FC, vnam component rectam lineam. Quod est propositum.

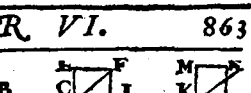
RECTE autem Euclides in theoremate voluit, parallelogrammum à toto ablatum non solum esse toti simile, verum etiam similiter positum, vt ostendatur circa eandem esse cum toto diametrum. Nam si ex altera parte longiori BD, abscindatur altera parte longius E G, circa eandem cum toto diametrum consistent,

c24.sex. e erit EG, simile similiterque positum. At vero si in rectangulo I L, quod sit aquilaterum, & aquiangulum ipsi BD, sumatur HM, aqualis ipsi EF, & MN, aqualis ipsi AE, &c. erit quidem rectangulum M O, aquale & simile rectangulo EG, propter aqualitatem laterum, & angulorum, qui sunt recti; & ob id simile rectangulo I L; sed tamen quia non est similiter positum, non consistet circa eandem cum toto I L, diametrum.

IDEM quoque hic perspicitur in rectangulis similibus, quorum vnum est extra alterum, secundum tamen angu-

los

los eorum ita inter se connexa, vt duo latera vnius in directum iaceant cum duobus lateribus alterius, qualia sunt parallelogramma rectangula BD, EG; &



IL, MO; in quibus EG, quidem consistit circa eandem diametrum cum rectangulo BD, quoniam est similiter positum: At vero MO, minime consistit circa eandem diametrum cum rectangulo IL, quia non est similiter positum, quamuis simile sit, cum prorsus sit aequale ipsi EG. Nam KM, aequalis est ipsi EF, & MN, ipsi EC, &c.

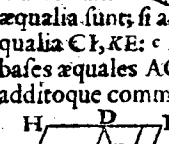
THEOR. 20. PROPOS. 27. xxvj.

OMNIVM parallelogrammorum secundum eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus similiterque positis ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.

DETVR recta AB, diuisa bifariam in C, superque eius dimidiam BC, constituatur quodcunque parallelogrammum CDEB, cuius diameter BD. Si igitur compleatur totum parallelogrammum ABEH, erit parallelogrammum AD, super dimidiam AC, consistens, applicatum secundum AB, deficiens parallelogrammo CE, & existens simile defectui CE. Dico parallelogrammum AD, ad dimidiam AC, applicatum deficiensque parallelogrammo CE, maximum esse omnium, quae secundum AB, rectam applicantur, deficiuntq; parallelogram-

mis

mis similibus similiterq. positis ipsi CE. Sumpto enim puncto G, vtcunque in diametro BD, & ductis per G, rectis FGI, KG, quæ sint parallelæ rectis AB, BE; erit parallelogrammum FK, secundum rectam AE, applicatum, [a] deficiens parallelogrammo KI, [a] quod ipsi CE, simile est, similiterque positum, cum sit circa eandem cum CE, [b] diametrum. [b] Quoniam vero complementa CG, GE, æqualia sunt; si addatur commune KI, erunt quoque æqualia CI, KE: [c] Est autem CI, æquale ipsi CF, propter bases æquales AC, CB. Igitur & CF, KE, æqualia erunt; additoque communi CG, æqualia erunt parallelogrammum AG, & gnomon LM. Quare, cũ CE, maius sit gnomone LM, (continet enim CE, præter gnomonem, parallelogrammum adhuc DG,) erit quoque AD, [d] æquale existens ipsi CE, propter bases æquales AC, CB, maius quam parallelogrammum AG, eodem parallelogrammo DG. Eodem que modo ostendetur AD, maius esse omnibus parallelogrammis, quæ ita secundum rectam AB, applicantur, vt punctum G, sit inter puncta B, & D, hoc est, quæ occupant maiorem lineam semisse AC, habentq. minorem altitudinem, quam AD; dummodo defectus similes sint ipsi CE.



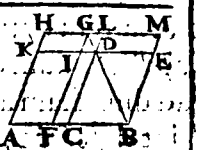
ALITER demonstrabitur AD, maius esse parallelogrammo AG, hoc modo. [e] Parallelogramma FD, DI, sunt æqualia, cum bases HD, DE, sint æquales. Est autem DI, maius quam GE, hoc est, quam complementum CG, ([f] quod ipsi GE, æquale est,) parallelogrammo DG. Igitur & FD, maius erit, quam CG, parallelogrammo eodem DG. Atque idcirco addito communi CF, maius erit AD, quam AG, parallelogrammo eodem DG.

QVOD si punctum G, sumatur in diametro BD, producta extra parallelogrammum CE. Tunc ducta per G, recta HM, quæ sit parallela ipsi AB, occurratq. rectis AK, BE, protractis in H, & M. Item ducta GF, parallela ipsi AH; erit parallelogrammum AG, applicatum secundum rectam AB, deficiens parallelogrammo FM, [g] quod

ipsi

a 24. sex
b 43. pri
c 36. pri
d 36. pri
e 36. pri
f 43. pri.
g 4. sex.

ipſi CE, eſt ſimile ſimiliterq. poſitum, cum ſit circa eandē diametrum cum CE. Dico adhuc maius eſſe AD, ipſo AG. Protracta enim CD, ad L, erunt æquales rectæ HL, LM, [a] cum æquales ſint æqualibus AC, CB; [b] ideoque æqualia parallelogramma HD, DM. [c] Cum igitur DM, ſit æquale complemento DF; erit & HD, æquale ipſi DF. Eſt autem HD, maius quam HI, parallelogrammo IL. Quare & DF, maius erit quam HI, eodem parallelogrammo IL. Ac propterea communi addito AI, maius erit AD, quam AG, eodem parallelogrammo IL. Iiſdem argumentis concludes AD, maius eſſe quocunque parallelogrammo ita applicato ſecundum rectam AB, vt punctum G, ſit vltra D, in diametro BD, producta; hoc eſt, quod occupat minorem lineam ſemiſſe AC, habeatque maiorem altitudinem, quam AD, dummodo defectus, ſimilis exiſtat parallelogrammo CE. Itaque omnium parallelogrammorum ſecundum eandem rectā lineam applicatorum, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 34. pri
b 36. pri
c 43. pri

SCHOLIVM.

MANIFESTVM autem eſt, lineam, ad quam parallelogrammum deficiens applicatur, eſſe vel maiorem dimidiata AC; qualis eſt AK, in priori figura; vel minorem; cuiuſmodi eſt AF, in figura poſteriori; prout punctum G, ſumitur vel in diametro BD, vel in ea producta ad partes D.

PROBL. 8. PROPOS. 28. xxvij.

AD datam lineam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri parallelogrāmo dato. Opor-

tet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non maius esse eo, quod ad dimidiam applicatur, cum similes fuerint defectus, & eius, quod ad dimidiam applicatur, & eius, cui simile deesse debet.

AD datam rectam lineã AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammũ æquale, deficiens parallelogrãmo, quod sit simile dato alteri parallelogrãmo D. Secta AB, bifariam in E, super medietatẽ EB, describatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi D, similiterque positum; & compleatur totum parallelogrammum AHGB. Si igitur AF, æquale est ipsi C; cum sit applicatum ad AB, deficiens parallelogrammo EG, simili ipsi D, factum erit, quod iubetur. Si autem AF, maius est quam C. (Neque enim minus esse debet. Nam cum per propos. præcedentem, ipsum sit omnium applicatorum maximum, dummodo defectus sint similes, non posset applicari vllum ad AB, quod esset ipsi C, æquale, sed omnia essent minora.) Propterea adiunxit Euclides; Oportet autẽ datum rectilineum, &c.) erit quoque sibi æquale BG, maius quam C. Sit igitur maius rectilineo I. (Qua vero ratione excessus duorum rectilinearum sit inquirendus, docuimus ad propos. 45. lib. 1.) b & constituatur parallelogrammum KLMN, simile quidem similiterque positum ipsi D, seu ipsi BG, æquale vero excessui inuento I; vt sit EG, æquale rectilineo C, & parallelogrammo KM; simul; & ob id maius quam KM. Cum igitur ob similitudinem sit vt EF, ad FG, ita NK, ad KL; erunt quoque latera EF, FG, maiora lateribus NK, KL. Si enim his illa forent æqualia, vel minora, esset etiam EG æquale ipsi NL, vel minus, vt constat. Quare abscissis rectis FO, FQ,

18. sex

b 25. sex

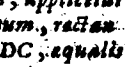
quæ

quæ sint æquales ipsis KN, KL, & completo parallelogrammo FQPO; erit hoc ipsi LN, æquale, & eidem simile similiterq. positum, & propterea ipsi EG: a atque, a 26. sex
adeo circa eandem diametrum cum EG, consistet, quæ sit BH. Productis iam rectis QP, OP, erit parallelogrammum AP, ad rectam AB, applicatum deficiens parallelogrammo PB, b quod simile est ipsi EG, similiterq. posi- b 24. sex
tum, & propterea ipsi DC. Dico igitur AP, æquale esse ipsi C, rectilineo. c Nam cum PG, æquale sit comple- c 43. pri
mento PE; si addatur commune PB, erit & BQ, æquale ipsi ER, hoc est, ipsi ES; d quod æquale est ipsi ER, pro- d 36. pri
pter bases æquales EA, EB. Quare si æqualibus AO, BQ, commune addatur EP, erit AP, æquale gnomoni TV. Sed gnomon TV, æqualis est rectilineo C, (Nam cum EG, parallelogrammum æquale sit ipsi C, vna cum LN; si auferantur æqualia QO, LN, remanebit gnomon TV, ipsi C, æqualis.) Igitur & AP, eidem C, æquale erit. Ad rectam ergo AB, applicatum est parallelogrammum AP, deficiens parallelogrammo PB, quod simile est dato parallelogrammo D, & æquale existens rectilineo dato C. Quod faciendum erat.

SCHOLIVM.

MOVENT hoc loco dubium quoddam Iacobus Peletarius, & Nicolaus Tartalea, quod iuxta nostrum constructionem locum non habet, cum super EB, constituerimus EG, parallelogrammum non solum simile ipsi D, verum etiam similiter positum; quod ipse minime fecerunt. Qua de re, si placet, consule eorum commentarios.

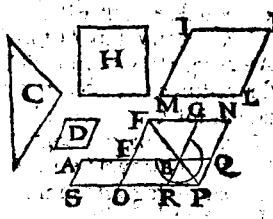
PERSPICVVM autem est, si ad rectam applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, ipsum applicatum æquale esse rectangulo, quod sub segmentis lineæ per applicationem factis continetur. Vt si ad AB, applicetur AC, deficiens quadrato GB, erit AC, applicatum, rectangulum contentum sub AD, & DC. Cum ergo DC, æqualis sit ipsi DB, propter quadratum CB; continebitur quoque AC, sub segmentis AD, DB, per applicationem factis. Quod est propositum.



xxviij.

PROBL. 9. PROPOS. 29.

AD datam rectam lineam, dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.



AD datam rectam lineam AB, dato rectilineo C, applicandum sit parallelogrammum æquale, excedens parallelogrammo, quod simile sit dato alteri parallelogrammo D. Diuisa AB, bifariam in E; a super dimidiam
a 18. sex EB, construatur parallelogrammum EFGB, simile ipsi
b 14. sec D, similiterq. positum. b Deinde rectilineo C, & parallelogrammo EG, constituatur quadratum H, æquale;
c 25. sex c cui quidem fiat parallelogrammum IKLM, æquale, simile vero ipsi EG, similiterq. positum: erit q. propterea IKLM, maius quam EFGB, quandoquidem æquale est quadrato H, quod constructum est rectilineo C, vna cum parallelogrammo EG, æquale. Cum igitur ob similitudinem MK, EG, sit vt MI, ad IK, ita EF, ad FG, erunt quoque latera MI, IK, lateribus EF, FG, maiora. Si enim illa his forent æqualia, vel minora, esset quoque MK, vel æquale ipsi EG, vel minus, vt perspicuum est. Productis igitur FE, EG, vt rectæ FO, FN, æquales sint rectis IM, IK, & completo parallelogrammo ON, erit hoc simile, similiterq. positum ipsi EG, cum sit æquale ipsi MK, & simile, similiterq. positum. d Quare ON, EG,
d 26. sex circa eandem diametrum consistent, quæ sit FP. Productis iam AB, GB, ad Q, R; & PO, donec cum AS, ipsi FO, parallela conueniat in S, erit parallelogrammū AP,

appli-

applicatū ad rectā AB, excedens parallelogrāmo QR, a quod simile est ipsi EG, ac propterea ipsi D. Dico igitur AP, æquale esse rectilineo C. b Nam cum AO, ER, sint æqualia, c & ER, æquale complemento BN, erit & AO, ipsi BN, æquale. Addito ergo communi OQ, fiet AP, æquale gnomoni EPG. Atqui gnomon EPG, æqualis est rectilineo C. (Nam cū MK, hoc est, ON, æquale sit rectilineo C, vna cum EG; si auferatur cōe EG, remanebunt æqualia gnomon EPG, & rectilineum C.) Igitur & AP, æquale erit rectilineo C. Ad datā ergo rectam AB, dato rectilineo C, æquale parallelogrammum applicatum est AP, excedens parallelogrammo RQ, quod simile est alteri dato D. Quod faciendum erat.

a 24. sex

b 36. pri

c 43. pri

PROBL. 10. PROPOS. 30.

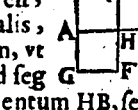
PROPOSITAM rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione secare.

xxix.

SIT recta AB, secanda extrema ac media ratione. Describeo super eam quadrato ABCD; d ad latus DA, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato AC, & excedens parallelogrammo AF, simili ipsi quadrato, ita vt sit AF, quoque quadratum, cum quadrato solum quadratū sit simile. Secet autem recta EF, rectam AB, in H. Dico AB, in H, sectam esse extrema ac media ratione. Cum enim æqualia sint DF, & AC, si demptum commune AE, remanebunt æqualia GH, HC; quæ cum habeant angulos æquales AHF, BHE, vtpote rectos, e erunt latera circa illos reciproca, hoc est, erit vt EH, hoc est, vt AB, ipsi EH, æqualis, ad HF, hoc est, ad AH, ipsi HF, æqualem, vt AH, ad HB. Quare cum sit, vt tota AB, ad segmentum AH, ita segmentū AH, ad segmentum HB, secta est AB, extrema ac media ratione, per definitionem. Propositam ergo rectam lineam terminatam, &c. Quod erat faciendum.

d 29. sex

e 24. sex



ALITER quoque ostendemus AB, esse sectam in H, extrema ac media ratione. Cum tres lineæ dentur AB, AH, HB; sitque rectangulum HC, comprehensum sub prima AB, & tertia HB, æquale quadrato mediæ AH; [a] erunt ipsæ proportionales: vt AB, quidem prima ad AH, secundam, ita AH, secunda ad HB, tertiam. Quare per definitionem secta est AB, in H, extrema ac media ratione.

a 17. sex.

ALITER totum problema conficiemus. [b] Diuidatur AB, in C, ita vt rectangulum sub tota AB, & segmento CB, æquale sit quadrato alterius segmenti AC. Dico AB, in C, esse sectam extrema ac media ratione. [c] Erunt enim rursus, vt prius, tres lineæ AB, AC, CB, continue proportionales. Constat ergo propositum.

b 11. secundi.

c 17. sex.

SCHOLIVM.

PRAXIS diuisionis lineæ rectæ extrema ac mediæ ratione instituenda est, vt ad propos. 11. lib. 2. tradidimus.

HABET autem admiranda hæc sectio lineæ extrema ac mediæ rationis insignes vtilitates, proprietatesq; vt in libris Stereometriæ manifestum erit, vt non sine causa à plerisque Mathematicis linea ita diuisa diuinâ quodammodo, ob admirabilem eius vim, ac naturam, dicatur habere proportionẽ: Ab alijs vero simpliciter vocetur diuisa proportionaliter.

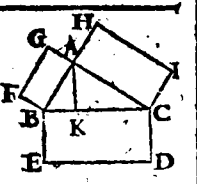
THEOR. 21. PROPOS. 31.

IN rectangulis triangulis, figura quæuis à latere rectum angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes; & similiter positæ à lateribus rectum angulum, continentibus describuntur.

TRIANGVLVM rectangulum sit A B C, habens angulum B A C, rectum; describaturque super B C,

quæcun-

quæcunque figura rectilinea BCDE, [a] cui similes similiterque posite super AB, AC, constituantur ABFG, ACIH. Dico figuram BD, æqualem esse duabus figuris AE, AI. Demissa enim ex A, ad BC, perpendiculari AK. erit per corollarium propos. 8. huius lib. vt BC, ad CA. ita CA, ad CK. Quare vt BC, ad CK, prima linea ad tertiam, ita figura BD, super primam, ad figuram CH, super secundam similem similiterque positam, per coroll. propos. 19. vel 20. huius lib. & conuertendo vt CK, ad BC, ita figura CH, ad figuram BD. Non secus ostendetur, esse quoque vt BK, ad BC, ita figuram BG, ad figuram BD; cum tres lineæ BC, BA, BK, sint quoque proportionales, &c. Quoniam igitur est vt CK, prima quantitas ad BC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt BK, quinta quantitas ad BC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; [b] erit vt prima CK, cum quinta BK, ad BC, secundam, ita tertia CH. cum sexta BG, ad BD, quartam. Sunt autem prima CK, & quinta BK, simul æquales secundæ BC. Igitur tertia CH, & sexta BG, simul æquales quoque erunt quartæ BD, Quod est propositum.



[a] 18. sex.

[b] 24. qn.

ALITER. [c] Cum triangulum ABC, simile sit triangulum KAC, sintque homologa latera ipsorum BC, CA; (Nam est vt BC, ad CA, in triangulo ABC, ita CA, ad CK, in triangulo KAC;) [d] habebit triangulum KAC, ad triangulum ABC, duplicatam proportionem eius, quam habet CA, ad BC. [e] Habet autem & figura CH, ad figuram BD, proportionem duplicatam proportionis CA, ad BC. [f] Quare erit vt triangulum KAC, ad triangulum ABC, ita figura CH, ad figuram BD. Eadem ratione, ostendetur esse, vt triangulum KBA, ad triangulum ABC, ita figuram BG, ad figuram BD. Quoniam ergo rursus est, vt KAC, prima quantitas ad ABC, secundam, ita CH, tertia ad BD, quartam; Item vt KBA, quinta ad ABC, secundam, ita BG, sexta ad BD, quartam; [g] erit & prima KAC, composita cum quinta KBA, ad secundam ABC

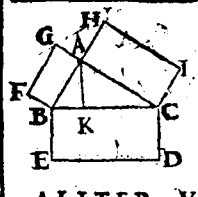
[c] 8. sex.

[d] 19. sex.

[e] 19. vel 20. sexti

[f] 11. qn.

[g] 24. qn.



vt cõposita tertia CH, cum sexta BG, ad quartam B D: Sunt autem KAC, KBA, prima & quinta simul, æquales secundæ ABC. Igitur CH, BG, tertia & sexta simul, æquales quoque erunt quartæ B D. Quod est propositum.

ALITER. Vt quadratum rectæ A C, prima quantitas, ad quadratum rectæ BC, secundam quantitatem, ita est figura CH, tertia quantitas, ad figuram B D, quartam quantitatem; [a] cum vtraque proportio sit duplicata proportionis AC, ad BC. Similiter erit vt quadratum rectæ AB, quinta quantitas, ad quadratum rectæ B C, secundã quantitatem, ita figura BG, sexta quantitas, ad figuram BD, quartam quãtitatem. [b] Quocirca erit, vt prima quantitas cum quinta, nimirum quadratum rectæ A C, cum quadrato rectæ AB, ad secundam, hoc est, ad quadratum rectæ BC, ita tertia quantitas cum sexta, nimirum figura CH, cum figura BG, ad quartam, videlicet ad figuram BD. [c] Sunt autem quadrata rectarum AC, AB, simul æqualia quadrato rectæ BC. Igitur & figuræ C H, B G, figuræ BD, æquales erũt. Quod est propositũ. In rectangulis igitur triangulis, figura quæuis; &c. quod erat ostendendũ.

[a] 19. vel 20. sexti

[b] 4. 6.

[c] 47. primi.

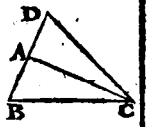
SCHOLIVM.

VIDES igitur, longe esse vniuersalius theorema hoc Euclidis, quod seso ad omnes figuras similes similiterque descriptas extendit, quam illud Pythagoræ inuentum, quod sola quadrata includit, vt propos. 47. primi lib. monuimus. Videtur tamen & theorema illud, quod ibi ex Pappo demõstranimus, aliqua ex parte adhuc esse vniuersalius quam hoc, cum illud de omni triangulo, parallelogrammisq; etiã non similibus; Hoc vero de triangulo tantummodo rectangulo, figurisque similibus, & similiter positis, proponatur.

CONVERTEMVS etiam theorema hoc ex Campano nõ aliter, quã 47. propositionẽ primi lib. in hũc modũ.

SI figura, quæ ab vno laterum trianguli describitur, æqualis sit eis, quæ a reliquis

trianguli lateribus describuntur, figuris similibus similiterque positis: Angulus comprehensus sub reliquis duobus trianguli lateribus, rectus est.



DETVR triangulum ABC, sitque figura quamis super latus BC, descripta aequalis duabus figuris sibi similibus similiterque descriptis super reliqua latera AB, AC. Dico angulum BAC, esse rectum. Ducatur enim AD, ad AC, perpendicularis, quae sit ipsi AB, aequalis, & connectatur recta CD. Quoniam igitur angulus CAD, rectus est, [a] *erit figura super CD, (quae similis sit ei, quae super BC, similiterque posita) descripta aequalis figuris super AD, AC, descriptis, quae ei similes sint, similiterque posita. Est autem figura super AD, aequalis figurae super AB, ob aequalitatem laterum. Igitur figura super CD, aequalis erit figuris super AB, AC. Cum igitur figura super BC, eisdem figuris super AB, AC, aequalis ponatur, erunt figura super CD, BC, inter se aequales, ac propterea rectae CD, BC, aequales erunt, vt constat ex lemmate propos. 22. huius lib. Quoniam igitur latera AD, AC, trianguli ADC, aequalia sunt lateribus AB, AC, trianguli ABC; & basis DC, ostensa est quoque aequalis basi BC;* [b] *erunt anguli DAC, BAC, aequales. Quare cum DAC, rectus sit, ex constructione, rectus quoque erit BAC. Quod est propositum.*

[a] 31. sexti.

[b] 8. primi.

THEOR. 22. PROPOS. 32. xxx.

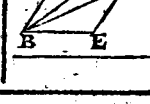
SI duo triangula, quae duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ita vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.

HA-

HABEANT triangula ABC, DCE, latera AB, AC, lateribus DC, DE, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DC, ad DE, componanturq; ad angulum ACD, ita vt latera homologa AB, DC; Ité AC, DE, inter se sint parallela. Dico duo latera reliqua BC, CE, rectam cõponere lineam. Cum enim
a 29. pri. parallelæ sint AB, DC, a erit angulus A, alterno ACD, æqualis. Eademque ratione angulus D, eidem ACD, æqualis erit; ac propterea A, & D, inter se quoque existent æquales. Quoniam igitur triangula ABC, DCE, habent latera circa æquales angulos A, & D, proportionalia; ipsa
b 6. sexti b erunt inter se æquiangula, habebuntque æquales angulos B, & DCE. Additis ergo æqualibus A, & ACD, erunt duo anguli B, & A, duobus angulis DCE, ACD, hoc est, angulo ACE, æquales. Rursus addito communi ACB, fiét tres anguli trianguli ABC, duobus angulis ACE, ACB,
c 32. pri æquales: c Sed illi tres æquales sunt duobus rectis. Ergo
d 14. pri mi. & duo ACE, ACB, duobus erunt rectis æquales: d Atque idcirco BC, CE, vnam rectam lineam constituent. Itaque si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

DEBENT autem predicta duo triangula ita secundũ vnum angulum esse composita, vt vterque angulorum a lateribus proportionalibus comprehensus, alternus sit illi angulo, secundum quem triangula componuntur; veluti in figura theorematis factum esse vides. Nam angulo ACD, secundum quem triangula sunt composita, alternus est tam angulus A, quam angulus D; quorum vterque lateribus proportionalibus continetur. Hinc enim efficitur, angulos A, & D, esse æquales, & propterea triangula esse æquiangula; atque adeo ex BC, CE, vnam rectam lineam componi, vt ex demonstratione liquet.



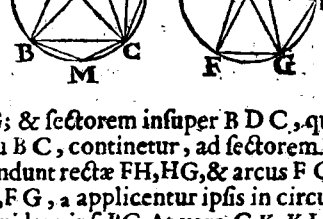
QVOD si vterque angulorum lateribus proportionalibus comprehensus non fuerit alternus angulo, secundum quem triangula componũtur, licet reliqua hypotheses theoremata

matis seruentur, non colligitur necessario conclusio. Nam duatriangula ABC, DBE, habent duo latera AB, AC, duobus lateribus DE, DB, proportionalia, vt quidem AB, ad AC, ita DE, ad DB; compositaq; sunt ad angulum CBD; ita vt eam homologa latera AB, DE, quam AC, DB, sint parallela: Nihilominus reliqua duo latera CB, BE, nõ constituũt vnam lineam rectam; propterea quod angulo CBD, non sit alternus vterque angulorum A, & D; immo neuter eorum, vt perspicuum est. Quamobrem demonstratio theorematis locum non habet.

THEOR. 23. PROPOS. 33. xxxij.

IN æqualibus circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant: Insuper vero & sectores, quippe qui ad centra cõsistunt.

SINT duo circuli æquales A B C, E F G, quorum centra D, H; sumanturque ex circulis duo arcus quicunque B C, F G, quibus ad centra quidem insistant anguli B D C, F H G; ad circumferentias vero anguli B A C, F E G. Dico esse ex sententia defin. 6. lib. 5. vt arcum B C, ad arcum F G, ita angulum B D C, ad angulum F H G, & angulum B A C, ad angulum F E G; & sectorem insuper B D C, qui rectis B D, D C, & arcu B C, continetur, ad sectorem F H G, quem comprehendunt rectæ F H, H G, & arcus F G.



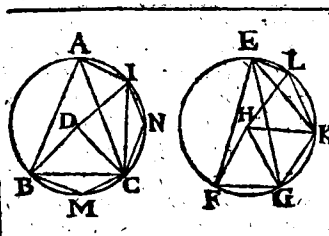
Ductis enim rectis B C, F G, a applicentur ipsis in circulis æquales rectæ; C I, quidem ipsi B C, At vero G K, K L, ipsi F G: ducanturque rectæ I D, K H, L H. Quoniam igitur æquales sunt rectæ B C, C I, b erunt quoque æquales

a 1. quar.

b 28. ter.

arcus

a 27. tert.



arcus BC, CI, a ac propterea & anguli BDC, CDI, æquales erunt. Eadem ratione æquales erunt & arcus FG, GK, KL, & anguli FHG, GHK KHL, Quam multiplex ergo est arcus BCI, ipsius arcus BC, tam multiplex erit angulus BDI, seu aggregatũ angulorũ prope centrũ D, insistentiũ arcui BCI, anguli BDC: Et quã multiplex est arcus FGKI, ipsius arcus FG, tam multiplex erit angulus FHL, seu aggregatũ angulorũ prope centrũ H, arcui FGKL, insistentiũ, anguli FHG, quia in tot angulos æquales diuisi sunt anguli BDI, FHL, in quot arcus æquales secti sunt arcus BCI, FGKL. Quoniam vero si arcus

b 27. tert.

BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, b necessario angulus BDI, angulo FHL, æqualis est: Ac proinde si arcus BCI, maior fuerit arcu FGKL, necessario angulus BDI, maior est angulo FHL, & si minor, minor: Deficient propterea, vna arcus BCI, & angulus BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab FGKL, arcu, & angulo FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt, vel vna excedent,

c 6. def. Quinti.

si ea sumantur, quæ inter se respondẽt. c Quare quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG: secundam magnitudinem, ea erit anguli BDC, tertiæ magnitudinis, ad angulum FHG, quartam magnitudinem.

ATQVE hoc uerum etiam est de spatijs circa cẽtra hoc est, ita erit arcus BAC, ad arcum FEG, vt spatium ad centrum D, insistens arcui BAC, ad spatium ad centrum H, insistens arcui FEG, ut ex demonstratione patet. Nam & hęc spatia, si æqualia sunt insistunt æqualibus arcubus, & si inæqualia, inæqualibus, &c.

d 15. 3. e 20. tert. f 11. 5.

QVONIAM vero vt angulus BDC, ad angulũ FHG, d ita est angulus BAC, ad angulum FEG, e cum illi horum sint dupli, perspicuum est, f ita esse quoque angulum

BAC,

BAC, ad angulum FEG, vt est arcus BC, ad arcum FG. Quod tamen eisdem argumẽtis demonstrari potest, quibus vsi sumus in angulis ad centra constitutis, si prius ducantur rectæ IA, KE, LE, &c.

QVOD si ad circumferentias constituti sint anguli eiusmodi BAC, FEG, vt rectæ ductæ BD, CD, FH, GH, nõ constituant angulos in centris versus arcus BMC, FG; sumenda erũt spatia BDC, FHG, quæ dupla etiam sunt angulorum ad circumferentias, ex scholio propos. 20 lib. 3.

CONSTITVANTVR iam in segmentis BC, CI, anguli BMC, CNI, a qui æquales erunt, cum insistant arcubus æqualibus BAC, CBAI. Quare similia erunt segmenta BMC, CNI, b atque adeo inter se æqualia, propterea quod sunt super rectas BC, CI, æquales. Additis igitur triangulis BDC, CDI, c quæ æqualia quoque sunt, fient sectores BDC, CDI, æquales. Quapropter tam multiplex erit sector BDI, sectoris BDC, quam est multiplex arcus BCI, ipsius arcus BC. Similiter ostendemus, sectorem FHL, tam multiplicem esse sectoris FHG, quam multiplex est arcus FGKL, ipsius arcus FG. Quoniam vero si arcus BCI, æqualis fuerit arcui FGKL, sector quoque BDI, sectori FHL, æqualis est; (vt in sectoribus BDC, CDI, ostensum fuit,) & si maior, maior; & si minor, minor: Deficient propterea una arcus BCI, & sector BDI, æque multiplicia primæ magnitudinis BC, & tertiæ BDC, ab arcu FGKL, & sectore FHL, æque multiplicibus secundæ magnitudinis FG, & quartæ FHG, vel una æqualia erunt: vel vna excedent; si ea sumantur, quæ inter se respondent. d Quamobrem quæ proportio est arcus BC, primæ magnitudinis, ad arcum FG, secundam magnitudinem, ea erit sectoris BDC, tertiæ magnitudinis, ad sectorem FHG, quartam magnitudinem. In æqualibus ergo circulis, anguli eandem habent rationem cum peripherijs, &c. Quod demonstrandum erat.

COMMODIVS fortasse instituetur demonstratio hoc modo. Sumantur (saltem cogitatione) quotuis circuli æquales circulo ABC, atque in singulis capiantur singuli arcus arcui BC, æquales, quibus insistant an-

a 27. tert.
b 24. tert.
c 4. pri.
d 6. defi. quinti.

guli

guli tam ad centra, quàm ad circumferentias. Erunt.n. omnes hi anguli æquales angulis BDC, BAC, ob æqualitatem arcuum, quibus insistunt: ac proinde eorum aggregata ita multiplicia erunt angulorum BDC, BAC, vt est multiplex aggregatum omnium arcuum ipsius arcus BC. Deinde sumantur etiam quotuis circuli æquales circulo EFG, & in singulis accipiantur singuli arcus arcui FG, æquales, &c. Hac enim ratione vitabitur confusio linearum, & angulorum in circulis ABC, EFG, quæ necessario oritur, quando arcus BC, FG, sunt magni, & eorum multiplices accipiendi sunt; vt perspicuum est. Nam si arcus essent BCI, FGL, quibus insistut anguli BDI, FHL, ad centra, & BAL, FEL, ad circumferentias; non poterunt eorum multiplices sumi sine confusione, vt patet. Hæc autem confusio vitatur, si plures circuli æquales adhibeantur; vt diximus.

COROLLARIVM. I.

HINC manifestum est, sic esse sectorem ad sectorem, vt est angulus ad angulum. Vtraque enim proportio eadem est proportioni
a 11. 5. arcus ad arcum. a Quare & inter se eædem erunt.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, vt est angulus in centro ad quatuor rectos, ita esse arcum subtensum illi angulo ad totam circumferentiam. Et contra, vt sunt quatuor recti ad angulum in centro, ita esse totam circumferentiam ad arcum illi angulo subtensum.

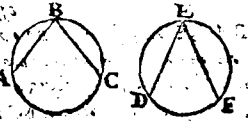
NAM vt est angulus in centro ad angulum rectum
b 33. sexti. *in centro, b ita est arcus illi angulo subtensus ad quadrantem anguli recto subtensum. Quamobrem vtit vt angulus in centro ad quadruplum anguli recti, nempe ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad quadruplum quadrantis, nimirum ad totam circumferentiam, per ea, quæ ad 22. propos. lib. 5. demonstrauimus. Quod est primum. Quoniam igitur est vt angulus in centro ad quatuor rectos, ita arcus illi angulo subtensus ad totam circumferentiam; erit & conuertendo, vt quatuor recti ad angulum in centro, ita tota circumferentia ad arcum angulo in centro subtensum. Quod est secundum. Vetum hoc etiam ita demonstrabi-*

tum. Cum sit, vt angulus rectus in centro ad angulum in centro, ita quadrans angulo recto subtensus ad arcum illi angulo subtensum; erit quoque, per ea, quæ ad propos. 22. lib. 3. ostendimus, vt quadruplum anguli recti, nempe quatuor rectis, ad angulum in centro, ita quadruplum quadrantis, nimirum tota circumferentia, ad arcum illi angulo subtensum. Quod est propositum. 233. sexti.

IDEM verum est de spatio in centro: hoc est, vt est spatium in centro ad quatuor rectos, ita est arcus subtensus illi spatio ad totam circumferentiam. &c. vt ex demonstratione patet.

SCHOLIVM.

CAETERVM ex theoremate hoc luce clarius colligemus, angulum qui circumferentia alicui insistit, referendum esse ad arcum, qui basis est ipsius anguli, non autem ad arcum, in quo existit. Non enim eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum, si sumantur arcus, in quibus anguli existunt, vt vult Euclides in proposito hoc theoremate. Sint enim circuli æquales ABG, DEF, in quibus anguli ad circumferentiam constituti sint B, E: maior quidem B, minor autem E. Quo posito,

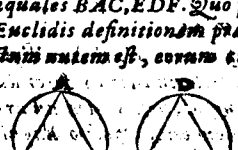


erit arcus AC, maior arcu DF, ex scholio propos. 26. lib. 3. ac proptereà reliquus arcus ABC, minor reliquo arcu DEF. Quare proportio anguli B, ad angulum E, est maioris inæqualitatis, proportio vero arcus ABC, ad arcum DEF, minoris inæqualitatis. Non ergo eadem est proportio anguli ad angulum, quæ arcus ad arcum. Quod si sumamus arcus, super quos anguli ascenderunt, quales sunt arcus AC, DF, cum demum erit angulus B, ad angulum E, vt arcus AC, ad arcum DF, vt recte demonstrauit Euclides. Quocirca cum dicimus angulū esse in segmento, aliud intelligere debemus, quam cū dicimus, angulum insistere segmento, seu arcui. Id quod in expositione definitionis 8. lib. 3. monuimus.

NON obscure quoque ex hoc theoremate demonstrari potest, similitudinē segmentorū in circulis similiū, quæ Euclides definitione 10. lib. 3. definiuit per angulos æquales in ip-

sis

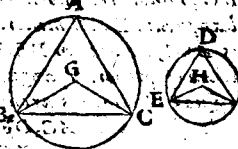
sis segmentis existentes, consistere in eo, quod segmenta, seu circumferentia similes, ad integras circumferentias circulorum eandem habeant proportionem, & proprietas quando segmenta totis circulis commensurabilia sunt; qualis pars est una circumferentia antius sue circumferentia, talis quoque sit alia circumferentia similis totius sua circumferentia; veluti in expositione praedicta definitionis docuimus. Sint enim primum duo circuli aequales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur aequales BAC, DEF, in quibus autem ad centra constituantur aequales BAC, EDF. Quo posito, segmenta BAC, EDF, iuxta Euclidis definitionem praefatam dicentur similia. Manifestum autem est, eorum circumferentias habere eandem proportionem ad integras circulorum circumferentias. Cū enim ob circulorum aequalitatem, aequales BC, EF, quibus anguli aequales insistunt, sint aequales; efficitur reliquas circumferentias BAC, EDF, esse quoque aequales. Quare ad eandem circumferentiam, qua aequales etiam ponuntur, eandem proportionem habebunt; Atque idcirco qua pars est arcus BAC, totius circumferentia ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circumferentia DEFD.



26. ter.

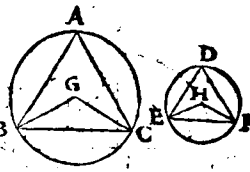
b 7. quinti.

SINT deinde duo circuli inaequales ABC, DEF, in quibus anguli ad circumferentias constituantur aequales BAC, EDF. Quo posito, dicentur segmenta BAC, EDF, ex Euclidis sententia, similia. Dico rursus arcus BAC, EDF, eandem habere proportionem ad integras suas circumferentias. Ducantur enim ad centra G, H, rectae BG, CG, EH, FH. Quoniam igitur anguli A, & D, aequales ponuntur, erunt quoque ad centra anguli



c 20. ter. G, & H, aequales, c cum hi illorum dupli existant. Vbi erunt spatia ad centra aequalia, cum haec quoque sint angulorum ad circumferentias dupla, ex scholio propos. 20. lib. 3. d Quare

d 7. quinti



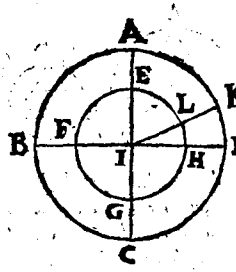
re quatuor recti ad angulũ, vel spatium G, eandem habebunt rationem, quam ad angulum, vel spatium, H. Atqui vt quatuor recti ad angulum, vel spatium G, ita est tota circũferentia ABCA, ad arcum BC: Et vt quatuor recti ad angulum, vel spatiũ H, ita est tota circumferentia DEFD, ad arcum EF, ex coroll. 2. huius propos. 33. [a] Igitur vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BC, ita erit tota circumferentia DEFD, ad arcum EF. Per conuersionem ergo rationis erit quaque, vt tota circumferentia ABCA, ad arcum BAC, ita tota circũferentia DEFD, ad arcum EDF. Et conuertendo, vt arcus BAC, ad totam circumferentiam ABCA, ita arcus EDF, ad totam circumferentiam DEFD. Quocirca qua pars est arcus BAC, totius circumferentiæ ABCA, eadem pars erit arcus EDF, totius circũferentiæ DEFD. Quod est propositũ. [a] 11. dn.

CONSTAT igitur, recte Euclidem vocasse ea circulorũ segmenta similia, in quibus anguli existentes inter se sunt æquales: quandoquidem huiusmodi segmenta eandem habent proportionem ad circulos suos integros.

FACILE ex his demonstrabitur theorema illud, quod & ad calcem cap. 1. in sphæram, & ad propos. 22. lib. 2. sine proportionibus ostendimus, videlicet.

SI duo aut plures circuli ex eodem centro describantur, atque ex centro duæ aut plures rectę lineę ducantur; erunt arcus inter quascunque duas lineas intercepti similes.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, circa idẽ centrũ I, descripti. Si igitur egrediãtur è centro I, duæ rectæ IB, ID, efficiẽtes vnã lineã rectã BD, manifestũ est, arcus BAD, FEH, similes esse, cum sint semicirculi. Rursus si ex I, egrediantur



dua rectæ IA, ID, constituentes angulum rectum AID, perspicuum quoque est, arcus AD, EH, similes esse, cum ex scholio propos. 27. lib. 3. sint Quadrantes suorum circulorum.

EMITTANTVR iam ex I, dua rectæ ID, IK, facientes quæcunque angulum non rectum DIK. Dico adhuc arcus DK, HL, similes esse, hoc est, ita esse arcum DK, ad totam circumferentiam ABCD, vt est arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH. Quoniam enim vt angulus DIK, ad quatuor rectos, ita est ex coroll. huius propos. tum arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, quæ arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH, [a] *erit vt arcus DK, ad totam circumferentiam ABCD, ita arcus HL, ad totam circumferentiam EFGH, ac proinde arcus DK, HL, similes erunt. Quod est propositum.*

a 11. 5.

BREVIVS idem confirmabitur hoc modo. Quoniam arcubus DK, HI, insistunt in centro I, anguli æquales, immo idem; erunt ex scholio propos. 22. lib. 3. arcus DK, HL, similes: ac proinde ad totas circumferentias eandem proportionem habebunt, vt paulo ante ostensum est.

EADEM ratione ostendemus, arcus BAK, FEL, similes esse, id est, habere ad totas circumferentias eandē proportionē.

SED placet etiam hic demonstrare lemma, quod ad propos. 6. lib. 3. Theodosij proposuimus, cum ad multa alia conducat. Illud autem est eiusmodi.

AEQVALES rectæ lineæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus inæquales, maiorque est arcus minoris circuli, quam vt similis sit arcui circuli maioris.

SINT circuli inæquales AB, CD, circa idem centrum E, descripti. Ducantur autem ex E, dua rectæ vtcunq; EA, EB,

secantes.

secantes circulos in A, B, & C, D, punctis; eruntq; arcus AB, CD, similes, vt proxime demonstrauimus. Et quoniam recta EA, EB, secta sunt in C, D, proportionaliter, quod tã EA, EB, quam EC, ED, inter se æquales sint; a erunt ducta recta AB, CD, parallela; atq; ideo triãgula EAB, ECD, ex Coroll. propos. 4. huius lib. similia erunt. b Erit igitur vt EA, ad AB, ita EC, ad CD. Est autem EA, maior quam EC. c Igitur & AB, maior erit quàm CD. Accommodetur ergo ipsi CD, in circulo AB, æqualis BF; eritque ex scholio propos. 28. lib. 3. arcus AB, maior arcu FB. Quare cum arcus CD, arcui AB, similis sit; erit arcus CD, maior, quàm vt similis sit ipsi FB. Æquales igitur rectæ CD, BF, ex circulis inæqualibus AB, CD, arcus inæquales auferunt, maiorque est arcus CD, circuli minoris, quàm vt similis sit arcui FB, circuli maioris. Quod est propositum.

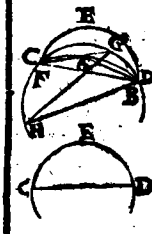
a 2. sexti
b 4. sex.
c 14. qu.

HINC perspicuum est, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem, quam vt similis sit ei, quem ex circulo maiore aufert linea minor. Cum enim recta CD, æqualis ipsi BF, auferat arcum GD, maiorem, quam vt similis sit arcui FB; multo magis linea maior quam CD, auferet maiorem arcum, quam vt similis sit arcui FB, cum illa maiorem arcum abscindat, quam CD, vt in scholio propos. 28. lib. 3. ostendimus.

HAEC autem demonstratio propositum tantum colligit, quando arcus abscissi sunt semicirculo minores, quales sunt BF, CD, vt ex ipsa demonstratione constat. Nam alias non constitueretur angulus in E. centro communi: quod tamen ad demonstrationem requiritur. Verum nihilominus erit, si arcus semicirculo minor circuli minoris maior est, quã vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris, multo maiorem esse arcum semicirculo maiorem circuli minoris, quam vt similis sit arcui semicirculo minori circuli maioris. Quod si quando contingat, rectam CD, ex minori circulo auferre semicirculum, vt quando est diameter circuli; liquido constat, semicirculum minoris circuli maiorem esse, quam vt similis sit arcui se-

micirculo minori circuli maioris; neque opus tunc erit alia demonstratione.

HINC etiam nullo negotio ostendemus, aquales rectas lineas ex circulis inaqualibus auferre arcus simpliciter, et absolute inaquales, ita vt arcus minoris circuli simpliciter maior sit arcu circuli maioris, & non solum maior, quàm vt similis sit. Sint enim rectæ lineæ CD, BF, aquales, auferatque CD, arcum minoris circuli CED, et FB, arcũ circuli maioris FGB. Dico simpliciter arcum CED, minorem esse arcu FGB. Congruente enim rectæ CD, rectæ FB, cadet necessario arcus CED, extra arcũ FGB; atque idcirco arcus CED, maior erit arcu FGB, cum ille huic totum intra se continens, sintque ambo arcus in eandem partẽ caui, atque eadem extrema puncta habeãt, vt vult Archimedes in suppositionibus ante lib. 1. de sphæra & cylindro. Neque vero arcus CED, arcui FGB, congruet, aut intra ipsum cadet. Nam si dicatur congruere, congruet etiam tota circumferentia circuli CED, toti circumferentiæ circuli FGB, atque adeo aquales erunt circuli. quod est absurdum, cum inaquales ponantur. Si vero arcus CED, dicatur cadere intra arcum FGB, eiusmodi est arcus CAD; quoniam vt paulo ante ostendimus, arcus CED, id est, CAD, maior est, quàm vt similis sit arcui FGB; sumatur arcus BFH, arcui CAD, similis, atque ideo maior arcu FGB: Assumpto autem in arcu CAD, puncto A, vtcunque, ducantur rectæ AF, AB, productæque rectæ FA, donec arcum FGB, secet in G, ducantur rectæ GH, GB. (In figura per incuriam recta GB, ducta non est: Igitur studiosus lector eam ducat, oportet.) Itaque quoniam arcus CAD, HFB, similes sunt; erunt anguli CAD, HGB, in illis segmentis existentes aquales. [a] *Quia vero angulus CAD, angulo CGB, maior est, externus interno; & angulus CGB, angulo HGB, maior quoque, totum parte; erit multo maior angulus CAD, angulo HGB, quod est absurdum. Ostensus enim est aqualis. Non ergo arcus CED, cadet intra arcum FGB: sed neque ei congruit, vt demonstratum est. Cadet ergo*



a 16. pri.

extra

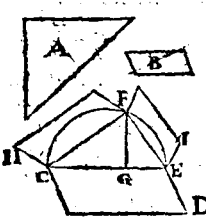
extra; atque ideo maior erit arcus CED, arcu FGB, ve dictum est. Quod erat propositum.

EX quo liquido constat, multo magis maiorem lineam ex circulo minore auferre arcum maiorem simpliciter eo, quem minor linea ex circulo maiore abscindit.

QVONIAM vero Euclides multa dixit de inuentione linearum proportionalium, nihil vero de superficierum, vel planorum proportionalium inuestigatione nobis praescripsit; non abs re me facturum existimo, si nonnulla problemata, atque theoremata, quorum multa circa inuentionem superficierum proportionalium versantur, scitu non iniucunda, loco appendicis, partim ex peritis Geometris, partim ex inuentis propriis, huic sexto libro annectam: quippe qua ex demonstratis ab Euclide facili negotio deducantur. Hinc autem exordium capiemus.

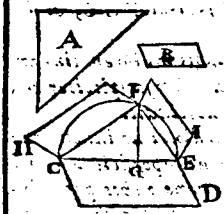
I.

A DATO rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatum, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum.



SIT ex rectilineo A, auferenda tertia pars, quae similis sit, similiterque posita rectilineo B, relinquatur rectilineum eidem B, simile, & similiter positum. a Constituatur rectilineum CD, aequale quidem ipsi A, simile vero, & similiter positum ipsi B; superque vnum eius latus CE, semicirculus describatur CFE. b Deinde ablata parte tertia GE, imperata videlicet, ex CE, agatur GF, ad CE, perpendicularis, connectanturque rectae CF, EF, c super quas constituantur rectilinea FH, FI, similia similiterque posita ipsi CD. Dico igitur factum esse, quod iubetur. d Cum enim angulus CFE, rectus sit, quippe qui in semicirculo existat; e erit rectilineum ÇD, aequale rectili-

a 25. sexti.
b 6 sex.
c 18. sex.
d 31. ter.
e 31. sex.



neis HF, FI, atque adeo, si auferatur rectilineum FI, simile similiterque positum ipsi B, ex rectilineo GD, hoc est, ex aquali A, relinquetur rectilineum HF, simile quoque ipsi B, similiterq; positum. Quod autē rectilineum ablatum FI, sit tertia pars rectilinei CD, sic ostendetur. a Quoniam est, vt recta CG, ad GF, ita recta CF, ad FE; b quod triangula CGF, CFE, sint similia. Habet autem CG, ad GE proportionem duplicatam proportionis CG, ad GF, propterea quod proportionales sunt tres recta CG, GF, GE; ex coroll. propos. 8. huius lib. c Item rectilineum HF, ad rectilineum FI, proportionem quoque habet duplicatam proportionis laterum homologorum GF, FE; Erit vt recta CG, ad GE, ita rectilineum HF, ad rectilineum FI; quandoquidem hæ proportiones duarum æqualium proportionum duplicatæ sunt. Componendo igitur erit, vt CE, ad GE; ita duo rectilinea HF, FI, simul, hoc est, rectilineum CD, quod est illis æquale, ad rectilineum FI: Est autem CE, ipsius GE, tripla, per constructionem. Igitur & rectilineum CD, triplum erit rectilinei FI: Ac propterea hoc illius tertia pars existet. Quod est propositum.

a 4. sexti

b 8. sex.

c 19. vel 20. sexti

QVOD si pars imperata, nempe tertia, simpliciter sit auferenda, fiet id breuissime, hac arte. d Rectilineum datum A, reuocetur ad parallelogrammū GD, æquale; & ex latere BD, auferatur DE, tertia pars imperata; & per E, agatur ipsi BG, parallela EF. Dico DF, tertiam esse partem ipsius DG, hoc est, rectilinei dati A. Cum enim e sit e vt DE, ad DB, ita DF, ad DG: Sit autem per constructionem DE, ipsius DB, pars tertia; erit & DF, ipsius DG, tertia pars. Quod est propositum.

d 45. pri

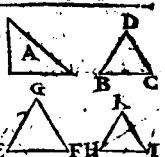
e 1. sexti

II.

DVOBVS datis rectilineis, tertium proportionale inuenire.

SINT data duo rectilinea A, & BCD, quibus inueniendum

dũ sit tertiũ proportionale. a Cõstituatur ipsi A, rectilineũ æquale EFG, simile vero similiterq; positũ ipsi BCD. Deinde lateribus homologis EF, BC, binueniatur tertia linea proportionalis HI; c super quã constituatur rectilineum HIK, simile similiterq; positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, esse tertiũ proportionale. Cum.n. proportionales sint rectæ EF, BC, HI; d erũt & rectilineæ EFG, BCD, HIK, ab illis descripta (cũ sint similia, similiterque posita) proportionalia. Cum ergo EFG, per constructionem, æquale sit ipsi A; erunt & rectilineæ A, BCD, HIK, proportionalia. Quod est propositum.

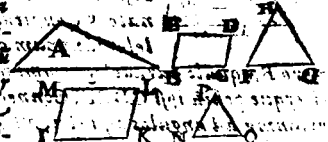


a 25. sex.
b 11. sex.
c 18. sex.
d 22. sexti.

III.

TRIBVS datis rectilineis, quartum proportionale inuenire.

TRIA rectilinea data sint A, BCDE, FGH, quibus quartũ sit inueniendũ proportionale. e Cõstituatur rectilineũ IKLM, æquale quidem ipsi A, simile vero similiterq; positum ipsi BCDE. Tribus deinde rectis IK, BC, FG, f inuenta quarta proportionali NO; g cõstituatur super NO, rectilineũ NOP, ipsi FGH, simile similiterq; positũ. Dico NOP, rectilineũ esse quartũ proportionale. Cũ.n. quatuor rectæ IK, BC, FG, NO, sint proportionales; h erunt & rectilineæ similia similiterque posita ab ipsis descripta IL, BD, FGH, NOP, proportionalia. Cum igitur IL, constructum sit æquale ipsi A; erunt & quatuor rectilineæ A, BD, FGH, NOP, proportionalia. Quod est propositum.



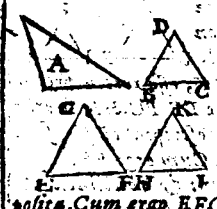
e 25. sexti.
f 12. sex.
g 18. sex.
h 22. sexti.

IIII.

DVOBVS datis rectilineis, medium proportionale inuenire.

SINT duo rectilineæ A, BCD, quibus mediũ inueniendũ

a 18. sex. est proportionale. a Constituatur rectilineum EFG, aequale ipsi A, & simile similiterq; positum ipsi BCD. Duabus deinde rectis EF, BC, b inuenta media proportionali HI; c construatur super HI, rectilineum HIK, simile similiterque positum ipsis EFG, BCD. Dico HIK, medium esse proportionale quaesitum. Cum enim proportionales sint rectae EF, HI, BC, erunt quoque rectilinea ab ipsis descripta EFG, HIK, BCD, proportionalia, cum sint similia similiterque posita. Cum ergo EFG, constructum sit aequale ipsi A, erunt quoque rectilinea A, HIK, BCD, proportionalia; hoc est, erit vt A ad HIK, ita HIK, ad BCD: ac proinde HIK, medium proportionale erit inter A & BCD. Quod est propositum.



b 13. sex.

c 25. sexti.

d 22. sexti.

ALITER. Sint rursus inter rectilinea A, & B, perquirendum medium proportionale. c Constituatur ipsi A, aequale parallelogrammum quodcunque CDEF, ipsi vero B, aequale parallelogrammum EGHI, simile vero similiterque positum ipsi CDEF, Connectanturque haec parallelogramma ad angulos aequales, vt DE, EI, efficiant vnam lineam rectam, ac propterea, per ea, quae ad propos. 15. lib. 1. demonstrauimus, vna quoq; linea recta componatur ex FE, EG; perficiatur q; eorum parallelogrammum KL. Dico rursus, vt prius, EK, nempe EA, medium esse proportionale inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Cum enim similia sint similiterque posita DF, GI; erit vt DE, ad EF, ita GH, ad HI, hoc est, ita EI, ad EG, d quod rectae EI, EG, rectis GH, HI, aequales sint. e Permutando ergo vt DE, ad EI, ita FE, ad EG, f Vt autem DE, ad EI, ita est DF, ad EK, & vt FE, ad EG, ita EK, ad GI. Igitur vt DF, ad EK, ita EK, ad GI; ac proinde EK, medium proportionale erit inter DF, GI, hoc est, inter A, & B. Quod est propositum.

c 45. prim. d 26. sex.

e 34. prim. 1. sexti

f 1. sexti

QVOD etiam in hunc modum confirmari potest. Cum DE, GI, similia sint, similiterque posita, consistent ea circa eandem diametrum. Quare complementa EK, EL, aequalia erunt. Vt autem DF, ad EK, ita est EK, ad GI, g quod vtra-

g 1. sexti

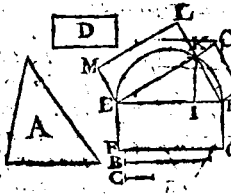
que

que proportio eadem sit proportioni DE, ad EI. Igitur erit, vt DF, ad EK, ita EK, ad GI, Quod est propositum.

V.

DATO rectilineo duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint, similiterque descripta cuicũque rectilineo, habeantq; inter se proportionem propositam quamcũq.

SIT datum rectilineum A, dataque proportio recta B, ad C, oporteatq; constituere duo rectilinea, qua ipsi A, æqualia sint, habeantque proportionem, quam B, & C; ac similia sint similiterque posita sint rectilineo cuiuis D. a *Constituatur rectilineum EFGH, æquale ipsi A, & simile similiterque positũ ipsi D. Diuiso deinde latere eius EH, in I, secũdam proportionẽ B, ad C, ex iis, quæ ad propos. 10. huius lib. demonstrauimus; describatur circa EH, semicirculus EKH, & ex I, ducatur ad EH, perpendicularis IK, connectanturque rectæ EK, KH.* b *Describantur iam super EK, KH, rectilinea EKLM, KHNO, ipsi EG, vel ipsi D, similia, similiterque posita; quæ dico æqualia etiam esse ipsi EG, seu ipsi A, habereque proportionẽ datam B, ad C.* c *Cum enim angulus EKH, in semicirculo existens rectus sit;* d *erunt rectilinea EL, HO, æqualia rectilineo EG, cum sint similia inter se, similiterque descripta.* e *Quoniã vero est, vt EI, ad IK, ita EK, ad KH, eã triangula EIK, EKH, similia sint; Est aũt EI, ad IH, in proportione duplicata proportionis EI, ad IK, quod tres EI, IK, IH, sint, ex corollario propos. 2. huius lib. proportionales.* f *Item EL, ad HO, in proportione duplicata eius, quam habet latus EK, ad latus homologũ KH; erit vt EI, ad IH, hoc est, vt B, ad C, ita EL, ad HO. Dato ergo rectilineo A, exhibuimus duo simul æqualia EL, HO, quæ similia sunt, similiterque posita dato rectilineo D, habentque proportionem inter se datam B, ad C. Quod est propositum.*



a 25. sex

b 18. sex.

c 31. ter.
d 31. sex.

e 4. sex.

f 19. vel 20. sex.

DATO

VI.

DATO rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia, sint similiterq; descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se proportionem datam.

DETVR rectilineum A, & proportio recta B, ad rectam C; oporteatque constituere duo rectilinea ipsi A, æqualia, & similia ipsi D, proposito, similiterq; posita, quorum latera homologa proportionem habeant, quam B, ad C. a *Inuenta ipsis B, C, tertia proportionali E,* b *fiat rectilineū FGH, æquale ipsi A, & simile similiterque positum ipsi D. Diuisoque latere FH, in I, secundum proportionem B, ad E, vt ad propos.* 10. *huius lib. ostendimus;* 1. *sex.* 5. *sex.*

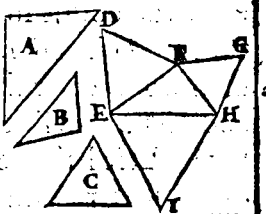
describatur circa FH, semicirculus FKH; & ex I, ducatur ad FH, perpendicularis IK, connectantúrque rectæ FK, HK, & describantur iam super FK, HK, rectilinea FKL, HKM, ipsi FGH, vel ipsi D, similia, similiterque posita. Dico hæc rectilinea æqualia esse ipsi FGH, vel ipsi A, eorumque latera homologa FK, HK, proportionem habere datam rectæ B, ad rectam C. d *Cum enim anguli FKH, in semicirculo rectus sit;* e *erunt rectilinea FKL, HKM, rectilineo FGH, ideoque & rectilineo A, æqualia.* f *Quoniam vero est, vt FI, ad IK, ita FK, ad HK, ob similitudinem triangulorum FIK, FKH; Est autem FI, ad IH, in proportione duplicata proportionis FI, ad IK, (quod tres FI, IK, IH, proportionales sint, ex coroll. propos.* 8. *huius lib.) ac propterea in proportione duplicata proportionis laterum homologorum FK, HK. Item & proportio B, ad E, (æqualis proportioni FI, ad IH, ex constructione) in duplicata est proportione proportionis B, ad C, ex defin. Igitur eadem erit proportio FK, ad HK, quæ B, ad C, quando quidem ipsarum duplicatæ proportiones FI, ad IH, & B, ad E, æquales sunt. Constat ergo propositum.*

d. 1. *ter.* e. 1. *sex.* f. *sexti*

DVO-

VII.

DVOBVS datis rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum cuiuis rectilineo dato.



DVO rectilinea data sint A, & B, quibus æquale sit construendum, simile similiterque positum ipsi C. a *Fiat ipsi A, æquale DEF, simile autem similiterque positū ipsi C. Item ipsi B, æquale constituatur G F H, simile vero eidem C, similiterq; positum. Deinde rectilinea DEF, G F H, ita inter se connectantur, vt latera eorum homologa EF, FH, constituãt angulum EFH, rectum, cui subtendatur recta E H,* b *super quam describatur rectilineum IHE, simile similiterque positum ipsis DEF, GFH, hoc est, ipsi C.* c *Perspicuum autem est EHI, æquale esse duobus DEF, GFH, atque idcirco duobus A, & B. Quod est propositum.*

a 25. sex.

b 18. sex.

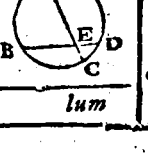
c 31. sex.

BREVIVS. Constituatur parallelogrammum æquale duobus rectilineis A, & B, per ea, quæ ad propos. 45. lib. 1. docuimus. d *Si enim huic parallelogrammo construxerimus æquale rectilineum EHI, quod simile sit similiterque positum alteri dato rectilineo C; Constitutum erit rectilineum EHI, æquale duobus rectilineis A, B, & simile, similiterque positum rectilineo C. Quod erat faciendum.*

d 25. sex

VII.

SI in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuo secuerint: erunt segmenta vnius segmentis alterius reciproca.



IN circulo ABCD, se mutuo secent rectæ AC, BD, in E. Dico segmenta AE, EC, esse reciproca segmentis BE, ED: Hoc est, esse vt AE, ad BE, ita ED, ad EC: Vel vt AE, ad ED, ita BE, ad EC. e *Cum enim rectangu-*

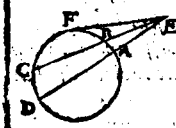
e 25. tert.

lum

lum sub AE, EC, comprehensum æquale sit rectangulo sub
a 14. sex. BE, ED, contento; a erunt latera circa æquales angulos reciproca. Quod est propositum.

I X.

SI extra circulũ sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duę rectæ lineæ circulũ secãtes: Erunt totæ, & segmenta extra circulum reciproca. Quod si ab eodem puncto linea ducatur, quę circulum tãgat; Erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum secet, & eius segmentum exterius.



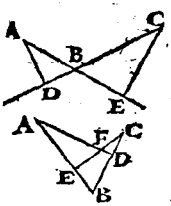
EXTRA circulum ABCD, sumatur punctum E, a quo cadant rectæ EC, ED, secantes circulum in A, & B. Dico rectas EC, EB. esse reciprocas rectis ED, EA: Hoc est, esse, vt EC, ad ED, ita EA, ad EB. Vel vt EC, ad EA, ita ED. ad EB. Ducta enim EF,
b 36. tertij. tangente circulum in F; b erit rectangulum sub EC, EB, quadrato rectæ EF, æquale; Item rectangulum sub ED, EA, eidem quadrato rectæ EF, æquale. Quare & rectangula
c 14. sex. sub EC, EB, & sub ED, EA, æqualia erunt. c Ac propterea
d 36. tertij. latera eorum circa angulos æquales reciproca. d Quoniam autem quadrato rectæ EF, æquale est tam rectangulum sub
e 17. sex. EC, EB, quam rectangulum sub ED, EA, e erunt tam tres rectæ EC, EF, EB, quam tres ED, EF, EA, proportionales, atque adeo EF, media proportionalis inter quamlibet lineã, quæ circulum secet, & segmentum eius exterius. Quod est propositum.

X.

SI duę rectæ lineę sese mutuo secuerint, & à duobus earũ terminis perpendiculares sibi

mutuo

mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarum vna inter vnum terminorum & sectionem, altera vero inter sectionem, & priori lineæ assumptæ perpendicularem interijcitur, alijs duabus eodem modo inclusis reciprocæ.



DVAE recta AB, CB, se mutuo secent in B, & ex terminis A, C, ad ipsas demittantur perpendiculares; AD, quidem ad CB, at vero CE, ad AB; quæ perpendiculares cadent in AB, CB, protractas vltra B, si angulus ABC, fuerit obtusus; in ipsas vero intersum, si idem angulus acutus fuerit, vt figura indicant. Dico rectas AB, BE, (quarum prior interijcitur inter terminum A, & sectionem B; posterior vero inter sectionem B, & perpendicularem CE, quæ nimirum ad ipsam AB, assumptam ducitur) reciprocas esse duabus CB, BD, (quæ inter similes terminos includuntur) hoc est, esse vt AB, ad BC, ita ED, ad BE: Vel vt AB, ad BD, ita BC, ad BE. Cum enim anguli ABD, ADB, trianguli ABD, æquales sint angulis CBE, CEB, trianguli CBE. (Nam ADB, CEB, recti sunt; [a] *& ABD, CBE, ad verticem in priori figura æquales; in posteriori autem vnus & idem angulus) erunt triangula ABD, CBE, æquiangula.* [b] *Quare erit vt AB, ad BD, ita CB, ad BE: Ac propterea permutando quoque, vt AB, ad BC, ita BD, ad BE. Quod est propositum.*

a 15. pri

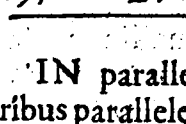
b 4. sex.

PORRO eadem ratione segmenta perpendicularium AD, CE, in posteriori figura se mutuo secantium in F, erunt reciproca. Cum enim triangula AFE, CFD, sint æquiangula; [c] *erit vt AF, ad FE, ita CF, ad FD: Et permutando quoque, vt AF, ad CF, ita FE, ad FD. Quod est propositum.*

c 4. sex.

XI.

IN parallelogrammo, duæ rectæ lateribus parallelę se mutuo secantes, diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogramma proportionalia.

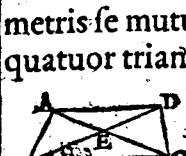


IN parallelogrammo ABCD, duæ rectæ EF, GH, lateribus AD, DC, parallelę se mutuo secent in I. Dico quatuor parallelogramma EG, GF, BI, IC, esse proportionalia. a *Cum enim sit vt EI, ad IF, ita EG, ad GF: Item vt EI, ad IF, ita BI, ad IC;* b *Erit quoque vt EG, ad GF, ita BI, ad IC. Quod est propositum.*

a 1. sex.
b 11. gn

XII.

OMNE quadrilaterum a duabus diametris se mutuo secantibus diuiditur in quatuor triangula proportionalia.



DIVIDANT diametri AC, BD, se mutuo secantes in E, quadrilaterum ABCD. Dico quatuor triangula AED, CED, AEB, CEB, esse proportionalia. c *Erit enim vt AE, ad EC, ita triangulum AED, ad triangulum CED, & triangulum AEB, ad triangulum CEB.* d *Quare vt triangulum AED, ad triangulum CED, ita triangulum AEB, ad triangulum CEB. Eademque ratione ostendes esse, vt BEA, ad DEA, ita BEC, ad DEC;* e *cum vtraque proportio eadem sit proportioni BE, ad ED. Constat ergo propositum.*

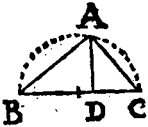
c 1. sex.
d 11. gn
e 1. sex

XIII.

IN triangulo rectangulo, in quo perpendicularis ab angulo recto demissa secat ba-

sim extrema ac media ratione, tria latera sunt continue proportionalia. Et si tria latera triãguli rectanguli sunt continue proportionalia, perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa secat basim extrema ac media ratione.

IN rectangulo triangulo ABC, ex angulo recto A, demissa perpendicularis AD, secet basim BC, in D, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum BD: ac propterea ex theoremate 9. ad propos. 47. lib. 1. latus AB, latere AC, maius. Dico tria latera BC, BA, AC, esse continue proportionalia. Quoniam enim per hypothesin est, vt BC, ad BD, ita BD, ad DC: [a] *erit quadratum ex BD, rectangulo sub BC, CD, aequale. Rursus quia ex coroll. propos. 8 huius lib. AC, media proportionalis est inter BC, CD:* [b] *erit quoque quadratum ex AC, eidem rectangulo, sub BC, CD, aquale. Quare quadrata ex BD, AC, aqualia inter se erunt, ac proinde & recta ipsa aquales erũt. Est autem, ex coroll. propos. 8. huius lib. AB, inter BC, BD, media proportionalis. Igitur eadem AB, media proportionalis erit inter BC, AC: hoc est, erit, vt BC, ad AB, ita AB, ad AC. Quod est propositum.*



[a] 17. sexti.

[b] 17. sex.

SINT deinde tria latera BC, AB, AC, in triangulo rectangulo ABC, continue proportionalia, hoc est, sit BC, ad AB, vt AB, ad AC, demittaturque perpendicularis AD, ad basim BC: Dico BC, sectam esse in D, extrema ac media ratione. Quoniam enim est, vt BC, ad AB, ita AB, ad AC: Est autem vt BC, ad AB, ita quoque AB, ad BD: quod AB, media proportionalis sit inter BC, BD, ex coroll. propos. 8. huius lib. [c] *erit vt AB, ad AC, ita AB, ad BD:* [d] *ac proinde aquales erunt AC, & BD.* [e] *Vt igitur AC, ad CD, ita erit BD, ad CD. Sed vt AC, ad CD, ita est BC, ad AC, quod ex coroll. propos. 8. huius lib. AC, sit media*

[c] 11. quinti.

[d] 9. quinti

[e] 7. quinti.

pro-

proportionalis inter BC, & CD. Igitur erit quoque BC, ad AC, hoc est, ad BD, vt AC, hoc est, vt BD, ad CD: ac propterea BC, in D, secta erit extrema ac media ratione. Quod est propositum.

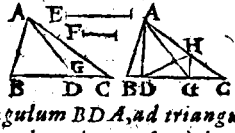
ITA QVE si super datam rectam BC, construendum sit triangulum rectangulum, cuius tria latera continuè proportionalia sint, secunda erit data recta BC, extrema, ac media ratione in D. Descripto deinde semicirculo BAC, circa eandem datam BC, erigenda erit ad BC, perpendicularis DA. iungendaq. rectæ BA, CA. Triangulum enim ABC, rectangulum erit, [b] cum angulus BAC, in semicirculo rectus sit; ac proinde cum perpendicu laris AD, secet basim extrema ac media ratione; tria latera continuè proportionalia erunt, vt proxime demonstratum est.

b 31. tert

XIIII.

A DATO puncto in latere trianguli lineam rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum proportionem datam.

SIT triangulum ABC, oporteatq. à dato puncto D, in eius latere BC, lineam rectam ducere, qua triangulum secet in duo segmenta secundum proportionem datam E, ad F. Diuidatur BC, in G, secundum proportionem E, ad F,



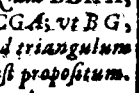
c 1. sex.

eadatq. primò punctum G, in datâ punctum D, vt in prima figura, ducaturq. recta DA. [c] Quoniam igitur est vt BD, ad DC, ita triangulum BDA, ad triangulum CDA, secabit recta DA, triangulum datum secundum proportionem datam BG, ad GC, hoc est, E, ad F. Quod erat faciendum.

CAD AT deinde punctum G, inter C, & D, vt in secunda figura. Ducatur ergo recta DA, cui per G, parallela agatur GH, coniungaturq. recta DH. Dico rectam DH, secare triangulum datum secundum proportionem datam,

hoc est, esse trapezium BDHA, ad triangulum CDH, vt E, ad F, seu vt BG, ad GC. Ducta enim recta GA, [a] *erunt triangula HGA, GHD, aequalia, cum sint super eandem basin GH, & inter easdem parallelas GH, DA. Addito igitur communi triangulo CGH, fient aequalia triangula CGA, CDH:* [b] *Ac proinde triangulum ABC, eandem habebit proportionem ad CGA, & ad CDH,* [c] *Diuidendo igitur, erit vt triangulum BGA, ad triangulum CGA, ita trapezium BDHA, ad triangulum CDH.* [d] *Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur erit & trapezium BDHA, ad triangulum CDH, vt BG, ad GE, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.*

[a] 37. pri.
[b] 7. gn.
[c] 17. gn.
[d] 1. sexti

CADAT tertio punctum G, inter B, & D, 

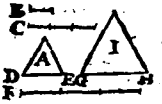
ducaturque recta DA, cui rursus per G, agatur parallela GH. Dico igitur rursus, rectam ductam DH, secare triangulum ABC, secundum proportionem datam E, ad F, hoc est, esse triangulum BDH, ad trapezium CDHA, vt E, ad F. Ducta enim recta GA, [e] *erunt, vt prius, triangula HGA, GHD, aequalia; additoque communi BGH, aequalia fient EGA, BDH.* [f] *Quare erit ABC, ad EGA, vt ad BDH.* [g] *Diuidendo ergo erit vt CGA, ad BGA, ita trapezium CDHA, ad triangulum BDH, & conuertendo, vt BGA, ad CGA, ita BDH, ad trapezium CDHA,* [h] *Est autem BGA, ad CGA, vt BG, ad GC. Igitur & BDH, ad trapezium CDHA, erit vt BG, ad GC, hoc est, vt E, ad F. Quod est propositum.*

[e] 37. pri.
[f] 7. gn.
[g] 17. gn.
[h] 1. sexti

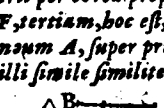
HINC perspicuum est, quonam modo imperata pars ex triangulo sit auferenda per lineam rectã, quæ à quouis dato puncto lateris ducatur. Si enim per rectam lineam à dato puncto ductam diuidatur triangulum secundum proportionem multiplicem, cuius denominator unitate minor sit denominatore partis imperatæ, (vt secundum proportionem triplam, si quarta pars imperetur, &c.) factam erit, quod iubetur, vt manifestum est. Habebit enim tunc totum triangulũ ad segmentum ablatum proportionem multiplicem, cuius denominator æqualis est denominatori partis propositæ, cum priori denominatori proportionis multiplicis assumpta additur unitas, quæ ante deerat.

XV.

DATO rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere, maius, vel minus, secundum proportionem datam.



SIT rectilineum datum A, cui simile similiterque positum sit describendum maius, secundum proportionem datam B, ad C. Tribus rectis B, C, & DE, (sit autem DE, vnum latus rectilinei dati quodcunque) [a] inueniatur 12. *sex.*
quarta proportionalis F. Deinde duabus DE, & F, [b] inueniatur media proportionalis GH; [c] super quam ipsi A, describatur rectilineum I, simile, similiterque positum. Dico I, maius esse quam A, secundum proportionem datam B, ad C. Cum enim proportionales sint tres rectæ DE, GH, & F, erit per coroll. propos. 19. vel 20. libri huius, vt DE, prima ad F, tertiam, hoc est, per constructionem, vt B, ad C, ita rectilineum A, super primam ad rectilineum I, super secundam, illi simile similiterque positum. Quod erat faciendum. 13. *sex.* 18. *sex.*

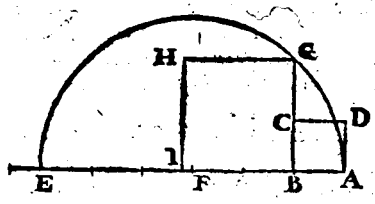


NON secus dato rectilineo A, minus rectilineum I, describemus, illi simile similiterque positum, secundum proportionem datam B, ad C. Veluti in hac figura factum esse cernis. Eadem enim prorsus est constructio, atque demonstratio.

FACILE igitur ex his quadratum quodcunque, vel aliud rectilineum duplicabimus, triplicabimus, quadruplicabimus, &c. Atque aliud constituemus, quod sit illius dimidium, vel tertia pars, vel quarta, vel quinta, &c. seruata nihilominus semper eadem rectilineorum similitudine, quemadmodum quadratorum eadem remanet similitudo. Si namque proportio B, ad C, sumatur vt 1. ad 2. vel 1. ad 3. vel 1. ad 4. &c. Ité vt 2. ad 1. vel 3. ad 1. vel 4. ad 1. &c. reliqua vero perficiantur, vt prius; habebitur rectilineum simile similiterque descriptum, quod propositi rectilinei duplum existet, vel triplum, vel quadruplum, &c. Vel quod dimidium erit, vel tertia pars, vel quarta, &c. eius, quod proponitur.

NON

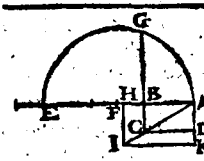
NON videtur autem omittenda praxis Alberti Dureri, qua ipse facile duplicat, triplicat, quadruplicat, &c. quadratum, seu parallelogrammum quodcunque oblatum. Ex hac. n. cõstruemus quoque rectilineum simile, similiterq; descriptum cuicunque rectilineo dato, maius, aut minus, secundum datam proportionem quamcunque. Tametsi autem Albertus huius praxis nullam affert rationem, sed eam simpliciter proponit; non multum tamen eius demonstratio à precedenti differt, vt mox ostendemus.



SIT igitur quadratũ ABCD, quintuplicandũ. Producto latere AB, ad partes B, quantumlibet, sumãtur quinque partes ipsi AB, æquales, a pũcto B, incipiendo, vsque ad E, vt sit BE, quintupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bifariam in F, describatur ex F, ad interuallum FA, vel FE, semicirculus AGE, producaturque latus BC, ad circumferentiam vsque in G. Dico quadratum BGHI, ex BG, descriptum, quintuplũ esse quadrati ABCD. Erit enim per coroll. propos. 13. huius lib. BG, media proportionalis inter EB, BA. Igitur erit vt EB, prima ad BA, tertiam, ita BH, quadratum secunda, ad AC, quadratum tertiæ, ex coroll propos. 20. huius lib. Est autem EB, per constructionem, ipsius AB, quintupla. Igitur & quadratum BH, quadrati AC, quintuplum erit. Quod est propositum.

QVOD si recta BE, sumatur sextupla lateris AB, erit & quadratum rectæ BG, quadrati ABCD, sextuplum: Si autem BE, fuerit tertia pars ipsius AB, erit & quadratum BH, tertia pars quadrati AC. Denique in quacunque proportione sumatur BE, ad AB, eandem habebit quadratum BH, ad quadratum AC.

SIT rursus rectangulũ ABCD, cui inueniendũ sit simile similiterq; positũ, qd̃ duplũ sit ipsius. Ex latere AB, producta sumatur BE, dupla ipsius AB. Diuisa deinde tota AE, bi-



fariam in F; et ex F, descripto semicirculo, vt prius, & producta CB, ad G; erit BG, vnum latus rectanguli quæsiti. Quare si abscindatur AH, æqualis ipsi BG, & per H, agatur ipsi BC, parallela HI, occurrēs diametro AC, protractæ in I, perficiaturque parallelogrammum HK; a erit HK, ipsi BD simile similiterque positum; quod etiam aio duplum esse ipsius BD. Cum enim proportionales sint tres rectæ EB, BG, BA, ex corollario propos. 13. huius lib. Erit vt prius, sicut EB, prima ad BA, tertiam, ita rectangulum HK, supra AH, secundam (sumpta enim fuit AH, ipsi BG, secundæ æqualis) ad rectangulum BD, supra tertiam AB, quod est simile similiterque descriptum. Quod erat propositum.

24. sex i.

EODEM modo, si supra AB, constitutum fuerit quodcunque rectilineum, erit quod ex BG, illi simile, similiterque positum describitur, ipsius duplum. Atque in hunc modum semper eam proportionem habebit rectilineum ex BG, ad rectilineum simile ex AB, quam habere ponetur recta EB, ad rectam BA, ex constructione.

PERSPICVVM autem est, hanc praxim vna cum eius demonstratione a nostra antea tradita non differre, nisi quod hac simul tradit inuentionem lineæ mediæ proportionalis. Hanc enim ob causam Albertus coniungit in rectum, & continuum lineas EB, BA, quæ proportionem habent datam, vt statim, vna operatione, mediam proportionalem obtineas, &c.

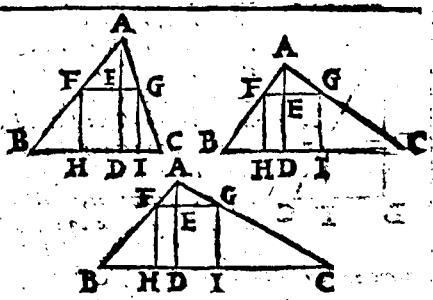
XVI.

IN dato triangulo quocunque quadratum describere.

SIT datum triangulum ABC, acutangulum. Ex angulo quocunque A, ad BC, perpendicularis demittatur AD, quæ intra triangulum cadet, ex scholio propos. 13. lib. 2. Hac autem in E, ita secetur, per eam, quæ in schelio propos. 10. huius libri docuimus, vt eadem sit proportio AE, ad ED, quæ AD, ad BC. Deinde per E, agatur FG, ipsi

BC,

BC, parallela. Postremo ex F, & G, ipsi DE, parallela ducantur FH, GI. Dico FGIH, rectilineum triangulo ABC, inscriptū esse quadratum. Cum. n. FG, ipsi BC, sit parallela; erit vt BD, ad DC, ita FE, ad EG, ex scholio propos. 4. huius lib. & componendo, vt BC, ad DC, ita FG, ad EG. a Sed vt DC, ad AD, ita est EG, ad AE, quod per coroll. propos. 4. huius lib. triangula ADC, AEG. sint similia. b Igitur erit ex aquo, vt BC, ad AD, ita FG, ad AE. Quia vero per constructionem est vt AD, ad BC, ita AE, ad ED, c erit rursus ex aquo, vt BC, ad BC, ita FG, ad ED. Est autem BC, ipsi BC, aqualis; immo eadem. Aequalis igitur est & FG, ipsi ED. d Quare cum FG, ipsi HI; & ED, ipsis EH, GI, aqualis existat; Erunt quatuor lineae FG, GI, IH, HF, aqualia inter se. e Et quia anguli EDH, FHD, duobus rectis aquales sunt: Est autem EDH, per constructionem, rectus; erit & FHD, rectus. Quaelibet ergo ea, quae ad defin. 1. lib. 2. demonstrauimus, & reliqui anguli HFG, FGI, GIH, recti sunt in parallelogrammo FGIH; Ac propterea FI, quadratum est. Quod est propositum.



a 4. sex.

b 22. qn.

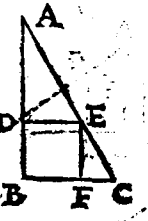
c 22. qn

d 34. pri

e 29. pri

NON secus idem problema absoluemus, si datum triangulum fuerit rectangulum, vel obtusangulum, dūmodo ex angulo recto, vel obtuso perpendicularem demittamus, vt in posterioribus duobus triangulis apparet. Ita enim semper cadet perpendicularis AD, intra triangulum, ex scholio propos. 13. lib. 2.

QVOD si in triangulo rectangulo quadratum describere libeat, ita vt duo eius latera duobus trianguli lateribus circa angulum rectum nitantur; diuidemus perpendicularem



AB, in D, ita vt eadem sit proportio AD ad DB, qua AB, ad BC, & per D, quidem ipsi BC, parallelam ducemus DE; per E, vero ipsi AB, aliam parallelam EF. a Quoniam igitur est, vt BC, ad AB, ita DE, ad AD, quod triangula ABC, ADE, similia sint, per coroll. propos. 4. huius lib. Est autē per cōstructionē, vt AB, ad BC, ita AD, ad DB, b erit ex æquo, vt BC, ad BC, ita DE, ad DB: Est autē BC, sibi ipsi æqualis, immo eadem. Æqualis igitur est & DE, ipsi DB. Quare vt prius, DEFB, quadratum est. Quod est propositum.

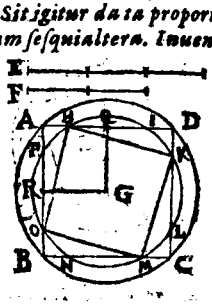
VERVM hoc problemate Commandini multo ingeniosius est id, quod sequitur.

XVII.

INTRA datum quadratum, aliud quadratum describere in data proportione maioris inæqualitatis. Oportet autem datam proportionem dupla non esse maiorem.

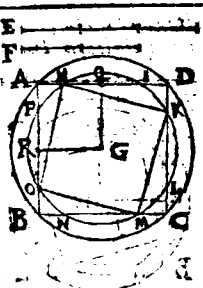
SIT quadratum ABCD, intra quod describendum sit quadratum, aut quod habeat quadratum ABCD, proportionem eandem minoris inæqualitatis, quam recta E, ad rectā F, quæcunque ea sit, dummodo maior non sit, quam dupla. Nam si latera quadrati secentur bifariam, punctaque diuisionum rectis iungantur lineis, inscriptum erit quadratum intra aliud, vt ad finem lib. 4. demonstrauimus, idem eum ex centrum habens. Et quia circulus intra quadratum ABCD, descriptus est quadrato illi inscripto circumscriptus, vt in hac figura perspicuum est, erit quadratum ABCD, illius quadrati inscripti duplum, ex scholio prop. 9. lib. 4. Cum ergo minus quadratum intra quadratum ABCD, describi nequeat, quam illud, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, vt patet: liquido constat quadratum ABCD, ad nullum quadratum inscriptum proportio

nem posse habere duplam maiorem. Sit igitur data proportio E, ad F, minor quam dupla; nimirum sesquialtera. Inuenia tur ex propos. 15. huius scholij quadratum, ad quod habeat datam quadratum ABCD, proportionē datā E, ad F. Eritq; eius semidiameter maior, quam semidiameter quadrati, cuius circulus circumscriptus latera quadrati ABCD, tangit, quod nimirum quadrati ABCD, subduplum est, vt diximus, minor vero semidiametro quadrati ABCD. Igitur si ex centro G, quadrati dati describatur circulus aequalis ei, qui circa inuentum quadratum describitur, secabit is latera quadrati ABCD, in punctis H, I, K, L, M, N, O, P. Iungantur rectæ HK, KM, MO, OH. relictis quatuor punctis I, L, N, P, in medio. Dico HKMO. esse quadratum in circulo HIKLMNOP, descriptum, atque adeo aequale ei, quod inuentum est, ita vt quadratum ABCD, ad quadratum HKMO, habeat datam proportionem, Ead F. Descripto enim circulo circa datum quadratum ABCD, ex centro G, ductisque ex G, ad latera AD, AB, perpendicularibus GQ, GR, a secta erunt tā recta AD, AB, quā recta HI, OP, bifariam in Q, R. Et quia AD, AB, aequales sunt, b aequaliter distabunt a centro G, propterea que & HI, OP, aequaliter ab eodem centro distabunt. c Quare aequales erunt HI, OP, ideoque & earum semisses QH, QI, RO, RP, inter se erunt aequales. Sunt autem & semisses QA, QD, RA, RB, aqualium laterum aequales. Igitur si illa ab his demantur, reliqua erunt aequales HA, ID, PA, OB. Eademque ratione, si ducantur aliæ perpendiculares ad latera BC, CD, ostendētur aequales NB, MC, LC, KD, & inter se, & illis quatuor HA, ID, PA, OB. Item quia aequales sunt HI, OP, si addantur aequales ID, PA, fient tota aequales HD, AO. Atque eadem de causa aequales erunt BM, KC, & inter se, & iliis duabus HD, AO. Itaque quia duo latera AO, AH, duobus lateribus DH, DK, aqualia sunt, angulosque continent aequales, nimirum re-



a 3. ter.
b 14. ter.
c 14. ter.

4.pri.



28.ter
j.

31.ter.

bassa erũt & bases HK, HO, aquales. Eodemq; modo demonstrabuntur KM, MO, aquales & inter se, & duabus HK, HO. Aequilatera ergo est figura HKMO. Dico & rectangulã esse. Cum. n. latera HK, KM, MO, OH, aqualia sint, b erũt & quatuor arcus, quos subtendũt, aquales, ac proinde Quadrantes erunt. Semicirculi ergo sunt OHK, HKM, KMO, MOH, c ac proinde quatuor anguli H, K, M, O, in illis semicirculis recti erunt. Igitur HKMO, quadratũ est, atq; adeo inuento quadrato aquale, cum idem circulus verumq; circumscribat. Circulus enim HKMO. descriptus est ad internallum semidiametri circuli immoto quadrato circumscripti. Quod erat propositũ.

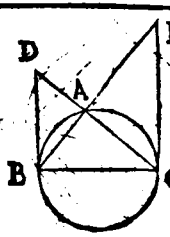
XVIII.

SI ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemq; punctum circumferentiæ duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrẽtes duabus perpendicularibus: erit rectangulum comprehẽsum sub vtralibet secantiũ, & eius segmẽto interiore, quadrato diametri æquale.

HAEC propositio est Cardani lib. 16. de Subtilitate, cap. 1, sicut et quæ sequitur. Vtramque autem demonstrauit Io. Baptista Benedictus. Sit ergo circulus ABC, cuius diameter BC, ad quam in B, G, excitentur duæ perpendiculares BD, CE, ac per assumptum quodvis punctum A, in circumferentia ex eisdem punctis B, C, educta recta BA, CA, secent perpendiculares in E, D. Dico tam rectangulum sub EB, BA, quàm sub DC, CA, quadrato diametri BC, aquale esse. Quoniam enim in triangulo rectangulo BCE, ex angu-

lo re-

lo recto C, demissa est CA, ad basim BE, perpendicularis; a quod angulus EAC, in semicirculo rectus sit: erit ex coroll. propos. 8. huius lib. BC, media proportionalis inter EB, BA. Quare b rectangulum sub extremis EB, BA, aequale erit quadrato mediae BC. Eodemque ratione eidem quadrato aequale erit rectangulum sub DC, CA: propterea quod BC, media quoque proportionalis est inter DC, CA, ex eodem coroll. propos. 8. huius lib. Constat ergo id, quod proponitur.



a 31. ter.

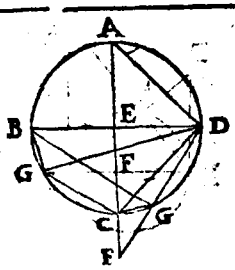
b 17 sexti.

XIX.

SI in circulo duæ diametri se se ad rectos angulos secēt, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrum siue productam, siue non productam: erit rectangulum comprehensum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & secūdam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circumferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum descripto.

IN circulo ABCD, cuius centrum E, secent se ad angulos rectos duæ diametri AC, BD, ducaturque ex puncto D, recta vtcunque DF, secans diametrum AC, in F, & circūferentiam in G. Dico rectangulum sub FD, DG, quadrato intra circulum descripto esse æquale. Ductis enim rectis DC, CG, erunt triangula DCF, DCG, æquiangula inter se.

Nam



Nam angulus CDF, communis est, et angulus DCF, angulo DGC, aequalis; a ac proinde & reliquus DFC, reliquo DCG, aequalis. Quod autem anguli DCF, DGC, aequales sint, ita ostendemus. Si punctum quidem F, est intra circulum; b erunt anguli DCF, DGC, insistentes quadrantibus aequalibus AD, DC, aequales: Si vero punctum F, est extra circulū, ducta recta AD, c erūt anguli DAC, DCA, insistētes quadrantibus aequales: d Sed tam DAC, DGC, e quam DCA, DCF, aequales sunt duobus rectis, Igitur ablatis aequalibus DAC, DCA, reliqui DGC, DCF, aequales quoque erūt. Quam ob rem, cum triangula DCF, DCG, aequiangula sint; f erit vt DF, ad DC, ita DC, ad DG: hoc est; tres linea DF, DC, DG, continue proportionales erunt. g Igitur rectangulum sub extremis DF, DG, aequale est quadrato mediae DC, hoc est, quadrato intra circulum descripto, cum DC, latus sit quadrati circulo inscripti, vt constat ex propos. 6. lib. 4. Quod est propositum.

a 32. pri
b 27. ter
c 27. ter
d 22 ter
e 13. pri
f 4. sexti
g 17. sex.

ALITER. Ducta recta BG, h erit angulus BGD, in semicirculo rectus; atque idcirco duo triangula BGD, DEF, cum habeant angulos rectos BGD, DEF, & angulum BDG, vel EDF, communem, i aequiangula erunt. k Igitur erit, vt DF, ad DE, ita DB, ad DG, l Rectangulum ergo sub DF, DG, aequale erit rectāgulo sub DB, DE. m Sed rectangulo sub DB, DE, aequale est quadratum rectae AD, hoc est, quadratum circulo inscriptum; propterea quod ex coroll. propos. 8. huius lib. AD, media proportionalis est inter DB, DE, vt patet, si ducatur recta AB. n Fiet enim triangulum rectangulum BAD, & ex angulo recto perpendicularis demissa erit AE. Igitur & rectangulum sub DF, DG, eidem quadrato rectae AD, aequale erit. Quod est propositum.

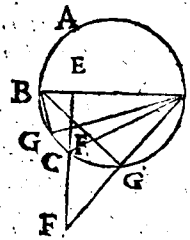
h 31. ter.
i 32. pri
K 4. sex.
l 16. sex.
m 17. sexti.
n 31. ter

VNIVERSALIVS hoc ita proponetur.

SI in circulo à quouis puncto diametri ad diametrum perpendicularis excitetur, ad quam ex alterutro termi-

norum

norum diametri duæ rectæ ducantur, vna ad eius interfectionem in circumferentia, altera vero vt libet, secans circumferentiam in alio puncto: Erit rectangulum sub segmentis huius posterioris lineæ, quorum vnum sit inter prædictum terminum, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferẽtiam, æquale quadrato prioris rectæ inter eundem terminum, & circumferentiam, seu perpendicularem interceptæ.



In circulo enim A B C D, ad diametrum BD, sit perpendicularis EF, secans circumferentiã in C, iunganturque rectæ DC, DF, quarum posterior perpendicularem EF, secet in F, & circumferentiam in G. Dico rectangulam sub DF, DG, æquale esse quadrato DC. Iunctæ enim rectæ BG, erunt triangula BGD, FDE, æquiangula, propter angulos rectos G, E, & communem angulum FDE. a *Igitur erit, vt FD, ad DE, ita BD, ad DG.* b *Quare rectangulum sub FD, DG, rectangulo sub DE, BD, æquale erit:* c *Sed hoc æquale est quadrato DC; quod ex coroll. propos. 8. huius, DC, sit media proportionalis inter BD, DE: quia ducta recta BC,* d *angulus BCD, erit rectus in semicirculo. Igitur & rectangulum sub FD, DG, quadrato DC, æquale erit. Quod est propositum.*

a 4 *sex.*
b 16 *sex.*
c 17 *sex.*
d 31. *ter tij.*

COROLLARIVM.

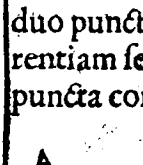
HINC fit, priorem lineam DC, esse mediam proportionalem inter posterioris segmenta FD, DG, quorum vnum est inter terminum D, & perpendicularem, alterum vero inter eundem terminum, & circumferentiam.

XX.

DATO circulo, & duobus punctis siue extra circulum, siue intra, dummodo neu-

trum

trum sit in circumferentia; per ea puncta, duas rectas ducere ad aliquod vnum punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungēs duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiam secant, parallela sit rectæ data duo puncta connectenti.

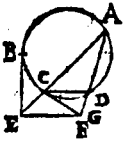


HOC problema non minus acutum quam curiosum in tres propositiones Pappus distribuit: quod nos in vnam redigentes, multo clarius demonstrabimus. Sit ergo circulus AECD, & primum duo data puncta E, F, extra circulum, qua per rectam E F, coniungantur. Si igitur ex E, F, ducende sint rectæ ad aliquod punctum concauæ circumferentiæ, &c. ita agemus. Ex E, ducatur recta E B, tangens circulum in B, & duabus E F, E B, tertia proportionalis inueniatur, cui æqualis sit E G, cadatque primum G, punctum inter E, & F, quod fit, quando E F, maior est, quam E B. Ducta igitur G C, recta circulum tangente in C, versus priorem tangentem E B, ducatur ex E, per C, recta secans concauum peripheriam in A, iungaturque recta A F, secans circumferentiam in D. Dico ductam rectam C D, ipsi E F, parallelam esse. Quoniam enim tres rectæ E F, E B, E G, continue proportionales sunt, a *erit rectangulum sub E F, E G, quadrato ex E B, æquale:* b *Est autem eidem quadrato ex E B, æquale rectangulum sub E A, E C. igitur rectangulum sub E F, E G, rectangulo sub E A, E C, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, G, F, circulus describi poterit.* c *Duo ergo anguli C A F, C G F, oppositi in quadrilatero A C G F, intra eum circulum descripto æquales sunt duobus rectis, ideoque duobus angulis ad G,* d *qui duobus etiam rectis æquales sunt, æquales. Dempto igitur communi C G F, erit reliquus C G E, reliquo A, æqualis:* e *Est autē & angulus D C G, angulo A, in alterno segmento æqualis.*

a 17. sex. b 36. ter c 22. ter d 13. pri. e 32. ter

Igitur

Igitur anguli D C G, C G E, inter se æquales erunt: atque ideo, cum sint alterni, [a] *recta CD, EF, parallelæ erũt. Quod est propositum.* a 27. pri.

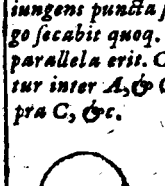


CADAT deinde punctum G, in punctum F. quod accidit, quando EF, ipsi EB, æqualis est. Ducta igitur rursus recta GC, circulum tangente in C, versus priorem tangentem EB, ducatur ex E, per C, recta concauam peripheriam secans in A, iungaturq. recta AF, secãs circumferentiam in D. Dico rursus ductam rectam CD, ipsi EF, esse parallelam. Quoniam enim æquales sunt EB, EF; [b] *eique rectangulum sub AE, EC, quadrato ex EB, æquale: erit quoque idem rectangulum quadrato sub EF, æquale. Quare* [c] *si circa triangulum ACF, circulus describatur, cum eum secet recta EA, recta autem EF, eidem applicetur,* [d] *tanget recta EF, eum circulum.* [e] *Angulus ergo EFC, angulo A, in alterno segmento illius circuli æqualis erit:* [f] *Est autem & angulus FCD, eidem angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur æquales inter se erunt anguli EFC, FCD: qui cum sint alterni,* [g] *erunt rectæ CD, EF, parallelæ. Quod est propositum.* b 36. ter c 5. quar d 37. ter e 32. ter f 32. ter g 27. pri

CADAT tertio punctum G, vltra F. quod contingit, quando EF, minor est quam EB. Facta igitur eadem constructione, quoniam tres rectæ EF, EB, EG, cõtinuè proportionales sunt, [h] *erit rectangulum sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale:* [i] *Est autem eidem quadrato ex EB, æquale rectangulum sub AE, EC. Igitur rectangulum sub EF, EG, hoc est, sub EG, EF, rectangulo sub EA, EC, æquale erit: ac proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta A, C, F, G, circulus describi poterit,* [k] *Duo ergo anguli A, G, in eodem segmento CAGF, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta CF, inter se æquales erunt:* [l] *Est autem angulus GCD, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur idem angulus GCD, angulo G, æqualis erit; ac proinde, cum duo* h 17. sex i 36. ter. k 21. ter. l 32. ter

a 27.pri *hi anguli sint alterni*, a *parallela erunt CD, EF. Quod est propositum.*

QVOD si a principio ex puncto F, ducta fuisset linea circulum tangens, & reliqua fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum A: quia nullum aliud punctum absolvere potest problema. Concipiatur enim mente quodcunque aliud punctum H, prope A, inter A, & D. (si illud punctum H, atramento signaueris, facilior erit demonstratio, quod etiam de aliis punctis H, mente concipiendis intelligatur, nec non de puncto I, in vltima figura.) Igitur recta FH, secabit circulum supra D, at vero recta EH, eundem infra C, secabit; ac propterea recta coniungens puncta sectionum rectam CD, secabit. Producta ergo secabit quoq. illius parallelam EF. Non igitur ipsi EF, parallela erit. Contrarium accidet, si punctum H, sumatur inter A, & C. Nam recta FH, cadet infra D, & EH, supra C, &c.



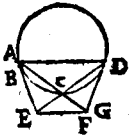
SI vero ex eisdem punctis datis E, F, ducenda sint duæ rectæ ad aliquod punctum conuexa circumferentiæ, quæ producta secent concauam peripheriam in duobus pũctis, ita vt recta per ea transiens sit parallela rectæ puncta E, F, connecteti, hoc modo procedemus. Ducta recta EB, circulum tangente in B, inueniatur duabus rectis EF, EB, tertia proportionalis EG, cadatq. primũ G, punctũ inter E, F. Ducta igitur ex G, recta GD, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur ED, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta eiiciatur ex F, secãs circumferentiam in A. Dico rectam AD, ductam esse rectam EF, parallelam: Quoniam. n. tres rectæ EF, EB, EG, continuæ sunt proportionales, b *erit rectangulũ sub EF, EG, quadrato ex EB, æquale:* c *Est autem & rectangulum sub ED, EC, eidem quadrato ex EB, æquale. Igitur æqualia inter se erunt rectangula sub EF, EG, & sub ED, EC: at proinde ex scholio propos. 36. lib. 3. per quatuor puncta C, D, F, G, circulus describi põt.* d *Duo ergo anguli CDG, & F, in eodẽ segmẽto CDFG, illius circuli, cuius chorda es-*

b 17.sex
c 36.ter
d 21.ter

set

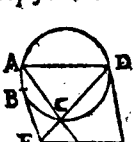
set ducta recta CG, inter se erunt æquales. a Est autem angulus C D G, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus F, angulo A, alterno æqualis erit, b ideoque parallela erunt AD, EF. Quod est propositum. a 32.ter b 27.pri

CADAT deinde punctum G, in F. Ducta igitur rursus recta G D, tangente circulum in D, non tamen versus priorem tangentem EB, ducatur recta E D, secans circumferentiam in C, puncto, per quod recta ducta ex F, secet circumferentiam in A. Dico ductam rectam AD, rectæ EF, parallelam esse. Cum. n. æquales sint EB, EF, (quòd sit EF, ad EB, vt EB, ad EF.) erunt earum quadrata æqualia. Est autem rectangulum sub ED EC, quadrato ex E B, æquale. Igitur & quadrato ex E F. Quia ergo, c si circa triangulum CDF, circulus describatur, recta ED, eum secet, & EF, applicata est, d tanget EF, eum circulum. c Angulus ergo EFC, angulo FDE, in alterno segmento eius circuli æqualis erit: f Est autem angulus FDE, angulo A, in alterno segmento circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus EFC, eidem angulo A, alterno æqualis erit, g Quare parallela erunt AD, EF. Quod est, propositum.



c 5.qua d 37.ter c 32.ter f 32.ter g 27.pri

CADAT tertio punctum G, vltra F. Facta ergo eadem constructione, cum tres rectæ EF, EB, EG, sint continue proportionales, h erit rectangulum sub EF, EG, siue sub EG, EF, æquale quadrato ex E B: i Est autem eidem quadrato æquale rectangulum sub ED, E C. Igitur rectangulum sub E G, E F, rectangulo sub E D, E C, æquale erit, propterea quæ ex scholio propos. 36. lib. 3. circa quatuor puncta C, D, G, F, circulus potest describi. k Duo ergo anguli E D G, CFG, oppositi in quadrilatero CDGF, intra eum circulum descripto æquales erunt duobus rectis, ac preinde æquales duobus angulis ad F, l qui etiã duobus sunt rectis æquales. Dempto ergo communi C F G, reliquus CDG, reliquo CFE, æqualis erit: m Est autem angulus GDC, angulo A, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur &

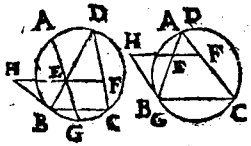


h 17.sex i 36.ter k 22.ter l 3.pri m 32.ter

a 27. pri

angulus CFE, eidem angulo CAD, alterno aequalis erit: atque idcirco parallela erunt AD, EF. Quod est propositum.

QVOD si a principio ex F, duceretur linea circulum tangens, & alia fierent, vt prius, inueniretur idem omnino punctum C. eo quod nullum aliud possit problema conficere. Nam sit aliud punctum H, quodcunq. iuxta C, mente conceptum inter A, & C. Cadet ergo recta FH, infra A, & recta EH, supra D. Recta igitur connectens puncta sectionum secabit rectam AD; ac proinde, vt supra dictum est, ipsi EF, parallela esse non potest. Si punctum H, sumptum foret inter D, & C, caderet FH, recta supra A, & recta EH, infra D, &c.



SED sint iam data puncta E, F, intra circulum ABCD. Ducta recta AG, per E, vtcunque, inuenientur tribus rectis EF, EA, EG, quarta proportionalis, cui aequalis sit EH, (cadet autem necessario punctum H, extra circulum b. Quoniam enim

b 16. sex

rectangulum sub AE, EG, secunda & tertia, aequale est rectangulo sub EF, EH, prima & quarta; describi poterit circulus circa 4. puncta A, F, G, H, ex scholio propos. 35. lib. 3. secans circulum ABCD, in A, G. Cum ergo eius arcus per E, transiens sit intra hunc circulum, erit alter arcus per H, transiens, extra: b quandoquidem circulus circulum in duabus tantum punctis secat, ac proinde circulus per A, F, G, descriptus post puncta A, G, extra circulum cadet; ideoque punctum H, in eo circulo existens extra circulum cadet.) ducaturque HB, circulum tangens in B. Ducta enim recta ex B, per E, secante circumferentiam in D, & ex D, per F, recta secante circumferentiam in C; dico ductam rectam BC, parallelam esse rectae EF. Quia enim

c 10. ter

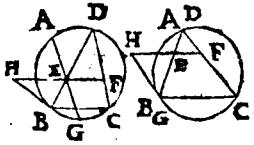
d 16. sex

e 35. ter

ita est EF, ad EA, vt EG, ad EH, & erit rectangulum sub EF, EH, aequale rectangulo sub EA, EG: e Est autem rectangulum sub EA, EG, aequale rectangulo sub ED, EB. Igitur & rectangulum sub EF, EH, eidem rectangulo sub ED, EB,

aqua-

æquale erit: ac propterea ex scholio propos. 35. lib. 3. circa quatuor puncta B, H, D, F, circulus poterit describi. a Quare duo anguli HBD, & DFH, in eodem segmento DFBH, illius circuli, cuius chorda esset ducta recta DH, æquales erũt.



a 21. tertij.

b Est autem angulus HBD, angulo C, in alterno segmento dati circuli ABCD, æqualis. Igitur & angulus DFH, angulo eidem C, æqualis erit, externus interno. c Parallela ergo sunt recta BC, EF. Quod est propositum.

b 32. tertij.

c 28. pri.

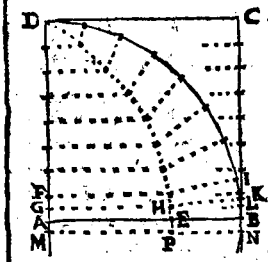
QVOD si contingat, tangentem HB, cadere in punctũ G, non erit ducenda alia linea BD, sed AG, quæ in principio ducta est, propositum concludet, vt perspicuum est in secunda figura.

IAM si solutio problematis inciperet à puncto F, non autem ab E, reperiretur idem omnino punctum D; quod nullo alio problema confici possit. Si enim sumatur quodcunque aliud punctum I, prope D, inter D, & C, cadet recta FI, infra C, & EI, supra B. Recta ergo connectens sectionum puncta rectam BC, secabit. Igitur vt supra dictum est, recta EF, parallela non erit. Si punctum I, sumeretur inter D, & B, caderet recta FI, supra C, & EI, infra B, &c.

DE MIRABILI NATVRA LINEAE cuiusdam inflexæ, per quam & in circulo figura quotlibet laterum æqualium inscribitur, & circulus quadratur, & plura alia scitu iucundissima, perficiuntur.

FORTE superiori anno incidi in librum 4. Pappi Alexandrini, vbi lineam quandam inflexam explicat, quam, vt ait, Diaostratus, & Nicomedes, & nonnulli inniores excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζουσα ab eisdem appellata est, a nobis eadem de causa Quadratrix dicetur. Quamquam autem prædicti auctores

res huiusmodi lineã conẽtur describere per duos motus imaginarios duarũ rectarũ, qua in re principium petunt, vt propterea a Pappo reijciatur, tanquam inutilis, & qua describi non possit; nos tamen eam sine illis motibus Geometrice describemus per inuentionem quotuis punctorum, per qua duci debeat, quemadmodum in descriptionibus conicarum sectionum fieri solet. Hanc inuentionem Epilogi loco huic sexto libro adiungendam esse censuimus; propterea quòd beneficio huius linea problemata Geometrica scitu periucunda, & qua ad hunc vsque diem desiderata sunt, summa facilitate conficiuntur. Id quod ad finem lib. 4. facturos nos hoc loco recepimus, reijctendo tamen pleniorem Quadraturæ tractationem in nostram Geometriam Practicam. Sic ergo descriptio linea Quadratricis fiet.



IN quadrato ABCD, describatur quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores linea Quadratricis, tã semidiameter AD, aquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus supremum CD, deorsum versus equabiliter quoque, ita vt quo tempore pũctum D, circumferentiam DB, vniformi semper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu descendens ad latus AB, perueniat, sit tamen, vt perpetuo lateri AB, sit parallela, & cum lateribus AD, BC, angulos rectos efficiat; secabunt se continue semidiameter in circumferentia DB, circumacta, & recta DC, deorsum lata, in punctis, qua lineam Quadratricem describent, hoc est, per qua linea Quadratrix transibit, cuiusmodi est linea inflexa DE. Sed quia duo isti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam DB, fit, & alter per lineas rectas DA, CB, effici non possunt, nisi proportio habeatur circularis linea ad rectam, merito a Pappo descriptio hac reprehenditur: quippe cum ignota adhuc sit ea proportio, & qua per hanc linea in inuestigãda proponatur. Quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem de-

scribemus

scribemus hoc modo. Arcus B D, in quotuis partes aquales diuidatur, & latus vtrumque AD, BC, in totidem aquales partes. Facillima diuisio erit, si & arcus DB, & vtrumque latus AD, BC, secetur primum bifariam, deinde vtraque semissis iterum bifariam, et singula rursum partes iterum bifariam, atque ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuisiones, eo accuratius Quadratrix linea describetur. Nos ad confusionem vitandam secuimus tam arcum D B, quàm duo latera A D, B C, in 8. partes aquales.

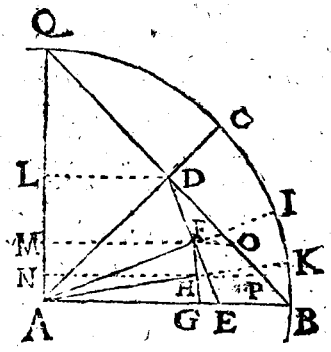
DEINDE bina puncta laterum AD, BC, aqualiter distantia a latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, alia recta occulta ad singula diuisionum puncta Quadrantis DB, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas intersecabunt, prima primam, secunda secundã, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda est, ita vt non sit sinuosa, sed aquabiliter semper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis est linea inflexa D E, secans semidiametrum A B, in E.

SED quia punctum E, in latere A B, inueniri Geometrice non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset; vt illud sine notabili errore, qui scilicet sub sensum cadat, reperiamus, vtemur hoc artificio. Infimam partem AF, lateris AD, si satis exigua non sit, secabimus bifariam continue, donec infima particula sit perexigua: Eodemque modo infimã partem B I, arcus DB, bifariam continue diuidemus, donec tot fiant subdiuisiones, quot in parte AF, facta sunt, vt particula B K, talis pars sit totius arcus D B, qualis pars est AG, totius lateris AD. Particulæ deinde A G, aquales abscindemus BL, BN, A M, ducemusque rectas occultas GL, MN. Ducta vero ex A, centro recta occulta AK, quæ secet GL, in H, puncto, quod accuratissime notetur, sumamus ipsi GH, aqualem M P. Si enim Quadratricem vsque ad H, descriptam continuabimus aquabili atque vniformi extensione vsque ad P, secabit Quadratrix linea latus A B, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter partium rectarum GH, AE, M P, inter se distantium, efficitur, vt ferme sint

æquales, licet Geometrice loquendo, recta AE, semper maior sit aliquantò, quantumuis parum ea recta inter se differant: sed excessus ille circino deprehendi non potest. Id quod etiã in circumferentia circuli contingit. Rectæ namque GL, AB, MN, si parum inter se differant, in circulo omnino æquales indicabuntur, quamuis vere AB, aliquanto maior sit. Itaque si tres illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant distantiam inter se, dubitari non potest, punctum E, in quo Quadratrix linea semidiametrum AB, secat, ab eo, quod vere in Quadratrice ibi exiſtit, non differre: dummodo puncta H, P, exquisitè, & summa adhibita diligentia, inuenta sint.

RECTAM porro AD, vocabimus latus Quadratricis, & rectam AE, eiusdem basin, ac denique punctum A, centrum.

VERVM puncta Quadratricis prope basem certius inueniemus, sine interſectionibus linearum, hoc modo. Ducta chorda BQ, in quadrante secetur in D, bifariã. quod fiet, si ex A, ad C, punctum medium quadrãtis recta ducatur AC. Hæc enim ex scholio propos. 27 lib. 3. rectam BQ, secabit bifariam. Deinde recta AD, sumatur æqualis AE, iunctaque recta DE, secetur bifariam in F, quod etiam fiet, si ex A, ad I, punctum medium arcus BC, ducatur AI. Hæc enim chordam BC, (si duceretur) secaret bifariam, ex scholio propos. 27. lib. 3. ac proinde & rectã DE, ex scholio propos. 4. huius, cum chorda BC, sit parallela; propterea quod latera AB, AC, proportionaliter secantur in D, E, quippe cum tam AB, AC, quam AE, AD, æquales sint. Rursus recta



AF,

AF, sumatur aqualis AG; iunctaque FG, secetur bifariam in H. quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atque hoc modo si recta AH, aqualis sumatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et sic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipsi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas sectiones. [a] Est enim AD, ad DB, perpendicularis; & AE, ad DE; & AH, ad FG, &c. Omnia vero hæc puncta inuenta D, F, H, &c. sunt in Quadratrice. quod ita ostendo. Ductis DL, FM, HN, ipsi AB, parallelis secantibus BD, in O, P; [b] erit vt BD, ad DQ, ita AL, ad LQ; ideoque & AQ, secta erit in L, bifariam. Sectus autem est & arcus BQ, in C, bifariam. Igitur, vt ostensum est, punctum D, est in Quadratrice. Rursus quia DE, secta est bifariam in F; [c] erit quoque DB, secta bifariam in O; [d] ideoque erit vt EF, ad FD, ita BO, ad OD. Sed vt BO, ad OD, ita est AM, ad ML: Et vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC; quod vtrobique properio fit aqualitatis; erit igitur quoque vt AM, ad ML, ita BI, ad IC. Ergo, vt ostendimus, secabunt sese AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio est de alijs punctis hac arte inuentis.

a 3. ter.

b 2. sex

c 2. sex

d 2. sex

ESSE autem hanc lineam inflexam DE, à nobis per puncta descriptam Geometrice eandem, quam Dinostratus & Nicomedes per duos illos motus imaginarios describi concipiebant, perspicuum est. Nam si semidiameter AD, circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur vniformi motu, quo latus DC, deorsum fertur motu quoque vniformi; fit vt, quando semidiameter AD, pertransiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, similem partem lateris DA, CB, percurrerit: Alias aut duo illi motus non essent vniformes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam semidiameter AD, quam latus DC, peruenirent. Cum ergo recta ex centro A, per partes arcus DB, emissa, & linea parallela per partes laterum DA, CB, ducta, abscindant semper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes similes, ex constructione, liquido constat, puncta lineæ inflexæ DE, a nobis Geometrice inuen-

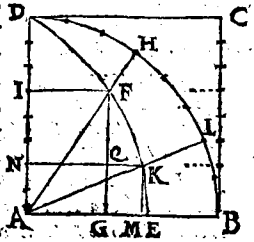
ta à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre. Hac igitur est descriptio lineæ Quadratricis, quæ Geometrica quodammodo appellari poterit, quemadmodum & conicarũ sectionũ descriptiones, quæ per puncta etiã fiũt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cũ tamen magis errori sint obnoxiæ, quam nostra descriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum descriptiones sunt necessariæ, quibus in Quadratricis descriptione opus non est. Quare nisi quis totam sectionum conicarum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Apollonius Pergæus persecutus est, vt propterea Magnus Geometra appellatus sit, reijcere velit tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem factarum existimo, cum sectiones conicas ad demonstrationes adhibuerint præstãtissimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbolæ, ac Parabolæ vsus est in duarum linearum mediarum proportionalium inter quasuis duas rectas inuentione: & Archimedes ipse multa præclare de eisdem sectionibus conicis demonstrauit: ac denique eiusmodi sectiones insignem vsum habent in re Gnomonica, vt ex nostra Gnomonica apparet) admittere omnino cogetur descriptionem hanc nostram Quadratricis lineæ, esse quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutissime inuestigat, per puncta etiam describitur, vt in libro de mensurationibus dicemus. Sed iam lineæ Quadratricis vsum nonnullis propositionibus exponamus.

I.

SI ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis rectæ ducantur vsque ad circumferentiã Quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdẽ pũctis ad basim demittãtur perpẽdiculares, & aliæ rectæ eidẽ basi

paral-

parallelæ: erunt arcus Quadrantis inter semidiametros interiecti perpendicularibus, vel segmentis semidiametri inter parallelas positis, proportionales.



EX centro A, per puncta F, K, in Quadratrice vtcunque accepta ducantur rectæ occurrentes arcui Quadrantis in H, L, demittanturque ad basim AE, perpendicularis FG, KM: & ducantur FI, KN, eidem AE, parallelæ. Dico, vt est totus arcus DB, ad arcum HB, ita esse totum latus DA, ad perpendicularem FG, vel ad segmentum IA, &c. Quia enim eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA, vt ex descriptione lineæ Quadratricis manifestum est, siue ea cogitetur descripta duobus illis motibus proportionalibus Dinostrati, et Nicomedis, siue ea ratione, quam nos præscripsimus, cum in ea semper arcus DH, tot particulas totius arcus DB, complectatur, quot partes totius rectæ DA, recta DI, cõtinet, propterea quod recta AH, IF, se interfecant in pũcto F, Quadratricis: Neque hac similitudo impeditur, etiamsi tam arcus DH, toti arcui DB, quam recta DI, toti lateri DA, sit incommensurabilis, cum perpetuo Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia sua puncta. Si enim recta DI, non est talis pars siue commensurabilis, siue incommensubilis, totius lateris DA, qualis pars est arcus DH, totius arcus DB, si cogitetur talis pars minor quam DI, vel maior, secabit parallelæ ex puncto eius extremo ducta rectam AH, vel supra F, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix describenda est, ac proinde ea non transibit per F. quod est absurdũ & contra hypothesim. Quia, inquam, eadem pars est arcus DH, totius arcus DB, quæ pars est recta DI, totius lateris DA; erit quoque reliquus arcus HB, eadem pars totius ar-

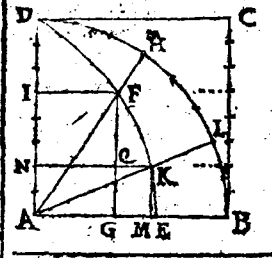
cus DB, qua pars est reliqua recta IA, totius lateris DA, Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum HB, ita totum latus DA, ad rectam IA, hoc est, ad rectam FG, [a] quæ ipsi IA, æqualis est, ac proinde & tam diuidendo erit, vt arcus DH, ad arcum HB, ita recta DI, ad rectam IA, vel FG, quam conuertendo, vt arcus HB, ad arcum DB, ita recta FG, vel IA, ad rectam DA, &c. a 34. pri

EADEM ratione erit, vt arcus DB, ad arcum LB, ita recta DA, ad rectam NA, siue ad KM, [b] quæ ipsi NA, æqualis est: Et vt arcus DL, ad arcum LB, ita recta DN, ad rectam NA, siue KM: Et vt arcus LB, ad arcum DB, ita recta KM, vel NA, ad rectam DA. Quoniam igitur est, vt LB, ad DB, ita KM, ad DA: Et vt DB, ad HB, ita DA, ad FG, erit ex æquo, vt LB, ad HB, ita KM, ad FG: Et conuertendo, vt HB, ad LB, ita FG, ad KM, hoc est, ita IA, ad NA: Et diuidendo vt HL, ad LB, ita IN, ad NA, vel ita FQ, ad QG. b 34. pri

RVRSVS quia est vt DH, ad HB, ita DI, ad IA: Et vt HB, ad LB, ita IA, ad NA, erit ex æquo, vt DH, ad LB, ita DI, ad NA, siue ad KM. Semper ergo arcus inter semidiametros inter cepti perpendicularibus, siue segmentis semidiametri inter parallelas positis proportionales sunt. Quod est propositum.

II.

DATVM arcum circuli in datam proportionem diuidere.



SIT primum arcus HB, in figura antecedente diuidendus in proportionem datam rectæ O, ad rectam P. Ducta ex puncto H, ad centrum A, recta HA, secante Quadratricem in F, ducatur FI, basi AF, parallela. Deinde recta IA, ita secetur in N, ex scholio propos. 10. huius lib. vt sit IN, ad NA, quemadmodum O, ad P,

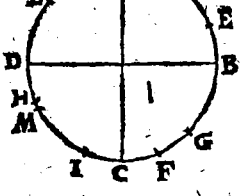
ducta-

ductæque NK, basi AE, parallela secante Quadratricem in K, emittatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico arcum HB, in L, sectum esse in proportionem datam O, ad P. Quoniam enim vt propos. 1. ostendimus, vt HL, ad LE, ita est IN, ad NA: Est autem IN, ad NA, ex constructione, vt O, ad P; a erit quoque HL, ad LB, vt O, ad P. a 11. qn.

DEINDE totus Quadrans DB, secandus sit in proportionem R, ad S. Diuisa semidiametro DA, in I, vt sit DI, ad IA, sicuti R, ad S, ducatur IF, ipsi AE, parallela secans Quadratricē in F. Ducta igitur recta AFH, erit ex propos. 1. DH, ad HB, vt DI, ad IA, hoc est, vt R, ad S.

O 3
P 2
R 3
S 5
T 8
V 2

TERTIO sit idem Quadrans DB, secandus in duos arcus, ita vt totus Quadrans ad vnum eorum habeat proportionem datam T, ad V. Tribus rectis T, V, DA, inueniatur quarta proportionalis, cui æqualis abscindatur AN. Ducta autem NK, ipsi AE, parallela secante Quadratricem in K, ducatur ex A, per K, recta AKL. Dico Quadrantem in L, sectum esse, vt proponitur. Est enim ex propos. 1. DB, ad LB, vt DA, ad NA, hoc est, vt T, ad V.



QVARTO semicirculus ABC, diuidendus sit in datam proportionē, videlicet in triplā. Secetur vterq; Quadrans AB, BC, secundum datam proportionem triplam in E, F, & arcui AE, vel BF, æqualis abscindatur arcus EG. Si igitur ex arcu communi ABC, æqualia demātur, nimirum duo arcus AE, BF, simul, & arcus AG; reliqua æqualia fient, nimirum duo arcus EB, FC, simul, & arcus GC. Et quoniam est, vt AE, ad EB, ita BF, ad FC, b erunt AE, BF, simul ad EB, FC, simul, hoc est, arcus AG, ad arcum GC, vt AE, ad EB: Habet b 12. qn.

autem

autem AE, ad EB, datam proportionem triplam. Igitur & arcus AG, ad arcum GC, eandem proportionem datam habebit.

QVINTO in eãdem proportionem secandus sit arcus AGD, tres Quadrantes continens. Diuisis tribus Quadrantibus AB, BC, CD, in eam proportionem in E, F, H, sumatur arcus EG, ipsi BF, & arcus GI, ipsi CH, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACD, demantur æqualia, nimirum tres arcus AE, BF, CH, simul, & arcus ABI, reliqua fient æqualia, nimirum tres arcus EB, FC, HD, simul, & arcus ID. Et quia tres arcus AE, BF, CH, ad tres arcus EB, FC, HD, eandē habent proportionem; a habebunt omnes tres simul ad omnes tres simul, hoc est, arcus ABI, ad arcum ID, eandem proportionem, quam vnus arcus AE, ad vnum arcum EB, videlicet datam. a 12. qn.

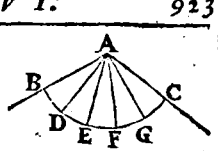
POSTREMO sit eodem modo diuidendus arcus AGK. Diuisis rursus tribus quadrãtibus, & arcu DK, vt proponitur, in E, F, H, L: sumatur arcus EG, arcui BF, & arcus GI, arcui CH, & arcus IM, arcui DL, æqualis. Si igitur ex communi arcu ACK, æqualia auferantur, videlicet quatuor arcus AE, BF, CH, DL, simul, & arcus ABM, reliqua æqualia fient, quatuor scilicet arcus EB, FC, HD, LK, simul, & arcus MK. Et quia quatuor arcus AE, BF, CH, DL, ad quatuor arcus EB, FC, HD, LK, eandem proportionem habent: b habebunt omnes quatuor simul, ad omnes quatuor simul, id est, arcus ABM, ad arcum MK, eandem proportionem, quam vnus AE, ad vnum EB, eam videlicet, quæ data est. Constat ergo id, quod proponitur. b 12. qn.

COROLARIVM.

EX his facile quemuis angulum rectilineum in duos angulos data tam habentes proportionem partiemur, atque adeo & quemlibet arcum, & angulum in quotuis partes æquales.

DESCRIPTO namque arcu ex angulo dato, eoq; arcu diuiso, vt iubetur, si ex angulo ad punctum diuisionis recta ducatur, erit angulus diuisus, vt arcus: c cum sit vt arcus ad arcum, ita angulus ad angulum in centro. c 33 sex.

QVOD

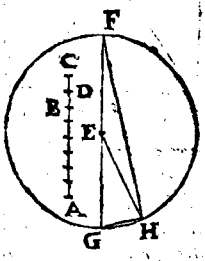


QVOD si arcus, vel angulus secandus sit in quotuis æquales partes, diuidendus erit in duas partes proportionem habentes multiplicem denominatam a numero, qui una vnitate minor sit numero partiũ propositarũ. Vt si arcus BC, vel angulus BAC, diuidendus sit in quinque partes æquales, secandus erit arcus BC, in G. in proportionẽ quadruplam. Nã GC, arcus erit quinta pars arcus BC, cui si quatuor æquales abscindantur GF, FE, ED, DB, diuisus erit arcus BC, in quinque partes æquales. Et si ex A, ducantur rectæ AG, AF, AE, AD, sectus quoque erit angulus BAC, in quinque angulos æquales. Quod est propositum.

III.

ISOSCELES triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam.

SIT data proportio rectæ AB, ad rectam BC. Diuisa BC, in D, bifariã, & descripto ex centro E, circulo quantocunq; FGH, ductaque in eo diametro FG; secetur ita semicircũferentia FHG, in H, vt eadem sit proportio arcus FH, ad arcum HG, quæ rectæ AB, ad rectam BD, iungantur quæ rectæ HE, HG. Dico isosceles trianguli EGH, vtrumque angulorum æqualium ad basin GH, habere ad reliquum angulum GEH, proportionem datam AB, ad BC. Cum enim sit vt AB, ad BD, ita arcus FH, ad arcum HG; Et vt arcus FH, ad arcum HG, a ita angulus FGH, ad angulum GFH; b erit vt AB, ad BD, ita angulus FGH, ad angulum GFH; Vt autem BD, ad BC, ipsius BD, duplam, ita est angulus GFH, ad angulũ GEH, c qui duplus est anguli GEH. Igitur ex æquo erit, vt AB, ad BC, ita angulus EGH, ad angulum GEH. Quod est propositum.



a 33. sex
b 11. qn.
c 10. ter

CORO-

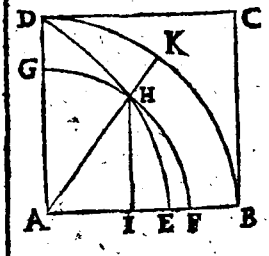
COROLLARIVM.

ITAQVE si constituantur triangula Isoscelia, in quibus anguli æquales ad basim, ad reliquum proportiones habeant tum multiplices æquialteras, tum multiplices ordine, describentur per priora omnes figuræ æquilaterę parium laterum, per posteriora vero figuræ æquilaterę laterum imparium in circulo; vt ad finem lib. 4. ostendimus.

IDEM efficiemus sine huiusmodi triangulis, si totam circumferentiam in tot æquales partes secemus, vt in coroll. proxime antecedente docuimus, quot latera angulosue figura inscribenda habere debet, &c.

IIII.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum sit, erunt arcus Quadrantis, semidiametri, & basis Quadratricis continuè proportionales.



SIT Quadrans, & Quadratrix ex eo descripta, vt supra. Dico arcum BD, semidiametrum DA, & Quadratricis basin AE, continuè esse proportionales, hoc est, esse BD, ad DA, vt DA, ad AE. Siu minus, sit vt BD, ad DA, ita DA, ad AF, maiorè ipsa AE, minoremve, sitque primæ AF, maior quam AE. Descripto ex centro A, quadrante FG, per F, secante Quadratricem in H, ducatur per H, semidiameter AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam DA, vt DA, hoc est, vt AB, ad AF, estque vt AB: semidiameter ad semidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG, (Cum enim sit ex Pappi demonstrationibus, vt & nos in libro de mensurationibus ostendemus, diameter ad diametrum, vt circumferentia circuli ad circumferentiam circuli;

a15.qu. *a erit quoque semidiameter AB, ad semidiametrum AF, vt eadem circumferentia ad*

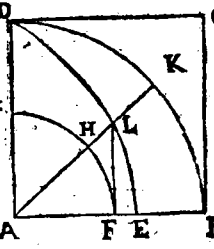
b15.qu. *eandem circumferentiam; b ac proinde etiã vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc est,*

vt arcus

vt arcus BD, ad arcum FG. a Erit quoq. arcus BD, ad rectã DA, vt idẽ arcus BD, ad arcũ FG. b ac propterea æquales erũt recta DA, & arcus FG. Quia vero ex theor. 1. est, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta DA, ad rectam HI; & vt arcus BD, ad arcum BK, ita arcus FG, ad arcũ FH, & arcus BD, BK, arcubus FG, FH, similes sint, vt supra in hoc scholio ostensum est: c Erit quoque recta DA, ad rectã HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo recta DA, ostensa sit arcui FG, æqualis; d erit quoq. recta HI, arcui FH, æqualis. quod est absurdum. Est. n. recta HI, minor arcu FH, cum ea sit semissis chordæ subtendentis arcum duplum arcus FH: (Nam recta AF, e secat eam chordam bifariam, ac proinde & arcũ, ex scholio propos. 27. lib. 3.) chorda autẽ semper suo arcu minor sit. Nõ ergo est arcus BD, ad semidiametrũ DA, vt DA, ad rectam maiorem basi AE, Quadratricis.

a 11. quinti.
b 9 quinti.
c 11. quinti.
d 14. quinti.
e 3. tert.

SIT deinde, si fieri potest, AF, minor quàm AE. Descripto igitur ex centro A, per F, Quadrãte FG, erigatur ex F, ad AE, perpendicularis FL, secans Quadratricem in L, puncto, per quod semidiameter ducatur ALK, secans arcum FG, in H. Ostendemus ergo, vt prius, arcum FG, rectæ DA, æqualem esse: Itã ita esse arcum BD, ad arcũ BK, hoc est, arcũ FG, ad arcum FH, vt est recta DA, ad rectam LF. Quare cũ arcus FG, ostensus sit æqualis rectæ DA, erit quoque arcus FH, æqualis rectæ LF. Quod est absurdum. Est. n. recta LF, maior arcu FH: Nam si ex L, duceretur versus G, alia recta tangens circulum FG, sicut LF, eundem tangit in F, essent hæ tangentes æquales, ex schol. propos. 36. lib. 3. arcusq. inter eas interceptus secaretur bifariã in H, propterea quod ex scholio propos. 37. lib. 3. angulus ab eis comprehensus bifariam diuideretur, f ac proinde & angulus in centro A, si ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: g ideoque & arcus quibus insistunt, æquales forent. Igitur cum ex Archimede ad initium de Sphæra, & Cylindro, dua illa



f 4. vel 8. prem.
g 26. tert.

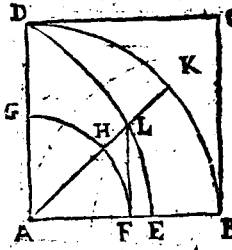
tangen-

tangentes simul maiores sint arcu ab eis comprehenso, erit & earum semissis LF, maior semisse FH, illius arcus. Non est ergo arcus BD, ad semidiametrum DA, vt DA, ad rectam minorem base AE, Quadratricis. Sed neque vt DA, ad maiorem, vt ostensum est. Igitur vt DA, ad ipsam basin AE. Quod est propositum.

COROLLARIVM I.

HINC facile reperiemus rectam cuilibet arcui circuli, cuius quadrans est BD, ex quo Quadratrix descripta est, æqualem.

QVONIAM enim est arcus BD, ad DA, vt DA, ad AE: erit conuertendo quoq. AE, ad DA, vt DA, ad arcũ Quadrãtis BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; [a] *erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraq. proportio sit eadem, qua AE, ad AD.* [b] *Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis BD, aqualis erit: Et si duplicatur, fiet recta aqualis semicircumferentiæ eiusdem circuli; si vero quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ aqualis. Quod si arcui BK, qui minor est Quadrante, inuenienda sit recta aqualis; fiat vt DA, ad perpendicularem LF, ex L, ad AB, demissam, ita tertia illa proportionalis ad aliud, inuenta. erit quarta hæc recta aqualis arcui BK. Nam cum sit ex theor. 1. vt DA, ad perpendicularem LF, ita arcus DB, ad arcum BK;* [c] *erit quoque tertia illa proportionalis ad quartam lineam inuentam, vt arcus DB, ad arcum BK. Est autem tertia illa proportionalis aqualis arcui Quadrãtis DB.* [d] *Igitur & quarta linea inuenta aqualis erit arcui BK. Si vero arcui, qui maior sit quadrante, inuenienda sit recta aqualis, reperiẽda primum erit recta aqualis Quadranti, vel semicirculo, vel tribus Quadrantibus, prout arcus datus includit vnum, aut duos, aut tres quadrantes. Deinde alia recta aqualis reliquo arcui, qui minor Quadrante*



a 11. quinti.
b 9. qn.
c 11. quinti.
d 14. qn.

drante est. Nam dua ha recta coniuncta erunt toti arcui proposito æquales.

COROLLARIVM. II.

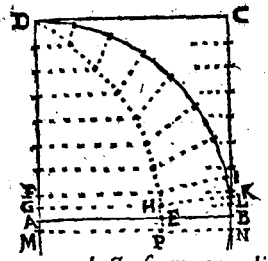
SEQVITVR quoque ex his, si basis Quadratricis AE, statuatur semidiameter alicuius circuli, eius latus AD, Quadranti eiusdem circuli esse æquale, & lineam lateris duplam esse æqualē semicircumferentiæ eiusdem circuli; & lineam quadruplam toti circumferentiæ esse æqualem.

CVM enim vt supra ex Pappo diximus, semidiametri semicircumferentijs circulorum, atq. adeo & quadrantibus sint proportionales; erit vt DA, ad AE, hoc est, vt tertia illa proportionalis ad DA. ita Quadrans BD, ad Quadrantē semidiametri AE. Est autē tertia illa proportionalis æqualis Quadranti BD, vt ostensum est: [a] *Igitur & recta DA, Quadranti semidiametri AE, æqualis erit. Dupla linea ergo ipsius DA, semicircumferentia circuli, cuius semidiameter AE; & quadrupla toti circumferentia erit æqualis.* a 14. quinti.

EADEM ratione, si dua recta eandem proportionem habeant, quam DA, AE, & minor C- - - - - ponatur semidiameter alicuius circuli, ostendetur maior æqualis quadranti illius circuli, &c. Sit enim vt DA, ad AE, ita recta aliqua B, ad rectam C. Eritque permutando, vt DA, ad B, ita AE, ad C. Vt autem AE, ad C, ita est quadrans semidiametri AE, ad quadrantem semidiametri C, vt supra ex Pappo dictum est. Igitur erit quoque vt DA, ad B, ita quadrans semidiametri B, ad quadrantem semidiametri C. Cum ergo DA, æqualis sit, vt ostensum est, quadranti semidiametri AE, [b] *Erit quoque B, æqualis quadranti semidiametri C. Quod est propositum.* b 14. quinti.

SED si lubeat per numeros explorare, quamnā proportionem plus minus habeat ex hoc præclaro inuento circumferentia circuli ad eius diametrum, vel (quod idem est) semicircumferētia ad semidiametrum, [c] *cum sit vt circumferentia ad diametrum, ita semicircumferentia ad semidiametrum, efficiemus id hoc modo. Cogitemus Quadrantē* c 15. quinti.

DB,



DB, in figura, in qua Quadratricem descripsimus, diuisum esse in grad. 90. & singulos gradus in Min. 60. vt totus arcus DB, complectatur 5400. particulas æquales. Si igitur latus DA, concipiamus in totidem æquales particulas diuisum esse, erit parallela ex vltima particula vsque ad Quadratricem educta ferme æqualis basi AE, ob exiguam distantiam illius parallelæ, & basis AE, cum in ea figura parallela quoque GH, auferens AG, particulam sextamdecimam, quæ $\frac{1}{16}$ multo maior est quàm $\frac{1}{5400}$ vix a base AE, superetur: ita vt sine errore notabili eam parallelam pro base accipere possimus. Quia vero vltima illa particula lateris DA, est sinus arcus Min. 1. & parallela illa sinus complementi, nimirum arcus grad. 89. Min. 59. vt constat, si ponatur AG, vltima particula, & arcus BK, vltimum Minutum, ducaturq. recta AH. Nam GH, erit sinus anguli GAH, grad. 89. Min. 59. ac proinde AG, sinus anguli AHG, Min. 1. posito sinu toto AH, vt in tractatione Sinuum ostendimus. Si igitur sinus totus AH, statuatur 10000000. (ita enim exquisitius proportio optata inuenietur, quam si sinus totus ponatur tantum 100000. cum in hoc sinus grad. 89. Min. 59. a sinu toto non differat.) erit AG, 2909. & GH, 9999999. at totum latus DA, earundem partium erit 15708000. vt constat, si 5400. particulæ lateris DA, ducantur in vnam AG, quam diximus esse 2909. Duplum ergo lateris DA, erit 31417200. Et quoniã ex coroll. 2. huius propos. 4. duplum lateris DA, æquale est semicircumferentiæ, cuius semidiameter AE; erit proportio semicircumferentiæ illius ad semidiametrum AE, eadem fere, quæ numeri 31417200. ad 9999999. denominata à $3\frac{1}{9}\frac{4}{9}\frac{1}{9}\frac{5}{9}\frac{9}{9}\frac{2}{9}\frac{6}{9}$ *hoc est, in minimis terminis, a* $3\frac{1}{7}$ *qua proportio minor est, quam tripla sesquiseptima, siue tripla superdecupartiens septuagesimas maior autẽ, quam tripla superdecupartiens septuagesimas*

pri-

primas; inter quas duas proportiones vera proportio circumferẽtia ad diametrum consistit, vt ab Archimede demonstratum est.

ITAQVE vt recta linea circumferentia circuli inueniatur æqualis, satis est punctum E, inuenire, etiamsi tota linea Quadratrix non sit descripta. Vt autem arcus, vel angulus in datam proportionem secetur, non indigemus puncto E, vt perspicuum est.

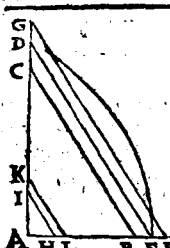
V.

DATO circulo quadratum æquale constituere.

QVONIAM Archimedes demonstrauit circulum quemcunque æqualem esse triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum semidiametro circuli, alterum vero circumferentiæ eiusdem æquale est; atque hinc nos prop. 5. 4. figurarum Isoperimetrarum in commentarijs in sphæram ostendimus, eundem circulum rectangulo comprehenso sub semidiametro, & semicircumferentia, æqualem esse: si ex coroll. precedentis propos. inueniatur linea recta æqualis semicircumferentiæ dati circuli, & rectangulo contento sub illa recta, & semidiametro a constituatur quadratum æquale, erit idem hoc quadratum dato circulo æquale. a 14. sec.

INVENIETVR autem recta æqualis semicircumferentiæ, vel Quadranti, vel toti circumferentiæ, b si fiat vt basis Quadratricis descripta ad eiusdem lati⟨tudi⟩nis, ita semidiameter dati circuli ad aliud. Inuenta enim quarta linea æqualis erit Quadranti circuli, vt in coroll. 2. precedentis propos. diximus, atque adeo duplicata efficiet lineam semicircumferentiæ æqualem, quadruplicata autem rectam toti circumferentiæ æqualem exhibebit. b 12. sex

VERVM vt expeditius quilibet circulus possit quadrari, construenda erunt duæ figuræ quadrãdis circulis aptissimæ, hoc modo. Constituatur angulus rectus DAE, sitque AD, æqualis semidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix descripta est, & AE, basi eiusdem Quadratricis æqualis; Vel ex centro A, noua Quadratrix describatur DE, cuius latus

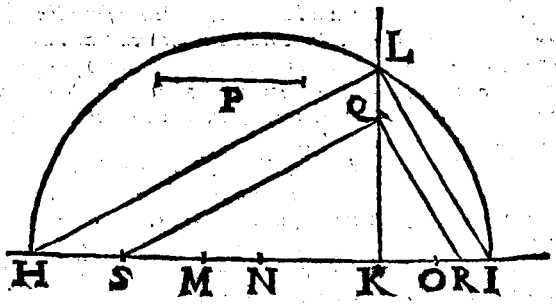


AD, & basis AE. Ducta autem recta DE, constructum erit vnum instrumentum circulis quadrandis aptissimum. Si enim circuli quadrandi semidiameter aqualis sit rectæ AE, erit recta AD, circumferentiæ Quadrantis eiusdem circuli aqualis, vt ex coroll. 2. antecedentis propos. liquet. Si autem semidiameter minor sit, quam AE, abscindemus ei aqualē AB, parallēlamque ipsi DE, agemus BC. Si denique semidiameter sit maior, quā AE, abscindemus ei aqualem AF, ex AE, producta, & per F, ipsi DE, parallelam agemus FG. Erit enim ex coroll. 2. præcedentis propos. recta AC, aqualis circumferentiæ Quadrantis, cuius semidiameter AB: Recta vero AG, circumferentiæ Quadrantis aqualis erit, cuius semidiameter AF: a *propterea quod est, vt AE, ad AD, ita tam AB, ad AC, quam AF, ad AG.*

a 2. uel 4 sexti.

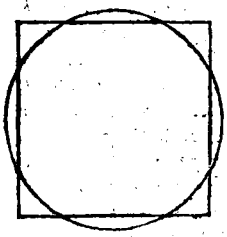
DEINDE ducta recta HI, cuiuscunque longitudinis, excitetur ad eam perpendicularis quantacunque KL; parata tumque erit alterum instrumentum quadrandis circulis accommodatum.

PER duo hæc instrumenta nullo negotio quemcunque circulum quadrabimus hac ratione. Sit quadrandus circulus, cuius semidiametro in priori instrumento aqualis sit recta AB, & per E, ipsi DE, parallela agatur BC. In posteriori



vero

vero instrumento sumantur duæ KM, MH, ipsi AC, æquales, & recta KI, semidiametro AB, æqualis. Diuisa autem tota recta HI, bifariam in N, describatur ex N, ad interuallum NH, vel NI, semicirculus secans perpendicularem KL, in L. Dico quadratum ex KL, circulo dato, cuius semidiameter AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori, æquale esse. Quoniam enim KL, media proportionalis est inter KH, KI, ex scholio propos. 2 3. huius lib. a erit quadratum ex KL, rectangulo sub KH, KI, æquale. Cum ergo hoc rectangulum circulo dato sit æquale, vt ad initiũ huius propos. diximus, quod KH, sit æqualis semicircumferentiæ, & KI, semidiametro; erit quoque idem quadratum ex KL, dato circulo, cuius semidiameter AB, vel KI, æquale. Si igitur quadratum rectæ KL, describatur, et ex eius centro ad interuallum AB, in priori instrumento, vel KI, in posteriori circulus describatur, habebitur quadratum æquale circulo, vt in apposita figura apparet. a 17. sep.



CAETERVM diuisio rectæ HI, in posteriori instrumento in duas partes æquales facile sic fiet. Diuisa semidiametro KI, bifariam in O, (hæc enim quia minor est, quam HI, facile bifariam secabitur.) accipiatur recta KO, æqualis MN. Nam N, punctum erit medium rectæ HI. Cum enim æquales sint MN, OI; addita communi NO, erit NI, ipsi MO, æqualis: Est autem MO, ipsi HN, æqualis. (quia enim æquales sunt HM, MK; additis æqualibus MN, KO, totæ æquales fient HN, MO) Igitur & NI, ipsi HN, æqualis erit.

VI.

DATO quadrato circulum æqualem describere.

SIT datum quadratum, cuius latus P. Huic in posteriori instrumento antecedentis propos. ex perpendiculari K L, abscindatur aequalis K Q. Proposito autem quouis circulo, cuius semidiameter K I, inueniatur per antecedentem propos. si quadratum aquale, cuius latus K L. Deinde ducta recta L I, agatur ei parallela Q R. Dico circulum, cuius semidiameter K R, aequalem esse quadrato, cuius latus K Q, vel P. Inuenta namque per propos. antecedentem recta K H, qua semicircumferentia circuli, cuius semidiameter K I, sit aequalis, ductaque recta L H, agatur ei parallela Q S. Quoniam igitur, ob triangulorum similitudinem, est vt H K, ad K L, ita S K, ad K Q; & vt K L, ad K I, ita K Q, ad K R: erit ex aquo, vt H K, ad K I, ita S K, ad K R. Cum ergo H K, aequalis sit semicircumferentia circuli, cuius semidiameter K I, erit quoque ex coroll. 2. propos. 4. S K, aequalis semicircumferentia circuli, cuius semidiameter K R. Quia vero K Q, ex coroll. propos. 8. huius lib. media proportionalis est inter S K, K R, quod angulus R Q S, rectus

a 29. pri. *sit* a *quippe cum eius partes R Q K, S Q K, paribus I L K,*

b 31. ter *H L K, recti anguli H L I, aequales sint:* (*Nam* b *angulus H L I, rectus est, cum sit in semicirculo, vt patet ex praxi antecedentis propos. qua K L, media proportionalis inter H K, K I, reperitur.*) c *erit quadratum ex K Q, aequale rectangulo sub S K, K R, hoc est, circulo, cuius semidiameter K R, hoc est, circulus semidiametri K R, aequalis est quadrato lateris K Q, vel P. Quod est propositum.*

c 17. sex

COROLLARIVM.

EX his, quæ demonstrata sunt, construemus circulum euicunque figuræ rectilineæ æqualem & contra, cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem constituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque similis sit. Nam si datæ figuræ rectilineæ d describamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem constituamus, ex propos. 6. erit hic idem circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis.

d 14. sex

RVRSVS si per propos. 5. dato circulo quadratum æquale constituamus, huic autem quadrato e constituamus figuram rectilineã æqualem, & similem alteri datæ rectilineæ figuræ, erit eadem hæc figura rectilinea constituta, dato circulo æqualis. Quod est propositum.

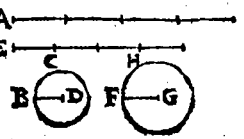
e 25. sex

DA-

VII.

DATAE rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

QVO pacto recta linea reperiatur circumferentia dati circuli æqualis, docuimus propos. 5. nũc autem, vt vicissim recta data linea circumferentia circuli æqualis inueniatur, ita agendum erit. Sit data recta A, cui circumferentia æqualis inuenienda est. Descripto quouis circulo B C, ex centro D, inueniatur ei recta æqualis E. quod facile ita fiet. In priori instrumento propos. 5. sumatur AH, æqualis semidiametro BD, descripti circuli, & per H, agatur ipsi DE, parallela H I. Nam AI, quadruplicata dabit rectam E, circumferentiæ circuli BC, æqualem, vt propos. 5. diximus. Deinde tribus rectis E, A, BD, inueniatur quarta proportionalis FG, atque ex G, ad interuallum GF, circulus describatur F H. Dico eius circumferentiam data recta A, æqualem esse. Cum enim sit, vt E, ad A, ita BD, ad FG; hoc est, [a] ita tota diameter circuli BC, ad totam diametrum circuli F H: Sit autem vt diameter ad diametrum, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH, vt Pappus demonstrauit: [b] erit quoque vt E. ad A, ita circumferentia BC, ad circumferentiam FH. Cum ergo E, facta sit æqualis circumferentiæ B C; [c] erit & recta A, circumferentiæ FH, æqualis, hoc est, circumferentiæ circuli FH, inuẽta est data recta A, æqualis. Quod est propositum.



a 15. Qn

b 11. Qn

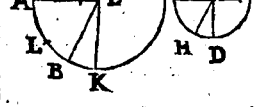
c 14. Qn

ALITER, & facilius. Quarta parti rectæ data A, accipiatur æqualis A K, in priori instrumento propos. 5. & per K, agatur K L, ipsi D E, parallela. Nam circumferentia circuli, cuius semidiameter AL, æqualis erit datæ rectæ A; propterea qđ eius circũferẽtia quadrans æqualis est rectæ AK, quartæ parti datæ rectæ A, vt propos. 5. declarauimus.

VIII.

DATIS duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum, ex altero arcum æqualem abscindere. Oportet autem arcum in maiore circulo datum non esse maiorem circumferentia minoris circuli.

SINT duo circuli inæquales AB, CD, quorum centra E, F, & semidiametri AE, CF, sitque AB, maior, & CD, minor, Datus autem primum sit in minori circulo arcus CD, cui æqualis abscindendus sit ex maiore. Quoniam circulus AB, circulo CD, maior est, erit & semidiameter AE, semidiametro CF, maior. Abscindatur ergo AG, ipsi CF, æqualis, secenturque arcus CD, ita in H, ex propos. 2. vt eadem sit proportio arcus CH, ad arcum HD. quæ rectæ AG, ad rectam GE; arcuique CH, similis auferatur arcus AB. quod facile fiet, si ducta recta FH, angulo CFH, æqualis fiat angulus AEB. Dico arcum AB, dato arcui CD, æqualem esse. Quoniam enim est, vt AG, ad GE, ita arcus CH, ad arcum HD. Et conuertendo, vt EG, ad AG, ita arcus DH, ad arcum CH; erit componendo quoque AE, ad AG, hoc est, ad CF, ipsi AG, æqualem, vt arcus CD, ad arcum CH: Est autem, vt AE, semidiameter ad semidiametrum CF, a hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, vt Pappus demonstrauit,



15. 5n

hoc est, ita arcus AB, ad similem arcum CH. b Igitur erit quoque vt arcus CD, ad arcum CH, ita arcus AB, ad eundem arcum CH; ac proinde arcus CD, AB, c æquales inter se erunt. Quod est propositum.

b 11. 5n

c 9. 5n.

DATVS deinde sit in maiore circulo arcus AB, non maior, quam circumferentia circuli CD, minoris, ex quo ar-

cui AB, æqualis arcus abscindendus est. Quoniam circulus AB, maior est circulo CD, erit & semidiametey AE, semidiametro CF, maior. Producta ergo CF, ad I, vt CI, ipsi AE, sit æqualis; secetur per propos. 2. arcus AB, in L, vt eadem sit proportio AB, ad BL, quæ CF, ad FI; arcuique BL, sumatur æqualis arcus BK, ac toti arcui AK, similis auferatur CD. quod facile fiet, si ducta recta EK, angulo AEK, angulus CFD, æqualis fiat. Dico arcum CD, arcui dato AB, æqualē esse. Quoniam enim est, vt CF, ad FI, ita arcus AB, ad arcū BL, id est, ad arcum BK, ipsi BL, æqualem; erit componendo quoque, vt CI, ad FI, ita arcus AK, ad arcum BK: Et per conuersionem rationis, vt CI, ad CF, hoc est, vt AE, ad CF, ita arcus AK, ad arcum AB: Est autem, vt semidiameter AE, ad semidiametrum CF, a hoc est, vt tota diameter ad totam diametrum, ita, ex demonstratis a Pappo, circumferentia circuli AB, ad circumferentiam circuli CD, id est, ita arcus AK, ad arcum similem CD. b Igitur erit etiam, vt arcus AK, ad arcum AB, ita idem arcus AK, ad arcum CD, propterea que arcus AB, CD, c æquales erunt inter se. Quod est propositum. a 15. qn. b 11. qn. c 9. quin

BREVIVS. Arcui CD, reperiatur æqualis recta, per coroll. 1. propos. 4. Quadratricis; & huic rectæ æqualis arcus AB, vt in sequenti coroll. 1. dicetur. Eodem pacto arcui AB, reperiatur recta æqualis, & huic rectæ æqualis arcus CD: factumque erit, quod iubetur.

COROLLARIVM. I.

EX his, quæ demonstrata sunt, manifestum est, cuiuis datæ rectæ abscindi posse ex circulo quouis, cuius circumferentia minor non sit, quam recta data, circumferentiam æqualem, quemadmodum supra ostensum est in coroll. 1. propos. 4. datæ cuilibet circumferentiæ inueniri posse rectam æqualem: hoc modo. Inueniatur per ea, quæ paulo ante in coroll. 1. propos. 4. ostendimus, recta linea quadranti dati circuli æqualis; & si quidem hæc linea inuenta æqualis fuerit rectę lineæ datæ, erit circumferentia quadrantis datæ rectæ lineæ æqualis.

SI vero illa recta quadranti circuli inuenta æqualis, fuerit maior, quam data recta linea; secetur quadrantis circumferentia in duas partes, ex propos. 2. ita vt quadrans ad unam partem habeat eandem proportionem, quam inuenta recta linea ad lineam rectam datam. Pars enim illa quadrantis datæ rectæ lineæ erit æqualis. Nā

cum sit, vt inuenta recta ad datam rectam, ita quadrans ad illum
a 14. 4n. arcum abscissum; sit autem recta inuenta quadranti æqualis, a erit quoque data linea recta arcui abscisso æqualis.

SI denique recta illa inuenta æqualis quadranti, fuerit minor, quam recta linea data; sumatur illius dupla, quę nimirum circumferentiæ semicirculi sit æqualis. Nam si hæc æqualis fuerit datæ rectæ lineæ, erit circumferētia semicirculi eidem datæ rectæ æqualis.

SI autem dupla illa recta linea fuerit maior, quam data linea recta, secetur semicirculi circumferentia in duos arcus, ita vt semicircumferentia ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quā dupla illa recta linea ad datā rectam. quod quidē facile fiet, si datæ rectæ ex dupla illa linea recta abscindatur æqualis, & semicircumferentia secetur, per propos. 2. vt secta est recta illa dupla. Erit enim componendo, vt tota illa recta dupla ad partem abscissam, hoc est, ad datam rectam, ita tota semicircumferentia ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ æqualis erit. Cū enim sit, vt dupla illa recta ad rectam datam, ita semicircumferentia ad eum arcum; sit au-
b 14. 4n. tem recta illa dupla æqualis semicircumferentiæ; b erit quoque data recta illi arcui æqualis.

SI denique dupla illa recta linea fuerit minor, quam data linea recta, addatur ei prior linea inuenta, quæ nimirum quadranti circuli est æqualis, vt tota recta composita æqualis sit circumferentiæ trium quadrantum, & tripla prioris lineæ inuentæ. Nam si hęc linea tripla fuerit datæ rectæ æqualis; erit arcus trium quadrantum eidem datę rectæ æqualis.

SI vero tripla illa linea recta fuerit maior, quam recta linea data, secetur circumferentia trium quadrantum in duos arcus, ex propos. 2. ita vt ad vnum eorum eandem habeat proportionem, quam tripla illa recta ad rectā datam. quod facile etiam fiet, si datæ rectæ ex tripla illa linea recta abscindatur recta æqualis, & circumferentia trium quadrantum secetur, per propos. 2. vt recta illa tripla secta est. Nam componendo erit, vt tota illa recta tripla ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum. Arcus enim ille datę rectæ lineæ erit æqualis. Quoniam enim est, vt tripla illa recta ad rectam datā, ita circumferentia trium quadrantum ad arcum abscissum; estque
c 14. 4n. tripla illa recta circumferentię trium quadrantum æqualis, c erit quoque data linea recta æqualis illi arcui abscisso.

DENIQVE si tripla illa linea recta fuerit minor, quam data recta linea, addatur ei rursus prior linea inuenta quadranti æqualis, vt tota recta composita fiat æqualis toti circumferentiæ circuli, & prioris lineæ inuentæ quadrupla. Si namque linea hæc quadrupla fuerit æqualis datæ rectæ lineæ, erit tota circumferentia dati circuli datæ lineæ rectæ æqualis.

AT vero si illa linea quadrupla maior fuerit, quàm data recta linea, (minor esse non potest: alioquin data recta esset maior, quam circumferentia dati circuli. quod est contra hypothesin) secetur tota circumferentia in duos arcus, ex propos. 2. vt ad vnum eorum eandem

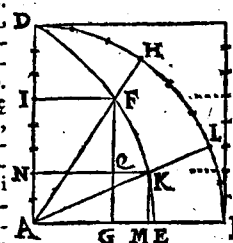
dem

dem proportionem habeat, quam quadrupla illa linea ad datam rectam. quod facile etiam fiet, si ex quadrupla illa recta auferatur recta æqualis datæ rectæ, & tota circumferentia circuli secetur, vt quadrupla illa recta est secta. Erit namque componendo, vt tota illa quadrupla recta ad partem abscissam, id est, ad datam rectam, ita tota circumferentia circuli ad arcum abscissum. Arcus enim ille datæ rectæ erit æqualis. Cum enim sit, vt quadrupla illa linea ad rectam lineam datam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum; a14.6
sit autem illa linea quadrupla toti circumferentiæ æqualis; a erit quoque data recta linea arcui abscisso æqualis.

ALITER, & breuius. Inuenta ex coroll. 1. propos. 4. Quadratricis, vel ex propos. 5. eiusdem, recta æquali circumferentiæ dati circuli, abscindatur ex ea datę rectæ lineæ æqualis, & tota circumferentia per propos. 2. secetur, vt secta est inuenta illa recta, in duas partes. Nam componendo erit, vt tota illa recta ad eius partem ablatam, hoc est, ad datam rectam, ita tota circumferentia ad arcum abscissum. Cum ergo tota illa recta sit æqualis toti circumferentiæ, b erit quoque data recta arcui abscisso æqualis. Quod est b14.6
propositum.

COROLLARIVM II.

EX ijs quoque, quæ dicta sunt, inferri potest, tam arcus, quã angulos rectilineos reperiri incommensurabiles inter se. Sit enim arcus HB, & angulus rectilineus HAB. Dico tam arcum HB, secari posse in duos arcus inter se incommensurabiles, quam angulum HAB, in duos angulos incommensurabiles inter se. Descripta enim Quadratrice DE, quę rectam HA, secet in F, ducatur per F, basi AE, parallela FI. Deinde inuentis duabus rectis inter se incommensurabilibus, vt libro 10. docetur, diui datur recta IA, in N, ex scholio propos. 10. huius lib. ita vt IN, ad NA, eãdem proportionẽ habeat, quam duæ rectæ inuentæ; atque adeo & IN, NA, incommensurabiles quoque sint. Ducta autem recta NK, ipsi AE, parallela, quæ Quadratricem secet in K, ducatur ex centro A, per K, recta secans arcum HB, in L. Dico tam arcus HL, LB, quam angulos HAL, LAB, inter se esse incommensurabiles. Quoniam enim per propos. 1. est, vt IN, ad NA, ita arcus HB, ad arcum LB: sunt autem IN, NA, incommensurabiles; erunt & arcus HL, LB, incommensurabiles. Cum ergo sit quoque, c vt arcus HL, ad arcum LB, ita angulus HAL, ad angulum LAB; erunt etiam anguli HAL, LAB, incommensurabiles inter se. Quod est propositum.



c33.6

FINIS ELEMENTI SEXTI.

QVID

QVID IN SINGVLIS xv. Libris agat Euclides.

EX FEDERICO COMMANDINO

IN primo libro disputat de rectilineis figuris, videlicet de triãgulis, ac parallelogrãmis. Et primum triangulorum ortus, proprietatesque tradit, tum iuxta angulos, tum iuxta latera, ipsa inter se comparans. Deinde parallelarum proprietates interÿciens ad parallelogramma transit, eorumque ortum declarat: & symptomata, quæ in ipsis sunt, demonstrat. Postea triangulorum, parallelogrammorumque communicationem ostendit, & quonam pacto parallelogrammum fiat æquale triangulo. Denique de ÿs, quæ in trangulis rectangulis a lateribus describuntur, quadratis; quam habeat proportionem, quod a subtendente rectum angulum describitur, ad ea, quæ a comprehendentibus ipsum fiunt.

IN secundo libro parallelogrãmum rectangulum, & gnomon definitur. Deinde parallelogrammorum rectangulorum, & quadratorum, quæ ex rectarum linearum sectionibus fiunt, proportiones declarantur. Postea de quadratis, quæ a lateribus obtusangulorum, & acutangulorum triangulorum describuntur, quam habeant proportionem, quæ a subtendentibus obtusum, & acutum angulum fiunt, ad ea, quæ a comprehendentibus describuntur. Denique qua ratione dato rectilineo æquale quadratum constituatur.

IN tertio libro agitur de ijs, quæ circulis accidunt, & de rectis lineis in circulo, vel ad circulum ductis: itemque de angulis, qui ad circulorum centra, vel ad circumferentias consistunt.

IN quarto libro de figurarum planarum inscriptionibus, & circumscriptionibus.

IN quinto de analogijs.

IN sexto de proportionibus figurarum inter sese: de figuris similibus, & reciprocis: de rectis lineis proportionalibus: de parallelogrammorum applicationibus ad rectas lineas, quæ vel deficiãt parallelogrammis similibus, vel excedant: quo modo recta linea terminata, extrema ac media ratione secetur: de proportionibus circumferentiarum, & angulorum, itemque Sectorum, in circulis æqualibus.

IN septimo agitur de numeris primis, & compositis, & quo pacto numerorum non primorum maxima communis mensura inueniatur: de numerorum parte, & partibus: de numeris multiplicibus: de proportionalibus: & quæcunque in quinto libro de magnitudinibus generatim, eadem fere & de numeris particulatim hic demonstrantur.

IN octauo de numeris deinceps proportionalibus: de numeris planis: de quadratis: de cubis, & solidis: de similibus planis, & similibus solidis.

IN nono itẽ de similibus planis: de cubis, et solidis: & de numeris deinceps proportionalibus siue abunitate, siue simpliciter: de numeris primis: de numeris paribus, de imparibus, de pariter pari

bus

bus, de pariter imparibus, de pariter paribus & pariter imparibus: de numeris perfectis.

IN decimo de commensurabilibus, & incommensurabilibus magnitudinibus, itemque de rationalibus, & irrationalibus.

IN undecimo primũ agitur de rectis lineis, quatenus ad solida corpora referuntur, videlicet quando sint in vno plano; quando rectæ, seu perpendiculares ad planum; quando parallelæ: quo modo a puncto in sublimi dato ad planum perpendicularis ducatur. Deinde vero de planis simul disserit, tum de solidis angulis. Postremo de solidis parallelepipedis, et nonnulla de Prismatibus.

IN duodecimo de pyramidibus, & prismatibus: postea de conis, et cylindris: demũ de sphæris.

IN tertiodecimo de constitutione quinque figurarum mundanarum, quas corpora regularia appellant: videlicet tetraedri vel pyramidis, hexaedri vel cubi, octaedri, dodecaedri, et icosaedri; ad quorum euidẽtiam præmittit nonnulla de ijs, quæ accidunt rectæ lineæ extrema ac media ratione sectæ: de pentagono æquilatero, de hexagoni, & decagoni lateribus, & de triãgulo æquilatero.

IN quartodecimo de dodecaedri; & icosaedri in eadem sphæra descriptorum comparatione.

IN quintodecimo & vltimo de inscriptione quinque figurarum iam dictarum, & de earundem lateribus, & angulis.

REGESTVM

† a b c d e f g

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii Kkk Lll Mmm Nnn

Omnia ſunt integra folia, &c.

ROMAE,
Apud Aloyſium Zannettum. MDCIII.

SVPERIORVM PERMISSV.