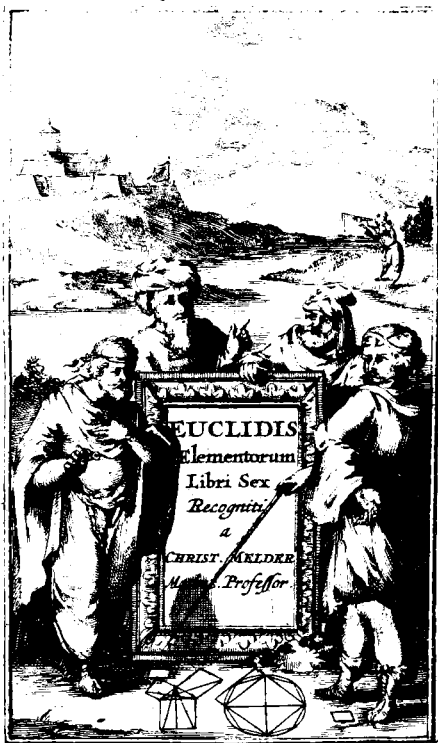


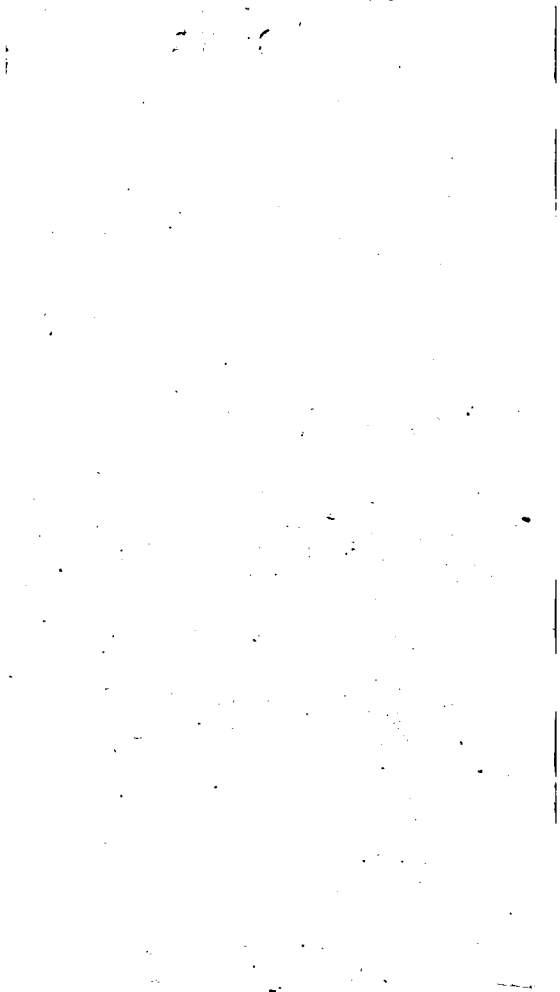
# Notes du mont Royal

[www.notesdumontroyal.com](http://www.notesdumontroyal.com)

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES  
Google Livres





# EVCLIDIS ELEMENTORVM

S E X

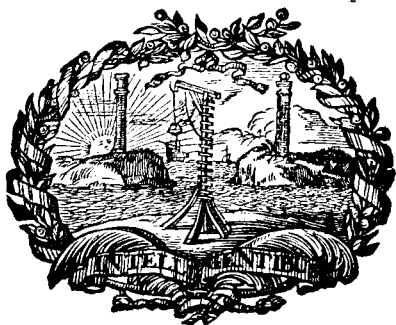
PRIORES LIBRI

Recogniti

O P E R A

CHRISTIANI MELDER.

*Matheſeos Prof.*



LUGD. BATAV. & AMST.

Apud DANIELEM, ABRAHAMUM &  
ADRIANUM à GAESBEECK.

clō lōc lxxiii.



# PRÆFATIO

A D

## LECTOREM.

**I**nter plurimos qui sex priora Euclidis Elementa commentariis illustrarunt non minimam laudem meretur Georgius Fournier. Qui prolixas obscurasque demonstrationes evitando, claras ac succinctas substituit, Le-

\*

3

cto-

## PRÆFATIO.

etorum attentionem sine imaginationis confusione ut sibi conciliaret.

Præter figurarum intricatam exiguitatem primum nil displicuit ; quas proinde simpliciter mutare decreveram : Sed in ipso operis processu non tantum multa ex Clavio, Tacqueto , Barrow aliisque adjeci , verum perplurimas demonstrationes ita immutavi , præsertim in posterioribus libris, ut  
nullo

## PRÆFATIO.

nullo modo nomen meum  
reticere potuerim ; quod  
in hunc finem moneo, ne  
quis me injuriam D<sup>o</sup> Four-  
nier fecisse putet. Aliorum  
labores pro meis vendi-  
tare nec studeo nec so-  
leo. Agnosco pleraque  
ipsius esse. Correctiora  
vel ante annum prodiiſ-  
sent, nisi execrabilis bello-  
rum turba, variaque hinc  
nata impedimenta inter-  
cessissent. Cæterum ap-  
plausum si obtinuerint

\* 4      quæ



## PRÆFATIO.

quæ apposui ad meliora  
ac magis grata instigabor.  
Vale.

EU-

# EVCLIDIS ELEMENTUM

## PRIMUM.

### DEFINITIONES.

1. *Punctum est, cujus pars nulla.*

**G**ræcè legitur *σημείον*, signum hoc est à quo incipit designatio quantitatis finitæ. Idem intellige de linea ac superficie, non quod ex fluxu puncti aut lineæ originem traxerint.

2. *Linea vero longitudo non lata.*

Linea talis nulla ducitur à parte rei; sed sicut punctum, ita & linea signum seu initium est quantitatis latæ.

3. *Lineæ autem termini sunt puncta.*

Id est longitudinis determinatæ principium & finis est punctum: per infinitam autem lineam Euclides intelligit lineam cujusvis magnitudinis, seu indeterminatam.

4. *Recta linea est, quæ ex æquo sua interjacet puncta.*

Sive cujus extrema obumbrant omnia media, ut dixit Plato: vel minima earum quæ terminos habent

bent eosdem, ut vult Archimedes.

5. *Superficies vero est quæ longitudinem latitudinemque tantum habet.*

6. *Superficiei autem extrema sunt lineæ.*

Hæc definitio intelligenda est tantum de superficie plana vel mixta, non autem de circulari; quando enim habet extremum, lineam tantum habet, non lineas.

7. *Plana superficies, est quæ ex æquo suas interjacet rectas.*

Quæ dixi de linea recta, eadem de plana superficie sunt intelligenda.

8. *Planus autem angulus est duarum linearum in plano se mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.*

Hic causæ anguli explicantur : Materialis, sunt duæ lineæ quæ se mutuo tangunt. Formalis est alterius in alteram inclinatio. Unde sequitur primò, quòd illæ duæ lineæ non ita se debent tangere, ut jaceant in directum, id est, ut unicam rectam constituent lineam; sed altera debet in alteram inclinari.

Sequitur 2. quod anguli quantitas consistit in majori vel minori linearum inclinatione, non in longitudine linearum.

Sequitur 3. non esse necesse, ut duæ lineæ post contactum productæ se mutuò secent, ut vult Pel-

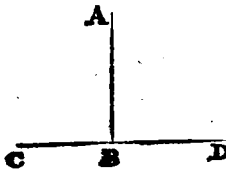
## LIBER PRIMUS.

Pelletarius : id enim tantum est verum in angulis rectilineis : sed sufficere, ut se tangant & inclinentur.

Denique si angulus ille sit in superficie plana, dicetur planus. In omni vero figura, licet quolibet angulum tribus litteris appellemus, ille tamen semper intelligitur, cui medius character appingitur.

9. *Cum autem continentes angulum lineæ rectæ fuerint, rectilineus appellatur angulus.*

Si utraque curua, curvilineus : si curua altera, altera recta ; mixtus.

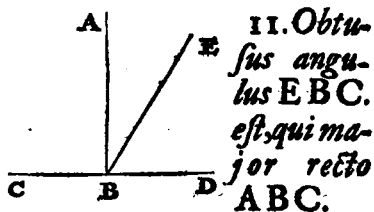


10. Cum  
verò re-  
cta A B.  
super re-  
ctam CD.  
stans, eos qui sunt deinceps  
ABC. ABD. angulos, æ-  
quales inter se facit, rectus  
est uterque æqualium angu-  
lorum, & insists recta AB.  
perpendicularis vocatur ejus  
cui insistit CD.

Tunc angulus uterque dicitur  
æqualis, quando recta AB. non  
magis in C. quam in D. inclinatur.

Quod autem Græci dicunt *καθίσταται* Latinè redditur perpendicu-  
laris; frequentius tamen utun-  
tur Mathematici verbo Græco  
quam Latino, maximè in Optica:  
unde apud eos nihil usitatus  
quàm *καθίσταται*, imo Latine red-  
dunt Cathetum.

II. Ob-



Nempe quia recta EB. magis recedit à subjecta GD. quàm perpendicularis AB.

12. *Acutus vero EBD. qui minor recto ABD.*

13. *Terminus est quod alicujus est extremum.*

Talia sunt, punctum, linea superficies: nempe punctum lineæ, linea superficiei, & superficies corporis.

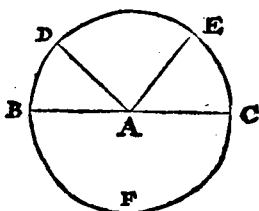


14. *Figura est quæ sub aliquo , vel sub aliquibus terminis comprehenditur.*

Dixit sub aliquo , nempe quia circulum & ellipsim , unicus terminus , hoc est linea circularis , comprehendit : ad rectilineas verò figuras , plures semper termini requiruntur.

Porro notabis debere terminos , quantitatem , quæ figura dicitur , ambire & comprehendere , non vero tantum terminare. Unde sequitur 1. Quod lineæ nulla proprie est figura , cum puncta lineam , non ambiant , sed solum terminent. Sequitur 2. quod superficiei infinitæ vel corporis infiniti ; si quod dari posset , figura nulla sit , 1. quia omnis figura debet ambire , & comprehendere figuratum. 2. quia terminis ambitur , terminus autem est extremum rei : Quomodo  
vero

vero id quod habet finem & extrema, erit infinitum?



15. *Circulus est figura plana sub una linea A. B. C. comprehensa, quæ vocatur peripheria: ad quam ab uno puncto, eorum quæ intra figuram sunt posita, omnes cadentes rectæ DA. DB. DC. æquales inter se sunt.*

16. *Centrum vero circuli punctum illud appellatur.*

Theodosius Sphæricorum lib. 1. deff. 1. & 2. idem habet, definitione vero 5. sic polum describit.

Polus

Polus circuli in Sphæra, est punctum in superficie Sphæra, à quo omnes rectæ ad circuli peripheriam tendentes, sunt inter se æquales. Ex quibus colliges inter centrum, & polum hoc tantum esse discriminis, quod centrum concipiatur intra figuram positum: Polus vero in superficie Sphæra.

*17. Diameter autem circuli est recta quædam A B. per centrum D. ducta, & terminata ex utraque parte, à circuli peripheria A. & B. quæ & bisariam secat circulum.*

Hic tria observabis 1. omnes Diametros ejusdem circuli esse æquales inter se, cum earum medietates ex def. 15. sint æquales.  
2. Quod sequitur ex 1. est quod licet in circulo possint infinitæ duci

duci rectæ non transeuntes per centrum, solæ tamen rectæ per centrum ductæ, & in peripheria terminatæ dicuntur diametri, quia cum solæ sint omnes æquales inter se, determinatæque longitudinis, aliæ vero inæquales semper & incertæ: diameter sola potest metiri circulum. Mensura enim cujusque rei, ait Ptolomeus, in Analemmate, debet esse stata determinataque, non indefinita. Unde non est quod mirentur tyrones si in fœminino genere ponatur à Mathematicis. Idem enim est Diameter quod linea dimetiens, vel in duo æqualia dividens.

3. Est, Diametrum bifariam fecare circulum, quod ita demonstrat Thales apud Proclum. Concipe animo portionem semicirculi sic coaptari portioni reliquæ ut diameter sit utriusque basis. Si circumferentia una congruat penitus

nitus circumferentiæ alteri, manifestum est illas duas portiones à diametro factas, esse inter se æquales, cùm neutra aliam excedat. Si verò circumferentia una non congruat cum altera, sed vel extra eam cadat, vel intra, vel partim intra, partim extra: tunc rectæ ductæ à centro ad circumferentiam erunt æquales & non erunt.

18. *Semicirculus autem est figura quæ continetur sub diametro A B. & sub ea linea A D B. quæ aufertur de circuli peripheria.*

19. *Segmentum circuli est figura quæ continetur sub recta & circuli peripheria.*

Per rectam hic intellige omnem non diametrum, nisi item velis semicirculum dicere segmentum.

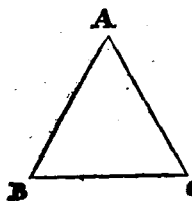
20. *Recti*

20. *Rectilineæ figuræ sunt quæ sub rectis continentur.*

21. *Trilateræ quidem quæ sub tribus.*

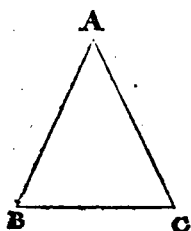
22. *Quadrilateræ verò quæ sub quatuor.*

23. *Multilateræ autem quæ sub pluribus quam quatuor rectis comprehenduntur.*



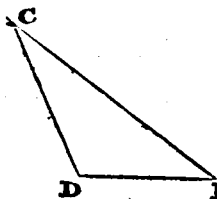
24. *Trilaterum porro figurarum, æquilaterum triangulum est quod tria latera habet æqualia.*

B 25. Iso-



25. *Isoſceles autem, quod duo tantum habet æqualia A B. A C.*

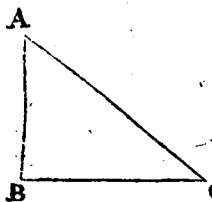
Σκέλη, τὸ, crus Græcis est, unde compositum ἰσοσκελὴς qui æqualibus est cruribus: τείνων ἰσοσκελὴς; quod è tribus lineis duas æquales habet, quibus quasi cruribus insistit.



26. *Scalenum verò quod tria inæqualia habet latera.*

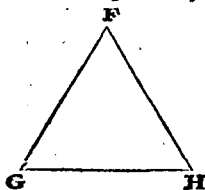
Triangulorum hæ sunt species ex laterum ratione petitæ. Sequuntur aliæ ex angulorum differentiis emergentes.

27. *Ad*



27. *Ad hæc etiam trilaterrarum figurarum, rectangulum quidem triangulum est quod habet rectum angulum ABC.*

28. *Amblygonium est quod habet obtusum angulum, hoc est, majorem recto.*



29. *Oxygonium vero quod tres acutos habet angulos, hoc est, minores recto.*

Not. In omni triangulo cuius duo quæcunque latera expresse



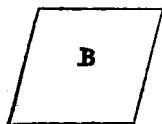
nominantur, solet reliquum latus à Mathematicis, basis dici, sive illud in situ locum infimum occupet, sive supremum.



30. *Quadrilaterum autem figurarum quadratum quidem est quod æquilaterum est & rectangulum.*

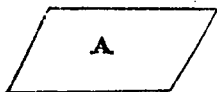


31. *Altera parte longior figura est, quæ rectangula quidem, at æquilatera non est.*

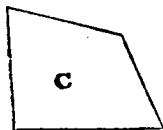


32. *Rhombus autem, quæ æquilatera quidem, sed rectangula non est.*

33. *Rhomb-*



33. Rhomboides vero quæ ad-versa, & latera, & angulos æqualia inter se habens, neque æquilatera est, neque rectangula.



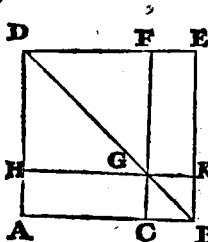
34. Præter has autem reliquæ quadrilateræ, Trapezia appellantur.

35. Parallele sunt rectæ, quæ in eodem plano existentes, & productæ in infinitum ex utraque parte, in neutram mutuo incidunt.

Ad hoc ut duæ rectæ dicantur parallelæ, non sufficit ut productæ in infinitum non concurrant.

Sic enim duæ rectæ in transversum positæ re aliqua interposita, & non se tangentes, dicerentur parallelæ, quia nunquam concurrerent. Sed requiritur præterea, ut sint in eodem plano.

36. *Parallelogrammum est figura quadrilatera., cujus bina opposita latera sunt parallela seu aequidistantia.*



37. *Cum vero in parallelogrammo diameter BD. ducta fuerit, duæque rectæ CF.HK. lateribus parallela secantes diametrum in uno eodemque puncto G. ita ut parallelogrammum distri-*

*distributum sit in quatuor parallelogramma ; per quæ diameter non transit scil. AG. GE. appellantur complementa eorum quæ circa diametrum consistunt ut HF. GE.*

### POSTULATA.

1. *Postuletur à quovis puncto A. ad quodvis punctum B. rectam lineam A B. ducere.*

2. *Et terminatam rectam AB. in continuum recta producere in C.*

3. *Et quovis centro, & intervallo circulum describere.*

Communes notiones seu  
Axiomata.

1. *Quæ eidem æqualia ,  
& inter se sunt æqualia.*

2. *Et si æqualibus æqua-  
lia adjecta sint , tota sunt æ-  
qualia.*

3. *Et si ab æqualibus  
æqualia ablata sint , quæ re-  
linquuntur sunt æqualia.*

4. *Et si inæqualibus æ-  
qualia adjecta sint , tota sunt  
inæqualia.*

5. *Et si ab inæqualibus  
æqualia ablata sint , reliquæ  
sunt inæqualia.*

6. *Et quæ ejusdem dupli-  
cia , inter se sunt æqualia.*

7. *Et*

7. *Et quæ ejusdem dimidia, inter se sunt æqualia.*

8. *Quæ congruunt sibi mutuo, inter se æqualia sunt.*

Id est, quæ collata, ita componuntur, ut pars parti respondeat, & terminus termino, æqualia sunt. Lineæ autem rectæ & æquales congruunt, uti & anguli.

9. *Et totum parte majus est.*

10. *Et omnes anguli recti æquales inter se sunt.*

11. *Si in duas rectas recta incidens interiores, & ad easdem partes angulos duobus rectis minores faciat; productæ duæ illæ rectæ in infinitum, coincident inter se*

*se ad eas partes, in quibus  
sunt anguli duobus rectis mi-  
nores.*

Scio principium hoc obscurum quibusdam, & à Gemino & Proclo rejectum à numero principiorum: verum non debet res aliqua à notionibus communibus rejici, quod unus aut alter ei assensum neget: oporteret enim & nonum expungere. Jam enim sunt aliqui Philosophi adeo subtiles ut negent totum sua parte majus. His & illis sufficiat dicere Euclidem cæterosque omnes, hæc omnia ex sola terminorum notione, evidentia censuisse, & existimasse sensu communi carere, qui ea negaret. Ne scrupulus remaneat, illud demonstrat Clavius prop. 28. l. 1.

12. *Duæ rectæ spatium non comprehendunt.*

Id est ex omni parte concludunt.

13. *Omne totum est æquale omnibus partibus simul sumptis.*

Plura talia axiomata excogitari possunt & ab aliis proposita sunt, sed hæc sufficere nullus dubito.

## N O T A.

Quicquid proponitur vocatur propositio, estque vel problema vel Theorema.

Problema est propositio ubi aliquid proponitur efficiendum & conclusio semper talis est, quod erat faciendum.

Theo-



## 24 EUCL. LIBER PRIMUS.

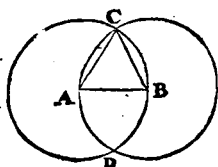
Theorema est propositio cum proponitur proprietas vel veritas de aliqua re demonstranda, & conclusionis formula. Quod erat demonstrandum.

Quicquid autem tanquam confectarium aut lucrum ex demonstratione sequitur Corollarium appellatur.

Lemma insuper vocatur demonstratio præmissæ alicujus, ut quæsitæ demonstratio evadat brevior ac clarior.

PRO-

## PROPOSITIO I.



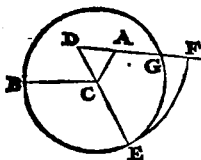
*Super data Proble-  
recta termi-<sup>ma 1.</sup>  
nata A B.  
triangulum æ-  
quilaterum A  
B C. consti-  
tuere.*

**P**raxi. Ex centrīs A & B. spa-  
tio A B. describe <sup>a 3.</sup> duos cir-  
culos, & ex puncto sectionis C. <sup>Post.</sup>  
duc <sup>b 1.</sup> rectas C A. C B. Dico <sup>Post.</sup>  
triangulum A B C. esse æquila-  
terum.

Probatur. Recta A C. æqualis  
est <sup>c</sup> rectæ A B. & B C. <sup>c</sup> eidem: <sup>c 15.</sup>  
ergo rectæ A C. B C. æquales <sup>Def.</sup>  
eidem A B. æquales sunt <sup>d 1.</sup> inter  
se. Ergo triangulum A B C. est <sup>Ax.</sup>  
<sup>c</sup> æquilaterum. Quod erat fa- <sup>c 24.</sup>  
ciendum. <sup>Def.</sup>

## PROPOSITIO II.

Prob. 2.



*Ad datum  
punctum A. da-  
ta recta B C.  
aquaalem re-  
ctam A F. po-  
nere.*

a 1.

Post.

b 1. 1.

c 3.

Post.

d 2.

Post.

**P**rax. Jungatur <sup>a</sup> A C. Super ipsa A C. fac <sup>b</sup> triangulum æquilaterum C D A. centro C. spatio B C. duc <sup>c</sup> circulum : latus D C. produc <sup>d</sup> in E. centro D. spatio D E. duc circulum : latus D A. produc in F. Recta A F. æqualis est rectæ C B.

e Ex

const.

f 15.

D. f.

g 3.

Ax.

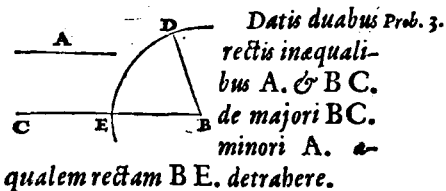
h 1.

Ax.

Prob. Rectæ D A. D C. sunt <sup>e</sup> æquales. Rectæ D E. æqualis <sup>f</sup> recta D F. <sup>g</sup> Ergo recta A F. rectæ C E. Rursum, recta <sup>f</sup> C E. æqualis est rectæ C B. <sup>h</sup> Ergo A F. ipsi C B. Quicunque autem alii ponantur casus, eadem semper erit constructio & demonstratio, ut bene notat Clavius ex Proclo.

P R O-

## PROPOSITIO III.



**P**rax. Ad datum punctum B. datae rectae A. æqualem rectam D B. <sup>a</sup> pono. Centro B. <sup>a</sup> 2. 1. spatio B D. ducō <sup>b</sup> circulum, <sup>b</sup> 3. abscissa B E. est æqualis ipsi A. <sup>Post.</sup>

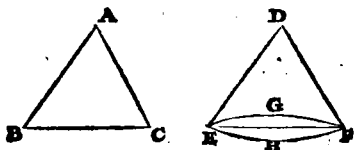
Prob. Recta B E. est <sup>c</sup> æqua- <sup>c</sup> 15. lis ipsi B D. quæ ponitur <sup>d</sup> æqua- <sup>Def.</sup> <sup>d</sup> Ex lis ipsi A. Ergo abscissa B E. <sup>const.</sup> æqualis est <sup>e</sup> datae A. Quod erat <sup>e</sup> 1. <sup>Ax.</sup> faciendum.

## S C H O L I U M.

*Circino hoc ut & precedens problema fieri potest secundum Tacquet; sed tunc ex sententia Procli nullo postulato satisfacit.*

## PROPOSITIO IV.

Theore-  
ma I.



*Si duo triangula A. & D. duo latera, duobus lateribus aequalia habeant utrumque utrique hoc est A B. ipsi D E. & A C. ipsi D F. habeantque angulos A. & D. lateribus illis contentos, aequales: Et Basim B C. basi E F. equalem habebunt, & triangulum A B C. triangulo D E F. aequale erit, & reliqui anguli, reliquis angulis aequales erunt uterque utrique, hoc est angulus B. angulo E. & angulus C. angulo F. æqualis erit, sub quibus aequalia latera A B. ipsi D E. & A C. ipsi D F. subtenduntur.*

Prob.

**P**rob. Latus  $AB$ . lateri  $DE$ .  
 & latus  $AC$ . ipsi  $DF$ . & an-  
 gulus  $A$ . angulo  $D$ . ponuntur  
 æqualia: ergo si superponantur,  
 a congruent: ergo & basis  $BC$ .<sup>a 8.</sup>  
 basi  $EF$ . congruet. Adeoque<sup>Ax.</sup>  
 totum triangulum toti triangu-  
 lo super imposito æquale erit.  
**Q. E. D.**

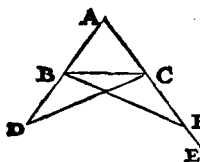
## N O T A.

1. *Proprietas trianguli in hoc theore-  
 mate proposita, cum ex terminorum ex-  
 plicatione videatur patere, posset assumi  
 tamquam communis notio.*

2. *Quemadmodum duo latera cum  
 angulo incluso inferant aequalitatem ba-  
 sium & angulorum; sic & vicissim di-  
 cendo, duo latera & bases æquales infer-  
 re angulos æquales. Adeoque octava pro-  
 positio tanquam consecutarium hujus ha-  
 beri poterit.*

## PROPOSITIO V.

Theor. 2.



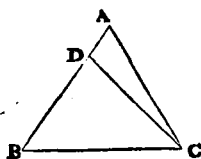
*Isoscelis trianguli*  
*ABC. qui ad basim*  
*sunt anguli ABC.*  
*ACB. inter se sunt*  
*æquales, & productis*  
*æqualibus rectis AB.*  
*AC. puta in D. &*  
*E. qui sub basi sunt*  
*anguli CBD. BCF. inter se æquales sunt.*

**P**reparatio. Ex lineis AB. AC. pro-  
 ductis, accipio a æqualia BD. CF.  
 & b duco rectas CD. BF.  
**Prob.** Triangulorum BAF. CAD.  
 unum latus BA. Uni CA. & alterum  
 FA. alteri DA. c æquale est. Et angulus  
 BAC. utrique est communis: ergo  
 d angulus ABF. æqualis est angulo  
 ACD. & angulus AFB. angulo ADC.  
 & basis BF. basi CD. æqualis. Rursus  
 in triangulis BCD. CBF. latus CF. la-  
 e 3. i. teri BD. e est æquale, & latus FB. pro-  
 batum est æquale ipsi DC. & angulus D.  
 f 4. i. angulo F. æqualis. Ergo f anguli CBD.  
 BCF. infra basim sunt æquales & anguli  
 BCD. CBF. æquales. Qui si tollantur  
 ex æqualibus ABF. ACD. relinquent  
 angulos ad basim g ABC. ACB. æqua-  
 les. quod erat demonstrandum. Thales  
 fertur autor hujus propositionis:  
 g 3. Ax.

*Corollarium.* Omne triangulum æ-  
 quilaterum, est æquiangulum.

PRO-

## PROPOSITIO VI.



*Si trianguli Theor. 3.*

*A B C. duo  
anguli A B C.*

*A C B. æqua-  
les inter se fue-  
rint, & sub*

*æqualibus angulis subtensa latera  
A B. A C. æqualia inter se erunt.*

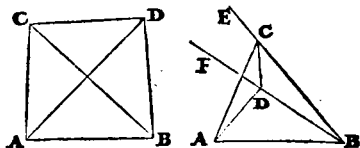
**S**i negas: pars unius B D. <sup>a</sup> fiat <sup>a</sup> 3. 1.  
 Æqualis alteri C A. hoc posi-  
 to; triangu-<sup>a</sup>la D B C. A C B. se  
 habent juxta quartam; nam latus  
 B C. commune, & latera B D.  
 C A. æqualia, & anguli D B C.  
 A C B. æquales. Ego & totum  
 triangulum æquale erit toti trian-  
 gulo, hoc est totum parti: quod  
 repugnat. <sup>b</sup>

<sup>b</sup> 9.  
 Ax.

*Coroll.* Omne triangulum æ-  
 quiangulum, est æquilaterum.



## PROPOSITIO VII.



*Theor. 4. Super eadem recta AB. duabus  
eisdem rectis AC. BC. aequales  
alia duæ rectæ AD. BD. utraque  
utrique, hoc est AC. ipsi AD.  
& BC. ipsi BD. non constituentur  
ad aliud & aliud punctum, puta D.  
ad easdem partes, eosdem terminos  
B. & A. habentes, cum duabus ini-  
tio ductis rectis.*

**P**rob. Quia si possint duci duæ  
aliæ, ducantur in D. Ergo  
a 5. 1. triangulum CAD. <sup>a</sup> est Isosceles:  
ergo anguli ACD. ADC.  
æquales. Rursus triangulum  
CBD. est Isosceles. Ergo an-  
guli BDC. BCD. sunt æqua-  
les, cum tamen angulus CDA.  
pars

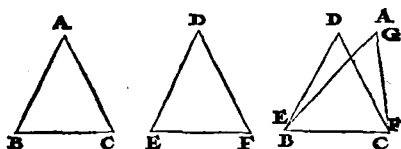
pars anguli totalis  $CDB$ . probatus sit æqualis totali angulo  $ACD$ . Idemque sequetur incommodum ubicumque statuatur punctum versus easdem partes. Nam si ponatur punctum intra triangulum in  $D$ . ut in secunda figura, ductis  $AD$ .  $BDF$ .  $BCE$ . &  $DC$ . sic dico. Rectæ  $AD$ .  $AC$ . ponuntur æquales, ergo <sup>b</sup> anguli  $ADC$ .  $ACD$ . sunt <sup>b</sup> s. r. æquales: similiter  $BD$ .  $BC$ . ponuntur æquales, ergo anguli infra basim  $ECD$ .  $FDC$ . sunt <sup>b</sup> æquales, ergo angulus  $FDC$ . major est angulo  $ADC$ . quemadmodum  $ECD$ . major est ipso  $ACD$ . quod repugnat.

Denique non potest statui punctum in parte alicujus lineæ ex datis, alioquin pars esset æqualis toti, contra 9. ax.

NB. *Hac propositio tantum adhibetur ad demonstrandam subsequentem octavam, quæ posset tamquam consecutarium quarta assumi.*

PRO-

## PROPOSITIO VIII.

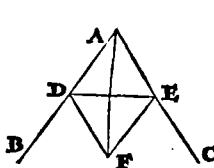


*Theor. 5. Si duo triangula A. D. duo latera, AB. AC. duobus lateribus DE. DF. equalia habeant, alterum alteri: habeant etiam basim BC. basi EF. equalem: Et angulum A. angulo D. equalem habebunt, sub equalibus rectis contentum.*

**P**rob. Quia si congruant latera, congruent & anguli: cum  
 a 8. *Def.* <sup>a</sup> angulus non sit aliud quam inclinatio duarum linearum. Quod si quando superponentur non congruant, sed trianguli EFD. apex D. non cadat in A. sed in G. ergo tunc duæ rectæ duabus rectis æquales, super eadem recta BC. ducentur ad aliud punctum, contra præcedentem.

PRO-

## PROPOSITIO IX.

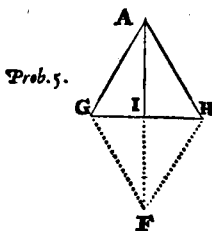


*Datum an- Prob. 4.  
gulum rectili-  
neum B A C.  
bifariam se-  
care.*

**P**rax. Ex lateribus dati anguli B A C. sumo <sup>a</sup> rectam A D. <sup>a</sup> 3. 1. & ipsi æqualem A E. Jungo D E. constituo <sup>b</sup> triangulum æquilat- <sup>b</sup> 1. 1. rum D E F. ducta recta A F. bifariam dividet angulum A.

Prob. In triangulis D A F. E A F. rectæ A D. A E. sunt æquales : A F. communis est, & basis D F. basi E F. æqualis : <sup>c</sup> ergo anguli F A D. F A E. sunt <sup>c</sup> 8. 1. æquales. Ergo angulus B A C. divisus est bifariam. Quod facien- dum erat.

## PROPOSITIO X.



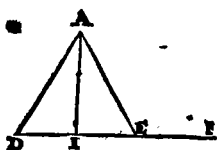
*Datam rectam terminatam GH. bifariam secare.*

**P**rax. Supra rectam GH. <sup>a</sup> 1. 1. constituo triangulum æquilaterum GAH. cujus angulum <sup>b</sup> 9. 1. A. divido <sup>b</sup> bifariam, ducta recta AF. dividet rectam GH. bifariam.

Prob. Triangula GIA. HIA. se habent juxta quartam ex constructione figuræ : ergo habent bases GI. IH. æquales. Ergo recta GH. divisa est bifariam. Q. E. F.

PRO-

## PROPOSITIO XI.



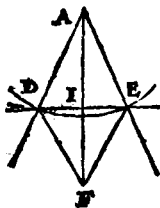
*Data recta* Prob. 6.  
*DF. à puncto*  
*I. in ea dato,*  
*ad rectos an-*  
*gulos, rectam*  
*lineam IA. excitare.*

**P**rax. Ex linea DF. à puncto  
 I. sumo <sup>a</sup> partes hinc inde <sup>a</sup> 3. 1.  
 æquales ID. IE. super DE.  
<sup>b</sup> constituo triangulum æquilate- <sup>b</sup> 1. 1.  
 rum DAE. à puncto A. ad  
 punctum I. recta ducta erit per-  
 pendicularis.

Prob. Latus DI. <sup>c</sup> est æquale <sup>c</sup> Ex  
 lateri IE. & latus <sup>d</sup> DA. ipsi AE. <sup>const.</sup> <sup>d</sup> 23.  
 & latus AI. commune. <sup>e</sup> Ergo <sup>Def.</sup>  
 anguli AID. AIE. erunt æqua- <sup>e</sup> 8. 1.  
 les, <sup>f</sup> ergo recti: ergo <sup>f</sup> AI. per- <sup>f</sup> 10.  
 pendicularis. Q. E. F. <sup>Def.</sup>

## PROPOSITIO XII.

Prob. 7.



Super datam  
rectam infinitam  
DE. à dato puncto  
A. quod in ea non  
est, perpendicular-  
rem rectam lineam  
AI. excitare.

**P**rax. Centro A. duco circu-  
lum, qui secet rectam DE. à  
sectionibus duco rectas DA, EA.  
a 10. 1. a divido DE. bifariam in I. ducta  
recta AI. erit perpendicularis.

b 15.

Def.

c Ex

const.

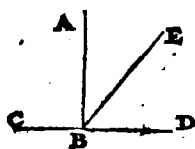
d 8. 1.

Prob. Latera AD. AE. b sunt  
æqualia, c latus DI. æquale lateri  
IE. & AI. commune: d ergo an-  
guli AID. AIE. sunt æquales:  
e 10. c ergo recti: ergo AI. est e per-  
Def. pendicularis.

Hujus propositionis autor fer-  
tur Oenipides Chius annis ante  
Christum circiter 550.

PRO-

## PROPOSITIO XIII.

Cum recta *Abew. 6.*

AB. vel EB.  
supra rectam  
CD. consistens,  
angulos facit:  
aut duos rectos

ABC. ABD. aut duobus rectis  
equales EBC. EBD. facit.

**P**rob. Recta EB. cum recta  
DC. aut facit utrinque æqua-  
les angulos & <sup>a</sup> consequenter <sup>a 10.</sup>  
rectos; aut non facit: si non facit, <sup>Def.</sup>

<sup>b</sup> excitetur ex B. perpendicularis <sup>b 11.1.</sup>

BA. Quoniam igitur angulo  
ABD. æquales <sup>c</sup> sunt ABE. <sup>c 13.</sup>

EBD. Si utrisque addas rectum  
ABC. <sup>d</sup> erunt duo recti ABC. <sup>d 2.</sup>

ABD. æquales tribus angulis <sup>Ax.</sup>

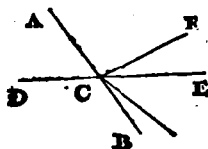
ABC. ABE. EBD. quibus  
etiam anguli EBC. EBD. sunt  
æquales & consequenter hi duo  
sunt æquales duobus rectis.

Q. E. D.



## PROPOSITIO XIV.

Theor. 7.

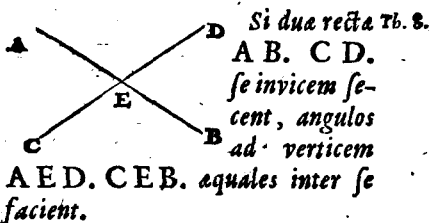


Si ad aliquam rectam AC. & in ea punctum C. duæ rectæ DC. CE. non ad easdem

partes ductæ, eos qui sunt deinceps angulos ACD. ACE. duobus rectis æquales fecerint, in directum erunt inter se rectæ, hoc est DCE. erit una linea recta.

**P**rob. Si rectæ DC. CE. non  
<sup>a Per</sup> jacent in directum, <sup>a</sup> jaceat  
<sup>2. Post.</sup> CF. aut aliâ quæpiam. Ergo an-  
<sup>b 13. 17.</sup> guli ACD. ACF. valent <sup>b</sup> duos  
<sup>c Contra</sup> rectos. Ergo <sup>c</sup> pars ACF. est  
<sup>Ax. 9.</sup> æqualis ACE. toti. Nam prius  
 ex hypothesi ACD. ACE. va-  
 lebant duos rectos.

## PROPOSITIO XV.



**P**rob. Nam angulo five A E D.  
 five C E B. addatur angulus  
 medius D E B. a erit æqualis duo- a 13. 1.  
 bus rectis, b ergo anguli C E B. b 3.  
 A E D. sunt æquales. Idemque Ax.  
 fiet si angulo A E C. vel D E B.  
 adjiciatur angulus A E D.

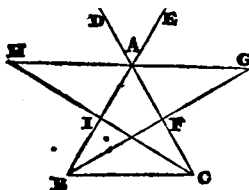
Thales Milesius fertur auctor  
 hujus propositionis.

**Coroll. 1.** Duæ rectæ secantes  
 se mutuo, efficiunt ad punctum  
 sectionis, quatuor angulos, qua-  
 tuor rectis æquales.

**Coroll. 2.** Omnes anguli circa  
 idem punctum constituti æquales  
 sunt quatuor rectis.

## PROPOSITIO XVI.

Th. 9.



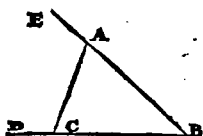
Trianguli  
ABC. uno  
latere BA.  
producto in  
E. exter-  
nus angulus  
EAC. utro-  
libet interno  
• opposito

C. vel B. major est.

- a 10. 1. **P**rob. Latus AC. a bisecetur in F, ducatur BG. ita ut BF. sit æqualis FG. junge rectam AG. tunc triangula AFG. CFB. habent se juxta 4. nam latus b AF. æquale est lateri CF. & latus FG. lateri FB. & angulus AFG. c angulo CFB. æqualis; d ergo & angulum GAF. angulo BCF. æqualem habebunt, ergo angulus totalis EAC. externus major est interno & opposito ACB. Quod si latus AB. bisecetur in I. idem fiet, & probabitur angulum externum DAB. majorem esse angulo ABC. Ergo cum angulus EAC. c sit æqualis angulo DAB. erit angulus EAC. externus, major quolibet interno & opposito nempe angulo C. vel B. Q.E.D.

PRO-

## PROPOSITIO XVII.



Trianguli Th. 10.

ABC. duo anguli, BCA. CAB. vel alii quilibet, quo-

cunque modo sumpti, duobus rectis sunt minores.

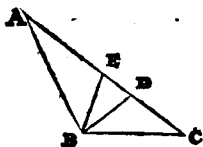
**P**rob. Producto BC. in D. externus angulus ACD. <sup>a</sup> major est angulo A. vel B. sed <sup>a</sup> 16. r. anguli ACD. ACB. <sup>b</sup> valent <sup>b</sup> 13. r. tantum duos rectos, ergo anguli B. & C. interni, sive CAB. BCA. sunt minores duobus rectis. Idem dicam de angulis A. & B. si producam latus, BA.

*Coroll. 1.* In omni triangulo, cujus unus angulus fuerit rectus vel obtusus, reliqui sunt acuti.

*Coroll. 2.* Omnes anguli trianguli æquilateri & trianguli Isoscelis, anguli supra basim sunt acuti.

## PROPOSITIO XVIII.

Th. II.

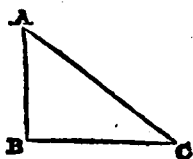


Trianguli  
 ABC. majus  
 latus AC. ma-  
 jorem angulum  
 ABC. sub-  
 tendit.

**S**i negas: Ex majori latere AC.  
 a 3.1. <sup>a</sup> fac AD. æquale ipsi AB.  
 b 5.1. duc rectam BD. <sup>b</sup> erunt anguli  
 ABD. ADB. æquales. Est au-  
 tem angulus ADB. hoc est  
 ABD. externus & oppositus an-  
 c 16.1. gulo C. <sup>c</sup> major. Multo ergo ma-  
 jor est totalis angulus ABC. an-  
 gulo C. Major item est angulo A.  
 nam fac CE. æquale ipsi CB.  
 d 5.1. <sup>d</sup> erunt anguli CEB. CBE.  
 e 16.1. æquales, <sup>e</sup> & angulus CEB. hoc  
 f 9. est EBC. major angulo A. <sup>f</sup> ergo  
 Ax. angulus ABC. major angulo A.  
 Q. E. D.

PRO-

## PROPOSITIO XIX.

Trianguli *tb.* 12.

*A B C. majus  
latus A C. sub  
majori angulo*

*A B C. sub-  
tenditur.*

**S**i negas latus *A C.* esse majus latere *A B.* sint æqualia : <sup>a</sup> er- <sup>a 5. 1.</sup> go anguli *B.* & *C.* sunt æquales, contra hypothesin. Si latus *A B.* dicas majus latere *A C.* <sup>b</sup> ergo <sup>b 18. 1.</sup> angulus *C.* major erit angulo *B.* contra hypoth. Idem dicam de latere *B C.* Ex quibus sic dico latus *A C.* nec minus est nec æquale lateribus *AB.* *CB.* ergo majus. **Q. E. D.**

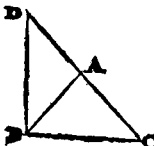
## N O T A.

*Hac propositio est conversio præcedentis, quapropter hanc omittendo potuisset dici: si majus latus majorem angulum subtendit, utique & major angulus à majori latere subtenditur.*

P R O-

## PROPOSITIO XX.

Th. 13. D

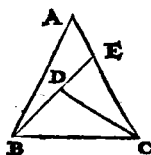


Trianguli ABC.  
 duo latera puta  
 AB. AC. quomo-  
 docunque sumpta,  
 reliquo BC. sunt  
 majora.

**P**rob. Produco CA. in D. sic  
 ut AD. sit æquale ipsi AB.  
 & proinde <sup>a</sup> CD. æqualis ipsis  
<sup>a</sup> 2. Ax. CA. AB. ducta recta DB. sic  
 dico : Rectæ AD. AB. sunt  
 æquales <sup>b</sup> ergo æquales anguli D.  
 & DBA. <sup>c</sup> Major ergo utroli-  
<sup>c</sup> 9. Ax. bet erit totus angulus DBC.  
 sed hunc angulum subtendit latus  
<sup>d</sup> 19. 1. CD. hoc est CA. AB. <sup>d</sup> ergo  
 rectæ CD. hoc est CA. AB.  
 major est quàm latus BC.  
 Q. E. D.

PRO-

## PROPOSITIO XXI.



*Si super trianguli Tb. 14.*

*ABC. mo latere BC.  
ab extremitatibus dua  
recta BD. DC. inte-  
rius constituta fuerint,  
ha constituta, reliquis  
trianguli duobus lateri-*

*bus AB. AC minores quidem erunt,  
majorem verò angulum continebunt, id  
est angulus D. major erit angulo A.*

**P**rob. 1. pars. Producto BD. in E.  
in triangulo BAE. duo latera BA.  
AE. a majora sunt tertio BE. ergo a 20. 1.  
si addatur commune EC. erunt BA.  
AC. majora quam BE. EC. Eodem  
modo in triangulo CED. latera CE.  
ED. majora sunt tertio CD. ergo si  
commune addatur DB. erunt CE. EB.  
majora quam BD. DC. sed AB. AC.  
probata sunt majora quam BE. EC.  
ergo multo majora quam BD. DC.

Prob. 2. pars. Angulus BDC. externus  
b major est interno & opposito DEC. b 16. 1.  
& hic major angulo A. interno & op-  
posito, multo ergo major angulus BDC.  
angulo A. Q. E. D.



## PROPOSITIO XXII.

Prob. 8.



Ex tribus  
rectis DF. FG.  
GH. qua sunt  
æquales tribus  
datis rectis A.  
B. C. triangu-  
lum FIG. con-  
stituiere; oportet

autem duas quomodocunque sumptas,  
a 20. I. reliqua esse majores: a quoniam omnis  
trianguli duo latera quomodocunque  
sumpta reliquo sunt majora.

**P**rax. Datis rectis ABC. sume  
ipsis ordine æquales DF. FG.  
GH. centro F. spatio FD. duc  
circulum DI. & centro G. spatio  
GH. duc alium HI. à puncto in-  
tersectionis I. ducantur rectæ FI.  
& GI. & factum est quod pe-  
titur.

b 15.  
Def.

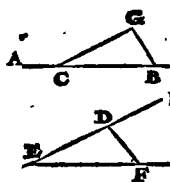
Prob. in triangulo FIG. recta  
FI. æqualis est <sup>b</sup> ipsi DF. hoc  
est A. & GI. ipsi GH. hoc est C.  
& GF. ipsi B. Q. E. F.

N O T A.

Hac conditio in vigesima propositione  
contenta omitti potuisset.

P R O-

## PROPOSITIO XXIII.



*Ad datam re- Problemam A B. & ma 9.*

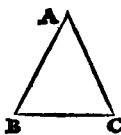
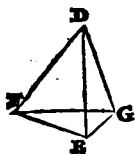
*punctum C. in ea datum, dato angulo rectilineo*

*DEF. aequalem angulum rectilineum GCB. constituere.*

**S**ume in rectis EH. EI. duo puncta utcunque, puta D. & F. quæ recta DF. junges. Tum<sup>a</sup> fiat triangulum CGB. a 22. 1. habens latera æqualia lateribus trianguli EDF. singula singulis: hoc facto triangula se habent juxta propositionem 8. ergo anguli E. & C. erunt æquales. Hujus propositionis autor fertur Oenipes Chius.

## PROPOSITIO XXIV.

Th. 15.



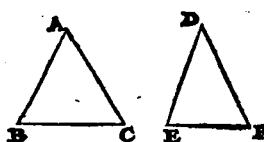
*Si triangu-  
lum ABC.  
duo late-  
ra, AB.  
AC. duo-  
bus trian-  
guli DFE.*

*lateribus DF. DE. aequalia habuerit,  
AB. ipsi DF. & AC. ipsi DE. angu-  
lum vero A. maiorem angulo D. basim  
BC. basi FE. maiorem habebit.*

- A**d rectam FD. & ad punctum  
 a 23. 1. in ea datum <sup>a</sup> fiat angulus  
 FD G. æqualis angulo A. & la-  
 tus DG. ipsi DE. hoc est ipsi  
 b 4. 1. AC. sit æquale, <sup>b</sup> & consequen-  
 ter basis BC. basi FG. jungan-  
 tur rectæ GE. GF. anguli DGE.  
 DEG. <sup>c</sup> æquales erunt. Ergo  
 c 5. 1. totus angulus FEG. major quam  
 DEG. major etiam erit quam  
 DGE. & multo major quam  
 d 19. 1. FGE. <sup>d</sup> ergo recta GF. & huic  
 æqualis BC. major est quam EF.  
 Q. E. D.

P R O-

## PROPOSITIO XXV.



Si duo Th. 16.

triangula

A B C.

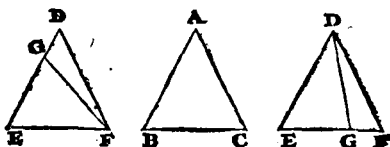
D E F.

duo late-

ra, duobus lateribus equalia habuerint, alterum alteri hoc est AB. ipsi ED. & AC. ipsi DF. basim verò BC. basi EF. majorem habuerint: & angulum A angulo D. majorem habebunt sub equalibus rectis contentum.

**P**rob. Quia si angulus A. non est major angulo D. erit vel æqualis, vel minor: si æqualis<sup>a</sup> ergo bases BC. EF. erunt æqua-<sup>a</sup> 4. 1. les, quod est contra hypothelīm. Si minor: cum latera AB. AC. sint æqualia ipsis DE. DF. basis EF.<sup>b</sup> major erit base BC. con-<sup>b</sup> 24. 1. tra hypoth. ergo cum nec æqualis vel minor esse potest erit necessario major Q. E. D.

PROPOSITIO XXVI.



Th. 17. Si duo triangula, duos angulos, duobus  
 angulis aequales habuerint, alterum al-  
 teri; & unum latus uni lateri aequale,  
 sive quod adjacet equalibus angulis, sive  
 quod uni equalium angulorum subtendi-  
 tur, & reliqua latera, reliquis lateribus  
 aequalia habebunt, alterum alteri, & re-  
 liquum angulum reliquo angulo.

**P**rob. sint in triangulis ABC. DEF.  
 anguli B. & C. æquales angulis E.  
 & F. sintque primo latera BC. EF.  
 (quæ adjacent angulis æqualibus) æqua-  
 lia. Si latus ED. non est æquale ipsi BA:  
 sit eo majus, & sumatur EG. æquale  
 ipsi BA. tum ducta FG. Duo latera  
 triangulorum GEF. ABC. æqualia  
 sunt, & anguli E. & B. æquales contenti  
 inter latera æqualia. a Ergo anguli C.  
 & GFE. sunt æquales, quod esse non  
 potest: nam angulus GFE. est pars  
 ipsius DFE. qui æqualis ponebatur ipsi  
 C. non ergo DE. major est quam BA.  
 Sed neque minor, alias lateri BA. ea-  
 dem quæ prius, applicaretur demon-  
 stratio.

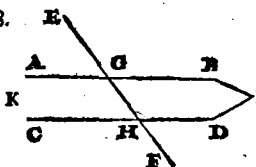
stratio. Ergo æqualis. Ergo triangula DEF. ABC. se habent juxta 4. & latera lateribus, & anguli angulis correspondentibus sunt æquales.

Sint deinde latera AB. DE. subtendentia æquales angulos C. & EFD. inter se æqualia, dico latera CB. CA. ipsis FE. FD. esse æqualia, & angulum A. angulo D. æqualem. Si enim latus EF sit majus latere BC. sume rectam EG. æqualem ipsi BC. duc rectam DG. quoniam igitur latera AB. BC. sunt æqualia ipsis DE. EG. & anguli B. & E. sunt æquales ex hypoth. erit b angulus C. angulo EGD. æqualis. b 4. 1. Igitur & angulus EGD. angulo EFD. erit æqualis, hoc est externus interno & opposito c quod est absurdum. Non est ergo latus EF. majus latere BC. c 16. L sed neque minus est, ut ostendit eadem demonstratio applicata lateri BC. ergo est ei æquale; ergo triangula ABC. DEF. se habent juxta 4. cum latus AB. ipsi DE. & BC. ipsi EF. & angulus B. angulo E. sit æqualis & consequenter basis AC. basi DF. Q. E. D.

*Thales milesius autor hujus fertur.*

## PROPOSITIO XXVII.

Th. 18.



Si in  
duas rectas  
AB. CD.  
recta EF.  
incidēs an-  
gulos al-

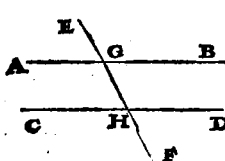
ternos AGH. DHG. aqua-  
les inter se fecerit: parallela erunt  
inter se rectae.

a 35.  
Def.

**P**rob. Si non sunt parallelæ  
& coibunt tandem puta in I.  
& fiet triangulum GIH, cujus  
angulus externus AGH erit  
b 16. I. b major interno & opposito  
GHD, cui tamen ex hypothesi  
erat æqualis. Similiter demon-  
strabitur, si dicantur concurrere  
in K. Ergo non concurrunt.  
Ergo sunt parallelæ Q. E. D.

PRO-

LIBER PRIMUS. 55  
PROPOSITIO XXVIII.



Si in duas Th. 19.  
rectas AB. CD.  
recta EF. inci-  
dens, externum  
angulum AGE.  
internos & oppo-  
sito & ad easdem  
partes G H C.

aequalem fecerit: aut internos & easdem partes  
A G H. G H C. duobus rectis aequales fecerit:  
parallelae erunt inter se rectae.

**P**rob. 1. pars. Angulo A G E. aequa- a 15. 1.  
lis est angulus B G H. angulus C H G.  
aequalis ponitur angulo A G E.  
b ergo alterni B G H. G H C. sunt aequa- b 1. Ax.  
les, c ergo rectae A B. C D. sunt parallelae. c 27. 1.

Prob. 2. Angulus E G A. cum angulo  
A G F. d valet duos rectos, anguli d 13. 1.  
A G H. G H C. ponuntur aequales duobus  
rectis: e ergo subducto communi angulo e 3. Ax.  
A G H. remanebunt anguli E G A. G H C.  
aequales. Ergo rectae A B. C D. sunt pa-  
rallelae per priorem partem hujus.

Ex secunda parte hujus propositionis,  
constat sufficienter de veritate undecimi  
Axiomatis: nimirum à contrario.

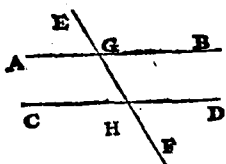
N O T A.

Haec tres proprietates 27. ac 28. propo-  
sitione proposita unicà contineri potuissent  
ut sequens 29. quaque eatenus per mo-  
dum conversionis demonstrata videtur.



## PROPOSITIO XXIX.

Th. 20.



In paral-  
lelas rectas  
A B. C D.  
recta E F.  
incidens : &  
alternos an-

gulos B G H. G H C. aequales  
inter se facit : & externum E G B.  
interno & opposito & ad easdem  
partes E H D. aequalem : & in-  
ternos ad easdem partes A G H.  
C H G. duobus rectis aequales.

**P**rob. 1. pars. Anguli D H G.  
a 13. 1. G H C. <sup>a</sup> valent duos rectos :  
anguli item D H G. B G H.  
b 28. 1. <sup>b</sup> valent duos rectos <sup>c</sup> ergo sub-  
c 3. ducto communi angulo D H G.  
Ax. anguli B G H. G H C. alterni re-  
manebunt æquales.

Prob. 2. Anguli E G B.  
d 13. 1. B G H. valent <sup>d</sup> duos rectos : an-  
guli B G H. G H D. valent  
<sup>c</sup> duos

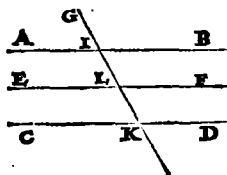
• duos rectos, ergo subducto com- <sup>e 28. I.</sup>  
 muni B G H. remanebunt anguli  
 E G B. E H D. æquales.

Prob. 3. Rectæ A B. C D.  
 ponuntur parallelæ <sup>f</sup> ergo ne- <sup>f 35.</sup>  
 que versus A. neque versus B. <sup>Def.</sup>  
 concurrunt, ergo tam versus A.  
 quam versus B. anguli interni ad  
 easdem partes sunt æquales duo-  
 bus rectis, & si enim ex aliqua <sup>g 11.</sup>  
 parte essent minores, ex ea con- <sup>Ax.</sup>  
 currerent.

*Coroll.* Omne parallelogram-  
 mum, habens unum angulum  
 rectum, est parallelogrammum  
 rectangulum.

## PROPOSITIO XXX.

Th. 21.



Qua ei-  
dem recta  
EF. paral-  
lela AB.  
CD. & in-  
ter se sunt

parallela.

**P**rob. In has tres rectas in eo-  
dem plano positas si cadat  
recta GK. angulus AIL. æqua-  
lis erit angulo ILF. <sup>a</sup> quia sunt  
alterni ; & angulus externus  
ILF. angulo LKD. interno &  
opposito : <sup>b</sup> ergo anguli AIL.  
LKD. sunt æquales : <sup>c</sup> ergo  
rectæ AB. CD. sunt parallelæ  
Q. E. D.

a 29. 1.

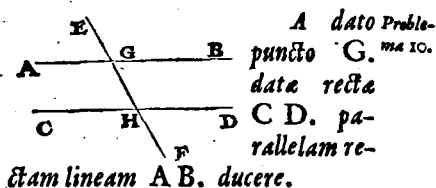
b 1.

Ax.

c 27. 1.

PRO-

## PROPOSITIO XXXI.

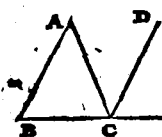


**E**x G. in datam CD. duc rectam GH. utcunque, & angulo GHD. <sup>a</sup> constituatur <sup>a</sup> 23.1. æqualis ad G. nempe angulus HGA. <sup>b</sup> erit recta AB. ipsi <sup>b</sup> 27.1. CD. parallela, quia anguli alterni AGH. DHG. sunt æquales Q.E.F.

PRO-

## PROPOSITIO XXXII.

Th. 22.



Trianguli

ABC. uno  
latere BC.

producto in

E. externus

angulus ACE. duobus internis &  
oppositis ABC. BAC. equalis  
est: & trianguli, tres interni an-  
guli A. B. C. duobus rectis aequales  
sunt.

- a 31. 1. **P**rob. 1. pars. <sup>a</sup> Ducatur ex C.  
recta CD. parallela rectæ  
AB. tunc quia recta AC. cadit  
in parallelas AB. CD. angulus  
b 29. 1. A. æqualis est <sup>b</sup> alterno ACD.  
Et quia BC. cadit in easdem, pa-  
rallelas angulus ECD. externus  
c 29. 1. <sup>c</sup> æqualis est interno B. Totalis  
ergo ACE. æqualis est duobus  
internis & oppositis A. & B.  
Q. E. D.

- Prob. 2. Angulus ACB.  
d 13. 1. cum externo ACE. <sup>d</sup> valet duos  
rectos,

# LIBER PRIMUS. Si

rectos, sed angulus  $A C E$ .  $\simeq$   $\alpha$ - $\epsilon$  32.1.  
 qualis est angulis  $A$ . &  $B$ . ergo  
 angulus  $C$ . cum angulis  $A$ . &  $B$ .  
 valent duos rectos, ergo tres an-  
 guli, &c. Hujus propositionis  
 autor fertur Pythagoræ Samius  
 circa annum ante Christ. 650.

*Coroll. 1.* Omnes tres anguli  
 unius trianguli, sunt æquales tri-  
 bus cujuscunque alterius trianguli  
 simul sumptis; & quando duo sunt  
 æquales duobus, erit & reliquus  
 reliquo æqualis.

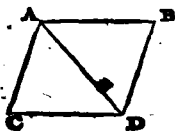
*Coroll. 2.* In triangulo Ifofcele  
 rectangulo, anguli ad basim sunt  
 semirecti.

*Coroll. 3.* Angulus trianguli  
 æquilateri est una tertia duorum  
 rectorum, vel duæ tertiæ unius  
 recti.

*Sch.* Omnis figura rectilinea  
 distribuitur in tot triangula, quot  
 ipsa continet latera, demptis duo-  
 bus, & anguli triangulorum, con-  
 stituunt angulos figuræ.

## PROPOSITIO XXXIII.

Th. 23.

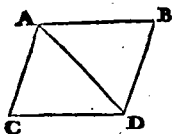


Rectæ A C.  
B D. quæ aqua-  
les & parallelas  
A B. C D. ad  
easdem partes con-  
jungunt : & ipsæ æquales & pa-  
rallele sunt.

- P**rob. Duc rectam D A. quæ  
 a 29. 1. datas A B. C D. jungat<sup>a</sup> tunc  
 anguli alterni D A B. A D C.  
 erunt æquales : latus A B. poni-  
 tur æquale lateri C D. latus A D.  
 est commune ergo bases A C.  
 b 4. 1. D B. sunt æquales. <sup>b</sup> Ergo an-  
 guli C A D. A D B. sunt æqua-  
 c 27. 1. les ; <sup>c</sup> ergo rectæ A C. D B.  
 sunt parallelæ.

PRO-

LIBER PRIMUS. 63  
PROPOSITIO XXXIV.



*Parallelogram- tb. 24.  
morum spatiorum  
qua ex aduerso &  
latera AB. CD.*

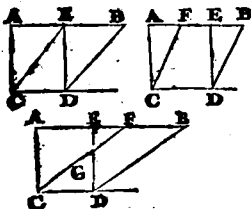
*AC. BD. &  
anguli A. & D. B. & C. equalia  
sunt inter se, & diameter AD.  
illa bifariam secat.*

**P**rob. Rectæ AB. CD. po-  
nuntur parallelæ, <sup>a</sup> ergo an- <sup>a</sup> 29.1.  
gulus BAD. angulo CDA. &  
angulus CAD. angulo ADB.  
sunt æquales, cum sint alterni.  
Ergo triangula ABD. ACD.  
habent duos angulos æquales al-  
terum alteri, & ipsis commune  
latus AD. adjacet; <sup>b</sup> ergo & re- <sup>b</sup> 26.1.  
liqui anguli B. & C. sunt æquales,  
& reliqua latera, AB. ipsi CD.  
& BD. ipsi AC. erunt æqualia,  
cum æqualibus angulis, nempe  
alternis opponantur. <sup>c</sup> Ergo trian- <sup>c</sup> 4.1.  
gula ABD. ACD. æqualia in-  
ter se sunt. Q. E. D.



## PROPOSITIO XXXV.

Th. 29.



Parallelogramma  
AD.FD.  
super eadem  
basi  
CD. &  
in iisdem

parallelis AB. CD. constituta,  
inter se sunt aequalia.

**I**d tribus modis potest contingere, si, ut vides, in 1. figura, sic dico. Rectæ AE. EB. sunt  
 a 1. Ax. <sup>a</sup> æquales, quia sunt <sup>b</sup> æquales  
 b 34. I. rectæ CD. Rectæ AC. ED.  
 sunt æquales: angulus CAE.  
 c 29. I. <sup>c</sup> æqualis est angulo DEB. ergo  
 a 4. I. triangulum CAE. <sup>c</sup> æquale est  
 f 2. Ax. triangulo DEB. <sup>f</sup> addito ergo  
 communi FCD. fient parallelo-  
 grammata AECD. CEBD.  
 æqualia.

Si ut in 2. Rectæ AE. FB.  
 g 3. sunt æquales ut prius: & dempta  
 Ax. igitur communi FE. erunt æqua-  
 les

LIBER PRIMUS. 65

les A F. E B. Rectæ A C. E D.  
sunt <sup>h</sup> æquales: anguli A. & E. <sup>h</sup> 34. r.  
sunt <sup>i</sup> æquales, <sup>l</sup> ergo triangula <sup>i</sup> 29. r.  
F A C. B E D. sunt æqualia, addito <sup>l</sup> 4. r.  
ergo communi trapesio E F C D.  
parallelogramma A E C D.  
F B C D. erunt <sup>m</sup> æqualia. <sup>m</sup> 2.

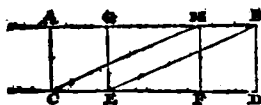
Si ut in 3<sup>a</sup>. idem repeto. Rectæ <sup>Ax.</sup>  
A E. F B. sunt <sup>n</sup> æquales ipsi C D. <sup>n</sup> 34. r.  
ergo & inter se: ergo recta A F. <sup>o</sup> 1.  
p æqualis est rectæ E B. Rectæ <sup>Ax.</sup>  
A C. E D. sunt <sup>q</sup> æquales, anguli <sup>p</sup> 2.  
item E. & A. sunt <sup>r</sup> æquales: er- <sup>Ax.</sup>  
go triangula A C F. E D B. sunt <sup>q</sup> 34. r.  
<sup>r</sup> æqualia: Ergo si ab utroque tol- <sup>r</sup> 29. r.  
las triangulum E G F. relinques <sup>r</sup> 4. r.  
æqualia trapezia A C G E. &  
F G D B. quibus si addas com-  
mune triangulum C G D. facies  
parallelogramma A D. D F. æ-  
qualia. Q. E. D.

SCHOLIUM.

*Hinc omnium parallelogrammorum  
dimensio, cum æqualia sint parallelo-  
grammo rectangulo, cuius area provenit  
ex multiplicatione laterum, patebit.*

## PROPOSITIO XXXVI.

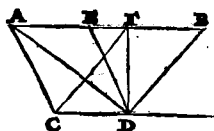
Th. 26.

Paral-  
lelogram-  
ma A E.

H D. su-  
per aqua-  
libus basibus C E. F D. & in iisdem  
parallelis A B. C D. constituta, in-  
ter se sunt æqualia.

- P**rob. Connectantur parallelogramma rectis C H. E B.
- a 34.1. <sup>a</sup> quæ erunt æquales & parallelæ.  
Hoc posito, parallelogrammum
- b 35.1. A E. æquale est ipsi <sup>b</sup> C B. & parallelogrammum C B. ipsi <sup>b</sup> H D.
- c 1. <sup>c</sup> ergo parallelogramma A E.
- Ax. H D. sunt æqualia. Q. E. D.

## PROPOSITIO XXXVII.



Triangula Tb. 27.

ACD. FCD.

super eadem

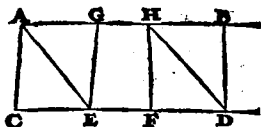
basi CD. &amp;

in iisdem pa-

rallelis AB. CD. constituta, sunt  
inter se aequalia.

**P**rob. <sup>a</sup> Per D. ducas DE. pa- <sup>a</sup> 31. 1.  
rallelam rectæ CA. & DB.  
ipsi CF. parallelogramma AD.  
CB. <sup>b</sup> erunt æqualia: <sup>c</sup> sed eor- <sup>b</sup> 35. 1.  
um dimidia sunt triangula ACD. <sup>c</sup> 34. 1.  
FCD. <sup>d</sup> ergo ipsa triangula <sup>d</sup> 7.  
ACD. FCD. sunt æqualia. <sup>Ax.</sup>  
Q. E. D.

## PROPOSITIO XXXVIII.



*Tb. 18. Triangula ACE. BFD. super equalibus basibus CE. FD. & in iisdem parallelis AB. CD. equalia sunt inter se.*

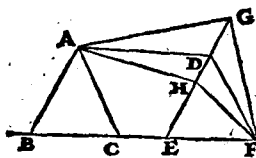
*a 31. 1. Prob. <sup>a</sup> Ducatur EG. parallela ipsi AC. & FH. ipsi BD. b 36. 1. erunt parallelogramma CG. e 34. 1. HD. æqualia. c Horum dimidia sunt triangula ACE. BFD. d 7. Ergo sunt inter se æqualia. Ax. Q. E. D.*

PRO-



## PROPOSITIO XL.

Th. 30.

Æqualia  
triangula

A B C.

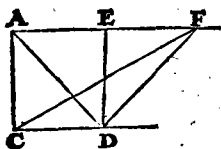
D E F.

super æ-  
qualibus basibus B C. E F. & ad  
easdem partes constituta, in iisdem  
sunt parallelis A D. B F.

- P**rob. Si negas A D. ipsi B F.  
esse parallelam, sit A G. cui  
occurrat E D. producta in G.  
a 38.1. Tunc ducta G F. erunt <sup>a</sup> triangu-  
la G E F. A B C. æqualia: pone-  
bantur autem æqualia triangula  
A B C. D E F. ergo totum G E F.  
& pars D E F. eidem triangulo  
A B C. æquale, <sup>b</sup> erunt æqualia.  
b 1.  
Ax. Quod fieri nequit.

PRO-

## PROPOSITIO XLI.



*Si paralle-* Th. 31.  
*logrammum*  
*A E C D.*  
*communem*  
*cum trian-*

*gulo F C D. basim C D. habuerit,*  
*& in iisdem parallelis A F. C D.*  
*fuerit: parallelogrammum erit du-*  
*plum trianguli.*

**P**rob. Ducatur diameter A D.  
Triangula F C D. A C D.  
<sup>a</sup> sunt æqualia; Parallelogram- <sup>a</sup> 37.1.  
mum C E. <sup>b</sup> est duplum trianguli <sup>b</sup> 34.1.  
A C D. <sup>c</sup> ergo & trianguli F C D. <sup>c</sup> 6.  
Q. E. D. *Ax.*

## S C H O L I U M.

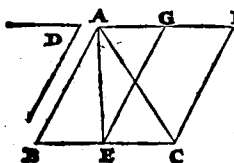
*Cum jam per 35. omnium parallelo-*  
*grammorum area obtinetur, etiam trian-*  
*gulorum, qua eorundem dimidia sunt,*  
*non latebit.*

P R O-



72 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO XLII.

*Proble-  
ma II.*



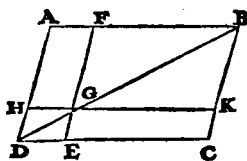
*Dato trian-  
gulo ABC.  
equale pa-  
rallelogram-  
mum G C.  
constituere  
in dato recti-  
lineo ang. D.*

**D**ati trianguli A B C. Basim  
a 10. I. B C. divide <sup>a</sup> bifariam in E.  
b 31. I. ductaque E A. <sup>b</sup> agatur per A.  
recta A H. parallela ipsi B C. Ad  
c 23. I. punctum E. <sup>c</sup> facto angulo G E C.  
ipsi D. æquali; educatur ex C.  
d 31. I. recta C H. ipsi E G. <sup>d</sup> parallela  
dimo factum.

Prob. Triangula ABE. AEC.  
e 38. I. sunt <sup>e</sup> æqualia : triangulum AEC.  
est dimidium trianguli, A B C.  
f 41. I. & <sup>f</sup> dimidium parallelogrammi  
B C. super eadem basi E C. con-  
stituti : ergo triangulum A B C.  
g 6. est <sup>g</sup> æquale parallelogrammo  
*Ax.* G C. habens ex constructione  
angulum G E C. æqualem dato  
angulo D. Q. E. F.

PRO-

## PROPOSITIO XLIII.



Omnis th. 32.

parallelo-  
grammi,  
complē-  
ta eorum  
qua circa

diametrum sunt parallelogrammo-  
rum, inter se sunt aequalia.

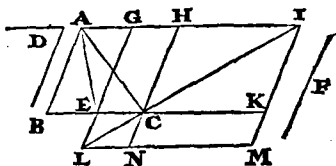
**I**n hac figura, parallelogramma  
circa diametrum sunt, FK.  
HE. complementa verò eorum,  
parallelogramma AG. GC. hæc  
complementa dico esse æqualia.

Prob. Triangula BAD. BCD.  
sunt <sup>a</sup> æqualia. Itemque triangu- <sup>a 34. r.</sup>  
la BKG. BFG. & GED. GHD.  
Ergo si ab æqualibus triangulis  
BAD. BCD. tollas æqualia,  
nempe BKG. ipsi BFG. &  
GHD. ipsi GED. comple-  
menta GA. GC. quæ remanent,  
erunt æqualia. Q. E. D.

G

PRO-

## PROPOSITIO XLIV.



Proble-  
ma 12.

*Ad datam rectam F. dato trian-  
gulo A B C. æquale parallelogram-  
mum C M. applicare in dato an-  
gulo rectilineo D.*

**C**onstitue triangulo A B C.  
a 42. 1. <sup>a</sup> æquale parallelogrammum  
C G. habens angulum G E C.  
æqualem angulo dato D. tum  
produc B C. in K. sic ut CK.  
b 3. 1. sit <sup>b</sup> æqualis datæ F. per K. agatur  
c 31. 1. <sup>c</sup> K I. parallela ipsi C H. occur-  
rens G H. productæ in I. De-  
inde ex I. ducatur per C. diame-  
ter I C. occurrens rectæ G E.  
productæ in L. & per L. ducatur  
L M. parallela ipsi E K. secans I K.

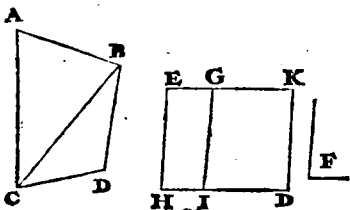
pro-

LIBER PRIMUS. 75

productam in M. producatu-  
que HC. in N. dico parallelo-  
grammum CM. esse quod peti-  
tur.

Prob. Complementa GC.  
CM. sunt <sup>d</sup> æqualia, parallelo- <sup>d</sup> 44.1.  
grammum GC. est <sup>e</sup> æquale <sup>e</sup> Ex  
triangulo ABC. ergo & comple- <sup>const.</sup>  
mentum CM. habet autem lineam  
CK. æqualem datæ F. & angu-  
lum CNM. æqualem angulo  
HCK. qui <sup>f</sup> æqualis est angulo <sup>f</sup> 28.1.  
GEC. qui ponitur æqualis dato <sup>Prop.</sup>  
angulo D. ergo parallelogram-  
mum CM. æquale est triangulo  
ABC. & habet lineam CK.  
æqualem datæ F. & angulum  
GNM. æqualem dato D. Q.  
E. F.

## PROPOSITIO XLV.



Proble-  
ma 13.

*Dato rectilineo AD. æquale parallelogrammum ED. constituere, in dato rectilineo angulo F.*

a 44. r.

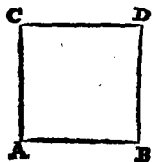
**D**ivide rectilineum in triangu-  
la, fac parallelogrammum a EI.  
æquale triangulo BCD. in an-  
gulo H. æquali ipsi F. & supra latus GI.  
parallelogrammum GD. æquale trian-  
gulo ABC. habens in I. angulum GID.  
æqualem ipsi H. & factum est quod pe-  
titur.

b Ex  
const.

Prob. Parallelogrammum EI. æqua-  
le est b triangulo BCD. in angulo H.  
æquali dato F. rursus parallelogram-  
mum GD. æquatur triangulo ABC.  
etiam in angulo dato, ergo parallelo-  
grammum ED. quod æquale est parti-  
bus simul sumptis, æquatur rectilineo  
ABCD. in dato angulo Q. E. F.

P R O-

## PROPOSITIO XLVI.

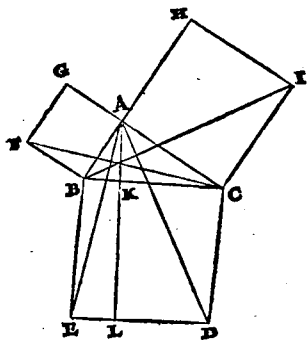


*Data rectâ AB. Proble-  
ma 14.  
quadraum ABDC.  
describere.*

**E**x A. & B. <sup>a</sup> erige perpendi- <sup>a</sup> II. I.  
culares CA. DB. æquales  
ipsi AB. jungaturque recta CD.  
& factum est quod petitur.

Prob. <sup>b</sup> Anguli A. & B. sunt <sup>b</sup> Ex  
recti: ergo rectæ AC. BD. sunt <sup>const.</sup>  
<sup>c</sup> parallelæ. Utraque <sup>d</sup> est æqualis <sup>d</sup> Ex  
ipsi AB. ergo & inter se: <sup>c</sup> ergo <sup>const.</sup>  
& AB. & CD. parallelæ, sunt <sup>e</sup> 33.  
æquales: ergo AC. CD. DB.  
sunt æquales, & figura est paral-  
lelogramina: cumque anguli A.  
& B. sint recti, <sup>f</sup> erunt etiam op- <sup>f</sup> 34. I.  
positi C. & D. recti. Ergo  
ABDC. est quadratum. Q. E. F.

78 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO XLVII.



Tb. 33. In rectangulo triangulo B A C. quadratum BD. quod à latere BC. rectum angulum B A C. subtendente describitur; aequale est quadratis BG. GH. quæ à lateribus B A. AC. rectum angulum BAC. continentibus, describuntur.

<sup>a</sup> 31. I. **P**rob. Ex puncto A. duc rectam AL. parallelam ipsi BE. & junge rectas, AD. BI. Triangula ACD. ICB. se habent juxta 4. nam latera CD. CA. sunt

sunt æqualia ipsis  $CB$ .  $CI$ . & anguli contenti  $ICB$ .  $ACD$ . æquales: cum anguli  $ICA$ .  $BCD$ . sint <sup>b</sup> recti & angulus  $ACB$ . <sup>b 30.</sup> communis: ergo triangula  $ACD$ . <sup>Def.</sup>  $BCI$ . sunt æqualia. Sed triangulum  $ACD$ . est <sup>c</sup> dimidium parallelogrammi  $LC$ . cum sint supra eandem basim  $CD$ . & inter easdem parallelas  $AL$ .  $CD$ . & triangulum  $ICB$ . dimidium est quadrati  $CH$ . ob eandem causam. <sup>d 6.</sup> Ergo quadratum  $CH$ . est æquale parallelogrammo  $LC$ . cum <sup>Ax.</sup> eorum dimidia sint æqualia.

Jam ducantur rectæ  $AE$ .  $FC$ . Triangula  $FB$   $C$ .  $AB$   $E$ . sunt æqualia, cum se habeant juxta 4. & triangulum  $ABE$ . est dimidium parallelogrammi  $BL$ . sicut triangulum  $FB$   $C$ . dimidium quadrati  $B$   $G$ . ergo quadratum  $B$   $G$ . est æquale parallelogrammo  $BL$ . Totum ergo quadratum  $BD$ . æquale est quadratis  $B$   $G$ .  $CH$ .  $Q$ .  $E$ .  $D$ .



## SCHOLIUM.

*Nobilissimum hoc Pythagoræ inventum præter infinitas utilitates, quas per universam Matheſin ſpergere nemo inſicias ibit, Methodum nobis tradit.*

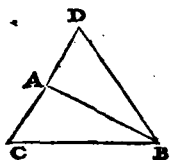
1. *Ex datis duobus quibuscunque lateribus in triangulo rectangulo reliquum latus invenire. Nimirum ſi AB. 6. partium AC. 8. erit BC. 10. nam ſi quadratum AB. 36. addatur ad quadratum AC. 64. ſumma erit 100. ex quo extracta radix erit 10. ipſum latus quaſitum BC.*

*Vel ſi BC. ſit 10. AB. 6. erit AC. 8. quoniam ſi à quadrato BC 100. ſubtrahatur quadratum AB. 36. relinquitur 64. cujus radix eſt latus quaſitum AC.*

2. *Additionem & ſubtractionem quadratorum, qua differentiam inter datarum linearum quadrata oſtendit.*

3. *Cum ex tribus rectis lineis 3. 4. 5. partium vel ex æquo per alios numeros multiplicatis, non niſi triangulum rectangulum conſtitui poteſt ( quod occaſionem Pythagoræ de hoc invento dediffe plurimi contendunt ) in ipſis campis ſemper poterimus funiculo conſiciens jam dictum triangulum pythagoricum, angulum rectum determinare.*

LIBER PRIMUS. 81  
PROPOSITIO XLVIII.



*Si quadratum quod* Th. 34.  
*à C B. uno laterum*  
*trianguli CAB. descri-*  
*bitur, æquale sit iis*  
*quæ à reliquis duobus*  
*trianguli lateribus*  
*AB. AC. describuntur*  
*quadratis : angulus*

*C A B. contentus sub reliquis duobus*  
*trianguli lateribus A B. A C. rectus est.*

**P**rob. <sup>a</sup> Ducatur ex A. ipsi AB. <sup>a</sup> II. I.  
perpendicularis AD. ipsi AC.  
æqualis, jungaturq; recta DB. hoc  
posito sic dico. Angulus D A B.  
<sup>b</sup> rectus est, <sup>c</sup> ergo quadratum rectæ <sup>b</sup> Ex  
D B. æquale est quadratis rectæ <sup>const.</sup>  
rum AB. AD. vel AC. Sed qua- <sup>c</sup> 47. I.  
dratum ipsius C B. ex hypoth. æ-  
quale est quadratis earundem CA.  
AB. <sup>d</sup> ergo rectæ C B. B D. sunt <sup>d</sup> r.  
æquales. Ergo triangula C A B. <sup>ax.</sup>  
ADB. habent tria latera æqualia,  
<sup>e</sup> & angulos qui æqualibus lateri- <sup>e</sup> 8. 2.  
bus respondent æquales. Ergo si  
angulus D A B. rectus est, erit  
etiam rectus C A B. cum latera  
D B. B C. sint æqualia. Q. E. D.

SCHO-

## S C H O L I U M.

*Quamquam omnes propositiones in libris Euclidis suam per Universam Mathesin obtineant Usum, nihilominus ob frequentiore allegationem, quasdam esse seligendas nullus dubito, quarum catalogum, ut hic, post omnes sequentes, apponam libros.*

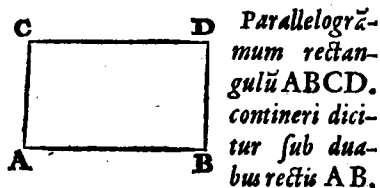
*Libri primi Insigniores propositiones.  
4. 5. 6. 13. 15. 26. 29. 31. 32. 36. 37. 38.  
41. 47. quibus à nonnullis annumerantur  
18. 19. 20.*

*Problemata porro passim per totum librum primum dispersa, ad exercitium regula ac circini minimè negligenda sunt; cum in subsequentibus constructionum facilitatem pareant.*

# EVCLIDIS ELEMENTUM II.

## DEFINITIONES

### I.



*Parallelogrā-  
mum rectan-  
gulū ABCD.  
contineri dici-  
tur sub dua-  
bus rectis AB.*

*BD. quæ rectum angulum ABD.  
comprehendunt.*

**Q**uemadmodum in circulo cognita diametro, tota ejus area cognoscitur, sic expressis duabus lineis quæ angulum rectum continent in parallelogrammo rectangulo, statim tota ejus quantitas intelligitur, nimirum latitudo & longitudo.

Observa 1. Illud parallelogrammum dici rectangulum quod  
unum

unum habet angulum rectum. Si

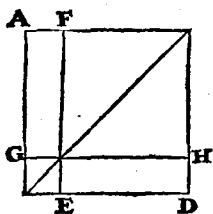
<sup>a</sup> 29. I. enim unus est rectus <sup>a</sup> <sup>b</sup> erunt &  
<sup>b</sup> 34. I. reliqui recti.

Observe 2. In sequentibus nomine rectanguli, Euclidem semper intelligere parallelogrammum rectangulum, licet vis nominis id non exigat.

3. Geometras omne parallelogrammum exprimere duas tantum nominando literas, quæ per diametrum opponuntur. Ut appositum parallelogrammum appellant. A D.

4. Cognitis lateribus rectanguli, inveniri ejus aream ex multiplicatione numeri unius lateris in numerum alterius lateris circa eundem angulum. Similiterque cognita area rectanguli & uno laterum, inveniri alterum latus si dividatur numerus areæ per numerum lateris dati, quotiens enim erit latus quæsitum.

## II.

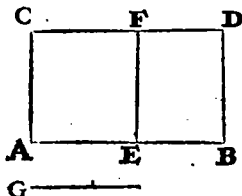


Omnis parallelogrammi spatii unumquodlibet eorum qua circa diametrum illius sunt, parallelogramorum, cum duobus complementis, gnomon vocetur.

In parallelogrammo AD. parallelogrammum GE. cum duobus complementis GE. E H. vocetur *gnomōn*, quod Latinè normam sonat, ejus enim speciem nobis exhibet.

## PROPOSITIO I.

Th. I.



Si fuerint  
duæ rectæ G.  
& A B. sece-  
turque alte-  
ra ipsarum  
A B. in quot-  
cunq; segmē-  
ta A E. E B.  
rectangulum

CB. comprehensum sub duabus rectis AC.  
insectâ hoc est G. & A B. sectâ, æquale  
est rectangulis C E. F B. qua sub insectâ  
C A. & quolibet segmentorum A E. E B.  
comprehenduntur.

a 11.

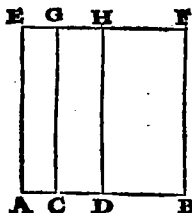
&amp; 3. 1.

**P**rob. Ex punctis A. & B. erige 2 per-  
pendiculares AC. BD. æquales datæ  
G. & ducatur recta C D. sicque fiat  
ex lineis C A. hoc est G. & A B. rectan-  
gulum C B. Rectam A B. utcunque di-  
d 31. 1. vide in E. & fiat d E F. parallela & æqua-  
& 3. 1. lis ipsi A C. erunt C E. F B. rectangula.  
e 29. 1. Nam angulus F E B. rectus est e quia  
f 28. 1. æqualis ipsi A. & consequenter f reliqui  
g 34. 1. anguli recti, & latera g lateribus opposi-  
tis æqualia. Hæc autem duo rectangula  
C F. B F. simul sumpta sunt æqualia to-  
tali B C. hoc est partes toti. Q. E. D.

Idem patet in numeris, puta 6. & 2.  
divide 6. in 2. & 4. dico 12. numerum  
productum ex 6. in 2. æqualem esse duo-  
bus numeris 4. & 8. qui fiunt ex multi-  
plicatione duorum in duo, & in quatuor.

PRO-

## PROPOSITIO II.



*Si recta linea Th. 2.*

*A B. secta sit ut-  
cunque puta in  
C. & D. Rectan-  
gula E C. G D.  
H B. comprehen-  
sa sub tota A E.  
hoc est A B. &  
quolibet segmen-  
torum A C. C D.*

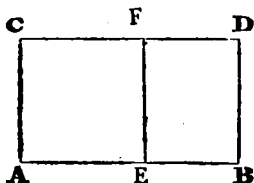
*BD. aequalia sunt, quadrato A F. quod æ  
tota A B. fit.*

**P**rob. Ex A B. fiat a quadratum E B. a 46. 1.  
ex C. & D. erigantur b C G. D H. b 31. 1.  
parallelæ & æquales ipsi A E. hoc & 3. 1.  
posito, erit rectangulum E C. compre-  
hensum sub tota A E. c hoc est A B. & c 30.  
segmento A C. & eodem modo rectan- Def.  
gula G D. H B. sub tota & utrolibet  
segmentorum. Cum ergo rectangula  
E C. G D. H B. sint partes omnes suo  
toti quadrato A F. æquales, patet rectan-  
gula comprehensa sub A E. hoc est A B.  
& segmentis A C. C D. D B. æqualia esse  
quadrato lineæ A B. Q. E. D.

In numeris divide 10. in 7. & 3. dico  
70. & 30. qui producuntur ex multipli-  
catione 10. in 7. & in 3. æqualia esse  
100. quadrato numeri 10.



## PROPOSITIO III.



*Th. 3. Si recta linea AB. secta sit ut-  
cunque in E. Rectangulum CB.  
sub tota AB. & uno segmentorum  
AC. hoc est AE. comprehensum,  
aquale est rectangulo FB. quod sub  
segmentis BE. FE. hoc est BA.  
comprehenditur, & quod à prædicto  
segmento AE. describitur quadra-  
to CE.*

**P**rob. Datam AB. secō utcun-  
que in E. ex punctis A. E. B.  
<sup>a</sup> 11. 1. erigo <sup>a</sup> perpendiculares AC. EF.  
<sup>b</sup> 31. 1. BD. parallelas <sup>b</sup> inter se & æqua-  
& 3. 1. les segmento AE. tum duco  
rectam à puncto C. ad D. quæ  
<sup>c</sup> 33. 1. erit parallela <sup>c</sup> ipsi AB. Hoc po-  
sito sic dico, AC. est æqualis  
<sup>d</sup> ipsi

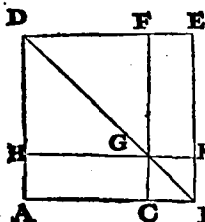
## LIBER SECUNDUS. 89

<sup>d</sup> ipsi AE. ergo rectangulum AD. <sup>d</sup> Ex  
 est comprehensum sub tota AB. <sup>const.</sup>  
 & uno segmentorum AC. hoc est  
 AE. Rursus FE. est <sup>d</sup> æqualis  
 ipsi EA. ergo rectangulum FB.  
 est comprehensum sub segmento  
 BE. EF. hoc est AE. Denique  
 parallelogrammum AF. quadra-  
 tum est cum AC. EF. sint  
 perpendiculares & æquales ipsi  
 AE. Ergo cum rectangulum  
 AD. æquale sit quadrato AF. &  
 rectangulo FB. patet rectangu-  
 lum sub tota AB. & segmento  
 AE. æquale esse rectangulo com-  
 prehenso sub segmentis AE. EB.  
 & quadrato prædicti segmenti  
 AE. Q. E. D.

In numeris divide 10. in 7. &  
 3. numerus 70. productus ex 10.  
 in 7. æqualis est numero 21. qui  
 ex 7. in 3. producitur; una cum  
 49. quadrato prioris partis 7.

## PROPOSITIO IV.

Th. 4.



*Si recta linea*  
*A B. secta sit*  
*utcumque, in C.*  
*quadratum AE.*  
*quod à tota AB.*  
*describitur, e-*  
*quale erit qua-*  
*dratis HF. CK.*  
*qua à segmentis*  
*AC. CB. descri-*  
*buntur, & ei*

*rectangulo quod bis sub segmentis AC.*  
*CB. comprehenditur nempe rectangulis*  
*AG. GE.*

- a 46. I. **P**rob. Super datam A B. fiat a qua-  
 dratum A E. duc diametrum D B.  
 b 31. I. ex C. fiat C F. parallela b recta B E.  
 secans diametrum in G. per quod age  
 H K. parallelam b ipsi A B. hoc posito  
 sic dico. Trianguli A B D. latera A D.  
 A B. sunt æqualia. ergo anguli A D B.  
 d 5. I. ABD. sunt d æquales, ergo e semirecti,  
 e 32. I. cum angulus A. sit rectus. Idemque  
 f 29. I. dicendum de triangulo. E D B. Rursus  
 angulus D F G. rectus f est, angulus  
 F D G. ostensus est semirectus, ergo an-  
 gulus F G D. etiam g semirectus est,  
 g 32. I. ergo latera D F. F G. sunt h æqualia:  
 h 6. I. sed ipsis etiam sunt æqualia i latera op-  
 i 34. I. posita D H. H G. ergo parallelogram-  
 l 30. mum F H. quadratum l est. Eadem de  
 Def. causa

## LIBER SECUNDUS. 91

causa quadratum erit  $CK$ . ergo  $HF$ .  $CK$ . quadrata sunt segmentorum  $AC$ .  $CB$ . cum latus  $HG$ . sit æquale, ipsi  $AC$ . Similiter rectangula  $AG$ .  $GE$ . continentur sub segmentis  $AC$ .  $CB$ . quia  $CG$ .  $GK$ . sunt æquales ipsi  $CB$ . cum  $CK$ . sit quadratum: sic etiam  $GF$ . est æqualis rectæ  $HG$ . ob quadratum  $HF$ . hoc est rectæ  $AC$ . Igitur cum quadratum  $AE$ . sit æquale quadratis  $HF$ .  $CK$ . & rectangulis  $AG$ .  $GE$ . verum est quadratum  $AE$ . super datam  $AB$ . æquale esse quadratis segmentorum  $AC$ .  $CB$ . & rectangulo comprehenso sub iisdem segmentis, bis sumpto. *Q. E. D.*

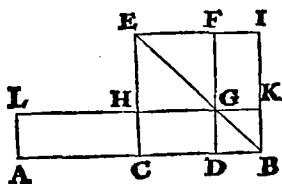
Si dividatur 6. in 4. & 2. quadratum 6. hoc est 36. æquale est quadratis partium 4. & 2. hoc est 16 & 4. una cum rectangulo bis sumpto ex numero 4. in 2. quod profert 8.

*Coroll. 1.* Hinc manifestum parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata.

*Coroll. 2.* Diametrum quadrati dividere ejus angulos bifariam.

*Coroll. 3.* Si recta linea bifariam secetur quadratum totius lineæ æquari quatuor quadratis ex dimidia.

## PROPOSITIO V.



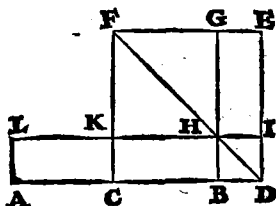
*Tb. 5. Si recta linea AB. secetur in aequalia in C. & non aequalia in D. Rectangulum LD. sub inequalibus totius AD. segmentis AD. DG. hoc est DB. comprehensum, una cum quadrato HF. ab intermedia sectionum CD. aequale est quadrato CL. quod à dimidia CB. describitur.*

**P**rob. Super dimidia CB. fiat, <sup>a 46.1.</sup> quadratum CI. ductaque <sup>b 31.1.</sup> diametro BE. agatur <sup>b</sup> per D. recta DF. ipsi BI. parallela: Ex eadem recta BI. sume BK. æqualem ipsi DB. & per punctum K. agatur KL. ipsi AB. parallela, ut

ut & A L. parallela ipsi B K.  
 hoc posito sic dico. Rectangu-  
 lum C G. <sup>d</sup> æquatur rectan- <sup>d</sup> 43. r.  
 gulo G I. igitur addito com-  
 muni <sup>e</sup> quadrato D K. erit C K. <sup>e</sup> *Corr.*  
 rectangulum æquale rectangu- <sup>2. præ-</sup>  
 lo D I. sed A H. <sup>f</sup> æquatur <sup>f</sup> 36. r.  
 rectangulo C K. ergo A H.  
 & æquatur D I. si itaque addatur <sup>g</sup> *Ass.*  
 commune C G. erit rectangulum <sup>1. 1.</sup>  
 A G. æquale gnomoni I G C.  
 quare cum gnomon I G C. cum  
 quadrato <sup>e</sup> H F. intermedia <sup>e</sup> *Corr.*  
 sectionum æquatur quadrato C I. <sup>2. præ-</sup>  
 erit quoque rectangulum A G.  
 cum prædicto quadrato H F.  
 æquale quadrato C I. à dimidia.  
 Q. E. D.

Divide 10. æqualiter in 5. &  
 5. inæqualiter in 7. & 3. eritque  
 numerus 21. ex 7. in 3. una cum  
 quadrato numeri intermedi 2.  
 quod est 4. æquale quadrato di-  
 midii 5. hoc est numero 25.

94 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO VI.



**N. 6.** Si recta linea  $AB$ . secetur bifa-  
riam in  $C$ . eique recta quadam  $BD$ .  
in rectum adjiciatur, rectangulum  
 $AI$ . comprehensum sub tota  $AB$ .  
cum adjuncta  $BD$ . & sub adjuncta  
 $DI$ . hoc est  $BD$ . una cum qua-  
drato  $KG$ . à dimidia  $KH$ . hoc est  
 $CB$ . æquale est quadrato  $CE$ . à  
linea  $CD$ . qua tum ex dimidia  $CB$ .  
tum ex adjuncta  $BD$ . componitur  
tanquam una linea, descripto.

**a 46.1.** **P**rob. Super rectam  $CD$ . <sup>a</sup> fiat  
quadratum  $CE$ . per  $B$ . age  
**b 31.1.**  $BG$ . parallelam <sup>b</sup> ipsi  $DE$ . sume  
 $DI$ . æqualem ipsi  $DB$ . & ex  $I$ .  
age  $IL$ . parallelam & æqualem  
ipsi  $DA$ . jungaturque recta  $LA$ .  
quo

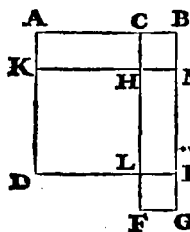
quo facto sic dico. Rectangula  
 LC. KB. sunt inter easdem paral- b 36.1.  
 lelas & supra æquales bases, b ergo c 45.1.  
 æqualia. Eidem KB. c æquale est  
 complementum HE. ergo erit &  
 HE. æquale ipsi LC. & additis  
 communibus CH. BI. gnomon  
 GHK. æqualis erit toti rectan-  
 gulo AI. quod continetur sub tota  
 AB. cum adjecta BD. & sub ad-  
 jecta DI. hoc est BD. Jam vero  
 gnomon GHK. adjecto quadra-  
 to KG. partis dimidiæ KH. d hoc d 34.1.  
 est CB. est æqualis quadrato ipsius  
 CD. composito ex dimidia cū ad-  
 juncta. Ergo parallelogrammū AI.  
 adjecto eodem quadrato KG. fiet  
 æquale eidē quadrato CE. Q.E.D.

In numeris 10. secetur bifariam  
 in 5. & 5. addatur ei numerus 2.  
 numerus 24. qui producitur, ducto  
 composito 12. in adjunctum 2.  
 una cum quadrato 25. quadrato  
 dimidii æqualis est 49. quadrato  
 numeri 7. qui ex dimidio 5. &  
 adjecto 2. componitur. PRO-



## PROPOSITIO VII.

Th. 7.



Si recta li-  
nea AB. sece-  
tur utcumque  
in C. qua-  
drata totius  
& utriusvis  
segmenti CB.  
simul sumpta,

hoc est AE. EF. aequalia sunt bis  
sumpto rectangulo AM. quod sub  
tota AB. & sub dicto segmento CB.  
continetur, cum addito KL. alte-  
rius segmenti AC. quadrato.

a 46.1. **P**rob. Super AB. <sup>a</sup> fiat qua-  
dratum AE. sume BM. æqua-  
lem ipsi CB. ducantur CL. MK.  
parallelæ ipsis BE. AB. produc  
BE. in G. sic ut EG. sit æqualis  
c 2. ipsi BM. <sup>c</sup> hinc erit MG. æqua-  
Ax. lis ipsi BE. fiat quadratum EF.  
hoc posito : quadratum totius  
AB. quod est AE. cum quadrato  
segmen-

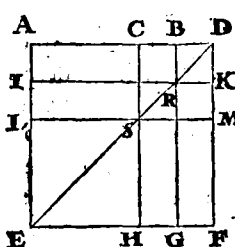
LIBER SECUNDUS. 97

segmenti  $CB$ . <sup>d</sup> hoc est  $EF$ . <sup>d Ex</sup>  
 $\propto$ qualia sunt rectangulis  $AM$ . <sup>const.</sup>  
 $MF$ . (quæ sunt sub tota  $AB$ . &  
 segmento  $BC$ . cum  $BM$ . sit ipsi  
 $BC$ .  $\propto$ qualis; & in rectangulo  
 $MF$ . latera  $MG$ .  $FG$ . sint  $\propto$ -  
 qualia ipsis  $BE$ .  $BM$ . hoc est  
 $AB$ .  $CB$ . ) una cum quadrato  
 alterius segmenti  $AC$ . quod est  
 $KL$ . totum videlicet partibus  
 omnibus est  $\propto$ quale. Q. E. D.

Divide 6. in 4. & 2. quadra-  
 tum totius 6. nempe 36. una  
 cum quadrato ipsius 2. hoc est 4.  
 $\propto$ qualia sunt numero 40. qui fit  
 ex numero 6. bis ducto in 2. hoc  
 est 24. una cum quadrato alterius  
 partis 4. quod est 16.

## PROPOSITIO VIII.

Tab. 8.



Si recta li-  
nea AB. se-  
cetur utcun-  
que in C.  
rectangulum  
quater com-  
prehensū sub  
tota AB. &  
uno segmen-  
torum BR.  
hoc est BC.

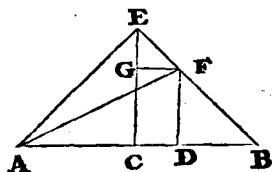
cum eo, quod à reliquo segmento AC.  
hoc est LS. fit, quadrato LH. aequale  
est quadrato AF. quod à tota AB. &  
dicto segmento BD. hoc est BC. tan-  
quam ab una AD. describitur.

**P**rob. Rectæ AB. sectæ in C.  
adjiciatur in rectum BD. ipsi  
BC. æqualis. Super tota AB. &  
adjuncta BD. hoc est super AD.  
a. 46. I. fiat quadratum ED. ex punctis B.  
& C. duc rectas BG. CH. ipsi  
DF. parallelas, acceptisque DK.  
KM. ipsis DB. BC. æqualibus,  
duc rectas KI. ML. ipsi DA.  
parallelas. Hoc posito sic dico,  
circa R. constituta sunt quadrata  
quatuor, quorum latera omnia  
ipsi

ipsi B C. sunt <sup>a</sup> æqualia. Ducta <sup>a</sup> *Corr.*  
 diametro E D. complementa <sup>2. 4.</sup>  
 AR. RF. <sup>b</sup> sunt æqualia, suntque <sup>b</sup> *hujus.* 3 I. I.  
 rectangula sub toto A B. & B R.  
 hoc est segmento B C. Eodem-  
 que modo I S. S G. sunt comple-  
 menta æqualia, quibus si addas  
 quadrata æqualia S R. B K. fient  
 rectangula duobus præcedentibus  
 æqualia, cum sint inter easdem  
 parallelas & æquales bases: ergo  
 quatuor illa rectangula sunt sub  
 tota & uno segmento. Quod si  
 quatuor illis rectangulis addas  
 quadratum L H. alterius segmenti  
 L S. hoc est A C. illa omnia simul  
 sumpta erunt æqualia quadrato  
 E D. quod fit supra A D. Q. E. D.

Si 6. secetur in 4. & 2. duca-  
 turque quater numerus 6. in 2.  
 fient 48. & addatur quadratum  
 ipsius 4. hoc est 16. fiet nume-  
 rus 64. æqualis quadrato ipsius 8.  
 qui numerus componitur ex  
 toto 6. & parte 2.

## PROPOSITIO IX.



*Th. 9. Si recta linea AB. secetur in aequalia in C. & non equali- in D. quadrata quæ ab inequalibus segmentis AD. DB. fiunt, dupla sunt, eorum quæ à dimidia AC. & ab intermedia CD. fiunt.*

**P**rob. Ex C. erigatur CE. perpendicularis ipsi AB. & æqualis ipsi CA. vel CB, ducanturque rectæ EA. EB. Deinde ex D. erigatur DF. ipsi EC. parallela secans EB. in F. & fiat recta FG. ipsi CD. parallela, ducaturque recta AF. hoc posito: Trianguli a Isoscelis ACE. anguli A. & E. sunt b æquales c & semirecti, cum angulus b 5. 1. ACE. sit rectus. Idem dicendum de c 32. 1. triangulo ECB. ergo totus angulus AEB. rectus est. Jam in triangulo EGF. angu-

a Ex  
const.

b 5. 1.

c 32. 1.

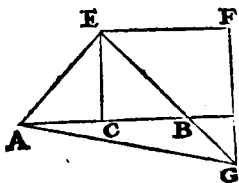
## LIBER SECUNDUS. 101

angulus G. d æqualis est angulo E C B. d 29.1.  
 a ergo rectus, ergo anguli E. & F. b æ-  
 quales c quia angulus E. semirectus est :  
 e ergo latera G E. G F. æqualia. Unde e 6. 1.  
 cum G F. æquatur ipsi C D. erit quo- f 34. 1.  
 que G E. æqualis C D. Simili argu-  
 mento probatur D F. æqualis ipsi D B.  
 Jam quadratum rectæ A F. g æquale g 47. 1.  
 est quadratis segmentorum inæqualium  
 A D. D F. hoc est D B. Rursus qua-  
 dratum rectæ A F. g æquale est qua-  
 dratis A E. E F. Est autem A E. æqua-  
 le ipsis A C. C E. atque adeo duplum  
 quadrati quod fit à dimidia A C. Et  
 quadratum E F. æquale est quadratis  
 E G. G F. atque adeo duplum qua-  
 drati quod fit à segmento medio G F.  
 seu C D. quare quadrata quæ fiunt ab  
 inæqualibus segmentis A D. D B. du-  
 pla sunt eorum quæ à dimidia A C. &  
 ab intermedia sectione fiunt. Q. E. D.

Divide 10. in 5. & 5. & in 7. & 3.  
 media sectio 2. quadrata 49. & 9. par-  
 tium inæqualium 7. & 3. sunt duplum  
 quadratorum 25. & 4. & partis dimi-  
 diæ 5. & sectionis 2.

102 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO X.

Th. 10.



*Si recta  
AB. se-  
cetur bi-  
sariam  
C. eique  
adjicia-*

*tur in directum recta BO. quod à  
tota cum adjuncta AO. & quod ab  
adjuncta BO. utraque simul qua-  
drata, dupla sunt quadrati à dimi-  
dia AC. & ejus quod à composita  
ex dimidia CB. & adjuncta BO.  
tanquam una describitur.*

**P**rob. Ex C. erigatur perpendi-  
cularis CE. æqualis ipsi AC.  
jungatur rectæ AE. EB. ex E.  
fiat EF. parallela ipsi CO. per O.  
ducatur OF. parallela ipsi CE.  
occurrent rectæ EB. in G. jun-  
gaturque recta AG. In triangulo  
ACE. latera AC. EC. sunt æ-  
qualia, & angulus ad C. rectus:  
ergo reliqui semirecti: itidemque  
in triangulo ECB. Similiter in  
trian-

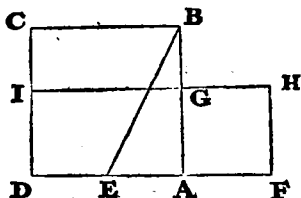
triangulis EFG. & BOG. latera EF. FG. ac BO. GO. sunt  $a \propto a$  6. & qualia, quia ang. ad O. rectus & B. semirectus unde reliqui semirecti & æquales.

Quare cum in triangulo AOG. angulus ad O. rectus est : erit quadratum rectæ AG. æquale <sup>b</sup> quadratis rectarum AO. & OG. <sup>b</sup> 47. 1. hoc est BO. rursus in triangulo AEG. angulus ad E. rectus est constans ex duobus semirectis : ergo quadratum ipsius AG. æquale est quadratis AE. & EG. Est autem AE. duplum quadrati AC. & EG. duplum quadrati EF. vel FG. ergo etiam quadrata AO. & BO. dupla sunt ipsorum AC. & CO. Q. E. D.

Numerus 10. secetur in 5. & 5. cui addantur 3. quadrati 169. & 9. numerorum 13. & 3. dupli sunt numerorum quadratorum 25. & 64. qui ex numeris 5. & 8. gignuntur.



## PROPOSITIO XI.



*Prob. I. Datam rectam AB. ita secare in G. ut rectangulum CG. comprehensum sub tota AB. & sub uno segmentorum GB. sit aequale alterius segmenti AG. quadrato GF.*

**P** Praxis. Ad punctum A. excita perpendicularem AD. æqualem datæ AB. eam seca bifariam in E. duc rectam EB. & ipsi æqualem EF. producendo EA. Ex AB. abscindo AG. æqualem AF. & factum erit quod quæritur.

*Prob. Supra datam AB. perfice quadratum AC. & supra rectam AF. quadratum FG. & rectam HG. produc in I. hoc posito sic dico. Recta DA. a secta est bifariam*

a Ex  
const.

fariam in E. eique in directum  
 adjecta est AF. <sup>b</sup> ergo rectan- <sup>b 6. 2.</sup>  
 gulum FI. quod factum est sub  
 tota DF. & FH. hoc est FA. una  
 cum quadrato mediæ EA. æqua-  
 le est quadrato EF. hoc est EB.  
 Jam quadratum EB. <sup>c</sup> æquale est <sup>c 47. 1.</sup>  
 quadratis AB. AE. ergo quadra- <sup>Tb. 11.</sup>  
 ta AB. AE. sunt æqualia rectan-  
 gulo FI. cum quadrato EA.  
 Ergo si commune quadratum  
 AE. tollas, rectangulum FI re-  
 manebit æquale quadrato ipsius  
 AB. hoc est AC. Quod si ab  
 æqualibus AC. FI. tollas com-  
 mune AI. remanebit CG. rectan-  
 gulum sub tota CB. hoc est BA.  
 & altero, segmentorum GB.  
 æquale quadrato GF. quod fit à  
 reliqua parte GA. Q. E. D.

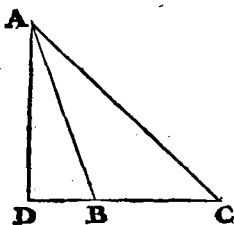
## S C H O L I U M.

*Hac propositio numerus explicari ne-  
 quit & idem denotat, quod tertia definitio  
 libri sexti de media ac extrema alicujus  
 linea sectione.*

P R O-

## PROPOSITIO XII.

Th. 11.



In ambly-  
gonio trian-  
gulo ABC.  
quadratum  
lateris AC.  
angulum B.  
obtusū sub-  
tendentis ,

quadrata laterum BA. BC. an-  
gulum obtusum comprehendentium ,  
superat bis sumpto rectangulo sub la-  
tere BC. & sub ipsa BD. in di-  
rectum ei addita usque ad occursum  
perpendicularis ab A. altero angulo  
acuto cadentis.

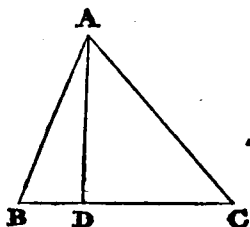
**P**rob. Demitte perpendicula-  
rem ex A. & rectam CB.  
produc usque dum ei occurrat in  
D. Quia recta CD. divisa est  
a 4. 2. utcumque in B. <sup>a</sup> est quadratum  
ipsius CD. æquale quadratis  
rectarum DB. BC. cum duobus  
rectan-

rectangulis sub DB. BC. addatur  
 ergo utrimque quadratum rectæ  
 DA. erunt quadrata CD. DA. *per 47.*  
 æqualia tribus quadratis CB. BD. <sup>1.</sup>  
 DA. cum duobus illis rectangu-  
 lis, atqui quadratum rectæ AC.  
 est æquale quadratis ipsarum CD.  
 DA. & quadratum ipsius AB.  
 est æquale quadratis ipsarum BD.  
 DA. ergo quadratum rectæ AC.  
 est æquale duobus quadratis CB.  
 BA. cum duobus illis rectangulis.  
 Superat ergo AC. duo quadrata  
 duobus istis rectangulis sub CB.  
 in DB. Q. E. D.

## S C H O L I U M.

*Hinc fluit generalis illa geometrarum  
 regula ex tribus amblygonii trianguli la-  
 teribus segmentum DB. inveniendi: ni-  
 mirum ex quadrato AC. subtr. summa  
 quadratorum AB. & BC. reliquum di-  
 visum per duplum baseos CB. exhibebit  
 ipsum DB.*

## PROPOSITIO XIII.



th. 12. In Oxygonio triangulo  $ABC$ . quadratum lateris  $AB$ . angulum  $C$ . acutum subtendentis superatur à quadratis laterum  $CA$ .  $CB$ . eundem comprehendentium, bis sumpto rectangulo sub latere  $CB$ . & sub assumpta interiùs linea  $DC$ . usque ad occursum perpendicularis ab  $A$ . altero angulo acuto cadentis.

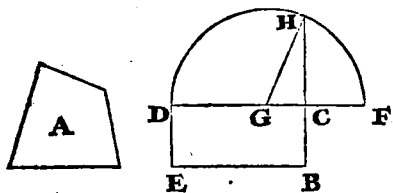
**P**rob. Demitte perpendicularem  $AD$ . Recta  $BC$ . divisa est utcunque in  $D$ . ergo per 7. 2. quadrata rectarum  $BC$ .  $DC$ . æqualia sunt rectangulis duobus sub  $BC$ .  $CD$ . & quadrato reliqui segmen-

segmenti B D. Adde utrisque commune quadratum rectæ D A. sic tria quadrata B C. D C. D A. æqualia sunt quadratis duobus B D. D A. & rectangulis duobus sub B C. D C. Nunc quadratis duobus D C. D A. <sup>a</sup> æquale est <sup>a</sup> 47. r. quadratum A C. Ergo duo quadrata rectarum B C. C A. æqualia sunt rectangulo bis sumpto sub B C. D C. & quadratis B D. D A. hoc est quadrato A B. Ergo quadratum rectæ B A. minus est quadratis A C. C B. rectangulo bis sumpto sub rectis B C. D C. Q. E. D.

## S C H O L I U M.

*Hinc altera Generalis regula Geometrarum constat in triangulo acutangulo ex tribus lateribus invenire segmentum basis, scil. adde quadr. A C. ad quadr. B C. subtrahatur ex summa quadr. A B. reliquum dividatur per duplum baseos B C. & proveniet D C.*

## PROPOSITIO XIV.



Tb. 13. Dato rectilineo A. æquale quadratum CH. constituere.

**P**er 45. 1. fiat rectangulum B D. æquale rectilineo A. si rectanguli latera sint æqualia, erit quadratum quod petitur. Si inæqualia, producas unum, puta DC. in F. sic ut CF. æqualis sit ipsi CB. secā bifariam DF. in G., & centro G. spatio DG. duc circum- lum DHF. produc latus BC. in H. quadratum quod fit ex CH. erit æquale rectangulo CE.

Prob. Recta DF. secā est æqualiter in G. & non æqualiter  
 a 5. 2. in C. <sup>a</sup> ergo rectangulum CE. sub inæqualibus segmentis DC. CB. hoc

## LIBER SECUNDUS. III

hoc est  $CF$ . una cum quadrato  
 segmenti medii  $GC$ . æqualia sunt  
 quadrato rectæ  $GF$ . <sup>b 15.</sup> hoc est  
 $GH$ . sed quadratum  $GH$ . <sup>Def. 1.</sup> æqua-  
 le est quadratis  $GC$ .  $CH$ . & con-  
 sequenter quadrata  $GC$ .  $CH$ .  
 æqualia sunt rectangulo  $CE$ . &  
 quadrato  $GC$ . Ergo si tollas  
 commune quadratum  $GC$ . re-  
 manebit quadratum rectæ  $CH$ .  
 æquale rectangulo  $CE$ . hoc est  
 rectilineo  $A$ . quod erat facien-  
 dum. <sup>c 47.1.</sup>

## MONITUM.

**I**n superioribus, frequenter ad-  
 hibui numeros: cum tamen in  
 demonstrationibus geometricis  
 sæpe usui esse non possint; quia  
 irrationales & incommensurabiles  
 quantitates non explicant. Sed  
 nota 1. Semper in omnibus præ-  
 poni geometricas demonstratio-  
 nes. 2. Non recipi quidem debe-  
 re numeros in demonstrandis ir-



rationalium aut incommensurabilium quantitatum habitudinibus & affectionibus, quæ sola quantitate continua cognoscuntur: verum nemo negarit in demonstrationibus quantitatis continuæ majoris lucis gratia, & explicandæ clarius propositionis, nos posse uti numeris, modo eos non accipiamus pro fundamento rationis. Unde robur suum non accipit demonstratio à numeris, sed lucem tantum. Et vero iis usus est Archimedes proposit. 2. de circuli dimensione & post eum omnes passim geometræ.

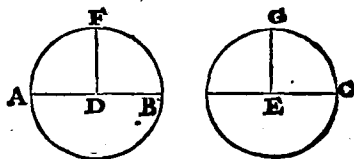
• N O T A.

*Hujus libri selectæ propositiones sunt 5.  
6. 12. 13.*

# EVCLIDIS ELEMENTUM III.

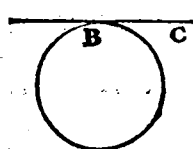
## DEFINITIONES

I.



*Æquales circuli sunt, quorum diametri A B. B C. sunt æquales: vel quorum, quæ ex centris D. & E. recta lineæ DF. EG. sunt æquales.*

II.

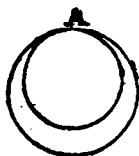


*Recta circulum tangere dicitur, quæ cum circulum tangat, puta in B. si producat in C. circulum non secat.*

K 3

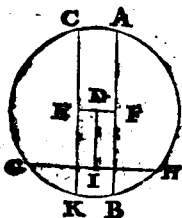
III.

III.



*Circuli se mutuo tangere dicuntur qui sese mutuo tangentes ut in A. sese mutuo non secant.*

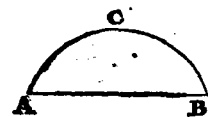
IV.



*In circulo aequaliter distare à centro recta dicuntur, cum perpendiculares DE. DF. à centro D. ad ipsas AB. CK. ductae aequales sunt; longius autem abesse dicitur GH. in quam major perpendicularis DI. cadit.*

V.

## V.



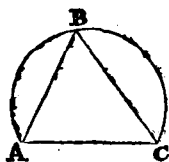
Segmentum  
circuli, est fi-  
gura qua sub  
recta AB. &  
circuli peripheria ACB. compre-  
benditur.

## VI.



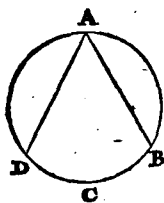
Segmenti au-  
tem angulus est  
CAB. qui sub  
recta linea AB.  
& circuli peripheria CA. compre-  
benditur.

## VII.



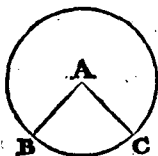
In segmento  
autem angulus est  
puta ABC. cum  
in segmenti cir-  
cumferentia sum-  
ptum fuerit pun-  
ctum quoddam B. & ab eo in ter-  
minos recta AC. segmentum ter-  
minantes, linea recta ut BA. BC.  
fuerint ducta.

## VIII.



Cum vero comprehendentes angulum  $DAB$ . recta  $AD$ .  $AB$ . aliquam assumunt peripheriam ut  $BCD$ . illi angulus dicitur insistere.

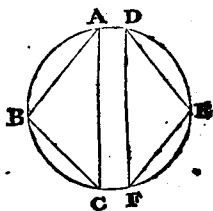
## IX.



Sector circuli est, cum ad ipsius circuli centrum  $A$ . angulus  $BAC$ . fuerit constitutus: comprehensa nimirum figura & à rectis  $AB$ .  $AC$ . angulum  $BAC$ . continentibus, & à peripheria  $BC$ . ab illis assumpta.

## X.

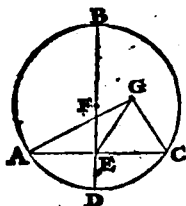
## X.



*Similia circuli segmenta sunt  
ABC. DEF. quæ angulos B A C.  
E D F. capiunt æquales, aut in qui-  
bus anguli C B A. F E D. inter se  
sunt æquales.*

## PROPOSITIO I.

Prob. I.



*Dati circuli  
ABC. centrum  
F. reperire.*

a 10. I.

b 11. I.

**P**rax. Ductam AC. a divide bifariam in E. Ad punctum E. b erige perpendicularem attingentem ambitum in B. & D. hanc BD. bifariam a secam in F. punctum F. erit centrum circuli.

Prob. Non est aliud punctum in recta BD. c cum centrum ibi sit tantum ubi linea secatur bifariam. Neque erit extra rectam BD. Sit enim in G. ducanturque GA. GE. GC. in triangulis GAE. GCE. Latera GA. AE. sunt d æqualia

ipsis GC. CE & GE. commune. Ergo tota triangula e sunt æqualia, & anguli

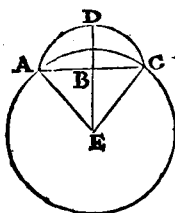
f GE A. GEC. æquales. f Ergo angulus GE A. rectus: quod esse non potest cum ejus partialis FEA. g sit rectus.

**Coroll.** Si linea recta in circulo aliam lineam rectam bifariam & ad angulos secat, in secante erit centrum.

**Def.** GE A. rectus: quod esse non potest cum ejus partialis FEA. g sit rectus.

**Ex const.** Si linea recta in circulo aliam lineam rectam bifariam & ad angulos secat, in secante erit centrum.

## PROPOSITIO II.



*Si in peripheria Tb. 1.*  
*circuli A B C.*  
*duo qual. puncta*  
*A. & C. accepta*  
*fuerint, recta*  
*AC. quæ ad ipsa*  
*puncta adjungi-*  
*tur, intra circulum A B C. cadet.*

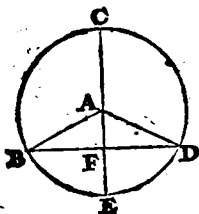
**P**rob. Si non cadat intra, cadat extra, sitque recta ADC. Centro E. a reperto, ducantur rectæ EA. EC. a 1. 3. ED. secetque ED. peripheriam in B. quia autem trianguli EADC. (qui rectilineus ab adversario ponitur) latera EA. EC. sunt b æqualia, erunt anguli b 15. c EAD C. ECDA. æquales. Est autem Def. externus ADE. d major interno DCE. c 5. 1. & per consequens quam EAD. Ergo d 16. 1. AE. & ei b æqualis EB. e major erit e 19. 1. quam ED. pars quàm totum. Non ergo recta ex A. ad C. ducta, extra circulum cadet: ergo intra. Q. E. D.

*Coroll.* Hinc patet lineam rectam circulum tangentem in uno tantum puncto tangere.



## PROPOSITIO III.

Th. 2.



*Si in circulo CBD. recta quadam CE. per centrum A. rectam quadam BD. non per centrum, bifariam in F. secet, & ad (angulos) rectos eam secabit: Et si ad rectos eam secet, bifariam quoque eam secabit.*

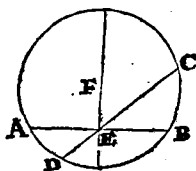
**P**rob. 1. pars. Ductis à centro A. æqualibus rectis AB AD. triangu-  
la ABF. AFD. habent omnia latera  
a 8. 1. æqualia singula singulis: a ergo anguli  
b 10. 1. AFB. AFD. sunt æquales, b ergo recti.

Prob. 2. pars. Latera AB. AD. sunt  
c 5. 1. æqualia: angulus ABD. c æqualis est  
d Ex angulo ADB. & AFB. d ipsi AFD.  
const. Ergo latera c BF. FD. sunt æqualia.  
e 26. 1. Q. E. D.

*Coroll.* In omni triangulo seu æqui-  
latero seu Isoscele linea recta basin bifa-  
riam secans, ad eandem perpendicularis  
est & contra.

P R O-

## PROPOSITIO IV.



*Si in circulo Th. 3.*

*A D B. dua  
recta A B.*

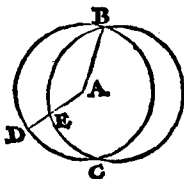
*C D. se invicem  
secant,  
non per cen-*

*trum F. extensa, sese bifariam non  
secant.*

**P**rob. Si una tantum per centrum transeat & alia non:  
 ergo altera alteram non secabit<sup>a 15.</sup>  
 bifariam. Si neutra transeat. Ex<sup>Def. 1.</sup>  
 centro F. in punctum sectionis E. ducō rectam FE. & sic  
 dico. Si rectæ AB. CD. forent  
 bisectæ in F. ang. FEB. & FEC.  
<sup>b</sup> forent recti & proinde æquales. <sup>b 3. 1.</sup>  
 Q. E. A.

## PROPOSITIO V.

Tb. 4.



*Si duo circuli DCB. ECB. sese mutuo secant in B. & C. non erit illorū idem centrum A.*

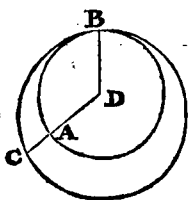
**P**rob. Ductæ rectæ AB. AD. erunt æquales, cū sint à centro ad circumferentiam. Rectę etiam AE. AB. erunt æquales, ob eandem rationem ergo AE. erit æqualis ipsi AD. Q. E. A.

a. 1.

Ax. 1.

P. R. O.

## PROPOSITIO VI.

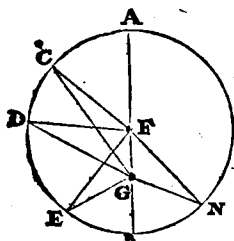


*Si duo circuli AB. CB. se  
se mutuo inte-  
rius tangant in  
B. eorum non  
erit idem cen-  
trum D.*

**P**rob. Ductis DB. DC. linea  
DA. est æqualis lineæ DB.  
cùm sint ductæ à centro ad cir-  
cumferentiam. Lineæ DC. DB.  
sunt æquales ob eandem causam.  
Ergo DA. DC. erunt æquales,  
pars toti, quod repugnat.

124 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO VII.

Tb. 6.



Si in circuli diametro AB. sumatur aliquod punctum G. quod non sit centrum circuli : &

à puncto G. quedam recta GC. GD. GE. GN. in circulum cadant : maxima quidem erit GA. in qua centrum F. minima vero reliqua GB. aliarum vero semper ejus, qua per centrum ducitur, propior GC. remotiore GD. major erit : solum autem dua recta GE. GN. ab illo puncto G. aequales in circulum cadunt ad utrasque (partes) minima vel maxima.

**P**rob. 1. pars. Ductis rectis F C. F D. F E. F N. ex centro F. duo latera C F. F G. trianguli C F G. <sup>a</sup> majora sunt tertio C G. at hæc sunt æqualia toti G A.

GA. ergo GA. est majus quam GC. Q. E. D.

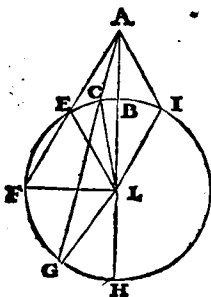
Prob. 2. Latera EG. GF. trianguli EGF. <sup>a</sup> majora sunt tertio EF. ergo majora sunt quàm linea FB. quæ est æqualis ipsi FE. ergo si dematur utrique communis recta GF. remanebit GE. major quam GB. Q. E. D.

Prob. 3. Triangula CFG. DFG. habent latera FC. FD. æqualia & latus FG. commune, angulus vero CFG. major est angulo DFG. totum parte: ergo latus CG. <sup>b</sup> majus erit quam DG. <sup>b</sup> 24. 1. Q. E. D.

Prob. 4. Facto angulo GFN. æquali GFE. GN. GE. erunt <sup>c</sup> æquales. Nec à puncto G. aliæ <sup>c</sup> 4. 1. duci possunt æquales ipsis GE. GN. erunt enim semper propiores ei quæ ducitur per centrum vel remotiores, & consequenter majores vel minores, per tertiam partem hujus. Q. E. D.

## PROPOSITIO VIII.

Th. 7.



Si extra circulum BEH. sumatur punctum quodpiam A. & à puncto ad circulum ducantur rectæ quædam AF. AG. AH. quarum una quidem per centrum L. reliquæ vero ut libet. In

eam quidem peripheriam cadentium rectarum maxima (erit) qua per centrum L. (ducitur) aliarum vero semper propior (ei) qua per centrum L. remotiore major erit. In convexam vero peripheriam cadentium rectarum minima quidem est illa qua inter punctum A. & diametrum BH. (ponitur) Aliarum vero ea qua propior est minima AB. remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ æquales ab eo puncto A. cadent in circulum ad utrasque partes minima AB. vel maxima AH.

**P**rob. 1. pars. Ductis rectis LG. LF. duo latera AL. LG. hoc est LH. a maiora sunt tertio AG. ergo AH. major erit quam AG. Q. E. D.

Prob. 2.

# LIBER TERTIUS. 127

Prob. 2. Latera  $AL$ .  $LG$ . trianguli  $ALG$ . sunt æqualia lateribus  $LF$ .  $LA$ . trianguli  $ALF$ . angulus autem  $ALG$ . major est angulo  $ALF$ .  $b$  ergo latus  $AG$ .  $b$  24.1. majus est latere  $AF$ . Q. E. D.

Prob. 3. Ductis rectis  $LC$ .  $LE$ . duo latera  $AC$ .  $LC$ . trianguli  $ACL$ .  $a$  ma-  $a$  20.1. jora sunt tertio  $AL$ . demantur æqualia  $LB$ .  $LC$ . remanebit  $AC$ . major quàm  $BA$ . Q. E. D.

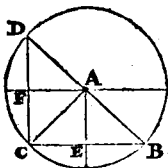
Prob. 4. Quia intra triangulum  $ALE$ . duæ rectæ  $AC$ .  $CL$ . junguntur:  $c$  erunt lateribus  $AE$ .  $EL$ . minores;  $c$  21.1. demptis igitur æqualibus  $LC$ .  $LE$ . remanebit  $EA$ . major quam  $CA$ . Q. E. D.

Prob. 5. Facto angulo  $ALI$ . æquali  $ALE$ . duo triangula illa  $d$  erunt æqua-  $d$  4. r. lia: ergo latera  $AI$ .  $AE$ . æqualia; neque alia duci potest recta, his æqualis: erit enim semper propior minimæ  $AB$ . vel remotior & consequenter  $c$  major  $c$  21.1. vel minor per partem quartam hujus. Q. E. D.



## PROPOSITIO IX.

7b. 8.



*Si intra circulum  
BCD. sumptum sit  
aliquod punctum  
A. à puncto vero  
ad circulum ca-  
dant plures quam  
duæ rectæ æquales  
AB. AC. AD. ac-  
ceptum punctum,  
centrum est circuli.*

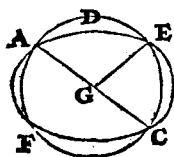
**P**rob. Ductis rectis BC. CD.  
divisisque bifariam per rectas  
AE. AF. triangula ADF. ACF.  
<sup>a</sup> erunt æqualia : ergo anguli  
<sup>a</sup> 8. 1. DFA. AFC. æquales : <sup>b</sup> ergo  
<sup>b</sup> 10. recti : ergo in linea FA. est circuli  
<sup>Def. 1.</sup> centrum. Rursus cum idem sit de  
<sup>c</sup> 1. 3. triangulis ACE. ABE. in recta  
AE. erit circuli centrum. Cum  
verò non sit in duobus locis, debet  
esse ubi se intersecant. Q. E. D.

## A L I T E R.

*A nullo puncto plures quam 2 duæ  
rectæ ad circumferentiam duci pos-  
sunt per 7. 3. ergo A. erit centrum.  
Q. E. D.*

P R O-

## PROPOSITIO X.



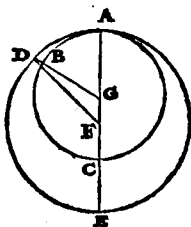
*Circulus AEF. 7b. 9.  
non secat circu-  
lum FDC. per  
plura puncta  
quam duo.*

**P**rob. Secet enim in tribus si-  
vis. Circuli EFC. centro G.  
<sup>a</sup> invento, ducantur rectæ GA. <sup>a</sup> 1. 3.  
GC. GE. quæ, quia sunt æqua-  
les, & attingunt ambitum circuli  
utriusque, punctum G. <sup>b</sup> erit <sup>b</sup> 9. 3.  
etiam centrum circuli utriusque;  
quod est absurdum per 5. hujus.

PRO-

## PROPOSITIO, XI.

Lib. 10.



*Si duo circuli  
ABC. AED.  
contingant sese  
interius in A.  
& sumpta fue-  
rint eorum cen-  
tra G. & F. ad  
eorum centra*

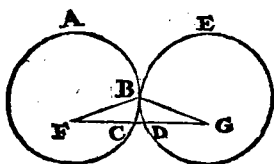
*adjuncta recta linea FA. & pro-  
ducta, in contactum A. cadet circu-  
lorum.*

**P**rob. Recta FG. conjungens  
eorum centra, non incidat in  
contactum sed alibi in D. à  
puncto G. centro circuli ABC.  
ducatur recta GA. ad contactum  
a 20. I. ut & FD. latera GD. GF. a ma-  
jora sunt tertio FD. ergo majora  
b latere FA. dempto ergo com-  
muni FG. remanebit GA. majus  
latere GD. Est autem GA. æqua-  
lis lateri GB. ergo GB. majus erit  
quam GD. pars toto. Q. E. A.

b 15.  
Def.

PRO-

## PROPOSITIO XII.

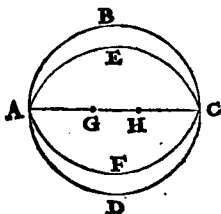


*Si duo circuli A B C. E B D. th. 10.  
contingunt se invicem exterius in B.  
qua ad iungitur ad eorum centra,  
per contactum transibit.*

**P**rob. Si neges: sit recta F G.  
centra coniungens. Ductis  
F B. G B. latera B F. B G. <sup>a</sup> ma- <sup>a</sup> 10. r.  
jora sunt tertio F G. sed B F. B G.  
sunt æqualia radiis F C. G D.  
ergo quoque F C. G D. majora  
sunt F C. C D. G D. pars tot.  
Q. E. A.

PRO-

## PROPOSITIO XIII.

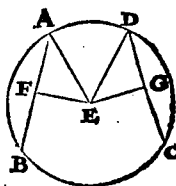


**Th. 12.** *Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam uno, sive intus, sive extra tangit.*

**Prob.** Tangat enim in duobus, puta A. & C. centrum <sup>a</sup> debet esse in linea, quæ junget contactum circulorum: utriusque  
<sup>a 11.</sup>  
<sup>& 12.</sup>  
<sup>3.</sup>  
<sup>b 6. 3.</sup> autem non <sup>b</sup> potest esse idem centrum. Ergo in illa recta erunt duo centra, puta G. & H. quod fieri non potest, cum linea in unico puncto, possit tantum secari bifariam.

PRO-

## PROPOSITIO XIV.

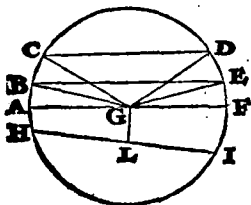


*In circulo ABC. Tb. 13.  
 aequales rectæ AB.  
 DC. æqualiter di-  
 stant à centro E.  
 & æqualiter di-  
 stantes à centro,  
 sunt sibi invicem  
 æquales.*

**P**rob. A centro E. in rectas AB. CD.  
 duca perpendiculares EF. EG. rectæ a 12. 1.  
 AB. CD. sectæ b erunt bifariam. b 3. 3.  
 Junctis EA. ED. quadratum rectæ ED.  
 cest æquale quadratis rectarum DG. GE. c 47. 1.  
 ut & quadratum AE. quadratis recta-  
 rum AF. FE. Demptis ergo ab æquali-  
 bus AF. FE. ipsis DG. GE. æqualium  
 linearum quadratis AF. DG. remanebit  
 recta EF. æqualis rectæ EG. & conse-  
 quenter rectæ AB. CD. d æqualiter di- d 4.  
 stant à centro. Def. 3.

Prob. 2. pars. Ex probatis quadrata  
 EG. GD. sunt æqualia quadratis EF. FA.  
 & quadratum EG. æquale quadrato EF.  
 ergo quadratum FA. æquale est quadra-  
 to GD. e ergo recta BA. æqualis est rectæ e 7.  
 DC. Q. E. D. Ax. 1.

## PROPOSITIO XV.



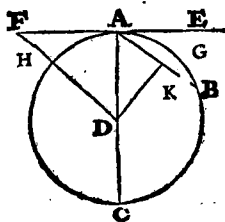
76. 14. *In circulo ABCD. maxima quidem est diameter AF. aliarum verò semper propior BE. centro G. erit major remotiore CD.*

**P**rob. 1. pars. Ductis GB. GE. duo latera GB. GE. trianguli a 20. 1. GBE. a majora sunt tertio BE. at hæc sunt æqualia diametro AF. ergo AF. major est quam BE. Q. E. D.

Prob. 2. Ductis rectis GC. GD. duo latera GC. GD. sunt æqualia lateribus GB. GE. angulus vero BGE. major est angulo CGD. b 24. 1. b ergo latus BE. majus latere CD. Q. E. D.

PRO-

## PROPOSITIO XVI.



*Qua ab rh. 15.*

*extremitate  
diagrammi  
A C. ad  
rectos an-  
gulos linea  
E F. duci-  
tur, cadet*

*extra circulum A B C. & in lo-  
cum inter ipsam E F. & circumfe-  
rentiam, A B C. altera recta A B.  
non cadet: & semicirculi angulus  
D A G B. major erit omni acuto an-  
gulo rectilineo: reliquus autem  
E A G B. minor.*

**P**rob. I. pars. Ex centro D. du-  
catur recta D H F. utcumque:  
latus D F. subtendens angulum  
F A D. rectum <sup>a</sup> majus erit D A. <sup>a 19. 1.</sup>  
hoc est D H. cum itaque H. sit in  
circumferentia erit F. extra. Simili  
ratione de omnibus pñctis in linea  
F A E. argumentari licet. Q. E. D.



Prob. 2. pars. Ad AB. quæ inter peripheriam & rectam EF. caderet ducatur perpendicularis DK. ergo latus DA. majus erit <sup>b 19. 1.</sup> b ipsi DK. sed punctum A. est in circumferentiâ itaque K. & tota AB. erit intra circulum. Q. E. D.

Prob. 3. Ut fieret angulus major angulo DAGB. semicirculi, deberet duci recta inter rectam EA. & peripheriam AB. quod jam probavi fieri non posse.

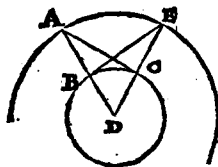
Prob. 4. Si enim aliquis angulus rectilineus constitui posset minor angulo EAGB. contactus, duceretur recta inter AE. & peripheriam AB. quod, ut jam dixi, fieri non potest.

*Corollarium.*

Hinc communiter elicitur recta ad extremum diametri perpendicularem, tangere circulum, & in unico puncto geometrice tangere: <sup>c 2. 3.</sup> c nam si plura tangeret, caderet c intra circulum.

PRO-

## PROPOSITIO XVII.



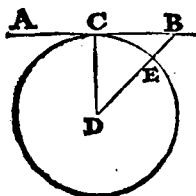
*A dato puncto Prob. 2.  
A. rectam li-  
neam A C.  
ducere, qua  
datum tan-  
gat circulum  
B C D.*

**P**raxis. Centro D. spatio A. fiat pars circuli A E. ducatur recta D A. & ad punctum B. excitetur perpendicularis B E. jungaturque recta D E. à puncto A. ducatur recta A C. hanc dico tangere circulum B C D.

Prob. Triangula ADC. BED. se habent juxta 4. 1. cum latera DA. DE. DB. DC. sint <sup>a</sup> æqua- <sup>a</sup> 15. 1. lia & angulus D. communis. Ergo <sup>Dif.</sup> cum angulus E B D. sit rectus, rectus etiam erit D C A. recta itaque A C. <sup>b</sup> tanget circulum. <sup>b</sup> 16. 3. Q. E. F.

## PROPOSITIO XVIII.

Th. 16.



*Si aliqua  
recta AB.  
tangat circu-  
lum DCE.  
à centro vero  
D. ad conta-  
ctum C. qua-*

*dam recta DC. adjungatur : ad-  
juncta DC. perpendicularis erit  
ad AB. qua continget.*

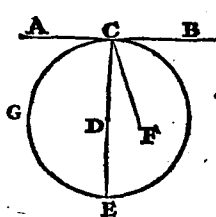
**P**rob. Si negas : sit alia , puta  
DB. perpendicularis , ergo  
cum angulus B. ponatur rectus  
erit angulus C.<sup>a</sup> minor recto, ergo  
latus DC. hoc est DE. <sup>b</sup> majus  
erit latere DB. pars toto quod est  
absurdum.

a 17. 1.

b 19. 1.

PRO-

## PROPOSITIO XIX.



*Si circulum* 16. 17.

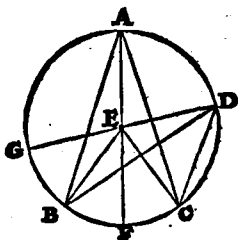
*EGC. contingat aliqua recta AB. à contactu vero C. tangenti AB. ad rectos angulos recta li-*

*nea EC. ducta sit, in recta ducta EC. erit centrum circuli.*

**P**rob. Si negas, sit alibi nimirum in F. proinde ducta FC. ipsi AB. <sup>a</sup> erit perpendicularis: a 18. 3. ergo angulus rectus FCB. recto DCB. erit æqualis, pars toti quod est absurdum.

## PROPOSITIO XX.

7b. 18.



In circulo  
DFGA.

angulus  
BEC. ad  
centrum  
E. duplū  
est anguli  
BAC. ad

peripheriam, cum fuerit eadem pe-  
ripheria BC. basis angulorum.

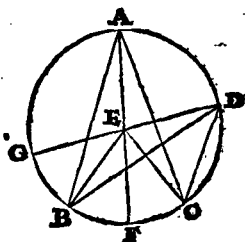
**P**rob. Id tribus potest modis  
contingere. Incluantur rectę  
AB. AC. rectas EB. EC. ducta-  
que AF. per centrum E. duo la-  
tera EA. EB. erunt æqualia <sup>a</sup> ergo  
<sup>a</sup> 5. 1. anguli EBA. EAB. æquales: an-  
gulus autem BEF. duobus EAB.  
<sup>b</sup> 32. 1. EBA. <sup>b</sup> est æqualis, ergo duplus  
anguli BAF. Idem dic de angulo  
FEC. respectu anguli EAC. ergo  
totus BEC. totius BAC. erit  
duplus. Q. E. D.

2. Rectę

2. Rectæ  $DG$ .  $DB$ . non includant rectas  $EC$ .  $EB$ . iterum cum latera  $ED$ .  $EB$ . sint æqualia erunt  $EDB$ .  $EBD$ . <sup>c</sup> anguli <sup>c</sup> 5. 1. æquales. His autem duobus, angulus  $GEB$ . est <sup>d</sup> æqualis. Ergo <sup>d</sup> 32. 1. idem erit duplus anguli  $GDB$ .  
Q. E. D.

3. Triangula  $BEC$ .  $BDC$ . sese interfecerint, ducaturque recta  $DG$ . per centrum  $E$ . totus angulus  $GEC$ . erit duplus totius  $GDC$ . angulus vero  $GEB$ . duplus est anguli  $GDB$ . ergo reliquum  $BEC$ . duplum erit reliqui  $BDC$ . Q. E. D.

## PROPOSITIO XXI.



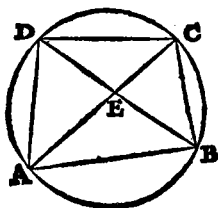
*Th. 19. In circulo ADCB. qui in eodem segmento B C. sunt anguli B A C. B D C. sunt inter se aequales.*

*a 20. 3. Prob. Angulus BEC. a est duplus anguli B A C. & duplus anguli B D C. b ergo anguli B A C. B D C. sunt inter se aequales. Q. E. D.*

*b 1. Ax.*

PRO-

## PROPOSITIO XXII.



*Quadrilateri- Tb. 20.  
rorum in cir-  
culo ABCD.  
descriptorum  
oppositi an-  
guli DCB.  
DAB. duo-*

*bis rectis sunt aequales.*

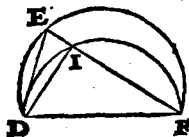
**P**rob. Diametris AC. DB.  
ductis, anguli ADB. ACB.  
in eadem portione <sup>a</sup> sunt æqua- <sup>a 21. 3.</sup>  
les, similiterque anguli BAC.  
BDC. ergo totus angulus ADC.  
est æqualis angulis BCA. BAC.  
sed anguli BCA. BAC. cum ter-  
tio ABC. <sup>b</sup> valent duos rectos: <sup>b 32. 1.</sup>  
ergo angulus ADC. æqualis ipsis  
BCA. BAC. cum angulo ABC.  
valebit duos rectos. Idem de aliis  
oppositis dicetur. Ergo, &c.  
Q. E. D.

PRO-



## PROPOSITIO XXIII.

Tb. 21.



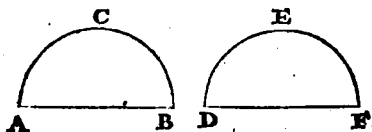
*Super eadem  
recta DF. duo  
segmenta cir-  
culorum similia  
DIF. DEF.  
& inaequalia*

*non constituentur ad easdem partes.*

**P**rob. Sint enim si fieri potest  
DIF. DEF. similia segmen-  
ta, ductis rectis ED. EF. ID.  
a 10. anguli DIF. DEF. <sup>a</sup> erunt  
Def. 3. æquales, quod est absurdum  
per 16. 1.

PRO-

## PROPOSITIO XXIV.



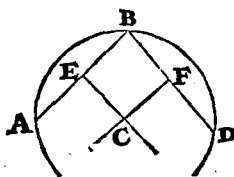
*Super aequalibus rectis AB. DF. <sup>Tb. 22.</sup>  
similia segmenta circulorum sunt in-  
ter se aequalia.*

**P**rob. Collocetur AB. super DF.  
<sup>a</sup> congruent. Etenim si se- <sup>a 8.</sup>  
gmenta non congruant vel unum <sup>Ax.</sup>  
totum extra aliud cadet, quod est  
absurdum per 23. 3. vel cadet par-  
tim intra, partim extra; & sic cir-  
culus circulum secabit in pluribus  
punctis quam duobus, quod re-  
pugnat per 10. 3.

N PRO-

## PROPOSITIO XXV.

Prob. 3.



*Circuli segmento dato A B D. describere circulum, cuius est segmentũ.*

**P**rax. Accipiantur in dato segmento tria puncta A B D. ductis rectis A B. B D. <sup>a 10. &</sup> divisisque bifariam & ad angulos rectos per rectas C E. C F. se inu- <sup>11. 1.</sup> tuo intersecantes in puncto C. illud erit centrum.

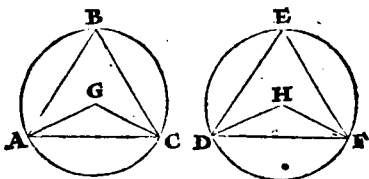
Prob. Per 1. 3. centrum est in utraque C E. & C F. ergo ubi se intersecant. Circuli enim unius, unicum tantum potest esse centrum. Q. E. D.

## S C H O L I U M.

*Hinc datis tribus punctis facile centrum circuli reperitur per data puncta transiens.*

P R O-

## PROPOSITIO XXVI.



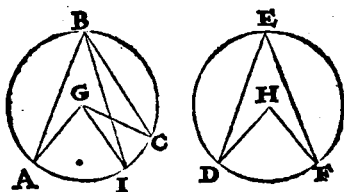
*In æqualibus circulis ABC. DEF. <sup>th. 13.</sup>  
 æquales anguli G. & H. B. & E.  
 æqualibus peripheriis AC. DF. insi-  
 stunt, sive ad centra G. & H. sive ad  
 peripharias B. & E. constituti sint.*

**P**rima pars. Prob. Trianguli AGC.  
 latera GA. GC. & angulus G. po-  
 nuntur æqualia lateribus HD. HF.  
 & angulo H. <sup>a</sup> ergo bases AC. DF. sunt <sup>a</sup> 4. 1.  
 æquales. Ergo <sup>b</sup> peripheriæ AC. DF. <sup>b</sup> 24. 3.  
 erunt etiam æquales. Q. E. D.

Prob. 2. Anguli ABC. DEF. po-  
 nuntur æquales: <sup>c</sup> ergo segmenta ABC. <sup>c</sup> Def.  
 DEF. sunt similia: <sup>d</sup> ergo æqualia cum <sup>10. 3.</sup>  
 rectæ AC. DF. sint æquales. Ergo cum <sup>d</sup> 23. 5.  
 circuli ponantur æquales, remanebunt  
 segmenta AC. DF. <sup>e</sup> æqualia. <sup>e</sup> 3.

*Ax.*

## PROPOSITIO XXVII.

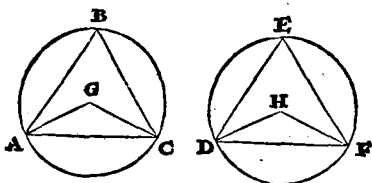


*Th. 24.* In equalibus circulis ABI. DEF. anguli qui in equalibus peripheriis AI. DF. insistant sunt inter se æquales, sive ad centra G. & H. sive ad peripherias B. & E. constituti, insistant.

**P**rob. Si non sint æquales, sit  
 a 23. 1. alter minor, puta  $AGI$ .<sup>a</sup> fiat-  
 que  $AGC$ . ipsi  $DHF$ . æqualis:  
 b 25. 3. ergo peripheria AC. erit<sup>b</sup> æqua-  
 lis peripheriæ DF. sed peripheria  
 DF. ponitur æqualis ipsi AI.  
 c 7. ergo AC. & AI. erunt æquales,  
 Ax. pars toti: Idem<sup>c</sup> dic de angulis  
 d 20. 3. B. & E. cum G. & H.<sup>d</sup> sint eo-  
 rum dupli.

P R O-

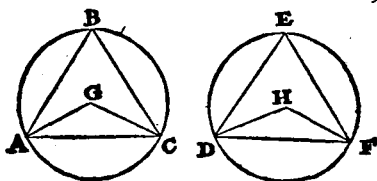
## PROPOSITIO XXVIII.



*In aequalibus circulis ABC. DEF. Tb. 25.  
 æquales rectæ AC. DF, æquales  
 peripherias AC. DF. ABC. DEF.  
 auferunt, majorem quidem majori,  
 minorem autem minori.*

**P**rob. Ductis rectis GA. GC.  
 HD. HF. triangula AGC.  
 DHF. <sup>a</sup> sunt æqualia. Ergo an- <sup>a</sup> 8. <sup>a</sup>  
 gulus G. angulo H. est æqualis :  
 ergo peripheriæ AC. DF. <sup>b</sup> æ- <sup>b</sup> 26. <sup>b</sup>  
 quales. <sup>c</sup> ergo reliquæ ABC. <sup>c</sup> 3. <sup>c</sup>  
 DEF. sunt æquales. Q. E. D. <sup>ax.</sup>

## PROPOSITIO XXIX.

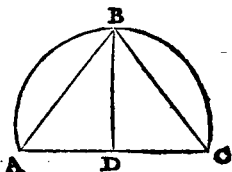


*Th. 26. In aequalibus circulis ABC. DEF. aequales peripherias ABC. DEF. aequales rectae AC. DF. subtendunt.*

**P**rob. Ductis rectis GA. GC. HD. HF. anguli G. & H.   
 a 27. 3. <sup>a</sup> erunt aequales: latera etiam GA. GC. HD. HF. sunt aequalia ex   
 suppositione: ergo bases AC.   
 b 4. 1. DF. <sup>b</sup> erunt aequales. Q. E. D.

PRO-

## PROPOSITIO XXX.



*Datam peripheriam ABC. sc- Prob. 4.  
esse bifariam.*

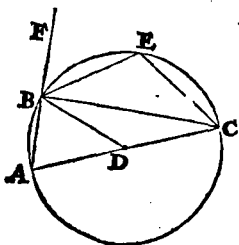
**P**raxis. Ducatur recta AC.  
quam divide <sup>a</sup> bifariam in D. <sup>a</sup> 10. 11.  
per perpendicularem DB. erit  
peripheria secta bifariam in B.

Prob. Ductis rectis AB. CB.  
triangula ABD. DBC. se ha-  
bent juxta 4. 1. ergo latera AB.  
CB. sunt æqualia. <sup>b</sup> Ergo peri- <sup>b</sup> 28. 2.  
pheriæ quas subtendunt sunt æ-  
quales. Q. E. D.



## PROPOSITIO XXXI.

16. 27.



In circulo  
 ABEC.  
 angulus  
 ABC. in  
 semicirculo  
 rectus est:  
 qui autem  
 in majore

segmento BAC. minor recto: qui  
 vero in minore segmento BEC. ma-  
 jor recto: & insuper angulus CBA.  
 ex recta CB. & peripheria BA.  
 majoris segmenti, recto quidem ma-  
 jor est; minoris autem segmenti an-  
 gulus EBC. qui ex peripheria EB.  
 & recta BC. minor est recto.

Prob. 1. pars. Centro D. ductis  
 rectis DA. DB. DC. anguli  
 15. 1. DAB. DBA. <sup>a</sup> erunt æquales:  
 itemque anguli DCB. DBC.  
 ergo totalis angulus ABC. est  
 æqualis angulis A. & DCB. sed  
 his

his<sup>b</sup> est æqualis  $FB C$ . ergo an-<sup>b 32. 1.</sup>  
gulus  $ABC$ .<sup>c</sup> est rectus. <sup>c 13. 1.</sup>

Prob. 2. Angulus  $ABC$ . est  
rectus: ergo angulus  $BAC$ . in  
majore segmento<sup>d</sup> est minor<sup>d 32. 1.</sup>  
recto.

Prob. 3. Fiat quadrilaterum  
 $ABEC$ . angulus  $A$ .<sup>e</sup> minor est <sup>e per 1.  
partem  
hujus.</sup>  
recto, ergo angulus  $BEC$ . in mi-  
nori segmento<sup>f</sup> est major recto. <sup>f 22. 3.</sup>

Prob. 4. Angulus ex periphe-  
ria  $AB$ . & rectæ  $CB$ . est major  
angulo recto composito ex rectis  
 $AB$ .  $BC$ . totum videlicet parte.

Prob. 5. Angulus compositus  
ex peripheria  $EB$ . & recta  $CB$ .  
minor est angulo  $FB C$ . recto  
composito ex recta  $FB$ .  $BC$ . pars  
toto. Hujus propositionis autor  
fertur Thales Milesius annis ante  
Christum, 650.

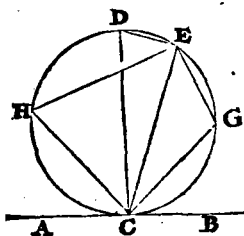
## S C H O L I U M.

*Hinc in triangulo rectangulo, secta hy-  
pothenusa bifariam, erit illud punctum  
centrum circuli tria puncta illa pertrans-  
euntis, adeoque examen exacta norma.*

P R O

## PROPOSITIO XXXII.

76. 28.



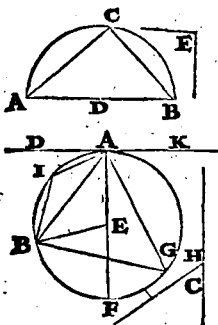
*Si circulū  
CHEG.  
tetigerit  
aliqua re-  
cta A B. à  
tactu au-  
tem C. du-  
catur qua-*

*dam recta, secans circulum D C.  
vel E C. anguli quos ad tangentem  
A B. faciet, erunt aequales angu-  
lis qui sunt in alternis circuli por-  
tionibus, id est angulus A C E.  
æqualis est angulo G. & angulus  
B C E. angulo H.*

**P**rob. Ducta perpendiculari  
D C: cum angulus A C D.  
sit rectus; angulus qui fieret in  
a 31.1. semicirculo, illi <sup>a</sup> esset æqualis:  
si vero non sit rectus ut A C E.  
primo duc rectam D C. per cen-  
trum, deinde accipe in periphe-  
ria

ria aliquod punctum puta G du-  
 canturque rectæ D E. E G. G C.  
 cum angulus D E C. in semicir-  
 culo <sup>b</sup> sit rectus, reliqui duo puta <sup>b</sup> 13. 3.  
 E C D. E D C. <sup>c</sup> valent unum <sup>c</sup> 32. 1.  
 rectum: sed anguli B C E. &  
 E C D. valent etiam unum re-  
 ctum, cum recta D C. sit per-  
 pendicularis: dempto igitur com-  
 muni E C D. remanebit B C E.  
 æqualis angulo E D C. qui <sup>d</sup> æ- <sup>d</sup> 27. 3.  
 qualis est angulo C H E. ergo &  
 angulus B C E. angulo C H E.  
 æqualis. Rursus, cum quadrila-  
 teri D G. anguli in circulo op-  
 positi E D C. E G C. <sup>e</sup> valeant <sup>e</sup> 22. 3.  
 duos rectos, sicut & anguli <sup>f</sup> A C E. <sup>f</sup> 13. 1.  
 E C B. & angulus C D E. sit <sup>g</sup> æ- <sup>g</sup> per 1.  
 qualis angulo B C E. remanebit <sup>partem</sup>  
 angulus G. angulo A C E. æqua- <sup>hujus.</sup>  
 lis. Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIII.

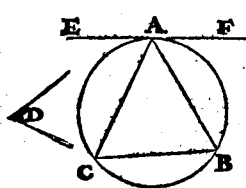
**Prob. 5.**

¶ Super data  
recta AB.  
portionem  
circuli de-  
scribere, qua  
capiat angu-  
lum dato an-  
gulo recti-  
lineo aqua-  
lem.

**S**i datus angulus sit rectus, qua-  
lis est E. recta A B. divisa bi-  
fariam in D. centro D. spatio,  
D A. si fiat semicirculus A C B.  
ductis rectis A C. C B. angulus  
a 31. 1. C. <sup>a</sup> erit æqualis dato angulo E.  
quia erit in semicirculo. Si angu-  
lus sit acutus ut C. sitque data  
recta B A. ad punctum A. fiat an-  
gulus D A B. <sup>b</sup> æqualis angulo C.  
ductaque ad punctum A. perpen-  
diculari F A. fiat angulus E B A.  
æqua-

æqualis angulo E A B. latera E B.  
 E A.<sup>c</sup> erunt æqualia: quare si pun-<sup>c</sup> 6. 1.  
 cto E. spatio E A. fiat circulus,  
 transibit per punctum B. quo posi-  
 to sic pergo. Cum recta F A. sit  
 diameter, & recta D A. ad ejus  
 extremum sit ei perpendicularis, <sup>d per</sup>  
<sup>corol.</sup>  
 D A B. <sup>c</sup> erit angulo cuicunque, <sup>16. 3.</sup>  
<sup>c</sup> 32. 3.  
 qui fiet in alterna circuli portione,  
 puta angulo A G B. æqualis: ergo  
 portio A H G B. continet angu-  
 lum æqualem angulo dato C. Si  
 vero angulus sit obtusus puta H.  
 eadem erit demonstratio: angulus  
 enim A I B. ipsi H. <sup>f</sup> erit æqualis. <sup>f</sup> 22. 3.

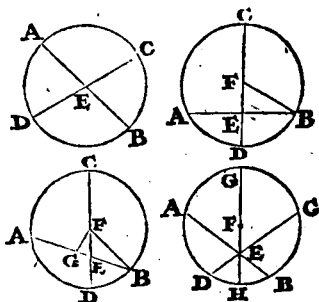
## PROPOSITIO XXXIV.



*A dato cir-  
 culo ABC.  
 segmentum  
 CBA. ab-  
 scindere ca-  
 piens angulū  
 B. æqualem  
 dato angulo  
 rectilineo D.*

<sup>a</sup> **D**ucatur tangens E F. ad punctum A. <sup>a</sup> 17. 3.  
<sup>b</sup> fiat angulus CAE. æqualis dato D. <sup>b</sup> 23. 1.  
 portio ABC. <sup>c</sup> capiet angulum B. æ-  
 qualem dato. Q. E. F. <sup>c</sup> 32. 3.  
 O P R O.

## PROPOSITIO XXXV.



**Th. 29.** Si in circulo ADBC. dua rectæ AB. CD. se mutuo in E. secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis unius AE. EB. æquale est ei quod sub segmentis alterius CE. ED. comprehenditur rectangulo.

**Prob. 1.** Rectæ AB. CD. secent se in centro E. rectangulum unum, alteri erit æquale : cum omnes radii sint æquales.

2. Sola CD. transeat per centrum F.
- 3. 3.** dividatque rectam AB. bifariam in E. & ac proinde ad angulos rectos, ducaturque recta FB. quo facto, cum recta CD. secetur in æqualia in F. & non æqualia in E. erit rectangulum sub inæqualibus segmentis CE. ED. cum quadrato segmenti intermediæ EF. b æquale quadrato dimi-
- 5. 2.** menti intermediæ EF. b æquale quadrato dimi-

dimidiæ FD. vel FB. sed quadratum FB. est æquale quadratis BE. EF. quæ per *c* 47. 1. consequens æqualia sunt rectangulo CE. ED. cum quadrato EF. Dempto igitur communi FE. remanebit rectangulum CE. ED. æquale rectangulo sub BE. EA. Q. E. D.

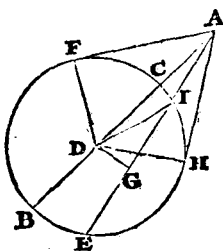
3. Recta CD. transiens per centrum F. rectam AB. non dividat bifariam in E. ductaque recta FB. & perpendiculari FG. rectangulum sub CE. ED. cum quadrato FE. d erit æquale quadrato FD. vel FB. rectangulum etiam sub AE. EB. cum quadrato GE. est æquale quadrato GB. adde quadratum FG. jam cum quadratum FB. sit æquale quadratis FG. GB. erit rectangulum AE. EB. cum quadratis EG. GF. æquale quadrato FB. hoc est rectangulo CE. ED. & quadrato FE. ergo cum quadratum FE. sit æquale quadratis FG. GE. si ab uno demas FE. & ab alio EG. GF. remanebunt æqualia rectangula CE. ED. & AE. EB. Q. E. D.

4. Si neutra transeat per centrum & se secent utcunque, ducatur ad intersectionem E. recta GH. transiens per centrum: cum rectangulum sub CE. ED. e sit æquale ei quod sub HE. EG. Idemque AE. EB. sit æquale ipsi GE. *c per 3. partem hujus.* EH. erunt æqualia rectangula sub CE. ED. & AE. EB. Q. E. D.



## PROPOSITIO XXXVI.

Th. 10.



*Si extra circulum FBE. sumatur punctum aliquod A. ab eoque in circulum cadant dua recta: & hac quidem AB. secet circulum in C. illa autem AF.*

*tangat in F. Quod sub tota secante AB. & exterius assumpta AC. inter punctum A. & convexam peripheriam C. comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente AF. describitur quadrato.*

**P**rob. Transeat i. recta AB. per centrum D. ductaque recta DF. cum recta CB. bifariam secta sit in D, & ei recta AC. adjiciatur, rectangulum sub AB. & AC. contentum, una cum quadrato DC. vel DF. æquale est ei quod à DC. cum AC. tanquam una linea fit quadrato. Sed quadratum DA. a 6. 2. b est æquale quadratis DF. FA. ergo dempto communi FD. remanebit quadratum FA. æquale rectangulo sub AB. & CA. Q.E.D.

2. Si

2. Si recta AE. non transeat per centrum, à centro D. duc perpendicularem DG. hæc secabit rectam EI. bifariam, cum igitur recta EI. sit secta bifariam in G. & ei recta IA. adjiciatur, erit rectangulum sub AE. & sub AI. cum quadrato GI. æquale quadrato GA. d 6. 2. addito ergo quadrato DG. erit rectangulum sub AE. & sub IA. cum quadratis IG. GD. hoc est quadrato DI. hoc est DF. æquale quadrato DA. sed DA. est æquale quadratis FA. FD. demptis ergo æqualibus DF. DI. remanebit quadratum FA. æquale rectangulo sub AE. & AI. Q. E. D.

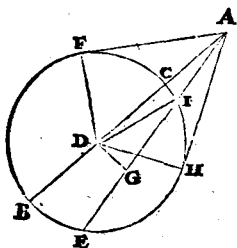
*Coroll. 1.* Hinc sequitur, si à puncto quovis extra circulum sumpto, plures rectæ circulum secantes ducantur, rectangula comprehensa sub totis lineis & partibus exterioribus, inter se esse æqualia.

*Coroll. 2.* Dux rectæ, ab eodem puncto ductæ, quæ circulum tangunt, sunt inter se æquales.

*Coroll. 3.* Ab eodem puncto extra circulum sumpto, duci tantum possunt dux rectæ, quæ circulum tangunt.

## PROPOSITIO XXXVII.

Tab. 31.



*Si extra  
circulum  
FHE.  
sumatur  
punctum  
aliquod-  
A. ab eo-  
que pun-  
cto in*

*circulum cadant dua recta AF. AB.  
vel AE. & hac quidem AB. secet  
circulum : illa autem AF. incidat :  
sit autem quod sub tota secante AB.  
& exterius assumpta CA. inter  
punctum & convexam peripheriam,  
rectangulum aequale ei quod ab in-  
cidente AF. describitur : incidens  
illa circulum tanget.*

<sup>a</sup> 17. 3. **P**rob. <sup>a</sup> Duc tangentem AH.  
& ad H. rectam DH. cum  
<sup>b</sup> 36. 3. ergo quadratum AH. <sup>b</sup> sit æquale  
rectangulo sub AB. CA. & idem  
rectangulum sub AB. CA. po-  
natur

# LIBER TERTIUS. 163

natur æquale quadrat o F A. lineæ  
 F A. H A. erunt æquales, latera  
 item F D. H D. sunt æqualia &  
 basis A D. communis : ergo tota  
 triangula <sup>c</sup> sunt æqualia. Ergo <sup>c</sup> 8. 1.  
 cum angulus A H D. sit <sup>d</sup> rectus, <sup>d</sup> 18. 3.  
 rectus etiam erit AFD. ergo AF.  
 circulum tãget per coroll. 16. 3.

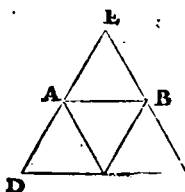
## N O T A.

*Selectiores hujus libri propositiones sunt. 20. 22. 31. 35. 36.*

# E V C L I D I S

## E L E M E N T U M I V .

### D E F I N I T I O N E S .



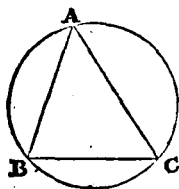
I. *Figura rectilinea , in figura rectilinea inscribi dicitur , cum singuli, ejus figura , qua inscribitur, anguli , singula latera ejus qua inscribitur tangunt.*

**U**t triangulum A B C. inscriptum est triangulo D E F. quia anguli A. B. C. tangunt latera D E. E F. D F.

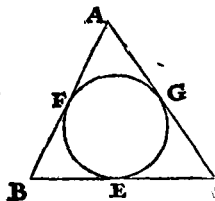
2. *Similiter & figura circum figuram describi dicitur, cum singula ejus quæ circumscribitur, latera, singulos ejus figura angulos tetigerint, circum quam illa describitur.*

Ut triangulum D E F. dicitur propriè describi circa triangulum A B C. quia singula latera majoris trianguli, singulos angulos minoris tangunt. Dixi propriè, quia ut impropriè dicatur figura aliqua inscribi vel describi, sufficit, ut bene advertit illustrissimus Princeps Flusates Candalla ut nullus sit angulus interioris figuræ, qui non tangat angulum aliquem, vel latus vel planum figuræ exterioris; & eo sensu intelligendæ sunt propositiones Hypsiclis lib. 15. elementorum.

3. Fi-



3. *Figura autem rectilinea, in circulo inscribi dicitur, cum singuli, ejus figura, quæ inscribitur, anguli, tetigerint circuli peripheriam.*

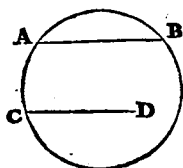


4. *Figura vero rectilinea circa circumscriptum describi dicitur, cum singula latera ejus quæ circumscribitur, circuli peripheriam tangunt.*

5. *Similiter & circulus in figura inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera tangit ejus figura in qua inscribitur.*

6. Cir-

6. *Circulus autem circum figuram describi dicitur, cum circuli peripheria, singulos tangit ejus figura, quam circumscribit, angulos.*



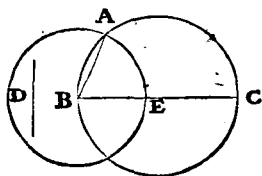
7. *Recta in circulo accommodari, seu coaptari dicitur, cum ejus extrema in circuli peripheria fuerint.*

Sic *A B.* dicitur in circulo accommodata non vero *C D.*

PRO-



## PROPOSITIO I.



*Prob. 1.* In dato circulo  $A B C$ . accommodare rectam  $B A$ . aequalem data recta  $D$ . quae circuli diametro  $B C$ . non sit major.<sup>a</sup>

*a 7.*

*Def. 4.*

**D**ati circuli ducas diametrum  $B C$ . si data recta  $D$ . æqualis sit diametro  $B C$ . factum est quod petitur. Si  $D$ . minor sit diametro : <sup>b</sup> abscindatur  $B E$ . æqualis ipsi  $D$ . & centro  $B$ . spatium  $B E$ . fiat circulus  $E A$ . dicta jam recta  $B A$ . coaptata erit <sup>c</sup> in circulo  $B A C$ . & <sup>d</sup> æqualis ipsi  $B E$ . & consequenter ipsi  $D$ .  $Q. E. F.$

*c 7.*

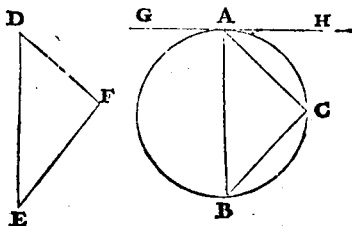
*Def.*

*d 15.*

*Def. 1.*

PRO-

## PROPOSITIO II.

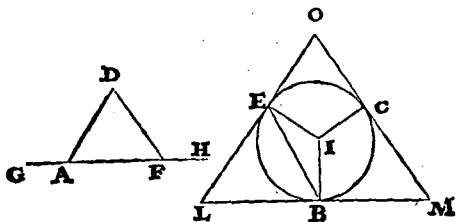


*In dato circulo A B C. triangulum A B C. describere, dato triangulo D E F. æqui angulum.* Prob. 2.

<sup>a</sup> **F**iat tangens G H. ad punctum <sup>a</sup> 16. 3. A. fiat angulus H A C. <sup>b</sup> æ- <sup>b</sup> 23. 1. qualis angulo E. & G A B. angulo F. ducta recta B C. factum erit quod petitur.

Prob. Angulus H A C. æqualis est <sup>c</sup> angulo B. & similiter angulus G A B. angulo C. ergo & angulus E. angulo B. & angulus F. angulo C. & consequenter angulus D. angulo A. <sup>d</sup> æqualis. Ergo triangulum triangulo æqui angulum in <sup>d</sup> Cor. 2. dato circulo inscriptum. <sup>32. 1.</sup> Q. E. F.

## PROPOSITIO III.



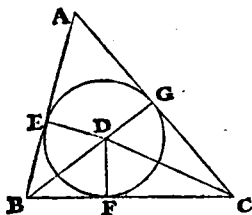
*Prob. 3.* Circa datum circulum BCE. describere triangulum LMO. æquiangulum dato triangulo D. F. A.

*a 23. 1.* **D**ati trangu- latus AF. produc  
in G. & H. angulo D F H.  
æqualis fiat ad centrum angulus  
CIB. & angulo D A G. angulus  
*b 11. 1.* EIB. & ad puncta EBC. *b* ducas  
*c Ex* perpendiculares quæ *c* tangentes  
*16. 3.* erunt scilicet MO. ML. LO.  
& coëuntes petitum triangulum  
constituent. Quod autem concur-  
rant patet; nam uterque angulo-  
rum ad A. & C. est rectus: ergo si  
intelligatur duci linea BE. erunt  
duo anguli versus L. minores duo-

duobus rectis: <sup>d</sup> ergo in illam par- <sup>d 11.</sup>  
tem protractæ tangentes concurren- <sup>Ax.</sup>  
t similiturque aliæ in alias partes  
protractæ: ergo fiet triangulum  
circa datum circulum.  
Quod autem sit dato triangulo æ-  
quiangulum, sic probo. In qua-  
drilatero C I B M. anguli ad C.  
& B. <sup>e</sup> sunt recti: ergo reliqui <sup>e 18. 3.</sup>  
C I B. C M B. <sup>f</sup> duobus rectis sunt <sup>f 32. 1.</sup>  
æquales: Sed angulus C I B. æ-  
qualis ponitur ipsi D F H. ergo  
angulus C M B. æqualis est angu-  
lo <sup>g</sup> D F A. eodem modo ostendi <sup>g 13. 1.</sup>  
potest in quadrilateris B I E L.  
C I E O. angulos L. & O. æqua-  
les esse angulis A. & D. Ergo  
circa datum, &c. Q. E. F.

172 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO IV.

Prob. 4.



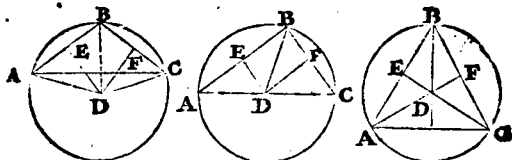
In dato  
triangulo  
AB C.  
circulum  
GE F.  
describe-  
re.

- a 9. 1. **D**ivide duos ejus angulos B. & C.  
b 12. 1. bifariam per rectas CD. BD. &  
ex puncto in quo concurrent  
puta D. bduc perpendiculares DE. DG.  
DF. ad tria latera dati trianguli. Jam  
quia triangulorum FCD. GCD. an-  
gulus C. unius, ponitur æqualis angulo  
C. alterius, & uterque angulorum G  
& F. rectus est, & latus CD commu-  
c 26. 1. ne: linea DG. erit æqualis lineæ DF.  
similiterque ostendetur rectas DE. DF.  
esse æquales. Posito ergo centro in D.  
d 9. 3. descriptus circulus spatio DG. d transibit  
per puncta EGF. & quia per coroll. 16. 3.  
unaquæque linearum AB. BC. CA. tanget  
circulum, patet perfectum esse propositum.

SCHOLIUM.

Hinc cognitis lateribus trianguli, inveniantur  
segmenta qua sunt ad puncta contactus circuli in-  
scripti. scil: sit AB. 12. BC. 16. AC. 18. erit  
AB. BC. 28. subtrahatur AC. 18. æquale AE.  
& FC. remanebit 10. pro BE. & BF. adeoque  
BE. vel BF. erit 5. & per consequens FC. vel  
GC. 11. GA. vel AE. 7. PRO-

## PROPOSITIO V.



*Circa datum triangulum ABC. Prob. 5.  
circulum describere.*

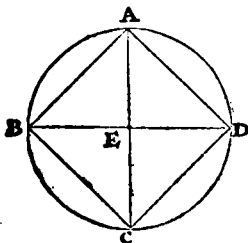
**C**ujuscunque dati trianguli, duo aliqua latera puta  $AB$ .  $BC$ . a di- a 10. 2.  
vide bifariam in  $E$ . &  $F$ . b ad quæ b 11. 1.  
puncta excitabis perpendiculares quæ  
coibunt in  $D$ . vel intra triangulum, vel  
in tertio latere, vel extra (ducta enim  
 $EF$ . fient anguli  $DEF$ .  $D F E$ . minores  
duobus rectis: ergo coibunt) duc præ-  
terea rectas  $DB$ .  $DA$ .  $DC$ . Quia trian-  
gulorum  $BED$ .  $AED$ . latera  $BE$ .  $EA$ .  
sunt æqualia &  $DE$ . commune & an-  
guli ad  $E$ . recti, erunt & bases  $AD$ .  $DB$ .  
æquales. Eodem modo c erunt æqua- c 7. 2.  
les bases  $DB$ .  $DC$ . Centro igitur  $D$ .  
spatio  $BD$ . ductus circulus  $ABC$ ,  
transibit per puncta  $A$ .  $B$ .  $C$ . Circa da-  
tum ergo triangulum, circulum de-  
scripsimus. Q. E. F.

## S C H O L I U M.

*Hinc etiam patet methodus describendi circulum, qui transibit per tria data puncta non in rectum constituta.*

174 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO VI.

Prob. 6.



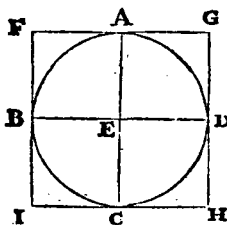
*In dato  
circulo  
ABCD.  
quadra-  
tum de-  
scribere.*

**D**ucantur duæ diametri A C.  
B D. secantes se ad angulos  
rectos in centro E. & jungantur  
rectæ BA. BC. CD. DA. & fa-  
ctum est quod petitur.

Prob. Quatuor anguli ad cen-  
trum E. ponuntur recti & quatuor  
lineæ EA. EB. EC. ED. æquales.  
¶ 4. 1. <sup>a</sup> ergo & quatuor bases AB. BC.  
CD. DA. sunt æquales. Omnia  
ergo quadrati latera sunt æqualia.  
Anguli vero his lateribus contenti  
sunt omnes in semicirculo: <sup>b</sup> ad-  
¶ 31. 3. eoque recti: Erit igitur ABCD.  
quadratum circulo inscriptum.  
Q. E. F.

PRO-

## PROPOSITIO VII.



*Circa da- Prob. 7.  
tum circu-  
lum, qua-  
dratum de-  
scribere.*

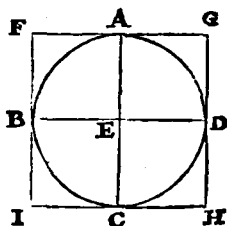
**D**uctis duabus diametris A C. B D. secantibus se ad rectos in centro E. per earum extrema si ducantur perpendiculares F G. F I. I H. H G. coeuntes petitum dabunt quadratum,

Prob. Anguli quatuor ad E. ponuntur recti, sicut & anguli ad A B C D. a ergo a 28. 1. rectæ F G. B D. H I. sunt parallelæ, similiterque rectæ F I. A C. G H. b ergo figura F G I H. est parallelogramma. Angulus A C H. est rectus: c ergo Angulus H G A. est rectus, eodem modo ostendetur angulos F. I. H. esse rectos. c 34. 1.

De lateribus sic dico, latus I H. est æquale lateri B D. & latus H G. lateri A C. hoc est B D. ergo latera I H. H G. sunt æqualia: ergo quatuor latera sunt æqualia. Ergo est quadratum cujus latera circulum tangunt per coroll. 16. lib. 3. Ergo circa datum, &c. Q. E. F.



## PROPOSITIO VIII.

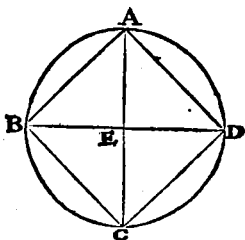


*Prob. 8. In dato quadrato, circulum describere.*

- a 10. 1. **L**atera quadrati a divide bifariam in ABCD. duc rectas AC. BD. secantes se in puncto E. quod dico esse centrum circuli spatio E B. describendi.
- Prob. Rectæ AF. IC. sunt parallelæ & æquales: ergo rectæ AC. FI. b sunt parallelæ & æquales, & similiter rectæ AC. HG: eodemque modo rectæ FG. IH. c sunt igitur parallelogramma FE. EI. EH. EG. quare cum æquales. Rectæ BF. FA. AG. sunt æquales, ipsis
- d 14. 1. d BE. EA. ED. rectæ BE. EA. ED. e 9. 3. crunt & æquales. e Ergo E. est centrum, ex quo si spatio EA. describatur circulus, tanget puncta A B C D. & consequenter omnia quadrati latera per coroll. pr. 16. l. 3. f In dato ergo, &c. Q. E. F.

PRO-

## PROPOSITIO IX.



*Circa datum quadratum, circulum describere. Prob. 9.*

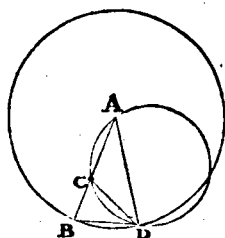
**D**ucantur diametri AC. BD. secantes se in puncto E. quod dico esse centrum describendi circuli.

Prob. Rectæ AB. AD. sunt æquales : a ergo & anguli ABD. ADB. <sup>a 5. 1.</sup>  
 Angulus BAD. b est rectus, c ergo anguli ABD. ADB. sunt singuli semirecti; eodem modo partes angulorum ad A. B. C. D. erunt semirecti; ergo omnes inter se æquales. d Ergo latera <sup>d 6. 1.</sup>  
 EA. EB. EC. ED. æqualibus angulis subtensa sunt æqualia. e Ergo E. est <sup>e 9. 3.</sup>  
 centrum circuli, qui si describatur spatio EA. transibit per puncta quadrati ABCD. Ergo circa datum, &c. Q.E.F.

P R O-

## PROPOSITIO X.

Pr. 30.



*Isoceles  
triangulum  
A B D.  
constituere,  
quod habeat  
utrumque eo-  
rum qui ad  
basim sunt,*

*angulorum B. & D. duplum reli-  
qui A.*

- a II. 1. **S**ume rectam quamlibet A B. quæ  
sic a dividatur in C. ut rectangu-  
lum sub A B. B C. æquale sit qua-  
drato rectæ A C. tum centro A. spatio B.  
b I. 4. ducatur circulus, in quo b accommo-  
detur recta B D. æqualis ipsi A C. jun-  
gaturque recta A D. dico triangulum  
A B D. fore quæsitum, quod sic  
probo.

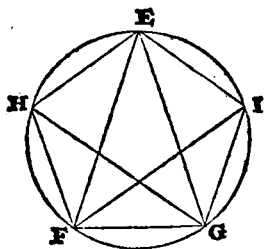
- c 3. 4. **D**ucta recta C D. e describe circu-  
lum A C D. circa triangulum D A C.  
cum itaque rectangulum sub A B. B C.  
æquale ponitur quadrato C A. erit etiam  
æquale quadrato B D. cum B D. æqua-  
lis ponitur ipsi A C. Ergo cum à puncto  
B. ducatur secans B A. recta B D. ab eo-  
dem puncto ducta incidens in circulum  
A C D.

A C D. quorum rectangulum & quadratum sunt æqualia, B D. tanget d<sup>37. 3.</sup> circum in D. ergo angulus C D B. e æ<sup>c 32. 3.</sup> qualis est ipsi A. in alterno segmento, ergo communi C D A. addito, duo anguli A. & C D A. æquales sunt duobus B D C. & C D A. hoc est toti A D B. vel A B D. Sed angulus externus B C D. duobus internis A. & f<sup>32. 1.</sup> A D C. f æqualis est: ergo idem B C D. erit æqualis ipsi C B D. vel A D B. ergo g<sup>6. 1.</sup> rectæ D C. D B. g æquales, cum æquales angulos subtendant. Sed B D. ponitur æqualis ipsi C A. ergo C D. C A. æquales erunt: ergo anguli A. & h<sup>5. 1.</sup> C D A. h æquales. Ergo externus angulus B C D. duplus est ipsius A. ergo ejusdem quoque dupli sunt C B D. A D B. cum singuli externo B C D. æquales sint. Triangulum ergo, &c. Q. E. F.

*Corollarium.*

Cum tres anguli A. B. D. simul constituent  $\frac{1}{2}$  duorum rect. hoc est duos rectos, liquet A. esse  $\frac{1}{2}$  duor. rectorum.

## PROPOSITIO XI.



Pr. II. In dato circulo EHFGI. pentagonum aequilaterum & equiangu-  
lum inscribere.

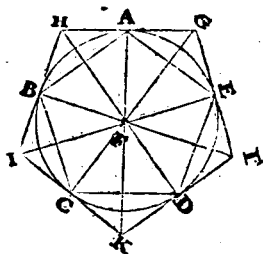
a 10. 4. <sup>a</sup> Fiat triangulum Isosceles qui-  
cunque, cujus anguli ad ba-  
sim sint dupli ejus qui ad verti-  
cem & ipsi æqui angulus <sup>b</sup> inscri-  
batur in dato circulo EFG.  
b 1. 4. Angulos ad basim divide bifa-  
riam rectis IF. HG. jam  
quinque puncta E. H. F. G. I.  
junge lineis totidem, & factum  
esse quod petitur, sic probo.  
Quinque anguli EFG. FGH.  
HGF.

HGF. IFG. EFI. ponuntur  
 æquales : <sup>c</sup> ergo arcus quibus in- <sup>c</sup> 26. 3.  
 sistunt , sunt æquales <sup>d</sup> Ergo æ- <sup>d</sup> 29. 3.  
 quales rectæ quæ æquales peri-  
 pherias subtendunt. Arcus EH.  
 æqualis est arcui FG. ergo si  
 addas communem BF. erunt  
 peripheriæ EHF. HFG. æqua-  
 les : ergo & reliqua segmenta  
 FG IE. GI. EH. æqualia :  
<sup>c</sup> ergo anguli EHF. PFF. æ- <sup>c</sup> 27. 3.  
 quales. Idemque dicendum de  
 reliquis. Ergo pentagonum æ-  
 quilaterum & æquiangulum in-  
 scriptum. Q. E. F.

Q

PRO-

## PROPOSITIO XII.



Pr. 12. Circa datum circulum  $ABCD$ . pentagonum  $GHIKL$ . æquilaterum & æquiangulum describere.

**Q**uasi juxta propositionem 11. in scripsissem pentagonum in dato circulo, reperiam centrum  $F$ . & notabo in peripheria quinque linearum  $FA$ .  $FB$ . &c. quinque puncta angularia  $ABCDE$ .

a corol.

16. 3.

b 11.

Ax.

& ab iisdem punctis  $a$  ducam tangentes quæ  $b$  concurrent in punctis  $GHIKL$ . à quibus si duxero ad centrum rectas  $GF$ .  $IF$ . sic demonstrabo factum esse quod petitur. Et primo quidem quod anguli omnes sint æquales. In

c 32. 1. quadrilatero  $AFBH$ . quatuor anguli  $c$  valent quatuor rectos cum cujuslibet trianguli  $AHF$ .  $HFB$ . tres anguli valeant duos rectos: similiterque in quadrilatero  $BFCI$ . & sic de aliis: ergo cum anguli  $A$ . &  $B$ . sint recti, anguli  $AHB$ .  $AFB$ . valent duos rectos, similiterque anguli  $BIC$ .  $CFB$ . & sic de aliis. Sed anguli

d 27. 3.  $AFB$ ,  $BFC$ . sunt d æquales ob æquales arcus,  
ergo

# LIBER QUARTUS. 183

ergo reliqui H. & I. sunt æquales, idemque dicendum de aliis. Ergo omnes pentagoni anguli sunt æquales.

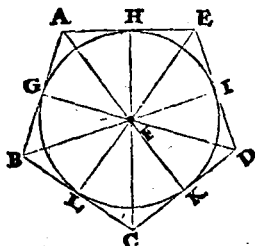
Quod autem latera etiam sint æqualia sic probo. Quadratum FI. e est æquale quadratis tam ipsarum FB. BI. quam ipsarum IC. CF. sublati ergo quadratis æqualium FB. FC. remanent æqualia quadrata BI. IC. ergo rectæ BI. IC. sunt æquales. Nunc anguli FBL. FCI. & continentia latera sunt æqualia: ergo f anguli BIF. FIC. sunt æquales. f 4. 1. Eodemque modo dicam de triangulis CFK. KFD. & de aliis omnibus. Ergo cum anguli BFD. CFD. g sint æquales, & anguli IFC. g 27. 1. CFK. sint eorum dimidia, æquales erunt anguli IFC. CFK. Ergo cum in triangulis IFC. CFK. anguli IFC. FCI. æquales sint duobus angulis CFK. FCK. alter alteri & latus FC. commune, reliqua latera h erunt h 26. 2. æqualia. Ergo rectæ IC. CK. sunt æquales, & dimidiæ ipsius IK. eodem modo ostendam IB. esse dimidiam ipsius IH. & sic de aliis: ergo, cum dimidiæ IC. IB. ostensæ sint æquales, erunt tota latera HI. IK. æqualia, idemque dicendum de aliis. Q. EF.

## Corollarium.

Hinc, si in circulo qualiscunque figura æquilatera & æquiangula fuerit inscripta, lineæ perpendiculares ad extremitates semidiametrorum excitatæ constituent figuram totidem laterum & æqualium angulorum circulo circumscriptam.



## PROPOSITIO XIII.



*Pr. 12.* In dato pentagono quod est equilaterum & equiangularum, circulum inscribere.

*a 9. 1.* **D**ividantur bifariam duo anguli proximi BAE. ABC.

*b II.* rectis AF. BF. quæ <sup>b</sup> coibunt,

*Ax.* puta in F. cum nullius anguli medietas valeat rectum. Idem fiat reliquis angulis. Quoniam igitur

triangulorum ABF. FBC. æqualia sunt latera BA. BC. & BF.

*c Ex.* commune, & anguli ad B. <sup>c</sup> sunt

*conf.* æquales, anguli BAF. BCF. & bases AF. CF. <sup>d</sup> erunt æquales.

*d 4. 1.* Sed angulus BAF. est dimidium anguli

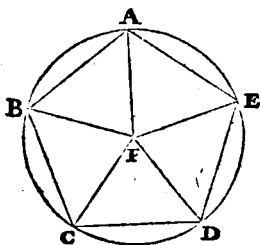
# LIBER QUARTUS. 185

anguli BAE. ergo quoque BCF.  
erit dimidium anguli BCD.  
Eodem modo reliqui anguli bi-  
fariam erunt secti. Ducantur si-  
militer ex F. ad singula pentago-  
ni latera perpendiculares FG.  
FH. &c. Quia triangulorum  
GFB. BFL. duo anguli FGB.  
GBF. duobus FLB. FBL. sunt  
æquales, & latus FB. commune,  
æqualia etiam<sup>e</sup> erunt latera FG.<sup>e 26. 2.</sup>  
FL. & his FK. FI. FH. quare  
centro F. spatio FG.<sup>f 15.</sup> si ducatur  
circulus, transibit per puncta H. I.<sup>Def. 1.</sup>  
K. L. existentia in lateribus penta-  
goni, & quæ etiam tangent circulū,<sup>g Corol.</sup>  
cum sint super extremitate diame-<sup>16. 3.</sup>  
tri ad rectos constitutæ. Q. E. F.

## SCHOLIUM.

*Hinc duo sequuntur. 1. omnes angulos  
cujuscunque figura æquilatera & æqui-  
angula bifariam secari per lineas à puncto  
ductas in quo coeunt dua rectæ proximæ  
angulos bisecantes. 2. eadem methodo in  
quacunque figura æquilatera & æquian-  
gula circulum describere.*

## PROPOSITIO XIV.



Pr. 14. Circa datum pentagonum quod est æquilaterum & æquiangulum, circulum describere.

a 9. I. **A**ngulos A. & E. a divide  
 bifariam rectis AF. FE.  
 b II. quæ alicubi b concurrent, puta  
 Ax. in F. hinc ad reliquos angulos  
 duco rectas FD. FC. FB. quas  
 eos secare bifariam probatur ut in  
 proxima propositione per prop.  
 26. I. Ergo cum anguli totales  
 ponantur æquales, æquales erunt  
 c I. dimidii, & c consequenter æqua-  
 les

# LIBER QUARTUS. 187

les  $FA$ .  $FB$ . hisque æquales  
omnes rectæ  $FC$ .  $FD$ .  $FE$ .  
Ergo centro  $F$ . spatio  $FA$ . de-  
scriptus circulus transibit per an-  
gulos pentagoni, nec ullum ejus  
latus <sup>d</sup> secabit, cum omnia cadant <sup>d</sup> 2. 3.  
intra circulum. Q. E. F.

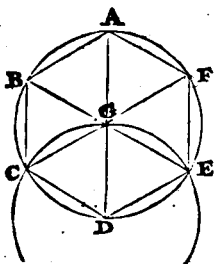
## SCHOLIUM.

*Eodem prorsus modo circa  
quamlibet figuram æquilateram &  
equiangulam circulus describetur.*

Q4 PRO-

## PROPOSITIO XV.

Pr. 15.



In dato  
circulo, he-  
xagonum, &  
æquilaterum  
& æquian-  
gulum inscri-  
bere.

Sit diameter A D. centro D. spatio semidiametri D G. fiat circulus C G E. secans datum circulum in C. & E. per centrum G. ductis C F. E B. jungantur A B. B C. C D. &c. eritque inscriptum hexagonum æquilaterum & æquiangulum.

Prob. Rectæ G C. G D. à centro G. & rectæ C D. D E. à centro D. sunt æquales, ergo triangulum D G C. est æquilaterum. <sup>a</sup> Ergo & æquiangulum.

Hi

Hi tres anguli, <sup>b</sup> valent duos <sup>b 32. 1.</sup>  
 rectos: ergo quilibet eorum est  
 pars tertia duorum rectorum.  
 Similiterque angulus  $DGE$ .  
 Ergo cum  $CGE$ ,  $EGF$ . <sup>c</sup> va- <sup>c 13. 1.</sup>  
 leant duos rectos.  $EGF$ . erit  
 etiam pars tertia duorum rectorum.  
 Sed illis <sup>d</sup> æquales sunt an- <sup>d 15. 2.</sup>  
 guli ad verticem. Ergo sex an-  
 guli ad centrum  $G$ . sunt æquales.  
 Ergo omnes rectæ & circumfe-  
 rentiæ  $AB$ .  $BC$ . &c. quibus in-  
 sistunt <sup>e</sup> sunt æquales. Est ergo <sup>e 26. 2.</sup>  
 hexagonum æquilaterum. Quod <sup>29. 3.</sup>  
 vero sit æquiangulum patet, cum  
 omnium angulorum medietates  
 sint ostensæ æquales & constare  
 duabus tertiis duorum rectorum.

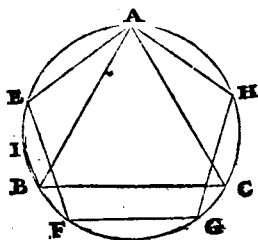
*Coroll. Hexagoni latus, æquale  
 est semidiametro.*

## S C H O L I U M.

*Hinc facillime triangulum æquilate-  
 rum in circulo describetur ductis rectis  
 AC. AE. CE*

P R O-

## PROPOSITIO XVI.



*Pr. 16. In dato circulo quindecagonum  
& æquilatorum & equiangulum,  
describere.*

a 11. 4. **I**nscribe in dato circulo  
pentagonum æquilaterum  
A E F G H. & eidem ad pun-  
b 2. 4. ctum A. <sup>b</sup> inscribe triangulum  
æquilaterum A B C. hoc posito  
cum tertiam partem circumfe-  
c 16. & rentiæ <sup>a</sup> subtendat A B. hoc est  
28. 3. quinque quindenae, duo vero  
pentagoni latera, A E. E F. ea-  
rundem quindecimarum subten-  
dant

dant sex. Si ab ipsis A E. E F. subtentibus sex, ipsam A B. subtendentem quinque tollas, supererit B F. subtendens unam decimam quintam totius. Ergo si quatuordecim ei æquales in circulo <sup>d</sup> accommodentur, erit <sup>d</sup> 1. 4. quindecagonum æquilaterum & æquiangulum <sup>e</sup> cum singuli an- <sup>e</sup> 27. 3. guli subtendant arcus æquales tredecim laterum quindecagoni. Q. E. F.

## S C H O L I U M.

*Omnes propositiones hujus libri cum sunt problemata ejusdem valoris cense-  
ri possunt, quæcumvis à quibusdam inter  
precipuas numerantur. 5. & 15.*



# EVCLIDIS ELEMENTUM V.

Hujus Elementi quinti Vitruvius autorem prædicat Eudoxium Gnidium, qui Platonem comitatus est in Ægyptum.

## DEFINITIONES.

*Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, cum metitur majorem.*

**I**d est, quæ aliquoties sumpta, majorem ipsam præcisè constituit: sic unitas, est pars ternarii, quia ter sumpta facit ternarium. Atque hæc est pars propriè dicta & quæ vocatur *Aliquota*. Impropriè verò dicta pars, est quæ aliquoties sumpta, vel suum totum excedit, vel ab eo deficit: sic

sic binarius numerus, est improprie dicta pars septenarii, quia ter sumptus, deficit: quater autem sumptus excedit: atque hæc pars dicitur *Aliquanta*. Imo Euclides libro 7. non vocat partem, sed partes, & bene quia quatuor non est pars numeri sex, sed ejus duæ partes tertiæ. In genere sic posset definiri. *Pars est minor & homogenea quantitas, quæ aliquoties repetita, metitur vel excedit suum totum.*

Similiter & si definitio Partis, prout traditur ab Euclide, tantum conveniat quantitati continuæ, quæ sola proprie secundum Philosophum appellatur Magnitudo, cum tamen numeros suis quoque constitui partibus dubium sit nemini, sic forte commodius potuisset exprimi. *Pars est minor quantitas, quæ metitur majorem.* Ut ut sit, in sequentibus, partis nomine utar, cum in quantitate

titate continua, tum in discreta;  
 imò brevitatis gratiâ frequen-  
 tius utar numeris, quorum ta-  
 men loco poterit quilibet ma-  
 gnitudines tot palmorum intel-  
 ligere quot numeris exprimen-  
 tur.

*2. Multiplex autem est  
 major quantitas, quam me-  
 titur minor.*

**M**ultiplex nil aliud est quam  
 eadem quantitas aliquoties  
 repetita.

*3. Ratio est duarum quan-  
 titatum ejusdem generis, mu-  
 tua quedam secundum men-  
 suram habitudo.*

**Q**uod Euclidis dixit λόγος, hoc  
 Campanus vertit *Proportio*,  
 melius alii *Ratio*. Sensus vero hic  
 est, quando duæ quantitates  
 ejus-

eiusdem generis, ut duo numeri, duæ lineæ, duæ superficies, duo solida ( nec enim linea cum superficie, aut linea alba cum sonora, ut sic, possent conferri, cum sint diversi generis ) inter se comparantur ; secundum capacitatem hoc est excessum, defectum aut æqualitatem, appellatur hæc comparatio aut habitudo mutua Ratio. Observabis verò, requiri semper duas quantitates : nihil enim habet rationem ad seipsum, & decempeda solitariè considerata, nec major est, minor, aut æqualis.

Hæc porrò omnis comparatio in capacitate quantitatis fundatur, secundum quam una quantitas aliam continet vel accuratè, vel ex parte tantum, vel cum excessu. Cum autem in omni ratione duo sint termini *Antecedens* & *Consequens* qui ad invicem referuntur : Ille in nomi-

nativo efferri solet, hic in alio casu: exempli gratia linea sex palmorum est dupla lineæ trium: antecedens est linea sex palmorum; consequens, lineæ trium. Excessus antecedentis supra consequentem vel consequentis supra antecedentem dicitur *Differentia terminorum*. *Ratio Rationalis* est quæ est inter quantitates commensurabiles & numeris potest exprimi, ut ratio dupla, tripla, &c. *Ratio Irrationalis* est ea quæ est inter magnitudines quarum nulla est communis mensura quæ ullo numero possit exprimi: exempli gratia inter latus quadrati & ejus diametrum.

#### 4. *Proportio est rationum similitudo.*

Græcè dicitur *ἀναλογία*, sensus verò hic est. Quemadmodum comparatio capacitatis duarum quantitarum dicitur ratio:

tio : Ita similitudo duarum vel plurium rationum dicitur Proportio. Ex gr. Cum similis sit ratio 12. ad 4. quæ 9. ad 3. ideo dico inter has quantitates esse proportionem , quia est similitudo rationum.

Proportio divitur in *Arithmetica* , *Geometrica* , & *Musica*. *Arithmetica* est quando tres vel plures numeri per eandem differentiam progrediuntur , ut hi numeri 4. 7. 10. est enim differentia 4. & 7. æqualis differentia 7. & 10. hæc proportio dicitur *Arithmetica* quia invenitur inter numeros in ordine suo naturali sumptos puta 1. 2. 3. 4. 5. &c.

*Geometrica* est similitudo rationum inter tres , vel plures quantitates ut inter numeros 2. 6. 18. est enim ratio 2. ad 6. similis rationi 6. ad 18. nam utraque ratio est tripla. Hæcque

sola est propriè dicta proportio,  
& quam hic definit Euclides.

*Proportio Musica est quando tres magnitudines ita ordinantur ut eadem sit ratio prima ad tertiam, quæ differentia prima & secunda, ad differentiam secunda & tertia, ut 3. 4. 6. Sunt in proportionem musica, quia eadem est ratio primi numeri 3. ad tertium 6. quæ differentia primi & secundi, quæ est 1. ad differentiam secundi & tertii, quæ est 2. dicitur vero harmonica, quia consonantes facit sonos; inter quos invenitur.*

*5. Rationem habere inter se quantitates dicuntur, quæ possunt multiplicatæ sese mutuo superare.*

**Q**uia ratio est duarum quantitatum ejusdem generis mutua secundum mensuram habitudo, propterea quantitates quæ  
ratio-

rationem habent inter se, debent esse tales ut se mutuo superare possint: nam quantitas quæ metitur alteram, potest eam superare hinc.

Colligitur 1. inter lineam & superficiem, inter superficiem & corpus, inter lineam finitam & infinitam, inter angulum rectilineum & contactus, nullam esse rationem, quia quantumvis horum unum multiplices, nunquam tamen aliud superabit.

Coll. 2. Inter diagonalem & latus quadrati esse rationem, quia ita potest multiplicari ut latus excedat diagonalem, sed hæc ratio dicitur irrationalis quia non potest exprimi numeris.

Coll. 3. Inter curvilinea & rectilinea esse rationem cum inter ea sit æqualitas & inæqualitas: nam Hippocrates Chius Lunu-



lam crescentem, & Archimedes Parabolam quadravit, & Proclus inter angulos rectilineos & curvilineos æqualitatem demonstravit lib. 3. in primum Euclid. ad 12. axioma.

*6. In eadem ratione quantitates dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam, cum primæ & tertiæ æquemultiplicia, à secundæ & quartæ æquemultiplicibus, qualiscunque sit hæc multiplicatio, utrumque ab utroque vel unà deficiunt, vel unà æqualia sunt, vel unà excedunt, si ea sumantur, quæ inter se respondent.*

**A** Signo ostendit Euclides quomodo possimus cognoscere utrū quatuor quantitates sint  
in

in eadem ratione. 1°. Æquemultiplica, inquit, primam quantitatem & tertiam. 2°. Æquemultiplica secundam & quartam. 3°. conferas multiplicem primæ cum multiplici secundæ, & multiplicem tertiæ cum multiplici quartæ; & vide, utrum quotiescunque multiplex primæ deficit à multiplici secundæ, vel æqualis est, vel excedit, etiam multiplex tertiæ tunc deficiat à multiplici quartæ, vel æqualis sit vel excedat: tunc enim si id fiat, certò concludas, has quatuor quantitates esse in eadem ratione, si non fiat, nega esse.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 8  | 6  | 12 | 9  |
| 4  | 2  | 6  | 3  |
| A. | B. | C. | D. |

Exemplum: volo scire utrum hæ quantitates A. B. C. D. sint in eadem

cadem ratione: 1°. æquemultiplico A. & C. puta per binarium.

2°. æquemultiplico B. & D. puta per ternarium, ut factum vi-

des superius. 3°. conféro multiplicem primæ 8. cum multiplici

secundæ 6. & multiplicem tertiæ 12. cum multiplici quartæ 9. &

video non tantum multiplicem secundæ deficere à multiplici

primæ, sed multiplicem quartæ deficere à multiplici tertiæ.

12 12 18 18

4 2 6 3

A. B C D.

Deinde iterum æquemultiplico

A. & C. puta per ternarium: similiter æquemultiplico B. & D.

puta per senarium (eadem est ratio de quocunque numero per quem

æquemultiplices ) tum video multiplicem primæ æqualem

esse multiplici secundæ: & multipli-

triplicem tertiæ multiplici quartæ.

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| 8 | 16 | 12 | 24 |
| 4 | 2  | 6  | 3  |
| A | B  | C  | D. |

Tertio æquemultiplico A. & C. puta per binarium, æquemultiplico etiam B. & D. puta per octonarium & adverto multiplicem primæ 8. deficere à multiplici secundæ 16. & multiplicem tertiæ 12. à multiplici quartæ 24. & quia qualitercunque æquemultiplicem illas quantitates, semper se habet multiplex primæ ad multiplicem secundæ, ut se habet multiplex tertiæ ad multiplicem quartæ, id est simul deficient vel excedunt vel sunt æquales, propterea concludo esse quatuor illas quantitates proportionales & earum primam in eadem ratione esse ad secundam in qua est tertia ad quartam.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 15 | 24 | 25 |
| 4  | 3  | 6  | 5  |
| A  | B  | C  | D. |

Alterum exemplum. Proponantur aliæ quatuor A B C D. 1°. æquemultiplico A. & C. puta per quaternarium. 2°. æquemultiplico B. & D. puta per quinarium. 3°. Video multiplicem primæ 16. superare multiplicem secundæ 15. multiplicem verò tertiæ 24. superari à multiplici quartæ 25. quare concludo duas quantitates non esse in eadem ratione, quia si essent in eadem ratione, quadruplū tertiæ superaret quadruplū 4x. Sicut quadruplū primæ, superat quadruplū secundæ. Id enim fieri debet qualiscunque sit multiplicatio. Quare licet duplū primæ superet duplū secundæ, & similiter duplū tertiæ superet duplū quar-

quartæ. Tamen non potest inde colligi quod sint proportionales; quia ut sint proportionales oportet ita fieri facta quavis multiplicatione.

### SCHOLIUM.

**H**æc sunt quæ ad verba & sensum Euclidis nunc occurrunt. Quod ad rem ipsam, nunquam judicavi definitionem illam posse inservire tyronibus: cum tradatur per obscurius. Sic itaque illam aliter enuncio. *Quatuor quantitates dicuntur esse proportionales, cum prima eodem modo continet secundam, vel continetur à secunda, quo tertia continet quartam vel continetur à quarta.* Nam quatuor quantitates esse proportionales, est primam ita se habere ad secundam, sicut tertia se habet ad quartam: hoc autem aliud nihil est, quam primam ita esse majorem vel minorem se-

cunda, sicut tertia major est vel minor quarta. Si autem res ita se habet, prima eodem modo continebit secundam, vel à secunda continebitur, quo tertia continebit quartam vel à quarta continebitur. Igitur quatuor quantitates dicuntur proportionales, cum prima eodem modo continet secundam, vel continetur à secunda, quo tertia continet quartam vel continetur à quarta.

Nota hanc definitionem convenire tum quantitatibus rationalibus, tum irrationalibus. Superest tantum explicandus ille modus continentiae vel contentionis qui dicitur idem. Ille autem modus dicitur idem dupliciter, primo cum prima quantitas continet secundam aut continetur à secunda toties exacte, quoties tertia continet quartam, aut continetur à quarta exacte, ita ut nulla pars supersit v. g. linea duorum pedum  
toties

toties continet lineam unius pedis; quoties linea 6. pedum continet lineam 3. pedum. Similiterque linea unius pedis toties continetur in linea duorum pedum, quoties linea 3. pedum continetur in linea 6. pedum. Et proinde 4. illæ lineæ dicuntur proportionales.

Secundo, ille modus continentiae vel contentionis dicitur idem cum prima secundam, & tertia quartam æque continet; & præterea eandem partem, vel easdem partes; vel cum prima, cum tali sui parte aut talibus partibus continetur in secunda, quoties tertia cum eadem, aut talibus partibus continetur in quarta. Ut linea 10. pedum continet toties lineam 3. pedum & talem insuper ejus partem, quoties linea 6. pedum qualemve ejus partem continet linea 20. pedum. Nam linea 10. continet ter lineam trium pedum



& insuper trientem ipsius ternarii, sicut linea 20. pedum continet ter 6. & insuper trientem ipsius senarii. Similiter linea 12. pedum toties continet lineam 5. pedum & tales ejus partes, quoties lineam 10. pedum qualesve ejus partes continet linea 24. Rursus linea 3. pedum cum tali sui parte continetur in linea 10. pedum sicut linea 6. pedum cum tali sui parte continetur in linea 20. pedum. Similiter linea 5. pedum cum talibus sui partibus continetur in linea 12. pedum, sicut linea 10. pedum cum talibus sui partibus continetur in linea 24. pedum.

*7. Eandem autem habentem rationem quantitates, vocentur proportionales.*

**N**am quæ habent eandem rationem, habent rationum simili-

militudinem seu proportionem. Quod si proportio non interrumpitur, dicitur continua proportio, qualis est in his numeris 4. 8. 16. 32. qui propterea dicuntur continue proportionales: secus autem dicuntur tantum proportionales ut 4. 2. 6. 3.

8. *Cum vero æquemultiplicium, multiplex primæ, excesserit multiplicem secundæ: at multiplex tertiæ, non excesserit multiplicem quartæ: tunc prima ad secundam, majorem rationem habere dicetur, quam tertia, ad quartam.*

16. 15. 24 25.

4. 3. 6. 5.

A B C D.

#### SCHOLIUM.

**V**el potius ut in scholio ad definitionem 6. à contrario

S 3

tunc

tunc prima ad secundam maiorem rationem habet quam tertia ad quartam cum primum antecedens magis continet suum consequens quam alterum antecedens suum consequens, & contra.

9. *Proportio vero in tribus ad minimum terminis consistit.*

Cum proportio sit rationum similitudo : ratio autem sit duarum magnitudinum ejusdem generis comparatio, duarum una dicitur antecedens, alia consequens : in proportione, ad minimum duo requiruntur antecedentia, & duo consequentia: quia tamen medius terminus potest esse consequens primæ & antecedens secundæ rationis, propterea proportio potest esse in tribus terminis, nimirum quæ continua est ut 16. 8. 4. quæ vero non est continua,

LIBER QUINTUS. 211  
tinua, postulat quator terminos  
ut 16. 4. 12. 3.

10. *Cum autem tres quantitates proportionales fuerint: prima ad tertiam dicitur duplicatam habere rationem, eam quam habet ad secundam. At cum quatuor quantitates continue proportionales fuerint: prima ad quartam dicitur triplicatam habere rationem, eam quam habet ad secundam: & semper deinceps uno amplius, quandiu proportio extiterit.*

**D**ifferunt ratio dupla & ratio duplicata, itemquem ratio tripla, & ratio triplicata, ut ista ostendunt exempla.

64. 16. 4. 1.

A. B. C. D.

Primum sint quatuor quantitates A. B. C. D. continue proportionales, nulla ex ipsis erit ratio dupla vel tripla, & erit nihilominus in ipsis una ratio duplicata & una triplicata: quia ratio primæ ad secundam erit inter primam & tertiam duplicata. Erit porrò illa ratio primæ ad secundam quadrupla. Quartæ ad tertiam quadrupla duplicata, id est quater quadrupla seu sexdecupla. Primæ ad quartam quadrupla triplicata, id est quater quater quadrupla, id est quater sexdecupla, id est, sexagequadrupla.

Secundum. Sint quantitates  
<sup>1.</sup> <sup>2.</sup> <sup>4.</sup> <sup>8.</sup>  
 quatuor E. F. G. H. continue  
 proportionales, erit prima sub-  
 dupla secundæ. Secunda tertiæ.  
 Tertia quartæ: Erit tamen ratio  
 primæ ad tertiam dupla rationis  
 quam habet prima ad secundam.

Erit

Erit item ratio primæ ad quartam, tripla rationis quam habet prima ad secundam, nec tamen erit prima dupla tertiæ, sed ejus subquadrupla: nec prima est tripla quartæ, sub ejus suboctupla.

Uno verbo discrimen aperio. Inter duas quantitates non dicitur esse ratio dupla nisi una præcise bis alteram contineat: dicitur autem esse ratio duplicata, quamcunque habeant inæqualitatem, modo bis ea repetatur comparatio quæ est inter primum & secundum terminum.: & triplicata, si tertio eadem instituatur.

II. *Homologæ quantitates dicuntur esse antecedentes quidem antecedentibus, consequentes vero consequentibus.*

**1. 4. 8. 32.**

**S**i proportionales sunt ABCD.  
& ut prima ad secundam, ita  
tertia

tertia ad quartam : homologæ dicenter prima & tertia inter se, secunda item & quarta inter se, quia easdem vices gerunt prima & tertia, & similiter secunda & quarta.

*Sequuntur modi argumentandi in proportionibus, qui inferius suis locis demonstrabuntur.*

12. *Alternæ ratio . est sumptio antecedentis ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.*

Quia Geometræ quinque diversas conclusiones colligunt ex una quatuor quantitatum proportionem, propterea quinque modos illarum conclusionum nunc definit Euclides. Prima est alternæ, hoc est permutata ratio, seu permutando quantitates & comparando ipsas antecedentes  
inter

inter se , & ipsas consequentes  
inter se.

9. 3. 6. 2.  
A. B. C. D.

puta ex eo quod proportionales  
sunt A B C D. estque ut A. ad  
B. ita C. ad D. inferam ergo  
permutando ut A. ad C. ita B.  
ad D.

13. *Inversa ratio , est  
sumptio consequentis instar  
antecedentis ad anteceden-  
tem velut consequentem.*

Secunda species seu modus ar-  
gumentandi dicitur inversa  
ratio , quando consequens instar  
antecedentis sumitur , inverten-  
do scilicet terminos proportio-  
nis , & ad antecedens velut ad  
consequens comparatur. Nam

quia est ut A. <sup>9</sup> ad B. <sup>3</sup> ita C. <sup>6</sup> ad D. <sup>2</sup>  
Ergo



Ergo invertendo inferam ut

$\overset{3}{B}$ . ad  $\overset{9}{A}$ . ita  $\overset{2}{D}$ . ad  $\overset{6}{C}$ .

14. *Compositio rationis, est sumptio antecedentis cum consequente, velut unius ad ipsum consequentem.*

Tertia species dicitur compositio rationis cum antecedens simul cum consequente instar unius sumitur, & ad consequens comparatur. Sic, Quia est ut  $\overset{9}{A}$ . ad  $\overset{3}{B}$ . ita  $\overset{6}{C}$ . ad  $\overset{2}{C}$ . ergo componendo erit, ut  $\overset{12}{AB}$ . ad  $\overset{3}{B}$ . ita  $\overset{8}{CD}$ . ad  $\overset{2}{D}$ .

15. *Divisio rationis est sumptio excessus, quo consequentem superat antecedens,*

*dens, ad ipsum consequentem.*

**H**oc est comparatio differentie terminorum cum alterutro ipsorum.

Ut quia est ut  $\overset{9}{A}$ . ad  $\overset{3}{B}$ . ita  $\overset{6}{C}$ . ad  $\overset{2}{D}$ .  
erit dividendo ut 6. ad 3. ita 4. ad 2.  
vel ut 6. ad 9. ita 4. ad 6.

*16. Conversio rationis, est sumptio antecedentis ad excessum, quo superat antecedens ipsum consequens.*

**H**oc est, comparatio unius termini cum differentia terminorum.

ut quia est ut  $\overset{9}{A}$ . ad  $\overset{3}{B}$ . ita  $\overset{6}{C}$ . ad  $\overset{2}{D}$ .  
Erit convertendo rationem.

ut 9. ad 6. ita 6. ad 4.

vel ut 3. ad 6. ita 2. ad 4.

Unde vides quod conversio est divisionis inversio.

**T** 17. *Ex*

17. *Ex æqualitate ratio est, si plures duabus sint quantitates, & his aliæ multitudine pares, quæ binæ sumantur in eadem ratione: cum ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, sic & in secundis magnitudinibus, prima ad ultimam se habeat. Vel.*

**S**umptio extremorum, per subductionem mediorum. Ut si sint plures magnitudines.

|    |     |
|----|-----|
| 12 | 4   |
| A  | B C |

Et aliæ totidem.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 6 | 2 |   |
| D | E | F |

binæ &

binæ in eadem ratione hoc est ut

12  
A. ad

<sup>12</sup> A. ad B. quidpiam. ita <sup>6</sup> D. ad E.  
quidpiam, & ut B. ad C. ita. E. ad  
E. erit ex æquo ut in prioribus

<sup>12</sup> A. ad ultimam <sup>4</sup> C. ita in poste-  
rioribus <sup>6</sup> D. ad <sup>2</sup> F. Nullum nu-  
merum oportet opponere ipsis B.  
& E. quia hîc non agitur de ipso,  
sed in sequentibus. Continet au-  
tem æqualitas rationis duos mo-  
dos argumentandi ex proportionē  
plurium, quam quatuor quantita-  
tum: hos duæ sequentes definitio-  
nes explicant.

18. *Ordinata proportio  
est, cum fuerit quemadmo-  
dum antecedens ad conse-  
quentem, ita antecedens ad  
consequentem: fuerit etiam  
ut consequens ad aliud quid-  
piam, ita consequens ad a-  
liud quidpiam.*

**D**icitur ordinata proportio, qua duæ partes proportionis eundem servant suarum rationum ordinem.

$$\begin{array}{ccc} 12 & 6 & 4 \\ A & B & C \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 6 & 3 & 2 \\ D & E & F \end{array}$$

Exemplum, esto utriusque partis prima ratio est dupla, secunda ratio est sesquialtera. Concluditur quod ut est  $A$ . ad  $C$ . ita est  $D$ . ad  $F$ .

19. *Perturbata autem proportio est, cum tribus positis magnitudinibus, & aliis quæ sint his multitudine pares: ut in primis quidem magnitudinibus se habet antecedens*

*cedens ad consequentem: ita in secundis magnitudinibus antecedens ad consequentem: ut autem in primis magnitudinibus consequens ad aliud quidpiam: sic in secundis magnitudinibus quidpiam ad antecedentem.*

**H**oc est, cum ut in primis, prima se habet ad secundam, ita in secundis secunda ad tertiam; & ut in primis secunda ad tertiam, ita in secundis, prima se habet ad secundam, dicitur hæc proportio perturbata, quia una proportionis pars non servat ordinem rationum alterius partis. Exemplum esto.

|    |   |   |
|----|---|---|
| 12 | 6 | 4 |
| A  | B | C |

|   |   |   |
|---|---|---|
| 8 | 4 | 2 |
| D | E | F |

T 3

In

In prima propositionis parte, ratio dupla præcedit sesquialteram.

In secunda parte sequitur,

Concluditur tamen perinde atque in proportionem ordinata.  
Quod ut est

$$\begin{array}{rcccl} & 12 & & 4 & \\ & A & \text{ad} & C & \\ \text{Sic est} & 6 & & 2 & \\ & D & \text{ad} & F & \end{array}$$

### Axioma ex Tacqueto.

*Datis tribus quantitatis dabilis est quarta ad quam tertia talem rationem habet, qualem prima ad secundam, hoc est, quoties prima continet vel continetur à secunda, toties tertia continet vel continetur à quarta.*

### NOTA.

Cum per plurimam hujus libri propositiones tamquam axiomata haberi possunt, subinde simpliciter nulla adhibita demonstratione declarabo.

Acutissimi Tacqueti Methodus laudanda, sed ne in totum videar discedere à Fournier ordinem propositionum prosequar.

PRO-

## PROPOSITIO I.

3. 1. 3. 1. Si sint quotcunque  $\text{r. r.}$   
 A. E. C. F. magnitudines quotcun-  
 6. 2. que magnitudinum æ-  
 G. H. qualium numero, sin-  
 gula singularum æquemultiplices;  
 quam multiplex est unius una ma-  
 gnitudo, tam multiplices erunt &  
 omnes omnium.

**I**d est quia <sup>a</sup> æquemultiplices <sup>a Def.</sup>  
 sunt A. ad E. & C. ad F. Si A. <sup>2. 5.</sup>  
 & C. jungantur in G. similiterque  
 E. & F. in H, quam multiplex erit  
 A. ipsius E. & C. ipsius F. tam  
 multiplex erit G. ipsius H.

Prob. Quia tam G. quam H.  
 æquali numero partium continen-  
 tium ac contentarum augentur.



224 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO II.

Th. 2. 6 3 4 2 Si prima A. secunda  
A. B. C. D. B. aequè fuerit multi-  
9 6 15 10 plex, atque tertia C.  
E. F. G. H. quarta D. fuerit au-  
tem & quinta E. secunda B. aequè  
multiplex, atque sexta F. quarta D.  
erit & composita prima cum quinta  
E. nempe G. secunda B. aequemul-  
tiplex, atque tertia C. cum sexta F.  
nempe H. quarta D.

**P**rob. ex hypothefi secunda B.  
& quarta D. pari numero con-  
tinentur in suis multiplicibus A. &  
C. nempe bis. Similiterque eadem  
secunda B. & quarta D. pari nume-  
ro continentur in suis aliis multi-  
plicibus E. & F. nempe ter. Ergo  
per præcedentem, continebuntur  
etiam pari numero in multiplici-  
bus collectis, hoc est si compo-  
nantur A. & E. ut fiat G. similiter-  
que F. & G. ut fiat H. quemadmo-  
dum G. 15. continet B. 3. quin-  
quies. Ita H. 10. continebit D. 2.  
quinq̄ues.

P R O-

## PROPOSITIO III.

4 2 6 3      Si sit prima A. secun- rb. 3.  
 ABCD      da B. aequè multiplex,  
 8      12      atque tertia C. quarta  
 E      F      D. sumantur autem æ-  
 quemultiplices E. & F. prima A.  
 & tertia C: erit ex aquo sumpta-  
 rum, utaque utriusque æquemul-  
 tiplex, altera quidem E. secunda,  
 B. altera autem F. quarta D.

**P**rob. Ponuntur B. & D. æ-  
 qualiter contineri in singulis  
 A. & C. ergo æqualiter <sup>a</sup> conti- a. 1. §.  
 nentur etiam in iisdem pari nume-  
 ro multiplicatis in E. & F.

P R O-

## PROPOSITIO IV.

4 2 6 3      Si prima A. ad secun-  
 ABCD      dam B. eandem habue-  
 8 6 12 9      rit rationem ac tertia ad  
 Tb. 4. EF GH quartam: etiam equi-  
 multiples prima E. & tertia G.  
 ad aquemultiples secunda F. &  
 quarta H. juxta quamvis multipli-  
 cationem eandem habebunt ratio-  
 nem, si prout inter se respondent,  
 sumpta fuerint.

**P**osita & explicata superius à  
 nobis definitione 6. hanc  
 propositionem sic breviter per-  
 stringo.

Ratio patet præsertim ex scho-  
 lio 6. def. utique idem est quatuor  
 quantitates in eadem esse ratione  
 & earum æquimultiplicia vel una  
 deficere vel una excedere vel una  
 equalia esse, quemadmodum idem  
 est & vel conferre singulas B. &  
 D. ad

D. ad singulas A. & C. atque B. & D. æqualiter multiplicatas ad A. & C. pari inter se numero multiplicatas.

*Corollarium.*

Hinc etiam patet veritas rationis conversæ. Nam si A. est ita majus ipso B. sicut C. ipso D. est evidens B. ita minus fore ipso A. sicut D. ipso C. minus est. Nec minus foret evidens si A. & C. sumpta essent æqualia, aut minora ipsis B. & D.

PRO-

## PROPOSITIO V.

th. 4. E 4 F 2 Si magnitudo A.  
C 8 D 4 magnitudinis B. ita  
A 12 B 6 multiplex fuerit : ut  
ablata C. ablata D. etiam reliqua  
E. reliqua F. ita multiplex erit, ut  
tota A. totius B.

**P**atet. Sit enim A. duplum  
ipsius B. & pars ablata C. du-  
pla similiter partis ablatæ D. er-  
go si residua E. non est duplex re-  
siduæ F. omnes partes totius B.  
non continentur in omnibus par-  
tibus toties A. sicut totum in to-  
to. Est ergo residua residuæ ita  
multiplex, ut tota totius

P R O-

## PROPOSITIO VI.

$G_2 H_3 G_8 H_{12}$      Si dua Tb. 6.  
 $E_{10} F_{15} E_4 F_6$  magnitu-  
 $A_{12} B_{18} A_{12} B_{18}$  dines A.  
 $C_2 D_3 C_2 D_3$  & B. dua-  
 rum magnitudinum C. & D. sint  
 æquemultiplices: & detractæ qua-  
 dam EF. sint earundem CD. æque-  
 multiplices. Reliquæ GH. iisdem  
 CD. aut æquales sunt aut æque-  
 multiplices.

**P**rob. C. & D. in totis A. & B.  
 & in eorum aliquibus parti-  
 bus assumptis E. & F. æqualiter  
 continentur ex hypothesi: <sup>a</sup> ergo <sup>a 5. 5.</sup>  
 æqualiter etiam continebuntur in  
 reliquis G. & H. Ergo reliquæ  
 ejusdem, aut æquales sunt aut æ-  
 quemultiplices.

## PROPOSITIO VII.

$\text{Th. 7.}$      $A$                      $A$     *Æquales A. & A.*  
                $12$      $B$                  $12$  *ad eandem C. ean-*  
                                $4$                 *dem habent ratio-*  
                               *nem : & eadem C. ad æquales*  
                               *A. & A.*

**P**arissimum est axioma & per-  
 clare patet ex scholio def. 3.  
 collato cum axiom. 1. lib. 1.

Scil.  $\frac{A}{B}$  ratio est æqualis est ra-  
 tioni  $\frac{A}{B}$ .

P R O-

## PROPOSITIO VIII.

16 8 5 *Inequalium magnitudi-* tb. 2.  
 A B C *nem A. B. major A. ad*  
 6 4 8 *eandem C. maiorem ra-*  
*tionem habet, quam minor B: Et*  
*eadem C. ad minorem B. maiorem*  
*habet rationem, quam ad mayo-*  
*rem A.*

**P**rob. 1<sup>a</sup> pars. Si A. esset equa-  
 lis B. vel si A. & B. æqualiter  
 continerent C. eandem rationem  
 haberent <sup>a</sup> ad C. & C. eandem <sup>a</sup> 6.  
 ad A. & B. per præcedentem: sed <sup>Def.</sup> 8.  
 major ponitur A. hoc est pluries  
 continere G. ergo per definitio-  
 nem 8. A. maiorem habet ratio-  
 nem ad C. Prob. 2. Et quia C.  
 pluries continetur ab A. quam à  
 B. minorem habebit ad A. ratio-  
 nem quam ad B. per 8. def.



## PROPOSITIO IX.

75. 9. A B C Qua A. & B. ad eandem  
 15 15 4 C. eandem habent ra-  
 tionem, aequales sunt inter se, &  
 ad quas AB. eadem C. eandem ha-  
 bet rationem, hæ quoque AB. æ-  
 quales sunt inter se.

28. 5. Si enim dicas A. esse majus  
 quam B. <sup>a</sup> ergo major erit ra-  
 tio majoris A. ad eandem C.  
 quàm minoris B. ad eandem C.  
 Item major ratio ipsius C. ad B.  
 quam ad A. quod est contra hy-  
 pothesim.

P R O-

## PROPOSITIO X.

16 8 4 Earum magnitudinum Th. 29.  
 A B C A B. quæ ad eandem C.  
 habent rationem : quæ A. rationem  
 majorem habet , hæc major est : ad  
 quam autem B. eadem C. majorem  
 rationem habet , hæc B. minor est.

**S**i enim B. esset æqualis aut  
 major quam A. <sup>a</sup> haberent A. <sup>a</sup> 7. 5.  
 & B. eandem rationem ad C. vel  
 B. <sup>b</sup> haberet majorem , quod est <sup>b</sup> 1. 5.  
 contra hypothesim. Item si C.  
 habet majorem rationem ad A.  
 quam ad B. minor est A. quam  
 B. vel utrumque , quod dixi , se-  
 quatur absurdum. Hæc conver-  
 tit 8.

## PROPOSITIO XI.

*Th. II. A 9 E 6 C 12. Quæ eidem  
B 6 F 4 D 8 sunt eadem ra-  
tiones, & inter se sunt eadem.*

**H**æc propositio nulla videtur  
ex præmissis indigere ex-  
plicatione: nimirum si A B. ra-  
tio sit æqualis rationi E F. ei-  
demque E E. æqualis C D. erit  
quoque A B. ratio æqualis ra-  
tioni C D. per I. axioma lib. I.

PRO-

## PROPOSITIO XII.

4 2 6 3    *Si sint quotcunque ma- Th. 12.*  
 A B C D    *gnitudines proportiona-*  
 10 5    *les A B C D quemad-*  
 E F    *modum se habuerit una*  
*antecedentium A. ad unam conse-*  
*quentium B. ita omnes antecedentes*  
*E. ad omnes consequentes F.*

**Q**uod prop. 1. de proportionemultiplici demonstratur, hîc de omni proportionem etiam irrationali ostenditur per eandem primam & defin. 6. si sumantur antecedentium & consequentium æquemultiplices. Ratio autem generalis est, quia A. & B. æquali numero partium tam contentium quam contentarum augmentur in E. & F. adeoque quoties A. vel C. continet B. vel D. toties continebit E. ipsum F.

## PROPOSITIO XIII.

tb. 13. **A B C D E F** Si prima A. ad se-  
 6 4 3 2 4 3 cundam B. eandem  
 habuerit rationem, quam tertia C.  
 ad quartam D. tertia verò ad  
 quartam majorem habuerit ratio-  
 nem, quàm quinta E. ad sextam  
 F. prima quoque A. ad secundam  
 B. majorem rationem habebit quam  
 quinta E. ad sextam F.

**R**es per se ex 3. def. clara; uti-  
 que ratio  $\frac{C}{D}$  hoc est  $\frac{A}{B}$  ex  
 hypot. major est ratione  $\frac{E}{F}$ .  
**Q. E. D.**

PRO-

## PROPOSITIO. VIX.

2 3 8 12. Si prima A. ad se-  
 9 9 9 9 cundam B. eandem ha-  
 12 8 6 4 buerit rationem, quam  
 A B C D tertia C. ad quartam  
 D. prima verò A. quam tertia C.  
 major fuerit, erit & secunda B.  
 major quam quarta D. Quod si  
 prima A. fuerit aequalis tertia C.  
 erit & secunda B. aequalis quarta D.  
 Si verò minor, & minor erit.

**S**it A. major quam C. ergo <sup>a</sup> 8. 5.  
<sup>a</sup> ratio A. ad B. hoc est C.  
 ad D. major erit ratione C. ad B.  
 adeoque per 10. hujus B. major  
 erit D. idem concludam si A.  
 æqualis fuerit vel minor quam C.  
 Q. E. D.

## PROPOSITIO XV.

Tab. 15. C 25 D 35 Partes A & B. cum  
 A 5 B 7 pariter multiplici-  
 bus C & D. in eadem sunt ratione,  
 si prout sibi mutuo respondent, ita  
 sumantur.

SIt A. pars ipsius C. & B. ipsius  
 D. continet C. toties A. quo-  
 ties D. continet ipsam B. Quia  
 ergo ut una antecedentium, A.  
 ad unam consequentium B. ita <sup>a</sup>  
<sup>a</sup> 13. 5. omnes antecedentes C. ad omnes  
 consequentes D. Ergo ut C. ad  
 D. ita A. ad B.

PRO-

## PROPOSITIO XVI.

|    |   |   |    |   |   |
|----|---|---|----|---|---|
| A. | 8 | B | 10 | E | 4 |
| C. | 4 | D | 5  | F | 5 |

*Si quatuor magnitudines ABCD. 7b. 169  
proportionales fuerint & vicissim  
proportionales erunt.*

**H**Oc est, si sit A. ad C. sicut  
B. ad D. erit permutando ut  
A. ad B. ita C. ad D.

Prob. Supponamus enim A.  
continere C. bis, sicut continet  
B. ipsum D. si dividamus A.  
& B. bifariam, erit E. æqualis C.  
& F. æqualis D. sed ut E. ad F.  
sic dupla A. ad B. per 12. Ergo  
ut dupla A. ad duplam B. sic C.  
æqualis ipsi E. ad D. æqualem  
ipsi F. Q. E. D.

PRO-



## PROPOSITIO XVII.

76. 17.

C 12    E 6    Si compo-  
 A 16    B 8    sita magni-  
 D 4    F 2    tudines,  
 proportionales fuerint, hæ quoque  
 divisa proportionales erunt.

**H**oc est A. compositum ex  
 C. & D. ita B. ex E. & F. sit-  
 que ut A. 16. ad sui partem D. 4.  
 ita B. 8. ad F. 2. erit & ut C. 12.  
 ad D. 4. ita E. 6. ad F. 2.

24.  
 Def.

Id probant Theon & alii per æ-  
 que multiples. Dibualdus quod  
 aliàs sequeretur partem esse æ-  
 qualem toti. Breviter A. & B.  
 ponuntur proportionales <sup>a</sup> ergo  
 simili ratione continent par-  
 tes D. & F. puta quater : ergo si  
 eædem è suis singulis totis aufe-  
 rantur, similiter in residuis C. F.  
 continebuntur : erit ergo ut C.  
 ad D. ita E. ad F.

P R O-

## PROPOSITIO XVIII.

$C \ 12$      $E \ 6$     Si *divisa* Th. 12.  
 $A \ 16$      $B \ 8$     magnitudi-  
 $D \ 4$      $F \ 2$     nes sint  
 proportionales, hæc quoque compositæ  
 proportionales erunt.

Sit ut D. ad C. ita F. ad E.  
 Erit & A. ad D. ut B. ad F.

Prob. Ex hypothefi partes C.  
 E. simili ratione continent partes  
 D. F. ergo si hæc illis addantur,  
 tota A. B. adhuc simili ratione  
 continebunt suas partes D. F.

## NOTA.

Hæc propositio & præcedens  
 cujus est conversum, eodem jure  
 inter axiomata quo 2.3. & axioma  
 lib. 1. recenseri posset.

## PROPOSITIO XIX.

Prob. 19.      D 4      F 2      Si quem-  
                   A 16      B 8      admodum  
                   C 16      E 6 totum A.  
 ad totum B. ita ablatum D. se ha-  
 buerit ad ablatum F. & reliquum  
 C. ad reliquum E. ut totum A. ad  
 B. se habebit.

Prob. A. B. D. F. ponuntur  
 a 16. §. P proportionales ; erit <sup>a</sup> ergo  
 b 17. §. ut B. ad F. ita A. ad D. Ergo <sup>b</sup>  
 erit ut F. ad E. ita D. ad C. Ergo  
 ut F. ad D. ita E. ad C. hoc est  
 ut tota A. ad totam B. cum posita  
 sit A. ad B. ut D. ad F.

Brevius quia aliter omnes par-  
 tes essent majores omnibus parti-  
 bus , quam totum toto. Idem  
 fere cum quinta.

## PROPOSITIO XX.

12 9 6 Si sint tres magnitudines  
A B C A B C. & alia D E F. Tb. 20.

8 6 4 ipsis aequales numero, qua

D E F bina & in eadem ratione

sumantur (hoc est ut A. ad B. ita

D. ad E. & ut B. ad C. ita E.

ad F. ) Ex aquo autem prima A.

quam tertia C. major fuerit, erit &

quarta D. quam sexta F. major.

Quod si prima tertia aequalis fuerit,

erit & quarta aequalis sexta, sin illa

minor, hac quoque minor erit.

**P**rob. Sit major A. quam B.

ergo major erit ratio ipsius A. ad B. quam C. ad B. sed ratio A.

ad B. æqualis est rationi D. ad E.

ergo etiam D. ad E. ratio major

est quam B. ad C. hoc est E. ad F.

quare D. major erit F. per 10. 5.

Haud secus concludam si A. ipsi

C. æqualis ponatur aut minor. In-

terpretes idem probant de quot-

cunque magnitudinibus, non de

tribus tantum.

## PROPOSITIO XXI.

Th. 21. 18 12 4 Si sint tres magnitudi-  
 A B C A B C. & ipsis *equales*  
 27 9 6 numero DEF. qua bina  
 D E F & in eadem ratione su-  
 mantur, fueritque perturbata ea-  
 rum proportio (hoc est ut A. ad B.  
 sic E. ad F. & ut B. ad C. sic D.  
 ad E) Ex aequo autem prima A.  
 quam tertia C. major fuerit: erit  
 & quarta D. quam sexta F. major.  
 Quod si prima tertia fuerit equalis,  
 erit & quarta equalis sexta, sin illa  
 minor, hac quoque minor erit.

**P**rob. Sit A. major quam C.  
 Ergo per 8. A. ad B. maiorem  
 rationem habebit quam C. ad B.  
 sed ratio A. ad B. æqualis est ra-  
 tioni E. ad F. ergo etiam ratio E.  
 ad F. major erit ratione B. ad C.  
 hoc est D. ad E. adeoque per  
 10. 5. F. minor erit quam D.  
 Idem ostendetur si A. minor vel  
 æqualis fuerit D.

PRO-

## PROPOSITIO XXII.

$12 \quad 9 \quad 6 \quad 8 \quad 6 \quad 4$  Si fuerint *th. 22.*  
 $A \quad B \quad C \quad D \quad E \quad F$  quotcunque  
 $24 \quad 18 \quad 12 \quad 16 \quad 12 \quad 8$  magnitudines  
 $G \quad H \quad I \quad L \quad M \quad N$  ABC. & a-  
 litis ipsi æquales numero DEF. qua  
 binæ in eadem ratione sumantur  
 (hoc est ut A. ad B. ita D. ad E.  
 & ut B. ad C. ita E. ad F.) & ex  
 æqualitate in eadem ratione erunt.  
 Hoc est erit A. ad C. sicut D.  
 ad F.

**P**rob. Sumantur ipsarum ABC.  
 æquemultiplicia GHL. & ipsarum  
 DEF. æquemultiplica, LMN. cum  
 simplicia sint in eadem ratione A. ad  
 B. ut D. ad E. & B. ad C. ut E. ad F.  
 a erunt eorundem multiplicia G. ad H. a 15. 5.  
 & H. ad I. ut L. ad M. & M. ad N.  
 Ergo si quotvis magnitudines GHI.  
 & aliæ totidem LMN. binæ sumantur  
 in eadem ratione quarum b primæ b 20. 5.  
 ultimam in utroque ordine simul ex-  
 cedunt, æquantur, vel deficiunt, ea-  
 rum simplices erunt in eadem ratione,  
 hoc est A. ad C. c ut D. ad F. c 6.  
 Def.

## PROPOSITIO XXIII.

Th. 23. 18 12 4 Si fuerint tres magni-  
 A B C tudines A B C. aliaque  
 27 9 6 ipsis aequales numero  
 D E F DEF. quæ bina in ea-  
 tione sumantur, fuerit autem per-  
 bata eadem ratio (hoc est sit A.  
 ad B. ut E. ad F. & ut B. ad C.  
 ita D. ad E.) etiam ex æqualitate  
 in eadem ratione erunt (hoc est ut  
 A. ad C. ita D. ad F.)

a 21. 5. **P**rob. <sup>a</sup> Si A. excedit C. æqua-  
 tur vel deficit; D. excedet F.  
 b 15. 5. æquabitur, vel deficiet. <sup>b</sup> Idem-  
 que fiet in æquemultiplicibus.  
 c 17. <sup>c</sup> Ergo ex <sup>c</sup> æqualitate in <sup>d</sup> eadem  
 Def. <sup>d</sup> 6. ratione est A. ad C. ita D.  
 Def. ad F.

PRO-

## PROPOSITIO XXIV.

4 2 6 Si prima A. ad secun- Tb. 24.  
 A B C dam B. eandem habue-  
 3 10 15 rit rationem, quam  
 D E F tertia C. ad quartam  
 14 21 D. habuerit autem &  
 G H quinta E. ad secundam  
 B. eandem rationem quam sexta F.  
 ad quartam D. Etiam G. composita  
 prima cum quinta: ad secundam B.  
 eandem habebit rationem, quam H.  
 tertia cum sexta, ad quartam D.

**P**rob. Ex hypothefi B. est talis  
 pars singularum A. & E. qualis  
 est D. singularum C. & F. Ergo  
 a erit quoque B. talis pars com- a 18. 3.  
 positarum A. & E. in G. qualis  
 est ipfarum C. & F. composita-  
 rum in H.



## PROPOSITIO XXV.

|    |   |   |   |
|----|---|---|---|
| 12 | 4 | 9 | 3 |
| A  | B | C | D |
| E  | 3 | F | 1 |

Th. 25. Si quatuor magnitudines ABCD.  
 proportionales fuerit: maxima A.  
 & minima D. reliquis duabus B C.  
 majores erunt.

**N**am si ab A. 12. detras C. 9.  
 remanebit E. 3. item si à  
 B. 4. auferas D. 3. remanebit  
 F. 1. nunc quoniam est A. ad B.  
 ita C. ad D. erit quoque dividen-  
 do A. ad B. ita E. 3. F. 1. sed A.  
 major est C. ergo & E. major  
 erit F. ergo A. composita ex C.  
 & E. plus D. major erit quam B.  
 composita ex C. & F. plus C.  
 Q. E. D.

PRO-

## PROPOSITIO XXVI.

§ 4 5 3. Si prima A. ad se-  
 A B C D cundam B. habuerit  
 majorem rationem quàm tertia C.  
 ad quartam D. habebit converten-  
 do, secunda B. ad primam A. mi-  
 norem, quàm quarta D. ad ter-  
 tiam C.

**H**æc & reliquæ octo proposi-  
 tiones, cum non sint Eu-  
 clidis, eas non aliter demonstra-  
 bimus quàm indicando proposi-  
 tiones Euclidis in quibus virtute  
 continentur.

Hanc vero propositionem 4.  
 & 10. hujus elementi contineri,  
 patet manifestè.

PRO-

## PROPOSITIO XXVII.

th. 27.  $\frac{8}{A} \frac{4}{B} \frac{5}{C} \frac{3}{D}$  Si prima A. ad secundam B. habuerit maiorem rationem, quam tertia C. ad quartam D. habebit quoque vicissim prima A. ad tertiam C. maiorem rationem, quam secunda B. ad quartam D.

Continetur prop. 16.

## PROPOSITIO XXVIII.

th. 28.  $\frac{8}{A} \frac{4}{B} \frac{5}{C} \frac{3}{D}$  Si prima A. ad secundam B. habuerit maiorem rationem, quam tertia C. ad quartam D. habebit quoque composita prima cum secunda E. ad secundam B. maiorem rationem, quam composita tertia cum quarta F. ad quartam D.

Continetur prop. 18.

## PROPOSITIO XXIX.

8 4 5 3 Si composita E. prima *th.* 29.  
 A B C D cum secunda, ad secun-  
 E 12 F 8 dam B. majorem ha-  
 buerit rationem quàm composita F.  
 tertia cum quarta ad quartam D.  
 habebit quoque dividendo, prima A.  
 ad secundam B. majorem rationem  
 quàm tertia C. ad quartam D.

Continetur propositione 17.

## PROPOSITIO XXX.

8 4 5 3. Si composita E. prima *th.* 30.  
 A B C D cum secunda, ad secun-  
 E 12 F 8 dam B. habuerit mayo-  
 rem rationem, quam composita F.  
 tertia cum quarta, ad quartam D.  
 habebit per conversionem rationis,  
 prima cum secunda E. ad primam  
 A. minorem rationem, quam tertia  
 cum quarta F. ad tertiam C.

Continetur prop. 19.

PRO-

## PROPOSITIO XXXI.

|    |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|
| 16 | 8 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| A  | B | C | D | E | F |

Th. 31. Si sint tres magnitudines A B C.  
 & alia ipsis æquales numero D E F.  
 sitque major ratio prima priorum  
 A. ad secundam B. quam prima po-  
 steriorum D. ad secundam E. Item  
 secunda priorum B. ad tertiam C.  
 major quam secunda posteriorum E.  
 ad tertiam F. erit quoque ex æqua-  
 litate major ratio prima priorum  
 A. ad tertiam C. quam prima po-  
 steriorum D. ad tertiam F.

Continetur prop. 20. & 22.

PRO-

## PROPOSITIO XXXII.

16 8 5 Si sint tres magnitudi- Tb. 32.  
 A B C nes A B C. & alia ipsis  
 9 6 4 aequales numero D E F.  
 D E F sitque major ratio prima  
 priorum A. ad secundam B. quam  
 secunda posteriorum E. ad tertiam  
 F. Item secunda priorum B. ad ter-  
 tiam C. quam prima posteriorum  
 D. ad secundam E. Erit quoque  
 ex aequalitate major ratio prima  
 priorum A. ad tertiam C. quam pri-  
 ma posteriorum D. ad tertiam F.

Continetur prop. 21. & 23.

## PROPOSITIO XXXIII.

12 6 Si fuerit major ratio totius Tb. 33.  
 A B A. ad totum B. quam ablati  
 4 3 C. ad ablatum D. erit &  
 C D reliqui E. ad reliquum F.  
 8 3 major ratio, quam totius A.  
 E F ad totum B.

Continetur propositione 18.

Y PRO-

## PROPOSITIO XXXIV.

12 8 4. 6 5 3 Si sint quot-  
 Th. 34. A B C. D E F cunque magni-  
 tudines ABC. & alia ipsis æquales  
 numero D E F. sitque major ratio  
 prima priorum A. ad primam poste-  
 riorum D. quam secunda B. ad se-  
 cundam E. & B. ad eundem E.  
 major, quam tertia C. ad tertiam  
 F. & sic deinceps: habebunt omnes  
 priores simul ABC. ad omnes poste-  
 riores simul DEF. maiorem ratio-  
 nem quam omnes priores B C. re-  
 licta prima A. ad omnes posteriores,  
 EF. relictæ quoque prima D. mino-  
 rem autem, quam prima priorum A.  
 ad primam posteriorum D. maiorem  
 denique etiam quam ultima priorum  
 C. ad ultimam posteriorum F.

**H**ujus nullus usus & facilis  
 demonstratio ex præceden-  
 tibus.

N O T A.

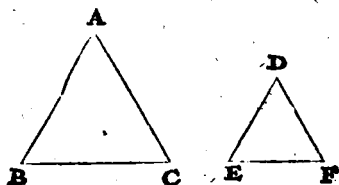
Quidam inter celebriores numerant.  
 15. 16. 17. 18.

E U-

# EVCLIDIS

## ELEMENTUM VI.

### DEFINITIONES.

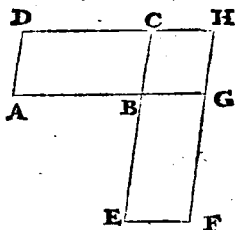


1. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales sunt, proportionalia.*

**D**uas conditiones requirit,  
 1. ut anguli sint æquales  
 singuli singulis, ut hic A. & D. B.  
 & E. C. & F. 2. ut latera circa  
 æquales angulos sint proportio-  
 Y 2 nalia,



256 ELEM. EUCLIDIS  
 nalia, hoc est ita se habeat B A.  
 ad A C. ut E D. ad D F. quod si  
 harum altera desit, non dicentur  
 similes. Sic quadratum & altera  
 parte longius non sunt similes  
 figuræ.



2. *Reciprocae autem figurae sunt, cum in utraque figura, antecedentes & consequentes rationum termini fuerint.*

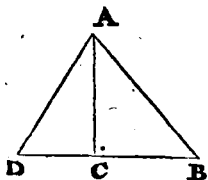
**H**oc patet maxime in parallelogrammis & triangulis:  
 nam si qua ratione AB. est ad BG.  
 in

in eadem sit BE. ad BC. erunt reciprocae figuræ, nam in utroque est antecedens & consequens diversarum rationum.



3. *Secundum extremam & mediam rationem, recta AB. secta esse dicitur, cum ut tota AB. ad majus segmentum AC. ita majus AC. ad minus CB. se habuerit.*

**O**b miram sui utilitatem, hæc proportio, divina communiter appellatur; ast mirum quod 11. prop. lib. 2. hic inter definitiones annumeratur, nisi velis veritatem jam demonstratam hic resumere.



4. *Altitudo cujusque figuræ, est lineæ perpendicularis A D. à vertice ad basim deducta.*

Cum ut ait Ptol. lib. de Anal. mensura cujusque rei debeat esse stata, merito Euclides à perpendiculari altitudinem petit cujusvis figuræ: sola enim perpendicularis est stata & certæ longitudinis: hanc vero altitudinem lib. 1. vocavit esse in iisdem parallelis.

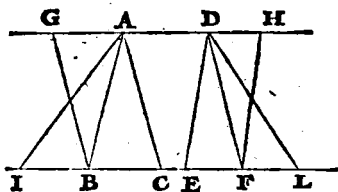
5. *Ra-*

5. *Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates, inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.*

**Q**uod Euclides vocat quantitates rationum, solent Geometræ vocare Denominatorem. Numerus enim est à quo petitur nomen proportionis; sic 4. est denominator rationis quadruplæ: 3. triplæ. Ratio igitur est rationibus componi dicitur, quando harum denominatores seu quantitates rationum inter se multiplicatæ aliquam aliam rationem fecerint. Sic ex ratione dupla & tripla componitur sextupla, quæ est ratio ex rationibus: nam sex componitur ex denominatore duplæ 3. Inter se enim multiplicati faciunt 6. denominatorem rationis sextuplæ compositæ.

260 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO I.

Tb. I.

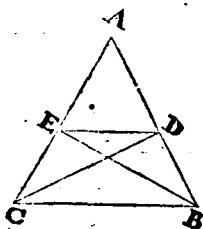


Triangula ABC. DEF. & parallelogramma CG. DF. quorum  
<sup>a</sup> Def. 4. <sup>a</sup> eadem fuerit altitudo GH. BF. ita se habent inter se, ut bases BC. EF.

**I**d est, eam inter se habent rationem quam bases. Prob. Triangula ejusdem altitudinis <sup>a</sup> possunt  
<sup>a</sup> Def. 4. <sup>b</sup> 36. inter parallelas constitui: <sup>b</sup> tunc autem quæ æqualem habebunt basim, erunt æqualia, quæ majorem majora, quæ minorem minora.  
<sup>c</sup> 15. 5. Idemque <sup>c</sup> est de æquemultiplicibus. Ergo absolute triangula se habent ut bases, similiterque parallelogramma; cum sint dupla  
<sup>d</sup> 34. 1. <sup>d</sup> triangulorum.

PRO-

## PROPOSITIO II.



*Si ad trian- Th. 2.  
guli ABC. la-  
tus unum CB.  
parallela du-  
catur ED. hac  
proportionali-  
ter secabit  
ipsius trian-*

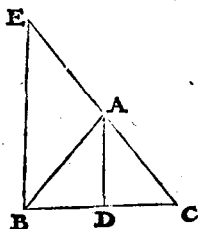
*guli latera AC. AB. Et si trianguli  
latera, proportionaliter secta sint,  
recta DE. per puncta sectionis  
ducta, erit parallela ad reliquum  
ipsius trianguli latus CB.*

**P**rob. Ductis duabus rectis EB. DC.  
a erunt triangula EDC. EDB. super 2. 37. 1.  
eandem basim ED. & inter easdem  
parallelas ED. CB. æqualia. b 1. 6.  
AED. ad ECD. ita AE. ad EC. c (sunt c Def. 4.  
enim in eadem altitudine) & ut ADE.  
ad DBE. ita AD. ad DB. d ergo ut AE. ad d 7. 5.  
EC. ita AD. ad DB. 2. Ponantur jam la-  
tera AC. AB. proportionaliter secta in E.  
& D. cum AED. ad DEC. eandem habe-  
at rationem, quam ad EDB. (nam est ut  
AE. ad EC. sic AD. ad DB. cum triangu-  
la sint ejusdem altitudinis) e erunt DEC. e 9. 5.  
EDB. æqualia, & quia sunt in eadem  
basi ferunt inter parallelas. Q. E. D. f 39. 1.

PRO.

## PROPOSITIO III.

Th. 3.



Si trianguli

ABC. angu-

lus A. bifa-

riam sectus sit:

secans autem

angulum recta

AD. secet &amp;

basim BC. ba-

sis segmenta BD. DC. eandem

habebunt rationem, quam reliqua

trianguli latera BA. AC. &amp; si

basim segmenta BD. DC. ean-

dem habeant rationem, quam re-

liqua trianguli latera BA. AC.

recta AD. quæ à vertice A. ad

sectionem D. producitur, bifa-

riam secat trianguli ipsius angu-

lum A.

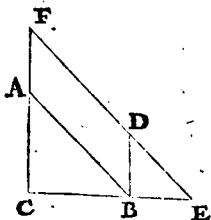
a 31. I. **P**rob. Ad punctum B. <sup>a</sup> agatur BE. ipsi DA. parallela,  
 b 17. & cui CA. producta <sup>b</sup> occurrat in  
 29. I. E. tunc erit EBA. <sup>c</sup> æqualis  
 c 29. I. alter-

alterno  $BAD.$  &  $E.$  externo  
 $DAC.$  ergo cum anguli  $BAD.$   
 $CAD.$  æquales ponantur, erunt  
 anguli  $EBA.$  &  $E.$  æquales, &  
 rectæ  $BA.$   $AF.$  <sup>d</sup> æquales. <sup>d 6. 1.</sup>  
 Ergo cum in triangulo  $EB-C.$   
 rectæ  $DA.$   $BE.$  parallelæ sint,  
 ut  $EA.$  hoc est  $BA.$  ad  $AC.$   
<sup>e</sup> ita  $BD.$  ad  $DC.$  Sit rursus <sup>e 3. 6.</sup>  
 ut  $BA.$  ad  $AC.$  sic  $BD.$  ad  
 $DC.$  ut autem  $BD.$  ad  $DC.$   
 ita <sup>f</sup> est  $EA.$  ad  $AC.$  <sup>g</sup> Ergo <sup>f 26.</sup>  
 ut  $BA.$  ad  $AC.$  ita  $EA.$  ad <sup>g 11. 5.</sup>  
 $AC.$  <sup>h</sup> æquales ergo  $BA.$   $EA.$  <sup>h 9. 5.</sup>  
 & <sup>i</sup> anguli  $ABE.$  &  $E.$  Cum <sup>i 5. 1.</sup>  
 ergo  $ABE.$  alterno  $BAD.$   
 æqualis sit &  $E.$  externo  $DAC.$   
 erunt anguli  $BAD.$   $DAC.$   
 æquales.



## PROPOSITIO IV.

Th. 4.



*Æquiangulo-  
rum triangu-  
lorum ACB.  
DBE. propor-  
tionalia sunt  
latera (hoc est  
ut AC. ad CB.  
ita DB. ad BE)  
que circa æ-  
quales angulos  
C. & B. & ho-*

*mologa sunt latera BA. ED. qua equali-  
bus angulis C. & B. subtenduntur.*

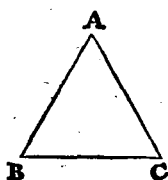
- P**rob. Sic in directum statue rectas  
CB. BE. ut angulus extern. DBE.  
interno C. sit æqualis: tunc DB. &  
AC. a erunt parallelæ: similiterque ED.  
BA. cum anguli E. & ABC. sint æquales.  
Et quia anguli ACB. ABC. hoc b est  
DEB. minores sunt e duobus rectis, si  
a 28. 1. producantur ED. CA. convenient d puta  
in F. e Eritque DA. parallelogrammum.  
b 29. 1. Cum igitur in triangulo FCE. rectæ DB.  
c 17. 1. FB. sint parallelæ, f erit ut ED. ad DF.  
d Ax. hoc est BA. ita EB. ad BC. Cumque BA.  
11. EF. sint item parallelæ, erit CB. ad BE.  
c 34. 1. ut CA. ad AF. hoc est BD. & ut AB. ad  
f 2. 6. BE. ita ED. hoc est AB. ad DE.

## SCHOLIUM.

*Quæ hinc vulgo colliguntur nota erunt  
demonstrata prop. 8. cum annexo scholio.*

PRO-

## PROPOSITIO V.



Th. 5.

*Si duo triangula ABC. DEF.  
latera AB. BC. proportionalia  
ipsis DE. EF. habuerint, erunt æ-  
quiangula, eosdemque angulos,  
DA. EB. FC. habebunt æquales,  
quibus homologa latera subtendun-  
tur.*

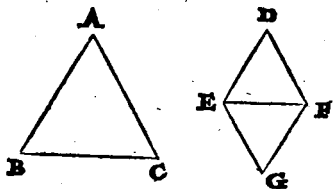
**P**rob. Super recta EF. ad punctum  
E. a ponatur angulus FEG. angulo <sup>a 23. 1.</sup>  
B. æqualis & ad F. alius ipsi C. con-  
sequenter reliquus G. reliquo A. <sup>b æ- b 32. 1.</sup>  
qualis, sicque fiant triangula ABC. EFG.  
æquiangula; ergo GE. erit ad EF. ut  
AB. ad BC. hoc est ex hypot. DE. ad EF.  
quare GE. æqualis erit DE. Simili ratio- <sup>c 9. 5.</sup>  
ne GF. æqualis est DF. cumque latus  
EF. utrique triangulo commune est  
erunt triangula ABC. & DEF. per. 8. 1.  
æquiangula &c. Q. E. D.

Z

PRO-

## PROPOSITIO VI.

7b. 6.

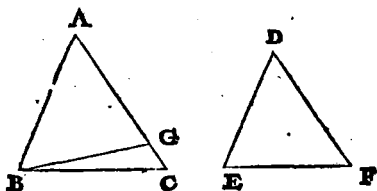


*Si duo triangula ABC. DEF. unum habeant æqualem angulum A. & D. & latera circa eum proportionalia (ut BA. ad AC. ita ED. ad DF.) erunt æquiangula, angulosque habebunt æquales E. B. C. F. quibus homologa latera BA. ED. AC. DF. subtenduntur.*

**P**rob. Ad rectam EF. angulos FEG. EFG. fac æqua-

æquales ipsis B. C. erit & G.  
 æqualis A. quia ergo æquian-  
 gula sunt ABC. GEF. <sup>a</sup> erunt <sup>a</sup> 4. 6.  
 ut AB. ad AC. ita GE. ad  
 GF. proportionalia : sed sunt  
 etiam proportionalia AB. AC.  
 & DE. DF. <sup>b</sup> sunt ergo late- <sup>b</sup> 11.  
 ra DE. DF. ipsis GE. GF. <sup>c</sup> 9. 5.  
 æqualia. Cumque basis EF. sit  
 communis , triangula DEF.  
 EFG. <sup>c</sup> æquiangula sunt : <sup>d</sup> <sup>c</sup> 8. 1.  
 ergo etiam æquiangula ABC.  
 DEF. Q. E. D. <sup>d</sup> 12. 1.

268 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO VII.



**Th. 7.** *Si duo triangula ABC. DEF. unum angulum A. uni angulo D. æqualem, circum autem alteros angulos B. E. latera proportionalia habeant ( ut AB. ad BC. ita ED. ad EF. ) reliquorum vero B. E. simul utrumque, aut minorem aut non minorem recto : equiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos ABC. DEF. circum quos sunt proportionalia latera.*

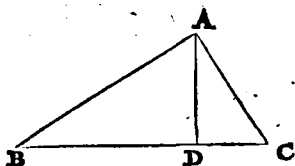
**P**rob. Sit enim C. & F. minor recto, tunc si anguli ABC. & E. non sunt æquales, sit ABC. major quam E. fiatque ipsi E. æqualis ABG. cum igitur angulus  
a 33. 1. A. angulo D. ponatur æqualis a  
erit,

erit & reliquus AGB. reliquo F.  
 æqualis, ideoque triangula ABG.  
 DEF. æquiangula erunt. <sup>b</sup> Ergo <sup>b</sup> 4. 6.  
 ut AB. ad BG. ita erit DE. ad  
 EF. sed ut DE. ad FE. ita ponitur  
 AB. ad BC. adeoque <sup>c</sup> æquales <sup>c</sup> 9. 5.  
 BG. CB. & <sup>d</sup> anguli B, CG. <sup>d</sup> 5. 1.  
 BGC. æquales. Cum igitur an-  
 gulus C. sit recto minor erit &  
 BGC. minor recto, & ei deinceps  
 AGB. <sup>e</sup> major recto. Est autem <sup>e</sup> 13. 1.  
 ostensus angulus AGB. angulo  
 F. æqualis; Major igitur est recto  
 angulus F. qui minor ponebatur.

Jam sit angulus B. & E. recto  
 non minor probabitur ut prius re-  
 ctas BG. & BC. esse æquales, &  
<sup>f</sup> consequenter angulos BGC. <sup>f</sup> 5. 1.  
 BCG. esse æquales, & non mi-  
 nores duobus rectis, & quod absur- <sup>g</sup> 17. 1.  
 dum. Non ergo inæquales sunt  
 anguli ACB. & F. sed æquales,  
 & consequenter reliqui anguli B.  
 & E. <sup>h</sup> æquales, quod erat pro- <sup>h</sup> 32. 1.  
 bandum.

## PROPOSITIO VIII.

Th. 8.



*Si in triangulo rectangulo BAC.  
ab angulo recto A. in basim BC.  
perpendicularis AD. ducta sit:  
qua ad perpendicularem triangu-  
la ADC. BDA. tum toti triangulo  
BAC. tum ipsæ ADC. BDA.  
inter se sunt similia.*

**P**rob. In trianguli ABC.  
DBA. anguli BAC. ADB.  
recti sunt & angulus B. com-  
munis : ergo <sup>a</sup> reliqui ACB.  
BAD. æquales : ergo triangu-  
la ABC. DBA. <sup>b</sup> similia. Non  
aliter ostendetur ABC. simile  
ADC. & ADC. triangulo  
BDA. Q.E.D.

Coroll. 1.

## LIBER SEXTUS. 271

**Coroll. 1.** Perpendicularis ab angulo recto in basim, est media proportionalis inter duo basis segmenta.

<sup>c</sup> Nam ut  $BD.$  ad  $DA.$  ita  $DA.$  <sup>c4. 6.</sup> ad  $DC.$  quod est rectam  $DA.$  esse mediam proportionalem inter basis partes  $BD.$   $DC.$

**Coroll. 2.** Hinc etiam patet utrumlibet laterum rectum ambientium, medium proportionale esse inter totam basim & illud segmentum basis quod ei lateri adjacet.

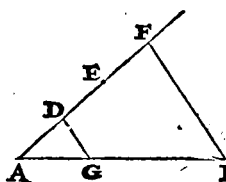
## SCHOLIUM.

*Omnes proportionales respectu laterum facillimo negotio conspici poterunt, modo litera, quibus triangula insignita sunt, ordine equalium angulorum disponantur & ab utraque parte similiter conferantur, unde etiam corollaria hinc desumpta patent.*



## PROPOSITIO IX.

Prob. 1.



A data re-  
cta AB. im-  
peratā par-  
tē puta ter-  
tiam AG.

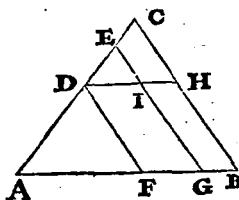
B auferre.

**P**rax. Ex A. ducatur recta AF. utcumque faciens angulum, & ex AF. sumatur quævis pars, puta AD. ac duæ aliæ addantur æquales DE. EF. jungatur FB. cui ex D. parallela fiat DG. eritque ablata AG. pars tertia ipsius AB.

Prob. In triangulo AFB. lateri BB. parallela est linea GD. <sup>a</sup> ergo erit ut FD. ad DA. ita BG. ad GA. & <sup>b</sup> componendo ut FA. ad DA. ita BA. ad GA. Est autem AD. pars tertia ipsius AF. Ergo AG. erit pars tertia ipsius AB. Q. E. F.

PRO-

## PROPOSITIO X.



*Datam re- Prob. 2.  
ctam inse-  
ctam AB.  
similiter se-  
care, ut da-  
ta altera  
recta AC.*

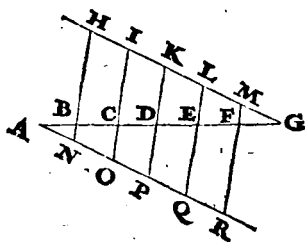
*secta fuerit in D. & E.*

**P**rax. Jungantur datæ lineæ in A. connectantur recta BC. & ex D. & E. agantur DE. EG. ipsi CB. parallelæ, & factum est quod petitur.

Prob. In triangulo ABC. ductæ sunt DF. EG. parallelæ lateri BC. <sup>a</sup> ergo ut AD. ad DE. ita AF. ad <sup>a 2. 6.</sup> FG: Proportionales ergo sunt partes AF. FG. partibus AD. DE. Jam si ducatur DH. parallela ipsi AB. erit ut DE. ad EC. ita DI. ad IH. <sup>b</sup> hoc est FG. ad GB. quare <sup>b 34. 1.</sup> proportionales sunt partes FG. GB. partibus DE. EC. Q.E.D.

SCHO-

## SCHOLIUM.

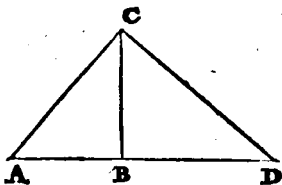


Ex hac & precedente propositione facile constat lineam quavis aperturâ circini in quotvis partes dividere, cujus demonstrationem & praxin apposita figura exhibet.

PRO-

## PROPOSITIO XI.

Prob. 3.



*Datis duabus rectis AB. BC.  
tertiam proportionalem invenire.*

**P**raxis. Duabus datis fac angulum ABC. rectum, item ad AC. angulum rectum ACD. per rectam CD. occurrentem protrahæ AB. in D. & factum est quod petitur per coroll. 8. cum BC. sit media proportionalis.

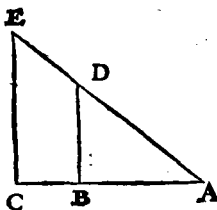
## NOTA.

Idem demonstratur, ut in sequente, per lineas parallelas; sumendo tertiam alterutri æqualem.

PRO-

## PROPOSITIO XII.

Prob. 4.



*Tribus da-  
tis rectis  
AB. BC.  
AD. quar-  
tam pro-  
portionalem DE.  
invenire.*

**P**rax. Ex datis, duas AB. BC. in directum colloca, ex reliqua AD. & totali AC. fac angulum DAC. junge recta BD. & fac ipsi parallelam CE. quarta DE. proportionalis erit.

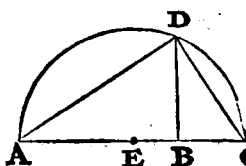
Prob. CE. BD. sunt paralle-  
2. 6. læ : 2 ergo ut se habet AB. ad BC. ita AD. ad DF. Ergo DE. quarta est proportionalis.

## NOTA.

Idem constat ex 35. prop. lib. 3.

PRO-

LIBER SEXTUS. 277  
PROPOSITIO XIII.



*Datis duabus rectis  
AB. BC.  
mediā proportionalem BD.  
Circūvenire.*

**P**rax. Colloca in directum AB.  
BC. super AC. duc semicir-  
culum ADC. In B. excita per-  
pendicularem BD. ad periphē-  
riam semicirculi, illa erit quæsitā.

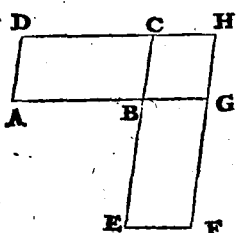
Prob. Ductis rectis AD. CD.  
a erit angulus ADC. in semicir- a 31. 3.  
culo rectus, & à vertice D. ad  
basim AC. ducta perpendicula-  
ris DB. facit b duo triangula æ- b 8. 6.  
quiangula: c ergo proportiona- c 4. 6.  
lia: ergo ut AB. ad BD. ita BD.  
ad BC. est ergo BD. media pro-  
portionalis inter AB. BC. Q. E. D.

Corollarium.

*Hinc quavis recta à circumferentia  
ad diametrum perpendicularis ducta,  
media proportionalis est inter diametri  
segmenta.*

## PROPOSITIO XIV.

Th. 9.



Æqualium

A C. B F.

&amp; unum

ABC. uni

EBG. æ-

qualem ba-

bentiũ an-

gulum, pa-

rallelogrammorum, reciproca sunt latera AB. BG. EB. BC. quæ circum æquales angulos: & quorum parallelogrammorum, unum angulum uni angulo, æqualem habentiũ, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

**P**rob. Jungantur parallelogramma ad angulum æqualem B. ita ut AB. & BG. jaceant in directum a jace-

a 14.

b 7.5.

c 1.6.

d 11.5.

e 1.6.

f 9.5.

g 15.1.

h 7.5.

i 1.6.

j 9.5.

k 14.

l 15.1.

m 7.5.

n 1.6.

o 9.5.

p 14.

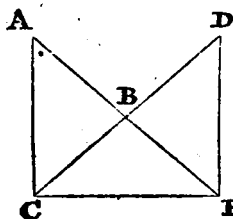
q 15.1.

bunt & reliquæ EB. BC. perficiatur parallelogrammũ BH. ergo ut FB. ad BH. ita b erit BD. ad BH. sed ut FB. ad BH. ita c est EB. ad BC. & ut DB. ad BH. ita AB. ad BG. igitur ut E B. ad BC. d ita est AB. ad BG.

Prob. 2. pars. Ex hypoth. EB. ad BC. est ut AB. ad BG. ergo e EG. ad BH. est ut DB. ad BH. f ergo parallelogramma æqualia sunt. Q. E. D.

PRO-

LIBER SEXTUS. 279  
PROPOSITIO XV.



*Æqualium* Th. 10.

A B C.

D B E.

& unum

B. uni B.

*equalem*

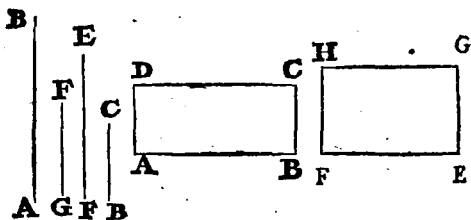
E habentium

*angulum, triangulorum reciproca sunt latera ut AB. ad BE. ita DB. ad BC. quæ circum æquales angulos B. & quorum triangulorum, unum angulum uni æqualem habentium reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.*

**P**rob. Sic junge triangula ad angulum æqualem B. ut AB. BE. jaceant in directum, ducta CE. a erit ut a 7. 5. A B C. ad B C E. ita D B E. ad B C E. sed ut A B C. ad B C E. ita b A B. ad B E. & b 1. 6. ut D B E. ad B C E. ita B D. ad B C. Similiter demonstratur A B C. D B E. esse æqualia, si sit ut AB. ad BE. ita DB. ad B C. Nam cum ponatur ut AB. ad B E. ita DB. ad B C. & ut A B. ad B E. ita triangulum A B C. ad B C E. & ut D B. ad B C. ita D B E. ad B C E. erit ut A B C. ad B C E. ita D B E. ad B C E. ergo triangula A B C. D B E. c sunt æqualia. Q. E. D. c 9. 5.



280 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO XVI.



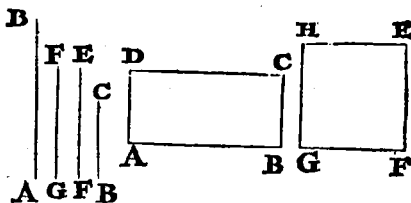
th. II. Si quatuor rectæ A. G. F. B. proportionales fuerint: quod sub extremis A B. B C. comprehenditur rectangulum A C. æquale est ei, quod sub mediis E F. F G. comprehenditur rectangulo F G. Et si sub extremis A B. B C. comprehensum rectangulum A C. æquale fuerit ei quod sub mediis G F. F E. continetur rectangulo F G. illæ quatuor rectæ proportionales sunt.

**P**rob. 1. Anguli recti B. & E. sunt æquales, & ut se habet A B. ad E G. ita E F. ad B C. ergo latera circa æquales  
a 14. 6. angulos B. & E. sunt reciproca, a ergo parallelogramma A C. F G. sunt æqualia.

Prob. 2. Æqualia sunt rectangula A C. F G. & habent angulos æquales, nempe rectos B. & E. ergo b latera circa hos angulos reciproca erunt etiam b proportionalia. Q. E. D.

PRO-

LIBER SEXTUS. 281  
PROPOSITIO XVII.



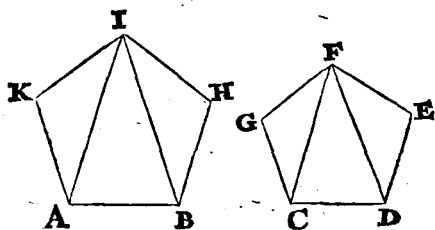
*Si tres rectæ AFB. sint proportionales Th. 12. les: quod sub extremis AB. BC. comprehenditur rectangulum AC. æquale est ei, quod à media F. describitur quadrato EG. Et si sub extremis AB. AC. comprehensum rectangulum AC. æquale sit ei quod à media F. describitur quadrato EG. illæ tres rectæ proportionales erunt.*

**P**rob. 1. pars. Sume rectam GF. æqualem ipsi FE. erunt quatuor rectæ AG. FB. proportionales, eritque quadratum EG. comprehensum sub mediis FG. EF. æ ergo rectangulum AC. æquale erit quadrato GE.

Prob. 2. Quadratum FG. mediæ EF. (vocemus parallélogrammum) rectangulo AC. sub extremis AB. BC. æquale a 16. 6. ponitur, & habent angulos æquales: ergo latera ut proxime dixi, circa hos angulos erunt reciproca adeoque proportionalia. **N O T A.**

*Ex hac & præcedenti, cujus quasi repetitio est, infertur fundamentum regule vulgò dictæ de Tri, &c.*

## PROPOSITIO XVIII.

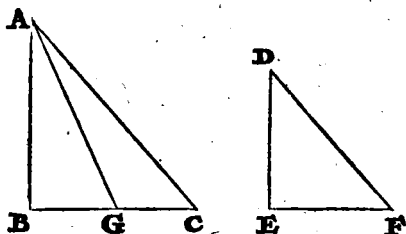


*Prob. 6. Super data recta AB. dato rectilineo CDEFG. simile, similiterque positum rectilineum ABHIK. describere.*

**D**atum rectilineum resolve in triacula, ductis rectis puta CF. DF. Ad punctum <sup>a</sup> 32. 1. A. <sup>a</sup> fiat angulus IAB. æqualis ipsi FCD. & ipsi FDC. <sup>b</sup> 32. 1. æqualis IBA. & <sup>b</sup> consequenter reliquis reliquo: Æquiangula ergo erunt triacula FCD. IAB. <sup>c</sup> 4. 6. & similia <sup>c</sup> & ut CF. ad AI. ita CD. ad AB. Ad rectam AI. fac simi-

similiter triangulum I K A. æ-  
 quiangulum triangulo F G C.  
 & quia anguli B A I. I A K. æ-  
 quales sunt angulis D C F. F C G.  
 totales K A B. G C D. æquales  
 erunt, & latera proportionalia.  
 Idemque repetendum, donec  
 omnia triangula eodem ordine  
 quo jacent absolvantur, sicque  
 totum rectilineum toti rectili-  
 neo <sup>d</sup> simile erit, & super da-  
 tam A B. similiter descriptum. <sup>Def.</sup>  
 Q. E. F.

## PROPOSITIO XIX.



Tab. 13. *Similia triangula ABC. DEF.  
inter se sunt in duplicata ratione  
laterum homologorum.*

**Q**uando triangula sunt æqualia, hoc est quando  $BC$ .  $EF$ . nec non tertia proportionalis  $BG$ . sunt æquales, res est manifesta.

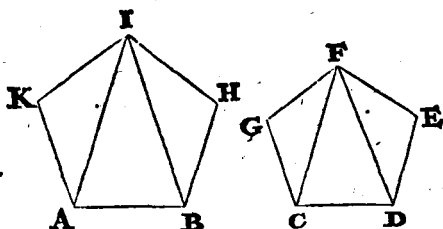
Quando vero latera  $BC$ .  $EF$ . sunt inæqualia, demonstratur, hoc modo. Sit  $BC$ . latus, latere  $EF$ . majus, & ex  $BC$ .  
 art. 6. abscindatur  $\propto$  rectis  $BC$ .  $EF$ .  
 tertià proportionalis  $BG$ . ducaturque recta  $AG$ . Quia igitur angu-

angulus B. est æqualis E. & propter similitudinem triangulorum, ut A B. ad B C. ita D E. ad E F. & permutando ut A B. ad D E. ita B C. ad E F. hoc est E F. ad B G. erunt circa angulos æquales B. E. latera reciproçè proportionalia. Quare per 14. triangula A B G. D E F. erunt æqualia; & per 7. quinti ut triangulum A B C. ad A B G. ita erit idem triangulum A B C. ad D E F. ut autem A B C. ad A B G. ita est per 1. hujus B C. ad B G. Ergo A B C. ad D E F. erit ut B C. ad B G. hoc est in duplicata ratione per 10. def. 5. Q. E. D.

### Corollarium.

*Si tres lineæ fuerint proportionales, ut prima ad tertiam, ita triangulum super primam ad simile triangulum super secundam.*

## PROPOSITIO XX.



**Th. 14.** *Similia polygona in similia triangula dividuntur, & numero aequalia, & totis homologa: & polygona duplicatam habent eam inter se rationem, quam latus homologum ad homologum latus.*

**S**int polygona similia ABHIK. CDEFG. habentia angulos æquales K. G. Itemque I. F. & sic deinceps, & latera proportionalia circa angulos æquales, puta ut AB. ad BH. ita CD. ad DE. &c.

Dico 1. illa dividi in triangula similia & numero æqualia. Prob. ab angulis I. & F. duc rectas ad angulos oppositos A B. C D. divisa erunt illa polygona in triangula numero æqualia: quod etiam similia sunt.

Prob. Anguli K. & G. sunt æquales, & circa ipsos latera sunt proportionalia. a ergo æquiangula sunt triangula IKA. FGC. ergo similia. Eadem ratione erunt similia triangula IHB. FED. dein ut IB. ad BH. ita FD. ad DE. ut autem HB. ad BA. ita ED. ponitur ad DC. b erit ex æquo ut IB. ad BA.

ad BA. ita FD. ad DC. & quoniam angulus HBA. ipsi EDC. est æqualis, & ablati HBI. ablato EDF. erunt reliqui IBA. FDC. æquales. c Ergo triangula IBA. FDC. æ- c 6. 6. quiangula erunt & similia, eademque ratio de omnibus.

Dico 2. quod sicut unum triangulum ad triangulum sibi respondens alterius polygoni: ita esse polygona tota inter se.

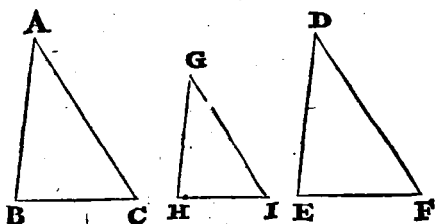
Prob. Quia omnia triangula sunt similia, singula singulis: d ergo sunt in duplicata d 12. 6. ratione laterum homologorum; cumque singula singulis probata sint proportionalia, sic ut in triangulo unius sint omnia antecedentia, in alio consequentia proportionum, e ut unum antecedens est ad unum conse- c 12. 3. quens ita omnia antecedentia ad omnia consequentia. Est ergo polygonum ad polygonum ut triangulum ad triangulum: ergo ea triangula sunt totis homologa, & quia triangula sunt in duplicata ratione laterum homologorum, erunt & polygona in eadem ratione duplicata laterum homologorum puta AB. CD. Q. E. D.

### Corollarium.

*Nunc si fuerint tres recte proportionales, ut est prima ad tertiam ita polygonum super primam descriptum ad polygonum super secundam simile similiterque descriptum, vel etiam polygonum super tertiam simile similiterque descriptum.*



## PROPOSITIO XXI.

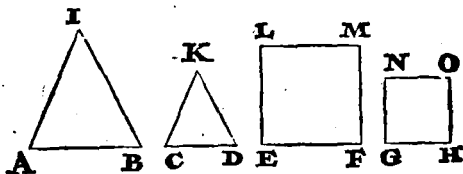


*Tab. 15. Quæ eidem rectilineo GHI. sunt  
similia ABC. DEF. & inter  
se sunt similia.*

**P**rob. Anguli A. & D. po-  
nuntur æquales uni G. ergo  
& inter se, eodemque modo sin-  
guli singulis : <sup>a</sup> latera etiam circa  
eos ponuntur proportionalia,  
quia lateribus ejusdem tertii sunt  
proportionalia : ergo cum ha-  
beant angulos æquales & latera  
<sup>b</sup> circa eos proportionalia, <sup>b</sup> sunt  
*Def. 6.* similia. Q. E. D.

P R O-

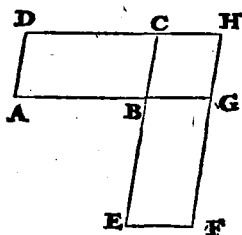
## PROPOSITIO XXII.



*Si quatuor rectæ AB. CD. EF. GH. Tb. 16.  
 proportionales fuerint: & ab eis rectili-  
 nea similia similiterque descripta ABI.  
 CDC. & MF. NH. proportionalia erunt.  
 Et si à rectis lineis, similia, similiterque  
 descripta rectilinea proportionalia fue-  
 rint, ipsæ rectæ proportionales erunt.*

**P**rob. Triangulum ABI est ad trian-  
 gulum CDK. in duplicata a ratio- a 19.6.  
 ne lateris AB. ad CD. similiter EM.  
 ad GO. ut EF. ad GH. adeoque erit  
 ABL ad CDK. ut EM. ad GO. Q. E. D.  
 Jam vero si figuræ proportionales & si-  
 milēs similiterque positæ sint, & rectæ  
 super quas positæ sunt, proportionales  
 erunt: nam ratio unius figuræ ad alte-  
 ram b est rectæ ad rectam duplicata: b 19. &  
 c ergo ratio laterum eadem erit, nempe c 20. 6.  
 ut AB. ad CD. ita EF. ad GH. ergo c 7. 5.  
 illarum latera proportionalia erunt.  
 Q. E. D.

## PROPOSITIO XXIII.



Tab. 17. *Æquiangula parallelogramma*  
*AC. BF. inter se rationem ha-*  
*bent eam, quæ ex lateribus componi-*  
*tur AB. ad BG. & EB. ad BC.*

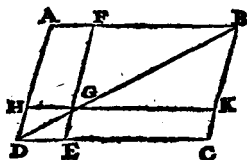
**S**int parallelogramma AC. BF.  
 habentia angulos ad B. æqua-  
 les, & ita disposita ut apposita  
 figura resultet. Nunc ratio AC.

<sup>a</sup> 20. ad BF. æqualis est rationi <sup>a</sup>.

*Def.* 5. AC. ad BH. una cum ratione  
 BH. ad BF. itidem æqualis ra-

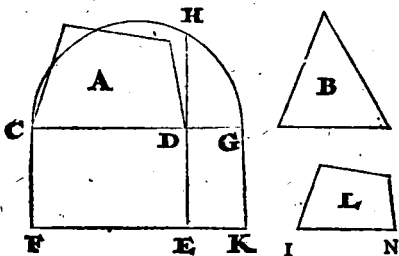
<sup>b</sup> 1. 6. tioni <sup>b</sup>. AB. ad BG. cum ratione  
 CB. ad BE. Q. E. D.

## PROPOSITIO XXIV.



*In omni parallelogrammo AC. tb. 18.  
qua circa diametrum DB. sunt  
parallelogramma FK. HE. & toti  
AC. & inter se sunt similia.*

**P**arallelogramma HE. FK.  
cum toto angulum commu-  
nem habentia reliquosque per  
29. 1. æquales ut BAD. GHD.  
BFG. ipsis BCD. GED.  
BKG. æquiangula erunt, adeo-  
que latera per 4. 6. proportio-  
nalia, constituunt parallelogram-  
ma cum toto & inter se similia.  
Q. E. D.



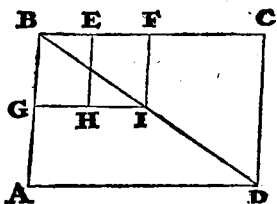
**Prob. 7.** Dato rectilineo A. simile, similiterque positum, & alteri dato B. aequale L. constituere.

**P**rax. Ad dati rectilinei A. latus CD.  
a 45. 1. a fiat rectangulum CE. æquale ipsi  
A. Producatur CD. versus G. super  
DE. in angulo EDG. fiat rectangulum  
b 44. 1. DK. b æquale ipsi B. c fiat inter CD. DG.  
c 13. 6. media proportionalis DH. equalis ipsi LN.  
d 18. 6. super quam fiat d rectilineū L. simile ipsi  
A. similiterque positum, eritque rectili-  
e ux neum L. æquale dato B. & simile ipsi A.

*const.* Prob. Rectæ CD. DH seu IN. DG. ē sunt  
f 19. 6. proportionales: fergo erit ut prima CD.  
20. 6. ad tertiam DG. ita rectilineum super  
primam, id est A. ad rectilineum super  
g 1. 6. secundam, id est L. sed ut CD. ad DG. gita  
parallelogrammum CE. hoc est A. ad  
h 12. 5. DK. hoc est B. h ergo erit ut A. ad B. ita  
i 9. 5. A. ad L. i ideoque rectilineā B. & L.  
erunt æqualia. Q. E. D.

**PRO-**

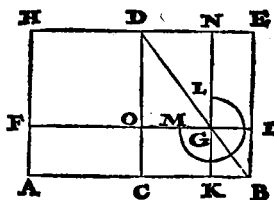
## PROPOSITIO XXVI.



Si à parallelogrammo BD. pa- 19.  
 rallelogrammum FG. ablatum sit,  
 & simile toti, & similiter positum:  
 communem cum eo habens angulum  
 FBG. circa eandem cum toto dia-  
 metrum BD. consistet.

Si neget: transeat alibi diameter puta  
 per H. à quo puncto ducatur ex H.  
 recta HE. parallela BG. tunc pa-  
 rallelogramma BD. BH. circa ean-  
 dem diametrum BHD. a erunt fim-  
 lia: b quare erit ut BA. ad AD. ita BG. 24. 6.  
 ad GH. Sed ut BA. ad AD. ita BG. ad  
 GI. unde per 9. 5. GH. æqualis GI. pars  
 toti. Q. E. A.

## PROPOSITIO XXVII.



76. 20. *Omniū parallelogrammorum secundum eandem rectam applicatorum deficientiumque figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis, ei quod à dimidia describitur; maximum est id quod ad dimidiam applicatur parallelogrammum simile existens defectui.*

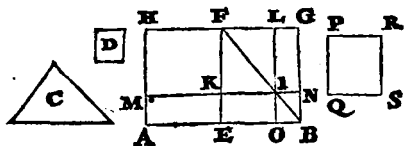
**S**UPER AC. semissem totius AB. applicatum sit parallelogrammum AD. ita ut à toto AE. deficiat parallelogrammo CE. quod est æquale & simile ipsi AD. Deinde ad quodvis aliud segmentum AK. sit applicatum

catum aliud parallelogrammum  
 A G. ita deficiens, ut defectus sit  
 parallelogrammum K I. simile  
 ipsi C E. hoc est circa commu-  
 nem diametrum B G D. Dico  
 A G. minus esse parallelogram-  
 mo A D. Probatur.

1. Parallelogramma A D.  
 C E. F D. O E. sunt <sup>a</sup> æqualia <sup>a</sup> 36. 1.  
 ut & <sup>b</sup> C G. G E. adeoque ad- <sup>b</sup> 43. 1.  
 dito communi K I. erit C I.  
 hoc est A O. æquale ipsi K E.  
 addito communi C G. erit A G.  
 æqualis gnomoni L G M. minor  
 parall. C E. hoc est A D. pa-  
 rall. Q. E. D.



296 ELEM. EUCLIDIS  
PROPOSITIO XXVIII.

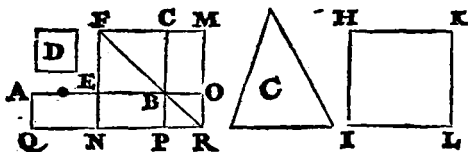


Prob. 8. *Ad datam rectam AB. dato rectilineo C. aequale parallelogrammum AI. applicare : deficiens figura parallelogramma ON. qua similis sit alteri parallelogrammo dato D. Oportet autem datum rectilineum C. cui aequale applicandum est AI. non majus esse eo, quod ad dimidiam AE. applicatur, cum similes fuerint defectus, & ejus quod ad dimidiam applicatur, & ejus cui simile deesse debet.*

**R**ectam AB. ut prius biseca in E. super mediam EB. fac parallelogrammum EG. simile ipsi D. similiterque positum : & comple parallelogrammum BH. Si EH. ipsi C. est æquale, factum est quod petitur : nam est applicatum ad AB. & deficit parallelogrammo EG. simili ipsi D. Si EH.  
& ipsi

& ipsi æquale b E G. sit majus quam C. b 36. 1.  
 (nam minus esse non debet, cum E H.  
 sit c maximum eorum quæ applicari c 27. 6.  
 possunt ad A B.) si inquam sit majus, d 45. 1.  
 d reperta quantitate excessus, e fac pa- aut arte  
 callelogrammum Q R æquale exce- quacun-  
 fui, & simile similiterque positum ipsi que.  
 D. & parallelogrammo Q R. aliud æ- 25. 6.  
 quale similiter positum K L. f quod f 44. 1.  
 erit circa diametrum, sicque remane-  
 bit gnomon L I K. æquale rectilineo  
 C. Jam productis L I. K I. erit paral-  
 lelogrammum A I. ad rectam A B. ap-  
 plicatum & deficiens parallelogrammo  
 O N. g simili ipsi E G. hoc est ipsi D. g 24. 6.  
 Quod autem A I. sit æquale ipsi C. sic  
 probo. Complementa L N. K O.  
 h sunt æqualia, ergo addito communi g 43. 2.  
 N O. erit O G. æquale ipsi E N. hoc  
 est A K. Ergo si æqualibus A K. O G.  
 addas commune K O. erit A I. æquale  
 gnomoni L I K. hoc est rectilineo C.  
 Q. E. F.

## PROPOSITIO XXIX.



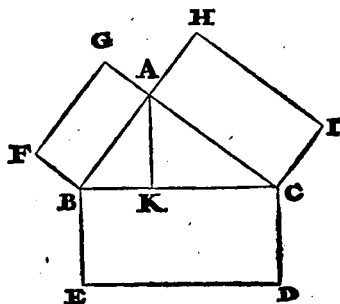
*Prob. 9. Ad datam rectam AB. dato rectilineo C. æquale parallelogrammum applicare, excedens rectam datam AB. figura parallelogramma PO. qua sit similis dato alteri parallelogrammo D.*

**S**uper rectam EB. mediam  
 a 18.6. datæ AB. <sup>a</sup> fiat parallelogrammum EC. simile ipsi D. similiterque positum: tum rectilineo C. & parallelogrammo  
 b 25.6. EC. fiat <sup>b</sup> æquale aliud parallelogrammum IK. cui æquale est NM. simile ipsi D. Completis parallelogrammis QE. NB. PO.

PO. erit AR. quæsitum. Etenim  
 NM. est positum æquale ipsis  
 EC. & C, ablato communi EC.  
 gnomon ER C. ipsi C. erit  
 æqualis. Et quia æqualia <sup>c 36.1.</sup>  
 sunt QE. NB. & æqualia  
 a NB. BM. si loco ipsius <sup>d 43. n</sup>  
 BM. substituatur æquale QE.  
 erit parallelogrammum AR. æ-  
 quale gnomoni ER C. ideoque  
 etiam rectilineo C. Quare ad  
 rectam AB. applicatum est pa-  
 rallelogrammum AR. æquale  
 dato rectilineo C. excedens  
 rectam AB. figura parallelo-  
 grammum PO. quæ similis est  
 dato parallelogrammo D. cum  
 sit circa eandem diametrum  
 cum ipso EC. quod positum  
 est simile ipsi D. Q. EF.



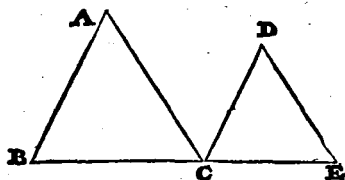
## PROPOSITIO XXXI.



*In triangulo rectangulo ABC. figura Th. 20. quavis BD. descripta à BC. subtendente rectum angulum BAC. aequalis est figuris FA. AI. quæ priori illi similes & similiter posita, à lateribus BA. CA. rectum angulum continentibus, describuntur.*

**P**OLYGONÆ figuræ FA. AI. BD. ponuntur similes a ergo sunt in ea laterum homologorum duplicata a 20.6. ratione, in qua essent eorundem laterum quadrata. Ergo cum quadrata BA. AC. b habeant rationem æqualitatis cum tertio BC. habebunt & polygonæ FA. AI. rationem æqualitatis cum tertio BD. c ergo eidem erunt c 9. 5. æqualia. Q.E.D.

## PROPOSITIO XXXII.



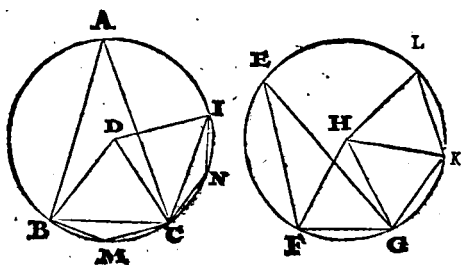
**Th. 21.** *Si duo triangula ABC. DCE. qua duo latera AB. AC. duobus lateribus DC. DE. proportionalia habeant, secundum unum angulum ACD. composita fuerint, ita ut homologa eorum latera AB. DC. AC. DE. sint etiam parellela, tum reliqua illorum triangulorum latera BC. CE. in rectam lineam BE. collocata reperientur.*

**P**ROB. Latera homologa AB. DC. AC. DE. ponuntur  
 a 29.1. parallela, <sup>a</sup> ergo anguli alterni A. & ACD. sunt æquales & D. eidem ACD. ergo A. & D. æqua-

æquales. Hos æquales angulos  
 circumstant latera proportiona-  
 lia ex hypoth. <sup>b</sup> ergo triangula <sup>b 6. 6.</sup>  
 sunt æquiangula, habentque æ-  
 quales angulos B. & DCE.  
 additis ergo æqualibus A. &  
 ACD. erunt B. & A. duobus  
 angulis DCE. ACD. hoc est  
 angulo ACE. æquales. Ergo  
 addito communi ACB. erunt  
 tres anguli A.B.C. duobus ACE.  
 ACB. æquales, <sup>c</sup> illi autem <sup>c 3. 1.</sup>  
 tres valent duos rectos, ergo &  
 hi duo. Ergo <sup>d</sup> B C. C E. unam <sup>d 14. 1.</sup>  
 rectam constituunt. Q. E. D.



## PROPOSITIO XXXIII.



20. 22. *In equalibus circulis ABCI.  
 EFGL. anguli A. E. D. H. ean-  
 dem habent rationem, cum ipsis pe-  
 ripheriis BC FG. quibus insistant:  
 sive ad centra D. H. sive ad peri-  
 pherias A. E. constituti insistant:  
 insuper vero & sectores BDC.  
 FHG. quippe qui ad centra, in-  
 sistunt.*

a 1. 4. **P**ROB. Ductis BC. FG.  
 ad C. <sup>a</sup> applica CI. æqua-  
 lem ipsi BC. & ad G. & K.  
 GK. KL. æquales singulas ipsi  
 FG.

FG. ductis ID. KH. LH.  
 sic dico ; rectæ BC. CI. po-  
 nuntur æquales, <sup>b</sup> ergo & arcus <sup>b</sup> 28. 3.  
 BC. CI. <sup>c</sup> ergo & anguli BDC. <sup>c</sup> 27. 3.  
 CDI. æquales. Idemque est de  
 arcubus FG. GK. KL. & an-  
 gulis ad H. qui ipsis insistent.  
 Ergo quam multiplex est arcus  
 BCI. ipsius BC. tam multi-  
 plex erit angulus BDI. ipsius  
 BDC. & quam multiplex ar-  
 cus FGKL. ipsius FG. tam  
 multiplex erit angulus FHL.  
 ipsius FHG. <sup>d</sup> ergo si arcus <sup>d</sup> 27. 3  
 BCI. FGKL. sint æquales,  
 erunt & anguli BDI. FHL.  
 æquales. Si eorum arcuum unus  
 sit major, major erit & angulus,  
 si minor, minor : <sup>e</sup> Ergo erit <sup>e</sup> 6.  
 ratio arcus BC. ad FG. eadem <sup>Def. 5.</sup>  
 quæ est anguli BDC. ad FHG.  
 Et quia anguli ad D. & H. sunt  
<sup>f</sup> dupli angulorum ad A. & E. <sup>f</sup> 20. 3.  
 & eadem erit ratio angulorum A. <sup>g</sup> 15. 5.  
 & E. quæ D. ad H. & sic eadem

anguli A. ad angulum E. quæ arcus BC. ad arcum FG.

Rursus, in æqualibus segmentis BC. CI. si fiant anguli B M C. CN I. <sup>h</sup> æquales erunt, cum insistant æqualibus arcibus B A C. <sup>h</sup> 27.3. CA I. ergo <sup>i</sup> similia sunt segmenta B M C. CN I. & æqualia, cum sunt super æquales B C. C I. additis ergo triangulis BDC. CDI. quæ æqualia sunt, erunt sectores BDC. CDI. æquales. Ergo tam multiplex est sector B D I. sectoris B D C. quam multiplex arcus B C I. arcus B M C. Idem ostendetur de sectore FHL. Ergo si æqualis sit arcus B C I. arcui FGL. sector quoque B D I. æqualis erit sectori FHL. si deficiat, deficiet, si excedat, excedet. Ergo quæ est ratio arcus B C. ad arcum FG. eadem erit & sectoris B D C. ad sectorem FH G. Q. E. D.

*Selectiores hujus libri sunt 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 13. 14. 16. 19. 31.*

**F I N I S.**