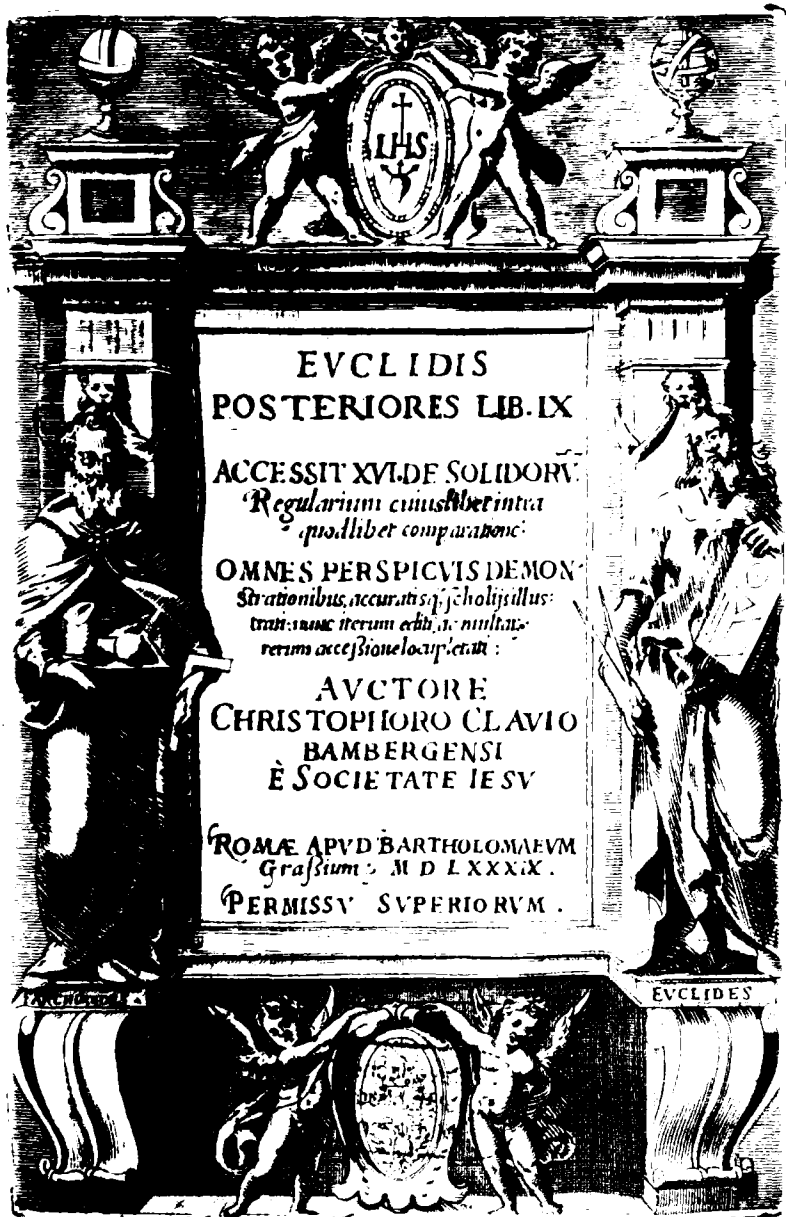
Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

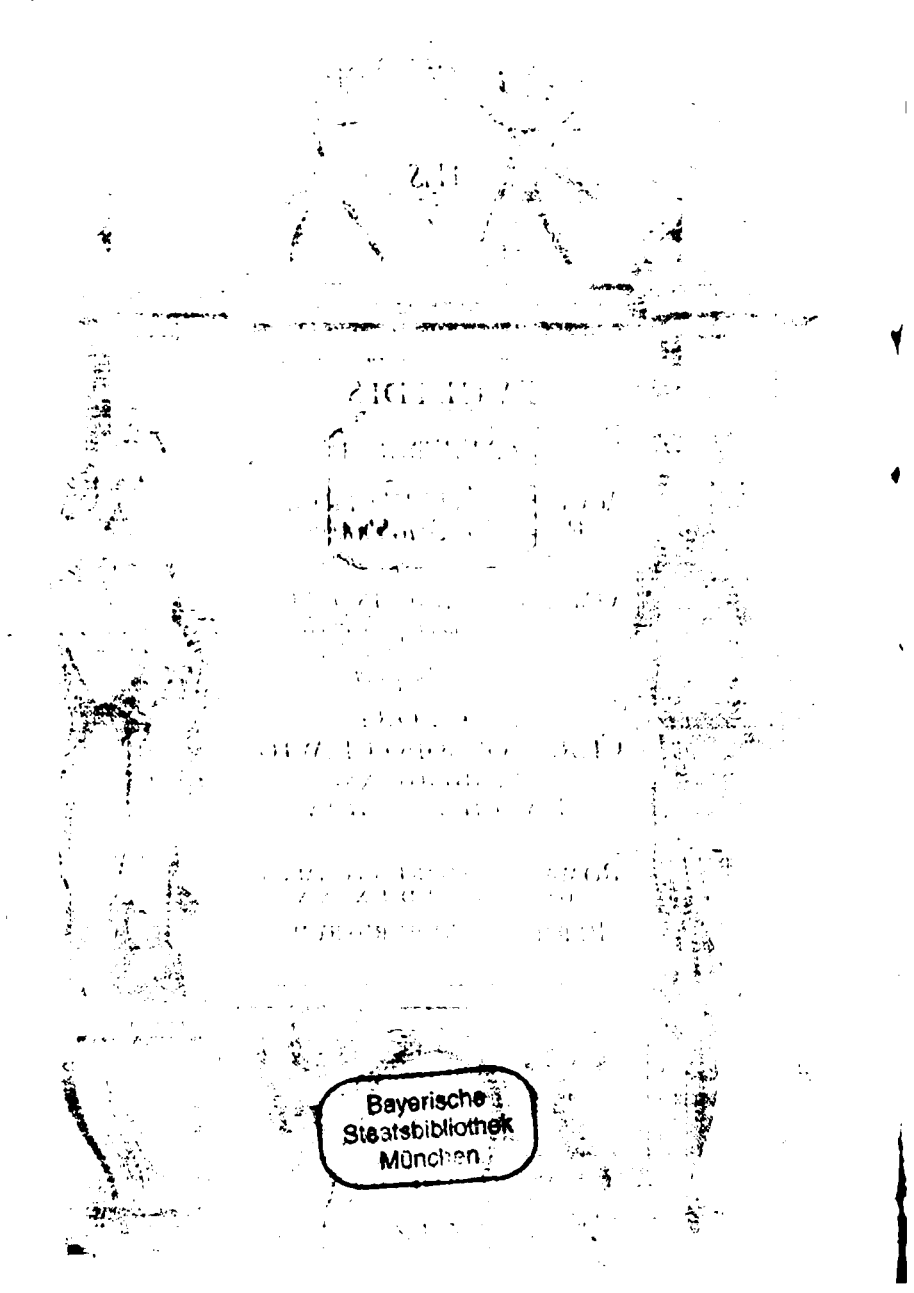
Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres



Ex libris Christophori


Bayerische
Staatsbibliothek
München

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS est, secundū quam vnumquodq; eorum, quæ sunt, vnum dicitur.



ACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea scilicet, quæ circa plana versatur; restabat altera solidorum. Verum ante ei necesse fuit de lineis commensurabilibus, & incommensurabilibus disserere, quod ad propriatates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonstrandas, atque ut oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeò, vt absque eis solidorum tractatio imperfecta sit, neque suis numeris absoluta. Huc accedit, quod absque eisdem lineis plurimæ laterum tam planorum, quam solidorum, si Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vsum, neq; exprimi queãt, neq; intelligi. Nam non rarò plaraque laterum sunt illa linea, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel, si non sunt Irrationales, longitudine certè inter se sunt incommensurabiles, atque adeo sub mensuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio,

atque intelligentia cum numeris est implicata, & coniuncta, vt absque his nullo modo cognoscantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrina suus ordo, ratioq; constaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro septimo, & duobus insequentibus, circa numerorum proprietates, affectionesque, quantum ea rei Geometricæ inseruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonstrationes linearum commensurabilium, & incommensurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more suo a principijs, definit initio vnitatem, docetque eam esse, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum esse dicitur. Nam secundum vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere solemus. Cæterum vnitas in numeris nullam suscipit diuisionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus composita multitudo.

CVM numerus sit multitudo quædam ex vnitatibus cõposita, manifestum est, numerum quemlibet tot habere partes, quot sunt vnitates eum constituentes: Ita vt vnitas sit pars cuiusuis numeri denominata ab ipso numero, cuius est pars. Vt numerus 8. compositus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidẽ partes, nimirum in 8. vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compositus, in totidem distribuitur, quarum qualibet centesima ipsius pars est, &c.

EX *his sequitur, omnes numeros, quotcunque sint, inter se commensurabiles esse, cum eos vna eademque mensura, nimirum vnitas, vt dictum est, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla potest ratione conuenire, cum plurima earum mensuram communem non habeant, sed prorsus sint incommensurabiles, vt clarissime lib. 10. ostendetur.*

PARS

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hac definitio illi, quæ Euclidis lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12.18.24.30.60.630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 376. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipsa numerum, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Ita 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars ipsius dici non debeat; apte tamen congruenterque partes potest appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin supernacanea esset hac definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quascunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum mensura vtrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes

dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quinta. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem autem eundem numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum unitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si reges, cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiã illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, qua maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantũ eam, qua maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostenditur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris, cum ea persæpe sint incommensurabiles, vt aperte liber decimus demonstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoq; ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, qui minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si vero maiorem minor non

non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt a pari.

OMNES hi numeri 3. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parē.

QVIA numerus par eſt, qui bifariam diuiditur, ſit vt quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiuſmodi eſt numerus hic par 32. Metitur enim ipſum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

I X.

PARITER autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD ſi numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis eſt par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CÆTERVM ſi rectè dua proxima definitiones expendantur, perſpicuum erit, fieri poſſe, vt vnus idemque numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdū, vt excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, ſecundum eos, ſit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propoſitus numerus par 24. neq; pariter par ſit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparē 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed

apte

apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam utriusque, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Verumtamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum rectè explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifestè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum verò, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum deniq;, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonstratque omnes numeros a binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros verò, qui dimidios impares habent, esse pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxt, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, ut sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarũ propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici rectè pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

3. genera numeri Pariter pares.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem: Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

PRIMVS

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus Primus; quales ſunt omnes iſti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura, metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatẽ, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15.8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. poſteriorem vero iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum vtrumque metitur, ſed ſola vnitas vtrumque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter ſe dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quamquam poſtremi duo habeant communem menſuram hanc numerum 5. Denique vnitas, & quikis numerus, dici poſſunt, licet improprie, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem, & numerũ quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quẽ numerus quiſpiam metitur.

NVME-

NVMERVM, quem præter vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometræ compositum, cuiusmodi est hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perspicuum autem est, omnes numeros primos, dempto binario, esse compositos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, præter binarium, esse impares, quandoquidem ex paribus, solus binarius primus est, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter se numeri sunt, quos numerus aliquis, communis mensura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos præter vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam mensura communis, metitur, dicuntur inter se compositi, licet non quilibet sit compositus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem præter vnitatem, numerus quispiam metitur, compositus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compositi inter se sunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis mensura, metitur. Ita etiam inter se compositi erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & se ipsum, & reliquos duos metitur, licet per se sumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicãte vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus

numerus 8. facies fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. unitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque vicissim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. si numerum 6. octies sumpserimus, toties scilicet, quot unitates in multiplicante 8. continentur, procreaueritque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic sumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreriue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel e contrario. Et sic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus sit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium est vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio siue ductus vnius numeri in alium ita quoque describi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, est inuētio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quā alter multiplicantium ad unitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, siue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita se habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda est hac alia docens, quid sit numerum dividere numerum: quippe qua necessaria omnino sit ad ea, qua nos in ijs, qua sequuntur, sumus demonstraturi.

NVME-

NVMERVS numerũ diuidere dicitur, cũ numerus acceptus fuerit, qui ſuis unitatibus indicat, quoties diuidẽs numer⁹ in diuiſo cõtinetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum ſumptus fuerit numerus 8. qui octo ſuis unitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoque viciſſim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6. qui ſex ſuis unitatibus indicat, diuidentem numerum 8. in diuiſo 48. contineri ſexies.

HINC fit, numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad unitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus ſuis unitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiſo contineatur; continebit numerus productus unitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad unitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque Diuiſio vnius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

DIVISIO numeri per numerum, eſt inuentio numeri, qui ad unitatem habet eandem proportionẽ, quam numerus diuiſus ad diuidentẽ.

ITA vides ex diuiſione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A, per B, procreetur numerus C. A,48. B,8. C,6. D,1.
Dico numerum A, gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad D, vt C, ad unitatẽ D: Ex definitione autẽ diuiſionis, ita quoq; ſe habet A, ad B, vt C, ad unitatẽ D; perſpicuũ eſt, numerum ex C, in B, genitum eſſe numerum A; cum tam ille genitus, q̃ A, eandẽ proportionẽ habeat ad B, quã C, ad D, unitatem.

HÆC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractũ, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhæreant integris, siue non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem; In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuisus ad diuidentem. Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoq; sui, qua est 10. Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. se mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$. siue $\frac{3}{6}$. & semissis numeri $\frac{1}{3}$. siue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. dividere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuisi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. dividere dicetur $\frac{1}{6}$. quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiso $\frac{1}{6}$. sed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{6}$. liquido constat

tertiam

tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. *contineri in* $\frac{1}{6}$. *Caterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuisione q; fractorum diximus, planiora fient.*

XVI.

CVM autem duo numeri mutùo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum suas vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, & ipsum cõtineant, non secus, ac recta linea angulum rectũ ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum dispositæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum verò 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figuræ planæ apud Geometras: Euclides solum definit planũ quadrangulare rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum

quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorum diſputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, ſimiles ſint, & æquales, ſive ambitu, ſive aream, capacitatemue ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. qᵗ ad ambitū ſpectat: tamē ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab iiſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

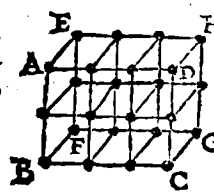
QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quòd quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt in altero vnitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planum numerum eſſe compoſitum: Quod etiam de numero ſolido, qui iamiam definietur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem aliquando dici poſſe numerum planum, quamuis impropriè; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt

producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4 fit 24. Vel ex 2 in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generantur 24. appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius unitates in longum, latum atque profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, ut lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri sese mutuo multiplicãtes; unus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primũ multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor unitates, & lata duas: Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium unitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. unitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. unitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro basi, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas unitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit B C G F, octo unitatum, cuius longitudo B C, quatuor unitates, & BF, latitudo, duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, ut totus numerus solidus contineat 24. unitates, eiusque altitudo B A, unitates tres. Similiter, si basis sit A B F E, sex unitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo BF, duas continet unitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem B C, habens quatuor unitatum. Si deniq; basis sit A B C D, 12. unitatũ, cuius longitudo BC, quatuor cõtinet, & latitudo AB, tres, superponetur illi alia basis similis, & æqualis E F G H, constabitq; totus numerus solidus unitatibus 24. quarum duæ altitudinẽ dabũt AE, vel BF. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de alijs numeris solidis studiosus erit.

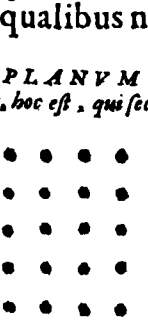


DENIQVE & unitas interdum ſolidus appellabitur numerus, etſi non proprie, quia eius latera ſunt tres unitates, ipſam unitatem ex mutua earum multiplicatione procreãtes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedenti definitione datam; quia ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.



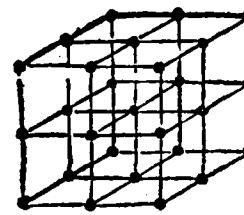
PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum unitates ſuas in longum & latum diſpoſitus, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo ſub illis continetur, vocat quadratum. Huiuſmodi eſt numerus 25. contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius unitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque unitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero ab Arithmeticis ſæpiſſime appellatur.

CVBVS

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui sub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoque illum numerũ vocat cubum, qui est aqualiter aqualis aqualiter, id est, cuius unitates in longum, latum, atque profundum dispositæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimensiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, sine profunditas, aquales sint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium aqualium numerorum inter se producitur. Qualis est numerus 27. contentus sub numeris aqualibus 3. 3. 3. sine ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius vnitates in formam solidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, existuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres vnitates. Quare ipse numerus 27. est æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET vero trium numerorum æqualium, sub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales sunt, cũ primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eędem

partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atq; imperfecta, comprehendit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicique, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neq; æque multiplex eſt, neque eadem pars, neque eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes; vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nimirũ triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Demq; & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales.*

Nam

Num in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eãdem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & praterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, non aqualiter contineat, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus ſecundi, & tertius quarti, aque multiplex ſit; Vel certe, & primus ſecundum, & tertius quartum, contineat aqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, aque multiplex concedatur: Vel certe primus ſecundum, & tertius quartum, aqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et e contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inaqualitatis habẽt. Nam ſi de proportione aqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto aqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, equales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundẽ ad aquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionẽ, vel ad quos idẽ eandem habet proportionẽ, aquales eſſe. Cũ enim aquales numeri ſint eiuſdem, vel aque multiplices, vel eadem pars, vel eaſdem partes: Vel certe eundẽ aqualiter cõtineant, eandemq;

insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus aqualium sit vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos aqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, uel partes; perspicuum est, aquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad aquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, sunt illius vel aquemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illum aqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos aqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, vel partes, secundum hanc eandem definitionem; manifestũ est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, aquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$. & posteriores quoque ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat. si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}$. $\frac{18}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}$. $\frac{10}{4}$. atque ita de cæteris.

SIMI-

XXI.

SIMILES plani, & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero ſit ſimilis, non neceſſe eſt, quaslibet duo illius latera quibuſuis duobus lateribus huius eſſe proportionalia; ſed ſatis eſt, illum habere aliqua duo latera, quæ ſint proportionalia quibuſdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, ſi ſecundum ſuas vnitates in formam planam redigantur, prout latera aſſumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. ſimiles ſunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia ſunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eiſdem non ſint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo, vt duo numeri ſolidi ſimiles ſint, non requiritur, vt quatuor tria vnius latera proportionalia ſint tribus quibuslibet lateribus alterius; ſed ſufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, ſi ſecundum vnitates in formam ſolidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri ſolidi 192. & 24. ſunt ſimiles, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. ſunt proportionalia, licet his eiſdem nequaquam proportionalia ſint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE poſſunt duo numeri plani, vel ſolidi, eſſe ſimiles, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. ſimiles, vt dictum eſt; & tamen ſi latera prioris ſumantur 3. & 8. nulla reperientur in poſteriori illis proportionalia. Sic etiam ſolidi ſimiles ſunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris aſſumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in poſteriori.

HÆC porro ſimilitudo planorum, & ſolidorum reperitur quoque in fractis numeris, ſiue in integris cum fractis. Nam ſi ſumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tũ duo priores, quàm duo poſteriores inter ſe multiplicentur, procreabuntur plerumque duo plani non integri ſimiles, &c.

Dixi, plerunq;, quia fieri potest, vt interdum integri numeri signantur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$*.6. & alia duo* $1\frac{1}{3}$*. 12. quæ eandem proportionem habent noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero numerum 16.*

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sint hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1.2.3. quæ simul sumptæ conficiũt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1.2.4.7.14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1.2.4.8.16.31.62.124.248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici posset, siue eam metiatur, siue non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propositis adiungenda mihi videntur ex Campano, aliisq; scriptoribus nonnulla alia, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

NVME-

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerũ $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterũ, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirũ quintuplus, dicetur hac cõparatio, habitudoue, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVÆ

QVÆ cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, eque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadē proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Er semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiose explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum com-

poni

poni dicitur ex propottionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita ſe habere, pluribus verbis a nobis demonſtratum eſt ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illa in quinto libro tradita de alterna ratione, inuerſaque; de compoſitione, diuiſione, & conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur, demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero ſumi poſſe maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri poteſt infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero propoſito maior exhiberi poteſt, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione conſurgit.

AXIO-

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem æque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

QVORVM idē numerus æque multiplex eſt, vel æque multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quę in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum metitur.

NAM vnitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsum numerum ex suis vnitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquē produxerit, metietur multiplicās productum per multiplicatū, multiplicatus autem eundem per multiplicantē.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, vnitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, & eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16 huius lib.

A .... B . . .
C .....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc eſt, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, vel multiplicatum a B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipſum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum producere ipſum C.

A .... B ...
C .....

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipſis compoſitum BD. Cum enim A, metiatur ipſos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo BC, in partes BE, EC, ipſi A, æquales,

æquales, & ipſo
C D, in partes *A . . . .*
C F, F G, G D, *B . . . . E . . . . C . . . . F . . . . G . . . . D*
eidem A, æqua-
les; erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quem B, metitur. Cum enim
B, metiatur ipſum C D; erit *A . . .*
C D, ipſius B, multiplex. Di *B . . . . . .*
uiſo ergo C D, in partes C E, *C . . . . . E . . . . . D*
E D, ipſi B, æquales; metie-
tur A, ipſos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E, E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum.

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quam B D, ipſius A, multiplex, aut certè B D, ipſi A, æqualis erit.

Diuiſo



Diuiſo ergo tam BC, quam BD, in partes ipſi A, æquales; Erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum DC. Quod eſt propoſitum.

I. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio ꝓpoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erũt.

SINT duo numeri propoſiti inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars ſit ipſius AE, vel certe ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) [a] metietur quoque H, ipſum AE: At H, metitur quoque totum AB. [b] Igitur & reliquum



[a] 11. pron.
[b] 12. pron.

quum EB, metietur. Metitur autem EB, ipſum CF.[a] Igitur & H, ipſum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur,[b] metietur quoq; reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipſum EG;[c] metietur etiam H, ipſum EG: Metiebatur autem & H, totum EB.[d] Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.
[c] 11. pron.
[d] 12. pron.

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit unitas.

SINT duo numeri inter ſe primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequã ad vnitatẽ detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus GB, præcedẽtem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipſum EG,[e] metietur quoque GB, ipſum EG. Cum ergo GB, & ſe ipſum metiatur,[f] metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum CF.[g] Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipſum FD, poſitus ſit metiri;

A ..... E .. G -- B
C ..... F .. D

[e] 11. pron
[f] 10. pron.
[g] 11. pron

a 10. pron. b 11. pron.

a metietur quoque ipſum CD, ex CF, FD, compoſitum. At vero CD, metitur ipſum AE. b Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipſum EB, metiatur, vt oſtenſum eſt; c metietur & ipſum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metietur, donec aſſumpta ſit vnitas. Quod eſt propoſitum.

A . . . . . E . . G -- B
C . . . . . F . . D

c 10. pron.

EODEM modo & hoc verum eſt.

SI propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

d 1. ſeptimi.

NAM ſi detractio huiuſmodi ad vnitatem vſque perueniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi, d vt Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.

e 1. ſeptimi.

EX his facile dignoſcemus, an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Nam detracto ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad aſſumpta ſit vnitas; ipſi erunt inter ſe primi, e vt Euclides demonſtrauit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propoſitum metiatur, vt perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperioris huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, oſtenſum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

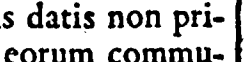
∴

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 2. 2.

DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire,

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatque EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidé perueniętur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB; & EB, ipſum CF; [b] metietur quoque FD, ipſum CF; atq; adeo eum & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipſum EB; [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.



QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quam FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, [f] metietur quoque G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum EB: At vero EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum FD; maior minorem.

[a] 1. ſeptimi.
[b] 11. pron.
[c] 10. pron.
[d] 11. pron.
[e] 10. pron.
[f] 11. pron.
[g] 12. pron.
[h] 11. pron.
[i] 12. pron.

Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum AB, CD.

QVOD ſi minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

A ..... B
C ..... D

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.

HOC elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademque ratio eſt de cæteris.

SCHOLIVM.

EX ijs quæ dicta ſunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

A .....
B .....
C .....

SI vero A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, [a] ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos, cum habeant numerum D, communem menſuram.

[a] 2. ſeptimi.

QVOD

QVOD si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter se primi, vel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita vt habeant numerum communem mensuram, metietur eiusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. [a] Inuenta enim numerorũ C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; [b] metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.

A .....
B .....
C .....
D . . .
A .....
B .....
C .....
D .... E ..

[a] 2. septimi.
[b] 11. prom.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oporteat reperire. [c] Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D,

esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem; per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi: [a] Sit eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipsos A, & B; [b] metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A .....
B ..... D ....
C ..... E .. F ——

[a] 2. septimi.

[b] 11. prop.

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos 2 huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communē. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quā E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, numerum F, si metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum mensuram communem: Eademque in cæteris est ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter se, maxima eorum communis mensura inuenietur; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium numerorum: si quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis mensura, &c. Reliqua vero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

THEOR. 2. PROPOS. 4.

4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, esse aut partem, aut partes ipsius B.

Sint enim primum A, & B, inter se primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars est numeri B; perspicuum est, numerum A, esse partes numeri B, tot nimirum, quot sunt in A, vnitates.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, non primi inter se, sed inter se compositi, & metiatur A, ipsum B. Quo posito, manifestum est A, partem esse numeri B, ex defin. 3 huius lib.

A .....
B .....

SED iam A, non metiatur ipsum B, [a] inuenta autem maxima eorum mensura communis sit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum singulæ ipsi C, sint æquales. [b] Quia igitur C, pars est ipsius B, cum ipsum metiatur; erit quoque AD, pars eiusdem B: similiter & DE, & EF; Ac propterea totus numerus A, est partes numeri B, tot

[a] 2. septim.

A..D..E..F
B.....
C . .

[b] 3. defin.

videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ eſt numerus D, numeri E F. Dico vtrumque numerum A, & D, ſimul vtriuſq; numeri B C, & E F, ſimul eandem eſſe partem, quæ eſt vel A, ipſius BC, vel D, ipſius E F.

A . . . . . D . . . .
B . . . . . G . . . . . C | E . . . . H . . . . F

Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, propterea quod eadem pars eſt A, ipſius BC, quæ D, ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, ſimul æquales ipſis B G, & E H, ſimul: Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C, & H F, ſimul æquales: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in BC, vel D, in EF, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, ſimul vtriuſque B C, & EF, ſimul, quæ eſt A, ipſius BC, vel D, ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat oſtendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: ut in hoc exẽplo apparet, vbi numerus A, numeri BC, & numerus D, numeri EF, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A, D, vtriuſque BC, EF, ſimul eadem pars oſtendetur, qua A, ipſius BC: ſi nimirum BC, EF, diuidantur in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, D, aquales, &c.

A, $\frac{2}{9}$ B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C

D, $\frac{1}{7}$ E, $\frac{1}{7}$ H, $\frac{1}{7}$ F

QVOD ſi quando contingat, numerum fractum diuidi non poſſe in partes aquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Procreabitur enim hac ratione alia fractio priori aquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. ſecanda ſit in duas partes aquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4. &c. vt gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima ſecabitur in has duas partes aquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. ſecũda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adſunt integra, reuocanda prius erũt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$. ſecandus ſit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes aquales ſunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hac in ſequentibus quoque propoſitionibus obſeruanda ſunt, quando fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoque ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.

EODEM modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus

ſimul

ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

HOC autem perſpicue in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A.	D.	A.	D...
B. G. C	E. H. F	B. G. C	E... M... F

POSSVMVS etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque nũ merorum æqualium numero, ſinguli ſingulorũ; eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, ſinguli ſingulorum eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, ſimul omnium numerorum DE, FG, HI, ſimul eandem eſſe partẽ, quam eſt A; ipſius DE.

A....	B...	C..
D.... K ... E	F... L... G	H.. M.. I

Diuiſis enim numerorum DE, FG, HI, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tã numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, ſimul æquales ipſis DK, FL, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales C, & HM; erunt quoque A, B, C, ſimul æquales ipſis DK, FL, HM, ſimul. Simili ratione erunt A, B, C, ſimul æquales ipſis KE, LG, MI, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, ſimul ipſorum DE, FG, HI, ſimul, qua A, ipſius DE.

IDEM ſequitur, ſi loco vnius numerorum A, B, C, ſumatur

ſumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figura indicant.

A.	*B.*	*C...*	*A.*	*B.*	*C.*
D.K.E.	*F..L..G*	*H...M...I*	*D.K.E*	*F.L.G*	*H.M.I*

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam ſi quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonſtrabitur: etiamſi aliqui numerorum ſint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.		*B*, $\frac{1}{2}$.		*C*, $\frac{3}{4}$.	
D, 1	*K*, 1 *E*	*F*, $\frac{1}{2}$	*L*, $\frac{1}{2}$ *G*	*H*, $\frac{3}{4}$	*M*, $\frac{3}{4}$ *I*

THEOREMATI quoque primo quinti lib. ſimile proponemus, in hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æque multiplices: quam multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic eſt, qua in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonſtrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, A ..... B ..... C .... ſinguli ſingulorum. Dico D.... E... F.. & omnes A, B, C, ſimul omnium D, E, F, ſimul tam multiplices eſſe, quam eſt A, multiplex ipſius D. Cum enim tam ſit multiplex A, ipſius D, quã eſt B, ipſius E, & C, ipſius F; erit e contrario D, eadem pars ipſius A, qua E, ipſius B, & F, ipſius C. Per ea igitur, qua nuper a nobis demonſtrata ſunt, erunt D, E, F, ſimul eadem pars ipſorum

ipſorum A, B, C, ſimul, quæ D, ipſius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, ſimul, omnium D, E, F, ſimul, quam eſt multiplex A, ipſius D.

SI numeri A, B, C, fracti ſint, & ipſorum D, E, F, fractorum æquemultiplices; quàm multiplex eſt vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonſtratione liquet.

QVOD ſi loco vnius numerorum D, E, F, aſſumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonſtrabitur, vt ex ſequentibus figuris apparet.

A .. B .... C	A .. B .. C ..
D . E .. F ...	D . E . F .

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, ſimul vtriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ eſt AB, ipſius C, vel DE, ipſius F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorũ C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE; propterea quod eædem partes eſt numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars eſt AG, numeri C, eadem eſt DH, numeri F; erit vterque AG, DH, ſimul eadem pars vtriuſque C, F, ſimul, quæ AG, ipſius C, vel DH, ipſius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, ſimul eadem pars vtriuſq; C, F,

A .. G .. B | D .... H .... E
C ..... | F .....

1. ſeptimi.

C,F, ſimul, quæ GB, ipſius C, vel HE, ipſius F: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars eſt numerorum C, F, ſimul, quæ pars eſt AG, ipſius C; quot partes eædem eſt numerus AB, ipſius C, vel DE, ipſius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, ſimul, vtriuſque numeri C,F, ſimul, quæ AB, ipſius C, vel DE, ipſius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EADEM hæc propoſitio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonſtratione: vt hoc exemplum demonſtrat.

$A, \frac{1}{9}\ G, \frac{1}{9}\ B \qquad D, \frac{2}{7}\ H, \frac{2}{7}\ E$
$C, \frac{3}{9} \qquad F, \frac{0}{7}$

SED & hanc propoſitionem ad quotcunque numeros ſiue integros, ſiue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim eſt demonſtratio, ſi modo pro quinta propoſ. aſſumatur id, quod ſecundo loco demonſtrauimus in ſcholio præcedenti; vt hic perſpicuum eſt.

A.. K..B	*C...L...D*	*E....M....F*
G.....	*H.....*	*I.....*

THEOR. 5. PROPOS. 7.

7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadē pars erit, qualis totus totius.

SIT

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD.

A....E..B
G....C.....F....D

Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC; 5. septim. erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD; erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A, 1/2 E, 2/5 B
G, 4/5 C, 6/8 F, 4/5 D

LOCVM etiam habet hac propositio, vnà cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris & ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A.E...B	A...E.B	A.E.B
G.....C..F.....D	G..C.....F..D	G..C..F..D

CÆTERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tã in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD

QVOD quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus A B, totius C D, æque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita eſſe multiplicem, vt eſt totus A B, totius C D. Cum enim A B, ipſius C D, ſit æque multiplex, atque A E, ipſius C F; erit e contrario totus C D, totius A B, eadem pars, qua ablatus C F, ablati A E. [a] *Quare & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, qua totus C D, totius A B; Ac proinde e contrario E B, ita multiplex erit ipſius F D, vt A B, ipſius C D, eſt multiplex.*

A . . . E . . . . . B
C . . F . . D

7. ſ. primi

QVOD ſi ex C D, ablata fuerit vnitas C F; vel reliqua ſit vnitas F D: vel denique in integris & ablata ſit vnitas C F, & alia reliqua F D; idem demonſtrabitur, vt hæc exempla commonſtrant.

A . . . E . . . . . B	A . . . . E . . B	A . . . E . . . B
C . F . . D	C . . F . D	C . F . D

THEOR. 6. PROPOS. 8.

8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquum E B, eaſdem eſſe partes reliqui F D, quæ totus A B, eſt totius C D. Sumpto enim numero G H, æquali ipſi A B; erit G H, eædem partes ipſius C D, quæ A B, eiuſdem C D, hoc eſt, quæ A E, ipſius C F. Diuiſo ergo G H, in partes G I, I H, numeri C D; & A E, in partes A K, K E, numeri C F, erit multitudo partium G I, I H, multitudini partium A K, K E, æqualis, eademque pars tan-

A . . . . K . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . . . D
G . . . . . L . . I . . . . . M . . H

G I,



GI, quam IH, ipsius CD, quæ tam AK, quam KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadē pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partē ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quam MH, ipsius FD; erit vterque GI, IH, simul eędem partes ipsius CD, quę vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia vero si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem, quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 7. *septimi.*

SCHOLIVM.

$A, \frac{2}{19}$ $K, \frac{2}{19}$ $E, \frac{6}{19}$ B
$C, \frac{6}{19}$ $F, \frac{9}{19}$ D
$G, \frac{2}{19}$ $L, \frac{3}{19}$ $I, \frac{2}{19}$ $M, \frac{3}{19}$ H

IN numeris fractis eadem hæc propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

NON demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabat hic, reliquum numerum EB, alicuius numeri eadem esse partes, quæ est numerus AE, numeri CF, ibi vero perfectum erat, reliquum EB, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est AE, ipsius CF. Licet enim ipsius EB, duplum

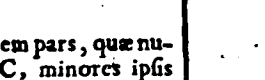
duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, sintque A, BC, minores ipsis D, EF, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales BC, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter se sunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipsius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipsius HF; [a] ac propterea & vterque BG, GC, simul, nimirum BC, secundus vtriusque EH, HF, simul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipsius EH, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertii. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 5. vel 6. septimi.

SCHOLIVM.

A, 8/11
B, 8/11 G, 3/11 C
D, 16/22
E, 12/33 H, 4/22 F

IN numeris fractis propositio hæc, vnà cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

QVOD si loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A .
B . G . C
D .....
E ..... H ..... F

10. THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, sintque AB, C, ipsis DE, F, minores, singuli singulis. De his enim etiã intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim, numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipsius C, quæ tam DH, quam HE, ipsius F. [a] Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes AG,

A..G.. B
C.....
D.....H.....E
F.....

[a] 9. septimi.

ipsius

ipſius DH, & GB, ipſius HE, quæ C, ipſius F: Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG, ipſius DH, quæ GB, ipſius HE. [a] Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB, eadem pars erit, aut partes vtriuſque DH, HE, ſimul, nimirum DE, tertij, quæ AG, ipſius DH, hoc eſt, quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat. [a] 5. vel 6. ſeptimi.

SCHOLIVM.

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

$A, \frac{2}{15}$ $G, \frac{2}{15}$ B
$C, \frac{4}{15}$
$D, \frac{1}{10}$ $H, \frac{3}{10}$ E
$F, \frac{6}{10}$

THEOR. 9. PROPOS. 11. 12.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB, ad totum CD, ita ablatus AE, ad ablatum CF.
Dico & reliquum EB, ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB, ad totum CD.

A.....E.....B
C.....F...D

Cum enim ſit, vt AB, ad CD, ita AE, ad CF; [b] erit AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, æque multiplex. Quo poſito, erit e contrario CD, totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF, ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipſorum CD, CF. [c] Igitur & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac propterea [b] 20. defin. [c] 7. ſeptimi.

e contrario A B, ipſius CD, & EB, ipſius FD, æque multiplex erit. [a] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[a] 20. defin.

SIT deinde AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo poſito, [b] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; [c] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

[b] 7. vel 8. ſeptimi.

A . . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

[c] 20. defin.

CONTINEAT tertio AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quo poſito, erit e contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonſtrabimus. [d] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eæ-

[d] 8. ſeptimi.

A . . . . . E . . . B | A . . . . . E . . . . . B
C . . . . F . . D | C . . . . . F . . . . . D

dem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, e contrario AB, ipſum CD, & EB, ipſum FD, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes, vt mox oſtendemus. [e] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[e] 20. defin.

QVOD ſi AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perſpicuum eſt reliquum EB, quoque eſſe æqualem reliquo FD. Nam ſi ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, ſunt æqualia. Itaque ſi fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . E . . . B
C . . . . F . . . D

SCHOLIVM.

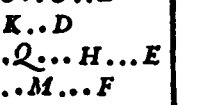
EODEM modo demonſtrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò conſtat in his exemplis, quæ exemplis tertij caſus demonſtrationis reſpondent.

$A, \frac{6}{8} E \frac{1}{10} B$ | $A, \frac{14}{21} E \frac{28}{29} B$
$C, \frac{4}{9} F \frac{2}{15} D$ | $C, \frac{1}{21} F \frac{10}{29} D$

LEMMA

LEMMA.

QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque insuper partem illius vel partes; e contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes; e contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem; GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipsius CD, sit eadem pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel



certe numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea aque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipſis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF; erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipſius AE.

CONTINEAT deinde AB, ipſium CD, & AE, ipſium CF, æqualiter, videlicet ſemel, bis, ter quaterue, &c. eaſdemque inſuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, ſint rurſum vel æquales ipſis CD, CF, vel eorum æquemultiplices. Diuiſis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF,

A . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . D
A . . R . . . S . . . H . . . K . . . E
C . . . N . . . O . . . F

erit multitudo partium ipſius GB, multitudini partium ipſius HE, æqualis. Simili modo, diuiſis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partium ipſius CD, multitudini partium ipſius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB, eadem pars eſt numeri CD, quæ vnaquæque partium

partium numeri H E, est numeri C F. Denique diuisis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eisdem partibus GL, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æquemultiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipsius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipsius CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus si addantur æquales multitudines partiũ numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partiũ numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atq; adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE. Quod est primo propositum.

IAM vero sit CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, eadem partes. Dico e contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter continere, eandemque insuper illius partem, vel partes. Diuisis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter se æquales. Item diuisis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter se æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, supereritque eadem pars, vel partes ipsius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in A E, *& quæ pars, aut partes ipſius* C F, *ſuperſunt, propter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *&* A B, A E. *Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum* A B, A E, *contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *& inſuper in duobus illis numeris ſuperſint partes numerorum* C D, C F, *multitudine æquales. Quam ob rem* A B, *ipſum* C D, *&* A E, *ipſum* C F, *æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quod ſecundo eſt propoſitum.*

13. THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

SINT quotcunq; numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico eſſe quoq; omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D. F, ſimul, vt eſt A, ad B.

A .... C .. E ..,
B ..... D .... F .....

Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem,[a] eadem pars eſt, aut partes A, ipſius B, quæ C, ipſius D, & E, ipſius F;[b] erit quoque vterque A, C, ſimul vtriuſq; B, D, ſimul eadem pars, aut partes, quæ A, ipſius B, vel E, ipſius F. Rurſus quia vterque

[a] *20. defin.*
[b] *5. vel 6. ſeptimi.*

vterque A, C, ſimul, tanquam vnus, vtriuſq; B, D, ſimul, tanquam vnius, eadem pars eſt, aut partes, quæ E, ipſius F; [a] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, ſimul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, ſimul eadem pars, vel partes, quæ A, ipſius B. [b] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

[a] 5. ſeptim.

[b] 20. defi.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo poſito, erit e contrario B, ipſius A, eadem pars, quę D, ipſius C, & F, ipſius E; Atq; adeo vt prius, [c] erunt omnes B, D, F, ſimul, omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æque multiplices. [d] Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hic apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius lib.

A... C..... E..... | A... C... E..... | A...C...E...
B. D.. F... | D. D. F.. | B. D. F.

[c] 5. ſeptim.

[d] 20. defin.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. [e] Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes; Erit per lemma præcedentis propoſ. B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, [f] erunt omnes B, D, F, ſimul omniũ A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A; Atque adeo per idem lemma, e contrario cõtinebunt omnes numeri

A..... C.... E.....
B..... D... F .....

[e] 20. defin.

[f] 6. ſeptimi.

A, C, E,

A, C, E, ſimul, omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes.
[a] 20. defin. [a] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiũt A, C, ſimul æquales ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cum vtrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

A.... C... E.....
B.... D... F.....

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nã ſint primum A, & C, minores quã B, & D; & A, quoq; minor, quam C. Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, vel partes.

A... C.....
B .... D.....

[b] 9. vel 10. ſeptimi. [b] Viciſsim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: [c] Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

[c] 20. defin.

SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, vel partes.

[d] 9. vel 10. ſeptimi. [d] Viciſsim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit,

erit, vel partes: Atque adeo e contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes. [a] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.....C...
B.....D....

[a] 20. defin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo poſito, erit ob eãdem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex; vel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo e contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [b] Viciſsim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, vel partes, [c] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A....C.....
B...D.....

[b] 9. vel 10. ſeptimi.
[c] 20. defin.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [d] Viciſsim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea e contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [e] Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.....C.....
B.....D.....

[d] 9. vel 10. ſeptimi.
[e] 20. defin.

SINT quinto A, & C, ipſi B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt; [f] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A...C....
B...D....

[f] 20. defin.

SINT

SINT ſexto A,& C,ipſis B,& D,æquales,at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C,& D,vel æque multiplices ſunt, vel certe illi hos æqualiter continent,eandemque inſuper partem, vel partes;[a] erit vt A,ad C,ita B,ad D.

[a] 20.defin.

SINT ſeptimo ac vltimo A,& C, inter ſe æquales, ſiue ij maiores ſint quam B,& D,ſiue minores,ſiue æquales. [b] Quoniam igitur,ob eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes;vel certe A,ipſum B,& C,ipſum D,æqualiter continet,eandemque inſuper partem, vel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A,ad æqualem C,ita B,ad æqualem D. Quocirca, ſi quatuor numeri proportionales ſint, & viciſſim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

[b] 20.defin.

A .... C ....
B .... D ...

SCHOLIVM.

QVOD ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas, demonſtrabis eodem modo propoſitionem hanc veram eſſe in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque eſt, propoſitionem hanc non variari, etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere, eoſque demonſtrationibus certiſſimis confirmare, vna cum lemmate propoſ. 11. vt earũ veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium, vt perſpicue ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum, & ab Euclidis inſtituto alienum, cum partes appellarit

larit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis lucc clarius conſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſupernacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 15.

SI ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, ſitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniã enim eſt, vt A, ad B, ita D, ad E; erit viciſsim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eãdem ob cauſam, cum ſit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit viciſsim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cũ enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem ſit proportioni B, ad E, vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, vt mox oſtendetur.) Ac proinde viciſsim, vt A, ad C, ita D, ad F.

A..... D.....
B..... E.....
C.... F...
G..... H.....

[a] 13. ſeptimi.

[b] 13. ſeptimi.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiã quemadmodũ C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe, vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C,

vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt, hanc propoſitionem eadem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

A. D...
B.. E.....
C... F.....
G. H...

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſint

A ..... B ..... C ....
D ..... E ..... F ...

eædem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſiue numeri ſint integri, ſiue fracti; ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel

partes

partes. [a] *Quare numeri* A, D, C, F, *proportionales sunt, vt quidem* A, *ad* D, *ita* C, *ad* F. *Quod est propositum.* [a 20. d. fin.

HOC *idem demonstratum fuit ab Euclide lib.* 5. *de proportionibus magnitudinum, propos.* 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 16.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiso enim numero

BC, in vnitates BG,	A.	D..
GH, HC, & numero	B.G.H.C	E..I..K..F

EF, in partes EI, IK, KF, ipsi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturq; æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipsum EI, atque vnitas GH, ipsum IK, & vnitas HC, ipsum KF: atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius lib. ostendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, simul numerorum EI, IK, KF, simul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc est, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compositus, numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compositum æque metietur. Si vnitas

vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris, propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, aque metitur, atque numerus D, numerum EF; erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, aque metietur.

HÆC propoſitio fractis numeris conuenire non poteſt. Nã ſi vnitas numerum quempiam metiatur, aque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur viciſſim aque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & ſecundus integer quartum fractum; ſed ſolum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam ſecundus ad quartum.

17. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo numeri mutuo ſe ſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

E.
A . . . B . . . .
D . . . . . C . . . . . .

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipſum B, faciat C, at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipſum B, multiplicans faciat C; [b] erit C, ex B, toties compoſitus, quot ſunt in A, vnitates; atque adeo vnitas

[a] 13. huius.

[b] 15. deſin.

vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. [a] Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; [b] erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atq; adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerũ C, æque. Aeque igitur numerus A, vtrumq; numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo se se multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 15. septimi.
[b] 15. defin.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde æquales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

E.
A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{5}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST hæc eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, [c] etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur.

E.
A ... B ....
C .....

[c] 15. defin.

Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipſum numerus A, æque metitur, atque vnitas E, ipſum B.

QVOD ſi numeri A, & B, ſint fracti ambo, vel vnus eorum, demonſtrabimus idem hoc modo.

E . *Quoniam A, multiplicans B, facit C;*
A ... B .... *erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad*
C ..... *E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At ſi B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod eſt propoſitum.*

18. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita D, ad E. Aſſumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compoſitus toties, quoties vnitas F, eſt in A: ſimiliterque toties E, compoſitus erit ex C, quoties eadem vnitas F, eſt in eodem A: Atque adeo B, ipſum D, & C, ipſum E, æque metietur. Quare B, ipſius D, & C, ipſius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c.

F .
A . . .
B . . C . . . .
D ..... E .....

Quod oſtendendum erat.

[a] *15. defin.*
[b] *20. defin.*
[c] *13. ſeptimi.*

SCHO-

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. ram D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; [a] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cum ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [b] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . B . . . . .
C . . .
D ..... E .....

[a] *16. septimi.*

[b] *17. septimi.*

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunq; numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.

SI numerus qnotcunque numeros multipli cet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E,F,G,ex A, in B,C,D, vel ex B, C, D, in A. Dico eaſdem rationes habere numeros productos E,F,G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E ..... F ..... G .....

B,C, D, habent: hoc eſt, eſſe, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nã cum ex A, in B,C, vel ex B,C, in A, fiant E,F; [2] *erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F,G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.*

[2] 17. vel 18. ſeptimi.

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, ſecundo in C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C.

in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D, hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus.

A ... B .. C ..... D .... E ..... F ..... G .....

[a] 17. septimi.

[b] 18 septimi.

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædē sint proportiones G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. Proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor [illegible] numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 17. septimi.

[d] 18. septimi.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, siue omnes fracti sint, siue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiã ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quã illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

IT A enim oſtenſum eſt numerum E, qui fit ex A, antecedente in D, conſequentem, aqualem eſſe numero F, qui procreatur ex B, conſequente in C, antecedentem.

SED & ſequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propoſ. 19. demonſtrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundũ, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, eſſe maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, vt C, ad D; (ſiue E, numerus integer ſit, ſiue fractus; ſiue integer cum fracto: qui quidem repertetur, vt ad propoſ. 19. lib. 9. oſtendemus ſi numerus ex B, in C, procreatus dimidiatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quàm E, ad B: ac proinde A, maior erit, quã E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: [a] At qui fit ex E, in D, aqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.

A ..... E .....
B ....
C .....
D .....

a. ſepti-

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (ſiue E, numerus ſit integer, ſiue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quàm E, ad B: [b] At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

b. ſepti-

QVOD

QVOD si minor fuerit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc apposito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quàm C, ad D: hoc est, maior est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, siue ex B, in C, quàm ex D, secundo in A, tertium, siue ex A, in D, vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quàm ex B, in C. quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex A, in D, quàm ex B, in C; hoc est, maior ex B, in C, siue ex C, in B, quàm ex A, in D, siue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum, vt iam est demonstratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quàm C, ad D. Quod est propositum.

A..... E.....
B....
C...
D..

THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dicò numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit vt

B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita D, ad C; numeruſque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri

A.....
B.....D.....
C....

A, B, D, C, proportionales ſunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur.

[a] 19. ſeptimi.

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 19. ſeptimi.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hac non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium. Item ſi minor

A.....	A....
B.....D.....	B.....D.....
C....	C.....

fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundũ, quam ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſ. liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt habeantur

habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri AB, CD, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum AB, ad CD, ita E, ad F. Dico AB, CD, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem AB, ipsum maiorem E, at minorem CD, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, vt AB, ad CD, ita E, ad F; [a] erit vicissim, vt AB, ad E, ita CD, ad F; Atque adeo cum AB, CD, minores sint, quam E, F; [b] erit AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH, HD; Ac propterea AG, ipsius E, & CH, ipsius F, eadem pars. [c] Erit ergo, vt AG, ad E, ita CH, ad F; [d] & vicissim, vt AG, ad CH, ita E, ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quam AB, CD, eandem habebunt proportionem, quam AB, CD. Quod est absurdum; cum AB, CD, in sua proportione ponantur minimi. Nó ergo AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea AB, ipsum E, & CD, ipsum

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . . . .
F . . . . . .

[a] *13. septimi.*
[b] *20. defin.*
[c] *20. defin.*
[d] *13. septimi.*

ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt, ſi quis dicat, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq; duos eſſe in ſua proportione minimos. Hoc enim poſito, oſtendetur eodem modo, primum metiri ſecundum; & ſecundum, tertium, vt in hoc appoſito exemplo apparet, vbi tertius numerus ſecundo

A ----- G --- B
C ..... H ..... D
E .....
F .....

aqualis eſt. Quamuis autem dari non poſſint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in ſua proportione ſint minimi, niſi primus ſit vnitas; idem tamen demonſtratur in tribus, etiamſi primus ab aduerſario non dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq; duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.

PARI ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit

A ... K ... B C .. L. D E .... M .... F
G ..... H ..... I .....

proportio AB, ad CD, quæ CD, ad EF, ſiue non; ita vt non poſſint

poſſint reperiri alij numeri ipſis AB, CD, EF, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, vt AB, ad CD; & ſecundus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis AB, CD; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4. & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt AB, ad CD; & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, metiri aque. Cum enim ſit vt AB, ad CD, ita G, ad H; [a] *erit viciſſim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum ſit vt CD, ad EF, ita H, ad I;* [b] *erit quoque viciſſim, vt CD, ad H, ita EF, ad I.* [c] *Quare AB, ipſius G, & CD, ipſius H, & EF, ipſius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuiſis enim, ſi fieri poteſt, AB, CD, EF, in AK, KB; CL, LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF: atque adeo AK, ipſius G, & CL, ipſius H, eadem pars.* [d] *Erit ergo vt AK, ad G, ita CL, ad H;* [e] *& viciſſim vt AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL, ad EM, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod eſt abſurdum, cum hi ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eadem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, aque metietur. Quod eſt propoſitum.*

[a] 13. ſeptimi.
[b] 13. ſeptimi.
[c] 20. defin.
[d] 20. defin.
[e] 13. ſeptimi.

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionũ, ita vt etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem habeant proportiones, quas A, B, C, Dico A, B, C, ipſos D, E, F, aque

A .. B ..... C ...
D ..... E ..... F .....

A .. B ..... C ... D .... E ..... F .... aque metiri. Nam per hanc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, aque metientur ipſos D, E; eademque ratione B, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, aque metiatur, ac B, ipſum E; metientur aque omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

CÆTERVM hac propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo conuenire poteſt numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus alijs propoſitionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt, eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Alia autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, aquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod ſatis eſt ſemel hoc loco monuiſſe.

19.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim ſit vt A, ad B, ita E, ad F; erit

, erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum ſit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, ſecundo in D, tertium, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

A..... H...
B... D....
C..... E.....
G..... F..

[a] *19. ſeptimi.*

[b] *19. ſeptimi.*

[c] *19. ſeptimi.*

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc eſſe, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione ſumuntur, eſtque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, erit rurſus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor, ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur propoſitio in numeris fractis, vt conſtat.

QVONIAM verò Euclides ex illis ſex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonſtrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris oſtendit, nimirum eum, qui a permutata proportione ſumitur, propoſ. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propoſ. 14. & 22. huius lib. non alienum a noſtro inſtituto erit, breuiter reliquos quatuor modos oſtendere in numeris, & alia quædam quinti libri ſequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C.

A..... C... Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, [a] *erit vicissim A, ad C, vt B, ad D. Rursus quia est B,*

B.... D.. ad D, vt A, ad C, [b] *erit vicissim B, ad A, vt D, ad C. Quod est propositum.*

[a] *13. septimi.*

[b] *13. septimi.*

II.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque diuisi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo esse, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum

A..... C... B enim sit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE;

D.... F.. E [c] *erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proin-*

de, vt totus AB, ad totum DE, [d] *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc est, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* [e] *Vicissim ergo erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod est propositum.*

[c] *13. septimi.*

[d] *11. septimi.*

[e] *13. septimi.*

EADEM ratione demonstrabimus Diuisionem rationis conuersam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuisionem rationis conuersam esse quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod est propositum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuisionem rationis contrariam, esse quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim est, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE;

DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [a] erit vicissim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF; [b] Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF: [c] Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.

A ..... B ... C
D .... E .. F

[a] 13. septimi. [b] 12. septimi. [c] 13. septimi.

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam esse quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est, ut AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

DEINDE sit rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IIII.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT

SIT vt AB, ad CL, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] *erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* [b] *ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF.* [c] *Vicissim igitur, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.*

A ..... C ... B
D .... F .. E

[a] 13. septimi.
[b] 11. septimi.
[c] 13. septimi.

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet,

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item vt BG, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, vt est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cum enim sit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad EH. Quoniam igitur est vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex aequalitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH. Itaque cum rursus sit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH: & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex aequalitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.

A ..... B .. G
C ....

D ..... E ... H
F .....

EODEM

EODEM modo & hoc Theorema oſtendemus, quod ad propoſ. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonſtrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eoſdem eandem: Et reliqui ad eoſdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquũ GB, eſſe ad C, vt eſt reliquus HE, ad F. Cũ enim ſit, vt AG, ad C, ita DH,

ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F,

A ..... G .. B D ..... H ... E
C .... F .....

ad DH. Quia igitur eſt, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex æqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rurſus ſit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex æqualitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod eſt propoſitum.

ITEM & hoc demonſtrabimus.

VII.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto.

SIT vt primus A, ad ſecundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintũ CG, ita tertius D, ad ſextum FH. Dico ita eſſe A, primum ad BG, compoſitũ ex

secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cum enim sit, vt A, ad BC, ita D, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D; & vt A, ad CG, ita D, ad FH; erit ex æqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH; & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH; & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH; erit ex æqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.

A..... D.....
B....C..G E..... F.... H

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebũt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudinę illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunque numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K: Hoc est, sit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est, quam ipse FI, habet ad K. Cum enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E,



ad E, ſecundum, ita GH, ſextus ad K, quartum; erit quoq; vt AC, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FH, tertius cum ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, vt AC, primus ad E, ſecundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, ſecundum, ita HI, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FI, tertius cum ſexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, ſi plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc eſt, ſit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad FI. Cum enim ſit, vt E, primus ad AB, ſecundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, ſextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad AC, ſecundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum ſexto. Atque ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM vero, his demonſtratis, oſtendentur nouem vltima propoſitiones lib. 5. à Campano adiecta, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtrata fuere; ſi pro magnitudinibus intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur ijdem modi hoc lib. demonſtrati: Vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eademq; prorſus demonſtrationes adhibeantur.

21. **THEOR. 21. PROPOS. 23.**

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quâ ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D,

A ..... B ....
C ——— D ——
E ——

a 21. *sept.* minimi sunt in proportione A, & B, a metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque; atque adeo secundum eundem numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; b metietur & vicissim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur; c metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura: Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi: Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

b 25. *sept.*

c 25. *sept.*

22. **THEOR. 22. PROPOS. 24.**

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cũ ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi mẽſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem menſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At vero ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties cõpoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B; [a] fit, vt D, & E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [b] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cum D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

A ..... B .....
C ——
D —— E ——

[a] 9. pron.
[b] 18. ſeq.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem tum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunq; numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarũ proportionum, ita vt in minoribus numeris continueri nõ poſſint, quamuis proportio

A ..... B ..... C ....
D ---- E ------ F ---
G ----

duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, aque per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus; atque adeo ſecundum vnum eundem numerum, qui ſit G; ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, aque metitur; a metietur quoque viciſſim aque vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, aque, atque vnitas ipſos E, F; Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.

a 1. ſept.

I A M vero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D; & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E; & ipſum C, toties, quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F; ſit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores ſint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.

24.

THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT

SINT inter ſe primi A, & B; & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C; metiatur eos communi menſura, ſi fieri poteſt, numerus D.
Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipſum A; [a] metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cum habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... B .....
C .... D——

[a] 11. prom.

THEOR. 24. PROPOS. 26. 25.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundē primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi; ſit eorum communis menſura numerus E, metiens ipſum D; toties, quot vnitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; [b] fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D; [c] & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idē D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; [d] erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia vero A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; [e] erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum ſint inter ſe primi, [f] in ſua proportione minimi erunt.

A ..... B ..
C .....
D .....
E—— F——

[b] 9. prom.
[c] 6. ſept.
[d] 19. ſept.
[e] 21. ſept.
[f] 13. ſept.

F 4

a 21. sept. erunt. a Aeque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habētes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiā primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

26. ## THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquū primus erit.

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt,

A.... B.....
C.....
D ....

b 26. sept. b erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

27. ## THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A, & B, ad vtrumq; C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit

ad

ad C; [a] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus est ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A..... B...
E.....
C... D..
F.....

[a] 26. sept.
[b] 26. sept.

THEOR. 27. PROPOS. 29. 28.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B; & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cũ enim A, B, sint inter se primi, [c] erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter se erunt.

A... B..
C..... D....
E..... F.....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

[c] 27. sept.

RVRSVS

[a] 27. *sept.* RVRSVS, quia A, & B, ſunt inter ſe primi, [a] erit & C, factus ex A, in ſe, ad B; & D, genitus ex B, in ſe, ad A, primus: Eſt autem & C, oſtenſus ad D, primus. Vterque igitur A; C, ad vtrumque B, D, primus erit; [b] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod ſi adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi ſint ad B, [c] erit quoque E, ex ipſis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus eſt; [d] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et ſic deinceps, ſi plures fuerint. Nam eodem *modo cum* A, & E, *primi* ſint ad B, [e] erit & G, ex ipſis factus, ad B, primus: nection & H, ad A, [f] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, ſit primus. Si duo itaque numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

[b] 28. *sept.*

[c] 26. *sept.*

[d] 28. *sept.*

[e] 26. *sept.*

[f] 28. *sept.*

A		B	
C		D	
E		F	
G,	81.	H,	16.
I,	243.	K,	32.

29.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam vterque ſimul ad quemlibet illorum primus erit: Et ſi vterque ſimul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter ſe erunt.

SINT inter ſe primi AB, BC. Dico & vtrumque ſimul AC, primũ eſſe & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non ſunt inter ſe primi; metiatur illos, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus D. Quia igitur D, metitur totum AC, & ablatum AB; [a] metietur quoque reliquum BC.

[a] 3. 1. *pron.*

BC. Non igitur primi inter se sunt AB, BC, cũ eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, ostendemus eundem esse primum.

A.....B.....C
D——

SED iam vterque AB, BC, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad AB. Dico & AB, BC, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC; [a] metietur quoque D, numerus AC, ex AB, BC, compositum; Ac proinde AC, AB, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur AB, BC, inter se primi. Eodemque argumento ostendemus AB, BC, inter se primos esse, si AC, ad BC, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. prop.

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim AC, ad AB, primus est, erunt AB, BC, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & AC, ad BC, primus erit, per primam partem eiusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. 32.

OMNIS primus nùmerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B, esse inter se primos,

primos, licet B, compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos, præ-

A ..... B .....
C ——

ter vnitatem, si fieri potest, communi mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

33. THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciãt C, quam metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri saltem

A .... B .....
C .....
D ... E .....

vnũ ipsorum A, & B, si non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur vero ipsum C, toties, quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, equalis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, secũdum, ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia vero primus D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in sua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B; & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri se se mutuo

[a] 19. sept.
[b] 31. sept.
[c] 23. sept.
[d] 21. sept.

mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema sequens demonstrabimus.

SI duo numeri se se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad unum eorum, qui in principio, compositus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem uel metiatur numerus non primus D, uel certe compositus ad eum sit: hoc est, uel D, & C, compositi sint inter se. Dico D, quoque ad unum ipsorum A, B, compositum esse: id est, uel D, & A; uel D, & B, esse quoque inter se compositos. Si enim D, ad neutrum eorum compositus est; erit uterque A, & B, ad D, primus. [a] *Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod est absurdum, cum D, ponatur uel metiri ipsum C, uel certe ad eum esse compositus. Est igitur D, compositus ad A, uel ad B, cum non sit primus ad utrumque.*

A ... B ....
C .....,
D .....

[a] 26. sept.

THEOR.

PROBL. 31. PROPOS. 33. 30.

OMNEM compositum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compositus A. Dico aliquem numerum primum eum metiri. Metiatur enim ipsum numerus B, qui si primus fuerit, habetur propositum: Si vero compositus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel compositus: Si primus, cum metiatur ipsum B; & B, ipsum A; [b] metietur quoque C, primus ipsum A. Si autem C, compositus

[b] 11. prop.

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia vero numerus non diminuitur infinite, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes precedentes, [a] metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

A ..... B..... C...

[a] 11. prop.

ALITER. Quia numerus A, compositus est; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; [b] metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A ..... B... C--

[b] 11. prop.

31. THEOR. 32. PROPOS. 34.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si vero compositus; [c] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

A .....

[c] 33. sept.

34. PROBL. 3. PROPOS. 35.

NVMERIS datis quotcunque, reperire

perire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdē proportionibus ſint minimi. Quoniam A, B, C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti: Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus. Si vero non ſunt inter ſe primi, [a] inuenta ſit maxima eorum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A, B, C. Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A, B, C, metitur per E, F, G; [b] fit, vt D, ipſos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A ..... B .... C .....
D ..
E ... F .. G ....
H —— I —— K ——
L ——

[a] 3. ſept.

[b] 9. pron.

QVOD vero E, F, G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A, B, C, metiuntur æque, vt ad propoſ. 21. huius lib. oſtendimus; metiantur eos per numerum L. Quo poſito, [c] fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; [d] & vicisſim L, ipſos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [e] erit, vt E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipſos A, B, C, metiatur; non erit D, ma-

[c] 9. pron.

[d] 8. pron.

[e] 19. ſept.

D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

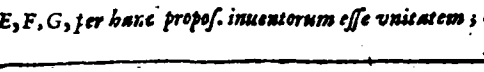
SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continue proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D, E,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

sive illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sive non; reperiemus duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum



E, F, G, per hanc propos. inuentorum esse vnitatem; quando scilicet

scilicet D, maxima mensura vni ipsorum A, B, C, aqualis est, vt ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perspicuum est. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [a] metietur A, ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, sic demonstrabimus. Si C, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturque A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, [b] tam ex A, in E, quam ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F, tertium; [c] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter se, [d] & ob id, in sua proportione minimi) [e] æque metientur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam vero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [f] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipsum E, vt ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B,

A . . . . , B . . . . .
C . . . . . .
D ——————
E —— F ——

[a] 7. pron.

[b] 9. pron.

[c] 19. sept

[d] 23. sept

[e] 21. sept

[f] 17. sept

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MÜNCHEN

metientur alium numerum minorem ipso C; atq; adeo C, minimus est omnium, quos metiuntur.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter se. [a] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt sint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo posito, [b] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, secundo in C, tertium. Factus ergo sit E. Dico E, hac via procreatum esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifestum est. Nam cũ tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus a C, ipsum E, producat; [c] metietur tam A, quam B, ipsum E. Quod vero E, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non est minimus, metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum F, ipso E, minorem: metiatur autem A, ipsum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo posito, [d] fiet F, tam ex A, in G, quã ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, secundo, in H, tertium; [e] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum sint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G; [f] metientur ipsos H, & G, æque; nimirum C, ipsum H; & D, ipsum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; [g] erit E, ad E, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipsum G, vt ostensum est, metietur etiam E, numerus numerum F, maios minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipso E, minorem; atque adeo E, minimus est omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

A.... B.....
C.... D....
E.....
F———————
G—— H——

[a] 35. sept.
[b] 19. sept.
[c] 7. prop.
[d] 9. prop.
[e] 19. sept.
[f] 21. sept.
[g] 17. sept.

COROLLARIVM.

HINC fit, si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metian-

metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD, sitque alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum CD, metiri. Si enim E, ipsum CD, non metitur; ablato E, ex CD, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidã minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties potest, numerum, si fieri potest, FD, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum CF; a metietur quoque tam A, quam B, ipsum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; b metientur & reliquum FD. Est autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur.

A . . B . . .
C . . . . . F ——— D
E . . . . . .

a 11. *prop.*

b 12. *prop.*

Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare E, ipsum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerũ quempiam metiantur, &c. Quod erat demonstrandum.

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerũ.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres
[a] 36. sept. numeri A, B, C, metiantur. [a] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipsum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipsum D, metiuntur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque esse, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non est minimus, metiantur, si fieri potest A, B, C, alium numerum E, ipso D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipsum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Immo, cum A, & & B, metiantur ipsum E; & D, sit minimus, quem iidem
[b] 37. sept. A, & B, metiuntur; [b] metietur quoque D, ipsum E, maior minorem. Quod est absurdum.

A... B.... C.....
D.....
E ----------

[c] 36. sept. SED iam C, non metiatur ipsum D, inuentum. [c] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, esse minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita ostendetur. Cũ A, & B, metiantur ipsum D, & D,
[d] 11. pron. ipsum E; [d] metientur quoque A, & B, ipsum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipsum E, metiuntur. Quod autem E, sit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non est minimus; metiantur, si fieri potest,

A.. B... C.....
D.....
E.....
F----------

poteſt, A, B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipſum F, metiuntur; [a] metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipſum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo cum C, & D, metiantur ipſum F; [b] metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipſo E, minorem metientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

[a] 37. ſept.

[b] 37. ſept.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Num in extrema huius demonſtrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E, ſitque F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D G, relinquatque numerum G E, ſe minorem.

A . . B . . . C . . . .
D . . . . . G —— E
F . . . . . .

Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur; & F, ipſum D G; [c] *metientur quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, cum & totum D E, metiantur metiri;* [d] *metientur & reliquum G E,*

[c] 11. prop.

[d] 12. prop.

G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Metitur igitur F, ipſum D E.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

37. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.



METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam a B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, toties, quot vnitates ſunt in numero C. Quia igitur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque metitur; [a] & viciſsim vnitas æque ipſum B, & C, ipſum A, metietur; atque adeo eadem pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 15. ſep.

THEOR.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nam cum B, pars denominetur a C; sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æque. Vicissim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . .
B . . . C . . . . .

a 15. sept.

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F; b minimusq; quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G, metiantur, c habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod vero G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest,

D . . A, *Secunda*
E . . . B, *Tertia*
F . . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H ———

b 38. sept.

c 39. sept.

D.. A, *Secunda*
E... B, *Tertia*
F.... C, *Quarta*
G.....
H———

H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, a metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor ſit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, ſed ipſe G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum ſit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

a 40. ſept.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipſum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, data partes A, B, C, ipſius G, denominata ſcilicet à

A, Secunda D.. I.....
B, Tertia E... K....
C, Quarta F.... L...
G.....

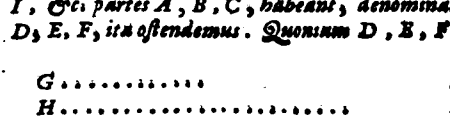
D, E, F. Cum enim D, E, F, ipſum G, metiantur per I, K, L; metietur aque vnitas ipſos I, K, L, & numeri D, E, F, ipſum G. b *Vicißim ergo metietur quoque vnitas ipſos D, E, F, & numeri I, K, L, ipſum G; atque adeo vnitas ipſorum D, E, F, eadem pars erit, qua numeri I, K, L, ipſius G. Cum ergo vnitas ſit pars ipſorum D, E, F, ab ipſis denominata; erunt & I, K, L, ipſius G, partes denominata à D, E, F.*

b 15. ſept.

EX his autem ſequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, eſſe minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Offenſum enim eſt, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum eſſe, qui habeat partes A, B, C, cuiuſmodi ſunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, ſi inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur

habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; sit illius duplus, numerus H; triplus vero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, distent partes continuant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet à D, E, F, ita ostendemus. Quonam D, E, F, metiuntur



ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G; [a] metientur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G. [b] Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C. [a] 11. pron. [b] 39. sept.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; [c] metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi æqualem. [d] Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens. [c] 40. sept. [d] 12. pron.

NON

NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet N O, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipſo G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C, [a] metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propoſ. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum N P, ablatum ipſi H, duplo aequalem. [b] Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, tertius eſt illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

[a] 40. ſept.

[b] 12. prop.

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendusq; ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatq; G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine prædicto, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . . . .
H . . . . . .
. Vnitas
I ----------
K ----------
L ----------
M ----

est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipsò F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine cõtinens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [b] Atq; adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaq; cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autē H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine praedicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.

a 15. defin.

b 17. sept.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

SI vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est vis tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, sient 30. ex 5, in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem à 2. denominatam; & hac partem a 3. denominatam; & hac aliam a 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifestum est.

QVOD

QVOD si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, vi delit et ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B, C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habẽtium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunq; numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, erit, ex æquali- *14. ſept.

A ..... E ---
B ..... F -----
C ..... G -------
D ..... H ---------

æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: [a] Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur. [b] Igitur tam A, ipsum E, quàm D, ipsum H, æque metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 23. sept.

[b] 21. sept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, siue A, B, C, D, sint continue proportionales, vt vult Euclides, siue non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersa sunt, quemadmodum in superiori eadem semper proportio reperitur.

A.... E—
B..... F——
C..... G———
D..... H————

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B; hoc est, esse vt C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; [c] erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, &

[c] 17. sept.

D, & E; [a] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos; [b] sunt autem A, & B, inter se primi, quòd minimi sint in sua proportione; [c] Erunt & C, E, extremi, inter se primi. [d] Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A... B... C.... D..... E..... F, 8. G, 12. H, 18. I, 27. K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

[a] 17. sept.
[b] 24. sept.
[c] 29. sept.
[d] 1. octaui.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; [e] erit quoque, vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [f] Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E; [g] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [h] Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

[e] 18. sept.
[f] 24. sept.
[g] 29. sept.
[h] 1. octaui.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c.

Quod faciendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C; & F, ex A, in C. Quo peracto, [a] numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex ijs, qua ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius.

[a] 18. sept.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniamus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A.. B...
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continuo proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione

catione trium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub alijs denominationibus, qua in Algebra ſolent explicari. Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verũ quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt ijs, qui per hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hãc propoſ. Si vero dati, maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi. quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales:

A--- B-----C------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

ſumptiſq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atq; ita, cum ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eadẽq; ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erũt. Eadẽq; ratio eſt de quatuor, aut pluribus.

Quòd si A, dicatur minor, quàm F, ostendemus eodem argumento & B, C, minores esse, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non sunt. quod est absurdum, & contra hanc propos. Si vero A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non sunt. quod est contra hypothesim. Cum ergo A, minor non sit, aut maior, quàm F; aqualis omnino erit; ideoq; vt ostensum est, & B, C, ipsis G, H, æquales erunt. Quod est propositũ.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque est, extremos numeros proportionalium quotcunque secundum hanc propositionem inuentorum in data ratione minimorum, inter se primos esse. Quod quidem facile ostendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propos. 29. lib. 7. quemadmodum id demonstratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia scilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quosdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonstratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex constructione, continue proportionales sunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones a numero A, horum vero a B, denominentur, vt clarius demonstrabitur propos. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium sint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris data rationis denominantur, quot sunt propositi minimi continue proportionales. Ita enim in superiori exem. le vides C, & E, extre-

extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremes quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe qua ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inuenienda proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inuenie̅dorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicat, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquin-

tu, ſumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. eſt primus quinquies numerorum in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet; 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non poſſunt inueniri (quod mirum videri poſſit) plures numeri continue proportionales, quam propoſiti ſunt. Neque enim poſt 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neq; in priori exemplo poſt 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialteram habeat. Ratio autem huius rei eſt, quod extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, vt ex demonſtratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non poſſit eſſe ad alium quempiam numerum, vt primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

3. THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandē cum eis rationem habentium; Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter ſe primos eſſe. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis ſit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Id quod nos Geometricè demon-

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

demonſtrauimus ad finem coroll. 1. ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll. 2. propoſ. præcedentis K, & N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt A, & D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & verbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, inueniri non poſſent, ex præcedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo ſi diuerſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, continuati in ſuis proportionibus diuerſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compoſiti ſint inter ſe. Itaque hoc Theorema primi eſt conuerſum, quo ad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter ſe ſunt primi, minimi ſunt in ſua proportione, vt conſtat ex 1. theor. Et viciſſim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, velut hic demonſtratum eſt. At vero primum theorema, prout ſpectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, vt ex ſcholio propoſ. 1. huius lib. liquet; Tamen non ſemper e contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, vt manifeſtum eſt in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4.

RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus. 4.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. [a] Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostémus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, [b] A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. [c] Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [d] ipsi æque metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur; [e] metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

A. 6. B, 5. C, 4 D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I —— K —— L ——

[a] 36. sept.
[b] 9. prop.
[c] 18. sept.
[d] 21. sept.
[e] 37. sept.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. [f] Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ip-

[f] 36. sept.

E, ipſum I, metitur, toties F, metiatur ipſum K. Dico H, G, I, K, minimos eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B, ipſos H, & G, æque metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quòd tam C, & D, ipſos G, & I, quàm E, & F, ipſos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; [a] ipſi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metiantur; [b] metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.

[a] 21. ſept.

[b] 37. ſept.

SED iam E, non metiatur ipſum I. [c] Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipſum K, metitur, toties quoque G, ipſum L; & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M, L, K, N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipſos M, L, K, æque metiantur; erit vt ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K. Eſt autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D; quòd & A, B, ipſos H, G; & C, D, ipſos G, I, metiantur æque. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L; & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque

[c] 36. ſept.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,5. F,7.
H,24. G,20. I,15. K,21.
L—— M—— N—— O——
A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7.
H,24. G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30. N,105.
O—— P—— Q—— R——

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. H,24. G,20. I,15. M,48. L,40. K,30. N,105. O---- P---- Q---- R---- est K, ad N, cum E, F, æque ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namque non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt, a ipsi æque metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atq; adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur; b metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia vero ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque id circo, cum metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q; d metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

a 21. sept.

b 37. sept.

c 21. sept.

d 37. sept.

QVOD si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, vt nuper cũ tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,3. T,2. M,48. L,50. K,30. N,105. O,70.

A,36. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,9. T,2.
M,48. L,40. K,30. N,105.
R,144. Q,120. P,90. O,315. V,70.

tionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipsum N, non metiatur; a sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P; & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties vero S, eundē O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

[a] 36. sept.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris nō minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibenda erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorū numerorū deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestū est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & cōsequens, licet proportiones sint diuersæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam,

SINT

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23. lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. [b] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. F. 16. E, 3.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; [c] erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. [d] Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

[a] 17. sept.

[b] 27. defin.

[c] 17. sept.

[d] 27. defin.

SCHOLIVM.

ESSET hoc loco disputandum de compositione proportionum, quemadmodum in expositione defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in scholio propos. 23. lib. 6. facturos nos hoc loco recepimus.

recepimus. Sed quia res hæc accuratè explicari non potest sine fractorum numerorum operationibus, quas ad finem lib. 9. demonstrabimus; differendam eam eundem in locum censuimus. Hoc Lectorem commonere volui, vt sciat, vbi res hæc pertractetur à nobis, & cur eam hic, vt polliciti sumus, non exponamus.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neq; alius quisquam vllum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proximè insequẽtem metiatur, manifestum est. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, vero ipsum B, non metiatur; neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quisquam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. [a] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A. ad B; erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipsum G, metietur, cum vnitas omnem numerum metiatur. [b] Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; nõ metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium a se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstra-

[a] 2. octaui.

[b] 3. octaui.

monſtrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hac propoſitio ad hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius eſſe multiplicem. Quod enim nulla proxime inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neque B, ipſius C; neque C, ipſius D; neque D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neq; alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur e contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 9. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus ſecundum D, non metitur; a 6. octaui. neq; alius quiſquam illorum vllum metietur. Quare e contrario, ſi maiores ad minores referantur, neque quiſquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7 ſcripſimus.

SED & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecundum metiatur; & quicun-

quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quilibet proxime inſequentem metiatur, A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. perſpicuum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipſum B; & B, ipſum C; & C, ipſum D; & D, ipſum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet ſequentium metiatur, nempe B, ipſos D, & E, hoc modo oſtendetur. Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D; [a] metietur quoque B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur; [b] metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis.

[a] 11. pron.
[b] 11. pron.

SED iam primus A, multiplex ſit B, ſecundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cum enim ſit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: ſit autem A, ipſius B, multiplex; erit & B, ipſius C; & C, ipſius D; & D, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3. proxime inſequentis multiplex eſt. Rurſus quia D, ipſius E, eſt multiplex; metietur e contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, vt demonſtratum eſt; Ac propterea e contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſque ſequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propoſitionem ſextam, & theorema, quod primo loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, secũdum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, qua secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam ullum a secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius a secundo B, sit multiplex. Dico neq; A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, qua secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam vllius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus

primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri: neq; alius quiſquam vllum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundum metietur; Atque idcirco, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

*6. octauæ.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod ſecundo loco in ſcholio precedentis propoſ. demonſtrauimus, conuertamus, amplificabimus hanc propoſ. hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet a ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquã cuiuslibet a ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex; neque alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propoſ. 6. & 1. theoremate ſcholij precedentis.

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot ſunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad B, atq; adeo vt E, ad F, ita G, ad K. [a] Quare cum G, & K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorũ numerorum; [b] ac propterea in ſua proportione minimi; [c] æque metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos. [d] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F, producũt, in eiſdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales ſunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 24. C, 36. D, 54. B. 81.
G. 8. H. 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40. C. 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H. 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C. 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

[a] 3. eſtani.
[b] 23. ſept.
[c] 21. ſept.
[d] 9. pron.

SCHOLIVM.

NON ſolum ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L, M, F, qua eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadem eſſe proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B. Igitur

Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hac propoſitio vera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit vnitas, exiſtentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel ſuperparticularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum medium proportionalẽ. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; ſuperparticularis vero inter numeros ſola vnitate differentes; ſuperbipartiens denique inter numeros, quorum differentia eſt binarius: ſi inter duos numeros dupla proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neque inter binarium & vnitatem, neque inter duos numeros ſola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes intercipitur ſolum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri AB, CD, (ſiue CD, vnitas ſit, & AB, ternarius, ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus EF, minor vnitate quam AB, maior vero quam CD, vnitate quoque. Dico EF, non eſſe medium proportionalẽ inter AB, CD. Si enim dicatur eſſe AB, ad EF, vt EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipſi EF, æquali, vt reliqua ſit vnitas GB; & ex EF, numero EH, ipſi CD, æquali, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoq; vt AB, totus ad EF, totum, ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipſis EF, CD, æquales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoque reliquus GB, ad reliquum

A .. G . B	A ..... G . B
E . H . F	E ..... H . F
C . D	C ..... D

I HF, hoc

HF, hoc eſt, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, minor ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo EF, medius proportionalis eſt inter AE, & CD.

THEOR. XV.

Inter numeros triplo proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Aliquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui tamen inter ſe differunt. quod fieri non poſſe, proxime demonſtrabimus.

PARTITIONE inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non poſſe, ſic demonſtrabimus. Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt ſit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniã vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipſum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque ſenarium AE. Igitur D, mutitur totum AE, & ablatum AB: ac proinde & D, numerus reliquum vnitatem EB, metietur. Quod eſt abſurdum. [a 11. prem.]

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendimus ergo, vt prius, D, metiri quinarium AB. Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metietur totum AB, & ablatum AE: ac proinde & D, numerus reliquum vnitatem EB, metietur. Quod eſt abſurdum. [b 11. prem.]

EX quibus ſit, neque illud inter muſicos Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; neque illud, quod in ſeſquialtera proportione reperitur, cuiuſmodi eſt Tonus, ſeu vulgo Secunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet) ſecari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Ideirco

proportio

proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc vero in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoque Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiuslibet quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadratorum ex lateribus descripti; quadratorum vero proportio sit duplicata proportionis laterum; sit, vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quòd inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus; manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est, diametrum esse lateri incommensurabilem. quæ de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac

vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter ſe primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C, [a] ſumantur in eadē proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo aſſumptorum æqualis ſit multitudini A, C, D, B.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas. 1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

[a] 2. octaui.

[b] 1. octaui. Quoniam ergo A, B, extremi inter ſe primi ſunt; [b] erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex conſtructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipſis A, C, D, B, æquales ſunt, ſinguli ſingulis, vt K, ipſi A; & N, ipſi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. E, ſeipſum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipſum G, fecit K, [c] metietur E, [d] ipſum G, per E; & G, ipſum K, per eundem E: [d] Metitur autem & vnitas ipſum E, per E. Aeque igitur metietur vnitas ipſum E, & E, ipſum G, & G, ipſum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius E, & E, ipſius G, & G, ipſius K. [e] Proportionales ergo ſunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifeſtum ſit ex eadem demonſtratione propoſ. 2. huius libri quòd F, ſe ipſum multiplicans producat I, multiplicans vero ipſum I, faciat N; [f] metietur F, ipſum I, per F, & I, ipſum N, per eundem F: [g] Metitur autem & vnitas ipſum F, per F. Aeque igitur metietur vnitas ipſum E, & F, ipſum I, & I, ipſum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius F, & F, ipſius I, & I, ipſius N. [h] Proportionales ergo ſunt continue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vna cum vnitate, æqualis ſit multi-

[c] 7. pron.
[d] 5. pron.
[e] 20. defin.
[f] 7. pron.
[g] 5. pron.
[h] 20. defin.

multitudini K,L,M,N, vel A,C,D, B, (vt perspicuum est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E, F, sunt secundi ab vnitate: & tres G,H,I, tertij, & quatuor K,L,M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualē; quot inter numeros A,B. Si duo ergo numeri sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM

PERSPICVVM autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C, hoc est, quas habēt E, & F, numeri ad vnitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit; & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continuè proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E,G, & F, I,N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continuè esse proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps media continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos media continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A,B, & vnitatem, quotcunq; numeri medij continue proportionales; inter A, quidē & vnitatē, numeri C,D,E: At vero inter B, & vnitatē, numeri F,G,H, illis multitudine æquales. Dico totidē medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem.

Multiplicantes enim ſe mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rurſus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot ſũt inter vtrumque A, B, & vnitatẽ. Quoniam igitur eſt, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E, & E, ad A; æque metietur vnitas ipſum C, & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A: [a] Metitur autem vnitas ipſum C, per C. Igitur & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A, per C, metietur. [b] Quare C, ſeipſum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, ſeipſum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [c] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [d] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rurſus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc eſt, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F. Poſtremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex iis, quæ a nobis ſunt demonſtrata ad propoſ. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc eſt, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [f] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F. Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta ſit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca ſi inter duos numeros,

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.

Vnitas.

a 5. prom.
b 9. prom.
c 17. ſept.
d 17. ſept.
e 18. ſept.
f 18. ſept.

numeros, & vnitatem, continue proportionales cecide-rint numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EX his conſtat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales ſunt C, & F.

PATET etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtratum enim eſt, ex eo quod C, D, E, A, continua proportionales ſunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium ſumentes.

I.

SI ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem &

D, 81. M, 108. N, 144. O, 192. H, 256.
C, 27. K, 36. L, 48. G, 64.
B, 9. I, 12. F, 16.
A, 3. E, 4.
1.
Vnitas.

unitatem, numerus M. At inter F, & unitatem numerus E; [a] cadet quoq; inter B, & F. unus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & unitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata est proportionis C, ad K, & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationē habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

[a] 10. 8a.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, tri-

H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoq; in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continuè proportionales ab vnitate, vt cõstat ex scholio propos. 9. huius lib. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij; Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 2. theoremate est ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex aequo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij; quòd tam B, N, quam F, Q, sint ab vnitate cõtinuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eiisdē argumẽtu erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. & eiisdē triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo est A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F:

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. 1. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

K, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

Proportio

E,81. I,1.
D,54. Vnitas H,2.
C,36. G,4.
B,24. F,8.
A,16.
N,576. K,256. Q,64.
O,13824. L,4096. R,512.
P,331776. M,65536. S,4096.

Prætertio quidem A, ad H, ex defin. ut prætertio L, ad R, ex 1. theor. huius scholij, præterea quòd tam A, K, L, quam F, Q, R, cõtinuè proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propos. 9. huius lib. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, sunt continuè proportionales ab vnitate ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatem, vt ex hac subiecta figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 10. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continuè proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, verò & C,

& C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & G. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc eſt, D, ad G: Sed per theor. 2. huius ſcholij, ratio quoque E, ad H, duplicata eſt eiuſdem rationis D, ad G. Igitur eſt vt K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L[2] cadet quoque vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quatuor minimi numeri, oſtendemus, inter F, & I, duos medios cadere, ſicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quinque numeri minimi.

A, 162. Q, 216. R, 288, S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

[2] 8. octani.

HOC etiam verum eſt, ſi loco alterius numeri, nimirum B, vnitas aſſumatur, veluti perſpicuum eſt in hac ſubiecta figura: in qua numeri B, vnitas eſt, caduntque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot ſcilicet inter A, & B, cadunt, &c.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

EX his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero aſſumpto C, propinquiores.

THEOR.

11. THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationẽ.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C. & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicãs fecit E, ex constructione; [a] erit vt A, 9. E, 21. B, 49. C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, C, 3. D, 7. multiplicans C, fecit E, ex constructione; & multiplicans seipsum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum; [b] erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cecidit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 17. sept.

[b] 17. sept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in continua

tua proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PARI ratione liquet, numerũ inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione C, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum suum B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsam E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt E, & B, communem mensuram D; Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posterioris B.

THEOR. 10. PROPOS. 12. 11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionẽ A, ad B, cubi ad cubũ, tripli-

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E; & D, seipsum multiplicans faciat F; At C, & D, se mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes vero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, [b] cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F, propterea quæ E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex [c] constructione multiplicans ipsum G, fecit H; erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicans vero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit [d] cubum B; [e] erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita I, ad B. Est autem & H, ad I, vt C, ad D; quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerunt ex constructione. H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus, cum sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri; &c. Quod erat ostendendum.

a 17. sept.
b 17. sept.
c 17. sept.
d 17. sept.
e 18. sept.

SCHOLIVM.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos esse cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales inter I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione

ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo & ipſum H, quòd H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C; atque adeò inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D, cubum ſuum B; immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D; Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt, priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A; poſteriorum verò trium H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi B.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64. E, 9. G, 12. F, 16. C, 3. D, 4.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 12.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & rurſum multiplicãtes ipſos G, H, I,

G,H,I,faciant K,L,M,& ita deinceps. Dico quoque D, E,F,& G,H,I,& K,L,M,continue eſſe proportionales. Multiplicantes enim A,& B, ſe mutuo faciant N; & B, C,ſe mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A,multiplicans N,E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F,

A, 2. B, 4. C, 8.
D,4. N,8. E,16. O,32. F, 64.
G,8. P,16. Q,32. H,64. R,128. S,256. I,512.
K, 16. T, 32. V, 84. X, 128. L, 256. Y,512. Z,1024. a,2048. M,4096.

faciat R,S.Simili modo A,multiplicans P, Q, H,faciat T,V,X;& B,multiplicans R,S,I,faciat Y,Z, a.Quoniam igitur A,multiplicans ſeipſum,& B,fecit D,& N; erit vt A,ad B,ita D,ad N.Eodem modo,quia B,multiplicâs A,& ſeipſum,fecit N,& E;erit etiam,vt A, ad B, ita N, ad E.Sunt igitur D,N,E,continue proportionales in ratione A,ad B.Rurſus,quia B,ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E,& O; erit vt B,ad C, ita E,ad O. Eademque ratione,cum C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O,& F; erit, vt B,ad C,ita O,ad F; propterea q; & E, O, F,continue proportionales ſunt in ratione B, ad C,ſeu A,ad B Quare cum D,N,E,in eadem ratione ſint continue proportionales,in qua E, O, F;erit ex æquo D, ad E, vt E,ad F; atque adeo D,E, F,continue proportionales ſunt.

17. ſept.

17. ſept.

DEINDE, quia A,multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex iis,quæ ad propoſ.18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione,in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A,ad B,proportionales. Item quia A,& B,multiplicantes E fecerunt Q, & H; erit quoque, vt A,ad B,ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A,ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F,fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18.lib.7.H,R,S,proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt,B,ad C.ſeu A,ad B. Et eodem modo,cum B,C,multiplicantes F,fecerint S,& I; erit vt B,ad C, hoc eſt, vt A,ad B,ita S,ad I;propterea que & H,R,S,I,proportionales ſunt in ratione A,ad B.Quo circa,cũ G, P, Q,H, eandem

8. ſept.

18. ſept.

eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue sunt proportionales.

NON dissimili argumento demonstrabimus & K, L, M, esse continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur si sint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quisque seipsum, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonstratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorũ A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionẽ duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc est, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri secundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata, & sic deinceps semper vno amplius.

BREVIVS propositionẽ totam demonstrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continuè proportionalibus in seipsos, numeri D, E, F; & in hos ex eisdem numeri G, H, I; & rursum ex eisdẽ in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, esse quoque continue proportionales. Nã ex scholio propos. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & C, F, I, M, continue sunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate scholij propos. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiusdem rationis B, ad C, duplicata est ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, cõtinue sunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodẽ modo ostẽdemus G, H, I, esse proportionales cõtinue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

	A, 2.	B, 4.	C, 8.
	D, 4.	E, 16.	F, 64.
	G, 8.	H, 64.	I, 512.
	K, 16.	L, 256.	M, 4096.

EX qua rursum demonstratione apparet, numeros primo loco productos esse in duplicata ratione datorum numerorum; secundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. scholij propos. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonſtratione huius propoſ. 13. dati ſint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C; eãdem tamen propoſitionem demonſtrabimus, etiamſi plures fuerint, quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui ſe ipſos multiplicantes faciant E, F, G, H; poſtea vero multiplicantes ipſos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, ex demonſtratis, proportionales ſunt in ratione A, ad B; Item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc eſt, in eadem ratione A, ad B; cum illi producti ſint ex A, B, C, proportionalibus in ſe ipſos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in ſe ipſos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non ſecus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodem modo producti.

A, 2. B, 4. C, 8. D. 16.
E, 4. F, 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

13. PROBL. 12. PROPOS. 14.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonſtratione propoſ. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; metietur quoque A, primus ſecundum E. Quare cum ſit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

[a] 7. oct. 9.

METIA-

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 14.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuo faciant G: Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; [a] metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

[a] 7. octaui.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione G, C, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D; metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B,

mum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propoſ. 6. huius lib. demonſtrauimus. Itaque ſi cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

15. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Nō metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; [a] metietur & quadratus A, quadratū B. Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81. C, 4. D, 9.

[a] 14. oct.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipſum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum.

[b] 14. oct.

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius

alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A, 8. B, 27.
C, 2. D, 3.

a 15. octa.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim nō metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15. octa.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propositiones hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A; & cubus B, cubum A. [a] Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit.

[a] 14. & 15. octaui.

QVOD si latus C, lateris D, multiplex

A, 36.	B, 9.	sit; metietur latus D, latus C. [b] Igitur & B,
C, 6.	D, 3.	ipsum A, quadratus quadratum; & cubus cubum metietur; Ac propterea A, ipsius B,
A, 64.	B, 8.	quadratus quadrati, & cubus cubi; erit
C, 4.	D, 2.	multiplex.

[b] 14. & 15. octaui.

AT vero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi; non sit multiplex; non

A, 49.	B, 9.	
C, 7.	D, 3.	metietur B, ipsum A, quadratus quadratū; aut cubus cubum. [c] Igitur neque latus D,
A, 125.	B, 8.	latus C, metietur. Quare C, latus lateris D,
C, 5.	D, 2.	non erit multiplex.

[c] 16. & 17. octaui.

SIMILITER si C, latus lateris D, non sit multiplex; non metietur D, latus latus C. [d] Igitur nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeò A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit.

[d] 16. & 17. octaui.

16.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, se mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B; sitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis

portionis laterum homologorum C,E, vel D,F. Multiplicantes enim se mutuo D,E, faciant G. Quoniam igitur est C,ad D,vt E,ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C,& E,fecit A,& G; a erit A, ad G, vt C,ad E, hoc est, vt D,ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F,fecit G,& B; b erit quoque G,ad B,vt D, ad F. Proportionales ergo sunt A,G,B,in ratione C,ad E,vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A. 12. G. 18. B. 27.
C. 6. D. 2. E. 9. F. 3.
a 17. sept.
b 17. sept.

QVIA vero, cum A, G, B, sint continuè proportionales, A,ad B,duplicatam habet rationem eius, quã habet A,ad G, hoc est, C,ad E,vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E,vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A,G,B, esse proportionales in ratione C,ad E,vel D,ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C,E, vel D,F, assumptorum;

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A,B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A,G,B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quòd sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera; Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem C, D, latera summum planum A, antecedentes

antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F; ideoque erunt inter ſe compoſiti.

EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

18. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorũ duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionẽ A, ad B, eſſe triplicatam eius, quã habẽt latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H.

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H. 10.

Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Itẽ D, F, ſe mutuo multiplicãtes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicãtes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, &

[a] 17. *ſept.*

D, & G, fecit L, & K; [a] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [b] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [c] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [d] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

[a] 17. ſept.

[b] 17. ſept.

[c] 17. ſept.

[d] 18. ſept.

QVONIAM vero, cum A, M, N, B, ſint proportionales continue; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M; Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

Ex iis, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiã eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cum enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ra-

in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc eſt, eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoque C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem; quòd ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (Cum enim M, factus ſit, per conſtructionem, ex E, in L, metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K, ipſum B, quod B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I,

2 11. *pron.* *a Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atque adeo C, D, E, ipſum M, mettentur.) Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quam D, quam E; Ideoque compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A, antecedentes antecedentes;*

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

metientur quoque F, G, H, ipſum M, conſequentes conſequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipſum N; (Cum enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionem; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quòd A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F, G, ipſum N; atque adeo F, G, H, ipſum N; metientur.) Nec non & ipſum B, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At vero F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

QVIA vero ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur; demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſive primum latus ducatur

tatur in secundum, & numerus procreatus in tertium; siue primum in tertium, & numerus genitus in secundum; siue denique secundum in tertium, & productus numerus in primum: Quin etiam, propositis quotuis numeris, eundem semper numerum gigni ex eorum multiplicationis mutua, quomodocunq; ordinem inter se permutent. Qua quidem res magnum vsum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiusmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

SINT primùm tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B fiat D; & ex D, in C fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item si ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E; [a] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [b] ita quoque est F, ad A; quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, [c] ita est A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, fecit D. Igitur ex aqualitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: [d] atque idcirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, aqualis erit numero facto ex B, in F, producto ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.

A,	3.	
B,	5.	
C,	8.	
D,	15.	
E,	120.	
F,	24.	
G,	40.	
E,	F,	
D,	A,	
B,	vnitas.	

[a] 15. defin.
[b] 15. defin.
[c] 15. defin.
[d] 19. sept.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [f] ita etiam est G, ad B, eò quòd G, factus ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita est B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus est ex A,

E,	G,	
D,	B,	
A,	vnitas.	

[e] 15. defin.
[f] 15. defin.
[g] 15. defin.

ex A, in B. Igitur ex æquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod erat secundum.

a 19. sept.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D ita vt ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundē E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Itē ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Itē ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Itē ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Itē ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Itē ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Itē ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Itē ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt prater primam multiplicationem, quæ omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersæ producentes eundem semper numerum. Quoniam enim vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id, quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

DEINDE quia vt in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est, eundem numerū gigni tū ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tū ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. quod est faciendū.

TERTIO quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D; siue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundē generari numerū tū ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, Cū ergo ille sit æqualis proxime ostensus primo producto, erit & hic æqualis eidē, q est tertiū.

QVARTO quia, vt in tribus ostensum est, idē numerus fit ex

fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoq; idē numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

QVINTO quoniā, vt demonſtratū eſt in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idē numerus ex A, in C, & ex producto in D, et ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cū ergo ille ſit oſtenſus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintū.

SEXTO, quia, vt in tribus demonſtrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quàm ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod eſt ſextū.

SEPTIMO quia, vt in tribus oſtēdimus, idē numerus gignitur, ſiue ꝓductus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, ſiue prius in D, deinde hic ꝓductus in A; cōſtat eūdē numerū fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in A, qui fit ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex ꝓducto in D. Sed hic proximè oſtēſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille ꝙ eſt ſeptimū.

OCTAVO quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt octauum.

NONO quia, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B; in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex ꝓducto in C, & ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

DECIMO

DECIMO quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A, in C, A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120. *& ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, aqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in B. Igitur & hic. Quod est decimum.*

POSTREMO quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem aqualis erit. Quod est vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum est in quinq; vel pluribus numeris; dummodo interdum in quinq; assumatur id quod iam in quatuor demonstratum est; & in sex, quod in quinque, &c.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum; ac proinde tam secundus ordo, quàm tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum; fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cateris.

17. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C; [a] metientur D, & E, ipsos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: [c] Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B; [d] erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G; & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 21. sept.
[b] 9. prop.
[c] 9. prop.
[d] 17. sept.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 19.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E, & G, plani similes: sint ipsius E, latera H, I; ipsius vero G, latera

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.
A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9
H, 2. I, 2. M, 12. K, 3. L, 3. N, 3.

[e] 20. octa.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648. E, 1. F, 3. G, 9. H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi sint in ratione A, C, D,

[a] 21. *sept.* A, 8. C, 12. D, 18. B, 27. E, 4. F, 6. G, 9. H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

[a] æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis; metiantur per M. Eodemque modo, [b] quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [c] ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, vt ostendimus; [d] erit C, ad D, vt M, ad N: [e] Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quòd N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N; & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rem, si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 21. *sept.*

[c] 9. *pron.*

[d] 19. *sept.*

[e] 17. *sept.*

SCHOLIVM.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet impropriè, vt in definitione numeri plani monuimus. Si enim vnitatem a numeris planis excludamus, non

non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in alijs omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodem prioris exemplo. Hoc autem eſt abſurdum, cum Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamque ſine vlla exceptione demonſtret.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 20.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis; [a] erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 9. B, 54. C, 324.

[a] 20. octaui

THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C;

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125,

[b] erunt A, & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quā ob rē, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendū.

[b] 21. octaui

SCHOLIVM.

HAEC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum; quam qui diligẽter examinare velis, inueniet sane mãcam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quædam alterius; iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus satis est, vt duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, imo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera hu proportionalia, hoc est, inter se quoque æqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, bisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla cõcedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se æqualia? Idem dicendum est de solidis similibus. Quapropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem,

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.

cadant

cadant medij proportionales multitudine æquales, nimirum vnus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter unitatem, atque C, numerum, nimirum vnus, qui sit E. Quoniam igitur unitas & E, C, numeri sunt continue proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, æque, ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 21, lib. 7. Et quoniã extremi D, F, minimorũ trium numerorũ, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; [a] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero est, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F; [b] cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; [c] metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quotues F, ipsum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. [d] Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde L, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

A, 36.	B, 48.	C, 64.		
G, 18.		H, 32.	[a] 11. octaui	
D, 9.	E, 12.	F, 16.		
L, 64.	K, 8.	I, 4.		

[b] 8. octaui

[c] 7. octaui

[d] 11. octaui

ALITER. [e] Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, [f] erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, me-

A, 36.	B, 48.	C, 64.	
H, 6.		I, 8.	
D, 3.	E, 12.	F, 4.	G, 16.

[e] 20. octaui

[f] 20. sept.

dius proportionalis H, [a] cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales; [b] inde numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

[a] 8. octaui.

A, 36. B, 48, C, 64.
H, 6. I, 8.
[b] 20. sept.
D, 6. E, 6. F, 8. G, 8.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex. E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continue proportionales ab vnitate; atque idcirco conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum inter numerum D, & vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. a nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
F, 16. H, 100.
E, 4. G, 10.
vnitas

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, aque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autem & A, cubus, ex hypothesi;

A, 64. B, 160. C, 400. D, 1000.
K, 32. M, 500.
I, 16. L, 250.
E, 8. F, 20. G, 50. H, 125.
P. 1000. O, 10. N, 5.

[c] 12. octaui

[c] cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & per-

permutando, vt A, ad E, ita D, ad H: a cadem quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, b metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quotiès H, ipsum L; ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. c Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc est L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex definitione triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P, cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.

a 8. octaui

b 7. octaui.

c 12. octaui

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratũ. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; d cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, vt A, 36, F, 48, B, 64. C, 9. E, 12, D, 16. videlicet E; e cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; f erit & B, tertius, quadratus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendũ.

d 11. octaui

e 8. octaui

f 22. octaui

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum

exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, [a] essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibita, etiam quadrati, cum primus ponitur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, [b] esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. &c. quod est absurdum. [c] Nam inter 4. & 8: & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: tum tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplae proportionis quos suis non posse cadere medium proportionalem.

a 24. octaui

b 24. octaui

c 11. octaui

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, [d] caderet inter eos medius proportionalis. [e] Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplae proportionis. quod fieri non posse, demonstratum a nobis est in scholio propos. 8. huius lib.

d 11. octaui 8. octaui

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum; sitq; A, cubus. Dico & B cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, [f] cadent autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F; [g] cadent quoque

e 12. octaui

A. 8. G, 12. H, 18. B, 27. C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

g 8. octaui

quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus; [a] erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 23. octaui

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, [b] *essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperta, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non cubus.* [b] 23. octaui

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendā quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes; [c] cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione cōtinua A, C, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo [c] 18. octaui

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.
A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

similes plani numeri rationē inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. [a] *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit unus medius proportionalis: Et est, vt C, ad D, ita A, ad B;* [b] *cadet quoque medius proportionalis inter A, & B.* [c] *Quare A, & B, plani similes sunt.*

EX hoc perspicuum est planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum: ponuntur enim non similes.

[a] 11. octaui

[b] 8. octaui

[c] 26. octaui

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, sunt solidi similes; [d] cadent inter eos duo medij proportionales, qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erūt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 2. huius

[d] 19. octaui

huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A, ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D; [a] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; [b] cadent quoque inter A, B, duo medij. [c] Sunt ergo A, & B, solidi similes.

A, 16.	B, 54.	
C, 64.	D, 216.	

[a] 12. octaui
[b] 8. octaui
[c] 21. octaui

EX his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, [d] caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medij proportionales. [e] Nam alias caderent quoque duo medij inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod hi vel sola vnitate, vel certe binario tantum inter se distent, vt in scholio prædicto traditum est; inter quos certum est, non posse intercipi duos numeros, nedum duos medios proportionales.

[d] 8. octaui

[e] 8. octaui

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus

rus primus, latera habet ſolummodo vnitatem, & ſeipſum, quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, qua conſtat non eſſe proportionalia. Quinvis vero numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit, latera tantum habet duas vnitates, & ſe ipſum. Vt hi numeri ſolidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perſpicuum autem eſt, ea non poſſe eſſe proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles, vel ſolidi ſimiles eſſe poſſunt. Si enim duo huiuſmodi numeri inter ſe primi, dicantur eſſe plani vel ſolidi ſimiles; [a] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter ſe primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter ſe primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis menſura metiri poſſit, propter duos extremos inter ſe primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in ſcholio propoſ. 24. lib. 7. demonſtrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propoſ. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod abſurdum eſt. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi.

[a] 18. & 19. octaui

EX his ſequitur, ſi duo numeri ſint plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit primus, minorem numerare maiorem. Nam ſi eum non numeraret; [b] eſſent duo propoſiti numeri inter ſe primi: ac proinde, vt proximè oſtendimus, non poſſent eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. quod abſurdum eſt, & contra hypotheſim. Verum hoc oſtenſiuè quoque ita demonſtrabimus. Sint primum duo numeri plani ſimiles A, B, ſitq; A, minor, primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum

A, 3. B, 48.
C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

A, & B, ponantur plani ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint C, vnitas, & numerus D, ipſi A, aqualis, quòd nullus alius numerus, prater C, vnitatem, & numerum D, ipſi A, aqualem, metiatur primum numerum A: ſint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt ſit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur per mutando C, ad D, vt E, ad F. [c] Igitur numerus

[b] 31. ſept.

[c] 19. ſept.

rus factus ex G, primo in F, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertiũ: Fit autem ex C, unitate in F, ipse ille numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. [a] Quare D, ipsum F, metietur: [b] Metitur autem F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F. [c] Igitur & D, id est, A, illi æqualis, eundem B, metietur, quod est propositum. [a] 4. pron. [b] 4. pron. [c] 11. pron.

HINC Perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed compositi, quod est contra hypothesim.

SINT deinde duo solidi similes A, B, sitque A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint B, C, unitates, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter unitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri

B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F, & D, ad G.

A, 3. B, 24. B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2 G, 6.

Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. [d] Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium: Fit autem ex C, unitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. [e] Quare D, ipsum G, metietur. [f] Metitur autem G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B. [g] Igitur & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum. [d] 19. sept. [e] 4. pron. [f] 4. pron. [g] 11. pron.

ATQVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & se ipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi, quod est contra hypothesim.

ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum plenorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superparticularem, vel superbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus;

erunt

erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani ſeu ſolidi non ſimiles.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter uero non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles, [a] haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato, [b] eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum. ponitur enim non quadratus.

[a] 26. octau

[b] 24. octaui

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter uero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, ut 27. & 40. Si enim eſſent ſolidi ſimiles, [c] haberent proportionem, quæ cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit, [d] eſſet & 40. cubus. quod eſt abſurdum: ponitur enim non cubus.

[c] 27. octaui

[d] 25. octaui

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicãs A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes [b], vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continue proportionales D, E, C. Itaq; cũ tres D, E, C, continue sint proportionales, sitq; primus D, quadratus, ex constructione; [d] erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

[a] 17. *septimi*.
[b] 18. *octaui*
[c] 8. *octaui*
[d] 22. *octaui*

THEO-

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratū. Dico A, B, esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratū.

A, 6. B, 54.
D, 36. C, 324.

Quoniam igitur A, multiplicās A, & B, fecit D, & C; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; [d] Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuo multiplicantes, &c. Quod demonstrandū erat.

a 17. sept.
b 11. octaui
c 8. octaui
d 20. octaui

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, se mutuo multiplicātes faciāt C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; [e] erit C, ex eis productus, quadratus.

A, 4. B, 25.
C, 100.

e 1. noni

II.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant

ciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus.
Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratū: erunt A, & B, similes plani: atque adeo inter eos unus medius cadet proportionalis, videlicet D. Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

A, 9. D, 12. B, 16. C, 144.

[a] 2. noni
[b] 18. octaui
[c] 22. octaui

III.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; sitque A, quadratus.
Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. B, 20 C, 80.

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180.

THEO-

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerũ B, Dico B, esse cubum. Sit enim A,8. C, latus cubi A; & ex C, in se fiat E,16. D,4. D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, F,32. C,2. B,64. Vnitas. seipsum multiplicãs fecit D: [a] metietur C, ipsum D, per C: [b] Metitur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata a C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipsum A, per C, Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; [e] ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipsum B, metitur per A, quòd A, se ipsum multiplicans fecerit B; [g] metitur vero & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirũ E, & F. Cũ ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales, & A, primus sit cubus, [k] erit quoque B, quartus cubus Si cubus igitur numerus se ipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

a 7. pron.
b 5. pron.
c 20. defin.
d 7. pron.
e 20. defin.
f 7. pron.
g 5. pron.
h 10. defin.
i 8. Octaui.
k 23. Octaui.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multi-

multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; [a] eritq; D, cubus. Quoniá vero A multiplicans A, & B, fecit D, & C; [b] erit vt A, ad B, ita D ad C. [c] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [d] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [e] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubū numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 3. noni.
[b] 17. sept.
[c] 12. octaui
[d] 8. octaui.
[e] 23. octaui

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, [f] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [g] erit vt A, ad B, ita D, ad C; [h] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [i] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [k] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

[f] 3. noni.
[g] 17. sept.
[h] 12. octaui
[i] 8. Octaui
[k] 23. octaui

SCHOLIVM.

EX his & hac, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I

SI cubus numerus non cubum numerum

multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; [a] *& multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur.*

A,8. B,20. C,160.

a 5. noni

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, [b] *& factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim.*

A,8. B.17. C,136.

b 4. noni

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubũ. Dico & A, cubũ esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C; erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A,8. B,64. C,512.

5. noni

SCHOLIVM.

ALIAM *demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco*

loco adducant, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: [a] Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt. [b] Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quod A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit; [c] cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales. [d] Atque adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio brevior est, & planior, vt perspicuum est.

A, 8. B, 64. C, 512.

[a] 12. octaui
[b] 17. sept.
[c] 8. octaui
[d] 23. octaui

THEOR. 7. PROPOS. 7.

7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A, sit compositus; [e] metiętur eum, præter vnitatē, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, [f] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicās fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorū D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

[e] 13. defin.
[f] 9. pron.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittētes omnes: Septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittētes omnes.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A,B,C,D,E,F,G,H,I,K,L,M. Dico tertiũ quidẽ B, ab vnitate esse quadratũ, & vnũ intermittẽtes

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. I,K.59049. L,177147. M,531441.

omnes, quales sunt D,F,H,K,M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F, I, M: septimum vero F, cubũ simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: [a] Metitur autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; [b] Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet, Quare B, quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sunt B, C, D, & est B, quadratus; [c] erit & D, quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D,E,F, cum D, sit quadratus, [d] & F, quadratus erit; Nec non & omnes vnum intermittentes.

[a] 5. pron.
[b] 9. pron.
[c] 22. octaui
[d] 22. octaui

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C; æque metietur vnitas numerũ A, & numerus B, numerũ C; [e] Metitur autem vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur; [f] atque adeo B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, seipsum multiplicans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt est ostensum; erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales sunt C,D,E,F, & est C, cubus; [g] erit & F, cubus. Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F,G,H,I, cum F, sit cubus; [h] & I, cubus erit; atque omnes semper duos intermittentes.

[e] 5. pron.
[f] 9. pron.
[g] 23. octaui
[h] 23. octaui

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirũ quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales sacrint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

HOC theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

SI ſint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono, vndecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime numeros poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quę ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes vero qui proxime ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimooctauo, vigeſimoquarto, & alijs, quę metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigeſimus quintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper vnum intermittunt poſt tertium ab vnitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab vnitate. Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem ſit quadratus, Et reli-

qui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, ſitque primum A, proximus

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint, [a] iam demõſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres continue propor

noni

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

tionales ſint A, B, C, ſitque A, quadratus, erit & C, quadratus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, cũ C, ſit quadratus, & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati ſunt. Idẽ oſtẽdemus, ſi plures numeri ſint cõtinue proportionales.

2. octaui

1. octaui

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & E, ſint cubi, [a] iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æque, metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B. [c] Metitur autem vnitas numerũ A, per ipſum-met A. Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum metietur. [f] Atque adeo cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit. [g] Quare B, cubus eſt. Quoniam vero quatuor continue proportionales ſunt A, B, C, D, eſtque A, cubus, [h] & D, cubus erit. Eademq; ratione, aſſumptis quatuor

noni

pron

pron.

noni

1. octaui

tuor deinceps proportionalibus B,C,D,E, cum B,cubus sit; [a] & E,cubus erit. Omnes igitur A,B,C,D,E,F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 23. octaui

SCHOLIVM.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt.

Vnitas. A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

quae A,B, quadrati; erit & C, quadratus, ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntq; A,C, quadrati; erit ex eodē scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo scholio propos. 10. lib. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seip-

Vnitas. A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768. F,262144.

sum multiplicans facit B; [b] erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, suntq; A, B, cubi [c] erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio, A, multiplicans C, facit D, suntq; A, C, cubi; [d] erit quoque D, cubus. Atque ita de cateris, cum ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E, & multiplicans E, procreet F, &c.

[b] 3. noni
[c] 4. noni
[d] 4. noni

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcũq; numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I,&c. & primum A, proximus vnitati nõ sit quadratus. Dico nec aliũ vllũ esse quadratũ, præter tertiũ ab vnitate, & vnũ intermittẽtes omnes, hoc est, præter B,D,F,H.&c. Sienim præter hos alius

Vnitas.A,2.B,4.C,8 D,16.E,32.F, 64. G, 128.H, 256, I,512. K,1024. L,2048. M,4096.

a 8. noni est quadratus, sit quadratus E. a Cum ergo & D, sit quadratus; sitque vt D,ad E,vel E,ad F,ita A, ad B, & conuertendo vt E,ad D,vel F,ad E, ita B,ad A; habebit B,ad A, rationem, quam quadratus numerus E,ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: b sed B, tertius ab vnitate est quadratus. c Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos, quadratum esse.

b 8. noni

c 24. octani

SED iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos

& duos intermittétes omnes, videlicet præter C, F, I. &c. Nam si præter hos alius potest esse cubus, sit D, cubus.
a Cú ergo & F, cubus sit, sitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quá tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D:
b Sed C, est cubus, cum sit quartus ab unitate. c Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod est contra hypothesim. Non igitur D, cubus est. Quod si E, credatur esse cubus; cum & C, cubus sit, sitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; existente C, cubo, d erit, & A, cubus, quod non ponitur. Non ergo E, cubus est. Quemadmodum autem ostensum est duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non esse, ita quoque eadem ratione ostendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, esse cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonstrandum erat.

a 8. noni.
b 8. noni
c 25. oct. aui
d 8. noni e
e 25. oct. aui

SCHOLIVM.

NON est autem necesse, si numerus, qui post vnitatem, non sit cubus simul, & quadratus, nullum alium esse cubum simul, & quadratum, præter septimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab unitate, aliquando vero quartus possit esse cubus simul, & quadratus, non existente primo ab vnitate cubo simul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui post vnitatem, cubus quidem, non autem simul & quadratus.

Dico B, tertium esse cubum simul & quadratum; cubum quidem, f *quod primo existente cubo, omnes cubi sint,* g *quadratum vero, quod tertius sit ab unitate.*

Vnitas.	
A.	
B, 8.	
B, 64.	

f 9. noni.
g 8. noni

SIT deinde A, post vnitatem quadratus quidem, non autem simul & cubus. Dico quartum C, esse cubũ h *simul & quadratũ; Cubum quidem, quod quartus sit ab unitate; quadratum vero,*

Vnitas.	
A, 4.	
B, 16.	
C, 64.	

h 8. noni

a 9. noni

ro, a quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

SIT postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, praeter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

b 10. noni

enim primo non existente quadrato, b nullus alius quadratus sit, praeter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo,

c 10. noni

c nullus alius sit cubus, praeter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimusextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de caeteris. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

12.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet mi-

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

norem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem

quem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim ſit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) [a] æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat oſtendendum.

[a] 20. defin.

[b] 5. prop.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt maior numerus a minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt

Vnitas. A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

ex demonſtratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, nimirum per ſe ipſum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interiecti ſunt numeri.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſe ipſum multiplicet, producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtat, quantum ipſe ab vnitate: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore diſtat, quantum minor ab vnitate, propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, [c] producatur ille, quem metitur. Ergo C, ſe ipſum multiplicans gignet F, eum F, tantum abſit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea G, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quo-

[c] 9. prop.

que

que B, multiplicans D, faciet eundem F; quòd D, ipſum F, metiatur per B, &c. & ſic de reliquis.

11. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimũ metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D. Dico quoſcunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipſum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namque non metitur ipſum A; [a] erit E, cum primus ſit, ad A, primus: hoc eſt, A, & E, inter ſe primi erunt. Metiatur E, ipſum D, per F, [b] atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipſum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in ſcholio præcedẽtis propoſ. oſtendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, ſecundo in F, tertium, [c] Quare erit vt A, primus ad E, ſecundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, ſint inter ſe primi; [d] ac proinde in ſua proportione minimi; [e] metietur æque A, ipſum F, & E, ipſum C. Metiatur E, ipſum C, per G, [f] atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex ſcholio eodem præcedentis propoſ. metitur C, per B, [g] atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, ſecundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, ſecundum, ita G, tertius

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

31. ſept.
9. pron.
19. ſept.
23. ſept.
21. ſept.
9. pron.
9. pron.
19. ſept.

tertius ad B, quartum. Quapropter cum A, & E, sint inter se primi; ac propterea in sua proportione minimi; [b] metietur æque A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsũ B, per H: ita vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, atque idcirco A, se ipsum multiplicans facit B, vt ex eodem scholio præcedentis propos. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertiũ, & ex A, medio in seipsum, [d] Quare erit vt E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter se primi sint; [e] ac proinde in sua proportione minimi; [f] æque metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesim. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

[a] 23. sept.
[b] 21. sept. [c] 9. prom.
[d] 20. sept.
[e] 23. sept. [f] 21. sept.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipsum A, metiri. Si enim nõ metiatur; [g] erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, seipsum multiplicas facit B, vt ex scholio proposit. prędentis constat, [h] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedentis propos. [i] erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem scholio præcedentis propos. [k] erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[g] 31. sept.

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

[h] 27. sept.
[i] 26. sept.
[k] 26. sept.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui

maior

maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri poteſt vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonſtratum eſt. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propoſitionis demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demõſtratione affirmatiua E, ipſum A, metiri: quod uidetur fieri non poſſe. Nam ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album, ex eo, quod non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cui tamen non abſimile quid factum hic eſt in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propoſitionibus, qua ſequũtur. Cardanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 201. gloriaturque ſe primum omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum nõ dicturum fuiſſe, ſi diligentius uim huius demonſtrationis expendiſſet, vel certe, ſi expendit, eam in memoriam reuocaſſet; quandoquidem ipſo longe prior Euclides uſus eſt hoc etiam demonſtrãdi modo, vt ex hoc theoremate 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demoſtrandi uſus eſt Theodoſius lib. 1. ſphæricorum propoſ. 12. vt ibidem monuimus.

CAETERVM ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcumque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri
12. noni *etiam omnes alios ante ipſum.* [a] *Cum enim metiatur proxi-*
11. noni *mum vnitati; hic autem omnes ſubſequentes,* [b] *quod ſemper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris;* [c] *manifeſtum eſt, quod & ille omnes metiatur.*
11. pron.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero

ro post vnitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continuè proportionales quotcúque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati sit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipsos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri potest, metiatur numerus alius E, diuersus ab A, B, C, ipsum D. Manifestum autem est, E, non esse numerum primum. Si enim primus sit, & metiatur extremum D; [a] metietur quoque ipsum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625. E —— H —— G —— F ——

[a] 12. noni

Quod est absurdum. Non igitur E, primus est, sed compositus; [b] atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium esse non posse, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; [c] metietur quoque ille alius primus eundem D, [d] atq; adeo & ipsum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod est absurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipsum E, metitur. Metiatur iam E, ipsum D, per F. Dico F, diuersum esse ab A, B, C. Si enim F, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipsum D, per aliquem ipsorum A, B, C; [e] & vicissim aliquis ipsorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipsum D, metitur,) metietur D, per E. [f] Cũ ergo quilibet ipsorũ A, B, C, metiatur D, per aliquẽ ipsorũ A, B, C; erit E, idẽ qui aliquis ipsorũ A, B, C, qđ est cõtra hypothesim. ponitur. n. E, nõ idẽ, qui aliquis ipsorũ A, B, C. Nõ igitur F, idem est, qui aliquis ipsorum A, B, C, sed diuersus. Quoniã vero E, metitur D, per F; [g] metietur vicissim F, ipsum D, per E. Non erit autem F, primus: si enim sit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Igitur F, non primus est, sed compositus; [i] atque adeo eum aliquis

[b] 33. sept.
[c] 11. pron.
[d] 12. noni
[e] 8. pron.
[f] 11. noni
[g] 8. pron.
[h] 12. noni
[i] 23. sept.

Vnitas. A,5. B,25. C,125. D,625.
E—— H—— G—— F——

aliquis numerus primus metietur. quem rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quã A, metiatur F; cum F, metiatur D, extremum; [a] metietur quoque ille alius primus eundem D; [b] atque adeo & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metitur. Iam vero quoniã E, metitur D, per F; [c] fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium; [d] Ac proinde erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum: Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & nõ primum, sed compositum, quẽ solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B; metiaturq; F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B; [e] & vicissim aliquis ipsorum A, B (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. [f] Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B. quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniã autem F, metitur C, per G; [g] metietur vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C; metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G; cum G, metiatur C, vltimum; [k] metietur quoque ille alius

[a] 31. pron. [b] 12 noni [c] 9. pron. [d] 19. sept. [e] 8. pron. [f] 11. noni. [g] 8. pron. [h] 12. noni [i] 33. sept. [k] 31. pron.

alius primus eundem C, atque adeo & ipsum A, vnitati proximum, qui primus est, quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metitur. [b] Iam vero quia C, fit ex F, in G; quod F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in scholio propos. 13. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, vt demonstratum est. Igitur & G, ipsum B, metietur, metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, vltimum (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; ostendemus similiter H, diuersum esse ab A; quemadmodum id ostensum est de numeris F, & G.

NAM si H, idem sit qui A; metiaturque G, ipsum B, per H; metietur vtique G, ipsum B, per A. [d] Et vicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, vt constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A, quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem, quem A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus. [e] Iam uero quia B, fit ex G, in H; quod G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in se ipsum. [f] Quare erit vt H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium: At A, metitur ipsum G, vt est demonstratum. Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare si A, primus est, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 12. noni

[b] 9. pron.

[c] 19. sept.

[d] 8. pron.

[e] 9. pron.

[f] 20. sept.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

N SIT

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B, C, D, metiri ipſum A. Metiatur enim, ſi fieri poteſt, primus numerus E, diuerſus à B, C, D, ipſum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; [a] multiplicans E, ipſum F, faciet A. [b] Quare ſinguli B, C, D, alterum ipſorũ E, F, metientur: non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diuerſum: ergo ipſum F, qui minor eſt quam A. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonſtrandum erat.

A
B . . C . . . D . . . . .
E —— F ——

a 9. pron.
b 32. ſepti.

SCHOLIVM

ADDIT hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium eum ipſis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoq; alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compoſitus.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primò H, primum eorum minimum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, vel certè ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit enim H, non primus, ſed compoſitus: c Et ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E.

c 2. octaui

Quoniam

Quoniam igitur, vt constat ex modo procreandi quotlibet minimos tradito in 2. propos. lib. 8. numerus A,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E. 81.
M, 8. N, 12. O. 18, P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H — F, 2. G, 3.

sit ex F, in M; metitur autem H, ipsum A; erit H, compositus, ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum; si vero ad M, qui quidem fit ex F, in I, vt cõstat ex demõstratione propos. 2. lib. 8. erit, ex scholio eiusdẽ propos. 32. li. 7. rursus H, cõpositus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propositum: si vero ad I; cum I, gignatur ex F, in se ipsum; erit H, compositus ad F, ex eodem scholio propos. 32. lib. 7. Quòd si H, sit primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

DEINDE metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, fit ex F, in N; erit vt prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositum; si vero ad N, qui quidem fit ex F, in K; erit H, eodem modo compositus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propositum; si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G; erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quòd si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex F, in O; erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum; si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum; si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se; compositus quoque erit H, ad G. Quòd si H, sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

PRAETEREA metiatur H, non primus quartum D; qui cum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum; si vero ad P, qui quidem fit ex G, in L; erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si vero ad L; cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; Si vero H, primus

sit, eum metiri ipsum G; aequalia in caeteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si vero H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si deniq; H, metiatur aliquem, praeter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quadam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex iis, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse a nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E F; Fiatque F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B.

Dico

Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex GH, HI, IK, composito.



Quoniam enim C, multiplicans A B, fecit F; metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadē ratione A D, ipsius G H; & D E, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, qua A B, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 3. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum.

[a] 2. pron.

[b] 4. pron.

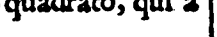
II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.

NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.



IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quam in duas secetur, vt ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.



III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & vna parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui ſub partibus continetur, numero, & illi, qui a prædicta parte effi citur, quadrato.

SIT numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum, qui ſit ex toto AB, in partem AC, æqualem eſſe & ei, qui ſub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC, æqualis ſit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc eſt, ex, AC, in AB, vel (quod idem eſt) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc eſt, ex AC, in CB, & ex D, hoc eſt, ex AC, in AC, quadrato ſcilicet ipſius AC: Quod eſt propoſitum.

D . . . .
A . . . . C . . . . . B

IIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui a partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

SIT numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem eſſe quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui ſit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipſius AB, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Eſt autem numerus, qui ſit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius AC: Item numerus,

A . . . . . C . . . . B

rus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo æqualis numero producto ex A C, in C B, vna cum quadrato ipſius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus æqualis eſt quoque numeris quadratis partium A C, C B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod eſt propoſitum.

V.

SI numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, n. AB, ſecetur in partes æquales A C, C B; & non æquales A D, D B. Dico numerum ſub partibus inæqualibus A D, D B, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij C D, (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipſius C B, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C D, D B, vnà cum plano numero bis cõprehenſo ſub C D, D B; numero vero comprehenſo ſemel ſub C D, D B, vna cũ quadrato ipſius D B, æqualis ſit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; fit, vt ſi hic numerus factus ex C B, in D B, ſumatur pro quadrato ipſius D B, vna cum numero facto ex C D, in D B; numerus quadratus ipſius C B, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius C D, vna cum reliquo numero facto ex C D, in D B, ſemel, & numero ex C B; hoc eſt, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis eſt numerus, qui fit ex toto A D, in D B. Igitur quadratus ipſius C B, æqualis erit quadrato ipſius C D, vna cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc eſt, numerus factus ex A D, in D B, vna

A ..... C ... D .. B

cum quadrato ipſius C D, æqualis erit quadrato ipſius C B. Quod eſt propoſitum.

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim AB ſecetur in partes æquales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico numerum factum ex toto AB, & adiecto BD, tanquam vno, nimirum ex AD, in adiectum BD, vna cum quadrato dimidij numeri CB, æqualem eſſe quadrato, qui fit ex CB, dimidio & adiecto BD, tanquam vno; hoc eſt, quadrato ipſius CD. Cum enim quadratus ipſius CD, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium CB, BD, vna cum numero bis comprehenſo ſub CB, BD, hoc eſt, quadratis partiũ CB, BD, vna cum numeris ſub CB, BD, & ſub AC, BD, comprehenſis; numeris autem contentis ſub CB, BD, & ſub AC, BD, & ſub BD, BD, hoc eſt, quadrato ipſius BD, æqualis ſit. ex 1. theorem. numerus factus ex AD, in BD; ſit, vt ſi huic numero factus ex AD, in BD, ſumatur pro quadrato partis BD, vna cum numeris factis ex CB, in BD, & ex AC, in BD, quadratus ipſius CD, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius CB, vna cum numero facto ex AD, in BD; hoc eſt, numerus factus ex AD, in BD, vna cum quadrato ipſius CB, æqualis ſit quadrato ipſius CD. quod eſt propoſitũ.

A . . . . C . . . . B . . D

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus

dratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, vna cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partẽ CB, vnà cum quadrato reliquæ partis AC.

A . . . . C . . . . B

Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erũt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, CB, CB, vna cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, vna cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, vna cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit di-

A . . . . C . . . . B . . . D

de



& a parti C B; cum quadratus totius A D, compoſiti ex A B, & B D, ſiue dicta parte C B, ſit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, una cum numero qui ſit bis ex A B, in B D, hoc eſt, quadratis numerorum A B, C B una cum eo, qui ſit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum A B, C B, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub A B, C B, una cum quadrato numeri A C; ſit, vt ſi pro quadratis numerorum A B, C B, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B, una cũ quadrato ipſius A C, quadratus factus ex A D, æqualis ſit numero, qui ſit quater ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

IX.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS ſit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos eſſe quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D, æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis numerorum A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis D B; erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D. At qui quadrato ipſius D B, una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales ſunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc eſt, ex A C, & C D. Igitur, ſi pro quadrato ipſius D B, vnà cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati ipſorum A C, C D, erunt qua



quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod eſt propoſitum.

X.

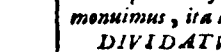
SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero compoſito ex dimidio, & adiecto.

SIT numerus AB, diuiſus in partes duas æquales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compoſiti ex toto AB, & adiecto BD, & quadratum adiecti numeri BD, vtroſque ſimul, duplos eſſe quadratorum, qui fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, compoſito ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipſius AD, aqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, vna cum numero bis, qui fit ex AC, hoc eſt, ex CB, in CD; ſi communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, vna cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipſius BD, vna cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales ſunt quadrati numerorum CB, CD, & quadrato ipſius CB, æqualis eſt quadratus ipſius AC. Igitur ſi pro quadrato ipſius BD, vna cum numero, qui fit bis ex CB, in CD, ſumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc eſt, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.

IAM

IAM vero theorema 11. lib 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, aequalis sit quadrato reliquae partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB in partem CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC. Quia igitur numeros consentus sub extremis AB, CB, aequalis est quadrato numeri medij AC;



a 20. sept. *a erit vt AB. ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB, sit aequalis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC,*

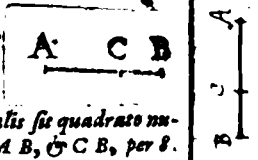
b 11. sept. *detractum; b erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, aequalis, ad AD, ex AC, residuū. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit aequalis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad*

c 11. sept. *DE, ex toto CD, detractum; c erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est, DE, ipsi AD, aequalis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC, Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, aequalis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partiū factus, aequalis sit quadrato reliquae partis. Quod est propositum.*

ALITER. Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus,

qui

qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato ipſius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, una cum quadrato ipſius A C, quadratus; quippe cum æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur ſub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, ut conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur in C, vt is qui prodúcitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.



VERVM hoc idem clarius demonſtrabimus ad propoſ. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habẽtium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erũt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habẽtium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe, nimirũ A, B, ſimul ad C; & B, C ſimul ad A; & A, C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35 lib. 7. manifeſtũ eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib 8. D, ſeipſũ multiplicante facere A; multiplicante vero ipſum E, facere B; atq; E, ſeipſum multiplicante facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt; [b] erit & vterq; D, E, ſimul ad quẽlibet illorũ primus. Itaq; cũ tã cõpoſitus ex D, E,

A, 9 B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

a 24. ſept.
b 30. ſept.

a 26. sept. D, E, quam ipsę D, ad E, primus sit; a erit quoq; numerus factus ex D, E, tanquam vno, in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in D, æqualis est per 3. theorema scholij præcedētis, & numero A, facto ex D, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compositi, primi sunt ad E;

b 27. sept. b Ac proinde & ad C, qui factus est ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

c 30. sept. DEINDE quia, vt prius, c vterque D, E, simul primus est ad quemlibet ipsorū D, E; efficitur, (cum tam cō positus ex D, E, quam ipse E, primus sit ad D,) d numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum esse ad D: Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis est per 3. theorem. scholij antecedētis, & numero C, facto ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, simul cōpositi, ad D, primi sunt,

d 26. sept. B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

e 27. sept. e atq; adeo & ad ipsum A, qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul compositi.

f 30. sept. POSTREMO quia, vt prius, f vterque D, & E, simul ad quemlibet ipsorum primus est; atq; adeo è contrario, quilibet ipsorū D, E, primus est ad compositum ex D, E,

g 26. sept. h 27. sept. g erit quoq; qui fit ex D, in E, ad compositū ex D, E, primus; h Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eū qui fit ex D, E, tanquā vno, in se, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in se, æqualis est, per 4. theorem. ante cedētis scholij, eis qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis. Quoniā ergo duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atq; is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquē ipsorū, ni mirū ad eū, qui fit ex D, in E, vt ostensū est,

f 30. sept. f Erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiūt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videlicet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atq; is, qui

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eũ qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostẽsum est: erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum. 230. sept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumãturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autẽ E, aliquẽ eorũ, nimirũ D metietur quoq; E, alterum ipsorum F, G, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius libri. Atque idcirco ipsum E, & alterũ ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E, & E,

A, 8. B, 12. C, 18. D 27.
E --- F, 2. G, 3. H ---

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E ---- F, 2. G, 3. H, ----

& E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; [a] metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib. 8. [b] metietur quoque H, medios B, C; [c] ac propterea & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totū compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, vt demonstratum est; [d] metietur quoque ipsum H, reliquum A. Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. [e] Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.

a 11. pron.
b 11. pron.
c 10 pron.
d 12. pron.
e 3. octavi

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C; metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui non sit ex scholio propos. 14 huius lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D; [f] metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C, [g] metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum, ex A, B, D, & detractum B, [h] metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. [i] metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. [k] Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. [l] Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi. Quod est propositum.

f 11. pron.
g 11. pron.
h 12. pron.
i 11. pron.
k 12. pron.
l 3. octavi

NON aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B, primos: nec non, & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter se fuerint

rint; Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

SINT primi inter ſe A, & B. Dico non eſſe vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi ſunt inter ſe, [a] atque adeo in ſua proportione minimi; [b] ipſi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes, nimirum A, ipſum B, & B, ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, B, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . .
B . . . . . [a] 23. ſept.
C ——— [b] 21. ſept.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint inter ſe primi, [c] minimi in ſua proportione. [d] Igitur æque metientur ipſos B, & E; nimirum A, ipſum

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E ——
[c] 23. ſept.
[d] 21. ſept.

IAM vero theorema 11. lib 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, aqualis sit quadrato reliqua partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB in partem CB, aqualis sit quadrato reliqua partis AC. Quia igitur numeros consentus sub extremis AB, CB, aqualis est quadrato numeri medij AC;



20. sept. a erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB, sit aqualis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC,

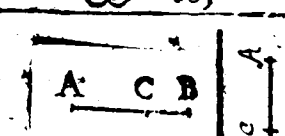
11. sept. detractum; b erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, GD, ipsi CB, aqualis, ad AD, ex AC, residuū. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit aqualis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad

11. sept. DE, ex toto CD, detractum; c erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est, DE, ipsi AD, aqualis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC, Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, aqualis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partiū factus, aqualis sit quadrato reliqua partis. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, aqualis sit quadrato reliqua partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus,

quo

qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato ipsius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Est autem numerus contentus quater sub A B, C B, una cum quadrato ipsius A C, quadratus; quippe cum aqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur sub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, ut constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, ut is qui producitur ex A B, in C B, aqualis sit quadrato ipsius A C. Quod est propositum.



VERVM hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habentium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erũt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habẽtium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirũ A, B, simul ad C; & B, C simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35 lib. 7. manifestũ est ex demonstratione propos. 2. lib 8. D, seipsũ multiplicantẽ facere A; multiplicantẽ vero ipsum E, facere B; atq; E, seipsum multiplicantẽ facere C. [a] Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; [b] erit & vterq; D, E, simul ad quẽlibet illorũ primus, itaq; cũ tã cõpositus ex D, E,

A 9 B 12. C 16. D 3. E 4.

[a] 24. sept. [b] 30. sept.

D,E, quam ipſe D, ad E, primus ſit; [a] erit quoq; numerus factus ex D,E, tanquam vno, in D, ad eundem E, primus: Qui autem fit ex D,E, tanquam vno, in D, æqualis eſt per 3. theorema ſcholij præcedẽtis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſiti, primi ſunt ad E; [b] Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

[a] 26. ſepti.

[b] 27. ſept.

DEINDE quia, vt prius, [c] vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorũ D, E; efficitur, (cum tam cõpoſitus ex D, E, quam ipſe E, primus ſit ad D,) numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem fit ex D,E, tanquam vno, in E, æqualis eſt per 3. theorem. ſcholij antecedẽtis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, ſimul cõpoſiti, ad D, primi ſunt, [d] atq; adeo & ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

[c] 30. ſept.

[a] 26. ſept.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

[d] 27. ſept.

POSTREMO quia, vt prius, [e] vterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt; atq; adeo è contrario, quilibet ipſorũ D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E, [f] erit quoq; qui fit ex D, in E, ad compoſitũ ex D, E, primus; [g] Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eũ qui fit ex D, E, tanquã vno, in ſe, primus erit. Qui autem fit ex D, E, tanquam vno, in ſe, æqualis eſt, per 4. theorem. antecedẽtis ſcholij, eis qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex D, in E, bis. Quoniã ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atq; is qui fit ex D, in E, primi ſunt ad aliquẽ ipſorũ, nimirũ ad eũ, qui fit ex D, in E, vt oſtenſũ eſt, [h] Erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex ijs, qui fiũt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D, in E, inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atq; is, qui

[e] 30. ſept.

[f] 26. ſept.

[g] 27. ſept.

[h] 30. ſept.

is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eũ qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostẽsum est; erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum. 30. sept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumãturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autẽ E, aliquẽ eorũ, nimirũ D metietur quoq; E, alterum ipsorum F, G, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius libri. Atque idcirco ipsum E, & alterũ ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E;

A, 8. B, 12. C, 18. D 27.
E --- F, 2. G, 3. H ---

& E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipſum D; E —— F, 2. G, 3. H, —— [a] metietur quoque H, eundem compoſitum ex A, B, C, & ipſum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipſorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propoſ. 2 lib. 8. [b] metietur quoque H, medios B, C; ac propterea & compoſitum ex B, C: itaque cum H, metiatur totũ compoſitum ex A, B, C, & detractum compoſitum ex B, C, ut demonſtrauimus; [d] metietur quoque ipſum H, reliquum A: Metiebatur autem & ipſum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, [e] inter ſe compoſiti. [f] Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur compoſitus inter ſe ſunt compoſitus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter ſe primi.

A, 8. B, 12. C. 18. D, 27. E —— F, 2. G, 3. H, ——

[a] 11. pron.

[b] 11. pron.

[c] 10 pron.

[d] 12. pron.

[e] 3. octauæ.

RVRSVS, ſi A, B, D, ſimul compoſiti non ſunt primi ad C; metietur eos [g] vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui nullus erit ex ſcholio propoſ. 14 huius lib. vel metietur alterum ipſorum F, G, vel compoſitus erit ad alterum ipſorum F, G. Metiatur ergo H, ipſum E, & alterum ipſorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compoſitum ex A, B, D; [i] metietur etiam H, eundem compoſitum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipſorum F, G, qui metiuntur, per coroll. 3. propoſ. 2. lib. 8. [k] medios B, C, [l] metietur quoque H, ipſos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compoſitum, ex A, B, D, & detractum B, [m] metietur quoque H, compoſitum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipſorum F, G, quorum F, ipſum A, & G, ipſum D, metitur, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. [n] metietur etiam H, alterum ipſorum A, D. [o] Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter ſe compoſiti. [p] Sed & primi inter ſe ſunt. Quod fieri non poteſt. Non igitur A, B, D, ſimul compoſiti, ad C, compoſiti ſunt. Ergo primi. Quod eſt propoſitum.

[g] 11. pron.

[i] 11. pron.

[k] 12. pron.

[l] 11. pron.

[m] 12. pron.

[n] 13. octauæ.

NON aliter oſtendemus & A, C, D, compoſitos, eſſe ad B, primos; nec non, & B, C, D, ſimul ad A. Eademque ratio eſt de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter ſe fuerint

rint; Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

SINT primi inter ſe A, & B. Dico non eſſe vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita B, ad alium numerum ad C. Quoniam igitur A, & B, primi ſunt inter ſe, [a] atque adeo in ſua proportione minimi; [b] ipſi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes, numerum A, ipſum B, & B, ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, B, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A.....
B.....
C ———

[a] 23. ſept.
[b] 21. ſept.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint inter ſe primi, [c] minimi in ſua proportione. [d] Igitur æque metientur ipſos B, & E; nimirum A,

A. 8. B. 12. C. 18. D. 27. E.——

[c] 23. ſept.
[d] 21. ſept.

A,8. B,12. C,18. D,27. E---- ipſum B,& D,ipſum E. At qui eſt vt A, ad B,ita B,ad C: Ergo cum A,metiatur ipſum B; & B, ipſum C, metietur; [a] atque ob id & A, ipſum C, metietur. Et quia eſt vt B, ad C, ita C, ad D; metitur autem B, ipſum C; metietur & C, ipſum D. Quare A, metiens ipſum C, [b] metietur quoque ipſum D. Metitur vero & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, D, inter ſe primos. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A,ad B,ita D,ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales,&c. Quod erat oſtendendum.

[a] 11. pron.

[b] 11. pron.

19. PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri ſint A,& B,oporteatque conſiderare, an inueniri poſsit tertius ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter ſe ſunt, aut non. Si ſunt inter ſe primi [c] perſpicuum eſt ex demonſtratis, non poſſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si vero non ſunt A,& B,inter ſe primi; multiplicans B, ſe ipſum faciat C. Aut igitur A, metitur ipſum C, aut non. Metiatur primum A,ipſum C,per D. Dico ipſis A, B, inueniri poſſe tertium proportionalem, immo ipſum D, eſſe tertium proportionalem. Cum enim A, metiatur C, per D, [d] fiet C, ex A, in D: Fit autē ex conſtructione, idem C, ex B, in ſe ipſum. Igitur, qui continetur ſub extremis A, D, æqualis eſt ei, qui ex medio B, deſcribitur; [e] Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus eſt tertius proportionalis ipſis A, B.

A,4. B,7.

[c] 16. noni

A,4. B,6. D,9. C,36.

[d] 9. pron.

[e] 20. ſept.

SED

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, nō posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D, ita vt sit A, ad B, quemadmodum A, 6. B, 4. D —— C, 16. B, ad D Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita B, ad D; [a] erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; [b] metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

[a] 20. sept.

[b] 7. pron.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216. Multiplicans B, ipsum C, faciat D. Aut A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72. igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, immo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E, [c] fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio cōtinetur; [d] Ac propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuētus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

[c] 9. pron.

[d] 19. sept.

SED iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalẽ. Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus proportionalis E; ita vt ſit quemadmodum A, ad A, 4. B, 6. C, 9. E—— D, 54. B, ita C, ad E. Quia ergo A, 3. B, 4. C, 10. E—— D, 40. quatuor numeri A, B, C, E, proportionales ſunt, [a] erit numerus contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium, hoc eſt, ipſi D. Quare cum D, fiat ex A, in E; [b] metietur A, ipſum D, per E: ſed & ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inueniri poſſit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis conſiderauimus, an poſſit, &c. Quod erat faciendũ.

a 19. ſept.

b 7. pron.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi diuidatur per primũ, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. ſi quadratus numerus ſecundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis 21 $\frac{1}{3}$. hoc modo. 3. 8. 21 $\frac{1}{3}$. Quia enim diuiſis 64. per 3. fit numerus 21 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diuiſus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 $\frac{1}{3}$. per diuiſorem 3. vt ad 4. ſiu. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus ſit ex medio numero 8. in ſe ipſum, & extremis 3. & 21 $\frac{1}{3}$. continue proportionales.

c 20. ſept.

DATIS autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertiũ genitus diuidatur per primum 9. reperietur quartus proportionalis 13 $\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$.

Cum

Cum enim diuisis 120. per 9. fiat 13 $\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 120. ex multiplicatione Quotientis 13 $\frac{1}{3}$. per diuisorem 9. ex 15. qua in defin. 15. lib. 7. scripsimus. Fit autè idem numerus diuisus ex secundo in tertium. [a] *Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. proportionales sunt.* [a] 19. sept.

EX his facile cognoscemus, propositis quotcunque numeris continuè proportionalibus, an possit ipsis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, si ipsis alius potest inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.

THEON, & qui illum sequuntur, inter quos etiam est Federicus commandinus, quatuor membris hoc problema absoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; Aut non deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi primi inter se; Aut deinceps quidem proportionales, sed eorum extremi non primi inter se; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter se primi. Vbi mirari satis non possum, quonam modo diligentissimi Euclidis interpretes, & in aliis quidè demonstrationibus vigilantissimi, in secundo membro huius problematis demonstrando dormitarint, & quasi sui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, si tres numeri dati non sint deinceps proportionales, sed eorum extremi inter se primi, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falsum est, & demonstratio, qua id ipsum comprobare nituntur, vitiosa. Nam falsitas huius rei perspicue in his numeris non continuè proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. sunt inter se primi, & nihilominus eis adiungi potest quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, esse vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio sit subdupla? Idem videri potest in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium sunt inter se primi, cum tamen ipsis adiungatur posterior quartus proportionalis. Falsum ergo est, illis dari non posse quartum proportionalem. Quod autem vitiosa sit eorum demonstratio, qua hoc probare contendunt, perspicuum fiet, si demonstrationem ipsam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim potest inueniri, sit ille D, ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex aequo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi, [a] & ob id minimi. [b] Igitur metientur aequè ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At vero & A, se ipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.

a 23. sept.
b 21. sept.

HÆC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C: cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendant, liquido constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atque probatum assumant; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertius. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D; proportionales, non tamen deinceps, sintque A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita

ita D, ad E. Est ergo ex æquo, vt A, ad C, ita B, ad C, ita C, ad E; Atque adeo vt ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

PRIMVM vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi; manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postrema eandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus.

[a] 17. noni

THEOR. 18. PROPOS. 20. 21.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorũ numerorũ.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. Sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C.

[b] 38. sept.

A, 2. B, 3. C, 5.
30 1
D ---------- E . F

SED iam non sit primus D F. Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorũ A, B, C, eundẽ esse. Si namque G, sit idẽ, qui vnus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundẽ D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, metietur quoq; E F, reliquũ, numerus vnitatẽ. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C; Ac proinde

[c] 33. sept.

A, 3. B, 5. C, 7.
105 1
D ---------- E. F
53
G ------

[d] 11. prop.

inde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures propo sita multitudine primorum numerorũ A, B, C. Eademq; via plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi:

PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet D F, si primus est, vel certe G, qui ipsum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

22. ## THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo

A.....B.....C.....D
E....F,..G....

E, dimidia pars ipsius A B, & F, ipsius B C, & G, ipsius C D. Quoniam igitur est vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod semper sit proportio dupla:) erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G,

12. sept.

E,F,G simul. Est autem AB, ipsius E, duplus Igitur & totus A D, compositi ex E,F,G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par A B, B C, C D, D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cum enim A B, BC, CD, DE, sint impares; differet A ... B ..... C ..... D ..... E quilibet vnitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [a] Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. [b] Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 22. noni

[b] 22. noni

THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorum multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata

ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. Est autē & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. [b] Igitur & A E, compositus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . . B . . . C . . . . . E . D

[a] 22. noni

[b] 21. noni

SCHOLIVM

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam empta vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate. Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.

[c] 21. noni

25.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem esse. Aut enim C B, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor. Sit primū dimidia pars. Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A . . . . . C . . . . . B

SED iam C B, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit D B, dimidia pars ipsius A B; & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cum sit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium;

midiũ; erit permutando vt AB, ad CB, ita DE, EB, & diuidendo vt AC, ad DE, ita CB, ad EB: Rursusque permutando, vt AC, ad DE, ita CB, ad EB. Atqui CB, ipsius EB, duplus est: Igitur & AC, ipsius DE, duplus erit. Ac proinde AC, cum bifariam diuidatur, (quod DE, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A ..... D ... C .. E .. B

THEOR. 23. PROPOS. 25. 26.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem esse. Detracta enim vnitate CD, ex CB, reliquus sit numerus DB. Quia igitur AB, & totus AB, ponitur par; erit & reliquus AD, par. Demptis ergo vnitate CD, reliquus AC, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A ..... C .. D ... B

[a] 24. noni

THEOR. 24. PROPOS. 26. 27.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquum AC, parem esse.
Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CB; erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par auferetur CD; erit & reliquus AC, par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demonstrandum.

A .. C ..... D. B

[b] 24. noni

THEOR.

28. **THEOR. 25. PROPOS. 27.**

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

EX impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim A D, vnitate ex impare A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus DC, par quoq; erit; Ac proinde addita vnitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 24. noni

A . D . . . . C . . . . . B

29. **THEOR. 26. PROPOS. 28.**

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cum B, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . B . . . .

C . . . . . B

b 21. noni

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, aqualibus, quot in A, continentur unitates, &c.

A . . . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: ut patet, si pares A, & B, ponantur aquales.

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem: Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C Dico C, impare esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirū æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A . . . B . . . . . .
C . . . . . .

[a] 23. noni

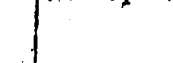
COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: ut constat, si impares A, & B, ponantur æquales.

EX

EX CAMPANO.

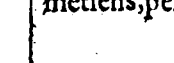
NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.



METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [a] erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.

[a] 29. noni

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

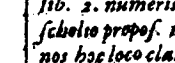


METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [b] erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

[b] 28. noni

SCHOLIVM.

EX his clarissimè quoque demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimus & nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus AB, in partes AC, CB, ita ut numerus ex AB, in CB, factus, æqualis sit quadrato reliquæ partis AC. Aut igitur utraque pars AC, CB, impar est, aut maior AC, impar, & minor CB, par; aut contra, maior AC, par, & minor CB, impar; aut denique utraque pars AC, CB, par. Sit primum utraque pars AC, CB, impar, [c] ideoque totus numerus AB, par. [d] Igitur qui fit ex AB, in CB, par est: qui vero ex AC, in se fit, impar est, ex Corall. huius propos. 29. Cum ergo numerus ex AB, in CB,



[c] 22. noni
[d] 28 noni.

C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non potest.

DEINDE sit A C, impar, & C B, par, ideoque ex scholio propos. 23 huius lib. totus A B, impar. [a] *Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari æqualis. quod est absurdum.* [a] 28. noni

TERTIO sit A C, par, & C B, impar; ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [b] *Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari æqualis. quod absurdum est.* [b] 29. noni

QVARTO sit vtraque pars A C, C B, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad C B; [c] *erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus D E, ad D:* [d] *Est autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex A B, in C B, æqualis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoque vt totus D E, ad D, ita D, ad E,* [e] *ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, æqualis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D E, factus est in partes D, E, quarum vel vtraque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto D E, in partem E, æqualis sit quadrato alterius partis D. quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero A B, quando vtraque pars A C, C B, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum.*

[c] 34. sept.

[d] 20. sept.

[e] 20. sept.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 33.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiũ quoq; ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsũ B, per C. Erit ergo,

ergo, ex ijs, quæ in antecedente propoſ. ex Campano demonſtrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiã
[a] 8. pron. partem habebit. Itaque cum A metiatur B. per C, metietur quoque C, ipſum B, per A;

A... C....
B .....

Ac proinde C, pars erit ipſius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionẽ lib. 7. docuimus. Quoniam vero eſt vt C, ad dimidium ſui, ita B, ad dimidium ſui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipſius C, ad dimidiam partem ipſius B. Eſt autem C, pars ipſius B, denominata ab A, vt oſtenſum eſt; erit & dimidium ipſius C, dimidij
[b] 40. ſept. ipſius B, pars ab eodem A, denominata. [b] Ac propterea A, dimidium ipſius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendũ.

34. THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit; & ad illius duplum primus erit,

IMPAR numerus A, primus ſit ad numerum B, cuius duplus ſit C. Dico A, ad C, quoque primum eſſe. Si enim A, C, non ſunt inter ſe primi; metietur eos aliquis numerus, qui ſit D; qui

A . . . . . B . . . . . .
C . . . . . , D ——

neceſſario impar erit. Nã ſi ſit par, cũ metiatur imparem A; [c] erit A. factus
[c] 28. noni ex D, pari in eum numerũ, per quem metitur, par. Quod eſt abſurdum ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metitur; (eſt enim C, par, eum dimidium habeat B.) [d] metietur quoque numerum B, eius dimidium:
[d] 30. noni Metitur autem & A. Igitur D, ipſos A, B, primos inter ſe metitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt. Ergo primus. Quapropter ſi impar numerus ad aliquem numerum primus ſit, &c. Quod erat oſtendendum.

COROL.

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, [a] primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c. [a] 31. noni

THEOR. 30. PROPOS. 32. 35.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tãtum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita vnitate, cum A, sit binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [b] Quare A, quilibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, vtpote dupli a binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E. 32.

[b] 11. noni

QVOD autem ijdem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continue proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirũ binarius; [c] nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E; qui

[c] 13. noni

qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis facile colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum.

Sint. n. A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hic

A, 4. B, 8. C, 16. D, 32. E, 64. F, 128.
I ---- H ---- G -----

demonstratis omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, prater eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeò si ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantũ inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sunt a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autẽ, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, prater eos, qui a binario sunt dupli.

36. THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT

HABEAT numerus A: dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniã A . . . . . A, dimidium habet imparem; metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsius A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par. Quare cum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur sit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartũ æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium, [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par impa rem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 9. prom.

A . . . . . B . . . . . C . . D —— E ——

[b] 19. sept.

SCHOLIVM.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantum.

Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.	*Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tãtum, constat ex hac propositione: quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demõstratur, omnes pares, qui nec a binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo*
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.	

nullus alius par habeat dimidium imparem, præter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, præter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparem.

37. THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neque sit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet.

A . . . . . Nam cum dimidium habeat parem, metietur eum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A. sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, [a] cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque a binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 29. noni

SCHO-

SCHOLIVM.

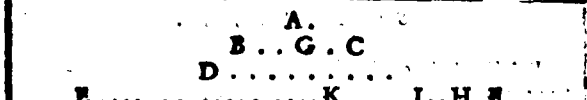
FACILE ex hic inuenietur omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia vero est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque



est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, & H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc est, vt B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

* 12. sept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate venimus in notitiam summæ quotcunque numerorum cõtinue proportionalium, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & vltimo dematur, fiatque vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad aliũ: Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijcia tur vltimus, habebitur tota summa. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt, excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirũ vnitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summã omniũ, excepto vltimo, si secũdus numerus 1. multiplicetur per tertiũ 2186. fiet numerus 2186 qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summæ inuentæ 1093. procreabitur summa omnium 3280.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

THEOR.

THEOR. 34. PROPOS. 36. 39.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A,B,C,D, *dupli*, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, esse numerũ perfe

Vnitas. A,1. B,4. C,8. D,16.
E,31. G —— 62. H,124. I,248. F —— 496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O —— P ——

ctum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nimirum E, G, H, I. Quia igitur A, B, C, D, eandem rationem habent, quam E, G, H, I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [a] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [b] ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. [c] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (Cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui

[a] 19. sept.
[b] 7. prop.
[c] 35. nono

compositus eidem E, per constructionem, est æqualis) erit compositus ex L N, nimirum ipse F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cum vni-

Vnitas. A, 3. B, 4. C, 8. D. 16.
E, 31. G ——— 62. H, 124. I, 248. F ——— 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N. 465.
O ——— P ———

tas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (Cum enim F, factus sit ex E, in D; [a] metietur D, ipsum F; [b] atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, [c] qui ipsum D, metiuntur. Rursus cum I, ipsum F, metiatur, vt ostensum est, [d] metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, [e] qui ipsum I. propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, vt mox ostendemus; Erunt unitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione, perfectus.

[a] 7. pron.
[b] 11. pron.
[c] 11. nonæ
[d] 11. pron.
[e] 11. nonæ

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F, per P; [f] atque adeo F, fiat ex O, in P. Sed & idem F, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus sit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium; [g] ac propterea est vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cũ A, B, C, D, ab unitate sint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [h] vltimum D, nullus alius, præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipsum P, metietur. Cum ergo E, primus sit, [k] erunt E, & P, inter se primi; [l] ideoq; in sua proportione minimi: [m] Ac proinde æque metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. [n] Nullus vero alius præter A, B, C, ipsum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorũ A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; [o] Ac proinde idem numerus

[f] 9. pron.
[g] 19. sept.
[h] 13. octaui
[i] 31. sept.
[k] 23. sept.
[l] 21. sept.
[m] 23. octa.
[n] 19. sept.

rus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E, ſextum. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem eſt, qui O. Quod eſt abſurdum. ponitur enim O, diuerſus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipſum F, metitur, ſed ipſum ſoli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonſtrandum. * 19. ſept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus ſimul ſumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipſi æquales ſunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in vnam ſummã colligantur, donec compoſitus ſit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorũ, perfectus. Quod ſi ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, ſumantur tot continue dupli (ipſo primo etiam computato) quot ſunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipſa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demonſtratione theorematis, & facile ex ſubiectis exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1. 2. primus eſt; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 3. Item, quia cõpoſitus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus eſt: idcirco 28. factus ex 7. in 4. eſt perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. hoc eſt, 15. non eſt primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus eſt; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc loco demonſtrare proprietates quaſdam propor-

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048.
3 7 31 127 2047
perfecti 6 28 496 8128 sit numerus primus 2096128

proportionalitatis Geometrica, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, expositimus. hinc exordientes.

I

QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium; a *erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum.*

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

a 19. sept.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotiens F, G, H, I. Dico esse, vt B, ad C, ita G, ad F: Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proxime demonstrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Itē cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita

A, 48. B, 3. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

ita H, ad G: Item cum duo D, E, dividentes A, faciant M, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse. Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

A, 15.
B, 1. C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15, G, 7 1/2, H, 3 3/4, I, 1 7/8.

IIII.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum summa D: Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, vt D, ad A, B, C, singillatim, ita H, ad E, F, G,

A, 3. B, 6. C, 12.
D, 21.
E, 6. F, 12. G, 24.
H, 42.

E, F, G, ſigillatim. Cum enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt, H, ad G. quod eſt propoſitum.

QVIA igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F. quod eſt propoſitum.

DENIQVE quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdē proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM, vt in in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſq; proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quaq; per ſuum, diuidatur. Eademq; ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſ.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes;

Et

Et horum ſecundorum Quotiẽtum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitũ: procreabuntur alternis ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT cõtinue proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorũ ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotiẽtes F, G, H, I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandẽ continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A, B, C, D: Et Quotientes L, M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quã numeri A, B, C, D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cũ ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L. &c. quod eſt propoſitum.

A, 1.	*B*, 2.	*C*, 4.	*D*, 8	
	E. 15.			
F, 15.	*G*, $7\frac{1}{2}$.	*H*, $3\frac{3}{4}$.	*I*, $1\frac{7}{8}$.	
	K, $25\frac{1}{8}$.			
L, $1\frac{7}{8}$.	*M*, $3\frac{3}{4}$.	*N*, $7\frac{1}{2}$.	*O*, 15.	

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorũ ab extremis æqualiter diſtantium, vel deniq; (ſi Quotientum numerus

merus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in se.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continuè proportionales A, B, C, D, E, F, quorum summa G, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum summa O. Dico summa O, aequalē esse numerū qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, sunt continuè proportionales cōuerso ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, vt I, ad H. [a] *Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M. Eademq; ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. summa O, diuisa per H, I, K, L, M, N, producit eosdem Quotientes conuerso ordine, hoc est, summa O, diuisa per H, facit Quotientem N; producetur summa O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 32. G, 63.
H, 63. I, 31 1/2. K, 15 3/4. L, 7 7/8. M, 3 15/16. N, 1 31/32. O, 124 1/4.

[a] 19. sept.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continuè proportionales A, B, C, D, E, quorū summa F, per ipsos sigillatim diuisa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum summa M. Dico summa M, aequalem esse numerum genitum ex G, in L; & ex H, in K; & ex I, in seipsum. Quod enim aequalis sit ei, qui fit ex G, in L. & ex H, in K, demonstrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, cōtinuè proportionales sunt, [b] *erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, aequalis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propos.*

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 31.
G, 31. H, 15 1/2. I, 7 3/4. K, 3 7/8. L, 1 15/16. M, 60 1/16.

[b] 20. sept.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, siue radix, est medius terminus.

ITAQVE

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri continue proportionales in data proportione, quorũ summa aqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis aqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur; erunt Quotientes quasiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est. Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumq; summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quasiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sanè est, posse reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa aqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis aqualiter distant, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa aqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunque, eorumq; summam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quasitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa aqualis est numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa aqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione sesquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque summa 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{6}$. sunt numeri quasiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quàm numerus ex multiplicatione eorum productus, est $4\frac{1}{10}$.

MINV-

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum

DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT dua minutiæ A B, C B, eundem habentes denominatorem, & numerator C, sit vnitas. Dico ita esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est numerator A, ad numeratorem C. Quoties enim vnitas C, continetur in A, toties minutia C B, in minutia A B, includitur; propterea quòd minutia A B, dividitur in tot minutias minutiæ C B, aquales, quot vnitates sunt in A, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem C, & denominatorem B. Igitur eadem pars est vnitas C, numeri A, qua minutia C B, minutia A B; ac proinde est, vt vnitas C, ad A, ita minutia C B, ad minutiam A B: Et conuertendo, ita A, ad C, numerator ad numeratorem, vt minutia A B, ad minutiam C B. quod est propositum.

A, 6. C, 1.
B, 11. B, 11.

20. defin.

QVONIAM vero minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quòd falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibuslibet etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, verum esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT

SINT ergo data minutia $\frac{6}{11}$. *&* $\frac{1}{11}$. *particula, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius* $\frac{1}{11}$. *est 4. &* $\frac{6}{11}$. *sunt 24. perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.*

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniversum de quibuscunq; duabus minutijs eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quacunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia A B, ad suum integrũ. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquabitur; quippe qua tot particulas integri continent, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum continent. Quoniã igitur est, vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum. quod est propositum.

A, 3.	C, 1.	D, 5.	
B, 5.	B, 5.	B, 5.	

ALITER. Sit primum data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quòd tot minutiæ ipsi A B, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vnitas

A, 1.	C, 1.	
B, 5.	C, 30.	

a 1. huius

[a] 20. defin. tas A, numeri B, qua minutia A B, integri C. [a] Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod est propositum.

DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas A, 3. D, 1. C, 1. & denominator idem B, qui minutia B 5. B, 5. C, 30. [b] A B. [b] Et quia est, vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proxime demonstrauimus; erit ex aquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod est propositum.

[b] 1. huius

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$ sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$ numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$ numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT quælibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. [c] Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad suum integrum C, erit permutando, vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrii C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cum enim æque metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 3. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore.) erit quoque minutia A B, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties

[c] 2. huius

A, 3. C, 1. B, 5. C, 30.

quoties eſt vnitas in numeratore A.) eadem pars a denominatore B, denominata, quod eſt propoſitum.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$ eſſe huius integri 30. cuius $\frac{2}{5}$ ſunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc eſt, valet 90. & denominator 5. valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{2}{5}$ ſumitur reſpectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque.) Iccirco conſtat, 18. eſſe quintam partem numeratoris, hoc eſt, trium vnitatum, quarum quodlibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquã, a denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt, quinque vnitatum, quarum quodlibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, a denominatore 5. denominata.

IIII.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propoſitione oſtenſum eſt de duabus minutijs, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonſtratur hic de quibuſuis minutijs. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, vt eſt A, ad C, numerator ad numeratorem. [a] *Quia enim eſt, vt A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B; (Nam* [b] *cum ſit, vt C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B. quod eſt propoſitum.*

A, 6. C, 3.
B, 7. B, 7.

[a] 2. huius
[b] 3. huius

DATAE minutiae $\frac{5}{7}$. $\frac{4}{7}$. sint huius integri 28. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 24 & $\frac{3}{7}$. sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3.

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

SINT dua minutiae AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CD, vt est F, ad G. Fiat enim H, ex D, in B. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H; a erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B, b ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H; c erit vt C, ad D, ita G, ad H. Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D. ad C, ita est integrum ad minutiam CD. (Nam d cum sit, vt C, ad D, ita minutia CD, ad integrum, erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam CD.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam CD. Ex aequo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia AB, ad minutiam CD. quod est propositum.

a 18. sept.
b 2. huius
c 18. sept.
d 2. huius

F. AB.
H. Integrum.
G. CD.

SI dua minutiae $\frac{3}{5}$. $\frac{4}{5}$. sint particulae numeri 30. erunt dua tertiae eius, 20. at quatuor quintae eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri proueniunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.

ITAQVE si productus numerus F, aequalis fuerit numero producto G, erit quoque minutia AB, minutiae CD, aequalis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem pro-

proportionem F, ad G, & minutia ad minutiam. Atque hæc est demonstratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoscendum, vtra duarum minutiarum maior sit.

VI.

INTEGRVM ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter vero ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT duæ minutiæ A B, C D. Et ex B, in D, fiat H: ut ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita esse integrum ad summam minutiarum A B, C D, vt est H, ad summam numerorum F, G. Quoniam enim est, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad G; eris componendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita summa numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita est G, ad H, (Nam [b] vt minutia C D, ad ad integrum, ita est C, ad D. [c] Et vt C, ad D, ita est G, ad H: propterea quòd C, D, ipsam B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita summa numerorum F, G, ad H. Et componendo, vt integrum ad summam minutiarum A B, C D, ita H, ad summam numerorum F, G. quod est propositum.

F, 10.	G, 12.	
A, 2.	C, 4.	
B 5.	D, 3.	[a] 5. huius
H, 15.		

AB,	CD.	F, G.
	CD.	G.
Integrum.		H.

[b] 2. huius
[c] 18. sept.

SINT rursus duæ minutiæ $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{3}{4}$. sunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiusdem 24. ac proinde summa minutiarum 44. Vbi vides, ita esse integrum 30. ad hanc

summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad 32. summam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam AC, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [a] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt aut D, ad E,* [b] *ita est minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod est propositum.*

D, 105. E, 35. A, 5. B, 7. × A, 5. C, 21.

[a] 17. sept.
[b] 5. huius

DVÆ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. sunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiusdem 10. Manifestum autē est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior

maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD, sitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [a] *Quoniam enim est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ AB, CD. quod est propositum.* A, 3. / B, 4. C, 9. / D, 12. [a] 2. huius

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico esse, vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. [b] *Est autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod est propositum.* [b] 2. huius

DEINDE sit maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico maiorẽ esse minutiam AB, quàm CD. [c] *Cum enim sit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrũ; & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AB, ad integrum, quàm minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo est minutia AB, quàm minutia CD. quod est propositum.* A, 3. / B, 4. C, 2. / D, 3. [c] 2. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior, quàm minutia CD. Dico maiorem esse proportionem A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrum, quàm minutiæ CD, minoris ad idem integrum. [d] *Cũ ergo sit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. quod est propositum.* [d] 2. huius

MINVTIARVM $\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{12}$. *integer numerus sit 24. cuius tã* $\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{12}$. *sunt 18. at proinde æquales sunt minutiæ* $\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{12}$. *At* $\frac{2}{3}$ *eiusdem numeri 24. sunt 16. vbi manifestum est, nume-*

rum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{1}{2}$. maiorem esse minutia $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores: sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator.

SINT dua minutiæ AB, CD, sitq; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] *ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum.*

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

[a] 8. huius

SED sint iam minutiæ æquales AB, & CD. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. [b] *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propos.*

[b] 8. huius

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem esse minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D, [c] *ac propterea maior erit minutia AB, quàm CD. quod est propositum.*

A, 6. C, 3.
B, 9. D, 5.

[c] 8. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm CD. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. [d] *Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod est propositum.*

[d] 8. huius

SINT dua minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$. *partes integri numeri 90. ubi*

vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. hoc eſt, 60. æqualem eſſe minutiæ $\frac{2}{3}$. id eſt, numero 60. At vero minutiam eandem $\frac{6}{9}$. id eſt, 60. maiorem eſſe minutia $\frac{1}{3}$ hoc eſt, numero 54.

X.

DVAS minutias diuerſarum denominationum ad alias duas eiuſdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ A B, C D, habeant diſſimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarũ numeratores E, F & denominator idem G, eſſe æquales minutijs A B, C D. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G;

E, 10. A, 2. B, 3. G, 15. F, 9. C, 3. D, 5.

[a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. Quare minutia A B, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, [b] erit vt C, ad D, ita F, ad G. [c] Igitur minutia C D, FG, æquales erunt. quod eſt propoſitum.

[a] 18. ſept.
[b] 8. huius
[c] 18. ſept.
[d] 9. huius

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiã BC, vnitati A, æqualem eſſe. [e] Quia enim eſt, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Eſt autem B, ipſi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id eſt, vnitati, erit æqualis. quod eſt propoſitum.

A, 1. B, 6. C, 6.

[e] 2. huius

DEINDE ſit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator.

tor. Dico minutiã BC, integro A, aquã-
A, 7. B, 42. lem esse. Supponatur enim integro A, uni-
D, 1. C, 6. tro D, vt fiat minutia AD, tot unitati-
bus aqualis, quoties unitas est in A.
Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis,
ita B, ad C, vt A, ad D, unitatem. Cum ergo minutiarum
AD, EC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandẽ
[a] 8. huius proportionem habeant, a ipsæ inter se æquales erunt. Quare
cum minutia AD, sit integro A, æqualis, ob denominatorem,
qui est unitas; erit quoque minutia BC, eidem integro A,
æqualis. quod est propositum.

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C,
A, 3. C, 6. A, 3. manente eodem denominatore B:
B, 8. B. 8. D, 4. vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denomina-
tor D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque mi-
[b] 4. huius nutiam CB, AD, duplam esse minutiæ AB. Cum enim minu
tia AB, CB, eundem habeant denominatorem; b erit vt C,
ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia
ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructio-
ne. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod est
propositum.

RVRSVS quia minutia AB, AD, eundem habent
[c] 7. huius numeratorem; c erit vt B, ad D, denominator ad denomina-
torem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem
B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutiæ
AD, minutia AB, dupla erit. quod est propositum.

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Dupletur
denominator B, vt fiat denomina-
A, 6. A, 6. D, 3. tor C, manente eodem numera-
B, 11. C, 22, B, 11. tore A: Vel numerator A, quan-
do par est, dimidietur, vt fiat
numera-

numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtrãq; minutiam A B, D B, dimidium esse minutiæ A B. Cum enim minutia A B, A C, eundem habeant numeratorem; [a] *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia A C, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum.* [a] 7. huius

RVRSVS cum minutia A B, D B, habeant eundem denominatorem; [b] *erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum.* [b] 4. huius.

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutia sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, siue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutia exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B.

Et

[a] *Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum, nimirum ad minutiam C D, cuius integrum est E:* [b] *Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quòd A, B, ipsum C, multiplicantes faciãt F, H: Erit quoque, vt minutia AB, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rursus* [c] *quia est, vt C, ad D, ita minutia C D, ad suum integrum E:* [d] *Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C, D, multiplicans fecerit H, G: Erit quoq; vt C D, minutia ad suum integrum E, ita H, ad G. Quoniã igitur est, vt minutia AB, ad minutiam C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrũ, ita H, ad G; erit ex aquo, vt A B, minutia minutia C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quòd simplex minutia K, æqualis posita sit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cum eius valorem respectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E.* [e] *Cum ergo quoque sit, vt F, ad G, ita minutia FG, ad idem suum integrum E; æquales erunt minutiæ simplices K, & FG: ac proinde cum minutia K, æqualis sit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque simplex minutia FG, æqualis datæ minutiæ A B, respectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod est propositum.*

SIT $\frac{2}{3}$. *minutia minutiæ* $\frac{3}{4}$. *respectu integri 24. Huius numeri* $\frac{3}{4}$. *sunt 18. & huius numeri* $\frac{2}{3}$. *sunt 12. qui numerus est* $\frac{1}{2}$. *dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2, 3. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3, 4. procreari minutiam* $\frac{6}{12}$. *quæ huic* $\frac{1}{2}$. *æquivalet qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.*

a 2. huius
b 18. sept.
c 2. huius
d 17. sept.
e 4. huius

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam

tiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

SIT primum AB, minutia minutia CD. Ex A, in C, ſiat E; & ex B, in D, ſiat F. [a] *Et quoniam minutia EF, exprimit valorem minutiæ AB, reſpectu minutiæ CD; reductu erit data minutia minutia ad ſimplicem minutiam EF. quod eſt propoſitum.*

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

[a] 13. huius

DEINDE ſit AB, minutia minutiarum CD, EF, ita ut CD, ſit minutia minutiæ EF; & AB, minutia minutiæ CD. Fiat G, ex A, in C; & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq; ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam IK, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem eſſe. [b] *Nam minutia GH, æqualis eſt minutiæ AB, minutiæ CD, reſpectu minutiæ EF, tãquam integri cuiuſdam.* [c] *Item minutia IK, æqualis eſt minutiæ GH, (hoc eſt, minutiæ AB, minutiæ CD.) minutiæ EF, reſpectu integri, cuius EF, eſt minutia; & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia IK, ex numeris vltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum. quod eſt propoſitum.*

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

[b] 13. huius

[c] 13. huius

SIT $\frac{2}{3}$. *minutia minutiarum* $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. *reſpectu integri 24. Huius numeri* $\frac{1}{2}$. *eſt numerus 12. & huius numeri* $\frac{3}{4}$. *ſunt 9. Huius denique* $\frac{2}{3}$. *ſunt 6. qui numerus eſt* $\frac{1}{4}$. *totius integri 24. Liquido autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam* $\frac{6}{24}$. *quæ æqualis eſt minutiæ* $\frac{1}{4}$. *qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.*

XV.

DATIS duabus minutijs, alterutram earum

rum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductę in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductę, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Itē ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicās A B, facit G, H, [a] *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* [b] *at proinde minutia A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F,* [c] *metietur C, ipsum F, per D:* [d] *Metitur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata; propterea, quòd G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutiæ est minutia F, respectu integri G, sintque numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* [e] *constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias G, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G; cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producitur. Quare cum numeratores gignant vnitatum, & denominatores numerum K; (quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus*

G, 24.	K, 8.	
A, 2.	F, 12.	C, 3.
B, 3.		D, 4.
H, 36.	L, 9.	
C, $\frac{1}{4}$.	F, $\frac{1}{2}$.	M, $\frac{1}{8}$.

[a] 17. 7. pt.
[b] 8. huius
[c] 7. pron. 5. pron.
[e] 13. huius

quibus partes C, F, denominantur, & ex quarum multiplicatione factus est numerus K, constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiæ simplicè cuiusdè integri G, cuius numerator est unitas, & denominator numerus K, quæ-libet minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ CD, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties unitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.

XVI.

DVAE minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti, gignũt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarũ æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ AB, CD: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: sintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias AB, CD, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis est numero F, facto ex C, secundo in B, tertiũ, [a] erit ut A, primus ad C, secundũ, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem. [b] Quare minutia AB, CD, æquales sunt. VEL sic. [c] Quoniam est, ut E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Est autem E, ipsi F, æqualis; erit quoque minutia AB, minutiæ CD, æqualis. quod est propositum.

E, 24. A, 2. B, 3. F, 24. C, 8. D, 12.

[a] 19. sept.
[b] 9. huius
[c] 5. huius

SED

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerũ E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [a] erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem. [b] Quapropter idẽ numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. [c] VEL sic. [c] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod est propositum.

[a] 9. huius
[b] 19. sept.
[c] 5. huius

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque AB, maiorem esse minutia CD. Cum enim ex

E, 24, F, 21.
G. 1 3/4 A, 2 × C, 7
B, 3 D, 12.

A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; gignetur F, ex minore numero quam A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertium, [d] erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autẽ maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; & A, maior sit quã G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad D; [e] ac proinde minutia AB, maior erit, quàm minutia CD. [f] VEL sic. [f] Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia AB, maior quàm minutia CD. quod est propositum.

[d] 19. sept.
[e] 9. huius
[f] 5. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia AB, quàm minutia CD, [g] erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quàm A, habebit ad C, eandẽ proportionem, quam B, ad D, qui sit G. [h] Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartũ, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quàm ex G, in D; propterea quòd A, maior est quàm G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C, in B, genitus. [i] VEL sic. [i] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F: Est autem AB, minutia maior quàm minutia CD; erit quoq; E, maior quàm F. quod est propositum.

[g] 9. huius
[h] 19. sept.
[i] 5. huius

ATQVE hæc est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscriptimus ad dignoscendum, vtra duarum

duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos revocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos revocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutiæ AB, sit æqualis. Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; sintque C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi terminis in sua proportione: sunt autem & minimi, cum primi inter se sint. quod est absurdum.

SI vero A, B, non sint inter se primi; sit eorum maxima mensura C, qua metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ AB, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; producentur A, B, ex C, in D, E. Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E, ac propterea minutia AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erit ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.

A, 11. C. ∞ B, 12. D, ∞ — a 8. huius

b 23. sept.

c 2. sept.

A, 36. D, 3 B, 48. E, 4. C, 12. — d 9. prop. e 17. sept. f 8. huius

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, revocare.

SIT data minutia AB, revocanda ad æqualem aliam,

cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator data minutia per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, [a] fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. [b] Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; [c] ideoque minutia AB, EC, æquales erunt. quod est propositum.

A, 3. E, 9
B, 4. C, 12.
D, 36.

[a] 9. pron.
[b] 19. sept.
[c] 8. huius

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutia A B, E C, æquales sunt; [d] erit vt A, ad B, ita E, ad C. [e] Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. [f] Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.

A, 3. E, ~
B, 4. C, 10.
D, 30.

[d] 8. huius
[e] 19. sept.
[f] 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorẽ diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. [a] Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.

A, 6. B, 11.
A, 6.
B, 11.

[a] 2. huius

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum

numerum minorem, aliquid ſuperſit; Quotienti integro inuento addendam adhuc eſſe minutiam, cuius numerator ſit numerus ex diuiſione reliquus; denominator vero, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui neceſſario minor eſt numero diuidente, diuidendus adhuc eſt per eundem numerum diuidentem, qui maior eſt. Verbi gratia. Diuiſo numero 23. per 4. Quotiens integer eſt 5. & ſuperſunt 3. adhuc diuidenda per 4. [a] *Fit ergo minutia* $\frac{3}{4}$. *ita vt totus Quotiens ſit* $5\frac{3}{4}$.

[a] 19. huius

XX.

MINVTIAS plures in vnam ſummam colligere.

SINT primum addenda duæ minutiæ A B, C B, eiuſdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat ſumma D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam D B, eſſe ſummam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habent denominatorem; [b] *erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et componendo, vt A, C, ſimul ad C, ita minutia A B, C B, ſimul ad minutiam C B.* [c] *Vt autem C, ad D, ita quoque eſt minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex æquo erit, vt A, C, ſimul ad D, ita minutia A B, C B, ſimul ad minutiam D B. Cum ergo A, & C, ſimul æquales ſint ipſi D, ex conſtructione; erunt quoque minutiæ A B, C B, ſimul æquales minutiæ D B. quod eſt propoſitum.*

[b] 4. huius

[c] 4. huius

DEINDE ſint addenda duæ minutiæ A B, C D, diuerſarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem poſterioris; & C, numerator poſterioris in B, denominatorem prioris, colligaturque ſit ſumma E, ex duobus illis productis, cui ſupponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorũ B, D, procreatus. Dico

$A, 2 \quad B, 3 \qquad C, 3 \quad D, 4. \qquad E, 17. \quad F, 12.$

$A, 2$ $B, 3$ $C. 3$ $D, 4.$ $E, 17.$ $F, 12.$

minutiam E F, esse summã ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam.[a] Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis; erit conuertendo, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita E, ad F:[b] Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum AB, CD, ad integrum, ita minutia EF, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, CD, æqualis erit minutiæ EF: ac proinde minutia EF, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum. VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex multiplicatione denominatorum inter se, sunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs A B, CD, æquales, vt ex demonstratione propos. 10. cãstat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia EF, summa minutiarũ A B, CD, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas A B, CD, reducta sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

[a] 6. huius

[b] 3. huius

IAM. vero datis pluribus minutijs, addenda primum erunt duo prima: deinde hac summa cum tertia coniungenda, atque hac summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutia seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutia huius integri 40. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. unitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{21}{27}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi videt ex 12. & 16. conflci 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

MINV-

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX *maiore minutia* A B, *detrahenda sit minor* C B; *sintque primum ha minutiæ eiusdem denominationis. Detracto numeratore* C, *minoris minutiæ ex* A, *numeratore maioris, reliquus sit numerus* D, *cui idem denominator* B, *supponatur. Dico minutiam* D B, *reliquam esse post detractionem minutiæ* C B, *ex minutia* A B. *Quia enim* C, *ex* A, *subtractus relinquit* D; *componetur* A, *ex* C, *&* D. *Minutia ergo* A B, *cuius numerator* A, *ex numeratoribus* C, D, *collectus est, summa est duarum minutiarum* CB, DB, *vt in prima parte antecedentis propositum est. Quare detracta minutia* C B, *ex minutia* A B; *relqua fiet minutia* DB. *quod est propositum.*

A, 7 / B, 10. C, 3 / B, 10. D, 4 / B, 10.

DEINDE *minutiæ* AB, CD, *habeant diuersos denominatores, detrahendaque sit minor* CD, *ex maiore* A B. *Ex* C, *numeratore minoris in* B, *denominatorem maioris fiat* F; *&* E; *& ex* A, *numeratore maioris in* D, *denominatorem minoris fiat* F: *atque* E, *ablatus ex* F, *relinquat* G, *cui supponatur denominator* H, *ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam* G H, *esse reliquam post detractionem minutiæ* C D, *ex minutia* A B. *Quoniam enim* D, *multiplicans* A, B, *facit* F, H; [a] *erit vt* A, *ad* B, *ita* F, *ad* H: [b] *vt autem* A, *ad* B, *ita est minutia* A B, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* F, *ad* H, *ita minutia* A B, *ad integrum. Rursus quia* B, *multiplicans* C, D, *facit* E, H; [c] *erit vt* C, *ad* D, *ita* E, *ad* H: [d] *Vt autem* C, *ad* D, *ita est minutia* C D, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* E, *ad* H, *ita minutia* CD, *ad integrum. Quia igitur est, vt* E, *primus ad* H, *secundum, ita minutia* C D; *tertius numerus ad integrum,*

A, 3 / B, 4 C, 2 / D, 5 G, 7 / H, 20.

[a] 17. sept.
[b] 2. huius
[c] 17. sept.
[d] 2. huius

a 2. huius

grum, quartum numerum; & vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia G H, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundū, ita minutia C D, G H, tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul ad H, ita est F, ipsis E, G, aqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutia C D, G H, simul ad integrum. Cum ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrum, ita minutia C D, G H, simul ad idem integrum: ac propterea aquales erunt minutia A B, & minutia C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod est propositum. VEL sic: Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duo minutia eiusdem denominationis minutijs datis aquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua post detractionem minutia C D, ex minutia A B, veluti initio huius propos. ostensum est.

b 11. huius

IAM vero si dentur integra vna cum minutijs, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quòd si minutia detrahenda, maior sit; quàm ea, à qua fieri debet subtractio, b reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutia adhærētis. Vt si subtrahēda sint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. subtractis 6. ex 10. superfunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. qua cū $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunt q; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutia huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc est,

ex

ex 30. superſunt 14. minutiæ $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt ſuperior calculus docuit.

XXII.
MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter *ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F:* [a] *Erit ut minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia vero C, multiplicans A, F, facit E, H;* [b] *erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F;* [c] *erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam EF, ad minutiam CD:* [d] *Et vt A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia EF, ad minutiam CD, ita minutia AB, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. quod eſt propoſitum.*

	A, 2.	C, 4		E, 8
	B, 3.	D, 5	×	F, 15.

[a] 2. huius
[b] 17. ſept.
[c] 17. ſept.
[d] 2. huius

A.	G.
E.	F.
B.	H.

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem unitas. Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eiuſdem minutiæ propoſitæ denominator; propterea quòd vnitas integro numero ſuppoſita in denominatorem datæ minutiæ ductæ eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

[a] 11. huius

SI uero integris minutia adhæreant, a renouanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis unus numerator constituí. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient ha duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accommodemus, nõ erit minutia producta cũ integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac subtractione factũ est, sed cum quadrato numeri integri assumpti: quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. *minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia* $\frac{8}{15}$. *Necesse est ergo, vt* $\frac{2}{3}$. *numeri 60. in* $\frac{4}{5}$. *eiusdem faciãt numerum, qui constituat* $\frac{8}{15}$. *quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam* $\frac{2}{3}$. *numeri 60. sunt 40. &* $\frac{4}{5}$. *eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit* $\frac{8}{15}$. *numeri 3600. hoc est, quadrati ipsius 60.*

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuisor A, per C, Quotiens sit E, & diuisor B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam E F, esse Quotientem diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D.

A, 12	C, 3	E, 4.
B, 16.	D, 8.	F, 2.
A, 6	C, 3	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.
A, 3	C, 3	E, 1
B 8.	D, 4.	F, 2.

Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [b] *gignetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F.* [c] *Igitur minutia A B, producta est ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia*

[b] 9. pron.
[c] 22. huius

mutia E F, ad 1. Quocirca cum sit, vt A B, minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F; ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia E F, Quotiens diuisionis minutia A B, per minutiam C D. quòd est propositum.

DEINDE numeri C, D, minutia C D, non metiantur numeros A, B, minutia A B.[a] Reducatur minutia A B, ad aliam æqualem E F, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutia C D, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: q̃d quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia G H, Quotiens diuisionis minutia E F, vel A B, illi æqualis, per minutiam C D, vt initio huius propos. demonstratum est. quod est propositum.

[a] 15. huius

E, 24.	A, 2	K, 12.	C, 3.	G, 8
F, 36.	B, 3.		D, 4.	H, 9.
E, 90	A, 6	K, 15.	C, 3	G, 30
F. 135.	B, 9.		D, 5.	H. 27.

QVIA vero G, H, numeri minutia Quotientis G H, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiusuis minutia per quamlibet minutiam, si numerator A, minutiæ dividendæ in D, denominatorem minutiæ dividentis; & C, numerator minutiæ dividentis in B, denominatorem minutiæ dividendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H, denominatorem Quotientis minutiæ G H. Atque hoc verum est in omnibus minutijs, siue numeri minutiæ dividentis numeros minutiæ dividendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ dividendæ in denominatorem minutiæ dividentis, & ex numeratore minutiæ dividentis in denominatorem minutiæ dividendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ dividentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia dividenda secundum doctrinam propos 15. reuocatur, vt ex eius propos. demonstratione liquet, atque in hoc apposita exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B,

E, 48.	A, 8.	K, 6.	C, 2.	G, 4	H, 24
F, 54.	B, 9.		D, 3.	H, 3.	L. 18.

metiuntur

metiũtur per G, H, & numeros E, F, procreatos ex A, B in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiũtur per K, L: atque adeo tam minutia G H, quàm K L, Quotiens eſt minutia A B, per minutiam C D, diuiſa.

IAM vero ſi numerus integer diuidendus ſit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, ſupponenda eſt ei vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt datus numerus integer, & denominator 1. Vt ſi numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet

8	1	16	Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appoſito priori exemplo
1.	2.	1.	perſpicuum eſt. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda ſit per integrum numerum 8. fiet
1	8	1	Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in poſteriori exemplo ap-
2.	1.	16.	paret.

QVOD ſi minutia adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propoſ. diximus.

VERVM quia non facile eſt memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis ſigni numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; ſatius erit ad memoriam inuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter ſe permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vſurpare. Vt ſi diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens

3.	7	21	erit $\frac{21}{8}$. vt hic vides. Nam hac ra-
4.	2.	8.	tione numerator minutiæ diuidendæ ſemper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores eſſe multiplicandos inter ſe, vt fiat numerator, &c.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda ſit per eiuſdem $\frac{2}{7}$. hoc eſt, numerus 525. per 200. Perſpi-

cuum

cusum autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$. *id est, minutiam* $\frac{21}{8}$. *qua proximè inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8. per* $\frac{1}{5}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia A B, in minutiam C D, inferenda, sitque primum sensus, addendam esse minutiam A B, vnius particulæ minutiæ C D, ad minutiã C D: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$. *vnius septimæ ad* $\frac{6}{7}$. *Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & composito numero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam G H, æqualem esse minutiæ A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniam enim A B, minutia vnius particulæ minutiæ C D,* [a] *reducitur ad simplicem minutiam A H, cuius numerator idem est, qui A, productus nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appositio hoc exemplo apparet. Item minutia F H, minutiæ C D, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C, D, faciat F, H;*

F, 24.

A, 3	C, 6	G, 27.
B, 4.	D, 7.	H, 28.

A, 3	1	A, 3
B, 4.	D, 7.	H, 28.

[a] 14. huius

a 17. sept.
b 8. huius

F, H; a erit vt C, ad D, ita F, ad H; b ac propterea minutia C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, vt initio propos. 20. ostensum est; hoc est, summã ex minutia A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutia A H, ostensa est æqualis, & ex minutia C D, quæ ostensa est æqualis minutia F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D; id est, æqualis est minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, simul. quod est propositum.

IAM vero si plures minutiæ A B, C D, E F, G H, sint inserendæ, hoc est, si minutiæ A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore postremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiusdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adijciatur A, numerator eiusdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur semper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiusdem proximè antecedentis minutiæ adijciatur, donec nulla minutia superfit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N;

P, 119. M, 59. K, 14.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

post

post hac N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex insitione datarum minutiarum produci in eo sensu, quem exposuimus. Nam vt in duabus minutijs ostensum est, minutia KL, producitur ex insitione minutiæ EF, in minutiam GH, hoc est, æqualis est summæ ex minutia EF, vnius particulæ minutiæ GH, & ex minutia GH, collectæ. Deinde minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH, [a] *facit minutiam simplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis positam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus,* [b] *æqualis est minutiæ KL:* [c] *quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propos. 20. demonstrauimus, minutia MN, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutia MN, summæ collectæ ex minutia GH, & ex minutia CD, vnius particulæ minutiæ GH, atque ex minutia CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH. Rursus minutia AB, vnius particulæ minutiæ CD, vnius particulæ minutiæ EF, vnius particulæ minutiæ GH,* [d] *facit minutiam simplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id est, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator est numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus,* [e] *æqualis est minutiæ MN,* [f] *quod numeratores harũ minutiarum ad denominatores eãdem proportionem habeãt, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis sit summæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propos. 20. monstratum est;*

[a] *14. huius*

[b] *8. huius*
[c] *17. sept.*

[d] *14. huius*

[e] *8. huius*
[f] *17. sept.*

eſt; æqualis quoque erit eadem minutiæ P Q. ſumma collecta ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ C D, quod eſt propoſitum. Eademque ratio eſt de pluribus.

SIT deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, produci ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, ſenſu; hoc eſt, minutiam G H, æqualē eſſe ſummæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, [a] *reducitur ad minutiam ſimplicem E H, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat:* [b] *Minutia quoque F H, æqualis eſt minutiæ C D;* [c] *quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quę ex ijs, quæ ad initium propoſ. 20. oſtendimus, æqualis eſt ſummæ minutiarum E H, F H,) æqualis ſummæ collectæ ex minutia C D; (hoc eſt, ex minutia F H) & ex minutia A B, minutia C D, (id eſt, ex minutia E H,) atque ideo minutia G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc poſteriori ſenſu. quod eſt propoſitum.*

E, 18. F, 24.
A, 3 C, 6 G, 42
B, 4. D, 7. H, 28.

A, 3 C, 6 E, 18
B, 4. D, 7. H, 28.

[a] 14. huius
[b] 8. huius
[c] 17 ſept.

QVOD ſi plures ſint minutiæ inferendæ A B, C D, E F, G H, hoc eſt, minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ

tia G H; & minutia E F, minutia G H, addenda sint ad minutiam G H, ita agendum erit. Ducatur G, in F, producto numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutia, numeroque procreato adijciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vsque locum assumptarum productus, donec nulla supersit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus est, supponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori sensu. Dico minutiam P Q, produci ex insitione dictarum minutiarum, si insitio intelligatur, vt dictum est. Nam, vt in duabus minutijs demonstratum est, minutia K L, producitur ex insitione minutiarum E F, G H, id est, aqualis est summa collecta ex minutia E F, totius minutia G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutia E F, totius minutia G H, [a] facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus G, E, G, producitur, denominator autem est N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem est idem N, ex D, in L, hoc est, ex denominatoribus H, F, D, procreatus; [b] aqualis est minutia K L; [c] quòd numeratores harũ minutiarũ ad denominatores habeant proportionẽ eandẽ: quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutia. Igitur cũ minutia M N, cuius numerator M, cõstatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt,

P, 232. M, 104. K, 29.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

[a] 14. huius

[b] 8. huius
[c] 17. sept.

P, 232. M, 104. K, 28.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis sit per ea, quæ initio propos. 20. ostensa sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò est idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, summa collecta ex minutia GH; & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH. Rursus minutia AB, minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH, [a] facit minutiam simplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autē Q, ex B, in N, procreatus, sive ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autē est idem Q, ex B, in N, procreatus, [b] æqualis est minutiæ MN; [c] quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, constatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis sit, ex ijs, quæ initio propos. 20. demonstrata sunt, summæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G. producitur, denominator autem est Q; atque ex minutia cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem est idem Q; æqualis quoque erit summa collecta ex minutia GH; & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & ex minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH. quod est propositum. Eademq; de pluribus est ratio.

[a] 14. huius

[b] 8. huius

[c] 17. sept.

DE PROPORTIONVM compositione.

EXPEDITIS ijs, quæ ad fractorum numerorum demonstrationes pertinent, reliquum est, vt compositionem proportionum explicemus: id quod ad propos. 5. lib. 8. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compositionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in ijs propositionibus, vbi duplicatam, triplicatam,

aut

aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe verè additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit dupla, aut tripla maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatana: Item vt proportio ex pluribus proportionibus cõpoſita ſit verè totũ quippiã, cuius partes ſint proportiones, ex quibus cõponi dicitur, vt plerunq; interpretes Eucl. exiſtimant, ex hoc parſpicuè confirmari poteſt: quòd pars eſſet vel aqualis, vel maior toto. Nam cũ hac compoſitio intelligẽda ſit, ſiue maior quantitas cũ minore, ſiue minor cũ maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. oſtẽdimus, ſi, poſitis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolũ duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. aqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt, pareem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. qua una pars eſt, maiorẽ eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partẽ aqualem eſſe toti? Sic etiã, ſi, poſitis his tribus terminis nõ cõtinuè proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8. verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdẽ auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior quam totũ, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret aqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundũ, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimũ. Id quod cogunturomnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2. Poſterioris vero 3. & 16. Quoniã igitur 24. 48. Euclides ibi demonſtrat, proportionẽ 24. 12. 2. 3. 16. ad 48. compoſitã eſſe ex proportionibus laterum, hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componẽs, (ſi hac cõpoſitio eſt vera additio.) nimirũ proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportionẽ videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. verè totũ eſt, & eius partes componẽtes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harũ ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt, nimirũ proportio quadru-

pla 12. ad 3. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quòd ſi poſteriorris numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit una partium componentiũ, nimirum proportio 2. ad 4. aqualis to-

24. 48. ti, proportioni videlicet 24. ad 48. Et

12. 2. 12. 4. ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quamaior eſt quàm totũ, hoc eſt, quàm proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totũ non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. vere coacerua tur ex proportionibus 12 ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis cõtinuentur adhuc alij tres termini hoc modo. 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadẽ proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coacerua tum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorũ. Huc accedit, quòd ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplã, non autem nonuplam, vt prædicti auctores nolunt, quanquã nõcupla proportio dicatur tripla dupli cata, vt in his e numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiã cõmunis intelligentia comprehendit ex proportione triplæ, & quintuplæ conficiproportionem octuplã, propterea quòd duo mouẽtia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autẽ ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationẽ compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorũ agentiũ vires nõ poſſe dimidiari, eo quòd inter duos numeros, qui proportionẽ agentis ad patiens exprimunt. nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. nõ poſſet habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem

2019

non ſtatim intelligat: agens vt 3. in duplã proportione minus eſſe, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiuſmodi compoſitionem proportionũ non eſſe additionem, ſed proportionũ continuationẽ, qua per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex medijs proportionibus compoſita propter terminorum cõtinuationem, quemadmodũ & ad defin. 10. lib. 1. explicauimus, cur, poſitis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorũ proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hac autem planius percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirũ additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio, fieri debent per proportionũ denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cũ denominatori cuiuſlibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit unitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab unitate denominata.) quarũ qualibet æqualis eſt fractioni, quæ conſtituũt duo quicunq; numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedẽte fiat numerator, & ex cõſequente denominator: manifeſto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorũ numerorũ nõ differre, ſiue per proportionũ denominatores, ſiue per numeros earundẽ proportionũ quoſcunq;, poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarũ, inſtituãtur, vt egregie Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM .n. ſint in vnã ſummã colligẽdæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quorũ denominatores ſũt 3. & 5. ex quorũ additione fit ſũma 8. cuiuſ 3 × 5 12 × 40.
uabitur octupla proportio ex illis. quæ 1 1. 4 8.
ſũma etiã colligitur, ſiue denominato 8 256
res, ſuppoſita prius unitate cuilibet il- 1. 32.
lorũ, inſtar minutiarũ addãtur, ſiue numeri 12. 4. & 40. 8.
inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent 8 8
fracti

fracti numeri, positis terminis consequẽtibus sub antecedentibus, in unã ſũmã colligãtur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autẽ 256. ad 32. quarũ utraq; octupla eſt. Sic etiã ex proportione dupla ſuperquadrupartiẽte ſeptimas, & ſeſquialtera, quarũ denominatores ſunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4 reperiuntur, ſit proportio quadrupla ſeſquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quãdo per dato minatores inſtituitur operatio, reuocandi prius ſunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factũ eſt. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligendum eſt.

8 × 3 / 1 × 1. — 256 × 12 / 32 × 4. — 57 × 3 / 14 × 2. — 342 × 6 / 84 × 4.

5 — 640 — 72 — 864

1. — 128. — 28 — 336.

DEINDE ſi ex proportione octupla ſubtrahatur proportio tripla: Itẽ ex proportione quadrupla ſeſquidecimaquarta deducatur proportio ſeſquialtera; reliquæ fient proportiones quintupla, & dupla ſuperquadripartiens ſeptimas, vt hic perſpicuum eſt.

8 — 3 — 256 — 12 | 57 — 3 — 342 — 6

1 — 1. — 32 — 4. | 14 — 2. — 84 — 4.

5 — 640 | 72 — 864

1. — 128. | 28 — 336.

TERTIO ſi multiplicanda ſit proportio tripla per 2. vel quod idem eſt, per proportionẽ duplam: Item proportio ſeſquialtera per ſupertripartientem quintas; inſtituenda erit operatio, vt hic vides, producetur q; ibi proportio ſextupla, hic autem dupla ſuperbipartiens quintas.

3—2—6 | 1—1.—1.

12—10—120 | 4—5.—20.

3—8—24 | 2—5.—10.

9—16—144 | 6—10.—60.

QVARTO & vltimo ſi proportio ſextupla diuidẽda proponatur per proportionẽ triplã: Itẽ proportio dupla ſuperbipartiens quintas per proportionẽ ſeſquialterã, ſi diuiſoris termini permutentur, vt in diuiſione minutiarum docuimus, ita inſtituetur operatio.

VIDES

6—1 6	120—4 480	24—2 48	144—6 864
1—3. 3.	20—12. 240.	10—3. 30.	60—9. 540.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quòd in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM vero multiplicationem proportionũ à nobis præscriptam, quam auctores additionem falsò nũcupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defi. 5. lib. 6. egit, conuenire, atq; adeo compositionẽ illam Euclidis verè esse multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales; ducaturq; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex cõsequente vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6.

A, 6.	C, 12.	A, 3	C, 6
B, 2.	D, 4.	B, 2.	D, 5.
E, 72.	F, 8.	F, 18.	F, 10.
G, 24.		G, 12.	

Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G; [a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autẽ proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eadẽ sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cũ enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstrauimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum nõ differat, liquido constat, compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

[a] 18. sept.
[b] 17. sept.

EADEM ratione oſtendemus, ſubtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, non eſſe aliud, quàm diuiſionem à nobis explicatam, eſſeque compoſitioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipſi ſuolumus. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem eſt, ac ſi termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, quæ ex diuiſione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, eſſe eam, quæ relinquitur, ſublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F; [a] erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rurſus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G ad F, compoſita ſit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quæ eadem eſt, quæ G, ad F,) compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E, hoc eſt, C, ad D, & E, ad F: ac proinde ſubducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F. quemadmodum ſi ex proportione G, ad F, (poſito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua eſt proportio E, ad F. Sed quis nõ videt, hoc potius eſſe diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quàm proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahi, ne maius ex minore auferri dicatur, vt in poſteriori exemplo accidit? Atque hæc de proportionum compoſitione: qui plura deſiderat, legat eruditiſſimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conſcriptum.

A, 9.	C, 3	A, 4.	C. 6.	
B, 1.	D, 1.	B, 2.	D, 3,	
E, 9.	F, 3.	E, 8.	F, 12.	
G, 27.		G, 24.		

[a] 18. ſept.
[b] 17. ſept.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

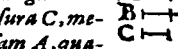
COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT *Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solidæ tum planæ, neque perfectè intelligi possunt, neq; cum rès tulerit, in opus atque usum conferri; propterea & plerunq; latera earũ incõmensurabilia sunt: Id qđ & de pla-*

nis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommensurabilia sæpenumero existant, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob lineas, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planum reddatur, ac facilis, vt sine multo labore a quouis, qui prædictorum tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmetices, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Immo contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino sit imparus, propterea quod ille demonstrationes ad vsum potest reuocare, hic vero nullo modo. Hæc enim de causa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accommodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro diuinato, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ sola necessaria ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt.

do uolunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQVE, vt ad instieutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadē mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mēsura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorū & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quā dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commēsurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, qua metitur idem corpus, seu solidum.



II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, vt propositione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commē-

surabiles

surabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quadam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirũ alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illa, quas in expositione defin. 1. commẽ surabiles simpliciter diximus: quadam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt commẽsurabiles longitudine, alia sunt eiusmodi, vt earũ quadrata sint commensurabilia; alia vero ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Linea ergo illa longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commẽ surabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est, secundum earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusque linea, quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsa secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine, respondendum est, lineas longitudine commẽsurabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cũ huiusmodi lineas una communis mensura metiatur, vt dictũ est: At vero quoniã lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spacium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

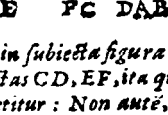
IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarum

rum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.

HABENT autem lineæ cõmenſurabiles tã lõgitudine quàm potentia, hanc quaſi conuenientiã inter ſe, & cõnexionem, vt linea longitudine cõmenſurabiles, ſint etiã commenſurabiles potentia, ita vt nulla linea dari poſſint commenſurabiles lõgitudine, quin earum quadrata commẽſurabilia quoque ſint; quoniam quadratum ex communi earũ menſura deſcriptum metitur tanquã menſura communis earum quadrata, vt in ſubiecta figura apparet: ſicut enim recta A B, metitur rectas C D, E F, ita quoq; quadratũ A G, quadrata C H, E I, metitur: Non autẽ, vt omnes lineæ potentia cõmenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles longitudine; multæ enim lineæ ſunt potentia commenſurabiles, hoc eſt, quadrata habent commenſurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommenſurabiles ſunt, vt in hoc libro demonſtrabitur, Rurſus inter lineas incommenſurabiles tam longitudine quàm potentia, huiuſmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommenſurabiles; ſint etiam incommenſurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommenſurabiles, cum tamen potentia, hoc eſt, ſecundum earum quadrata, commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex coroll. propoſ. 9. huius libri.



V.

HIS poſitis, oſtenditur, cuicunq; rectæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erit omnium aliarum, quæ cum ipsa comparantur, quædam illi commensurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum: Item quædam illi incommensurabiles longitudine tantum; quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonstrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis ostendi, seu colligi, (quamquàm eius verba hoc sonare videantur) hæc ità se habere: sed solum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quasdã dici posse propositæ rectæ lineæ commensurabiles longitudine, & potentia, quasdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo sequitur, sed demonstrabitur in sequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa proposita, ratione cuius alia commensurabiles sunt, vel incommensurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniã ea ponitur semper certa, & nota, alia vero cum illa comparata non semper nota sunt, quamuis singulæ seorsum sumptæ existant certæ quoque, ac notæ; cum qualibet in quotcunque partes æquales possit diuidi.

VI.

ET huic commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, qua Rationalis dicitur, commensurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex positione, vt illa, sed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITA QVE ex sententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem est, linea recta, cuius quadratum est 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia sit commensurabilis lineæ Rationali, (est enim tam numerus 20. quàm 1000. commensurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine sit eidem

eidem incommensurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non possit exprimi.

VII.

HVIC vero incommensurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum sunt commensurabiles propositæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido constat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propositæ rectæ Rationali incommensurabiles sunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifestum est, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. seu (quod idem est) lineam, cuius quadratū est 20. vel 1000. &c. non posse appellari Irrationalem, cum non sit longitudine, & potentia, sed longitudine tantum Rationali lineæ propositæ incommensurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a proposita recta fit dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea descriptum, Rationale vocatur, quia & ipsum certum est, ac notum, comparationeque illius alia superficies, commensurabiles, incommensurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commensurabiles quidem, Rationalia.

OMNES

OMNES plana ſuperficies quadrato Rationalis lineæ propoſitæ commenſurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex poſitione, vt illud, ſed quia cum eo collatæ reperiũtur ei vel commenſurabiles, vel incommenſurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potẽtia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies plana quadrato à Rationali lineâ deſcripto incommenſurabiles, Irrationales uocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatijs incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita vt ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidẽ quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia; ſi uero non fuerint quadrata, ſed alia quæcunque figura rectilineæ, appellentur rectæ, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatijs incommenſurabilibus, Irrationales.

COL-

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. colligimus, lineas, quæ possunt spatia commensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstrabiturque in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potẽtia, atq; potentia tãtum: apponere fere semper vocibus istis: commensurabiles, ac incõmensurabiles: Vix autem, & rarissimè his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus uero recte Rationales longitudine & potentia, uel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis præbuit, ut uarie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque sint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus postulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPO-

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum minor infinita non sit, minor vero infinite possit augeri; perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem. Cõstat hoc etiam ex ijs, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri eiusdem magnitudinis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum

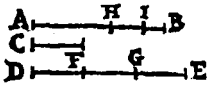
bum hæc possint transferri, mutata solum voce numeri in vocem magnitudinis.

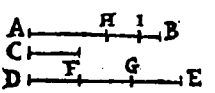
CÆTERVM quia hoc in libro discedendū nobis fuit a numero, quem Theon in propositionibus Euclidis sequitur, vt ad propos. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus seriem Campani negleximus; vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine e regione propositionum apponeretur, quorum superior ordinem Theonis, inferior autē Campani seriem demōstraret. Quod si vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc esse inter Theonem, & Campanum discrepantiam, intelliges, quod ad numerum propositionum attinet.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

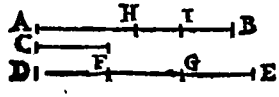
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc semper fiat: Relinquetur tandem quędam magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine.

PROPOSITAE sint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarū AB, sit maior. Dico si ex AB, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum est, rursum maius quam dimidium; atque hoc semper fiat: relinqui tādem magnitudinē quandam, quæ minor sit quā C. Multiplicetur. n. C, toties, donec magnitudo facta DE, maior sit quā AB, ita vt DE, sit multiplex ipsius C, proxime maior quā AB. Diuisa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipsi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quā dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidiū HI; atq; hoc semper fiat, donec partes ipsius AB,





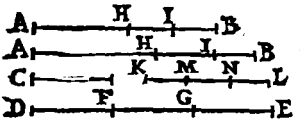
multitudine æquales ſint partibus ipſius D E. Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot ſunt ipſæ DF. FG. GE Quia igitur DE, maior eſt quã A B; At ex DE, ablatũ eſt DF, minus quã dimidiũ, vel certe dimidiũ, ſi DE, ipſius C, ſit duplex; ex AB, vero maius quãdimidiũ AH: Erit reliquum FE, reliquo H B, maius. (Cum enim DE, maior ſit quam AB; ſi ex D E, dimidium auferretur, necnon & ex A B, dimidium, eſſet quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex A B, Si ergo ex D E, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB) Rurſus quoniam FE, maior eſt quàm HB, auferatur q; ex FE, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, ſi F E, maior ſit quam duplex ipſius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo I B: atque ita procedendo oſtẽdemus tandem poſtremam partem ipſius DE, qualis hic eſt GE, maiorem eſſe poſtrema parte ipſius A B, qualis hic eſt IB. Dum ergo G E, poſtrema pars ipſius D E, æqualis ſit ipſi C; erit quoque C, maior quam I B, poſtrema pars ipſius AB. Relicta igitur eſt I B, magnitudo, quæ minor eſt magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonſtrandum.



IDEM demonſtrabitur, ſi ex A B, auferatur dimidium A H, & ex reliquo H B, rurſus dimidiũ HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo H B, nec non & reliquum G E, maius reliquo I B; cum ex maiori D E, ablatum ſit D F, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori A B, dimidium A H, &c.

ALITER. Facta conſtructione, vt prius, ſumatur K L, ita multiplex ipſius I B, vt eſt multiplex D E, ipſius C. Diuiſa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipſi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero

vero A H, maior eſt quam H B, vel certe illi æqualis, ſi ablatum ſit dimidium ex A B; & H B, maior eſt, quam IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc eſt, quam K M. Rurſus quia HI, maior eſt quam IB, vel certe illi æqualis; eſt autem IB, ipſi M N, æqualis: erit quoque H I, maior quam M N, vel illi æqualis; atque adeo tota A I, maior, quã tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota K L: Eſt autem DE, maior adhuc, quam AB. Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cũ ſit, vt D E, ad C, ita K L, ad IB; (Sumpta enim fuit K L, ipſius I B, tam multiplex, quam multiplex eſt DE, ipſius C,) erit quoq; C, maior quam IB. Ac proinde relicta eſt I B, minor quam C. Quod erat demonſtrandum.



[a] *14. quinti.*

SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonſtratione huius Theorematis apparet. duas quantitates inæquales propoſitas debere eſſe tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem poſſit ſuperare. Id quod ad propoſ. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

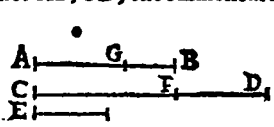
THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propoſitis AB, CD, quarũ minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB; & ſic deinceps, alterna quadam

detractione, auferatur ſemper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommenſurabiles eſſe. Si enim non ſunt incommenſurabiles, metietur eas aliqua menſura communis. Metiatur eas ſi fieri poteſt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipſi AB, vel minor. Detracta autē AB, ex CD, quoties poteſt, relinquat FD, ſe minorē, ita vt A B, ipſam C F, metiatur. Rurſus detracta F D, ex AB, relinquat ſe minorē GB, ita vt F D, metiatur ipſam AG; atq; hoc ſemper fiat. [a] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex C D, relinquat F D, ſe minorē, erit CF, ablata maior, quam dimidia ipſius C D; alias ſi eſſet dimidia, vel minor quam dimidia, poſſet adhuc AB, detrahi ex C D. Eodem modo erit A G, ablata ex A B, maior quam dimidia ipſius A B: Et ſic deinceps ſemper fiet. Quare cum ſemper auferatur maius, quam dimidiū, [b] relinquetur tādem magnitudo quædam minor quā E.) Sit ergo iam relicta GB, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur AB; & AB, metitur C F; [c] metietur quoque E, ipſam CF: Metitur autem E, & totam CD. [d] Igitur E, reli quam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG: [e] quare & E, ipſam A G, metietur. Metitur autem E, & totam AB: [f] ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 1. decimi
[b] 1. decimi
[c] 2. pron.
[d] 3. pron.
[e] 2. pron.
[f] 3. pron.

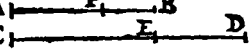
SCHOLIVM I.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de

de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommenſurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturq; minor AB, ex CD, & reliqua ſit ED. Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt, metiatur FB, præcedentem ED. Quoniam igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [a] *metietur quoque FB, ipſam AF: Metitur autem & ſe ipſam:* [b] *Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipſam CE.* [c] *Igitur & FB, ipſam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipſam ED:* [d] *Igitur & FB, totam CD, metietur. Oſtenſa eſt autem & FB, ipſam AB, metiri. Quare FB, vtramq; AB, CD, metitur, quod eſt abſurdum. ponuntur enim AB, CD, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.*



[a] 2. pron.
[b] 1. pron.
[c] 2. pron.
[d] 1. pron.

SIMILITER & hoc demonſtrabimus.

SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM ſi nunquam reliqua metietur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incommenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim commenſurabiles.

ITA QVE facile ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nã detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propoſitæ commẽſurabiles, eum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitam, vt cõſtat ex

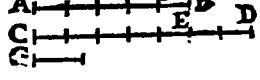
demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur præcedentem E D, oſtenſum eſt, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si uero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

3

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

DATAE duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam A B, C D, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties poteſt, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat F B, & hoc ſemper fiat alterna quadã detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iã F B, reliqua præcedentem ED. Dico FB, eſſe maximam menſuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim vtramque metiatur, ita oſtendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur A F; metietur quoque FB, ipſam A F: At metitur F B, & ſe ipſam; Igitur FB, totam A B, metietur; atque adeo & ipſam C E, quam A B, metitur. Cum ergo, & ipſam ED, metiatur; metietur quoq; F B, totam CD. Metitur ergo FB, utramque A B, C D. Quare vtriuſque A B, C D, communis menſura eſt FB.



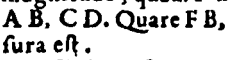
[a] *2. pron.*
[b] *1. pron.*
[c] *2. pron.*
[d] *1. pron.*

QVOD autem FB, ſit maxima earum communis menſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quam F B. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem

autem & AB, ipſam CE; metietur quoq; G, ipſam CE: At metitur quoq; totam C D. Igitur G, reliquam quoque ED metietur: Metitur autem ED, ipſam AF. Ergo & G, ipſam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoq; eadem G, reliquam FB, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis menſura eſt ipſarum A B, C D. Quare F B, maxima earum communis menſura eſt.

[a] 2. prop.
[b] 3. prop.
[c] 2. prop.
[d] 3. prop.

QVOD ſi minor magnitudo AB, metiatur maiorē



C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa AB, ambarum maxima menſura communis; cum & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.

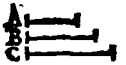
COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt F B, eſſe maximam menſuram communem ipſarum A B, C D. Demonſtratum enim eſt ibi, magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines A B, C D, metiri quoque maximam menſuram F B. Eademque eſt ratio de cæteris.

SCHOLIVM.

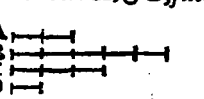
EX his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propo. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi



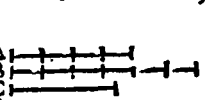
fuerint incommenſurabiles, perſpicuū eſt, omnes tres A, B, C,

esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

SI vero A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D; quæ si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.

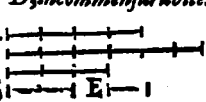


QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima cõmunis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinũ A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.



SI vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, cõmensurabiles. [a] *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cũ E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;* [b] *metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

[a] 3. decimi



[b] 2. pron.

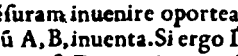
SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si data sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensu-

mensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mẽsuram inuenire oporteat. [a] Sit D, maxima mensura ipsarũ A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quam D, metiri



dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadẽ, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest, Si uero D, non metiatur C, erunt saltẽ D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum cõmunis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoq; ipsam D; erunt D, & C, commensurabiles. [b] Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoq; E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asseruimus.

[a] 3. decimi

[b] 3. decimi

[c] 2. pron.

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quam E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximã mẽsuram D, per coroll. præcẽdẽtis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem corol. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

COROL-

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

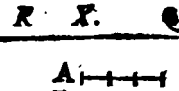
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

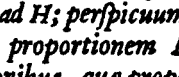
SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam.n. ex ijs, quæ ad defi. 5. lib. 6.

lib.6.a nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perſpicuum eſt, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compoſitas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales eſſe, hoc eſt, eſſe vt A, ad D, ita E, ad H. Quod eſt propoſitum.



IDEM ſequitur, ſi magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo eſt, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.



SCHOLIVM.

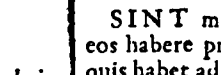
QVONIAM precedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cum non facile videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituũt: At proportio ex æqualitate in precedentibus libris oſtenſa tantum eſt in quãtitatibus eiuſdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri poſſit, cum omnes demonſtrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEO.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5. **COMMENSVRABILES magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.**

SINT magnitudines commensurabiles A, B. Dico eos habere proportionem inter se, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. * Sit enim earum maxima



mensura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Est autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipsam B, atq; vnitas numerum E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commensurabiles ergo magnitudines inter se rationem habent, &c. Quod erat dqmonstrandum.

* 3. decimi

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonstrationem huius theorematis assumat maximam communem mensuram propositarum magnitudinum commensurabilium, qualis fuit C, ipsarum A, & B, perspicuum est, lineas debere esse longitudine, & ob id potentia quoque commensurabiles, vt rationem habeant inter se, quam numerus ad numerum, Hæ enim solæ communem recipiunt mensuram, atq; adeo in eis demonstratio locum habet.

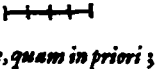
QVOD si lineæ sint potentia tantum commensurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter se rationem, quam numerus

numerus ad numerum, quia commenſurabilia ſunt, atque id circo menſuram habent communem, ipſiſque demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſa linea nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cum ſint, cõmunis menſura ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat, commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas aque, ac communis magnitudinum commenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quãcunque communem earum menſuram, nihilominus hoc theorema demõſtrabimus eodem argumẽto. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in



D. 6.
Vni . tas.
E. 4.

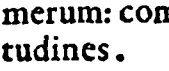
hac poſteriori demnnſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionẽ cum illis, vt ex appoſita figura apparet. Quoniã vero in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omniũ eandem cum ipſis proportionẽ habentiũ; propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam communem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

SI duę magnitudines inter ſe proportionem

tionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.

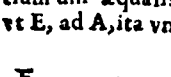
HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis sit magnitudo E. Deindequoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C; continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiá vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A. ad F; ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B: Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur: Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duę magnitudines inter se proportionẽ habeant, &c. Quod erat demonstrandum.



a. quinti

b. defin.

ALITER. Quot sunt unitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum C, æque metiãtur; ponitur que vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idẽ lemma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magni-

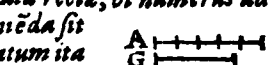


magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipſam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem menſuram E, commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum. [a] 1. den.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot aequales partes, quot vnitates ſunt in C; et ſumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonſtratum eſt.

HINC rurſus apparet, quanam arte poſsit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius data recte, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda ſit linea, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum linea data A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex iis, quae modo diximus, ad quam ſic ſe habeat A, vt C, ad D. [b] *Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres recta A, G, F, ſint continue proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum ſit vt A, ad F, ita C, ad D,) ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta.*



[b] 13. ſexti

SCHO-

SCHOLIVM

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tãtum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

7. 0. THEOR. 5. PROPOS. 7.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B.

A ⊢——⊣

B ⊢————⊣

Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum; erũt ipsæ commensurabiles. Quod *6. decimi est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommẽsurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias, vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

8. 0. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI duæ magnitudines inter se proportio-

portionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incõmenſurabiles eſſe Si enim A, & B, credantur eſſe cõmenſurabiles; [a] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 5. decim.

SCHOLIVM.

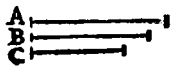
QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſa neceſſario, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt contra hypotheſim. Non autem colligendũ eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſario & potentia incommenſurabiles eſſe, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione. Non enim ſequitur, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonſtratione theorematis aſſumitur; immo nullo modo talem proportionem habere poſſunt, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

LEMMA.

SI ſint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportio-

nales; ſitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundã.

SINT continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non; ſitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque eſſe vt A, ad B, ita D, ad E.



Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata eſt; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales ſunt.

IDEM ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quã tres; ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

7.

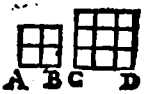
THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commẽſurabilia. Quæ

vero

vero a rectis lineis longitudine incommenſurabilibus ſiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

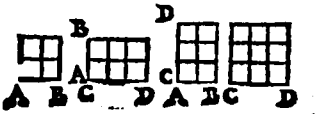
SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. Quoniam. n. rectæ AB, CD, longitudine ſunt commẽ ſurabiles; [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerũ: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt AB, ad CD, vt E, numerus ad numerũ F; [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Itẽ & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratũ ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerũ quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitũ.



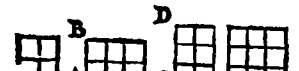
E, 2. F, 3.
G, 4 H, 9.

[a] 5. decimi
[b] 20. ſexti
[c] 11. octa.

ALITER. Poſita eadẽ conſtructione, cõtineatur rectangulum BD, ſub rectis AB, CD. Et E, F, ſe mutuo multiplicãtes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G,



E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.



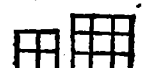
E, 2. F, 3. G, 4. I, 6. H, 9.

H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib. 8. atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdē propos.

[a] 1. *sexti* Quoniam igitur est A B, ad C D, vt E, ad F: [a] Vt autem A B, ad C D, ita est quadratum ex A B, ad rectangulum B D, ob eandem altitudinem A B, si C D, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est A B, ad

[b] 1. *sexti* C D, vt E, ad F, [b] Vt autem A B, ad C D, ita est rectangulum B D, ad quadratum ex C D, ob eandem altitudinem C D, si A B, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum B D, ad quadratum ex C D, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum B D, & quadratum ex C D, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

SIT secundo quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas A B, C D, esse longitudine cōmēsurabiles. Sint. n. numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex A B, ad quadratum ex C D, vt quadratus numerus G, ad quadratū numerū H:



E, 2. F, 3. G, 4 H, 9.

[c] 20. *sexti* [c] Habet aūt quadratū ex A B ad quadratū ex C D, proportionē dupli

[d] 11. *octavi* catam lateris A B, ad latus C D; [d] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris A B, ad latus C D, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant

habeant, quam numeri E, F, a ipſæ commenſurabiles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum. *6. decimi*

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. b Quia igitur eſt vt AB, ad CD, ita quadratũ ex AB, ad rectangulũ BD; Itẽ vt AB, rurſum ad C D, ita rectãgulũ BD, ad quadratũ ex CD, vt ſupra diximus; erũt quadratũ ex AB, rectangulũ BD, & quadratũ ex CD, continue proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineã CD: Sunt autẽ & numeri G, I, H, cõtinue proportionales in rõne numeri E, ad numerũ F, vt ſupra oſtendimus; poniturq; quadratũ ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratũ numerũ H. Igitur erit per lemma præcedens A B, ad C D, vt G, ad I, hoc eſt, vt E, ad F; c ideoq; AB, CD, rectæ, proportionẽ habẽtes, quã numeri E, F, cõmenſurabiles ſunt lõgitudine Qd eſt propoſitũ. b *1. ſexti* c *6. decimi*

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ; erunt A, B, longitudine cõmenſurabiles, vtiã eſt demonſtratũ. Quod eſt abſurd. ſuponũtur enim longitudine incõmenſurabiles. Non ergo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, proportionem habet, quã numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quod eſt propoſitũ.

A ⟝
B ⟝

QVARTO, ac poſtremo quadratũ ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Dico eas longitudine eſſe incõmenſurabiles. Si enim longitudine cõmenſurabiles credãtur; habebũt carũ quadrata, vteſt demõſtratũ, proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. qd eſt abſurdũ. ponuntur. n. non habere. Nõ ergo longitudine cõmenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitũ. Igitur quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia com-

mensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM n. quadrata linearum longitudine commẽsurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; [a] *ipsa commẽsurabilia erũt;* [b] *Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.*

[a] 6. decimi
[b] 3. defin.

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamẽ, quam numerus simpliciter ad numerum, [c] *potẽtia quidem commensurales sunt,* [d] *cũ earum quadrata commẽsurabilia sint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.*

[c] 3. defin.
[d] 6. decimi

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitudine, at potentia commensurabiles, vt modo diximus; liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse.

esse. solum enim ea linea longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [a] potētia quoque incommensurabiles sunt, [b] cum earum quadrata incommensurabilia sint.

[a] 4. defin.
[b] 8. decimi

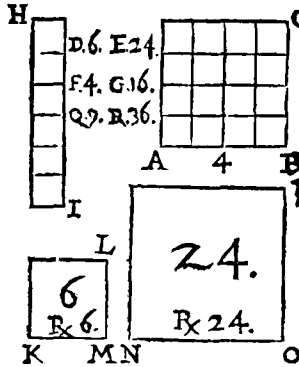
POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quamobrem linea potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter considerāda sunt hac, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cū linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illa, quæ in demonstratione sunt posita: (est enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde econtrario, quadratum inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorū linea, seu latera, ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis linea resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quā

ſunt unitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato linea Rationalis conferantur. Sæpe numero enim linea data cõmenſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quod Rationali linea propoſitæ ſunt longitudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratas menſuras, vel plures continent, quam ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expreſſa numero 4. cuius quadratum AC, continebit menſuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, [a] *vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur rectangulum HI, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur;* [b] *atq; ipſi HI, quadratum æquale conſtituatur KL, cuius latus KM. Poſtremo per ea, quæ in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratum NP, ita ſe habeat KL, quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniã igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratũ KL, ad quadratum NP, per conſtructionem; Continet autem quadratum KL, 6. mẽſuras quadratas, qualium 16. continet quadratũ Rationale AC: (conſtructum enim eſt quadratum KL, æquale rectangulo HI, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris.) continebit quadratum NP, earundem menſurarum quadratarũ 24. ac propterea*



[a] 26. octaui

[b] 14. ſecũdi

Ptera KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erũt Rad 6. & Rad. 24. qua numeris exprimi nequeunt, cũ 6. & 24. non ſint numeri quadrati, eruntq; linea Rationali AB, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeãt, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla uidelicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. [a] Quare longitudine commenſurabiles ſunt recta KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda ſunt ergo in hoc theoremate linea etiam illa longitudine commenſurabiles, qua numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi cõſiderentur eadem linea KM, NO, ſimpliciter, & abſolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum. n. proportionem habeant ſubduplam, ſi KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.

[a] 6. decimi

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerũ G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, reſoluitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor unitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadẽ proportione ſumantur Q, R, pauciores tales menſuras complectuntur quadrata KL, NP, quam ſunt vnitates in numeris quadratis Q, R, cũ alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus cõſtituatur; manifeſtũ eſt, in hoc theoremate intelligenda quoq; eſſe quadrata proportionẽ habentia, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, quę pauciores quadratas mẽſuras, vel plures cõprehẽdũt, quã vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur

cum

cum quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadē quadrata KL, NP, conſiderentur abſolutè, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali linea AB, deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nā ſi recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum KL, quatuor menſuras quadratas, & quadratum NP, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eadem linea ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum AC, Rationalis linea AB, reſoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumq; lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12. & 3. habentes proportionem, quā quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum eſt de lineis lōgitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali linea incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur a rectis lineis longitudine inter ſe commē ſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpe numero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationali ſint longitudine incommenſurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplū eſt quadrati lateris, vt ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus;

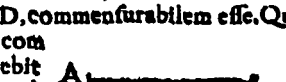
Nulla

Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, qua quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplæ proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum laterit proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera, nempe diameter, & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, sitque A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam enim A, & B, inter se commensurabiles sunt,[a] habebit A, ad B, proportionem quam numerus ad numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F.[b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt.



SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam enim A, & B, incommensurabiles sunt,[c] non habebit A, ad B, proportionem

[a] 5. decimi
[b] 6. decimi
[c] 7. decimi

tionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [a] Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

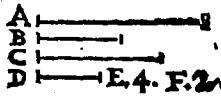
[a] 8. decimi

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secunda commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis appareat. Eodem enim modo ostendemus posteriores duas proportionem habere nameri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 3. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, cõmensurabilis est potentia ipsi B, [b] *erunt earum quadrata commensurabilia,* [c] *ac propterea proportionem habebunt, quã numerus ad numerum.* [d] *Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ propositæ A, B, C, D, proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterq; descriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quã numerus ad numerũ.* [e] *Quare commensurabilia erunt;* [f] *Ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt; non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositũ.*

[b] 3. defin.
[c] 5. decimi
[d] 22. sexti
[e] 6. decimi
[f] 3. defin.



E A-

EADEM ratione, ſi prima ſecunda ſit incommenſurabilis longitudine tantum, erit & tertia quarta longitudine tantum incommenſurabilis. Nam ſi A, & B, ſint longitudine tantum incommenſurabiles; erunt ipſarum potentiæ commenſurabiles; ac propterea ipſæ potentia tantum commenſurabiles erunt. Igitur, vt nunc oſtendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commenſurabiles; Ac idcirco longitudine tantum incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

RVRSVS ſi quatuor magnitudinum priores duæ fuerint linea, duæ vero reliquæ ſuperficies, vel ſolida; ſequetur nihilominus, ſi linea ſint longitudine commenſurabiles, vel incommenſurabiles, & reliquas duas magnitudines commenſurabiles, vel incommenſurabiles eſſe. Si enim linea longitudine ſint commenſurabiles, erit earum proportio, qua numeri ad numerum, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandē, quam linea, erit quoque illarum proportio, qua numeri ad numerum; [a] atque adeo commenſurabiles erunt. Si vero lineæ lōgitudine incommenſurabiles ſint, ſiue potentiæ commenſurabiles exiſtant, ſiue non; non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarum duarum magnitudinum eandem c. m illis proportionem habentium, proportio erit, qua numeri ad numerum. [b] Quare incommenſurabiles erunt. Quod eſt propoſitum.

[a] 6. decimi

[b] 8. decimi

EODEM modo, ſi priores duæ magnitudines fuerint ſuperficies, vel ſolida, poſteriores vero duæ, linea, demōſtrabimus, ſi plana, vel ſolida commenſurabilia ſint, vel incommenſurabilia, lineas longitudine commenſurabiles eſſe, vel incommenſurabiles. Si enim plana, ſolidaue commenſurabilia ſint, [c] habebunt ipſa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & linea eandem cū ipſis rationē habentes, proportionem habebunt, quā numerus ad numerū; ac propterea longitudine commenſurabiles erunt, vt diximus in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Si vero plana, vel ſolida ſint incommenſurabilia, nō habebūt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cum ipſis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommenſurabiles erunt per ea, qua docuimus in ſcholio propoſ. 8. huius lib. Quod eſt propoſitum.

[c] 5. decimi

LEMMA

LEMMA.

DVOS numeros planos innenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non ſimiles, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunque numeros primos, per A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non ſint plani ſimiles, vt ad finem lib. 8. docuimus.

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus. Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EX-

EXPONANTVR quatuor numeri A,B,C,D, ita vt non sit sicut A,ad C,ita B, ad D;& fiat ex A,B, numerus E; & ex C,D,numerus F.Perspicuũ igitur est E,F,numeros planos esse, planos autem dissimiles;quoniam latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.

A, 2.		C, 3.
B, 6.		D,16.
E, 12.		F,48.

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errãt autem huiusmodi interpretes, quia sæpe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam,plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstratione inuenti, 12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habeat 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quacunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

10.
11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum

dratum numerum: Deinde ex corollario propos. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum sic se habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerũ C. Dico D, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine sint incommensurabiles, ita probabitur. Quoniam est quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non est autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommensurabiles sunt. Quod autem tantum longitudine sint incommensurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeãt, quam numerus B, ad numerum C, ipsa commẽsurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commensurabiles. Quare longitudine tantum incommensurabiles sunt.

A ——— B, 10.
E ———
D ——— C, 6.

a 9. decimi

b 6. decimi

SIT iam eidem rectæ propositæ A, inueniẽda linea incommẽsurabilis lõgitudine, & potẽtia. Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incõmensurabiles, media proportionalis. Dico E, ipsi A, incomensurabilẽ esse longitudine, & potẽtia. Quoniam. n. est quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propos. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommensurabilis est longitudine ipsi D, vt iam est ostensum erit & quadratum ex A, incommensurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potẽtia sunt incõmensurabiles; ac proinde ex coroll. propos. 9. huius lib. & omnino lõgitudine incõmensurabiles sunt. Est igitur E, ipsi A, incommensurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propositæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonstrandum.

c 13. sexti

d 10. deci.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, proposita statuatur Rationalis, ita vt ab ea mensura cæterarum sumantur; erit & recta D, per de-

fin.

fin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse utrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod recta A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine, & potentia: Eodemque argumento ostendemus eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim recta D, E, A, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. [a] *Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.*

A 10. B, 10.
E
D C, 6.

[a] 10. deci

IN codicibus vulgatis praponitur hac vndecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decima demõstretur, vt ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12. 12. 8.

QVAE eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerũ E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] sumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, [c] inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

A D. 10. E, 8.
C F, 2. G, 3.
B H, 5. I, 4. K, 6.

[a] 5. decimi
[b] 4. octaui
[c] 6. decimi

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atq; A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoq; A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, [d] erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerũ, nimirũ vt F, ad G. [e] Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps pro-

[d] 5. decimi
[e] 4. octaui

por-

portionalibus; erit rursum ex æquo quadratū ex A, ad quadratū ex B, vt numerus H, ad numerum K. Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atque adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ lōgitudine inter se cōmensurabiles, licet vtraq; cuipiam alteri lineæ potentia tantū sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se cōmensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commēsurabiles, quas quidem inueniemus posteà in scholio 2. propos. 19. huius lib. *a 6. decimi

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitq; A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

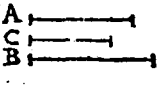
A ——————
C ——————
B ——————

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantū sint cōmensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantū, colligemus quidē eodem argumento, reliquā B, eidem C, potentia esse commensurabilē; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est cōmensurabilis ex hypothesi. Non autē colligere licebit, si A, ipsi C, cōmensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidē C, longitudine commensurabilē esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine cōmensurabilis est, sed C, quidē longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

12. 0.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.



SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse cōmensurabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles. quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 11. deci.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [b] *ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

[b] 11. deci.

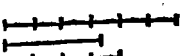
QVONIAM vero hac propositio 13. apud Theonem lemma

Lemma est, fit, vt posthac in nostra editione numerus propositionum Euclidis differat ab eo, quem Theon sequitur. Reliquimus enim dedita opera ordinem ac seriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propositionum Euclidis iam est ascitum.

THEOR. 11. PROPOS. 14. 13. 8.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera autem ipsarum magnitudini cuipiam incommensurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommensurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commensurabiles A, & B, quarum A, incommensurabilis sit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, esse incommensurabilem. Nam si B, dicatur esse commensurabilis ipsi C, ac propterea & C, ipsi B; cũ & A, ipsi B, ponatur commensurabilis; [a] erunt & A, C, inter se commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim A, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi C, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines commensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 12. decimi.

SCHOLIVM.

HIC quoque, si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine; sit autem A, ipsi C, siue longitudine tantum, siue longitudine & potentia incommensurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommensurabilis. Si enim B, & C, essent longitudine commensurabiles, [b] essent quoque A, & C, commensurabiles longitudine. (Cum hoc posito, vtraque A, & C, ipsi B, longitudine esset commensurabilis.) Quod est absurdum, ponitur enim A, ipsi C, longitu-

[b] 12. decimi.

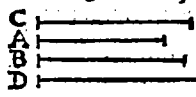
dine incommensurabilis. Quod si A, & B, cõmensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, vtraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

[a] 12. deci.

COLLIGVNT porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.

QVAE incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommẽsurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam. n. A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; [b] erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensæ ipsi C, incommensurabilis; [c] erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.



[b] 14. deci.

[c] 14. deci.

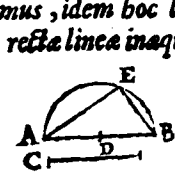
SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incõmensurabiles. Si verò A, & B, incõmensurabiles sint potẽtia, & ipsis potẽtia tantũ cõmensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potẽtia esse incõmẽsurabiles; vt perspicuũ est.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inęqualibus, in uenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, osten-

oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex ijs, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteatque inuenire, quo AB, plus poſſit quam C. Diuiſa AB, bifariam in D, deſcribatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, ſemicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectę EB. Cum enim angulus E, in ſemicirculo rectus ſit; erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc eſt, quam C, quadrato rectę EB. Quod eſt propoſitum. Similiter



[a] 1. quarti

[b] 31. tertij

[c] 47. primi

DVABVS datis rectis lineis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.

HOC etiam aliter tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo datę duę rectæ AE, EB, quæ ſi coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, quippe cum quadratum ex AB, æquale ſit quadratis ex AE, EB.

[d] 47. primi

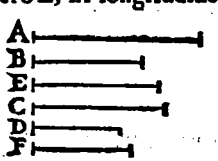
THEOR. 12. PROPOS. 15.

14. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit

quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quã quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tanto plus poſſit quã ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incõmenſurabilis lõgitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, poſsitque A, prima plus quam B, ſecunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus poſsit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C: Si vero E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilẽ eſſe. Quoniam.n.eſt vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Eſt autẽ quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypotheſim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt



[a] 22. ſexti

[b] 22. ſexti

eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quóque C, ipſi F, longitudine commẽſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantũ commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. ſcripſimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16.

15. 9.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commenſurabiles erunt.

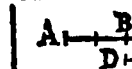
COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilem eſſe. Sit enim ipſarum AB, BC, communis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, [b] metietur quoque D, totam AC, ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur AC, & AB; erunt AC, AB, commẽſurabiles. Similiter cum D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, commenſurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit.



[a] 3. decimi

[b] 1. pron.

SED



SED iam tota AC, ex AB, BC, compoſita commenſurabilis ſit alteri ipſarum AB, BC, nempe ipſi AB. Dico & AB, BC, inter ſe commenſurabiles eſſe. Sit enim D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commenſurabiles erunt AB, BC, inter ſe. Eodé argumento oſtendemus AB, BC, eſſe commenſurabiles, ſi AC, ipſi BC, fuerit commenſurabilis. Si duæ igitur magnitudines cõmenſurabiles componantur, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 3. deci.

[b] 3. pron.

COROLLARIVM.

HINC ſequitur, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita, commenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliquæ commenſurabilem eſſe. Vt ſi AC, ipſi AB, ſit commenſurabilis, eſſe quoque eandem AC, reliquæ BC, commenſurabilem. Nam vt in poſteriori parte theorematis oſtenſum eſt, ſemper D, communis menſura totius AC, & ablatæ AB, cum metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commenſurabiles ſunt AC, BC. Quod eſt propoſitum.

16. 9.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipſarum incommenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum incommenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommenſurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incõmenſurabiles

rabiles A B, B C. Dico totam quoq magnitudinem AC, vtrique ipſarum AB, BC, incommenſurabilem eſſe. Si enim non eſt vtrique incommenſurabilis, ſit alteri commenſurabilis, ſi fieri poteſt,



nempe ipſi A B, [a] ſitque D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam AB; [b] metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramque AB, BC, erunt AB, BC, commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non ergo commẽſurabilis eſt AC, ipſi AB; Eademque ratione neque ipſi BC, commenſurabilis erit. Quare vtrique ipſarum AB, B C, incommenſurabilis eſt.

[a] 3. decimi.

[b] 3. pron.

5ED iam tota AC, compoſita ex AB, BC, incommẽſurabilis ſit vni ipſarum componentium, nempe ipſi AB. Dico quoque AB, BC, incommenſurabiles eſſe. Si enim ſint commenſurabiles, [c] erit quoque tota A C, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis Quod eſt abſurdum. Ponitur enim AC, alteri ipſarum, nempe ipſi AB, incommenſurabilis. Non ergo commẽſurabiles ſunt AB, BC. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, incommenſurabiles eſſe, ſi A C, ipſi B C, incommenſurabilis fuerit. Quapropter ſi duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 16. deci.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliqua incommenſurabilem eſſe. Nempe ſi AC, incommenſurabilis ſit ipſi AB, eſſe quoq; eandem AC, reliqua B C, incommenſurabilem. Si enim AC, ipſi B C, foret commenſurabilis, eſſet quoque A C, ex coroll. precedentis propoſ. reliqua AB, commenſurabilis. Quod eſt abſurdum. ponitur enim incommenſurabilis. Non eſt ergo A C, ipſi B C, commenſurabilis, ſed incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.

SCHO-

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solum linea longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

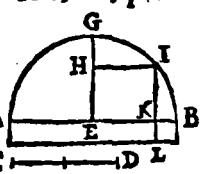
LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidiam maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descri-

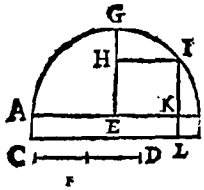
ptum,

ptum, (quod quidem quarta pars eſt quadrati ex tota deſcripti, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2.) minus ſit quadrato ex dimidiata parte maioris deſcripto: (quod quidem applicatum eſt ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, abſolui hoc poſſit per propoſ. 28 lib 6. libet tamen idipſum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione faciliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB, maior ſit, oporteatque ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidē parallelogrammum æquale ſit quartæ parti quadrati ex recta C D, deſcripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, deſcribatur ex centro E, & interuallo EA, vel EB, ſemicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque A E, dimidia ipſius AB, hoc eſt E G, ipſi A E, æqualis, maior quam C F, dimidia ipſius C D. Poſita igitur E H, æquali ipſi C F, agatur per H, ipſi A B, parallela H I, demittaturque I K L, ad A B, perpendicularis, & ſit K L, ipſi K B, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum A L, & quadratum BL. Dico parallelogrammum A L, applicatum ad rectam A B, deficiens figura quadrata BL, æquale eſſe quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam n. KI, media proportionalis eſt inter AK, KB, vt in ſcholio propoſ. 13 lib. 6. tradidimus; [a] erit rectangulum ſub A K, K B, hoc eſt, rectangulum A L, æquale quadrato ex KI, hoc eſt, quadrato ex EH; [b] (eſt enim K I, ipſi



[a] 17. ſexi

[b] 34. primi



KI, ipsi EH, æqualis, ob parallelogrammum EI,) hoc est, quadrato ex CF: Est autem quadratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD; quod quadratum ex CD, per scholiū propos. 4. lib. 2. quadruplū sit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensque quadrato BL, æquale est quartæ parti quadrati ex CD, descripti. Quod est. propositum.

SCHOLIVM. II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectāgulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidià linea descriptum.

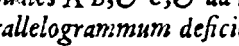
SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius sit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, sit EH, æqualis ipsi CF. Deinde acta HI, parallela ipsi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus AK, KB, æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quam recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales A B, *& C; & ad maiorem* A B, *applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore* C, *descripti, ita vt* D B, *latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmẽta* AD, DB, *inæqualia esse. Si enim* AD, DB, *segmenta dicantur esse æqualia; cum ex* 1. *lemmate parallelogrammum applicatum ad* A B, *deficiensque figura quadrata ex* D B, *descripta, æquale sit rectangulo sub* AD, DB; *sit autem quod sub æqualibus* AD, DB, *quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex* AD, *dimidio ipsius* AB, *descriptum; atque adeo ex scholio propos.* 4. *lib.* 2. *quadratum ex* AB, *quadruplũ erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex* C, *per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex* C. *Igitur quadrata rectarum ex* A B, *& C, æqualia sunt, atque rectæ* A B, *& C, æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, &* A B, *maior. Inæqualia igitur sunt segmenta* AD, D B. *Quod est propositum.*



HOC facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per

ſit per conſtructionem, E H, æqualis dimidiatæ parti ipſius CD, nempe ipſi C F, ductaque H I, parallela ipſi AB, & tandem demiſſa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione ſint A K, K B; manifeſtum eſt AK, KB, ſegmenta eſſe inæqualia, cum A B, in E, ſecta ſit bifariam. Immo hinc conſtat, prius ſegmentum maius eſſe, & poſterius, quod latus eſt quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

17. 13.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſsit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet.

SINT

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, B D, faciatque segmenta AD, DB, longitudine commensurabilia. Dico AB, plus posse quã C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniã. n. per 3. lẽma præcedentis propos. AD, maior est, quam DB; dinidatur AB, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cum totæ EA, EB, æquales sint, & ablatæ quoque EF, ED; erunt & reliquæ AF, BD, æquales. Et quia recta AB, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D; [a] erit rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex EB: Est autem quadruplo rectanguli sub AD, DB, æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cum F D, dupla sit ipsius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale est quadratum ex AB. (quod quadratum ex AB, quadruplum sit per scholiũ propo. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipsius AB.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus potest quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur FD, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles; [b] erit quoq; tota AB, parti DB, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis: (quod composita ex DB, AF, dupla sit ipsius D B) Igitur cum vtraque A B, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B; [c] erunt quoque AB, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cum A B, composita ex AF, DB,



[a] 5. secũdi

[b] 16. deci.

[c] 12. deci.



DB, tanquam una, & ex FD, cōmēſurabilis ſit longitudine cōpoſitæ ex A F, D B; erit eadem AB, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. commenſurabilis lō gitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus poteſt quam C, quadrato rectæ F D, longitudine ſibi commenſurabilis.

SED iam AB, plus poſſit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammū applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque ſegmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine eſſe commenſurabiles. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter demonſtrabimus AB, plus poſſe, quam C, quadrato rectæ FD. Quare cū, AB, ponatur plus poſſe, quam C, quadrato rectæ lōgitudine ſibi cōmenſurabilis; erit recta AB, ipſi FD, lō gitudine cōmenſurabilis. Igitur cū tota A B, cōpoſita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commenſurabilis ſit longitudine ipſi FD; erit eadem AB, longitudine cōmenſurabilis reliquæ compoſitę ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Eſt autem & compoſita ex AF, DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis, cum ipſius ſit dupla: Igitur cū vtraque AB, DB, longitudine ſit cō-
a 12. deci. menſurabilis compoſitæ ex AF, D B; a erunt quoq; AB DB, longitudine inter ſe commenſurabiles: Atque adeo cum tota AB, compoſita ex AD, DB, commenſurabilis
b 16. deci. ſit longitudine ipſi DB; b erunt ipſæ AD, DB longitudine quoque inter ſe commenſurabiles. Quocirca ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonſtrandum.

18. 14.

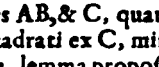
THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autē parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammū ad maiorē applicetur deficiēs figura quadrata, & in partes incōmenſurabiles lōgitudine ipſam diuidat; maior tanto plus poterit,

quam

quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit, quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex C, minore deſcripti applicetur ad AB, per 2. lemma propoſ. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incõmenſurabiles. Dico AB, plus poſſe quã C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus A B, plus poſſe quam C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur demonſtrare oportet ipſi A longitudine eſſe incommenſubilem. Quoniam rectæ A D, D B, ponuntur longitudine incommenſurabiles; [a] erit quoque tota A B, parti D B, longitudine incommenſurabilis. Sed D B, longitudine commenſurabilis eſt compoſitæ ex DB, AF, cum hæc illius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commẽſurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF, ipſa DB, longitudine ſit incommenſurabilis rectæ AB; [b] erit quoque reliqua compoſita ex D B, A F, eidem A B, longitudine incommenſurabilis: Ac propterea cum A B, compoſita ex AF, DB, tanquam una, & ex F D, incommenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex A B, D B, erit eadem A B,

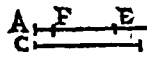


[a] 17. deci.

[b] 14. deci.

per coroll.propoſ.17. huius lib.& reliquæ F D,longitudine incommenſurabilis.Ergo A B,plus poteſt quam C, quadrato rectæ F D,longitudine ſibi incommẽſurabilis.

IAM vero A B, plus poſsit quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi incommẽſuraBilis;& quartæ parti quadrati ex C,æquale parallelogrãmum applicetur ad AB, deficiẽs figura quadrata,faciatque in rectæ AB,partes AD,DB.Dico & rectas AD, DB, eſſe incommenſurabiles longitudine Iiſdem enim conſtructis, oſtendemus vt prius,rectam AB,plus poſſe quam C,quadrato rectæ FD.Quare cum AB,ponatur plus poſſe,quã C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; erit AB,ipſi FD, incommenſurabilis longitudine.Igitur cum tota AB,compoſita ex FD,& ex AF,DB, tamquam vna,longitudine incommenſurabilis ſit ipſi F D; erit eadem AB,per coroll.propoſ.17.huius lib.& reliquæ compoſitæ ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis : Eſt autem compoſita ex AF,DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis,cum illa huius ſit dupla. Igitur cum duarũ linearum commenſurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur,& DB,ipſa compoſita ex A F,DB, longitudine incommenſurabilis ſit rectæ A B; [a] erit & reliqua DB,eidem AB,longitudine incõmenſurabilis ; Ac proinde cum tota AB,compoſita ex AD,DB, incommenſurabilis ſit ipſi DB, longitudine ; [b] erunt & ipſę A D, D B, longitudine inter ſe incommenſurabiles. Quam ob rem ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales,quartę autem parti quadrati, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] *14. deci.*

[b] *17. deci.*

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus;nunc ad Rationales & Mediας tranſit in ſequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonſtratum eſt, lineas longitudine

dine commenſurabiles, omnino & potentia cõmenſurabiles eſſe, potentia vero commenſurabiles, nõ omnino & longitudine, ſed poſſe & longitudine commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles; manifeſtum eſt, ſi expoſitæ Rationali aliqua linea cõmenſurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si vero expoſitæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quod ſi expoſitæ Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis; dicetur & ſic Rationalis, potentia tantum ipſi commenſurabilis.

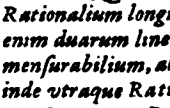
LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expoſitæ Rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolum cõmenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur Rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus Rationales; commenſurabiles, inquam, inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum: Et ſi quidem longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur, etiã potentia commenſurabiles eſſe; Si vero potentia inter

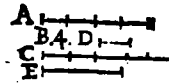
ſe ſolum ſunt commenſurabiles: dicuntur ipſæ quoque Rationales, potentia ſolum inter ſe commenſurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearũ Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe cõmenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique vtraque expoſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes, quot nimirum vnitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliã E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cum habeant D, communem menſuram. Inuenta ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarũ vna, nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.



IAM vero D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communem D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cum ergo & inter ſe



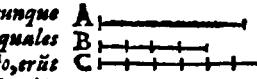
F, 5. G, 3.

ſint

ſint longitudine commenſurabiles; inuenta erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

POSTREMO expoſitæ Rationali A, [a] inueniatur recta B, longitudine tantum incommenſurabilis, quæ ſecetur in quotcunque partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erũt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolum eſſe cõmenſurabiles. Quoniam enim A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeo & potentia; [b] Igitur quadrata rectarum A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine incommenſurabilis; [c] erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolum potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuenta erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia vero tantum commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.

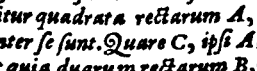
[a] 11. deci.



[b] 12. deci.

[c] 14. deci.

QVOD ſi quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter ſe commẽſurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mẽſura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipſi A, æqualibus, quot ſunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam linea B, C, D, habentes communem menſuram A, longitudine commenſurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineæ Rationales, non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe eſſe commenſurabiles, facile hoc modo demonſtrabimus. [d] *Quoniã Rationales lineæ*

[d] 6. defin.

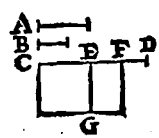
sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] *quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.*

a 12. deci.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque n. linea recta CD, abscindatur CE, ipsi A, æqualis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum sub CE, & EF, hoc est, sub A, & B. [b] *Quoniam igitur est vt CE, ad EF, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*



b 1. sexti

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit nãq; C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia, quod nimirum ab ex poſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur B, Rationale eſt, [a] *erit ipſum Rationali C, commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cum commenſurabilia ſint ipſi B,* [b] *inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripto commenſurabile,* [c] *Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.*



[a] 9. defin.

[b] 12. deci.

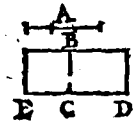
[c] 9. defin.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

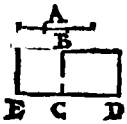
19.
15.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulũ BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus BC, CD, ſecundum aliquem prædictorum modorũ. (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorũ, quos in ſcholio 2. antecedẽtis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarũ



BC,



BC, CD, Rationali expositę A, sit æqualis, vel neutra, sed tamen ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine, aut potentia tantum. Dico BD, rectangulum Rationale esse. Describatur n. ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum; erit quoque quadratum BE, ex BC, descriptum quadrato ex A, commensurabile: Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia uocantur, vel Irrationalia. Igitur & BE, illi commensurabile, Rationale est. Quia vero BC, hoc est, EC, & CD, longitudine commensurabiles sunt; (ponuntur enim BC, CD, Rationales inter se longitudine commensurabiles.) & est vt EC, ad CD, ita EB, ad BD; erunt quoque EB, BD, commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedētis propos. BD, Rationali BE, commēsurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

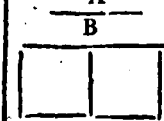
a 3. *defin.*
b 8. *defin.*
c 9. *defin.*
d 1. *sexti*
e 10. *deci.*

20. 16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum expositа Rationalis A, & alia Rationalis BC, secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. expositimus, hoc est, siue BC, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potētia tantum. Applicetur autē ad BC. Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalē esse, & ipsi BC, commensurabilē longitudine. Describatur n. ex BC, quadratū BE; quod simili-



ter,

ter, vt in antecedenti propoſ. oſtendemus Rationale eſſe. Quia igitur B E, B D, Rationalia ſunt, ipſa commenſurabilia erũt quadrato ex lineæ Rationali expoſita A, deſcripto; Ac propterea & cõmenſurabilia inter ſe erũt: [a] Eſt autẽ vt BE, ad BD, ita EC, hoc eſt, B C, ad CD. Igitur & BC, C D, cõmenſurabiles ſunt longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. docuimus. Eſt ergo CD, ipſi B C, cõmenſurabilis lõgitudine: [d] ſed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expoſitæ A, commenſurabilis ſit, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demõſtrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis eſt, & longitudine commenſurabilis ipſi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinẽ efficit, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. defin.
[b] 12. decim.
[c] 1. ſexti
[d] 6. defin.

LEMMA.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe.

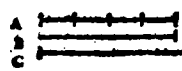
Si enim dicatur Rationalis; erit eius A —— *quadratum* Rationale *quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.*

HOC idẽ conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potẽtes ſpatia Irrationalia, vocãtur Irrationales.

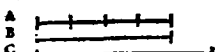
LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium *potentia tantum inter ſe commenſurabiliũ. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſita*



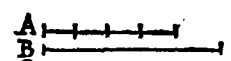
Ra-



Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui

[a] 11. deci. *æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B,* [a] *inueniatur C, longitudine tantũ incõmenſurabilis, ſeu (quod idẽ eſt) potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt; (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum commenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.*

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantũ incom-



[b] 11. deci. *menſurabilis* [b] *inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quod enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraque B, C, expoſitæ*

[c] 6. defin. *Rationali A, ſit potentia commenſurabilis;* [c] *erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles.*

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si inuenienda sint quotcunque linea Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

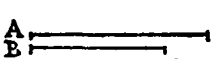
SVMANTVR per ea, qua in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot linea Rationales quaruntur nempe, A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantũ commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex aquo quadratum ex E, ad quadratum ex G. vt A, ad C; similiterq; quadratũ ex E, ad quadratũ ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D,) erunt ipsa inter se commẽsurabilia, ac propterea & recta ipsa potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliqua F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam qnadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.[b] Quare recta E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensa sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.

A, 5.	E
B, 7.	F
C. 3.	G
D, 2.	H

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

QVOD si propositis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, qua omnibus



C, 10. omnibus illis commenſu
D, 6, rabilis ſit potentia tan-
E, 7. tum, fiet id hoc modo.

Sint propoſita duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autẽ alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, [a] *commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. oſtendimus; (quòd D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoque plani non ſimiles, ac proinde ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)* [b] *erunt rectæ B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.*

a 6. decimi

b 9. decimi

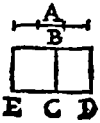
21. 19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et

Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum sub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus. (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non.) Dico rectangulum BD, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi BD, æquale est, Irrationalem quoque, quæ uocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum BE, quod erit Rationale, vt in demonstratione propos. 20. diximus. [a] Et quoniam est vt EC, hoc est, BC, ad CD, vt BE, ad BD. Est autem BC, ipsi CD, longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipsi BD, incommensurabile. [b] Quare cum BE, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A: sit autem BE, ipsi BD, incommensurabile; [c] erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem BD, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, [d] Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.



VOCETVR autem hæc linea potens ipsum BD, Media, [e] propterea quod media proportionalis sit inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratū æquale sit rectangulo BD, sub ipsis BC, CD, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 1. sexti.

[b] 9. defin.

[c] 14. deci.

[d] 10. defin.

[e] 17. sexti

SCHO-

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur. [a] *Cum enim eius quadratum aquale sit rectangulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, qua medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel qua potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hac linea Media hoc loco appellatur.*

[a] 17. sexti

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est, vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres linea sint cõtinue proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, qua Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22 lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD; ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaq; non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus

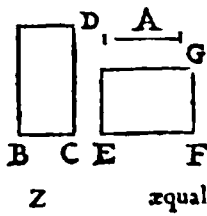
rabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehẽſo æquale eſt, ita vt ipſũ poſſit linea recta, qua Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

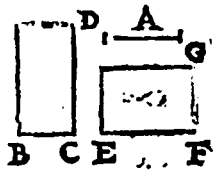
THEOR. 20. PROPOS. 23. 22. 20.

QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] appliceturque ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato



[a] 45. pri.



æquale eſt, faciatq; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi BC, longitudine incommenſurabilẽ. Quoniam.n. A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum inter ſe commẽſurabilibus contentum; alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, ſub Rationalibus EF, FG, potentia tantum commenſurabilibus contentum. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt
[a] 14. ſexti etiam ipſum BD; æqualia erunt BD, & EG, [a] lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nem
[b] 22. ſexti pe erit vt BC, ad EF, ita FG, ad CD; [b] Ac propterea quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex CD: Sed quadratũ ex BC, commenſurabile eſt quadrato ex EF. (quod rectæ BC, EF ponantur Rationales; atque adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽ-
[c] 10. deci. tia tantum.) [c] Igitur & quadratum ex FG, commenſurabile erit quadrato ex CD; proptereaque & rectæ FG, CD, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expoſitę Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa non eſt expoſita Rationalis; erit quoque CD, expoſitæ Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommenſurabilis ipſi BC. Quoniã.n. EF, FG, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt EF, ad FG, ita quadratum ex EF ad rectangulum EG, ſub EF, FG, contentum, ex
[d] 10. deci. lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. [d] erit quadratum ex EF, incommenſurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum ex EF, commenſurabile eſt quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales ſint, atque idcirco ſaltem potentia commenſurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commenſurabile ſit quadrato ex EF; at rectangulum BD, eidem
[e] 13. deci. quadrato ex EF, incommenſurabile, [e] incommenſurabi-

lia

lia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulũ BD, vt recta CD, ad rectam BC. a Incommensurabiles ergo sunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo est CD, & Rationali BC, longitudine incommensurabilis. Quamobrem, quod a Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat. a 10. deci.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis BC, & A, b sumatur tertia proportionalis pro latere CD. Cum enim BC, A, & CD, proportionales sint; c erit rectangulum BD, sub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A. b 11. sexti c 17. sexti

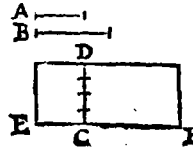
HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiusuis lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifestũ est, omne Medium, hoc est, spatium, quod lineæ Mediæ potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium cõtentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24. 23. 21.

MEDIAE cõmensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, d ad quam applicetur rectãgulũ DE, æquale quadrato ex A, Media. d 45. primi



Quoniam igitur D E. Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit C E, latitudinem; [a] erit C E, Rationalis ipſi C D, longitudine incõmenſurabilis. Rurſus ad CD, Rationalem [b] applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erũt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, DE, DF, commenſurabilia. [c] Eſt autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. [d] Igitur EC, C F, longitudine ſunt commenſurabiles. Sed EC, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi C D, incommenſurabilis. [e] Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ C D, ſit commenſurabilis; (Nam cum E C, C F, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & E C, ipſi CD, commenſurabilis ſaltem potentia, quod Rationalis ſit; erit & CF, eidem C D, commenſurabilis potentia, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus.) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commenſurabiles, [f] Ac proinde recta B, potens rectangulum DF, ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD, CF, Media eſt. Mediæ igitur commenſurabis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.

[a] 23. deci.
[b] 45. primi
[c] 1. ſexti
[d] 10. deci.
[e] 14. deci.
[f] 22. deci.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſſe. Poſtquam enim demonſtratum eſt DF, commenſurabile eſſe Medio DE, oſtenſum ex eo mox fuit D F, eſſe quoque Medium. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

SIT ſpatium D F, ſpatio Medio DE, commenſurabile. Dico & DF, Medium eſſe. Poſsit enim A, Media ipſum DE, Media; (Nam cum D E, Medium ſit, poterit ipſum) recta, quæ Media dicitur, vt

in

in scholio propos. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipsum D F. Quoniam igitur D E, D F, commensurabilia sunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipsis aequalia, commensurabilia. Quare A, B, rectae potentia saltē sunt cōmensurabiles; Atq; idcirco existente A, Media, erit & B, illi commensurabilis Media, vt in hoc theoremate ostensum est. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim spatium, quod potest Media, Medium appellatur, vt in scholio propos. 22. huius lib. docuimus.

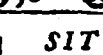
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propos. 19. huius lib. de Rationalibus dictum est, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediae longitudine commensurabilem, dici Mediam, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed & potentia; Vniuerse enim quae longitudine commensurabiles sunt, etiam potentia sunt commensurabiles. Si vero recta quaedam linea Mediae potentia fuerit commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Media, & ipsi commensurabilis longitudine & potentia. Quod si Mediae rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis, dicetur & sic Media ipsi potentia solum commensurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commensurabiles; Item duas potentia tantum commensurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui ſi inueniantur duæ rectæ commenſurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum;



a 24. deci. *erit vtraque B, C, Mediæ A, commenſurabilis, Media. Cum ergo A, B, ſint longitudine commenſurabiles; & A, C, potentia tantum; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commenſurabiles; & A, C, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.*

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Media commenſurabilis, Media ſit; nõ tamen omnis Media cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis; cum duæ Mediæ dari poſſint prorſus incommenſurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propoſ. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ ſint duæ Mediæ longitudine & potentia incommenſurabiles.

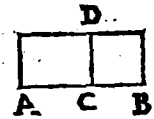
24.
23.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

CONTINEATVR rectangulum AD, ſub Medijs AC, CD, longitudine cõmenſurabilibus. Dico AD, Medium eſſe. Deſcribatur ex CD, Media quadratũ BD,

b 1. ſexti quod erit Medium. b Et quoniam eſt vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autẽ AC, CB, hoc eſt, AC, CD, longitudine cõmenſurabiles;



c 10. deci. c erunt AD, DB, cõmenſurabilia. Quare ſpatium AD, Medio DB, cõmenſurabile, Mediũ eſt, ex coroll. præcedentis propoſ.

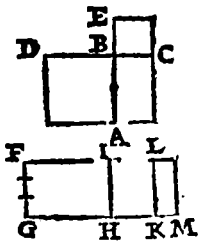
propoſ. Quod ergo ſub Medijs longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

25. 23.

QVOD ſub Medijs potentia tantũ commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehenſum ſub Medijs AB, BC, potentia tantum commẽſurabilibus. Dico AC, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus; cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, [a] ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, deſcripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, deſcripto; eritque totũ FM, vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib. 1. eſt oſtenſum. Quia vero AD, CE, Media ſũt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL, ([b] eſt enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM, [c] erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipſi FG, ſeu KL, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo & ipſis æqualia rectangula FH, LM, commenſurabilia: [d] Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad KM. [e] Igitur GH, KM, longitudine inter ſe commenſurabiles ſunt. Quare GH, KM. Rationales oſtenſæ, ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali vero FG, ſolum commenſurabiles



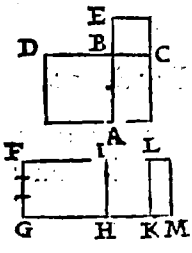
[a] 45. primi

[b] 34. primi

[c] 23. deci.

[d] 1. ſexti

[e] 10. deci.



potentia, cum ei oſtenſæ ſint longitudine incommenſurabiles; Ac propterea rectangulum ſub ipſis G H, K M, Rationale eſt. Et quoniam eſt, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE; (quod DB, BC, ipſis AB, BE, ſint æquales, vtraque vtrique,) & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoque vt AD, ad AC, ita AC, ad CE; atque adeo AD, AC, CE, proportionalia ſunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: Habent autem rectæ GH, HK, KM, eaſdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales ſunt; & propterea quæ rectangulum ſub GH, KM, quadrato ex HK, æquale eſt. Eſt autem rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale. Igitur & quadratum ex HK, Rationale eſt; ideoque & recta HK, Rationalis erit; & ob hoc ipſi FG, Rationali expoſitæ, hoc eſt, ipſi HI, commenſurabilis vel longitudine, & potétia, vel ſolũ potétia. Et ſi quidẽ HK, ipſi HI, longitudine ſit cõmenſurabilis; rectangulũ HL, ſub Rationalibus HI, HK, lõgitudine cõmenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK, ipſi HI, potentia ſolum commenſurabilis ſit; erit rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, potentia tantum commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, Medium. Eſt ergo AC, rectangulum ſub Medijs AB, BC, potentia tantum commenſurabilibus contentum, vel rationale, vel Medium. Quocirca, quod ſub Medijs potentia tantum commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

a 20. deci.
b 1. ſexti
c 1. ſexti
d 17. ſexti
e 6. defin.
f 20. deci.
g 22. deci.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propoſ. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipſi AC, æquale, h *ſi tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis ſumatur pro latere HK.* i *Nam rectangulum ſub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo ſub medijs AB, BC.*

h 12. ſexti
i 16. ſexti

HAC

HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Mediis potentia tantum commenſurabilibus eſſe vel Rationale, vel Mediũ; docebit Euclides propoſ. 28. quanam ratione inuenienda ſint duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propoſ. vero 29. duas Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, [a] rectangulum contentum ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale; [b] Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum rectãgulum eſſe Irrationale, appellarique Medium, & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat, [c] rectangulum comprehenſum ſub duabus Mediis longitudine commenſurabilibus eſſe Medium; [d] Rectangulum autem ſub duabus Mediis potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel Medium.

[a] 20. deci.
[b] 22. deci.
[c] 25. deci.
[d] 26. deci.

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Mediis longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituere; nempe æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulũ AC, comprehenſum ſub duabus Mediis AB, BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico AC, neque Rationale eſſe, neq; Mediũ, &c. Conſtructis. n. eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH, KM, Rationales eſſe, & ipſi FG, longitudine incõmenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponũtur incõmenſurabiles longitudine & potentia; erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo ipſis æqualia rectangula FH, LM, incommenſurabilia: [e] Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad rectam KM. [f] Igitur recta GH, KM, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare GH, KM, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia tantum inter ſe commenſurabiles; [g] Ac propterea

[e] 1. ſexti.
[f] 10. deci.
[g] 22. deci.

ptera rectangulum ſub ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ dicitur Media. [a] *Poteſt autem rectangulum ſub ipſis GH, KM, recta HK: (Nam, vt prius, oſtẽdemus tres GH, HK, KM, eſſe proportionales) Igitur HK, Irrationalis eſt, & Media. Quare IK, Rationale non eſt: ſi enim Rationale eſſet,* [b] *faceret ipſum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK, Medium eſt; Si enim eſſet Medium,* [c] *faceret ipſum applicatum ad Rationalẽ HI, latitudinẽ HK, Rationalẽ, & ipſi HI, longitudine incommenſurabilẽ. quod eſt abſurdũ. oſtenſa eſt. n. HK, Irrationalis, & Media. Itaque cũ IK, neq; Rationale ſit, neq; Medium; neceſſario neq; AC, illi æquale, Rationale erit, neq; Medium, ſed tertium quoddã genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi IK, quod ſub Rationali, & Media, cõtinetur, cui HI, Rationalis ſit, & HK, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectã quæ poteſt ſpatiũ ſub duabus Medijs lõgitudine & potentia incommenſurabilibus) quales ponuntur AB, BC, cõprehenſum, poſſe quoq; rectangulũ ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentũ. Quod eſt propoſitũ.*

[a] 17. ſexti

[b] 21. deci.

[c] 23. deci.

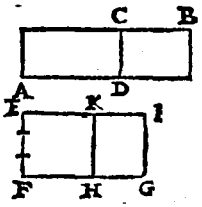
THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non eſſe Rationale. Sit enim, ſi fieri poteſt, DB, Rationale. Expoſita ergo Rationali linea EF; [d] ad ipſam applicetur rectangulũ EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt ſit reliquũ HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Medijs AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, ſunt applicata; [e] erunt rectæ FG, FH, Rationales

[d] 45. primi

[e] 23. deci.



nales, & ipſi E F, incommenſurabiles longitudine. Rurſus, quia Rationale HI, applicatum eſt ad Rationalem HK; (a eſt enim recta HK, Rationali E F, æqualis) a 34. pri.
b erit recta HG, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine ſint commenſurabiles; & b 21. deci.
EF, ipſi FH, longitudine incommenſurabilis, vt eſt oſtenſum; c erit & H G, eidem F H, c 14. deci.
longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt F H, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulũ ſub F H, H G, ex tertio lemmate propoſ. 19. huius lib. d Igitur quadratum ex F H, incommenſurabile eſt rectangulo ſub F H, d 10. deci.
HG. Sed quadrato ex F H, commenſurabile eſt quadratũ ex HG; (quod ſint ambo ex lineis Rationalibus F H, H G, deſcripta) e atque adeo & duo quadrata ex F H, e 16. deci.
HG, ſimul, quadrato ex F H, commenſurabilia ſunt: Et rectangulo ſub F H, H G, commenſurabile eſt id, quod bis continetur ſub FH, HG, (quia hoc illius eſt duplũ.) Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſtendimus, & duo quadrata ex FH, H G, ſimul incommenſurabilia ſunt rectangulo ſub FH, HG, bis. f Quare & compoſitũ ex quadratis rectarũ FH, HG, & ex rectãgulo bis f 17. deci.
ſub FH, HG, incõmenſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarũ FH, HG. g At quadratis ex FH, H G, vna cum rectãgulo bis ſub F H, H G, æquale eſt quadratum ex FG. g 4. ſecũdi.
Igitur & quadratũ F G, incommenſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarum F H, H G: Eſt autem compoſitum hoc Rationale, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. quod oſtenſum ſit cõmenſurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cũ huic cõpoſito, quod Rationale eſt, incõmenſurabile ſit quadratũ ex FG, h erit quadratũ ex F G, Irratio- h 10. defin.
nale; i ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod i 11. defin.
eſt abſurdũ. oſtenſa enim eſt F G, Rationalis longitudine ipſi EF, incõmenſurabilis. Nõ ergo D B, quo Medium AB, ſuperat Mediũ AC, Rationale eſt. Quã ob rem Mediũ nõ ſuperat Mediũ Rationali. Quod erat oſtẽdendũ.

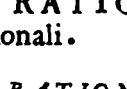
SCHO-

SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonſtrabimus.

RATIONALE ſuperat rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, ſuperet Rationale AC,



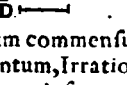
[a] *9. defin.* [b] *12. deci.* *ſpatio DB. Dico DB, quoque eſſe Rationale. Quoniã. n. AB, AC, Rationalia ſũt; [a] erunt AB, AC, commenſurabilia quadrato Rationalis expoſitæ; [b] atque adeo & inter ſe commenſurabilia. Quare cum totum AB, compoſitũ ex AC, DB, commenſurabile ſit ipſi AC; erit quoque idem AB, reliquo DB, commenſurabile, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Eſt autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. Rationale eſt. Quod eſt propoſitum.*

27. O.

PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propoſ. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles [c] inter quas media proportionalis ſumatur C; [d] fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, eſſe Medias



potentia tantum commẽſurabiles, quæ Rationale cõprehendant. Quoniam n. A, B, Rationales ponũtur potentia tantum commenſurabiles; [e] erit rectangulum ſub ipſis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo [f] cum ipſum poſsit recta C, erit C, Media. Et quoniam eſt vt A, ad B, ita C, ad D; ſũntque A, B, potentia tantũ commenſurabiles; erunt quoque C, D, ſolum commenſurabiles

[c] *13. ſexti* [d] *12. ſexti* [e] *22. deci.* [f] *17. ſexti*

ſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus., Eſt ergo & D, Mediæ C, commenſurabilis, Media. Quare inuentæ ſunt Mediæ C, D, potentia tantũ commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Rationale. Quoniam.n.eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita eſt C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [b] poterit rectangulum ſub ipſis C, D, comprehenſum. Eſt autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub C, D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus C, D, potenta tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

[a] 24. deci.

[b] 17. ſexti

PROBL. 5. PROPOS. 29. 28. o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant.

EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles; [c] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [d] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe, potentia tantum commẽſurabiles, quæ Medium cõtinent. Quoniam.n.A, B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, atque adeo & quadratum ex D, [e] quod illi æquale eſt, [f] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E; ſunt autem B, C, Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; erũt quoque D, E, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D, Media ſit, [g] erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis,



[c] 13. ſexti

[d] 12. ſexti

[e] 17. ſexti

[f] 22. deci.

[g] 24. deci.

rabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantum cõmenſurabiles. Dico iam ipſas continere Mediũ. Quoniam.n.eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; [a] eſt quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [a] Rectangulum igitur ſub D, E, æquale eſt ei, quod ſub A, C: Eſt autẽ quod ſub A, C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, [b] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D, E, Medium eſt. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

a 16. ſexti

b 22. decimi.

SCHOLIVM. I.

IN ijs quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem ſe mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

A, 6. C, 12.
B, 4. D, 8.
E, 24. F, 96.

QVONIAM autem in lib. 9. oſtenſum eſt, ſi impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem vero, ſi impar multiplicet imparem; perſpicuum eſt, quonam modo inueniri poſſint duo plani ſimiles, quorum vterq; par ſit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera ſumpta, ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus, impar; horum vero par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

c 38. & 39 noni.

LEMMA

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes *AB*, & *C*, quorum vterque vel par sit, vel impar. [a] Et quoniam, siue a pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto *BD*, ex *AB*, qui æqualis sit ipsi *C*, erit reliquus *AD*, par. Quo diuiso bifariã in *E*; Dico numerum factum ex *AB*, in *BD*, [b] qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri *ED*, facere quadratũ. Quoniam n. numerus *AD*, bifariam est diuisus in *E*, & ei additus *DB*; erit ex 6. theo remate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex *AB*, in *BD*, vna cum quadrato numeri *DE*, æqualis quadrato numeri *EB*. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex *AB*, in *BD*, & quadratus numeri *DE*, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex *BE*, gignitur. quod est propositum.

A ..... *E* ..... *D* ..... *B*
C ... .

[a] 24. & 26 noni.

[b] 1. noni

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, quando *AB*, & *C*, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum *BE*, *ED*, quorum excessus, nimirum numerus ex *AB*, in *BD*, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumãtur *AB*, & *C*, nõ similes, vterq; tamẽ par, vel impar; inuenti erunt eodẽ modo duo

duo quadrati numerorum B E, E D, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex A B, in B D, non eſt
a 2. noni. quadratus. Si enim quadratus eſſet, numeri A B, B D, hoc eſt, A B, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

SCHOLIVM II.

ITAQVE ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterque par, vel impar ſit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, deſcripti ſunt illi, quos quarimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratũ ex E D, numero, qui producitur ex A B, in B D, qui etiã quadratus eſt.

A ..... E ..... D .....B
C .....

SI vero inueniendi ſint duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non ſimiles, quorũ vterque par ſit, vel impar, & reliqua peragẽda, vt prius. Nam ſimiliter oſtendemus quadratum ex B E, æquale eſſe quadrato ex D E, vna cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare exceſſus quadratorum ex B E, E D, eſt numerus factus ex A B, in B D, qui cum non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent A B, B D, plani ſimiles. quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A ... E ... D ..... B
C .....

HOC poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA.

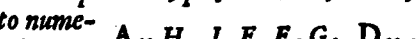
LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes A B, *&* C, *pares, vel impares, vt in lemmate precedẽti, fiatque eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum* A B, D B, *inter se, vna cum quadrato ex* D E, *æqualis sit quadrato ex* B E. *Auferatur deinde ex* D E, *vnitas* E F. *Erit ergo quadratus ex* D F, *minor quadrato ex* D E, *quod & latus* D F, *latere* D E, *minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex* A B, *in* B D, *alter vero ex* D F, *in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex* B F, *vel æqualis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex* B F; *ac propterea latus ipsius maius latere* B F. *Erit ergo latus ipsius vel æquale numero* B E, *vel maius.* (*Minus enim non erit, quoniam inter numeros* B E, B F, *sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vnitas ipsa secetur; Esset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam* B F, *minus vero quam* B E.) *Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex* B E, *æqualis sit quadratus numerus*



compoſitus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cũ eidem quadrato ex BE,



ſit oſtenſus in præcedenti lẽmate æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex DE; erit, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex DE. Ablato ergo communi, eo ſcilicet qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri DE, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex D F, inſe fit, æquale eſt numero BE. Sed neque maius. Sit enim, ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quam BF, ita vt quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior eſt quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, inſe fit, (cum hic cõpoſitus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex AB, in B D. vna cum quadrato ex DE: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus DF, latere DE, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ſit ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neque æquale,

neque

neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex B F.

SIT iam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus eſt, (diuiſus enim eſt A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex ijs, quę ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F. Sed eidem quadrato ex B F, æqualis ponitur numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato D F: Igitur qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis eſt ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F: & detracto communi quadrato ex D F, relinquetur, qui fit ex H B, in B D, ei qui fit ex A B, in B D, æqualis. Quare cum H B, A B, multiplicantes eundem B D, producant æquales numeros; [a] *habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit H B, ipſi A B, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, quadrato ex B F, æqualis.*

[a] 18. ſepti.

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F, ac propterea & latus eius latere B F, minus, quod ſit B G, ita vt qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ſit quadrato ex B G. Sumatur

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . . B
C . . . . . .

autem ipsius E G, duplus A I. Quoniam igitur totus A D, totius F D, duplus est, & ablatus A I, ablati E G; erit rursus & reliquus I D, reliqui G D, duplus; ac propterea I D, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis quadrato ex B G: ponitur autem eidem quadrato ex B G, æqualis qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Igitur qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis est ei, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Ablatis igitur quadratis ex D G, & D F, quorum qui ex D G, minor est, remanebit qui ex I B, in B D, maior eo, qui ex A B, in B D, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F. Sed neque maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Quod est propositum.

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma precedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratū in duos non quadrates partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

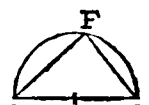
PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

29. 17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

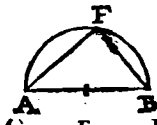
EXPONATVR linea Rationalis A B, & inueniantur ex ijs, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum excessus D E, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in semicirculo A B F, circa diametrum A B, descripto: ac denique connectatur recta F B. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo; [b] erit quadratum ex A B, æquale duobus quadratis ex A F, & F B; hoc est, recta A B, plus poterit quam A F, quadrato rectæ F B. Et quia est quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, vt numerus C D, ad numerum D E; [c] erunt quadrata ex A B, A F, commensurabilia; atque adeo cum quadratū ex A B, sit Rationale, nempe ex linea Rationali A B, descriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, propterea q; & recta A F, ipsum describēs, Rationalis. Rationales ergo sunt A B, A F; atq; adeo cōmensurabiles saltē potentia. Quia vero quadratū ex A B, ad quadratū ex A F, proportionē non habet, quā quadratus numerus ad quadratū numerū; (cū neq; quadratus numerus C D, ad non quadratū D E, proportionem habeat, quā quadratus ad quadratū; alias & D E, quadratus esset, [d] vt in Arithmeticis est demonstratū. qđ nō ponitur) [e] erūt rectæ A B, A F, longi-



[a] 31. tertij
[b] 47. pri.
[c] 6. decimi
[d] 24. deci.
[e] 9. decimi

longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur A B, A F, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

IAM vero, quoniam est vt CD, ad DE, ita quadratū ex AB, ad quadratum ex A F; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratum numerum CE, ita quadratū ex A B, ad quadratum ex F B. (sicut. n. CD, superat DE, quadrato CE, ita etiā quadratum ex AB, superat quadratum ex AF, quadrato ex FB.), Quare rectæ A B, F B, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tātum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quam minor A F, quadrato lineæ F B, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.



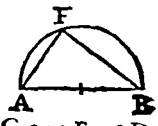
a 9. decimi

30. 18.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compositus C D, non sit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, secetur in duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD. ad neutrum ipsorū CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratū, alias secundum priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus:



dratus: iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum CE, ED, quadratus quoque, [a] vt in Arithmeticis ostensum est. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodeturq; AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto. Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quam AF. quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propo. [S]Quoniã vero rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratũ ex FB: Non habet autem CD, ad CE, proportionẽ quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. [b] Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum cõmensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

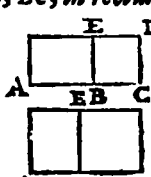
[a] 24. octaui

[b] 9. decimi

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarũ AB, maior sit. Dico esse, vt AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC. Describatur. n. ex BC, quadratũ BD, compleaturq; rectangulũ AD; eritque rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æqualis: perspicuum autem est, esse vt AB, ad BC, ita AE, ad BD.



[c] 1. sexti

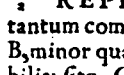
EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua AB, *minor est, quam* BC.

31. 24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

a 30. deci. a REPERTAE sint duæ Rationales A, B, potẽtia tantum commẽsurabiles, ita vt A, maior plus possit quã B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitq; C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniã igitur A, B, sunt Rationales potentia solum commensurabiles;



b 22. deci. b erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autẽ A, & B, potentia tantũ commensurabiles, erũt quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, vt in

c 24. deci. scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autẽ vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C,

d 17. sexti ad B, ita B, ad D; d Ac propterea rectangulũ sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulũ sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quoniam

niam vero est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; [a] poterit quoque C, plus quã D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendũ erat. [a] 15. decimi.

QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantum commnesurabiles, ita vt A, plus possit quam B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

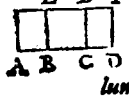
SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum constitutæ. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, *ad rectangulum sub BC,* CD. *Describatur n. ex BC, quadratũ* BCDE, *perficiaturque rectangu-*



lum

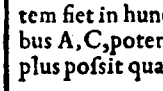
lum AF; Eritque A E, contentum ſub A B, B C; & C F, ſub B C, C D; quod B E, C D, ipſi B C, æquales
a 1. ſexti ſint. a Perſpicuum autem eſt eſſe AB, ad C D, vt AE, ad CF. Quod eſt propoſitum.

32. 26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

SINT inuentę tres Rationales A, B, C, potentia tãtum commenſurabiles, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc au
b 30. deci. tem fiet in hunc modum. b Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commenſurabilibus, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi commenſurabi-



lis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia ſolum commenſurabilis, per ea, quæ in ſcholio propoſ.
c 13. ſexti 21. huius lib. demõſtrauimus.) c Et ipſarum A, B, ſumatur media proportionalis D;
d 12. ſexti d fiatque vt D, ad B, ita C, ad E. Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, eſt vt A, ad C, ita rectangulum ſub A, B, ad rectangulum ſub B, C:
e 17. ſexti e Eſt autem rectangulo ſub A, B, æquale quadratum ex
f 16. ſexti D; f & rectangulo ſub B, C, æquale rectangulũ ſub D, E, quòd proportionales ſint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia ſolum commenſurabiles. Ergo & D, E, potentia ſolũ commenſurabiles ſunt, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib.

lib. oſtendimus. [a] Quia vero D, potens ſpatium ſub A, B, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Irrationalis eſt, & Media; [b] erit quoque E, ipſi oſtenſa commenſurabilis, Media. Inuentæ ergo ſunt duę Mediæ D, E, potentia ſolum commenſurabiles. Et quia oſtenſum eſt rectangulo ſub B, C, [c] quòd Mediũ eſt, (quòd B, C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles,) æquale eſſe rectangulum ſub D, E; erit rectangulum ſub D, E, Medium. Denique quia oſtendimus eſſe vt A, ad C, ita D, ad E; poteſt autem A, plus quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, ex conſtructione; [d] poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine ſibi commẽſurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus poſsit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. Quod erat faciendum.

[a] 22. decì.
[b] 24. decì.
[c] 22. decì.
[d] 15. decì.

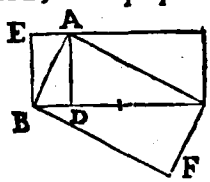
QVOD ſi repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, reliqua autem conſtruantur, vt prius, demonſtrabimus ſimiliter, inuentas eſſe duas Medias D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus poſsit quam minor E, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Id quod facile apparere poteſt ex adducta demonſtratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, a quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum ſub CB, BD, æquale eſſe quadrato ex AB: contentum autem ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC: & contentum ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum denique ſub BC, AD, æquale contento ſub AB, AC.

QVO-

QVONIAM ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis eſt inter CB, BD; [a] erit rectangulum ſub CB, BD, quadrato ex AB, æquale.



EADEM ratione erit rectangulũ ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniã per idem coroll. AC, media proportionalis eſt inter BC, CD.

RVRSVS quia ex eodẽ coroll. AD, inter BD, DC, media eſt proportionalis, erit eodem modo rectãgulum ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

[b] POSTREMO, [b] quia triangula ABC, ABD, ſimilia ſunt; erit vt BC, ad AC, ita AB, ad AD. [c] Quare rectangulum ſub BC, AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, AC. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum ſub BC, AD: Item rectangulũ AF, ſub AB, AC, contentũ. [d] Quoniam igitur rectangulum CE, duplum eſt trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula CE, AF. quod eſt propoſitum.

[a] 17. ſexti

[b] 8. ſexti

[c] 16. ſexti

[d] 41. primi

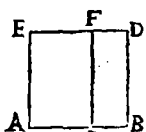
LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta AB, non bifariam in C, ſitque maior pars AC. Dico eſſe vt AC, ad CB, ita rectangu-

lum

lum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub AB, CB. Deſcribatur enim ipſius AB, quadratum ABDE, ducaturque CF, ipſi AE, parallela; eritq; AF, contentum ſub AB, AC, & CD, contentum ſub AB, CB; quod AE, CF, ipſi AB, æquales ſint. [a] *Quoniam igitur eſt vt AC, ad CB, ita AF, ad CD; conſtat propoſitum.*



[a] 1. ſexti

EADEM ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum ſub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum ſub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectanguli, quod ſub maiori linea & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum conſtituentes ABC, ſeceturque minor BC, bifariam in D. Dico rectangulum ſub AB, BC, duplum eſſe rectanguli ſub AB, BD. Cõpleatur rectangulum AC, ſub AB, BC; ducaturq; DE, ipſi AB, parallela; eritq; BE, contentum ſub AB, & BD, dimidia minoris. [b] *Quoniam igitur AC, ipſius BE, duplum eſt, quod & baſis BC, dupla ſit baſis BD; conſtat propoſitum.*



[b] 1. ſexti

EODEM

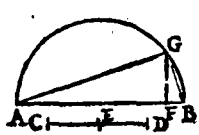
EODEM modo, si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod sub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AB, minore & BD, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

33. 27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

a 35. deci. REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia solum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quá minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; secetur q; CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est, quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud, quod sub AF, FB, continetur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quam CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartę parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum vero sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma



b 19. deci.

ma 1. eiusdem antecedentis propositionis; [a] quòd angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad F B, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cum AF, FB, longitudine sint incõmensurabiles, [b] erũt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. [c] Igitur rectæ A G, G B, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, [d] æqualeque quadratis ex A G, G B; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factũ, [e] æquale est quadrato ex FG; (propterea quòd angulus AGB, rectus est, & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex F G, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare C D, dupla existens ipsius CE, dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cum FG, dimidia sit minoris C D,) [f] Sed rectangulum sub A B, CD, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub A B, FG, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Mediũ est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectãgulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, G B. Contentũ igitur sub A G, GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositũ ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciũt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum; Medium. Quod faciendum erat.

[a] 31. tertij

[b] 10. deci.
[c] 4. defin.
[d] 47. primi

[e] 17. sexti

[f] 22. deci.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antiquo, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea A B, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem, quam



quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniã igitur est vt C, ad D, ita quadratũ ex AB, ad quadratum ex AE; Non habet autẽ C, ad D, proportionẽ quam [a] 9. decimi C, 6. D. 4. quadratus ad quadratũ; erunt latera AB, AE, dictorum quadratorũ proportionẽ non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cum AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine [b] 1. sexti incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. [b] Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur [c] 10. deci. cum AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, [c] erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eademque argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus conflari posse Rationale. Quod est propositum.

AT vero si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totũ AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim vtrumque AF, FB, Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. [d] 16. deci. Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB, [e] Rationale quoque est. Quod [e] 9. defin. est propositum.

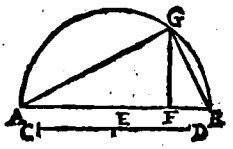
34. 28.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

RE-

a REPERIANTVR duæ Mediæ AB, C D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior AB, plus possit quã minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensuabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas A G, G B, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media A B, b æquale existens quadratis rectarũ A G, G B, Medium est, erit quoque cõpositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus vt in antecedẽti propositione, ostẽdemus rectangulũ sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub A B, C D, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. huius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duę rectæ AG, GB, quæ ostẽsæ sunt potentia incommensurabiles, faciũt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



a 32. deci.

b 47. primi

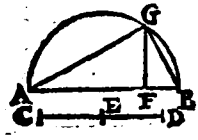
PROBL. 12. PROPOS. 36.

35. 29.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis

dratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

[a] 33. deci. 2 REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media A B, Medium est, [b] 47. primi [b], & quadratis rectarum A G, G B, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus, vt in 34. demonstrabimus, rectangulum sub A B, C D, duplum esse rectanguli sub A B, F G, atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum ex constructione, rectangulum sub A B, C D, Medium sit: erit quoque rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B, quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam vero A B, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi C D; Est autem eidem C D, ipsa C E, longitudine commensurabilis, quod illa huius sit dupla; [c] 13. deci. erunt A B, C E, longitudine incommensurabiles: Sed vt A B, ad C E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, C E, hoc est, ad rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B, (sunt enim rectangula sub A B, F G, & sub A G, G B, per [d] 10. deci. 1. lemma propos. 33. huius lib. æqualia,) [d] Igitur quadratum ex A B, incommensurabile est rectangulo sub A G, G B. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.



SCHO-

SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 24. huius lib. nos demonstrauisse recepimus, minimum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositũ ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulũ Medium, Media, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum sub AG, GB, commensurabilia. quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB, potens compositũ ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB; inuentæ erunt duæ Media & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. 36. 30.

SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR. duę Rationales AB, BC, potentia solum commensurabiles, inuentæ per 2. lem-

ma propoſ. 21. huius lib. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quoniã. n. AB, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi BC; & vt AB, ad B C, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex B C, per lem



[a] 10. deci. ma propoſ. 31. huius lib. erit rectangulum ſub AB, BC, quadrato ex B C, incommenſurabile. Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt eius duplum, nempe quod bis ſub A B, B C, continetur; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt quadratum rectæ A B; (omnia enim

[b] 16. deci. ſunt Rationalia) [b] atque adeo & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quę in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſtendimus, & quod bis ſub AB, BC, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compoſitũ ex eo, quod

[c] 4. ſecũdi bis ſub AB, BC, & ex compoſito quadratorum rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum ex tota AC. ([c] Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vna cũ rectangulo ſub AB, BC, bis) compoſito ex quadratis re-

[d] 17. deci. ctarum AB, BC, [d] incommenſurabile erit: Eſt autem cõpoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, Rationale, quod commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex BC, Rónali. Igitur quadratũ ex A C, quadrato Rónali

[e] 10. defini. ex BC, incommenſurabile, [e] Irrationale eſt; atq; adeo & recta ipſa A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu vt alij loquuntur, Binomiũ, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia ſolum commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales: Nã

[f] 22. deci. *recta quæ inter eas eſt medio loco proportionalis,* [f] *Irrationalis eſt, quæ Media vocatur. At vero compoſita ex ipſis,* [g] *Irra-*

[g] 37. deci. *tionalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.*

THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

37. 31.

SI duæ Mediæ potentia tantum cõmensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] superius inuentæ AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quia.n. AB, est ad BC, vt rectangulũ sub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propos 31. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC, longitudine incommensurabiles; [b] erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex BC, incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, [c] atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, [d] quod huic composito æquale est, [e] incommensurabile quoque est rectangulo sub AB, BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC, cõmensurabile rectangulum semel sub AB, BC, cũ hoc sit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub AB, BC: Ponitur autẽ rectangulum sub AB, BC, Rationale. [g] Irrationale ergo est quadratum



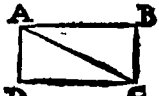
[a] 28. decim.
[b] 10. decim.
[c] 16. decim.
[d] 4. secundi
[e] 17. decim.
[f] 13. decim.
[g] 10. defin.

[a] 11. defin. dratum ex A C, : & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale prius. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATVR rectangulum ABCD, sub Rationali A B, & Irrationali B C. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, [b] *faciet ipsum ad Rationalem A B, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim BC, Irrationalis. Non ergo A C, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*



[b] 21. deci.

38. 32.

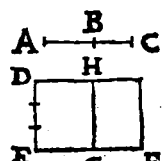
THEOR. 27. PROPOS. 39.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secūda.

[c] 29. deci. COMPONANTVR duæ Mediæ [c] superius inuentę A B, B C, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineāt. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, [d] ad quam applicetur rectangulū D F, æquale quadrato A C; & cōposito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eādem D E, applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangu-

[d] 45. primi

ctangulũ DF, [a] æquale eſt duobus quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub A B, B C; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub AB, BC, continetur. Quoniã vero, ex hypotheſi, rectangulum ſub A B, B C, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub AB, BC, ei commenſurabile, hoc eſt, H F, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt; [b] erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed vtrumque quadratorũ ex Medijs A B, B C, Medium eſt. Igitur & DG, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; ([c] eſt enim G H, Rationali DE, æqualis.) [d] erunt eorũ latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia AB, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt; & eſt vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum ſub AB, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommenſurabile rectangulo ſub AB, BC, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt: Atqui quadrato ex AB, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C; & rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt, quod continetur bis ſub AB, BC, cum hoc illius ſit duplum. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. diximus, erit & compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulũ DG, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, rectangulo HF. [e] Cum ergo ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [f] erit EG, ipſi GF, longitudine incommenſurabilis: oſtenſum autem iam fuit E G, G F, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt EG, GF, potentia tantum commenſurabiles, [g] ac propterea, & tota EF, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex AC, ipſi DF, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur autem



[a] 4. ſecundi

[b] 16. decimi

[c] 34. primi
[d] 33. decimi

[e] 1. ſexti.
[f] 10. decimi

[g] 37. decimi

tem ex binis Medijs secunda, seu vt alijs placet, Bimedialis secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

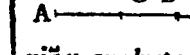
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineã Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic vero lineã Irrationalẽ AC, quę componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit cõpositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineę, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta AD, in B, non bifariam, sitque maior pars AB; *in qua sumatur* BC, *minori parti* BD, *æqualis, vt sit* AC, *excessus, quo* AB, *superat* BD, *hoc est,* BC, *ipsi* BD, *æqualem. Dico quadrata rectarum* AB, BD, *simul maiora esse rectãgulo bis sub* AB BD, *quadrato rectę* AC. *Quoniã* a *n. quadrata ex* AB, BC, *æqualia sunt rectangulo bis sub* AB, BC. *vna cum quadrato ex* AC; *estq;* BC, *ipsi* BD, *æqualis: erunt quoq; quadrata ex* AB, BD, *æqualia rectangulo bis sub* AB, BD, *vna cũ quadrato ex*



a 7. secundi

ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora ſunt, quã rectangulum bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40. 39. 33.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quę faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ [a] ſuperius inuentæ AB, BC, potẽtia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitũ ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulũ vero ſub ipſis contentũ, Mediũ. Dico totã AC, eſſe Irrationalẽ. Quoniã. n. rectangulũ ſub AB, BC, Mediũ ponitur, erit & rectãgulũ bis ſub AB, BC, illi cõmenſurabile, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. atq; adeo Irrationale. Ponitur autẽ compoſitũ ex quadratis rectarũ AB, BC, Rónale. [b] Incõmenſurabile ergo eſt rectangulũ bis ſub AB, BC, compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. [c] Igitur & rectangulum bis ſub AB, BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compoſitum ponatur Rationale; [d] erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; [e] Ac propterea recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur autẽ Maior, quia [f] cum poſſit duo quadrata ex AB, BC,

[a] 34. deci.
[b] 10. defin.
[c] 27. deci.
[d] 10. defin.
[e] 13. defin.
[f] 4. ſecundi



BC, & rectangulum bis ſub AB, BC; compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, per lemma antecedens, maius eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Quare cum compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale ſit, rectangulum vero bis ſub AB, BC, Medium; recte vocabitur AC, Maior, ſiquidem a Rationali, quod maius eſt, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

40. 34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

[a] 35. deci. COMPONANTVR duæ rectæ, ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium; rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam



AC, Irrationalem eſſe. Quoniam.n. compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, Medium eſt; quod uero continetur bis ſub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod ſub AB, BC, ſemel cõtinetur, Rationale ponatur; [b] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC. [c] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectãgulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo bis

[b] 10. defin.

[c] 17. deci.

bis sub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, vt diximus, sit Rationale; [a] erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale; [b] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub A B, B C. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

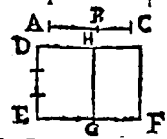
[a] 10. defin.
[b] 11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

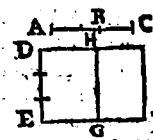
41. 35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciãt & compositũ ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [c] superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Ratio nalis DE, [d] ad quam applicetur rectângulum DF, æquale quadrato ex A C; Et composito ex quadratis rectarum A B, B C, alterum æquale applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangulum D F, [e] æquale est cõposito ex quadratis rectarũ AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum H F, æquale rectangulo



[c] 36. deci.
[d] 45. primi
[e] 4. secũdi



gulo bis ſub AB, BC. Quoniam vero tam compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc eſt, rectangulum DG, quam rectangulum ſub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis ſub A B, B C, nempe ipſum HF, (cum illi ſit commenſurabile) Medium ponitur, [a] facient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB, BC: Eidem autem rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; [b] erunt & DG, HF, incommenſurabilia. Quare [c] cum ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [d] erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles; Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac propterea tota EF, ex ipſis compoſita Irrationalis eſt. Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; [f] ideoque & recta ipſa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.

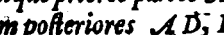
[a] 23. deci.
[b] 13. deci.
[c] 1. ſexti.
[d] 10. deci.
[e] 37. deci.
[f] 11. defin.

LEMMA

SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualiũ ſimul.

SECETVR *recta AB, inæqualiter in* C, *& rurſus*

sus inæqualiter in D, sintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quam posteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, simul maiora esse quadratis ex AD, DB, simul. Diuisa enim AB, bifariam in E,



cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, [a] æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale est eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratū ex EC, maius sit quadrato ex ED; erit reliquū rectangulū sub AC, CB, minus reliquo rectangulo sub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis sub AC, CB, minus erit rectangulo bis sub AD, DB. Quoniā vero quadratum ex AB [b] æquale est tā rectangulo bis sub AC, CB, vna cū quadratis ex AC, CB, quā rectāgulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis sub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectāgulo bis sub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis sub AC, CB, ostensum sit minus rectangulo bis sub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

[a] 5. secūdi

[b] 4. secūdi

SED cadat iā D, inter A, E. Quoniā igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quā partes AD, DB; erit AD, (quæ minor est posteriorū) maior quam CB; (quæ priorū minor est) ac proinde cū AE, EB, æqua-

quales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE.



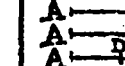
Itaque quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex
* 5. secundi EC, æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

42. 36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVAE ex binis nominibus, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri.



Dico AB, ad aliud punctũ diuidi nõ posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterũ in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, nõ diuidi bifariã. Nam si bifariã diuideretur, essent AC, CB, lõgitudine cõmensurabiles. quod est absurdum ponuntur enim Rationales potentia tantũ cõmensurabiles. Eodẽ modo neque ad D, bifariã secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantũ cõmensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quã ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt, quã partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedẽs, quadrata ex AC, CB, vel minora sũt quadratis ex AD, DB, vel maiora, (Ne-

ra,(Neque enim partes A D, D B, vbicunq; punctum D, exterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima. quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronũciatio 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis sub A D, D B, [a] quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex A B; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A B, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in scholio propositionis 34. huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cũ Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. [b] Quoniam vero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi cõmensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. [c] Quare cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostẽdimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Nõ igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat pun-

[a] 4. secundi

[b] 22. decimi.

[c] 37. decimi.

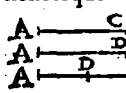
punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

43. 37.

THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult proposito 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctũ diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in



alia nomina AD, DB. Igitur vbicũque punctum D, existat, similiter probabimus, vt in præcedenti propositione, excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, eundem esse, qui est compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B: Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis sub AC, CB, ei, quod continetur semel sub AC, C B, commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis sub AD, DB. Quare cum Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri ostendimus; perspicuum est, excessum rectanguli bis sub A C, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CD, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale est. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. [a] Quare & compositum

[a] 16. decimi.

positum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum vtrumque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, DB. [a] Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

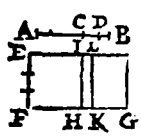
[a] 37. deci.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44. 38.

QVAE ex binis Medijs secunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs secunda AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, Medię sint potętia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propos. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, existat,

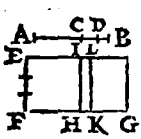


similiter ostendemus, vt in propositione 43. quadrata ex AC, CB, vel maiora esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur Rationalis EF, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB; quandoquidem quadratum ex AB, [c] æquale est quadratis ex AC, CB, &

[b] 45. pri.

[c] 4. secund.

rectangulo bis ſub AC, CB. Eodem modo ſi ad E F, applicetur EK, quadratis ex A D, D B, æquale; erit reliquum LG, æquale rectangulo bis ſub AD, DB, comprehenſo.



Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia ſunt quadratis ex AD, DB; erũt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectæ F H, F K, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex A C, C B, maiora ſunt, per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis ſub AC, CB; erit & EH, maius quam I G; ac propterea EH, maius quam dimidium ipſius EG, ideoque & recta F H, maior quam dimidiũ ipſius F G. Eadem ratione oſtẽdemus FK, maioré eſſe dimidio ipſius FG. Inæquales ergo ſunt partes FH, HG, partibus FK, KG, ſingulæ ſingulis. Quoniã vero AC, CB, Mediæ ſunt, & potẽtia commẽſurabiles; erũt & earũ quadrata Media, & commen

[a] 16. deci. ſurabilia. [a] Igitur & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile erit. Cum ergo vtrũque ipſorũ ſit Medium, erit quoque compoſitũ ex ipſis, hoc eſt, EH, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione

[b] 23. deci. Medium erit E K. [b] Quare E H, E K, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipſi EF, longitudine incommenſurabiles. Eodem modo cũ rectangulum ſub A C, CB, ponatur Mediũ, erit & quod bis ſub AC, CB, hoc eſt, IG, illi commẽſurabile, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad

[c] 23. deci. Rationalem HI, [c] erit HG, Rationalis ipſi H I, longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus L G, Medium eſſe, & KG, Rationalem ipſi KL, lõgitudine incommenſurabilem. Rurſus quia A C, C B, longitudine ſunt incommenſurabiles; & eſt vt AC, ad C B, ita per lẽma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex A C, ad

[d] 10. deci. rectangulum ſub AC, CB, [d] erit quadratum ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile. Sed quadrato ex AC, cõmenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB; cum enim AC, CB, potentia ſint commẽ ſurabiles, atq; adeo ipſarum quadrata cõmenſurabilia;

[e] 16. deci. [e] erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum

quadrato

quadrato ex A C, commensurabile.) Rectangulo uero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulum EH, incommẽsurabile est, per scholiũ propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi IG. Quocirca [a] cũ sit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, [b] erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. [c] Igitur FG, tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Eodem modo ostendemus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, [d] vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctũ, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.

[a] 1. sexti
[b] 10. deci.
[c] 37. deci.
[d] 43. deci.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

45.
39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale; rectangulum vero sub ipsis Mediũ, vt vult propos. 40. huius lib. Dico AB, non posse diuidi ad aliud punctũ in alia nomina, quæ scilicet lineæ incõmensurabiles quoq; sint potẽtia, facientes compositum ex ipsarũ quadratis Rõnale, & rectangulũ sub ipsis Mediũ. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D, extiterit, demõstrabimus similiter, vt in propositione 43. excessum cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, eum esse, qui rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex



quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatiũ est Rationale: (quia cũ utrũque compositum ex hypothesi sit Rationale, erit quoq; eorum excessus spatium Rationale, vt in scholio propos. 27. huius libri ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub AC, CB, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis sub AD, DB. Igitur cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, spatium Rationale: Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

27. decimi.

46. 40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum uero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius libri. Dico AB, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes cõpositum quidem ex ipsarum quadratis Mediũ, & rectangulũ sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri; excessum

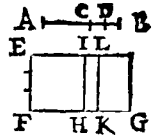


excessum rectanguli bis sub AC,CB, & rectãguli bis sub AD,DB, eundẽ esse, qui est cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. Sed excessus rectanguli bis sub AC,CB,& rectanguli bis sub AD,DB, spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatiũ Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat. *27. deci.

THEOR. 36. PROPOS. 48. 47. 41.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42. huius libri. Dico AB, diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiã lineæ potentia incõmensurabiles, facientes & compositum ex ipsarũ quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctũ D, existat. Constructio autẽ eadem fiat, quæ in propos. 45. ostẽdemusq; vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex



quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media EH, IG, applicata ad Rationalem EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis) faciunt latitudines FH, HG, Rationales, longitudine ipſi EF, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi EF. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypothe ſi, rectangulo bis ſub AC, CB, nempe rectangulo IG, eſtq; vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles; vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtẽdimus: Sed oſtẽſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potẽtia ſolũ cõmenſurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, iam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

a 23 deci.

b 1. ſexti

c 43. deci.

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Ra-

Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secūda.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomē; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum ſex linearũ, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniã nomina linea, qua ex binis nõibus dicitur, ſunt linea Rõnales potentia tantũ commenſurabiles, non poteſt vtrumq; nomen expoſita Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (alias enim nomina ipſa eſſent quoq; linea longitudine inter ſe cõmenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus. quod nõ ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aũt minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent linea inter ſe longitudine commenſurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſsit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vna cum eiſdem tribus generibus alia tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quod commenſurabile antecedit incommenſurabile, vt manifeſtum eſt.

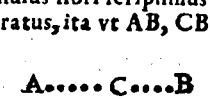
RVR-

RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cū minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49. INVENIRE ex binis nominibus primam.

48.
42.

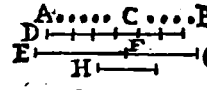
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs, quæ in scholio 2. propo. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem nō habeāt, quam quadratus ad quadratum: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commēsurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam. n. quadrata ex EF, FG, cū proportionem habeant, quam numeri AB, AC, [a] commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles;



[a] 6. decimi

[b] 9. deci.

[a] 37. deci. les;. Atq; idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB, maior, quam AC; erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniã igitur est vt AB, numerus ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebũt quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [b] ac proinde rectæ EF, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.



[b] 9. deci.

49. 43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in precedenti propositione, expositaq; Rationali quadã D; sumatur ei longitudine cõmensurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, esse ex binis nominibus secundam

dam. Quoniá. n. quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, A B, [a] commensurabilia sunt; erunt & rectę FG, EF, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis est. Quia vero A C, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [b] Incómensurabiles ergo sunt longitudine rectę F G, EF. Sút igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [c] Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quę ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cũ enim sit vt numerus AC, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex E F: Et conuertendo vt A B, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autẽ AB, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in precedenti propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilẽ esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quã minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estq; minus nomen FG, expositę Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

[a] 6. decì.

[b] 9. deci.

[c] 37. deci.

PROBL. 15. PROPOS. 51.

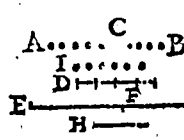
50. 44.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim,

cum

cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quam A C, differet vel ſola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidé, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt ſi AC, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario, quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi AC, ſit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I, & AC, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Expoſita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll propoſ. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF. [a] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportioné habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commenſurabilia; atque adeo & lineæ D, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad AB, hoc eſt, quadratum ex D, ad quadratum ex E F, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratū; [b] erūt D, & EF, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. [c] Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia. Igitur cum E F, oſtenſa ſit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad AC, hoc eſt, quadratum ex EF, ad quadratū ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] erunt EF, F G, longitudine incommenſurabiles Sūt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [e] Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe



a 6. decimi

b 9. decimi

c 6. decimi

d 9. decimi

e 37. deci.

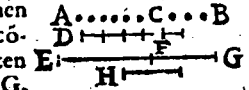
esse. Quoniam.n. est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF; Et vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autẽ I, ad AC, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratũ. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum;[2] ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Est autem AB, maior quam AC; erit & quadratũ ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commẽsurabilis; & neutra ipsarum EF, FG, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

[2] 9. decimi

PROBL. 16. PROPOS. 52. 51. 45.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rónalis, cũ Rationali D, commen



surabilis sit. Quod si reliqua cõstruantur, vt in propos. 49 ostendemus similiter, vt ibi, totũ EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim

rursus

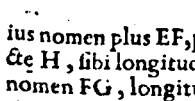
rursus, vt in 49. propos. quadratum ex EF, maius quam quadratũ ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectę H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionem rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratũ ex EF, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerum quadratũ.
a 9. decimi. a Longitudine ergo incõmensurabiles sunt rectę EF, & H. Itaq; cũ maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen EF, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

52. 46.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in precedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositę Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt AB, ad CB, ita



quadratum ex EF, ad quadratũ ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incõmẽsurabiles esse. Quare cum maius nomen plus EF, possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommmensurabilis, & minus nomen FG, longitudine commensurabile expositę Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

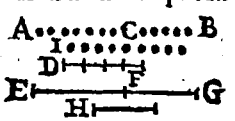
PROBL.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

53. 47.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non similibus, quorum neuter sit quadratus, & compositus ex ipsis AB, non sit quoque quadratus, habeatq; ad neutrū ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, si numerus qui libet nō quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos.) Nam hac ratione & totus ad vtrūque ipsorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quę ad finē lib. 8. demonstrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, nō quadratos proportionem nō habebit, quā quadratus ad quadratū. Exponatur deinde Rationalis aliqua D, & vt I, ad AB, ita fiat quadratū ex D, ad quadratū ex EF, per coroll. propos. 6. huius lib. & reliqua fiāt, vt in propos. 51 ostendemusq; vt ibi, rectas D, & EF, esse longitudine incommēsurabiles, atq; totā EG, ex binis esse nominibus. Dico & sextāesse. Demonstrabimus. n. similiter, vt in 51. propos. D, & FG, longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoque vt in propos. 49. per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; erunt rectę EF, & H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius nomen



a 30. sept.

b 9. deci.

nomen EF, plus posit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum EF, F G, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.

LEMMA.

SI recta linea secta sit vtcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, mediũ proportionale inter quadratum totius lineę, & quadratum dictæ partis.

SECTA sit recta AB, vtcunq; in C. *Describatur ex AB, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur* B E: *Ducta autem ex* C, *recta* CF, *ipsi* BD, *parallela, quę diametrum secet in G, agatur per G, ipsi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2.* FH, CI, *quadrata partium* AC, CB; *vtrumq; autem rectangulorum* DG, GA, *comprehensum sub eisdem partibus: At vero rectangula* CD, AI, *sub tota* AB, *& parte* CB, *contenta. Dico* DG, *mediũ proportionale esse inter quadrata* FH, CI: *At* CD, *mediũ esse proportionale inter quadrata* AD, CI. *Quoniã n.*[a] *vt* HG, *ad* GI, *ita est tam* FH, *ad* DG, *quã* AG, *ad* CI; *erit vt* FH, *ad* DG, *ita* AG, *ad* CI: *Est autem* AG, *ipsi* DG, *æquale. Igitur erit quoque vt* FH, *ad* DG, *ita* DG, *ad* CI; *Atq; adeo* D G, *medium proportionale est inter quadrata* FH, CI.

[a] 1. sexti.

[b] 43. prim.

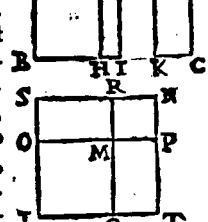
RVR-

RVRSVS quia est [a] *vt* AB, *ad* CB, *ita tam* AD, *ad* CD, *quam* AI, *ad* CI; *erit vt* AD, *ad* CD, *ita* AI, *ad* CI: *Est autem* AI, *ipsi* CD, *æquale. Igitur erit vt* AD, *ad* CD, *ita quoque* CD, *ad* CI. *Quare* CD, *medium proportionale est inter quadrata* AD, CI. *Eodem modo erit* AF, *medium proportionale inter quadrata* AD, FH. [a] 1. sexti.

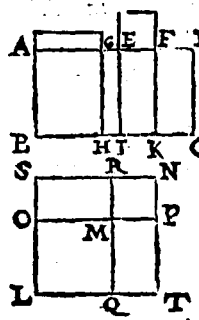
THEOR. 37. PROPOS. 55. 54. 48.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineã, quę potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit. n. ipsius AD, maius nomẽ AE. Erũt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & deniq; AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariã in F. Quia igitur AE, plus potest quam ED, quadrato rectæ sibi lõgitudine commẽsurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammũ sub AG, GE, cõtentum, per 2. lemma propos. 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; [b] in partes longitudine cõmensurabiles ipsam diuidet. Quare AG, GE, partes inter se



[b] 18. deci.



ter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK.[a] Et parallelogrammo A H, æquale quadratum fiat L M: At parallelogrammo G I, æquale fiat quadratum M N; consungantur; quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnã rectam lineam constituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnã rectam QR, vt demonstratum est a nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quod anguli OMQ, PMR, ad verticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cum rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales sint, ideoque & tota OP, toti QR;[b] sit autem O P, ipsis S N, LT; & QR, ipsis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoque quadratum.

[a] 14. secun.

[b] 34. prim.

QVONIAM vero rectangulum sub AG, GE, æquale est, per constructionem, quadrato ex EF;[c] erit vt AG, ad EF, ita EF, ad GE;[d] Ac propterea & vt AH, ad EK, ita E K, ad GI. Quare EK, medium proportionale est inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur est T M, ipsi E K.[e] Cum ergo ipsi T M, æquale sit M S,[f] & ipsi E K, æquale sit F C; erit & M S, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum L N, toti rectangulo A C, æquale est; atq; adeo recta OP, potest spatiũ AC, contentum sub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

[c] 17. sexti

[d] 1. sexti.

[e] 43. primi

[f] 36. primi

QVONIAM enim A G, G E, ostensæ sunt longitudine commensurabiles;[g] erit & tota AE, vtrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cum sit maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12. huius

[g] 16. deci.

lib

lib. longitudine commensurabiles sunt; Atque adeo cum AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. [a] Quare rectangula AH, GI, sub Rationalibus longitudine cõmensurabilibus cõtenta Rationalia sunt; Ideoque & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Rationalia erũt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rõnales erũt. [a. 20 deci.]

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis AG; & ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & AG, EF, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & AH, EK, [b] eandem proportionem habentia, quam AG, EF, [c] incommensurabilia sunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. [d] Igitur & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, [e] cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. [f] Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

[b 1. sexti] [c 10. deci.] [d 10. deci.] [e 1. sexti.] [f 37. deci.]

THEOR. 38. PROPOS. 56.

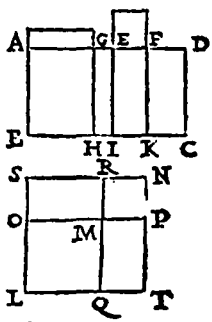
55. 49.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR spatiũ AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit enim ipsius AD, maius nomẽ AE.

Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quam ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commẽsurabilis; Et denique ED, Rationali expositę AB, longitudine cõmensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua construantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto, demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incõmensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB; [a] erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine cõmensurabiles; [b] erit quoque tota AE, vtrique ipsarum cõmensurabilis. Quare cum AE, maius nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales: quod cum utraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at uero AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit utraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine. Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. [d] Igitur rectangula AH, GI, Media sunt, propterea & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, MP, sunt Mediæ.



QVIA uero AG, GE, longitudine sunt commensurabiles; [e] erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionẽ habentia, commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt;

[a] 13. deci.
[b] 16. deci.
[c] 14. deci.
[d] 22. deci.
[e] 10. deci.

ſunt; Ipſi vero AE, oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis AG; & ipſi ED, longitudine cómenſurabilis eſt EF, eius dimidia; erunt per ſcholium propoſ. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipſis, [a] incommenſurabilia ſunt. Igitur & LM, MT, ipſis AH, & EK, æqualia, incommenſurabilia ſunt. [b] Ideoq; & rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles. [c] cum eandem habeant proportionem, quã LM, MT. Cum ergo oſtenſum ſit OM, MP, Medias eſſe, & commenſurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi AB, hoc eſt, ipſi EI: Eſt autem EF, ipſi ED, quoque longitudine commenſurabilis; [d] erunt etiam EI, EF, longitudine commenſurabiles; Ac propterea cum EI, Rationalis ſit, erit & EF, Rationalis. [e] Quare EK, rectangulum, Rationale eſt: Eſt autem MT, ſub OM, MP, contentum ipſi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale eſt. Quapropter OM, MP, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, Rationaleque continentes; [f] atque adeo OP, Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 10. deci.
[b] 10. deci.
[c] 1. ſexti.
[d] 12. deci.
[e] 20. deci.
[f] 38. deci.

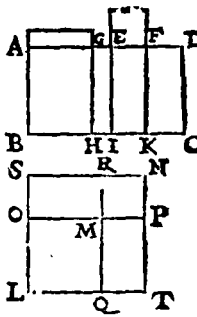
THEOR. 39. PROPOS. 57.

56.
50.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ

quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit. n. ipſius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique neutra ipſarum A E, E D, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propoſ. 55. Similiter ergo, vt ibi, oſtendemus rectam O P, poſſe ſpatium A C: Et vt in antecedenti propoſ. 56. rectas O M, M P, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles; propterea quod A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipſi A B, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam vero E D, E F, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtque E D, ipſi A B, Rationali, hoc eſt, ipſi E I, longitudine incommenſurabilis; [a] erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quod E F, dimidia ſit ipſius E D, Rationalis; & E I, expoſitæ Rationali A B, æqualis. Igitur E F, E I, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; [b] Ac propterea E K, Medium eſt; idcoque & M T, æquale ipſi E K, Medium eſt, quod ſub Mediis O M, M P, continetur. Itaque cum O M, M P, Mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; [c] erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 14. deci.

[b] 22. deci.

[c] 22. deci.

57. 51.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali,

nali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potẽs Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalẽ, quæ Maior vocatur. Sit.n. AE, ipſius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique AE, ipſi AB, commenſurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. [a] Erunt ergo AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam.n. AG, GE, longitudine incommenſurabiles ſunt; [b] erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atque adeo & quadrata LM, MN, ipſis AH, GI, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia vero AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; [c] & rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN: Compoſitum ergo ex quadratis LM, MN, Rationale eſt.

[a] 59. decim.

[b] 10. decim.

[c] 20. decim.

ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartę, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali AB, erit & EF, ipſius dimidia eidẽ AB, longitudine incõmenſurabilis; Et eſt EF, Rationalis, cũ ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales ſunt potentia ſolũ cõmenſurabiles. [d] Quare

[d] 22. decim.

EK, Medium est, sub ipsis contentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; sub OM, MP, Medium est. Quocirca cum OM, MP, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis MT, Medium; [a] Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat ostendendum.

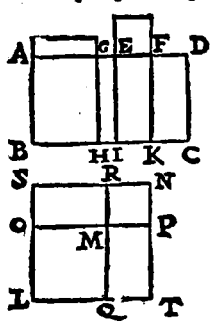
[a] 40. deci.

58.
52.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, esse Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Mediū. Sit.n. ipsius AD, maius nomē AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantū commensurabiles; & AE, plus potest, quam ED, quadrato rectæ lōgitudine sibi incōmensurabilis; & deniq; ED, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali AB. Secta ED, bifariā, fiant reliqua eadē, quæ in propos. 55. [b] Erunt igitur rursus AG, GE, longitudine incommēsurabiles. Simili autem modo, vt in ppos. 55. cōstabit rectā OP, posse spatiū AC. Dico OP, Irrationalē esse, quæ potens Rationale & Mediū appellatur. Erunt enim, vt in propos. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommensurabiles. Et quia AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quintæ, linea est Rationalis



[b] 19. deci.

tionalis & longitudine incõmensurabilis Rationali AB; erũt AE, AB, Rationales potẽtia tantũ cõmensurabiles.

a Quare rectangulum AI, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali AB, cum sit minus nomẽ ipsius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipsius dimidia, eidem AB, commensurabilis lõgitudine, & Rationalis.

b Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, lõgitudine commensurabilibus, Rationale est; atque idcirco & MT, sub OM, MP, contentũ Rationale erit, cum ipsi EK, sit æquale. Quamobrẽ cũ rectæ OM, MP, potentia incõmensurabiles sint, faciantque cõpositum quidẽ ex ipsarũ quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, sub ipsis contentum, Rationale;

c Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demostrandum.

a 22. decimi.

b 20. decimi.

c 41. decimi.

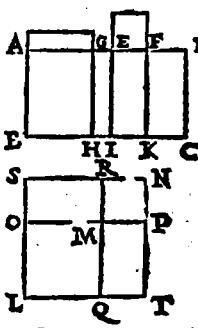
THEOR. 42. PROPOS. 60.

59.
53.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta; Recta linea spatiũ potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectam, quę spatium AC, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potẽs bina Media. Sit. n. ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commensura-

ſurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis; & denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB. Fiant omnia, quæ in ſuperioribus; eruntque AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Iã vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ. 58. rectas O*M*, *M*P, potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis L*M*, *M*N, Medium. Vt autẽ in propoſ. 58. erit quoque *M*T, ſub O*M*, *M*P, comprehenſum, Mediũ. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommẽſurabilis eſt longitudine ipſi ED; hæc vero eidem commẽſurabilis; erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles. Igitur & AI, EK, incommenſurabilia ſunt. cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis L*M*, *M*N, quod ipſi AI, æquale, eſt, & rectangulum *M*T, quod ipſi EK, eſt æquale, incommenſurabilia ſunt. Quapropter cum rectæ O*M*, *M*P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarũ quadratis L*M*, *M*N, Medium, & *M*T, ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis; erit tota OP, Irrationalis, quę bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta, &c. Quod oſtendendum erat.



19. deci.

b 13. deci.

c 10. deci.
d 1. ſexti.

42. deci.

60.

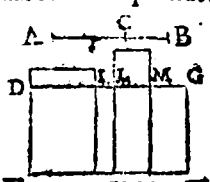
54.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT

Sit ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; [a] & ad Rationalem expositam D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub A C, C B, continetur, cum quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, [b] æqualia sunt quadrato ex A B, quemadmodum & eidem quadrato ex A B, æquale est, per cõstructionem rectangulũ D F. Secetur L G, bifariam in M, puncto, per quod ipsis L K, G F, parallela agatur M N: eritque vtrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur. [c] Et quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota A B, sit ex binis nominibus; erũt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commensurabilia; [d] quorum vtrique cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectangulum D K. Igitur & D K, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, [e] faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine commensurabilem.

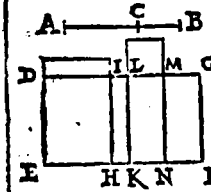


RVRSVS quia A C, C B, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, [f] erit rectangulum sub ipsis, Medium, atq; adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, [g] facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. Igitur D L, L G, longitudine incõmensurabiles sunt. Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commẽsurabiles; [i] Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

QVO-

[a] 45. primi
[b] 4. secun.
[c] 37. decim.
[d] 16. decim.
[e] 21. decim.
[f] 24. decim.
[g] 23. decim.
[h] 19. decim.
[i] 37. decim.

QVONIAM, n. ex lémate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC, CB, medium proportionale eſt inter quadrata ex AC, CB, erit quoque LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo



[a] 1. ſexti. cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeát, quam DH, LN, IK; erit quoque recta LM, media proportionalis inter DI, IL. [b] Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, cómenſurabilia ſunt, quod AC, CB, ponuntur potentia cómenſurabiles; erunt & DH, IK, ipſis æqualia, commenſurabilia.

[b] 17. ſexti.

[c] 10. deci. [c] Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autẽ DK, maius eſt, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora ſint, per lemma propoſ. 39. huius libri, quam rectangulum bis ſub AC, CB; erit & recta DL, maior quã LG, [d] cum DL, LG, eandem rationem habeant, quã DK, LF. Itaque quoniam DL, maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatur rectangulum ſub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore LG, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quadrato ex LM.) diuiditurq; DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; [e] poterit DL, maior plus quam LG, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum DG, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus poſſe, quam LG, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine cómenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtendendum erat.

[d] 1. ſexti.

[e] 18. deci.

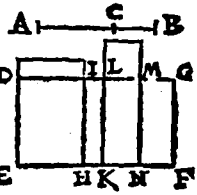
61. 55.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis

binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC;[a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundã. Cõstituantur. n. eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipsorum LN, MF, ei quod sub AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes [b] Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erũt quadrata ex AC, CB, atq; adeo rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. DK, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalẽ DE; [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub AC, CB, Rationale est; erit & eius duplum, nempe LF, Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem LK; [e] erit eius latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarũ DL, LG, ipsa LG, sit ipsi DE, cõmẽsurabilis lõgitudine, at DL, longitudine incõmensurabilis, [f] erũt DL, LG, longitudine incõmensurabiles. Quod cũ DL, LG, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potẽtia solum cõmẽsurabiles; [g] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, maius nomen esse, & posse plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius DG, maius nomen DL, plus possit



[a] 45. primi
[b] 38. deci.
[c] 16. deci.
[d] 23. deci.
[e] 21. deci.
[f] 13. deci.
[g] 37. deci.

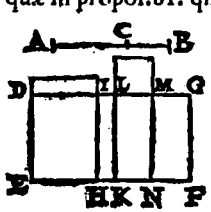
posit, quam minus nomen LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen LG, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Medijs prima, &c. Quod erat ostendendum.

62. 56.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs secũda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Medijs secunda AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciẽs DG. Dico DG, esse ex binis nominibus tertiã. Cõstructis. n. ijsdẽ, quæ in propos. 61. qm AC, CB, ex binis Medijs secundã AB, componentes, [b] Medię sunt potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent; Erũt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectãgula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, & Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtriusque ipsorum DH, IK, sit commẽsurabile; erit & ex coroll. propos. 24. huius libri DK, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem DE; [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incõmensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, CB, Medium est; erit & eius duplum LF, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem LK; [e] erit latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est ipsi DE longitudine incommensurabilis. Et quia AC, ipsi CB, longitudine est incommen-



[a] 45. primi
[b] 39. decim.
[c] 16. decim.
[d] 23. decim
[e] 23. decim.

mensurabilis;estq; vt AC,ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC,CB,[a] erit quoque quadratum ex AC,rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. [b] Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, CB,quod quadrata ex AC, CB, commensurabilia sint,quippe cum recte ipse potentia ponantur commensurabiles;& rectangulo sub AC, CB, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub AC,CB.Igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est,rectangulum DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC,CB,hoc est, rectangulo LF, per ea,quæ in scholio propos.14.huius libri conscripsimus.Quare rectæ DL,LG, eandem rationem cum DK, LF, habentes [c] longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; [d] ac propterea tota DG,ex binis nominibus est.Iam vero vt in propos.61.ostendemus DL,esse maius nomen, possitq; plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cum DL, maius nomen plus possit, quam LG, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, LG,Rationali expositæ DE, sit ostensa longitudine cõmensurabilis;erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratũ ergo eius,quę ex binis Medijs secũda, ad Rationalem applicatum,latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

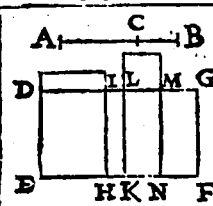
[a] 10. decl.
[b] 16. decl.
[c] 10. decl.
[d] 37. decl.

63.
57.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

SIT



SIT Maior AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse quartam. Construantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia AC, CB, Maiorem AB, componentes, [b] potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Medium; erit quoque DK, compositum ex quadratis rectarum AC, CB, æquale existens, Rationale; At vero LF, duplum eius, quod sub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale DK, ad Rationalem DE, est applicatum; [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item cum LF, Medium sit applicatum ad Rationalem LK; erit LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipsi DE, commensurabilis sit longitudine; hæc vero eidem DE, longitudine incommensurabilis; [e] incommensurabiles erunt longitudine DL, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [f] ideoque DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM. Quia autem quadrata ex AC, CB, incommensurabilia sunt, quod rectæ AC, CB, potentia incommensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommensurabilia; [g] atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam vero vt in propos. 61. ostendimus, DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DI, IL, quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam DL, ad I, in partes longitudine incommensurabiles; [h] poterit DL, plus quã LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa DL, (maius nomen ipsius DG,

a 45. prim.
b 40. deci.
c 41. deci.
d 23. deci.
e 13. deci.
f 37. deci.
g 10. deci.
h 19. deci.

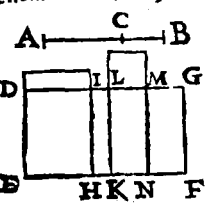
D G, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali DE; erit ex defi. DG, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 47. PROPOS. 65.

64. 58.

QVADRATVM eius, quę Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam esse. Fiant. n. eadé omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, compouentes AB, potentem Rationale ac medium [b] potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectãgulum sub ipsis contentum, Rationale; erit DK, æquale composito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium; & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, [c] facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, [d] facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa vero longitudine incommensurabilis;



[a] 45. primi

[b] 41. deci.

[c] 23. deci.

[d] 21. deci.

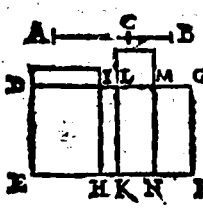
[a] erunt DL, LG, lõgitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potẽtia solũ cõmensurabiles; [b] Ac propterea DG, est ex binis nominibus. Iã vero, vt in propos. 61. ostendemus rectangulũ sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM; & vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quam LG, quadrato rectę sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cũ & minus nomẽ LG, ostẽsum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

a 13. deci.
b 37. deci.

65. THEOR. 48. PROPOS. 66. 59.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

SIT bina *Media* potens recta A B, cuius maius nomen AC, [c] & ad Rationalẽ D E, applicetur rectãgulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextã. Constructis.n. iisdem, quæ in propos. 61. quoniã recte AC, CB, componentes ipsam AB, potentẽ bina *Media*, [d] potentia incommẽsurabiles sunt, faciuntq; & cõpositum ex ipsarum quadratis *Medium*, & quod sub ipsis cõtinetur, *Medium*, & incommensurabile compositio ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi compositio æquale, quam LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, *Mediũ*. Et quia *Media* DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; [e] erũt eorum latitudines D L, L G, Rationales ipsi DE, longitudine incommen-



c 45. primi
d 42. deci.
e 23. deci.

commensurabiles. 3 Quoniam vero compositũ ex quadratis rectarum AC, CB, *incommensurabile* est rectangulo sub AC, CB; eidem vero rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplum; [b] Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, CB, *hoc est*, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [c] longitudine *incommensurabiles* sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum commensurabiles; [d] Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen; possecq; plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Cũ ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus *sextam*. Quod erat ostendendum.

[a] *42 deci.*

[b] *13. deci.*

[c] *10. deci.*

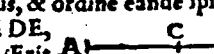
[d] *37. deci.*

THEOR. 49. PROPOS. 67.

66. 60.

EI, quæ est ex binis nominibus, lõgitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunq; AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitque recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoq; esse ex binis nominibus, & ordine eandẽ ipsi AB. [a] Fiat.n. vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE.



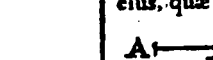
[a] *12. sexti.*

[f] *19. quin.*

Et quoniã ipsi AB, *longitudine cõmensurabilis* ponitur DE; erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, lõgitudine com-

[g] *10. deci.*

[a] 37. deci. mensura bilis : [a] Sunt autem A C, CB, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & D F,



FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita CB, ad FE; & permutando vt A C, ad C B, ita D F, ad FE: Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles;

[b] 10. deci. [b] erunt & DF, FE, potentia solum commensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; [c] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico

[c] 37. deci. & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ lineę sibi longitudine commẽ surabilis, aut incõmensurabilis. Si quidẽ AC, plus potest

[d] 15. deci. quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis; [d] poterit & DF, plus quã FE, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis. Quod si AC, cõmensurabilis

[e] 12. deci. sit longitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominibus prima; [e] erit & DF, eidẽ Rationali lõgitudine commensurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit commẽsurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositę longitudine commensurabilis. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C; C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali,

[f] 13. deci. ita vt AB, sit ex binis nominibus tertia; [f] erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

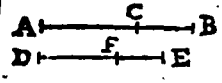
A T si AC, plus posit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; [g] poterit & DF, plus

[g] 15. deci. quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse vel quintam, vel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Si igitur, quę ex binis nominibus, longitudine commensurabil.s, &c. Quod erat ostendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si recta DE, potentia tantum commensurabilis sit ipsi AB, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantum:) & DE, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si AC, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & DF, maius nomē eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expositæ Rationalis, & DF, eidem AC, longitudine cōmensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si AB, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt DE, illi potentia tantū cōmensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.



SIT enim AB, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C; sitque ei cōmmensurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes AC, CB, partibus DF, FE proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri posse, vt DE, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi AB. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine. [a] Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt propterea & AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima est. Eadē modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. Sed neq; secūda vel quinta. Esset. n. vtrūq; nomen minus CB, FE, ex

[a] 12. decī.

[b] 10. decī.

defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atque adeo & inter se. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilem, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Cum ergo sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [a] *poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eadem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis;* [b] *poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB.*

IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

[a] 15. deci.

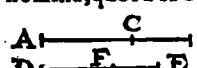
[b] 15. deci.

67. 61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorũ AC, maius, & CB, minus, sitque ei recta DE, lõgitudine commẽsurabilis.



Dico DE, quoq; ex binis Mediis esse, & ipsi AB, ordine eandem. [c] Fiat, vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. [d] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi

[c] 12. sexti.

[d] 19. quin.

ipsi AB, ponitur longitudine commensurabilis DE; erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, longitudine commensurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. [b] Igitur & DE, FE, illis commensurabiles, Mediæ sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutãdo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: [c] Sunt autem AC, CB, potentia solum cõmensurabiles; [d] erunt & DF, FE, solum commensurabiles potentia. Cũ ergo & ostensæ sint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commensurabiles; [e] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipsi AB, eandẽ esse ordine. Quoniam.n. est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Est autem vt AC, ad CB, ita quadratũ ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum sub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Commensurabile est autem quadratũ ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commensurabiles ostensæ sint longitudine. [f] Igitur & rectangulum sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. Quare si rectangulum sub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, sit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum sub DF, FE, Rationale, cum illi sit commensurabile; [g] atque adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum sub AC, CB, fuerit Mediũ, ita vt AB, sit ex binis Mediis secunda: erit & rectangulum sub DF, FE, ei commensurabile, Medium, ex corollario propos. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis secunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine cõmensurabilis, &c. Quod demonstrandũ erat.

[a] 10. decimi.
[b] 24. decimi.
[c] 38. decimi.
[d] 10. decimi.
[e] 38. vel 39. decimi.
[f] 10. decimi.
[g] 38. decimi.
[h] 39. decimi.

SCHOLIVM.

EODEM prorsus modo demonstrabimus, rectam lineam DE, si potentia tantum fuerit commensurabilis ipsi AE, quæ est ex binis Mediis, ex binis Mediis esse, atque ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis

est; si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantũ, &c. vt manifestum est.

68. THEOR. 51. PROPOS. 69.

62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea *Maior* AB. diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, *Maiorem* esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE.



Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles sunt vel
[a] *10. deci.* longitudine & potentia, vel potentia tantum; erunt quo que tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commẽsurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE,
[b] *22. sexti* & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [b] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, FE, ostẽsæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia,
[c] *10. deci.* vel potentia tantum. Igitur & compositũ ex quadratis
rectarũ AC, CB, cõmẽsurabile est cõposito ex quadratis
[d] *40. deci.* rectarum DF, FE, [d] Est autem compositum illud Rationale,

nale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. Igitur & hoc Rationale est. [a] 9. defin.

RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutâdo vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. [b] Igitur & rectangulũ sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. [c] Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commẽsurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [d] sunt que AC, CB, potentia incommensurabiles, cum componãt Maiorẽ AB; [e] Erũt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles Itaq; cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; [f] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

[b] 10. decim.
[c] 40. decim.
[d] 40. decim.
[e] 10. decim.
[f] 40. decim.

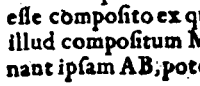
THEOR. 52. PROPOS. 70.

69.
63.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue lõgitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse potentẽ Rationale ac Medium. Cõstructis enim ijsdem, quæ

quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, CB, commenſurabile
[a] 41. deci. eſſe cõpoſito ex quadratis rectarum DF, FE. [a] Eſt autẽ illud compoſitum Medium, cum rectę AC, CB, componant ipſam AB, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propoſ. 24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antece-



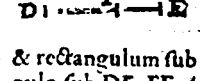
[b] 41. deci. dente, erit rectangulum ſub A C, C B, [b] quod Rationale eſt, commenſurabile rectangulo ſub DF, FE; atque adeo & rectangulum ſub D F, F E, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt DF, FE, potentia incommenſurabiles. Quare cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt; [c] erit to-
[c] 41. deci. ta D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

70. 64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

SIT bina Media potens A B, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis DE, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, eſſe bina Media potentẽ. Conſtructis. n. ijſdem, quę ſupra, oſtẽdemus, vt in propos. 69. compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, cõpoſito ex quadratis rectarũ D F, FE, commenſurabile eſſe: Nec nó & rectangulum ſub AC, CB, eſſe commenſurabile rectan-
[d] 42. deci. gulo ſub DF, FE. [d] Cum ergo tam compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quam rectangulum ſub A C, CB, Medium ſit; erit etiam ex coroll. propoſ. 24. huius libri.



ori, tam compositũ ex quadratis rectarum DF, FE, quàm rectangulum sub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremo, quia compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum sub AC, CB, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod AB, bina Media potest: Est autem composito ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile ostensum compositũ ex quadratis rectarũ DF, FE; & rectãgulo sub AC, CB, probauimus cõmensurabile rectãgulum sub DF, FE; Erunt quoq; ex scholio propos. 114. huius lib. compositũ ex quadratis rectarũ DF, FE, & rectangulum sub DF, FE, incommensurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; erit DE, bina *Media* potens. Itaque bina *Media* potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

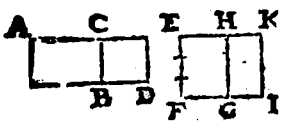
[a] 42. decimi.

[b] 43. decimi.

THEOR. 54. PROPOS. 72. 71. 65.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale spatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum spatium AD, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potentem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Aequale siquidem non erit; alias cum AB, sit Rationale, esset & illi æquale CD, Rationale, quod non ponitur. Sit primo



maius,

maius, & expoſita Rationali EF, [a] applicetur ad eam re
ctangulũ EG, æquale ipſi AB; & ad HG, aliud HI, æqua
le ipſi CD, vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Et quoni
AB, Rationale eſt, & CD, Medium; erit quoque EG, Ra
tionale, & HI, Medium: quæ cum applicentur ad Ra
tionalem EF; [b] erit EH, Ra
tionalis, & ipſi EF, longitu
dine commenſurabilis; [c] A
vero HK, Rationalis, & ei
dem EF, longitudine incon
mẽſurabilis. Rurſus qa EG
HI, incommenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitioni
bus; quod EG, Rationale ſit, at HI, Irrationale, nemp
Medium; [d] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes ra
tionem, incommenſurabiles longitudine. Rationales er
go ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; [e] A
propterea EK, ex binis nominibus eſt. Et quoniam ma
ius ponitur AB, quam CD, hoc eſt, EG, quam HI; erit
quoq; EH, maior quã HK, [f] cum EH, HK, eandẽ ratio
nem habeant, quã EG, HI. Iam vero maius nomen EH,
plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ ſibi longi
tudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus
poſsit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſura
bilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus
prima, cum EH, maius nomen oſtenſum ſit longitudine
commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpa
tium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nomi
nibus prima EK, atque adeo & ſpatium AD, compoſi
tum ex Rationali AB, & Medio CD, [g] Irrationalis eſt,
quæ ex binis nominibus appellatur.

SI uero EH, plus poſsit quam HK, quadrato rectæ
ſibi longitudine incommenſurabilis; erit EA, ex binis
nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen oſtẽ
ſum ſit longitudine cõmenſurabile Rationali EF. Qua
re recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali
EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & ſpa
tium AD, [h] Irrationalis eſt, quæ vocatur *Maior*.

SIT deinde AB, minus quam CD; & eadem con
ſtruantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis no
minibus,

[a] 45. primi
[b] 21. deci.
[c] 23. deci.
[d] 10. deci.
[e] 37. deci.
[f] 1. ſexti.
[g] 35. deci.
[h] 38. deci.

minibus, & EH, ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Et quia AB, minus eſt, quam CD, hoc eſt, EG, quã HI; erit quoq; recta EH, minor quàm HK. Poterit igitur rurſus HK, maius nomen ipſius EK, quę eſt ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectę longitudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſsit HK, quam EH, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit EK, ex binis nominibus ſecunda, cum EH, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali EF, vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus ſecunda EK, atque adeo & ſpatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compoſitum, [a] Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Medijs prima.



[a] 56. deci.

SI verò HK, plus poſsit quam EH, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit EK, ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & ſpatium AD, [b] Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

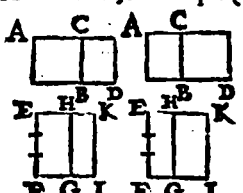
[b] 59. deci.

THEOR. 55. PROPOS. 73. 72. 66.

SI duo Media inter ſe incommenſurabilia cõponatur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs ſecunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommenſurabilia AB, CD. Dico rectam, quæ poteſt totum ſpatium AD, eſſe vel ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media po-

potétem. Erit enim rursus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Aequale siquidem non erit; alias essent AB, CD, commensurabilia quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cum illis sint æqualia. [a] Igitur rectæ EH, HK, eandé cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cum EG, HI, Media sint, applicenturq; ad Rationalem EF.) [b] Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; [c] ac propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedenti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & spatium AD, [d] Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.



SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, [e] Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

QVOD si AB, minus sit, quam CD; non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. deci.
b 23. deci.
c 37. deci.
d 57. deci.
e 60. deci.

COROL-

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neq; inter ſe eaſdē eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [a] *latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.* [a] 23. deci.

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [b] *latitudinem efficit ex binis nominibus primam.* [b] 61. deci.

ET quadratum eius, quæ, eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, [c] *latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.* [c] 62. deci.

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, [d] *latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.* [d] 63. deci.

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [e] *latitudinem facit ex binis nominibus quartam.* [e] 64. deci.

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, [f] *latitudinem facit ex binis nominibus quintam.* [f] 65. deci.

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, [g] *latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.* [g] 66. deci.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe; a latitudine quidē Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differētes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenarijs.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearū Irrationalium, nimirū eius,

quæ

qua ex binis nominibus ; & eius, qua ex binis Medijs prim
& eius, qua ex binis Medijs secunda ; & Maioris ; & eiu
qua Rationale ac Medium potest ; & denique eius, quę pote
bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47
& 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singul
duntaxat punctis diuidi posse.

IN tertio deinde contẽto propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54
docuit inuentionem sex linearum, qua ex binis nominibus di
cuntur, videlicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta
& sexta.

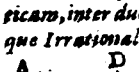
IN quarto, quem absoluunt propos. 55. 56. 57. 58. 5
& 60. ostendit, quo modo ha sex linea Irrationales, qua
primo senario explicantur, inter se differant, docens, quana
linea Irrationalis sit illa, qua potest spatium contentum si
Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nomin
bus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

IN quinto autem, quẽ reperies in propos. 61. 62. 63. 6
63. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales facia
quadrata linearum Irrationalium in primo senario explic
tarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 7
& 71. absoluitur, demonstrauit lineam quamcunque co
mensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in pri
senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensur
bilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus,
mirum 72. & 73. explicauit rursus differentiam aliam
prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationa
bus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportiona
tas Arithmetica, qua quidem consistit in excessu eodem.
recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithm
ticam, inter duo nomina cuiusuis linea Irrationalis, est qu
que Irrationalis eadẽ illi, inter cuius nomina media exist



SIT enim quacunque Irr
tionalis, nempe ex binis nomin
bus AB, cuius maius nomẽ A
& diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD,

D

DB, equalis sumatur E. Dico E, mediam esse, secundum Analogiam Arithmeticã, inter AC, CB: & E, esse quoq; ex binis nominibus. Quoniã .n. AC,



superat dimidiã AD, recta DC; & dimidia DB, superat ipsam CB, eadem recta DC; perspicuum est, dimidiam ipsius AB, nempe E, esse mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, cõmensurabilis est longitudine toti AB, cum hæc illius sit dupla; erit & E. Irrationalis eadem ipsi AB, vt in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

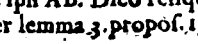
SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadẽ Euclides demonstrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generãtur, quæ in precedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR a Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquã BC, Irrationalẽ esse. Quoniã .n. per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC: Et



sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; * erunt * 10. deci.

incommenſurabilia quadratum ex A B, & rectangu
ſub AB, AC. Sed quadrat
AB, commenſurabile eſt cc
poſitum ex quadratis rectar
AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur cc
menſurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, comm
[a] 16. deci. ſurabilia.[a] Igitur & compoſitum ex ipſis commen
rabile erit quadrato ex A B,) rectangulo vero ſub A
AC, comm enſurabile eſt rectangulum ſub AB, AC,
Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C
rectangulum ſub AB, AC, bis contentum, incommer
rabilia ſunt, vt in ſcholio propoſ. 14. huius libri dem
[b] 7. ſecun. ſtrauimus.[b] Eſt autem compoſitum ex quadratis rect
AB, A C, æquale rectangulo bis ſub AB, A C, vna c
quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis
ctarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. relic
quadrato ex BC, incommenſurabile eſt. Cum ergo cc
poſitum ex quadratis rectarum A B, A C, ſit Rationa
(propterea quod commenſurabile eſt quadrato Rat
nali ex AB, linea Rationali deſcripto;) erit quadrat
ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipſa BC, Irrat
nalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt R
duum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur po
tia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua I
tionalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.

A ——— C ——— B

SCHOLIVM.

POTVISSET *Euclides proponere quoque hanc p*
poſitionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis n
minibus, minus nomen auferatur; Reliqua Ir
tionalis eſt. Vocetur autem Apotome.

NAM cum A B, A C, ſint Rationales potentia tant
[c] 37. deci. *commenſurabiles;* [c] *erit compo*
ta ex ipſis Irrationalis, quæ
bi

A ——— C ——— B

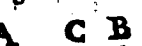
binis nominibus dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine AB, vt relinquatur Apotome BC.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

74. 69.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR a Media AB, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia; [a] atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A C. Est autem quadratum ex A C. Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. [b] Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub A B, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [c] Quare & rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex B C, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur post



[a] 16. decim.

[b] 7. secund.

[c] 17. decim.

post detractionem minoris nominis lineæ ex binis M dijs primæ, à maiori nomine, vt in scholio sequenti p bit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tant commensurabilis existens toti, quæ cum tota Ration contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem M diæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis M dijs prima, minus nomen auferatur; Relic Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apo me prima.

CVM enim AB, AC, sint Media potentia solum co mensurabiles, contineantque Ratio
38. dici. A C B le; erit composita ex ipsis Irratio lis, quæ ex binis Medijs prima dici cuius maius nomẽ AB, & minus Aufertur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt re quatur BC, Mediæ Apotome prima.

75. 70. THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur pote tia tantum commensurabilis existens ti, quæ cum tota Medium contineat; R liqua Irrationalis est. Vocetur aute Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR a Media AB, Media AC tentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectan

lum ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalẽ. Quoniam.n. quadrata ex AB, AC, potentia cõmenſurabilibus commenſurabilia ſunt; a erit & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile: Eſt autem vtrũque ipſorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compoſitum ex ipſis, vtrique commenſurabile, Mediũ eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia rectangulũ ſub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis ſub AB, AC, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Mediũ. b Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarũ AB, AC, æquale ſit rectãgulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, quod etiam Medium eſt, quadrato ex BC. c Medium autẽ non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratũ ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & ipſa recta BC, Irrationalis. Vocetur autẽ Mediæ Apotome ſecũda, quoniã relinquitur poſt detractionem minoris nominis eius, quę ex binis Medij ſecunda, a maioris nomine, vt ex ſcholio ſequenti apparebit. Si igitur Media Media auferatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 16. decim.

b 7. ſecun.

c 27. decim.

SCHOLIVM.

HOC vtiam theorema ita potuiſſet proponi.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

QVONIAM enim AB, AC, Media ſunt potentia tantũ commenſurabiles, continentq; Medium; a erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Medijs ſecunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotomæ ſecundæ.

a 39. decim.

76. 71.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidē ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.



DETRAHATVR a recta AB, recta AC, potētia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam B C, Irrationalem esse. Quoniam.n. compositū ex quadratis rectarū AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. hujus lib. & ei commensurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, hoc est, Irrationale; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub A B, A C. [b] Est autem compositum ex quadratis rectarū AB, AC, æquale rectangulo bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. [c] Igitur quadratum ex BC, illi incōmensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autē Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineę Maioris, a maiori nomine, vt in scholio sequēti dicemus. Si igitur a recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. defin.
[b] 7. secun.
[c] 10. defin.

SCHO-

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi:

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: [a] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur* Maior, *eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur* Minor *BC.* a 40. deci.

THEOR. 60. PROPOS. 78. 77. 72.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autẽ sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam enim compositũ ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub

AB, AC, Rationales; a erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub



AB, AC, b Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulum bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile est rectangulo bis sub AB, AC. c Sunt ergo & rectangulum bis sub AB, AC, & quadratum ex BC, incommensurabilia. Cum ergo rectangulum bis sub AB, AC, Rationale sit; d erit quadratum ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratum additum rectangulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium existit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

a 10. defin.
b 7. secun.
c 17. deci.
d 10. defin.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM enim AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale, erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est AB, minus autem AC. Auferatur igitur minus nomen AC, a maiori AB, ut BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

a 41. deci.

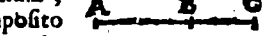
THEOR.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

78. 73.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitque tam compositū ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. [a] Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC. [b] Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiēs, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC, quod Medium est, facit totum cōpositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.



[a] 7. huius.

[b] 37. decim.

SCHO-

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Mediũ totum efficiens.

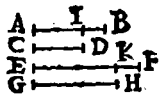
QVONIAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; [a] *erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.*

[a] *42. deci.*

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secũdam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines A B, C D, EF, GH, sitq; IB, excessus inter AB, C D, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter A B, EF, qui est inter C D, GH. Quoniã. n. IB, excessus est inter AB, & C D; erit A I, ipsi C D, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, &



EK, qui

EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem exceſſus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

79. 74.

APOTOMAE vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ipſi AB, aliam rationalẽ non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, cõgruat alia Rationalis BD, ita vt BD ipſi AD, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia BC, Rationalis eſt; erit AC, illi ſolum potentia cõmenſurabilis,



surabilis, Rationalis. Rationales ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia solum commensurabiles. Quoniam vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis sub AC, BC, qui inter compositū ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis sub AD, BD;



(superat enim compositum ex quadratis rectarum AC, BC, rectāgulum bis sub AC, BC, quadrato ex AB; a quòd compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale sit rectangulo bis sub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compositū ex quadratis rectarū AD, BD, superat rectangulum bis sub AD, BD, quadrato eodē ex AB; b cum & compositum ex quadratis rectarū AD, BD, æquale sit rectangulo bis sub AD, BD, vna cum quadrato ex AB.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem excessus inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectāgulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, DB. Est autem excessus inter illa cōposita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius lib. quod vtrūq; Rationale sit. (Nam cum AC, BC, sint Rationales potentia solum cōmensurabiles; c erūt earum quadrata, Rationalia, & cōmensurabilia. c Igitur & compositum ex ipsis vtriq; illorum commensurabile est, atq; adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale ostēdemus compositum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, spatium Rationale est. d Et quia rectangulum sub AC, BC, Rationalibus potentia solum commensurabilibus Medium est; erit ex corollario propositionis 24. huius lib & eius duplum, nempe rectangulum bis sub AC, BC, Medium. Eademque ratione e Medium erit rectangulum bis sub AD, BD. e Medium autem non superat Medium Rationali. Igitur excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, Rationale spatium non est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB,

a 7. secun.
b 7. secun.
c 61. deci.
d 23. deci.
e 27. deci.

alia

alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tãtum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 63. PROPOS. 81.

80.
75.

MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat BC, Media toti AC, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quia BC, Media est potentia solum ipsi AC, commensurabilis; [a] erit & AC, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Quoniã vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui interiacet rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrũq; sit Rationale. (cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC, BC, illi commensurabile, Rationale. Atque eadẽ ratione Rationale erit rectangulum bis sub AD, BD.) Igitur & excessus inter compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadra-



[a] 24. decimi.

[a] 16. deci. quadrata Media,& commenſurabilia., Igitur & com ſitum ex ipſis utrique ipſorum commenſurabile eſt, a adeo & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Non ter quoque Medium erit compoſitum ex quadratis re

[b] 27. deci. rum AD, BD. [b] Medium autem n ſuperat Mediũ Rationali. Igitur



ceſſus inter cõpoſitum ex quadra rectarum AC, BC, & compoſitũ quadratis rectarum AD, BD, ſpatium Rationale nõ Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. I go ipſi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ ti ſit potenria ſolum commenſurabilis, contineatq; tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

81. 76. THEOR. 64. PROPOS. 82.

MEDIAE Apotomæ ſecundæ v tantum congruit recta linea Media p tentia ſolum commenſurabilis exiſte toti, & cum tota Medium continens.

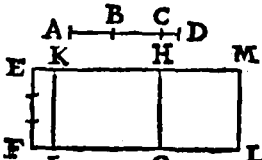
SIT Mediæ Apotome ſecũda AB, cui congruat dia BC, toti AC, potentia tantum commenſurabili rectangulũ ſub AC, BC, ſit medium. Dico ipſi aliam mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tum commenſurabilis, contineatque cum tota Medi enim fieri poteſt, cõgruat ipſi alia BD, media toti potentia tantum commenſurabilis, ſitque rectangu

[c] 45. prim. ſub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, quam applicetur rectangulum EG, æquale compo ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF liud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et de aliud EL, æquale compoſito ex quadratis rectarum

[d] 7. ſecun. BD. [d] Quoniam igitur compoſitum ex quadratis re rum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC.

c

cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur sub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur sub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum enim BC, Media ponatur, erit & AC, ipsi potentia cõmensurabilis, Media) erunt & earũ quadrata Media, & cõmensurabilia. [b] Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est vtriq; eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & EG, quod illi compositio æquale est, Medium est; quod cum applicetur ad Rationalem EF, [c] erit EH, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe KG, Medium: quod cũ applicetur ad Rationalem KI, [d] erit KH, Rationalis ipsi KI, hoc est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommensurabiles sunt, estque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectãgulum sub AC, BC, vt ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius lib. [e] erit quadratum ex AC, incõmensurabile rectãgulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata commensurabilia [f]. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo sub AC, BC, commensurabile est eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est, ex iis, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. [g] Rectæ igitur EH, KH, eádem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommẽsurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potẽtia tantum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commen-



[a] 24. deci.

[b] 16. deci.

[c] 23. deci.

[d] 23. deci.

[e] 10. deci.

[f] 16. deci.

[g] 10. deci.

sura-

surabilis ipsi EH, [a] erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potẽtia solum commen surabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere, [b] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 74. decim.

[b] 80. decim.

82. 77.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

MINORI vna tantum congruit recta linea potẽtia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potẽtia incõmensurabilis, faciẽsq; compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale, & rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non cõgruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulum sub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & cõpositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrũque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulũ bis sub AD, BD, spatium est

eſt Rationale. ſed & non Rationale eſt. Cũ enim rectangulum ſub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Similiterque Medium erit rectangulum bis ſub A D, B D. [a] Quare vnum non non ſuperabit alterum Rationali.) Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergo vna tantũ congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. [a] 27. decimi.

THEOR. 66. PROPOS. 84. 83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali Medium totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, rectangulum vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam non cõgruere, quę hæc eadem faciat.



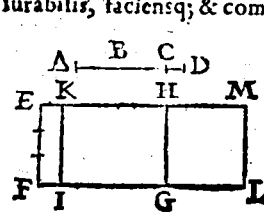
Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, faciensq; compoſitum quidem ex quadratis rectarũ AD, BD, Medium, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis

sub AD, BD. Est autē excessus inter hæc rectangula, spatiū Rationale, vt in propos. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa cōposita, spatiū Rationale est: sed
*27. decī. & nō Rationale est; cū vtrumq; sit Mediū. a Medium. n. Medium non superat Rationali. Quod est absurdū. Non ergo ipsi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommensurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

84. 79. **EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum cōgruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciēs & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileq; cōposito ex ipsarum quadratis.**

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens: ipsi vero congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensq; & compositum ex quadratis rectarū



AC, BC, Medium, & rectangulum sub AC, BC, Mediū, incommensurabileq; compositō ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipsi AB, aliā non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si. n. fieri potest, cōgruat ipsi recta alia BD, tōti AD, potētia incōmensurabilis, ita vt & compositū ex quadratis rectarū AD, BD, Mediū sit, & rectāgulum sub AD, BD, Medium quoque, ac incommensurabile cō posito ex quadratis rectarum AD, BD. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium est; erit etiam

EG

EG, illi æquale, Medium. [a] Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & eius duplum KG, Medium. [b] Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniã KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cum illud huius sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC; [c] erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, [d] longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis ipsi EH; [e] erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostendemus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit; &c. Quod est absurdum. [f] Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 23. deci.
[b] 23. deci.
[c] 14. deci.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 80. deci.

DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

Si vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudi ne commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſsit, quam cõgruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longiiudine commenſurabilis; Voce tur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD ſi neque tota, neque congruens

gruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

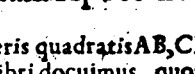
SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarũ, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

PROBL. 19. PROPOS. 86. 85.

INVENIRE primam Apotomen. 80.

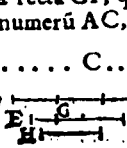
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorũ excessus AC, non sit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratũ, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit EF. Eritque EF, cũ cõmensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, cõmensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia vero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neq; quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine re-



[a] 6. deci.

[b] 9. deci.

ctæ EF, GF. Rationales ergo sunt EF, GF, potentia tantum commensurabiles; atque idcirco reliqua EG, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta EF, plus quã recta GF, quadrato H. Et quia est, vt numerus AB, ad numerũ AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex GF; erit per conuersionẽ rónis, vt AB, ad CB, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex H. Habent autẽ AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [b] Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam cõgruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commẽsurabilis; estque tota eadem EF, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

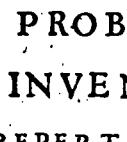


86. 81.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE secundã Apotomẽ.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB vt in propos. præcedenti; expositaq; Rationali D, sumatur ei longitudine commensurabilis GF; eritque GF Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque



Fiat deinde vt numerus AC, a numerum AB, ita quadratum e ex GF, ad quadratum ex EF, p coroll. propos. 6. huius libri. Dic EG, esse secundam Apotomer

[c] Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem h bentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sun Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltem pot tia. Cum ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoq; El Rationalis. Quia vero numeri BC, AB, atq; adeo & q drata ex GF, EF, proportionem non habent, quam n

me

meri quadrati; erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solum commensurabiles; a Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta EF, plus quam GF, quadrato ex H. Cui ergo est vt AC, ad AB, ita quadratū ex GF, ad quadratū ex EF; & conuertēdo, vt AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex GF: Ostendemus iam, vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus possit, quam congruens GP, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

a 9. deci.

b 74 deci.

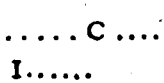
PROBL. 21. PROPOS. 88.

87.

82.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 86. sumatur alius numerus I, vt in propos. 71. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expositā deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratū ex D, ad quadratū ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. c Eruntque quadrata ex D, & EF, proportioné habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeo & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; d erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario



c 6. deci.

d 9. deci.

propoſ.6. huius lib. Dico EG, eſſe tertiam Apotomen.
[a] Quoniam enim quadrata ex EF,GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF,GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia AB,AC, atq; adeo & quadrata exEF,GF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [b] Erunt rectæ EF,GF, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt EF,GF, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi ſolum commenſurabilis; [c] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniã.n. eſt vt I,ad AB,ita quadratum ex D, ad quadratũ ex EF; & vt AB,ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF: Non habent autem numeri I,& AC, proportionem, quã numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [d] Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H; Oſtendemusque, vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi EF, longitudine commenſurabilem. Quapropter cum tota EF, plus poſsit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

a 6. deci.

A . . . . . C . . . . B

I . . . . . .

D

E

F

H

b 9. deci.

c 74. deci.

d 9. deci.

PROBL.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

88.
83.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commé surabilis sit EF; eritq; propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, EG, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Possit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniã igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



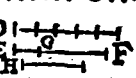
[a] 9. decimi.

THEOR. 23. PROPOS. 90.

89.
84.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propos. præcedenti, fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & secundam



dam esse. Posit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis, esse vt A B, ad C B, ita quadratū E F, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti, rectæ E F, & H, longitudine incommensurabilis; estque congruens G F, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

90. 85.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propos. 54. ita vt A B, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiat, vt in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & E F, longitudine incommensurabiles esse; & E G, Apotomen esse.

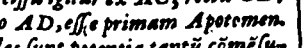


Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Posit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi E F. Igitur cum tota E F, plus posit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome. [a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, qua aqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniam AC, CB, Rationales sunt potentia tantū cōmēsurabiles; erunt etiā AC, DC, Rationales potentia tantum commensurabiles.* [b] *Est ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus potest, quam CB, hoc est, quam DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cōmensurabilis: & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, qua ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotoma prima, AD, prima Apotome. Eadē ratione ex cæteris, qua ex binis nominibus dicūtur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextā, si minora nomina ex maioribus auferamus.*



[a] 49. deci.

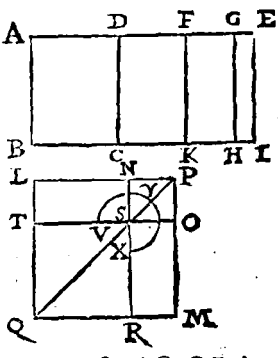
[b] 74. deci.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

91. 86.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solum commēsurabiles; & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique eadem AE, tota plus poterit, quam



quam congruēs DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulū æquale sub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia AE, plus potest, quā DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis;

[a] 18. deci. [a] erunt rectæ AG, GE, longitudine commensurabiles;

[b] 16. deci. [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commēsurabilis erit: Est autem AE, Rationali AB, longitudine cōmensurabilis. [c] Igitur & vtraq; AG, GE, ipsi AB, longitudine est cōmensurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, parallelis, quæ ipsi

[c] 12. deci. BC, productæ occurant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum sub duabus rationalibus longitudine cōmensurabilibus, Rationale. Rursus quia vtraq; DF, FE, longitudine cōmensurabilis est ipsi DE; & DE, longitudine incōmensurabilis est Rationali AB; (Nā si cōmensurabilis esset lōgitudine, cū & AE, sit eidem AB, longitudine commensurabilis; [e] essent AE, DE, longitudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim solum potentia commēsurabiles:)

[f] 14. deci. [f] erit etiam vtraque ipsarum DF, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quoniam vtraq; DF, FE, Rationali DE, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

[h] 14. secun. I A M vero ipsi A H, [h] fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI, æquale fiat quadratum N O, communem habens

bens cum LM, angulum LPM. [a] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum sub AG, GE, per constructionem, æquale est quadrato ex FE; [b] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [c] Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipsis habeant rationem; erit FI, mediũ proportionale inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem inter eadem LM, NO, per lemma propos. 14. huius lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia sunt: [d] Sed ipsi FI, æquale est DK, & ipsi LO, æquale est MN. Est ergo totum DI, toti gnomini VYX, cum quadrato NO, æquale. Est autem & totum AI, per constructionem, æquale quadratis LM, NO, Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, est æquale; Ac propterea recta TS, potest spatium AC. Dico TS, Apotomen esse.

[a] 26. sexti
[b] 17. sexti
[c] 1. sexti
[d] 36. primi

QVONIAM enim spatia AH, GI, ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia; atq; adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt LO, & NO, cum vnum sit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [e] eandem rationem habentes cum LO, NO, [f] longitudine incommensurabiles sunt; [g] Atque idcirco reliqua TS, Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

[e] 1. sexti
[f] 10. deci.
[g] 74. deci.

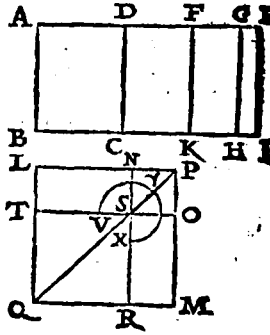
THEOR. 69. PROPOS. 93.

92.
87.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CON-

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariã in F, & reliqua omnia conſtruãtur, vt in propoſitione præcedenti. [a] Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſitione, AG, GE, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cum DE, eidem AB ponatur longitudine commenſurabilis; [c] eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles.) [d] Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidẽ AB. Eſt autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commẽſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia ſolum commẽſurabiles; [e] Atque idcirco rectangulum vtrumq; AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis; erit quoque, vt in ſcholio propoſitionis 12. huius lib. oſtendimus, eidem AB, Rationali longitudine commẽſurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. [f] Vtrumque ergo rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus longitudine



[a] 18. deci.

[b] 16. deci.

[c] 12. deci.

[d] 14 deci.

[e] 22. deci.

[f] 20. deci.

gitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero, vt in præcedenti proposuimus demonstrabimus rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen esse primã.

QVONIAM enim AG, GE, longitudine sunt cõmensurabiles, [a] erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atque adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ TO, SO, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (ostensa. n. sunt AH, GI, Media esse,) Media sint. Et quoniam FI, atque adeo sibi æquale LO, Rationale est, propterea que Medio NO, incommensurabile; [b] erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incõmensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale est ostensum; [c] erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

[c] 75. deci.

THEOR. 70. PROPOS. 94.

93. 88.

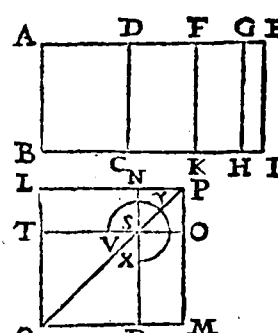
SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ spatium AC, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit. n. ipsi AD, congruës DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantũ cõmensurabiles, & neutra ipsarum AE, DE, longitudine commensurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

surabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter se commensurabiles; [a] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commensurabilis erit. Est autem AE, posita incommensurabilis longitudine Rationali AB. [b] Igitur & vtraque AG, GE, eidem AB, longitudine erit incommensurabilis.

[a] 16. deci.

[b] 14. deci.



Cū ergo vtraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam AB, AG, quā AB, GE, Rationales potentia solum commensurabiles; [c] Ac propterea vtrumque rectangulum AH, GI, Medium erit. Rursus quia DE, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali AB; erit quoque vtraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis existens, [d] eidem AB, longitudine incommensurabilis. Cum ergo vtraque DF, FE, Rationali DE, cōmensurabilis, sit Rationalis; erunt tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles; [e] atque propterea vtrumque rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Mediæ Apotomen secundam.

[c] 22. deci.

[d] 14. deci.

[e] 22. deci.

QVONIAM enim AH, GI, Media sunt ostensa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas ostendimus commensurabiles esse, [f] commensurabilia sunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commensurabiles, saltem potentia. At vero quia AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis GE, ipsi vero

[f] 10. deci.

DE

DE, commensurabilis est longitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incommensurabiles; [a] ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, FE, hoc est, illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, vt cõstat ex propos. 92. quod Medium esse ostẽdimus; erit & LO, Medium.) [b] erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. decimi.

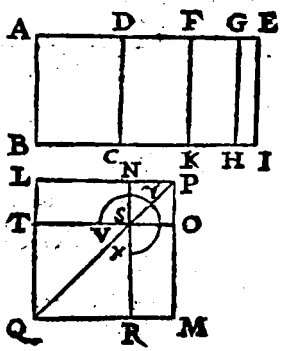
[b] 76. decimi.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

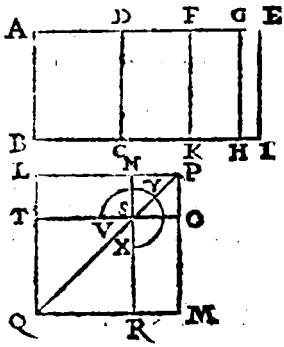
94. 89.

SI spatium continetur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę potest spatium AC, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua oia fiant, vt prius.



[a] Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulũ sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit DI, atque adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; [d] incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero similiter demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Minorem.



QVONIAM enim ex constructione, rectangulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO: Est autem illud ostẽsum Rationale; erit & cõpositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Itẽ quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, cõtentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atq; adeo rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitque compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum vero sub ipsis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 89. deci.
[b] 22. deci.
[c] 22. deci.
[d] 10. deci.
[e] 77. deci.

95. 90.

THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI spatium contineatur sub Rationa

li,

li, & Apotomą quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quę cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propoſitionis) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB, vt in propoſ. 93. diximus; [a] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; [b] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rurſus erũt, vt in præcedenti propoſ. AH, GI, incommenſurabilia; poteritq;, vt oſtenſum eſt in propoſ. 92. recta TS, ſpatiũ AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium tòtum efficit.

[a] 22. deci.

[b] 20. deci.

QVONIAM enim oſtenſum eſt AI, Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demõſtrauimus FI, Rationale eſſe; erit & LO, rectangulũ ſub TO, SO, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autẽ & TO, SO, potentia incommenſurabiles, vt in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; [c] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

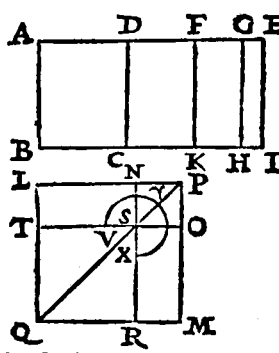
[c] 78. deci.

96. 91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſexta AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totũ efficit. Sit.n. ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarũ AE, DE, Rationali AB, cõmenſurabilis longitudine; Et denique A E, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ. 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; [a] erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; [b] Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commenſurabilia ſint, [c] erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. Iam uero demõſtrabimus, vt in propoſ. 92 rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.



[a] 22. deci.

[b] 20. deci.

[c] 14. deci.

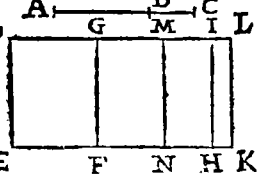
QVO

QVONIAM enim AI, *Medium* oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis L *M*, N O, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Itē quia FI, Mediū oſtēſum eſt; erit & LO. illi æquale, contentumque ſub TO, SO, *Medium*. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile, vt oſtendimus; erit quoque LO, ſub TO. SO, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarū TO, SO; propterea quod LO, ipſi FI, & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Deniq; TO, SO, potentia incommenſurabiles ſunt, vt in propoſ. 95. eſt demonſtratum. Quamobrem cum TO, SO, ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſito ex quadratis ipſarum incommenſurabile; [a] erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio *Medium* totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta, &c. Quod erat oſtendendum. [a] 79. decī.

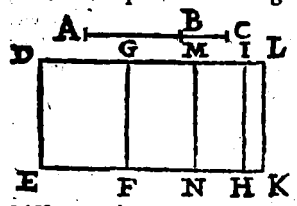
THEOR. 74. PROPOS. 98. 97. 92.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles: [b] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinē faciens DG. Dico DG, eſſe Apotomen primā. Ad eandem. n. DE, ap applicetur rectangulū DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totū tū DK, æquale ſit compoſito ex quadratis rectarū AC, BC. [b] 45. primi



[a] 7. secur. BC. [a] Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cũ quadrato ex AB; si auferantur quadratũ ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectãgulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeo diuisa GL, bifariam in M, ductaq; MN, ipsi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo sub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales sunt; erunt quoq; quadrata ex AC, BC,



[b] 16. deci. Rationalia; ideoque commensurabilia. [b] Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipsorum sit commẽsurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad

[c] 21. deci. Rationalem DE, [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulũ sub ipsis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod

[d] 23. deci. cum applicetur ad Rationalem GF, [d] erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quoniam DK, Rationale, & GK, Medium, hoc

[e] 10. deci. est, Irrationale, incommensurabilia sunt; [e] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales

[f] 74. deci. potentia tantum commensurabiles; [f] Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. *Dico* & primam esse.

QVONIAM enim per lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, BC, hoc est, MK, medium est proportionale inter quadrata rectarũ AC, BC, hoc est, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt.

[g] 37. deci. [g] Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam

[h] 10. deci. quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH, IK, commensurabilia sunt, [h] erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis ha-

lis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales sint, & ad maiorem DL, applicatum rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiensq; figura quadrata; atque sit ostensa DI, ipsi IL, longitudine commensurabilis; [a] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum DG, esse Apotomen, & totam DL, plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

[a] 18. decimi

THEOR. 75. PROPOS. 99.

98.
93.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatū latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale: [b] Et ad Rationalē DE. quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen secūdam esse. Construantur. n. eadē, quæ in antecedenti propos. ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media, & commensurabilia; [c] ac proinde & totum DK, vtrique illorum commensurabile erit. Igitur & Medium. per coroll. propos. 24. huius lib. Cū ergo DK, applicetur ad Rationalē DE, [d] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incōmensura

[b] 45. primi

[c] 16. decim.

[d] 23. decim.

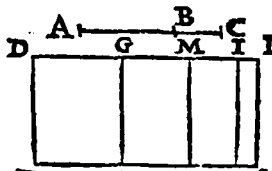
bilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod
a 21. deci. cum applicetur ad Rationalem DE, a erit GL, Rationalis longitudine cõmensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, Medium, id est, Irrationale, & GK, Rationale, incommẽ
b 12. deci. surabilia sunt; b erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Ra-
c 74. deci. tionales potentia tantum commensurabiles; c Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propos. demõstrabimus totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum cõgruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundã. Quod ostendendum erat.

99. 94.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatũ, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secũda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantũ commen-
41. primi surabiles, contineantque Medium: d Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudiné faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostẽdemus iã, vt in propos. præcedenti, DK, Medium esse,
23. deci. e atque adeo rectã DL, Rationalem ipsi DE, longitud ne incommensurabilem. E-



qui-

quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt, atque ob id, & eius duplum G K ; a erit quoque G L, Rationalis ipſi DE, lõgitudine incommẽſurabilis. Quia vero AC, BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtque vt AC, ad BC, ita per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum ſub A C, BC; b erit quadratum ex A C, incommenſurabile rectangulo ſub A C, BC. c Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C, B C; quod quadrata ex rectis A C, B C, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint; rectangulo vero ſub A C, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, B C, hoc eſt, ipſi GK; d Atque adeo rectę DL, GL, eandem habẽtes rationem, quam DK, G K, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſę & Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum commenſurabiles; e Ac proinde reliqua D G, Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim, vt in propoſ. 98. demonſtrabimus DL, totam plus poſſe, quàm GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum DL, GL, Rationali DE, longitudine ſit cõmenſurabilis, vt demonſtratũ eſt; erit ex defin. DG, Apotome tertia. Quadratũ igitur Mediæ Apotomæ, ſecundę ad Rationalem applicatũ, &c. Quod erat oſtendendum.

a 23. decì.

b 10. decì.

c 16. decì.

d 10. decì.

e 74. decì.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

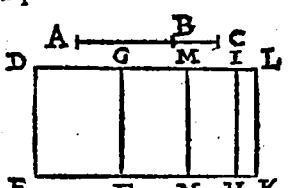
100.

95.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT Minor A B, & ipſi congruens B C, ita vt A C, BC, potentia incommenſurabiles ſint, facientesq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale;

[a] 45. primi. nale; rectangulum vero sub AC, BC, Medium: & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniã igitur compositũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est; [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo [c] 23. deci. & eius duplum GK, Medium est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Mediũ, [d] 10. deci. incommensurabilia sunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo [e] 74. deci. sunt DL, GL, potentia tantum commensurabiles; [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, [f] 10. deci. DH, IK, incommensurabilia; [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum; [g] 19. deci. poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitq; eadem tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratum igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.



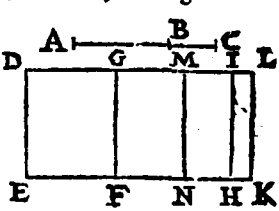
THEO

THEOR. 78. PROPOS. 102.

101. 96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: [a] Et ad Rationalē DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Constituantur.n.eadē, quæ supra. Qm igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atqueadeo & illi æquale DK, Medium est; [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; [e] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem.n.modo, vt in antecedēti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG,



[a] 45. primi

[b] 23. deci.

[c] 21. deci.

[d] 10. deci.

[e] 74. deci.

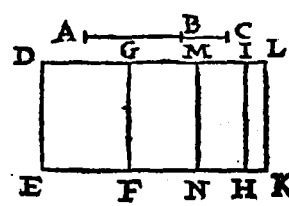
DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.

102. 97.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub iiſdem AC, BC, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarũ



[a] 45. primi

[a] Et ad Rationalem DE applicetur quadrato e AB, ſpatium æquale DF latitudinem faciẽs DG Dico DG, eſſe ſextam Apotomen. Ead. n. fiant quæ ſupra. Quoniã igitur tã compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, BC hoc eſt, illi æquale DK, quam rectangulũ ſub AC, BC atque adeo & eius duplum GK, Medium eſt; [b] Erit tam DL, quam GK, Rationalis ipſis DE, longitudine incommenſurabilis. Et quia rectangulum ſub AC, BC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; Et ſunt rectangulum ſub AC, BC, & eius duplum GK, commenſurabilia; [c] Erit & GK, eidem compoſito hoc eſt, ipſi DK, incõmenſurabile; [d] propterea quę DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GL longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia

[b] 23. deci. [c] 14. deci. [d] 10. deci.

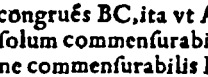
lu

lum commensurabiles; [a] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus.n. similiter, vt propos. 101. totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommmensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum DL, GL, commẽsurabilis sit lõgitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum. [a] 74. deci.

THEOR. 80. PROPOS. 104. 103. 98.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

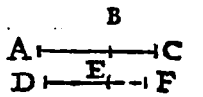
SIT Apotome AB, & ipsi congruẽs BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atq; ordine eandẽ ipsi AB. [b] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [c] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; [d] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles; erunt quoq; ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, [e] reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Posit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commẽ surabilis. Quo posito, [f] poterit & DF, plus quam EF; qua



[b] 12. sexti
[c] 12. quin.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 11. deci.

quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commẽsurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; [a] erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositę, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commẽsurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; [b] erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

[a] 12. deci.



[b] 14. deci.

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Quo posito, [c] poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 15. deci.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67 huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantum eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse eadem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis exposita, & DF, eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis

rabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum ex hypothesi. Immo vero, si AB, sit Apotome prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo potest, vt DE, illi potentia tãtum commensurabilis, sit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, secũda, quarta, vel quinta, eique congruens BC; & sit DE, ipsi AB, potentia tantum commensurabilis, quam quidem, vt in theoremate, ostendemus Apotomen esse, eique congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen esse ordine eandem ipsi AB. Nam si fieri potest, sit vtraque Apotome prima. Quo posito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expositæ commensurabilis longitudine; [a] atque adeo & inter se longitudine commensurabiles erunt AC, & DF. Quare cum sit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt quoque AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima est. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque secunda, vel quinta. Esset enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commensurabilis Rationali expositæ, atque adeo & ipsa inter se. Quocirca & AB, DE, inter se longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum est, si AB, est Apotome prima, vel secunda, vel tertia, rectã DE, quæ ipsi AB, potentia solũ est cõmensurabilis, esse quoq; vnã ex illis tribus, licet ordine non eadẽ sit. Nã hoc posito, poterit AC, plus q̃ BC, quadrato rectæ sibi lõgitudine commẽsurabilis. Cũ ergo sit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [c] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ lõgitudine sibi cõmensurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel secũda, vel tertia. Eodẽ modo si AB, est Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, q̃ BC, quadrato rectæ sibi lõgitudine incõmensurabilis; erit quoq; DE, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta, quãnis ordine nõ eadẽ ipsi AB: quia rursus, cũ sit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, [d] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel sexta.

[a] 12. deci.
[b] 10. deci.
[c] 15. deci.
[d] 15 deci.

I N

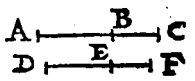
IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

104. 99.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine erit.

SIT Mediæ Apotome quæcunque AB, eique congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles: Sit autem ipsi AB, commensurabilis DE, siue lõgitudine & potétia, siue potétia tm̃. Dico & DE, Mediæ Apotomé esse, & ipsi AB, ordine eandem.



a Fiat.n. vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. b Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; c erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodé modo commensurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ sunt, d erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autē AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ; e erit reliqua DE, Mediæ Apotome. *Dico* & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniá.n. est AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; Et permutando vt quadratum ex AC,

a 12. sexti
b 12. quin.
c 10. deci.
d 24. deci.
e 75. vel 76. decimi.

ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, BC, ad rectangulum ſub DF, EF. Igitur cum quadratũ ex AC, commenſurabile ſit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, oſtenſæ ſint cõmenſurabiles; erit & rectangulum ſub AC, BC, rectangulo ſub DF, EF, commenſurabile. Quare ſi rectangulum ſub AC, BC, ſit Rationale, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome prima; Erit etiam rectangulum ſub DF, EF, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; atque adeo & DE, Mediæ Apotomę prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, BC, ſit Medium, ita vt AB, ſit Mediæ Apotome ſecunda; erit quoq; rectangulum ſub DF, EF, ei commenſurabile, Medium ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Ac propterea & DE, Mediæ Apotome ſecũda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 10. deci.

[b] 75. deci.

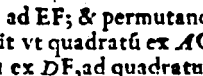
[c] 76. deci.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

105. 116. 100.

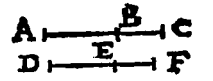
RECTA linea Minori commenſurabilis; & ipſa Minor eſt.

SIT Minor AB, ipſique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommẽſurabiles, facientesque compoſitum quidẽ ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulũ vero ſub iiſdẽ AC, BC, Medium. Sit autẽ DE, ipſi AB, cõmenſurabilis ſiue lõgitudine & potẽtia, ſiue potẽtia tantũ. Dico & DE, Minorẽ eſſe. Fiant. n. eadem, quæ ſupra, ita vt rurſus AB, BC, ad DE, EF, eandẽ habeãt rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. DF, EF, ipſis AC, BC, commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potẽtia tantum. Et quoniã eſt, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; erit vt quadratũ ex AC, ad quadratũ ex BC, ita quadratũ ex DF, ad quadratum ex EF. & cõponendo vt cõpoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, ad quadratũ ex BC, ita compoſitũ ex quadra-



[d] 22. ſexti

tis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF; & permutando vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad cõpositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratũ ex BC, commẽsurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. [a] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, composito ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur & cõpositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, rectãgulo sub DF, EF, esse commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, Medium; Erit quoque rectãgulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, suntq. AC, BC, potentia incommensurabiles; [b] erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarũ DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub ijsdem DF, EF, Medium; [c] erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

[c] 77. deci.

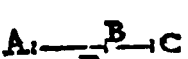
PROBL. 83. PROPOS. 107.

106. 117. 101.

RECTA linea commẽsurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totũ efficiens est.

SIT recta AB, cum Rationali Mediũ totũ efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub

ſub AC, BC, Rationale: Sit autẽ DE, ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo. Dico & DE, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit, Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus vt in antecedẽti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt deniq; eodẽ modo, vt in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ DF, EF, potẽtia incõmenſurabiles. Igitur cũ DF, EF, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.



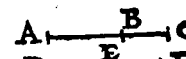
a 78. deci.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

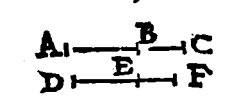
107. 102.

RECTA linea commẽſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB, cum Medio Medium totũ efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incõmenſurabiles, facientesque compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectãgulum ſub ipſis Medium quoq;, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis; Sit autẽ DE, ipſi AB, quomodolibet commenſurabilis. Dico & DE, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, probabimus



similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium po natur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Mediũ.



Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremo quia composito ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulũ sub DF, EF: Sunt autem compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, incommẽsurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; [a] erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 79. deci.

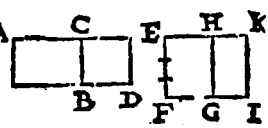
108. THEOR. 85. PROPOS. 109.

103. MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR a Rationali *AD*, Medium *CD*. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum *AB*, esse vel Apotomen, vel Minorẽ. Exponatur enim Rationalis *EF*, [b] ad quam applicetur rectangulum *EG*, æquale ip*AB*,

[b] 45. primi

AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipſi CD, ita vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale eſt; [a] erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia HI, Medio CD, æquale Medium eſt, [b] erit HK, Rationalis, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Itaque cum EK, quidem ſit longitudine cómenſurabilis ipſi EF; at HK, eidem EF, longitudine incómenſurabilis, [c] erunt EK, HK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles: [d] propterea quæ reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus pót EK, quam HK quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine, cum tota EK, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc eſt, ſpatium AB, ſibi æquale, [e] Apotome eſt. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectę ſibi longitudine incommenſurabilis, cum tota EK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potés ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, [f] Minor eſt. Medio ergo a Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

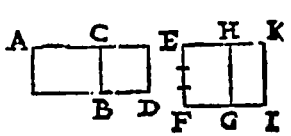


[a] 21. deci.
[b] 23. deci.
[c] 13. deci.
[d] 74. deci.
[e] 92. deci.
[f] 95. quin.

THEOR. 86. PROPOS. 110. 109.

RATIONALI a Medio detracto; alię duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens. 104.

DETRAHATVR a Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium *AB*, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem. n. conſtruatur, quæ ſupra. Et quia E I, *M*edio AD, æquale, Medium eſt; erit E K, Rationalis ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Itaque cum H K, quidem ipſi E F, ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis; erunt HK, *EK*, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; Ac proinde reliqua *E*H, Apotome eſt, & ei congruens H K. *A*ut igitur *E*K, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi lõgitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si *E*K, plus poteſt quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens HK, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali *E*F; erit ex defin. EH, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali E*F*, & *A*potoma ſecunda EH, hoc eſt, ſpatiũ AB, illi æquale, Mediæ eſt Apotome prima. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium *E*G, contẽtum ſub Rationali EF, & *A*potoma quinta E H, hoc eſt ſpatiũ illi æquale AB, eſt ea, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Quam ob rem Rationali a *M*edio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.



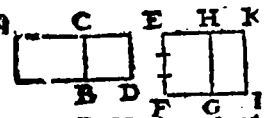
a 23. deci.
b 21. deci.
c 13. deci.
d 74. primi
e 93. deci.
f

THEOR. 87. PROPOS. 111.

110. 105. MEDIO a Medio detracto, quod incom-

sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel Mediæ Apotomen secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Cõstructis enim iisdẽ, quæ supra; quoniã EI, HI, Mediis AD, CD, æqualia Media sunt; erũt EK, HK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur incommensurabilia; erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantũ cõmensurabiles; Ac propterea reliqua FH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commẽ surabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatiũ EG, contentũ sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc est, spatium AB, illi æquale; d Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus; erit ex defin. EH, Apotome sexta. Quam ob rem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, e est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.



a 23. decimi.

b 10. decimi.

c 74. decimi.

d 94. decimi.

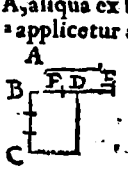
e 97. decimi.

III. 106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non est eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT *Apotome A*, quæcunque. *Dico* A, non esse eandem, quæ ex *binis* nominibus. *Sit* enim, si fieri potest, A, aliqua ex binis nominibus. *Exposita* autē Rónali BC, [a] applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniā igitur A, Apotome est; [b] erit latitudo BD, *Apotome* prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum cōmensurabiles, poteritq; BE, plus quam DE, quadrato rectę sibi longitudine [c] commensurabilis, & ipsa BE, Rationali BC, commensurabilis erit lōgitudine. Rursus quia A, ponitur esse quoque ex *binis* nominibus; [c] erit latitudo eadem B D, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipsius nomē B F. Erunt igitur ex defin. eius, quę ex binis nominibus prima est, BF, FD, Rationales potentia solum commensurabiles, poteritque BF, plus quam F D, quadrato rectæ commensurabilis sibi longitudine, & ipsa B F, Rationali BC, lōgitudine commensurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine sit commensurabilis eidem BC; [d] erunt quoque *BE*, BF, inter se commensurabiles longitudine. Igitur cum tota B E, sit longitudine commēsurabilis parti B *F*, erit & eadem BE, reliquę parti *FE*, longitudine commensurabilis, ex coroll. propos. 16. huius libri; Atque adeo cum B E, *Rationalis* sit, & *FE*, Rationalis erit. Quoniam vero duarum lineārum B E, *F E*, longitudine commensurabilium, ipsa B E, longitudine incommensurabilis est ipsi D E; (quod B E, *D E*, Rationales sint potentia solum commensurabiles) [e] erit quoque altera *FE*, eidem *DE*, incommensurabilis longitudine. Sed & vtraque F E, *D* E, Rationalis est ostensa. Rationales ergo sunt *FE*, *DE*, potentia solum



a 45. primi
b 98. deci.
c 61. deci.
d 12. deci.
e 14. deci.

solum commensurabiles. Quare reliqua FD, Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat. [a] 74. deci.

COROLLARIVM.

EX demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & ceteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, [b] latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem. [b] 23. deci.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, [c] latitudinem efficit Apotomen primam. [c] 98. deci.

ET quadratum Mediæ Apotomæ prima ad Rationalem applicatum, [d] latitudinem efficit Apotomen secundam. [d] 99. deci.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum, [e] latitudinem efficit Apotomen tertiam. [e] 100. deci.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, [f] latitudinem efficit Apotomen quartam. [f] 101. deci.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem efficit Apotomen quintam. [g] 102 deci.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, [h] latitudinem efficit Apotomen sextam. [h] 103. deci.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales;

inter

inter se autem, quod ordine non sint eadē Apotomæ: Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Media, & inter se se differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & ceterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarū quinque Irrationaliū, quæ ipsam sequūtur, ad Rationalē applicata, latitudines efficiūt ex binis nominibus primam, secundā, tertiam, quartam, quintā, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam expositæ tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.

4. Ex

4. Ex binis Medijs ſecunda.

5. Maior.

6. Rationale ac Medium potens.

7. Bina Media potens.

8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.

9. Mediæ Apotome prima.

10. Mediæ Apotome ſecunda.

11. Minor.

12. Cum Rationali Medium totum efficiens.

13. Cum Medio Medium totum efficiens.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

112. 0.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus,

& in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

SIT Rationalis *A*, & ex binis nominibus BC, cuius
[a] *45. primi.* maius nomen B D,[a] & ad B C, applicetur rectangulum BE, æquale quadrato ex *A*, latitudinem faciens BF. Dico BF, esse *A* potomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus BD, DC, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc *A* potomē BF, esse ordine eandem
[b] *45. primi* ipsi BC, ex binis nominibus.[b] Applicetur enim rursus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; sitque ipsi DG, æqualis B H. Et quoniam æqualia
[c] *14. vel 16 sexti.* sunt BE, CG;[c] erit vt BC, ad DC, ita DG, hoc est, sibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Est autem BD, maior, quam DC. Igitur & HF, ma
[d] *12. sexti.* ior est, quam FB. Ponatur FI, ipsi FB, æqualis;[d] & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc est, ad sibi æqualē BF, ita FK, ad BK. Ostensum est autem esse vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.[e] Igitur
[e] *10. deci.* & FK, BK, potentia solum commensurabiles sunt.
[f] *18. quinti* RVRSVS quia est vt HF, ad BF, ita FK, ad BK,[f] erūt quoque HF, FK, antecedentes simul, nempe tota HK, ad BF, & BK, consequentes simul, hoc est, ad totam FK, vt FK, ad BK. Ac propterea F K, media proportionalis est inter HK, BK. Quare vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, secunda. Quia vero CG, cum Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum, facit DG, latitu-
[g] *21. deci.* dinem

dinem Rationalem, ipſi DC, longitudine commenſurabilem; Erit quoque HB, ipſi DG, æqualis, Rationalis & longitudine cõmenſurabilis ipſi DC. Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quoque vt BD, ad DC, ita HK, ad FK. [a] Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commenſurabile eſt quadrato ex DC, (quod rectæ BD, DC, ſint Rationales potentia commenſurabiles, cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus.) [b] Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratũ ex FK, ita recta HK, ad BK. [c] Igitur longitudine commenſurabilis eſt HK, ipſi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & BK, ipſi HK, commenſurabilis, Rationalis exiſtit. Cũ ergo oſtenſa ſit FK, ipſi BK, potentia ſolum commenſurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales ſint, & potentia tantum oſtenſæ commenſurabiles, [d] erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod eſt primum.

[a] 22. ſexti

[b] 10. deci.

[c] 10. deci.

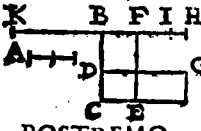
[d] 74. deci.

QVONIAM vero oſtenſum eſt eſſe rectam HK, totam parti BK, longitudine commenſurabilem, [e] erunt propterea & BK, BH, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cum ergo BH, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi DC; erit quoque BK, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum eſt eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, oſtenſæ longitudine commenſurabiles; [f] Erunt quoque BD, FK, commenſurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipſi BD, & BK, ipſi DC, longitudine ſit commenſurabilis, erunt ipſius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipſius BC, ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.

[e] 16. deci.

[f] 10. deci.

ITEM



ITEM quia demonſtrauimus eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erũt idcirco Apotomę nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominibus ipſius BC, quæ eſt ex binis nominibus. Quod eſt tertium.

POSTREMO vel BD, plus poteſt, quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incõmenſurabilis. Si plus poteſt BD, quã DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; [a] poterit quoque FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis: Et ſi BD, plus poteſt quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Et ſi quidẽ BD, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commẽſurabilis; erit & FK, quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Si vero DC, ſit Rationali commẽſurabilis lõgitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si denique neutra ipſarum BD, DC, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; [b] erit quoque neutra ipſarum FK, BK, commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome BF, ipſi BC, ex binis nominibus, vt conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertijs. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 15. decimi

[b] 14. decimi

113. 0.

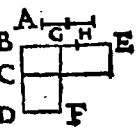
THEOR. 90. PROPOS. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadẽ proportione;

&

& adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eũdem habet ordinẽ, quem ipſa Apotome.

SIT Rationalis *A*, & *A*potome B C, cui congruat C D, [a] & ad B C, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex *A*, latitudinẽ faciens B E. [a] 45. primi

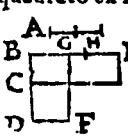


Dico B E, eſſe ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus B D, C D, Apotomæ B C, & in eadem proportione; & adhuc ipſam B E, ex binis nominibus, eſſe ipſi B C, Apotomæ ordine eandem. [b] *A*pplicetur enim rurſus ad B D, totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc eſt, ipſi C E, latitudinem faciens B G. [b] 45. primi

Et quoniam B F, C E, æqualia ſunt; [c] erit vt B E, ad B G, ita B D, ad B C; & per conuerſionem rationis, vt B E, ad G E, ita B D, ad C D. Secetur quoque E G, ad H, ſecundum proportionem B E, ad G E, ex ijs, quæ in ſchol. propoſ. 10, lib. 6. conſcripſimus; vt ſit E H, ad H G, quemadmodum B E, ad G E. Quia igitur eſt vt B E, tota ad G E, totam, ita E H, ex B E, ablata ad H G, ex G E, ablatam; erit quoque B H, reliqua ipſius B E; ad H E, reliquã ipſius G E, vt tota B E, ad totam G E; Erat autem vt B E, ad G E; ita E H, ad H G. Erit igitur quoque vt B H, ad H E, ita E H, ad G H; atque adeo H E, media proportionalis eſt inter B H, G H. Quare erit vt B H, prima ad G H, tertiam, ita quadratum ex B H, prima ad quadratum ex H E, ſecunda, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt B D, ad C D, ita B E, ad G E, hoc eſt, B H, ad H E; & ſunt B D, C D, cum ſint nomina *A*potomæ B C, Rationales potentia tantum commenſurabiles, [d] Erunt quoque B H, H E, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea quadrata ex B H, H E, commenſurabilia. Igitur rectę B H, G H, eandem habentes rationem cum quadratis ex B H, H E, vt demonſtrauimus, [e] lõgitudine ſunt commenſurabiles; *A*c propterea tota B H, longitudine commenſurabilis exiſtens parti G H, commenſurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propoſ. [c] 14. vel 16. ſexti. [d] 10. deci. [e] 11. deci.

propoſ. 16. huius lib. At vero cum BD, *Rationalis* ſit, nempe maius nomen Apotomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; erit latitudo BG, Rationalis commenſurabilis longitudine ipſi BD. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & BH, eidem BD, Rõnali commẽſurabilis eſt longitudine, atque adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem BH, BG, longitudine commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero BH, HE, oſtenſę ſunt commenſurabiles potentia tantũ, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea BE, ex binis nominibus eſt. Quod eſt primum.

a 31. deci.



b 37. deci.

QVONIAM vero oſtendimus eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD; atq; adeo permutãdo BH, ad BD, vt HE, ad CD; Oſtenſa eſt autem BH, ipſi BD, longitudine commenſurabilis; erit quoque HE, ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum.

c 10. deci.

IMMO & in eadem proportione, cum demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertiũ.

POSTREMO vel BD, plus poteſt quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis lõgitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem BD, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si vero CD, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine

d 15. deci.

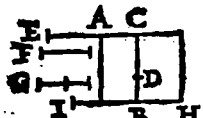
dine Rationali expositæ; erit quoq; neutra ipsarũ BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex *secundis*, atque *tertijs definitionibus*, *ipsa* BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex *binis* nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum,

[a] *14. deci.*

THEOR. 91. PROPOS. 115. 114.

SI spatiũ cõtineatur sub Apotoma, & ea, que ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATVR spatiũ A B, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, cõmensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Posit autem recta F, spatiũ AB. *Dico* F, esse Rationalem. Exposita enim Rõnali G, [b] applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. [c] Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commensurabilia sunt nominibus C*D*, *D*B, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt C*D*, ad DB; atque adeo vt CE, ad *A*E, & permutando, vt tota HI, ad totam C*E*, ita ablata BI, ad ablatam *A E*. [d] Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam A C, vt tota HI, ad totam CE: [e] Commensurabilis autem est longitudine HI, ipsi C E, quod vtraque



[b] *45. primi*

113. decimi.

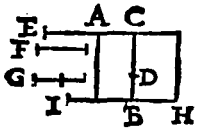
[d] *19. quin.*
[e] *12. decim*

HI, CE, commensurabilis fuerit longitudine ipsi CD.

[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

[c] 1. sexti.



[a] Igitur & BH, ipsi AC, longitudine est commensurabilis; [b] Atque idcirco & HC, ipsi BA, commensurabile erit. [c] cum sit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale est. Igitur & BA, illi cōmensurabile, Rationale erit, propterea q; & recta F, ipsum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cōmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demōstrandum.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, lōgitudine ostensa sunt esse cōmensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

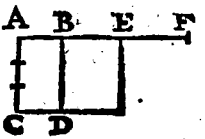
A ME-

THEOR. 92. PROPOS. 116.

115. 107.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, et nulla alicui antecedentium est eadem.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali AC, cõtineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentũ, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Posit ipsum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, a latitudinem faciat Rationalem ipsi AC, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarũ duodecim Irrationaliũ, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad eandẽ Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem faciat differentem a latitudinibus, quas quadrata illarũ tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



QVOD si cõpleatur rectãgulum DE; erit & hoc cõtentũ sub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lẽmate propos. 38. Posit ergo ipsum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus EF, nõ esse

a 23. deci.

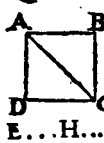
eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi BE. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius BE, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes a BE, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

118. 7.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommensurabilem esse lateri AB. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; [a] ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; sintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, ([b] Cum enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus



[a] 5. deci.

[b] 20. sexti, & 11. octavi.

merus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariã posſit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe EF, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cum ſe ipſum multiplicans producat ſuum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; [a] eo quod impar imparem multiplicans impatem procreat. Quod eſt abſurdum. oſtenſus eſt enim par.) Quia vero EF, & G, in ſua proportione minimi, [b] inter ſe primi ſunt; & EF, oſtenſus eſt par, erit G, impar. (Si enim par etiam eſſet, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igtur numerus EF, duplus eſt numeri EH; [c] & quadrati habẽt proportionẽ laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus ſit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partiũ 4. eſt quadratus ex EF, taliũ 2. erit quadratus ex G; & taliũ 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt ſupra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus. quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter AC, lateri AB. Igitur incommenſurabilis longitudine.

[a] 29. noni

[b] 24. ſepti.

[c] 11. octaui

ALITER. Sit ſi poteſt fieri, diameter AC, commenſurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum ſit quadrati ex AB; ſit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonſtratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam eſt demonſtratum, quadratus ex EF, duplus eſt quadrati

ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cũ ergo & G, ſe ipſum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum G: Sed & inter ſe primi ſunt. Quod eſt abſurdum. Non ergo commenſurabilis eſt diameter AC, longitudine lateri AB. Quare oſtendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommẽſurabilem eſſe longitudine. Quod erat demonſtrandum.

a 14. octaui

SCHOLIVM.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonſtrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 7. lib. 1 demonſtrata a nobis ſunt, quadratum diametri duplum eſt quadrati ex latere deſcripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia ſumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. b *ſolum tertius ab vnitate quadratus eſt, & cæteri omnes vnum intermittentes; quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non ſit; erunt ſolum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus ſit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum;* (c *alias & 2. quadratus eſſet.*) *ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* d *Incommenſurabilis ergo eſt diameter longitudine ipſi lateri. Quod eſt propoſitum.*

b 10. noni

c 24. octaui

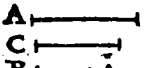
d 9. deci.

HOC etiam theorema aliter demonſtrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. & in ſcholio propoſ. 9. huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Gracis reperitur hoc loco appendix quadam, cuius intelligentia ex ſequentibus Stereometria libris pendet, vt merito omitti poſſet. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commenſurabilitatem omnium magnitudinum, & incommenſurabilitatem pertinent; viſum eſt, eam paucis explicare, aſſignando more noſtro

noſtro ſolito in margine loca Stereometria, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt. Eſt igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter ſe incommenſurabiles, inter quas media proportionalis ſit C. Quoniam igitur ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita eſt figura rectilinea quæuis ſuper A, conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilem, ſimiliterque poſitam ſuper C; & ſunt A, & B, longitudine incommenſurabiles; [a] erunt rectilineæ illæ figuræ ſuper A, & C, incommenſurabiles.



[a] 10. deci.

RVRSVS [b] quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, deſcripta: Quadrata autem hæc, cum ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque poſitæ, proportionem habent, quam recta A, & B, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. [c] Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam recta A, B: Sed rectæ A, B, incommenſurabiles ſunt longitudine. [d] Igitur & circuli diametrorum A, C, incommenſurabiles ſunt.

[b] 2. duodecimi

[c] 11. quinti

[d] 10. deci.

IAM vero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel priſmata eiuſdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ ſuper A, C, [e] habebunt pyramides, atque priſmata eandem proportionem, quam baſes, hoc eſt, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ figuræ incommenſurabiles ſint, vt modo eſt demonſtratum; [f] incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides, & priſmata.

[e] 5. 6. vel 7. duodecimi.

[f] 10. deci.

QVOD ſi coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum baſes circuli ſint diametrorum A, C, [g] habebunt huiuſmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum baſibus, hoc eſt, cum illis circulis. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles, [h] Erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta ſunt igitur non ſolum lineæ, & ſuperficies incommenſurabiles, verum etiam & corpora, ſiue ſolida incommenſurabilia. Quod eſt propoſitum.

[g] 11. duodecimi.

[h] 10. deci.

EADEM autem ratione, si recta A, & B, longitudine commensurabiles sint; [a] *ostendemus earum figuras rectilineas similes, similiterque descriptas, nec non & ipsarum circulos, commensurabiles esse;* [b] *atque adeo & earundem pyramides, & prismata; ac denique conos, & cylindros; si modo eandem habeant altitudinem, vt perspicuum est.*

[a] 10. deci.

[b] 5.6.7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM *Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearũ commensurabilium, atq; incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.*

EX-

EXPLICAT autem prius, more ſuo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima eſt: Solidum, ſiue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, qua præter longitudinem latitudinemque ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem, ita vt tres dimenſiones poſſideat, vnam quidem ſecundum longitudinem, aliam vero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſsitudinem, altitudinemve, appellari ſolidum, ſiue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantũ habens, linea; qua vero longitudini latitudinem adiicit, ſuperficies vocatur, vt in primo lib diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt recte intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hoc enim deſcribit veſtigium quoddam longum tantum, hac eſt, lineam, propterea quod punctum omnis ſit magnitudinis expers; vt autem percipiamus ſuperficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri; hac enim deſcribet veſtigiũ longum & latum dumtaxat; longum quidem propter longitudinem linea, latum vero propter motum illum, qui in tranſuerſum eſt factus; carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditum, conſulunt, vt concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter eleuari, ſiue in tranſuerſum moueri; hac enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, qua longa & lata exiſtit; profundum vero ſeu craſſum, propter eleuationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hæc ergo quantitas, ſolidum ſiue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta diſtincta a linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quod triplex tantum dimenſio poſſit aſsignari, vt perſpicue in commentariis, quos in ſpharam Ioannis de Sacro Boſco conſcripſimus, a nobis fuit demonſtratum ex Ptolemæo in libello de Analemmate.

SOLI-

II.

SOLIDI autem extremum, eſt ſuperficies.

QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, ſuperficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremũ eſſe ſuperficiem. Cum enim ſolidum, ſiue corpus efficiatur ex illo motu imaginario ſuperficiei; perſpicuum eſt extremas partes illius eſſe ſuperficies.

III.

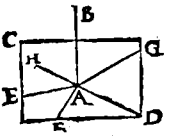
LINEA recta eſt ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

VT linea recta AB, plano CD, inſiſtens, ita vt B, punctum ſit in ſublimi extra planum CD, at punctum A, in ipſo plano, tum demum dicetur recta ſeu perpẽdicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt in puncto A. Hac enim ratione fiet, vt AB, æqualiter inſiſtat plano CD, & nõ magis in vnam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eadẽq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quod ſi fieri poſſet, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, ducta

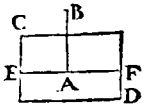


non

non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planũ recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodẽ plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e contrario, vt recte cõcludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrãdum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.



VT autem recta quapiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eã cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia si duæ linea componant vnam rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim AB, insistat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam vnam lineã componant. Dico AB, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos constituere; atq; idcirco non esse rectã ad planũ CD.



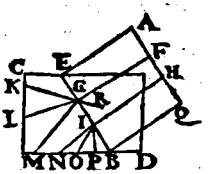
Hoc autem perspicuum est, cum AB, circa EF, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum EF, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG, AD, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cũ omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucide demonstratur propos. 4. huius lib.

PLA-

IIII.

PLANVM ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorũ ſectioni ad rectos angulos in vno planorum ducũtur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

INSISTAT planum AB, plano CD, ita vt linea AQ, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planũ ſubiectum CD, at EB, in ipſo eodẽ plano: Sit autẽ horum planorum communis ſectio EB, qua, vt demonſtrabitur propoſ. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem ſumptis quotcunque punctis G, I; ex ipſis in plano AB, ducãtur GF, IH, perpendiculares ad communem ſectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM, IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, a pũctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quam in alteram, ſed æquabiliter illi inſiſtet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis. Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique a lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe cõceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem ductas, rectas eſſe ad reliquum planum.

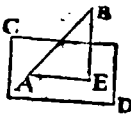


RE-

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planũ deducta fuerit perpendicularis, atque a pũcto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodẽ eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea, & adiuncta compreprehenſus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpẽdicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritque neceſſario a *17. primi* *angulus BAE, acutus, cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus linea inſiſtente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio recta AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur eſſe inclinatio linea AB, ad planum CD, quantus eſt dictus angulus acutus BAE.*



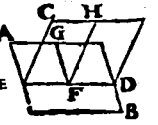
VI.

PLANI ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus,

quæ

quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO nãq; AB, insistat planũ CD, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipso plano AB, sitq; CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex eius puncto F, duæ perpendiculares ducãtur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometra angulum GFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, siue is acutus sit, siue rectus, obtususve: quamquam proprie solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius aquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus vero recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consueuit a plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON

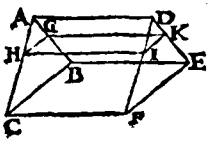
NON obscura est hac definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum esse dicetur, cuius anguius inclinationis minor extiterit, atque adeo a recto magis recesserit.

VIII.

PARALLELA plana sunt, quæ inter se non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur; hoc est, siue ad dexteram, siue ad sinistrã, & siue sursum, siue deorsum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dexteram, nec ad sinistram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela sunt dicenda; quia nimirum vel sursum, vel deorsum protracta, tandem coeunt. Nam si sumatur tectum aliquod, cuius fastigium intelligatur abscissum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad sinistram. Sed tamen quia sursum protensa coeunt, nimirum in ipso fastigio, idcirco non dicentur parallela.

SIT enim tectum quodpiam ABCDEF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius basis BCFE; auferaturque fastigium AGHDKI. Quo facto, perspicuum est, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter se, si ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen ideirco parallela dicentur, cũ producta ad partes GH, KI, conueniant in fastigio AD. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, necesse est, vt in nullam partem producta inter se conueniant. Sicut autem linea in eodem plano existẽtes, ad duas duntaxat partes produci possunt, nempe ad sinistram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi possunt protracta, nempe sinistrorsum, dextrorsum, sursum, atque deorsum. Itaque duo plana quacunque, vel sunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; linea vero re-



ro recta, vel ſunt parallela, vel ad alteram partem protracta conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtunt plano, vel tandē nec ſunt parallela, neq; vnquam conueniunt, ſi videlicet in diuerſis ſint planis, & in tranſuerſum poſita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem ſint plano: Hic autem ſimpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.

IX.

SIMILES ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit, vt breuitati conſulens eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quod ex ſimilitudine planorum ſtatim cōſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cum illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

X.

AEQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figura ſolida non ſolum ſimiles,

verum etiam æquales. Nam si animo concipiantur sese pene trare mutuo huiusmodi solida, neutrum alterũ excedet, propter æqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent; ac propterea inter sese existent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVAE lineæ in eodem existentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planũ, vt lib. 1. expositum, qualis est angulus BAC, cõtentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quædã linea AD, quæ non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres lineæ AB, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC; immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, so-



lidum

lidum conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus eſt, qui plurìbus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

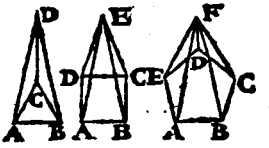
HÆC definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti recte intellecta. Cum enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſaria ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur, vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano eſt, in quo rectæ AB, AD; & angulus DAC, in plano, in quo recta AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo recta AC, AB; atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſupra diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diuerſis ſint planis. Habit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remaneroque tantum duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his vero perſpicuũ cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitu-

dine, & magnitudine aqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuo congruent, ſi ſe ſe penetrare intelligantur. Quemad modum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis ſolum rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures linea recta quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica ſuperficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus ſuperficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis eſt, qui fit, ſi conus per verticem ſecetur.

XII.

PYRAMIS eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnũ punctum conſtituta.



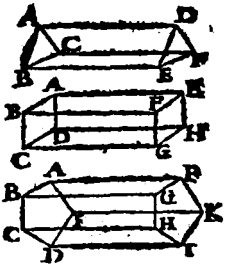
VIDELICET figura ſolida a planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, conſtituta appellantur pyramides. Perſpicuum autẽ eſt, omnia plana, quibus pyramis continetur eſſe triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitũ. Hoc enim poteſt eſſe vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationem ſumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrãgula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiuſmodi, baſis pyramidis nuncupari ſolet. Vt pyramidis triangularis, præter baſin, triangula ſunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

PRI-

XIII.

PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum aduerſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, et parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRÆ ſcilicet ſolidæ, quarum plana aduerſa & æqualia, & ſimilia, et parallela ſunt triãgula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogrãma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur priſmata. Itaque priſma nil aliud erit, quã columna quadam laterata æqualis craſitudinis, cuius baſes oppoſitæ



ſunt æquales, ſimiles, & parallelæ, ſiue ha ſint triangula, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Vnde tot parallelogrãma continebit priſma quodlibet, quot latera, ſiue anguli, in vno quoq; oppoſitorũ planorũ reperiuntur, vt figura indicãt.

EX his manifeſtum eſt, quantum hallucinẽtur ij, inter quos eſt & Campanus, qui priſma intelligunt eſſe eam figuram ſolidam duntaxat, cuius duo plana aduerſa parallela, æqualia, ſimilia quæ, triangula ſunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram ſolidam Campanus vocat Corpus ſerratile. Cum enim hac figura ſit ſolum vna ſpecies priſmatis, definitio autem tradita infinita alia genera priſmatis amplectatur, vt cõſtat; præſertim quod plurima demonſtrationes in hoc lib & 12. ſequenti, ex æquo omnibus priſmatibus conueniunt; perſpicuum eſt eos hallucinari, qui vnum tantum priſmatis genus ex hac deſin. colligunt. Sum-

pſerũt autem fortaſſe hi auctores occaſionẽ errãdi, quod Euclides & in propoſ. vltima huius lib. & in 3. 4. & 5. propoſ. lib. 12. ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib. 12. illis aduerſari, in qua Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorum triangulorum oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolum demonſtratio illa conuenit. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi volunt, priſma appellaretur ab Euclide, fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Immo in corollario dicta propoſitionis ſeptimæ infert Theon, Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eãdem cum illa baſin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecũdum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidẽ, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiã, quod a Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib. 12. apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA eſt, quando, ſemicirculi, manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum; ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum

mum videlicet illud quiescens, a quo omnes linea recta in peripheriã cadentes sunt aquales; propterea quod omnes aquales existant illi linea circumuoluta : Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti, a quo omnes recta cadentes in peripheriam sunt aquales; eo quod omnes sunt semidiametro dicti semicirculi aquales. Quapropter ad similitudinẽ definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiã modo.

SPHAERA est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO in libro de vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Graci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radiis attingitur.

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque a sphæræ superficie terminata.

HÆ tres definitiones non egent expositione; dummodo hoc solum notetur, omnẽ diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum cõuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum ABC, *circa latus quiescens* AB, *quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, describetur solida quadam figura, qua continetur duabus superficiebus, circulari vna, ac plana, quam* BC, *latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaque conuexa, quam latus* AC, *recto angulo oppositum delineat. Hac igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.*



QVOD

QVOD si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus est. Cum enim latera AB, BC, ponantur æqualia; [a] erunt & anguli BAC, BCA, æquales; qui cum æquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus est; erit angulus BAC, semirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte oppositæ semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quiescens latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit maius; [b] erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atq; adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescẽs latus AB, maius fuerit circũducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum.n. latus AB, maius sit latere BC; [c] erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquinaleant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semi recto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

[a] 5. primi

[b] 18. primi

[c] 18. primi

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

BASIS

XX.

BASIS vero coni est circulus, qui a circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est B C, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ab basim rectus non est; placuit ex Apollonio Pergaeo adducere generalem coni descriptionẽ, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter se se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentã

circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

AXEM, rectam lineam, quæ a vertice ad circuli centrum producitur.

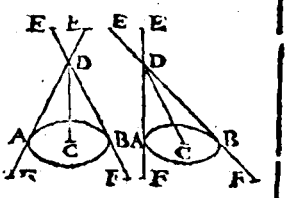
BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.

SIT circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea DB, feratur eouſque in circuli AB, circumferentia, quouſq; punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, a quo capit moueri: deſcribet ſuperficiem quãdam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctum ſe ſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea ſuperficie, quam DB, ſola deſcribit. Coni verticem, punctum D. Axem DC. Baſim AB, circulum. Quod ſi DC, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.

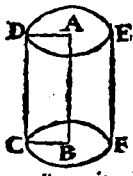


CYL IN-

XXI.

CYLINDRVS eſt, quando rectã guli parallelogrãmi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogramum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumaſſumpta figura.

VELVTI ſi rectangulum parallelogrammũ ABCD, circa latus quieſcens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, qua quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, deſcribunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri ſunt circuli a duobus aduerſis lateribus, quę circumaguntur, deſcripti.

QVA-

QVALES sunt circuli a lateribus AD, BC, oppositi descripti.

EVCLIDES verò solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte coniungens, quousque rursus in eum locum restituatur, a quo moueri cæpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

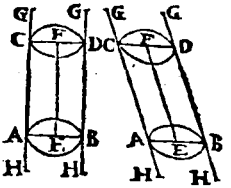
LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylyndri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur,

cantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra E, F. & diametri æquidistantes quoque AB, CD: Iunctaque recta AC, in infinitũ ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa centra E, F, in planis circulorũ semper æquidistãtes, una cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, vnde moueri cæperunt; describetur a linea AC, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitum producitur. Cylindrum vero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos AB, CD. Axem, rectã EF, qua circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

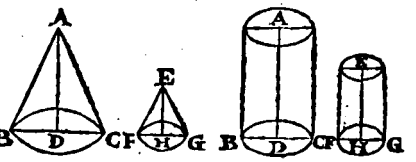


XXIIII.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorũ ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundũ duas dimen-

dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinẽ: Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinẽ ſimiles eſſe demonſtrãt. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis aũt axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim ſit vt AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem vt BC, ad FG, [a] ita dimidia BD, ad dimidiã FH; erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circũ æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectãgula ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, [b] propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, [c] ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula vero, [d] eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



QVOD ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, & diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in definitione quinta dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri

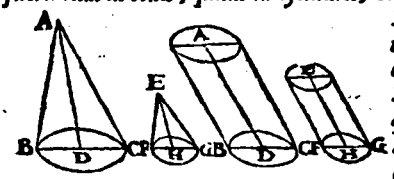
[a] 15. quinti

[b] 6. ſexti

[c] 5. ſexti.

[d] 34. primi

cylindri ABC, EFG: In conis autem axes sint AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita



BC, ad FG, exiterintq; anguli inclinationū ADB, EHF, tā in conis, quam in cylindris, aquales inter se; dicētur & coni inter se, & cylindri quoque inter se simile; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur aquales, licet non sint recti.

XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, et æquilateris contenta.

DO-

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis oontenta.

XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æqui lateris contenta.

HÆC sunt quinque corpora, qua regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, qua simplicia a philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioãnis a sacro bosco latius explicauimus. Horum omniũ constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autẽ propos. 17. Icosaedri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atq; formã quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodũ faciles, quibus ea quilibet secundũ eorũ soliditatẽ possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinq; illa dari potest, vt demõstrabimus ad finẽ lib. 13.

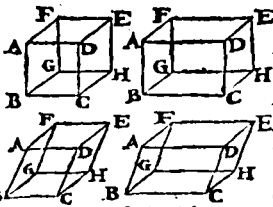
QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum,

lepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelę sunt, contenta.

VELVTI solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH; Itē



EDF, CG; Item AG, DH, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehē sa. quæ quidem plana parallela opposita, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius lib.

SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebitque quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte lōgiora, quāuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma exiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectāgula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

SOLI-

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidę figurę viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptę tangunt omnes angulos figurę, circum quam deſcribitur.

NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figura conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figura, cum interdum figura exterior plures, interdū pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figura interioris tangant vel aliquot angulos, uel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figura; ita ut nullus angulus figura interioris intactus relinquatur uel ab angulis, uel a lateribus, uel denique a planis figura exterioris.

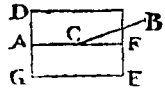
VERVM dua hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibusque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

RECTAE lineæ pars quædā non eſt

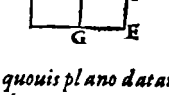
in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidē AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam uero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HÆC eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nēpe vt oſtendatur, recta AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directū, & continuum poſitam. Qui enim concedit, recta AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, recta AC, in plano DE, dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quādoquidem rectam CB, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi AC. Veruntamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, qua ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ recte, & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem ſi AC, in plano DE, producatur vſque ad F, erit CF, recta recte AC, in cōtinuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam id ipſum Geometrice, in plano videlicet DE, ipſi AC, dari poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa unam rectam lineam cōſtituat, quamuis quis dicat, AB, eſſe quoque rectam, eiuſque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in ſublimi eſſe poſitam.



ſitam. [a] *Ducatur enim in plano DE, ipſi AC, perpendicularis CG; & in eodē plano ipſi CG, perpendicularis CF. Dico CF, eſſe ipſi AC, poſitam in continuū & rectū. Cū enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos conſtituant ACG, FCG, ex conſtructione;* [b] *erunt AC, & FC, in directum & continuum poſita. Quamobrem etſiamſi quis contendat, AB, eſſe rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, ſubiecto, pars autem CB, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam conſituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, ſegmentum commune habebunt AC. Quod eſt abſurdum.*

HINC ſit omnes partes cuiuſuis rectæ lineæ, hoc eſt, totam rectam lineam, in vno exiſtere plano.

[a] *11. primi*

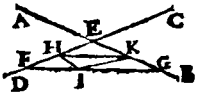
[b] *14. primi*

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duæ rectę lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano.

RECTAE lineæ AB, CD, ſe mutuò ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirū EHIG, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra; Exiſtent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in ſublimi, vel contra. quod fieri nō poſſe, iam ſupra [c] demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur eſſe, pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidem FHKG, in vno conceda-

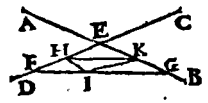


[c] *1. vndec.*

tur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoq; rectarum FE, GE, partes quidé FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel cõtra. Quæ omnia absurda sunt, [a] vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

[a] 1. vndec.

QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG. [b] in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædã in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulũ EFG, consistere demõstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

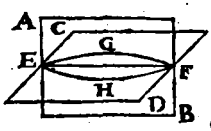


[b] 1. vndec.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD, sitq; communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectã. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.



ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintq; termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectãtur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, cõstat propositum: Ipsa enim erit communis sectio.

Si

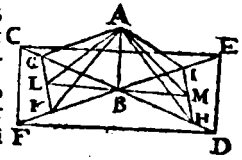
Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cũ eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantũ plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secãtibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiã per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cũ enim se mutuo secent in B; [a] erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumãtur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secãs rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, triãguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; [b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales: [c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.



RVRSVS [d] cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erũt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent,

[a] 2. undec.

[b] 15. primi

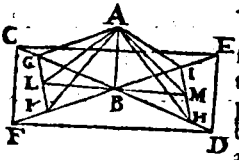
[c] 4. primi.

[d] 15. primi

[a] 26. primi

æqualia, ex constructione. Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

PRAETEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex cõstructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti, ex hypothesi, [b] erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AL, AK.



[b] 4. primi.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli, AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; [c] erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehẽsi, æquales.

[c] 8. primi.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; [d] erunt quoque bases AL, AM, æquales.

[d] 4. primi.

QVONIAM deniq; latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; [e] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademq; ratione ostenditur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter puncta G, I, & K, H, ductæ sint, dummodo rectæ GI, KH, iungantur: vel certe literę disponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextrã, vt in priori figura, sed a superiori parte versus inferiorem. [f] Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

[e] 8. primi.



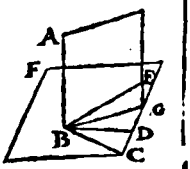
THEO-

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. [a] Cū enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. [b] Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B; sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. [c] Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, per ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsi in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdū. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, existentibus, nō erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 2. undec.

[b] 3. undec.

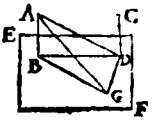
[c] 4. undec.

THEOR.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectatur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; [a] erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Est autem & basis communis AG; [b] Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. [c] Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano: [d] Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti, [e] erũt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



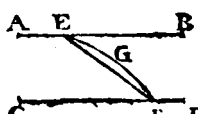
[a] 4. p im.
[b] 8. primi.
[c] 5. undec.
[d] 2. un. ec.
[e] 28 primi

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in qua-

quarum vtraque ſumpta ſint quęlibet puncta : Illa linea, quæ ad hęc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

IN parallelis *AB*,CD. ſumantur vtcunque duo puncta E,& F,quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum, ſunt parallelæ *AB*, CD. Si enim recta EF, non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra: ſecet iam aliud planum ſuperficiem parallelarum per puncta E,& F, ſitque communis ſectio horum planorum EGF,, quę recta linea erit. Duæ igitur rectæ *EF*, EGF, cum habeant eoſdem terminos E, & F, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB,CD, erit recta EF. Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrandum.



[a] 3. undec.

SCHOLIVM.

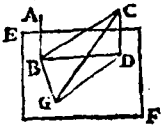
HÆC eadem propoſitio vera eſt, etſiſi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT

SINT parallelæ rectæ *AB*, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano EF; [a] erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: [a] Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpẽdicularis ad BD; ponanturque æquales BG, CD. Coniungantur deinde rectæ D G, G C, CB. Quoniã igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli G B D, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, C D B, GBD, æquales, nimirum recti; [b] Erunt bases CB, GD, æquales. Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, B C, trianguli GBC; & basis est communis CG; [c] Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem C D G, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B, (Si namque producerẽtur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existit; [d] ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta *A* B; [e] propterea quod rectæ *B*D, *B*C, in eodẽ sunt plano, in quo parallelæ A*B*, CD; cum puncta *B*, C, D, existant in parallelis *AB*, CD, Igitur & *GB*, recta rectæ *B* A, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cũ *A*B, recta sit ad rectas BG, BD; [f] erit quoque AB, recta ad planum per *B*G, *B*D, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectę lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.



[a] 29. primi

[b] 4. primi.

[c] 8. primi.

[d] 4. undec.

[e] 7. undec.

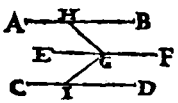
[f] 4. undec.

9. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ,

rallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; eſſe. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipſam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarũ AB, EF; at GI, in plano parallelarũ CD, EF. Quoniam igitur EG, recta eſt ad duas rectas GH, GI, ſe tangẽtes mutuo in G; [a] erit recta quoque ad planum per ipſas GH, GI, ductum. Quamobrem cum ſint parallelæ AB, EF; & EF, ſit recta ad planũ per GH, GI, ductum; [b] erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cum ſint parallelæ CD, EF; ſit autem EF, recta ad planum per GH, HI, ductum; [c] erit etiam CD, recta ad idem planum; [d] Atque proinde rectæ AB, CD, cum rectæ ſint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.



[a] *4. vndec.*
[b] *8. vndec.*
[c] *8. vndec.*
[d] *6. vndec.*

SCHOLIVM.

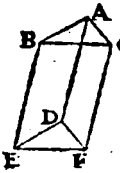
DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non eſſe in eodem plano cum recta EF, cui ſunt parallelæ. Nã ſi forent in eodem plano cum ipſa EF; eſſent AB, CD, inter ſe parallelæ, ex 30. propoſ. 11. lib. Superuacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI duæ rectę lineę ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint

sint parallelę, non autẽ in eodem plano: Illę angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponãtur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; [a] erũt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erũt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD; [b] erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales: [c] Ac propterea parallelæ & æquales erũt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modo demonstrauimus; [d] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehẽsi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 33. primi
[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 8. primi.

SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam est, quãdo priores duæ lineæ in eodẽ sunt plano eũ duabus posterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodẽ plano, sit & AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF; ducanturq; rectæ BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniã igitur parallela sunt AB, DE; æquales erũt anguli ABC, DEF, internus & externus. Similiter æquales erũt anguli ACB, DFE; Sũt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC, æqua-



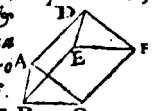
[e] 29. primi

æquales sunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. [a] *Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod est propositum.*

[a] 32 primi

NON sint iam BC, EF, in una rectæ lineæ constitutæ. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, sint parallelæ & æquales; [b] *erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidem AD, parallelæ existentes & æquales, inter se parallelæ erunt & æquales:* [c] *Ac proinde parallelæ & æquales quoque erunt BC, EF. Itaq; cum duo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, trianguli DEF; & basis BC, basi EF,* [e] *erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.*

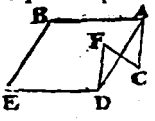
[b] 33 primi



[c] 30 primi
[d] 33 primi
[e] 8. primi.

CAETERVM vt conclusio huius theorematis recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (sive omnes sint in eodem plano, sive non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla ratione se mutuo secent; vt ex prima et vltima figura apparet. Nam alias conclusio vera non erit.

SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehendunt, non sunt æquales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo evenit, quod AD, CF, se mutuo secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quod eas non coniungunt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; qua tamen in superioribus figuris seruatur.



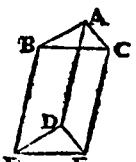
PORRO conuersum quoque huius propos. nimirum: Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ducta sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti: demonstrabimus hoc modo. In planis parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitque AB, ipsi DE, parallela, & AC, DF, sint ad eas-

dem

dem partes plani AE, per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse. hoc est, planum per AC, AD, ductum trā sire etiam per rectam DF. Si enim non sint

[a] 31. primi

[b] 10. vnde.



parallela; [a] si ducatur in plano CD, per AC, AD, ducta recta alia per D, ipsi AC, parallela, [b] continebit hec cum DE, angulum angulo BAC, aqualē, ac propterea & angulo EDF: atque ita pars & totū erunt aqualia. quod est absurdū. Recta ergo DF, ipsi AC, parallela est: atq; adeo planū per AC, AD, ductū trāsibit per rectā DF. quod est propositū.

11. PROBL. 1. PRPOS. 11.

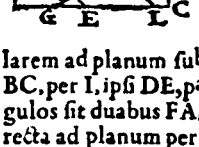
A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planū BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunq; DE; [c] ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF: Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH; [c] ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. [f] Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL; cum DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, [g] ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum; [h] erit quoque KI, ad idem planum per FA, FH, ductum recta. [i] Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitq; rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. [k] Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo pūcto in sublimi, ad subiectū planū perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendū erat.

[c] 12. primi

[d] 11. primi

[e] 12. primi



[f] 31. primi.

[g] 4. vnde.

[h] 8. vndec.

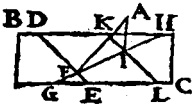
[i] 2. vndec.

[k] 4. vndec.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis; a erit ipsa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis ad subiectum planum BC, perpẽdicularis, cum perpendicularis sit ad vtramque DE, GH.

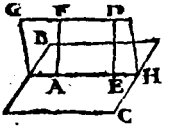


a 4. vnde.

PROBL. 2. PRPOS. 12. 12.

DATO plano a puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC. b Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, c ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datũ BC. Cum enim DE, AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planũ BC, ex constructione; d erit quoq; AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.



b 11. vnde.

c 31. primi

d 8. vndec.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad re-

ctos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad eaſdem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim, ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per CD, CE, [a] quæ in vno, eodemque plano ſunt, ducatur planum FG, ſecãs planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ ſint ad planum AB, erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabũtur, ad eaſdẽ partes. Quod erat demonſtrandum.

[a] 2. vndec.

ALITER. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planum AB, duæ perpẽdiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ ſint ad idem planum AB; [b] erunt ipſæ inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod eſt abſurdum.

[b] 6. vndec.

SCHOLIVM.

EODEM modo a puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in ſublimi ad ſubiectum planum BC, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, [c] *quæ in vno plano ſunt, planum FG, ſecans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ ſint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod eſt abſurdum;* [d] *cum ſint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis aſſumpti.*

[c] 2. vndec.

[d] 17. primi

ALITER. Si AD, AE, rectæ ſunt ad planum BC; [e] *ipſæ erunt inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod eſt abſurdum.*

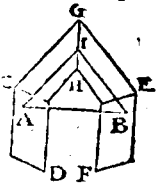
[e] 6. vndec.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; & faciant communem sectionem rectam lineâ GH: In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. [a] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parellela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 3. vndec.

[b] 17. primi

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatq; communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK:

eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare recta EG, FI, ad partes G, I, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; a cum tota recta HGL, sit in vno plano, nempe in AB, producto; Item tota recta KIL, in vno quoque plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdū, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodē modo si aliud planum videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas, communes cum ipsis sectiones MO, PN; erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, b recta quoque erit EF, ad planū CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.

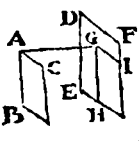
a 1. vndec.

b 4. vndec.

15. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quę per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, enim deducatur ad planum EF, perpēdicularis AG, occurrēs plano EF, in puncto G d Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; e erunt & AB, GH,



e 11. vnde.

d 31. primi

e 9. vndec.

GH, inter se parallelæ; [a] Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA, sit recta duabus AB, AC; [b] recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione. [c] Igitur parallela sunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandũ.

[a] 29. primi

[b] 4. undec.

[c] 14. unde.

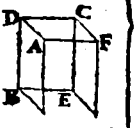
SCHOLIVM.

QVOD si perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non sunt ducenda alia parallela. Vt si lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC, ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpẽdicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, GA, esse rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductũ, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

DATVM planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunq; duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, [d] agatur CE, ipsi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusq; in alio cũ illis plano parallelæ sint; [e] parallelæ erunt plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.



[d] 31. primi

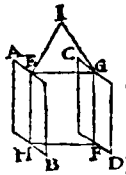
[e] 15. unde.

16. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam ſecentur : communes illorum ſectiones ſunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes ſectiones eorum EH, GF, eſſe lineas parallelas. Si enim non ſunt parallelæ, productæ inter ſe conuenient, cum ſint in plano EF, ſecante. Conueniant igitur in puncto I. [a] Quia ergo tota recta HEI, in vno eſt plano, nimirum in AB, producto ; Item tota recta FGI, in vno quoque eſt plano, videlicet in CD, producto; conuenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod eſt abſurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare ſi duo plana parallela plano quopiam ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 1. undec.



SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione poteſt conuerti. Quamuis enim communes ſectiones planorum parallelorum facta ab alio plano ſecante ſint parallelæ, vt hic demonſtratum eſt; Nõ tamen omnia illa plana, quorum communes ſectiones facta ab alio plano ſecante ſunt parallelæ, parallela ſunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana poſſint duci, quorum duo tantum ſunt parallela, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud ſimile theoremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela.

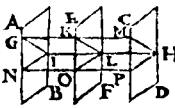
SINT

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, GD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorum sectiones recta GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, ut duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, [a] erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL; [b] atque adeo parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano; [c] erunt plana AB, CD, per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.

[a] 16. undec.

[b] 9. undec.

[c] 15. undec.

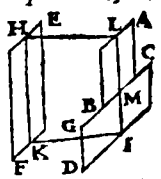


ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, a quo in utramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad planum EF, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, sit recta ad plana AB, CD; [d] parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.

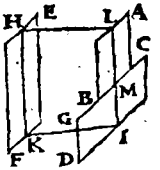


[d] 14. unde.

QUOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, unam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantque producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, unum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria



tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur
[a] 16. vnde. parallela sunt plana AB, EF; [a] erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quam ob rem cum rectæ LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantque in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum
[b] 1. vndec. planum efficient; [b] propterea quod rectæ LI, in vno iacent plano. Quod est propositum.

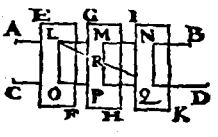


ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.

17. ## THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue nó, existétes tñ in eodẽ plano; siue in trás-



uersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earũ inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH,
[c] 2. vndec. [c] Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero pla

na

na parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, [a] erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [b] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *16 vnde.*
[b] *2. sexti*

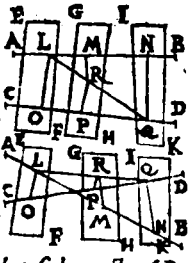
SCHOLIVM.

QVOD si data duæ rectæ AB, CD, sint in vno eodēque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planū per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in pūctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [c] quæ inter se parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionē planorum LOQN, GH.

[c] *16. vnde.*

SI vero duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia [d] cum triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa triangula in vno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodē illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est cōtra hypothesim.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorū; ac proinde vnam rectam non constituent: [e] alias in vno essent plano. quod est absurdum.

[d] *2. vndec.*



EADEM hac propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, nō sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratū est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

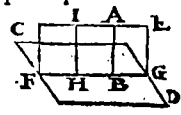
NON

NON secus, si plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorũ LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si recta AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

18. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiã ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erũt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planũ EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelę, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiã ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 31. primi

[b] 18. vnd

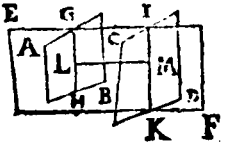
SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, paralle la sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnũ cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano. n. EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: [a] eademque perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta est, ipsa parallela erunt.



[a] 29. primi

[b] 14. vnde.

SED iam parallela sint plana AB, CD; sitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; [c] quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. [d] Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectum. Quod est propositum.

[c] 16. vnde.

[d] 18. primi

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectũ.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oporteatque per FG, planum ducere, quod ad planũ CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, [e] erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planũ ducatur EF. [f] quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.

[e] 12. vnde.

[f] 18. vnde.

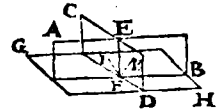
THEOR.

19.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana *AB*, *CD*, se mutuo secantia per lineam rectam *EF*, ad planum *GH*, recta. Dico communem illorum sectionem *EF*, rectam quoq; esse ad idem planum *GH*. Aut enim *EF*, ad *BF*, *DF*, communes sectiones planorum *AB*, *CD*, cum plano *GH*, recta est, aut non. Si recta est *EF*, ad *BF*, *DF*, [a] recta quoque erit ad planum *GH*, quod per ipsas ducitur. Si vero *EF*, concedatur recta ad alterá rectarum *BF*, *DF*, tantum; sit ea recta ad *BF*. Quoniam igitur planum *AB*, ad planum *GH*, ponitur rectum; erit *EF*, quæ in plano *AB*, ad *BF*, communem eius sectionem cum plano *GH*, ducitur perpendicularis, ad planum *GH*, recta, ex 4. defi. huius lib. Idem concludes, si *EF*, concedatur recta ad *DF*. Erit enim & tunc *EF*, ad planum *GH*, recta ex defin. 4. huius lib. cũ perpendicularis ponatur ad *DF*, communem sectionem plani *CD*, cum plano *GH*, ducaturque in plano *CD*, ad planum *GH*, recto. Si denique *EF*, ad neutram *BF*, *DF*, esse credatur recta; [b] ducatur ex *F*, in plano *AB*, ad *BF*, communem eius sectionem cum plano *GH*, perpendicularis *FI*; Item in plano *CD*, ad *DF*, communem eius sectionem cum plano *GH*, perpendicularis *FK*. Quoniá igitur planum *AB*, rectum ponitur ad planum *GH*, erit quoque perpendicularis *IF*, quæ in plano *AB*, ad *BF*, cõmunem eius sectionem cum plano *GH*, ducitur, recta ad planum *GH*, ex 4. defin. huius lib. Eadẽ ratione erit *KF*, ad idem planum *GH*, recta; *Ac* proinde a puncto *F*, ad planum



[a] 4. vndec.

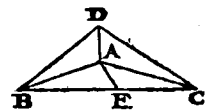
[b] 11. primi

planum GH, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fieri non poſſe ſupra demonſtratum eſt. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum. [a] 13. vnde.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI ſolidus angulus tribus angulis planis cõtineatur: Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores.

CONTINEATVR angulus ſolidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo eſſe maiores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuũ eſt, quoſuis duos maiores eſſe reliquo: Si vero duo tantũ ſint æquales, & tertius vtrouis minor, conſtat quoque quoslibet duos reliquo maiores eſſe. Quod ſi vnus, uidelicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſiue æquales, ſiue inæquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo eſſe maiorem. Dico iã hoc angulo maximo BAC, maiores quoque eſſe angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto, [b] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectę AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, ſecans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipſis contenti, per conſtructionem, æquales; [c] erunt baſes BD, BE, æquales. [d] Quia vero latera DB, DC, maiora ſunt latere BC; ſi demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quam CE. Cum igitur latera AD, AC, triãguli DAC, æqualia ſint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & baſis CD, maior baſe CE;



[b] 23. primi.

[c] 4. primi.
[d] 20. primi

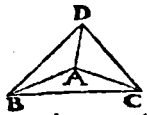
[a] 25. primi

se CE; a erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Addi tis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendēdum.

21. THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB, erunt cōstituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis cōtinetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. [b] Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. [c] Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi, vna cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, ([d] sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.



[b] 20. vnde

[c] 23. primi

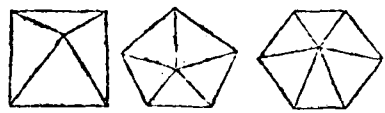
[d] 32. primi

SCHO-

SCHOLIVM.

QVONIAM hac demonſtratio ab interpretibus accommodatur ſoli illi angulo ſolido, quem tres plani anguli cõſtituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos ſolidos extendemus hoc modo.

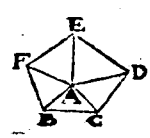
SIT angulus ſolidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos eſſe quatuor rectis quoq; minores. Nam ſi omnibus angulis planis recta ſubtendantur ordine in eodẽ plano exiſtentes; cõſtituetur pyramis, cuius vertex ſit angulus ſolidus, tot laterum, angulorumve, ſub quot angulis planis ſolidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorũ, (a cum anguli cuiuslibet trianguli duobus ſint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet baſis: Sed omnes anguli baſis æquales ſunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propoſ. 1. lib. demonſtrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum ſuperabunt omnes angulos baſis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (propterea, quod prope baſin conſtituantur anguli ſolidi, quorum quilibet tribus planis angulis cõtinetur, b & horũ quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in baſi, ſint maiores) ſuperabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorũdem prope baſin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.



a 32. primi

b 20. unde.

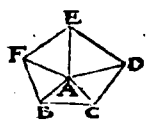
VERVM vt res melius percipiatur, ſit gratia exempli angulus ſolidus A, contentus quinque angulis planis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, quibus ſubtendantur ordine recta B C, C D, D E, E F, F B,



ita vt

ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulũ solidum A. [a] *Quia vero omnes anguli quinque triangulorum BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis BCDEF, æquales sunt sex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur;* [b] *erunt duo CBA, ABF, qui sunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in aliis omnibus angulis solidis.*

[a] 32. primi



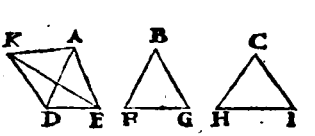
[b] 20. vnde.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

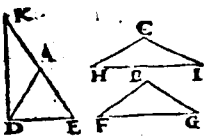
SI fuerint tres anguli plani, quorum duo ut libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulum constituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarũ DE, FG,

FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, [a] ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod.n. duę DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. [b] Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primũ AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus; quod quidem continget, quãdo duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [c] erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, maior angulo C; propterea qđ duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & basis EK, maior basi HI: [e] Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



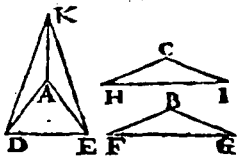
CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturque AK, ipsi AD, æqualis rursum, & connectatur recta KD. [f] Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. [g] Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores sunt recta KE; & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, CI: [h] Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



CADAT postremo AK, [i] ad partes AE, ita vt nec

[a] 22. primi
[b] 23. primi
[c] 4. primi.
[d] 24. primi
[e] 20. primi
[f] 4. primi.
[g] 20. primi
[h] 20. primi

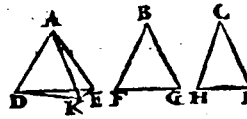
angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta sit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli



DAF, & B, duobus rectis sunt maiores. Ponaturq; rursum AK, ipsi AD, æqualis, & ducantur rectæ K D, K E. [a] Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. [b] Quoniam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK; & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi & cõstructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: [c] Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, si angulo C, ad FG, constituatur angulus æqualis, &c. [d] Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. primi.
[b] 21. primi
[c] 20. primi
[d] 22. primi

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; [e] erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; [f] erunt quoque duæ illorũ bases æquales, [g] & basis tertij vtraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; [h] erit quoque basis DE, omniũ maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quã FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE, [i] Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transeat circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitatẽ rectarum AD, AK, AE. Connectantur



[e] 4. primi.
[f] 24. primi
[g] 24. primi
[h] 24. primi
[i] 23. primi

nectantur deinde rectæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionē; erit angulus C, maior reliquo angulo K A E. Et quia latera AD, AK, trianguli A D K, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [a] erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; [b] erit & basis HI. maior basi KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: [c] Sed DK, KE maiores sunt, quam D E. Igitur multo maiores erunt F G, H I, quam D E, Quod est propositum.

[a] 4. primi.

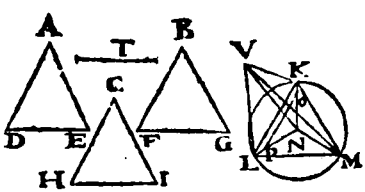
[b] 24. primi

[c] 20. primi

PROBL. 3. PROPOS. 23. 23.

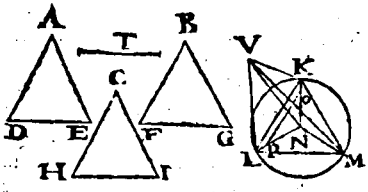
EX tribus angulis planis, quorū duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac cōditione, vt qlibet duo sint maiores reliquo. Oportet iā ex tribus angulis A, B, C, angulū solidū cōficere, qui nimirū contineat tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponātur sex lineę angulos dictos cōprehendētes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendāturq; bases DE, FG, HI. [d] Fieri ergo pōt, vt ex DE, FG, HI, triangulū cōstituatur



[d] 22. vnde.

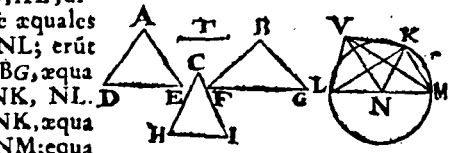
ſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triãgulum KLM, ſitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectę FG; & latus KM, rectæ HI, æquale. [a] Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrũ N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritq; quęlibet rectarũ angulos planos cõprehendẽtium, nẽpe A D, AE, &c. maior qualibet ductarũ ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrũ N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quãdo triangulũ eſt oxygonium, vt ex coroll. propoſ. 5. lib. 4. cõſtat. Si igitur AD, AE, maiores nõ credãtur, quã NK, NL, erũt vel ęquales, vel minores. Sint ergo æquales. Qm̃ igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, triãguli NKL; & [b] baſis DE, baſi KL, ęqualis: [b] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodẽ argumẽto erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cũ igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum, ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neque minores. Si. n. minores ſint AD, AE, quã NK, NL, abſcindãtur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniã igitur eſt vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cũ & antecedẽtia inter ſe, & cõſequẽtia ſint inter ſe æqualia; erũt latera NK, NL, triãguli NKL, ſecta proportionaliter; [c] ac proinde OP, ipſi KL, parallela erit. [d] Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, ęquales erũt, & triangulũ NOP, triãgulo NKL, æquiangulũ. [e] Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Eſt aũt NK, maior quã NO. [f] Igitur & KL, hoc eſt, DE, quę ęqualis eſt ipſi KL, maior erit, quã OP. Quocirca cũ latera AD, AE, triãguli ADE, ſint ęqualia lateribus NO, NP, triãguli NOP, & baſis DE, maior baſe OP,



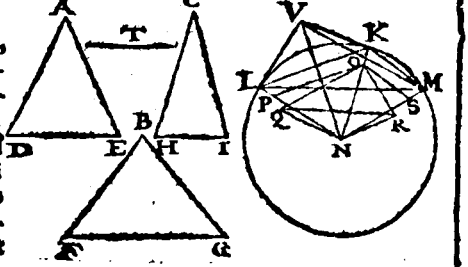
[a] 5. quarti.
[b] 8. primi.
[c] 2. ſexti.
[d] 29. primi
[e] 4. ſexti.
[f] 14. quinti

se OP; [a] erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadé ratione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostẽdetur. Cũ igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. ppos. 15. lib. 1. erũt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Qd est absurdũ. ponũtur. n. quatuor rectis minores. Nõ igit minores sũt AD, AE, q̃ NK, NL; sed neq; æquales. Igit maiores. [a] 25. primi

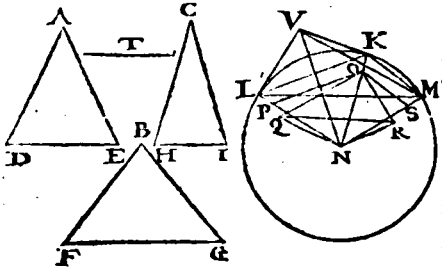
CADAT deinde centrũ N, in latus LM; quod tũ cõtinget, quãdo triangulũ KLM, angulũ LKM, habuerit rectũ, vt ex eodẽ coroll. propos. 5. lib. 4. manifestũ est. Si igitur AD, AE, dicãtur esse æquales ipsis NK, NL; erũt quoq; BF, BG, æquales eisdẽ NK, NL. Cũ ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erũt BF, BG, rectæ LM: Posita autẽ fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG. [b] Sunt autẽ & maiores BF, BG, quã FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credãtur, quam NK, NL; erũt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cũ ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdũ, [c] cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores. [b] 20. primi [c] 20. primi



CADAT postremo centrũ N, extra triãgulũ KLM, infra latus LM, qđ demũ accidet, quãdo angulus LKM, fuerit



obtusus, vt ex coroll. dicto propos. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicatur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum &
a 8. primi. basis DE, basi KL, ponatur æqualis; a erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LMN, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera N L, N M, trianguli NLM,
8. primi. æqualia sunt lateribus BF, B G, trianguli BFG, & basis LM, basi FG, æqualis; b erit angulus LNM, angulo B,



æqualis: Sed & maiorē ostēdimus esse. Quod est absurdū. Nō igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, credant ur esse minores, quā NK, NL; si abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C,
c 23. primi maior angulo KNM. c Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transeat circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. d Quare cum angulus PON, æqualis
d 29. primi sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus L K M, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera N O, N Q, trianguli N O Q, æqualia sunt lateribus A D, A E, trianguli A D E; Est autem

autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem; erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus: erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſũt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & baſis FG, maior baſe QR; erit angulus B, maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod eſt abſurdum, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores.

a 4. primi.

b 24. primi

c 25. primi

1 AM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, exiſtat; poſsit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. d Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectę T, æqualis; connectanturq; rectę KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM; e ac proinde quadratum rectę VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectę AD, æquale ſit ex conſtructione, eiſdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter ſe quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rurſus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia ſunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipſis contenti VNK, VNL, recti; f erit baſis VK, æqualis baſi VL; Atque eadem ratione rectę VM. Quare tres rectę VK, VL, VM, æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta VK, æqualis rectę AD. Tres ergo rectę VK, VL, VM, æquales ſunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamob-

d 12. vndec.

e 47. primi

f 4. primi.

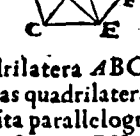
rem, cum latera VK, VL, triāguli VKL, æqualia sint lateribus BD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; [a] erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demō strabimus, angulum LVM, angulo B; & angulū KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

[a] 8. primi.

24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cū enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; [b] Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & nō in eodem plano, sed in oppositis; [c] erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. [d] Quoniam vero AB, ipsi ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogramo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea



[b] 16. vnde.

[c] 10. vnde.

[d] 34. primi

pterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum B G, C F, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris A H, D E, [a] cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; [b] & angulus ABH, angulo D C E, æqualis, vt ostensum est; [c] erunt triangula ABH, D C E, æqualia inter se. [d] Quare cum triangula ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorũ BG, CF; erũt parallelogrãma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogrãma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogrãma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

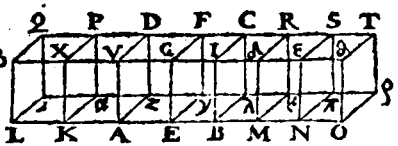
[a] 34. primi
[b] 10. vnde.
[c] 4. primi.
[d] 34. primi

THEOR. 22. PROPOS. 25.

25.

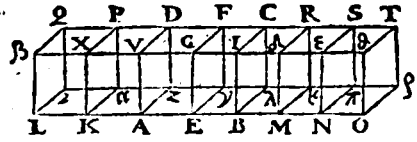
SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis A D, B C. Dico vt est basis A G, ad basin B G, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum *AB-CD*, productũ in vtram que [1] partem



quantumlibet, sumanturque in A B, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi A E; & quotcunque rectæ B M, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela

lela planis AD, EF, BC, per ſcholiũ ꝓpoſ 15. huius lib. Quoniã igitur ſolidum AEFD, cõtinetur planis paralle lis ex hypotheſi; ipſum parallelepipedũ erit, ex definitio
a 24. vnde. ne, habebitq; plana oppoſita parallelogrãma ſimilia, & æqualia. Eodẽ mõ erũt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana oppoſita, parallelogrãma ſimilia, & æqualia. Quoniam vero parallelogrãma AG, KV, LX, cũ ſint
b 36. primi ſuper æquales baſes AE, AK, KL, æqualia ſunt; & ſimilia
c 29. primi quoq; cũ anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angu los aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione æqualia, & ſimilia ſunt parallelogrãma AY, KZ, Lα. Cũ igitur æqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogrãma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, ſolidi AEFD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AK-
d 24. vnde. PD; & tribus planis LX, Lα, LQ, ſolidi KLQP: Sũt au tẽ tria in vnoquoq; ſolido æqualia, & ſimilia tribus reli quis oppoſitis in eodẽ, nẽpe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VF; & AD, ipſi EF, &c. Igitur per defin. 10. huius lib. æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS.



Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG (multiplex baſis AG, pri mæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis, propterea quod baſibus LG, OG, æqualibus exiſtẽtibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogrã ma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT:

Si

Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidũ quoq; ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacũq; hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG, ſecundam magnitudinẽ, ita ſolidũ AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidũ BEFC, quartam magnitudinem. Eadẽ ratione demonſtrabitur eſſe ſolidũ ad ſolidũ, vt eſt baſis DY, ad baſin CY; & vt baſis AY, ad baſin BY; & vt baſis DG, ad baſin CG. Si ſolidũ igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HAEC propoſitio accommodari etiã poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunque plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF; ſecenturq; plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur.n. priſma ABCDEF, in vtramq; partem quantumlibet productũ, & ex AF, protracta vtrinque capiãtur quotcũque recta AK, KL,



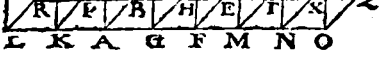
ipſi AG; & quotcũq; recta FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS; MTV, NXY, OZa, parallela planis ABC, GHI, FED, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI; [a] erunt communes ſectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH; [b] erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum eſt AH. Eodem modo parallelogrammũ oſtẽdetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus

[a] 16. vndec.

[b] 16. vndec.

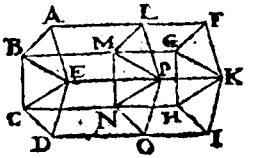
teribus GI, GH, trianguli GHI; [a] cum AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit æquale; [b] & anguli CAB, IGH, sunt quoque æquales, eo quod recta CA, AB, parallela sũt rectis IG, GH, & non in eodẽ plano: [c] Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter se, & æquiangula. [d] Quare latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Atque idcirco similia erunt. Igitur solidum ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, æqualibus & similibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadẽ arte prismata erunt ABCQPK, KPQSRL; FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniã vero parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia sunt & similia; necnon AH, KB, LP; & CH, QB, SP; erunt omnia plana prismatis ABCIHG, æqualia & similia omnibus planis prismatum ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defin. 10. huius lib. æqualia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZαIHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, primæ magitudinis) æqualis est basi OI, (multiplici basis FI, secundæ magnitudinis;) æquale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) prismati OZαIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius erit; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinẽ, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quartam

[a] 34. primi
[b] 10. vnde.
[c] 4. primi.
[d] 4. sexti



tam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, vt eſt baſis AH, ad baſin FH: & vt baſis CH, ad baſin DH. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde priſma ABCDEFGHIK, *cuius oppoſita plana ſint polygona, nempe pentagona, ſecenturque plano* LMNOP. *Dico rurſus vt eſt baſis* CM, *ad baſin* NG, *ita eſſe ſolidum* ABCDELMNOP, *ad ſolidum* LMNOPFGHIK. *Si enim plana oppoſita parallela reſoluantur in triangula, erit quoq; priſma in totidem priſmata, quorum plana oppoſita ſint triangula, reſolutum. Quare erit vt baſis* BP, *ad baſin* MK, *ita priſma* ABEPML, *ad priſma* LMPKGF, *per ea, quæ demonſtrata ſunt. Eodem modo erit vt baſis* CP, *ad baſin* NK, *ita priſma* BCEPMN, *ad priſma* MNPKGH; *& priſma* CDEPNO, *ad priſma* NOPKHI. [a] *Vt autem* BP, *ad* MK, *& CP, ad NK, ita eſt recta* EP, *ad rectam* PK, *hoc eſt, vt* CN, *ad* NH; *& vt* CN, *ad* NH, *ita eſt* CM, *ad* NG. *Igitur priſmata* ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, *ad priſmata* LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, *eandem habent proportionem ei, quam habet* CM, *ad* NG; *ac proinde eandē inter ſe.* [b] *Vt autem vnū ad vnū, ita ſe habent omnia ad omnia. Igitur erit vt priſma* BCEPMN, *ad priſma* MNPKGH, *hoc eſt, vt baſis* CM, *ad baſin* NG; *ita priſma* ABCDELMNOP, *ex tribus compoſitum ad priſma* LMNOPFGHIK, *ex tribus conflatum. Quod eſt propoſitum. Eadem prorſus erit demonſtratio in quocunque alio priſmate.*



[a] 1. ſexti.

POTEST tamen hoc idem in omni priſmate oſtēdi demonſtratione, qua vſi ſumus in priſmate habente plana oppoſita, triangula ſimilia. Si enim eadem fiat conſtructio, producto priſmate in vtramque partem, erunt omnia plana parallela ſecantia, inter ſe æqualia, & ſimilia; [c] *propterea quod latera eorum ſunt parallela, nempe communes ſectiones parallelorum planorū;* [d] *ac proinde angulos æquales cōprehendūt, &c. Vnde, vt prius, oſtendentur priſmata ex vna parte inter ſe æqualia, necnon & priſmata ex altera parte, &c.*

[b] 12. quin.

[c] 16. vnde.

[d] 10. vnde.

COROL-

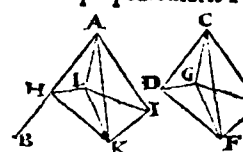
COROLLARIVM.

EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem plani: oppositis: Veluti demonstratum est, in priori prismate, triangulum G H I, æquale esse & simile triangulo A B C, atque adeo triangulo D E F. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

26. PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. [a] Ducatur ex F, ad planũ per CD, CE, ductum perpedicularis F G; connectanturq; rectæ D F, DG, EF, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, [b] fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductũ cõstituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano p CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. [c] Ex L, vero ad planũ, in quo sũt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LA, quæ ipsi FG, æqualis ponatur, & coniungatur recta KA. Dico angulũ solidũ A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis.n. rectis HK, HL, IK, IL; cũ latera AH, AL, triãguli AHL,



[a] 11. unde.
[b] 23. primi
[c] 12. unde.

AHL, æqualia ſint lateribus CD, CG, triãguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per conſtructionem; Erũt baſes HL, DG, æquales. Rurſus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales ſunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI. trianguli ALI, æqualia ſint lateribus CG, CE, triangulo CGE, per conſtructionem; [b] æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia ſunt lateribus GD, GF, & anguli HLK, DGF, recti, ex defin. 3. huius lib. [c] erũt & baſes HK, DF, æquales. Quare cũ & latera AH, AK, triãguli AHK, ſint æqualia lateribus CD, CF, triãguli CDF, ex cõſtructione. (cũ n. AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos ex defin. 3. huius lib. [d] erunt baſes AK, CF, æquales.) Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales Denique quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli ILK EGF, recti ex defin. 3. huius lib. [f] Erunt baſes IK, EF, æquales: Cũ igitur & latera AI, AK, triãguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex conſtructione; [g] Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidũ angulum A, componẽtes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus; Atq; proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituimus ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 4. primi.

[d] 4. primi.

[e] 8. primi.

[f] 4. primi.

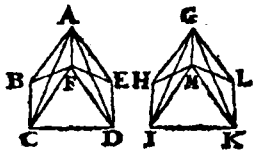
[g] 4. primi.

SCHOLIVM.

QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, ſubtendenda erunt omnibus angulis planis recta in vno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramisq; quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula reſolnatur, habebuntur tot pyramides triilatera, quot triangula

triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur quorum quilibet tribus angulis planis cõtinetur; constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, *constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sunt angulis planis rectæ* BC, CD, DE, EF, FB, *vt fiat pẽtagonum* BCDEF, *quod in tria triãgula resoluatur* BCF, FCD DEF. *Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis* BAC, CAF, FAB, *constituendus solidus angulus æqualis G, cõtentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH Et solido angulo A, contento tribus planis angulis* CAF, FAD, DAC, *æqualis solidus angulus G, cõtentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis* DAE, EAF, FAD, *æqualis solidus angulus G, cõtẽtus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.*



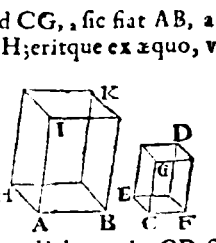
27. PROBL. 5. PROPOS. 27.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT a data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD. [a] Fiat ad rectam AB, eiusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis ECG, GCF,

[a] 26. vnde.

GCF, FCE. Deinde vt eſt CF, ad CG, ſic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH; eritque ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. [a] 12. ſexti.



Poſt hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I. B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrāmis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterq; poſitum. Cum enim anguli BAH, FCE, ſint æquales. & latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione; erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterq; poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterq; poſita parallelogramma HI, EG; & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. [b] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita ſex planis ſolidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita, ſolida AK, CD. A data ergo recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum. [b] 24. vnde.

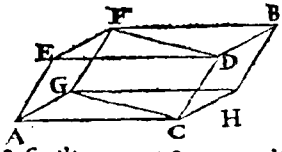
THEOR. 23. PROPOS. 28. 28.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana oppoſita ſint AH, EB, quorum diagonij, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela eſt, [c] & æqualis ipſi AE, cum ſint parallelogramma [c] 34. primi

[a] 9. undec. [b] 33. primi

CE, GE; [a] erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, GF. [b] Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erũt, & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. [c] Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: Sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED, DBF, proportionalia. [d] Igitur similia quoque erunt dicta triangula. [e] Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF; propterea quæ prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.



[c] 24. unde.

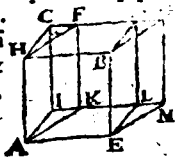
[d] 16. sexti. [e] 24. unde.

29. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eãdem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in ijsdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in ijsdem collocentur lineis,

heis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se equalia.



[a] Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato cõmuni trapezio AELK, equalia quoq; triangula AIK, ELM. Quoniam vero omnia latera triãguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; [c] Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. [d] Rursus parallelogrammum AC, æquale est & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG; [e] Sed & IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint equales (f Nam cum rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoq; inter se æquales; quare cõmuni dempta KL, equales erunt IK, LM.) Erũt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, equalia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erũt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, equalia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 35. primi

[b] 34. primi

[c] 4. sexti.

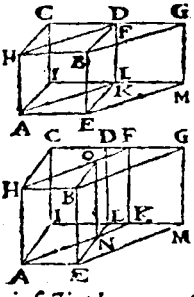
[d] 24. vnde.

[e] 36. primi.

SCHOLIVM.

HAEC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere mediis, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, vt ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eadem modo demonstrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula AIK,

ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.



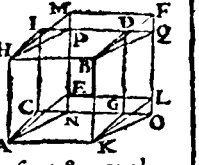
IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dematur triangulum commune ANE, erũt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB; a quibus si auferatur prisma commune KLNODF; (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO.) remanebit solidum cõprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH; fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.

30. ## THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neq; CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia.

æqualia. Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiungantur q; rectæ AN, KO, HP, BQ. a Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponantur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammũ HIDB. b Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelogrãma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & pallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. c Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.



a 34. primi

b 33. primi

c 29. unde.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnũ dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia

abſciſſum, & reliquum. Cum igitur & totũ huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abſciſſum toti. quod eſt abſurdum.

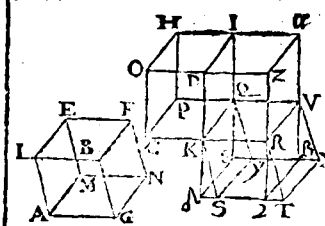
a 29. vel 30. vnde.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

31. 32.

SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

SVPER æquales baſes AB, CD, in eadẽ altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hęc parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; &



inſiſtentes CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD. perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictę perpendiculares inter ſe æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK in rectum, ſitque KR, æqualis ipſi LB & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo æqualis angulo BLA, ponaturq; KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectę ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogrãma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cũ latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. Quare cum tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia tribus planis LG, EA,

b 24. vnde.

EA, LF, parallelepipedi AEFG; a tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia. a 24. unde.

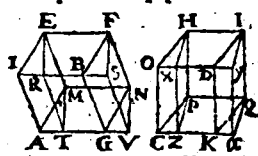
CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ; & IQ, XY, in ε, compleaturque parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qδγ V, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ; QY, Qε, VX, Vε, collocantur in eisdem rectis δT, εX; b ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V. b 29. unde.

c QVONIAM vero parallelogramma KT, Kγ, æqualia sunt inter se; & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kγ, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales. d Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: e Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KIαR; cũ parallelepipedũ CHαR, secetur plano IK, planis oppositis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita est solidũ Qδγ V, ad solidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, secetur plano KV, oppositis planis Dα, δβ, parallelo. f Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qδγ V; cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα. Quare cum parallelepipedũ Qδγ V, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum. c 35. primi. d 7 quin. e 25. unde. f 9. quinti.

SINT iam neque insistẽtes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; neque CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares: g Et a punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares; Item a punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autem omnes hæ perpẽdiculares inter se æquales, cũ sint altitudines dictorum parallelepipedorũ æquales. Ducantur re g 11. unde.

ꝛæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yæ, æZ, ZX; vt fiant parallelepipeda ETVF, HZæI, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. [a] Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZæI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK; cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 29. vel 30 vndec.



SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, *sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes* E. *Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo* L; *& recta EF, rectæ LB; & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum* EH, *quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniant autem HG, producta cum DE, producta in* I, *& compleatur paralle-*



parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur ſuper baſes EH, IF, EK, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper AB, CD, conſtructis; ſintque inſiſtentes linea perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper EH, æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem: a Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper EH, IF, cum habeant baſin eandem, cuius infimum latus EF, erectam ſuper planũ IK; Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cuius infimum latus IH; atque inſiſtentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eiſdem rectis lineis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper IF, parallelepipedo ſuper AB. b Quoniam vero parallelogramma EH, IF, æqualia ſunt; & EH, æquale eſt ipſi CD: æqualia erunt IF, CD. c Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK: d Eſt autem vt IF, ad EK, ita ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper EK, quod ſolidum ſuper IK, ſecetur plano ſuper EF, erecto parallelo planis ſuper DK, IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad EK, ita ſolidum ſuper CD, ad ſolidum ſuper EK, cum ſolidum ſuper CK, ſecetur plano ſuper DE, erecto parallelo planis ſuper CN, FK, erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper EK, ita ſolidum ſuper CD, ad ſolidum ſuper EK; e Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper IF, & CD. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper IF, æquale parallelepipedo ſuper AB. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper AB, CD. Quod eſt propoſitum.

a 29. vnde.

b 35. primi

c 7. quinti.

d 25. vnde.

e 9. quinti.

CONVERTETVR quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin:

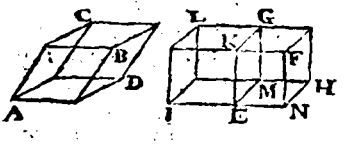
SI enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine,
[a] 31. unde. *fient aequalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur aequale alteri; aequale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis aequalis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo, partem toti esse aequalem. Quod est absurdum.

33. ## THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudines super bases AB, EF. Dico esse solidum
[b] 43. primi ad solidum, vt est basis ad basin. [b] Super rectam enim EK, construatur parallelogrammum IK, aequale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui sit aequalis angulo ENF. Constituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturq; totū vnū parallelepipedū IFLH; erunt parallelepipeda ABCD, IKLM,



[c] 31. unde. aequalia, cū habeāt æquales bases, per constructionē AB, IK; & eandē altitudinē, ex hypothesi. [d] Quare erit vt solidum IKLM, ad solidū EFGH, ita solidum ABCD, ad
[d] 7. quinti solidum EFGH. [e] Est autem solidum IKLM, ad solidum
[e] 25. unde. EFGH, vt basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidū ABCD, erit ad solidū EFGH, vt ba-

vt basis A B. ad basin EF. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

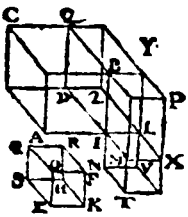
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases; ita erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadē credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori aqualis, & ducatur planum basi parallelum; eritq; vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum. Abscissum ergo aquale est toti. Quod est absurdum.

[a] 32. vnde.
[b] 9 quin.

THEOR. 28. PROPOS. 33. 36.

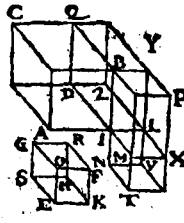
SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT similia parallelepipeda A B C D, E F G H, super bases similes AB, EF, in quibus latera homologa sint AI, EK. Dico proportionē parallelepipedi ABC D, ad parallelepipedum E F G H, esse triplicatam proportionis laterum homologorum AI, EK. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR; Item DI, ad M, & sit IM, æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi KF, vel GS. Deinde cōpletis parallelogrammis LM, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia sunt lateribus GR, GO; & anguli cōtenti æquales, cū angulus LIM, sit æqualis angulo AID, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis



[c] 15. primi

æqualis eſt angulo EKH, ſeu RGO; erunt parallelogrãma IX, GF, ſimilia & æqualia. Eadem ratione ſimilia erunt, & æqualia LN, RS; item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, ſimilia ſunt & æqualia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: [a] Sunt autem tria cuiuſq; ſimilia & æqualia tribus reliquis oppoſitis. Igitur æqualia ſunt & ſimilia paral lelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. huius lib. Rurſus completis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepipedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem paral lelepipedorũ ABCD, EFGH, eſt vt AI, ad EK, hoc eſt, ad IL, ita DI, ad HK, hoc eſt, ad IM; & BI, ad FK, hoc eſt, ad IN. [b] Vt autem AI, ad IL, ita eſt parallelogrammum AD, ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & vt BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. [c] Sed vt AD, baſis ad DL, baſin, ita eſt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & vt baſis DL, ad baſin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP; & vt baſis BL, ad baſin LN, ita parallelepipedũ LMBP, ad parallelepipedũ LNTX. Quare erit, vt parallelepipedũ ADCB, ad parallelepipedũ DLYQ, ita parallelepipedũ DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedũ LNTX. Ac ꝓinde quatuor quantitates ſunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; ꝓportio primæ ADCB, ad quartã LNTX, hoc eſt, ad EFGH, erit triplicata ꝓportionis primę ADCB, ad ſecundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. [d] Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita eſt baſis AD, ad baſin DL; [e] Et vt AD, ad DL, ita eſt recta AI, ad IL, hoc eſt, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, eſt triplicata proportionis homologo-



a 24. vnde.

b 1. ſexti.

c 32. vnde.

d 32. vnde.

e 1. ſexti.

mologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.

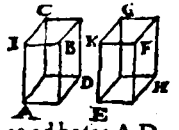
COROLLARIVM.

EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterū homologorum.

THEOR. 29. PROPOS. 34. 34.35.

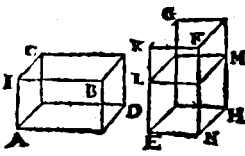
AEQVALIVM solidorum parallelepipedorū baſes, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines recipro cantur; Illa ſunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primū inſiſtentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æqua-



æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholiũ propoſ. 15. huius lib.



[a] 7. quinti. Quoniã igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL; Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadẽ ratione, baſis KN, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eãdem habeant altitudinem, ſi nimirũ baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.

[b] 32. vnde.

[c] 1. ſexti.

SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

[d] 31. vnde.

QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelũ baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad

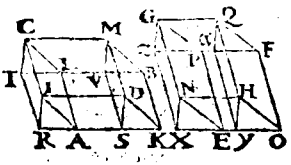
[e] 32. vnde.

baſin

basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; [a] Et vt EK, ad EL, ita est KN, ad LN; [b] Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum DHGF, ad solidum EHML, cũ solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erũt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit vt solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; [c] ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

[a] 1. sexti.
[b] 32. vnde.
[c] 9. quinti.

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum insistẽtes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non sint perpẽdiculares ad bases AB, EF. Demittantur autẽ a punctis I, D, M, C, ad planũ basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; ita ẽ a pũctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntq; perpẽdiculares RI, XN, parallelepipedorũ altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, vt basis AB, ad basin EF, ita esse altitudinẽ XN, ad altitudinẽ RI. [d] Cũ enim æqualia sint solida ABCD, EFGH, ex hypothesi, [e] sit autem ABCD, æquale solido RVCD, quod habeant eandem basin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadẽ ratione, æquale solido Xα GH: Erunt & parallelepipeda RVCD, Xα GH, æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH; erit, vt iam demonstratum est, vt basis CD, ad basin GH, hoc est, vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.



[d] 29. vel 30. vndec.

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, vt prius; Cum sit vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; [e] Sit autem AB, ipsi CD, & EF, ipsi GH, æqualis; erit quoque vt basis CD, solidi RVCD, ad basin

[e] 24. vnde.

baſin GH, ſolidi XαGH, ita altitudo XN, ad altitudinẽ RI. Quare cum XN, RI, ſint inſiſtentes lineæ, perpendiculares ad baſes C D, G H; erunt, vt iam oſtenſum eſt,
[a] 29. vel 30. vndec. æqualia parallelepipeda RVCD, XαGH. [a] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualis. Igitur æqualia quoque erunt parallelelepipeda ABCD, EFGH: Idemque oſtendetur ſi inſiſtentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad baſin, alterius vero non. Quam ob rem, Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonſtrata ſunt in ſex proximis propoſitionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque priſmatis, quæ habent duo plana oppoſita triangularia, ſi prædicta hypotheſes ſeruentur. Nam ſi duobus priſmatis eiuſmodi eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem baſin, vel ſuper æquales baſes conſtitutis, appenantur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur duo parallelepipeda eiuſdem altitudinis, & ſuper eandem, vel æquales baſes exiſtencia, [b] 29. 30. vel 31. vndec. *Quare æqualia erunt eiuſmodi parallelepipeda; ac proinde & data priſmata, eorum videlicet dimidia.*

RVRSVS, ſi duobus priſmatis prædictis eiuſdem altitudinis, & ſuper diuerſas baſes conſtitutis adiicientur duo alia priſmata illis æqualia & ſimilia, conficientur iterum duo
[c] 32. vnde. [d] 15. quin. *parallelepipeda eiuſdem altitudinis.* [c] *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt baſis ad baſin;* [d] *Atque adeo priſma ad priſma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem baſis ad baſin, ſi priſmatum baſes fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium ſcilicet vnius baſis ad dimidium alterius, ſi baſes priſmatum fuerint triangula.*

PRAETEREA, ſi duobus priſmatis præfatis ſimilibus addãtur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, con-
[e] 33. vnde. *ſtituentur duo parallelepipeda ſimilia,* [e] *quæ inter ſe habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.*
[f] 15. quin. [f] *Igitur & priſmata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant*

habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt tripli cată proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque sunt latera homologa prismatum.

DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cum prismatis. a Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eadem sint, vel earte triangula earum dimidia eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.

a 34. unde.

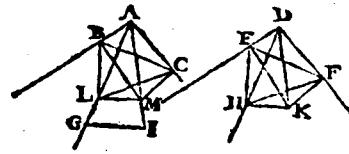
b 15. quin.

THEOR. 30. PROPOS. 35. 37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autẽ lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: a sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demit

tantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, exiſtunt perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectę IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, eſſe æquales inter ſe. Nã ſi AG, DH, ſunt inæquales, au feratur a maiori AG, ipſi DH, æqualis linea AL; & ex L, ad planum anguli BAC, perpendicularis demittatur LM. Quoniã igitur GI, LM, rectę ſunt ad planum anguli BAC; [a] ipſæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli AGI. Quare LM, cadet in rectam AI. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF; & connectantur rectę BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta eſt ad planum anguli BAC, ipſa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. huius lib. [b] Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML: [c] Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus ſit, ex conſtructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CM, ML: [d] At quadratis rectarum CM, ML, æquale eſt quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus ſit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectę AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CL; [e] Ac proinde angulus ACL, rectus erit. [f] Rurſus quia quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AM, ML: [g] Eſt autem quadratum rectę AM, æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BM, ML: [h] At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, ſit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; [i] propterea-que angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB,



[a] 6. undec.
[b] 47. primi
[c] 47. primi
[d] 47. primi
[e] 48. primi
[f] 47. primi
[g] 47. primi
[h] 47. primi
[i] 48. primi

LAB, triāguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; Erũt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erũt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cũ latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypotheſi; [b] erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE æquales: Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales, cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; [c] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK, ſunt recti; [d] erunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ rectę BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: [e] Quia vero quadratum rectę BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti ſint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarũ EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quę æqualia ſunt, quod rectę BM, EK, oſtenſę ſint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt, ac proinde rectę LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, æqualis; [f] erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineę inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 26. prim.
[b] 4. primi.
[c] 26. primi
[d] 4. primi.
[e] 47. primi
[f] 8. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtãt, quæ cũ lineis primo poſitis angulos contineãt æquales, vtrũque vtriquo. Erunt a punctis extremis

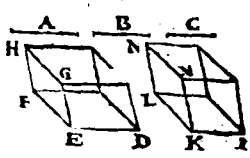
linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE; Item LAC, HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

38. THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continuè proportionales rectæ A, B, C. Conſtituaturque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque DEF, DEG, FEG, ita vt recta DE, ipſi A; & EF, ipſi B; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, GD, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. a Deinde ad rectam IK, eiuſque punctum K, fiat ſolidus angulus K, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis IKL, IKM, LKM, qui æquales ſint tribus DEF, DEG, FEG; ita vt rectę IK, KL, KM, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum IN; quod contineri dicitur ſub linea B, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cum enim ſit vt DE, ad IK, ita

a 26. vnde.



ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales. Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habẽt circa æquales angulos reciproca. Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorũ verticibus insistunt sublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos cõprehendũt cũ lineis primo positis, ex constructione, vtrũq; vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, inimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll. propos. precedentis. [b] Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeãt bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 14. sexti. [b] 31. unde.

SCHOLIVM.

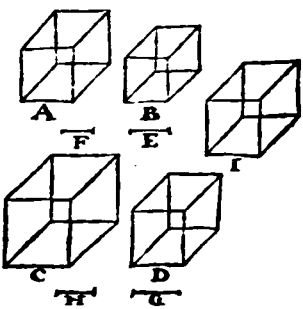
VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum DH, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo IN, descripto a media B. Dico tres A, B, C, esse continue proportionales. Nam velut prius, ostendentur eorum altitudines ex F, I, demissa esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases DH, IM, æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Quæ bases cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex cõstructione; [c] habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, vt DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cũ DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum. [c] 14. sexti.

PROBL. 32 PROPOS. 37. 39.

SI quatuor rectę lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda,

quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcri buntur, proportionalia erunt. Et ſi ſoli da parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineę proportionales erunt.

SINT quatuor rectę proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D; conſtituanturque ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta; item ſuper C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterque poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia, ſiue non. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportonalia; Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Inueniantur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duę continue proporti onales E, F; Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſunt quatuor lineę A, B, E, F, & quatuor lineę alię C, D, G, H, quę binæ in eadem ratione ſumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B; Et vt C, ad H, ita ſolidũ C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum D, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.



SINT iam e contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoque proportionales. [a] Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] ſuper quam deſcribatur parallelepipedũ ipſi D, vel C, ſimile, ſimiliterque poſitum. Quoniam igitur

[a] 12. ſexti.
[b] 27. vnde.

tur eſt, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam eſt oſtenſum, vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum I. Vt autem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ponitur quoque ſolidum C, ad ſolidum D: Igitur erit vt ſolidum C, ad ſolidum I, ita idem ſolidum C, ad ſolidum D. [a] Atque idcirco æqualia erunt ſolida I, & D. Quę cum ſint ſimilia, ſimiliterque deſcripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & ſimilia habent latera homologa æqualia, per lemma propoſ. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales ſunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Poſita eſt autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque ſi quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. quinti.

BREVIVS tota hæc propoſitio demonſtrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico eſſe quoque vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. [b] Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones ſolidi A, ad ſolidum B, & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales; quandoquidem triplicatę ſunt proportionum æqualium, nempe rectę A, ad rectam B, & rectę C, ad rectam D. Quod eſt primum. Rurſus ponatur ſecundo eſſe vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Dico eſſe quoque, vt recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [c] Cum enim ſit proportio ſolidi A, ad ſolidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio ſolidi C, ad ſolidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatę, nimirum ſolidi A, ad ſolidum B; & ſolidi C, ad ſolidum D, æquales ponuntur. Quod eſt ſecundum.

[b] 33. vndec.

[c] 33. vndec.

SCHOLIVM.

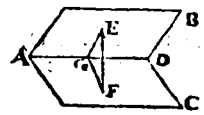
EODEM modo, si fuerint tres recta proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterque descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusque solidum sumatur bis, habebuntur quatuor recta proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hæc propositio conuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia, sunt vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. [a] *Cum igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.*

[a] *15. quin.*

13. THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM.n. AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpẽdicularis demittatur: quã dico cadere in communem sectionẽ AD. Nam si fieri põt, cadat extra ad punctum F, [b] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectã AD, perpẽdicularis FG, connectaturq; recta EG,

[b] *12. primi*

EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandē 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt. quod est absurdum; [a] cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet, ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 17. primi

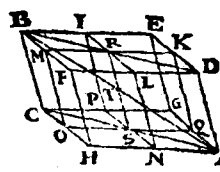
SCHOLIVM.

HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus brevius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionē; [b] ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus. [b] 12. primi

THEOR. 34. PROPOS. 39. 40.

SI solidi parallelepipedi eorum, quę ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quę extēsa sint duo plana IN, KO, quorum



quorum sectio communis sit recta R S: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrũ A B, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis R B, R D, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniã igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium A G, C H;
[a] & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS,) [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales. [e] Ac propterea AS, CS, vnã rectam lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia vtraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, [f] ipsæ quoq; inter se parallelæ erunt, & æquales. [g] Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; [h] erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto uidelicet T. [i] Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: [k] Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 34. primi
[b] 29. primi
[c] 4. primi
[d] 13. primi
[e] 14. primi
[f] 9. vndec.
[g] 33. primi
[h] 7. vndec.
[i] 29. & 15. primi.
[k] 26. primi

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto. nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonstratum est, rectam R S.

HVIC

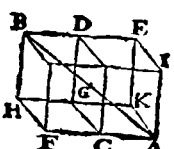
SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad propoſ. 34. primi lib. demonſtrauimus, videlicet.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.

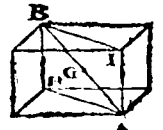
SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc eſt, per punctum medium diametri AB, quod ſit G. Dico parallelepipedum bifariam ſecari. Sit enim primo planum CD, oppoſitis planis AE, BF, parallelum. [a] *Et quia plana parallela BF, DC, EA, ſecant rectas quaſcunque proportionaliter; ſecatur autem BA, bifariam in G; ſecabuntur quoque latera aduerſorum planorum AH, BI, atque adeo & baſes AH, BI, bifariam.* [b] *Cum igitur ſit vt baſis KC, ad baſim CH; ita ſolidum AD, ad ſolidum CB; erit parallelepipedum AB, ſectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*

[a] 17. vnde.



[b] 25. vnde.

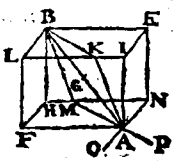
TRANSEAT ſecundo planum ſecans AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelipipedum per centrum G, immo per totam diametrum AB; [c] *cum AB, in plano ſit parallelarum AH, BI.* [d] *Demonſtratum autem eſt antea, parallelepipedum ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto bifariam.*



[c] 7. vndec.
[d] 28. vnde.

TERTIO planum ſecans AKBM, neque ſit aduerſis planis parallelum, neque per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, ſecantur plano AKBM; [e] *erunt communes ſectiones AM, BK,*

[e] 16. vnde.

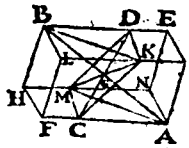


BK, *parallela. Similiter parallela erunt* AK, BM, *cum sint communes sectiones planorum parallelorum* AL, BN, *facta a plano* AKBM. *Quare parallelogrammum est* AKBM; [a] *ideoq; tam recta* AK, BM, *quã recta* AM, BK, *inter se erunt æquales. Quia ergo latera* BK, BL, *triãguli* BKL, *æqualia sunt lateribus* AM, AN, *triãguli* AMN; *& angulus* KBL, *angulo* MAN, *æqualis. (Productis enim* NA, MA, *ad* O, P, *erunt* AO, AP, *rectis* BL, BK, *parallelæ;* [b] *ac proinde æquales anguli erunt* OAP, LBK. [c] *Cum igitur* OAP, *æqualis sit angulo* MAN; *æquales quoque erunt anguli* KBL, MAN.) [d] *Erunt bases* KL, MN, *inter se, & anguli* BKL, BLK, *angulis* AMN, ANM, *æquales; & triangulum triangulo æquale. Quare & similia erunt triangula* BKL, AMN, [e] *cum latera habeant circa æques angulos proportionalia. Quoniã vero recta* KL, *rectæ* MN; *& angulus* BKL, *angulo* AMN; *& angulus* KBL, *angulo* MAN, *est æqualis, vt ostendimus; erit & reliqua* IK, *reliquæ* HM; *& reliquus angulus* BKI, *reliquo* AMH; *& reliquus* KBE, *reliquo* MAF, *æqualis. (Est enim tota* LI, *toti* NH, *æqualis, & tam anguli* BKL, BKI, *quam anguli* AMN, AMH, *duobus rectis æquales; & totus angulus* LBE, *toti angulo* NAF, *æqualis, ob similitudinẽ parallelogrammorum* LE, FN.) *Sunt autem & latera* BE, EI, *lateribus* AF, FH, *æqualia; & anguli* BEI, EIK, *angulis* AFH, FHM, *ob parallelogramma* LE, FN. *Igitur quadrilaterum* BKIE, *& æquilaterum, & æquiangulum est quadrilatero* AMHF; *Ac propterea æquale & simile, cum singula singulis consentiant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & similia triangula* BHM, AIK; *& quadrilatera* AKLF, BMNE; *cum inter se sint & æquilatera & æquiangula. Quapropter solidum contentum planis* AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, *æquale erit solido contento planis* BMNE, EIKB, BMAK, KIA, AMN, NAIE, *per 10. defin. huius libri, cum his planis illa sint similia & æqualia, vt demonstratum est. Parallelepipedum ergo* AB, *sectum est plano* AKBM, *per centrum* G, *bifariam*.

a 34. primi
b 10. unde.
c 15. primi
d 4. primi
e 4. sexti

PO-

POSTREMO planum ſecans CD, neque aduerſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum oppoſitorum, neque per vllos angulos eorum ductum, ſed vtcunque ſecet plana oppoſita AHBI. Oſtendemus autem, vt prius, planum ſecans CD, eſſe parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quã rectas CM, DK, eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; conectanturq; recta AM, BK, quæ parallelæ erunt, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum AH, BI, facta a plano per rectas AB, KM, ducto. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipſi LI, ob parallelogramma AL, LE, [b] inter ſe ſunt parallelæ; [c] Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea ſe mutuo ſecabunt in cẽtro G. In ſolo enim centro G, recta AB, per hypotheſim, ſecat planum CD, in quo exiſtit recta CD. Simili argumento, cũ AM, BK, ſint oſtenſa parallelæ; erunt AB, MK, in eodem cum illis plano, ſeque mutuo ſecabunt: in centro G. Quare diametri CD, KM, per centrum G, tranſibunt, ibique ſe mutuo ſecabunt; atque adeo bifariam, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 1. oſtẽdimus. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia ſunt lateribus AG, GC, trianguli AGC; [d] & angulus BGD, æqualis angulo AGC; [e] Erit & baſis BD, æqualis baſi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia ſint tribus lateribus AC, CM, MA, triãguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Eſt autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniã igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & anguli KBL, angulo MAN, æqualis; [f] Erit & baſis KL, baſi MN, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum eſt, & æquiangulum; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula conue-



[a] 16. vnde.

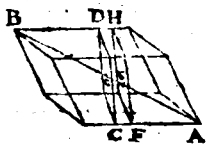
[b] 9. vndec.
[c] 7. vndec

[d] 15. primi
[e] 4. primi

[f] 4. primi

conueniant ſingulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rurſus quia tota LI, toti NH, eſt æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterũ DEIK, *æquilaterum eſt quadrilatero CFHM: Sed & equiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales ſint angulis CFH, FHM, propter ſimilitudinem parallelogrammorum EI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales oſtenſi ſint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia ſunt & ſimilia. Non aliter oſtendemus, æqualia eſſe & ſimilia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perſpicuum eſt. Quamobrem ſolidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale eſt ſolido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum hiſce illa ſint demonſtrata & æqualia & ſimilia. Parallelepipedum igitur AB, ſectum eſt per centrum G, plano CD, bifariam.*

SED ſecatur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi tranſire, hoc eſt. punctum G, in quo planum CD, ſecat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt ſit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, ſecabitur parallelepipedum AB, bifariã plano FH, vt demonſtratum eſt. Ponitur autem & bifariam ſecari plano CD; Igitur ſolida CB, FB, cum ſint dimidia parallelepipedi AB, inter ſe æqualia ſunt, pars & totum. Quod eſt abſurdũ. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi.



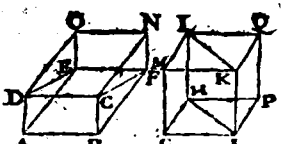
Quod demonſtrandum erat.

SI

THEOR. 35. PROPOS. 40. 41.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triangulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN, GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib.



[a] Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. [b] Quare parallelepipida AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, ([c] Nã parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi

[b] 31. vnde.

[c] 32. vnde.

PER

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; cum imperet parallelepipeda complere; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum A B C D, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe A D E, B C F. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

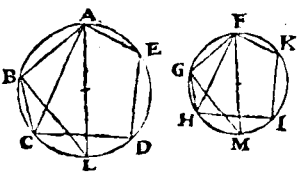
ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et Solidorum ſecundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorũ diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & cõnectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [a] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: [b] Eſt autẽ angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqua-



[a] 6. ſexti

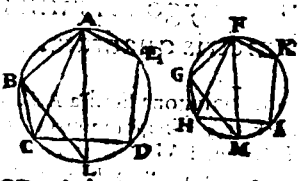
[b] 21. tertij.

lis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cũ ergo
[a] 31. tertij & anguli ABL, FGM, æquales sint, [a] nempe recti in semi
[b] 32. primi circulis existentes; [b] erunt & reliqui BAL, GFM, æqua-
[c] 4. sexti. les. [c] Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permu-
[d] 22. sexti tando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. [d] Igitur est vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad polygonum FGHIK, super FG; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulũ EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim esset æqualis, [e] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta



[e] 7. quinti.

L, recta T V, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipſi E F, vt ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurrat{q;} rectis H E, G F, productis in T, & V. [a] Quia ergo triangulum E L F, dimidium eſt parallelogrammi T E F V; maius erit triangulum E L F, quam dimidium ſegmenti circuli E L F. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia ſegmentorum, in quibus ſunt. Omnia igitur triangula ſimul maiora ſunt, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ E L, L F, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul, in quibus ſunt; & ſic deinceps. Quoniam vero, ſi a circulo E F G H, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum E F G H; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nempe triangula E L F, F M G, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [b] relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, exceſſus inter circulum E F G H, & magnitudinem I. Sint iam circuli ſegmenta relicta E L, L F, F M, &c. ſimul ſumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus E F G H, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta, & ex I, & K, ipſa magnitudo K, quæ maior eſt præfatis circuli ſegmentis; erit reliquum polygonum E L F M G N H O, maius reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo A B C D, polygonum A P B Q C R D S, ſimile polygono E L F M G N H O. Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi A B C, A D C, bifariam ſecentur in B, & D; & rurſus circumferentiæ A B, B C, C D, D A, bifariam in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot partes æquales diuiſa ſit circumferentia A B C D, in quot diſtributa eſt circumferentia E F G H. Nam iunctis rectis A P, P B, B Q, &c. erit figura inſcripta ſimilis figuræ E L F M G N H O, vt patet. [c] Quoniam igitur eſt polygonum A P B Q C R D S, ad polygonum E L F M G N H O, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E H, hoc eſt, per hypotheſim, vt circulus A B C D, ad I: Eſt autem polygonum A P B Q C R D S, minus circulo

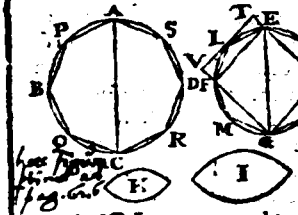
[a] 41. primi

[b] 1. decimi

[c] 1. duodec.

a 14. quint. ABCD. Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demõstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionẽ, quã habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & vniuersè demonstratum sit, nunquam quadratũ diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.



SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cũ ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinẽ aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, b 14. quinti maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratũ diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdũ. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratum diametri ad quadratum diametri, sta circulum ad magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autẽ circulus ABCD, maior est, & EFGH, minor; eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratũ diametri circuli, ABCD, nõ posse habere

habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratũ diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; sit autẽ vt circulus ABCD, ad I, ita idẽ circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratũ diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum. *a 7. quinti*

COROLLARIVM.

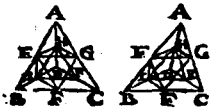
HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptũ. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratũ diametri, veluti demonstratum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 31

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, trian-

gulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius baſis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera biſariã in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum baſes triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec non in duo ſolida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammũ EBFG, & triangula oppoſita EHG, BIF; huius uero baſis eſt triangulum CFG, cui opponitur triangulum KIH, habentque hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D, in ſublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti; Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, ſecta ſint biſariam, ac proinde proportionaliter; [a] erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. [b] Sunt autẽ & rectæ FG, HI, cum parallelæ ſint ipſi AB, inter ſe parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ ſunt GH, FI, cũ ſint parallelæ ipſi DC. Quare parallelogramma ſunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, ſunt parallelæ; [c] erũt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadẽ rõne æquales erũt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. [d] Proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde ſimile eſt trian-



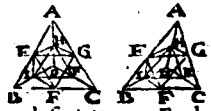
[a] 2. ſexti.
[b] 9. vnde.
[c] 10. vnde.
[d] 4. ſexti.

triangulum *HEG*, triangulo *DBC*. Sunt autem & triangula *HAE*, *HAG*, *AEG*, triangulis *DAB*, *DAC*, *ABC*, similia per coroll. propo. 4. lib. 6. Pyramis ergo *AEGH*. pyramidi *ABCD*, similis est, per defin. 9. huius lib. Rursus quia rectæ *HI*, *HK*, rectis *AB*, *AC*, sunt parallelæ; erunt anguli *IHK*, *BAC*, æquales. Eadé ratione æquales erunt anguli *HIK*, *ABC*; & *HKI*, *ACB*. [b] Quare latera trianguli *HIK*, lateribus triãguli *ABC*, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum *HIK*, triangulo *ABC*, simile est: Sunt autem & triãgula *DHI*, *DIK*, *DKH*. triangulis *DAB*, *DBC*, *DCA*, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo *HIKD*. similis est quoque eidem pyramidi *ABCD*, per defin. 9. huius lib. Quoniam autẽ triangula *AHE*, *HDI*, similia sunt triangulo *ADB*, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. [c] ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales *AH*, *HD*, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula *AHG*, *HDK*, cum similia sint ostensa triangulo *ADC*, & constituta super æquales rectas *AH*, *HD*. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula *AEG*, *HIK*, cũ similia sint ostensa triangulo *ABC*, & super rectas posita *AF*, *HI*, [d] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum *AEIH*. Non secus æqualia erunt & similia triangula *EHG*, *IDK*, cum sint ostensa similia triangulo *BDC*, & habeant rectas *HE*, *DI*, [e] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum *HEID*. Pyramides igitur *AEGH*, *HIKD*, æquales sunt & similes. per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

[a] 10. *vnde.*
[b] 4. *sexti.*
[c] 21. *sexti.*
[d] 34. *primi.*
[e] 34. *primi*

RVRSVS, [f] quia rectæ *EH*, *HG*, *GE*, æquales sunt, & parallelæ rectis *BI*, *IF*, *FB*, ob parallelogramma *EHIB*, *FGHI*, *BFGE*; erunt triangula *EHG*, *BIF*, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: [g] Sunt autem & parallela; cum *EH*, *HG*, per quas ducitur planum *EHG*, parallelæ sint rectis *BI*, *IF*, per quas planum *BIF*, ducitur. Igitur solidum *BIFGHE*, contentũ duobus triãgulis *EHG*, *BIF*,

[f] 34. *primi.*
[g] 15. *vnde.*



ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, priſma eſt, ex definitione. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum CFGHIK. [a] Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales ſint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter ſe, ac propterea ſimilia: [b] Sunt autem & parallela, quod rectę CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ ſint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur ſolidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, priſma eſt. Quoniam vero priſmata EBFGHI, CFGHIK, ſunt eiuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, baſis illius, duplum eſt trianguli CFG, baſis huius, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. [c] Ipſa inter ſe æqualia erunt.

a 34. primi.

b 15. vnde.

c 40. vnde.

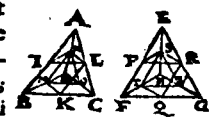
DENIQVE quia priſma EBFGHI, maius eſt pyramide EBFI, totum parte; Eſt autem pyramis EBFI, æqualis & ſimilis pyramidi AEGH, necnõ pyramidi HIKD, vt perſpicuum eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulorum: Maiora erunt priſmata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero a dimidio eiuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes æquales ſecatur, maior dimidium eius ſuperat, minor vero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraq; diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; &

ti;& in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita et omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

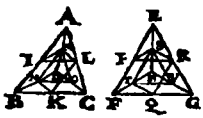
SINT duæ pyramides ABCD, EFGH, eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis I, K, L, M, N, O; P, Q, R, S, T, V, connectanturque rectæ IL, LK, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR, RQ, QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque secta sit in binas pyramides æquales inter se, & similes toti, nimirũ in AILM, MNOD; EPRS, STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propositio præcedens: eodemque modo intelligãtur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS, STVH; & sic deinceps. Di



co ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD, ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit vt BG, ad CK, ita FG, ad GQ, eo quod vtraq; linea diuisa est bifariam; sint autem triangula ABC, LKC, similia similiterque posita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Erit quoque vt triangulum ABC, ad triangulum LKC, ita triangulũ EFG, ad triangulum RQG. Et permutãdo, vt ABC, ad EFG, ita LKC, ad RQG. Vt autem LKC, ad RQG, ita est prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, vt mox ostendemus, atque adeo ita prisma IBKLMN, ad prisma PFQRST, cum hæc illis sint æqualia: Et vt vnum prisma, videlicet

a 22. sexti.

[a] 12. quin. delicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST. [a] ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erũt quoq; vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD,



ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AILMNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQS, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedẽti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erũt quoq;, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factę in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cũ sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, [b] ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque. vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 12. quin.

LEMMA.

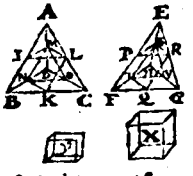
QVOD autem sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostẽdemus. Intelligan

telligantur ex verticibus D, H, *ad baſes* ABC, EFG, *demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æqua les pyramidum* ABCD, EFGH. *Quoniam igitur pla na parallela* ABC, MNO, *ſecant duas rectas, nem pe* DC, *& perpendicularem ex* D, *demiſſam proportionaliter; ſecatur autem* DC, *bifariam in* O; *ſecabitur quoque perpendicularis ex* D, *demiſſa bifariam in puncto, cui planum* MNO, *occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex* H, *demiſſa bifariam ſecabitur a plano* STV. *Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata* CKLMNO, GQRSTV, *cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes* LKC, RQG, *per ea, quę ad propoſ. 34. lib.* 11. *demonſtrauimus.* [a] 17. vnde.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Si enim nō ita ſit, ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta 2. propoſ. 3. huius lib. Rurſus eodē modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia,



æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV, quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item a reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum scilicet prisma ta, & sic deinceps; relinquetur tá dem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, maiora solido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. c Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, vt basis ABC, ad basin EFG, hoc est, vt pyramis ABCD, ad solidum X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; d erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidũ X. Ostensa vero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.

a 3. duode.

b 1. deci.

c 4. duode.

d 14 quin.

SIT deinde solidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, vt basis ABC, ad basin EFG; Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, vt basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponit pyramide EFGH; e erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, vt basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, vt est basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum

e 14. quin.

dum X, pyramidi EFGH; sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; Sit autē pyramis ABCD, ad solidum X, vt ad pyramidē EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum. [a] 7. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abscissionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ; Erit q; vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque erat ad totam pyramidem. [b] Pyramis ergo constituta æqualis, erit toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum. [b] 9. quinti.

COROLLARIVM.

HINC fit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandē proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur, e conuerso pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 30. & 31. lib. 11. demonstrando vsi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

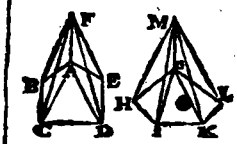
THE-

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides ABC*D*EF, GHIKL*M*, quarũ baſes polygonæ ABCDE, *G*HIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triãgulares diuiſa. [a] Quia vero eſt, vt baſis A *B* C, ad baſin A C D, ita pyramis ABCF, ad pyramidem AC*D*F; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis *A*BCDF, ad pyramidem ACDF: [b] Sed rurſus eſt vt baſis A C D, ad baſin *A*DE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem *A*DEF. Igitur ex æquo vt baſis A B C D, ad baſin A D E, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCD*E*, ad baſin ADE, ita pyramis AB*G*DEF, ad pyramidem *A* D E F. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis *G*HIKL*M*, ad pyramidem G*K*LM; & conuertendo vt baſis G*K*L, ad baſin GHI*K*L, ita pyramis *G K* LM, ad pyramidẽ GHI*K*LM. [c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin G*K*L, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, G*K*L, GHIKL, in eiſdem proportionibus cũ quatuor pyramidibus AB*C*DEF, AD*E*F, G*K*LM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo



ABCDE.	ABCDEF.
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL.	GHIKLM.

[a] 5. duode.

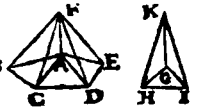
[b] 5. duode.

[c] 5. duode.

æquo, erit vt basis ad ABCDE, basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, sub eadem altitudine existētes pyramides, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

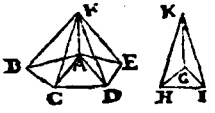
QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quorum bases polygona latera habent multitudine aequalia; facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura continet latera, quam basis alterius. Sint enim primò duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius basis sit polygona, nempè pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis



in pyramides numero aequales diuisa. [a] *Quoniam vero est, vt basis ABC, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* [b] *Erit vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo est ostensum:* [c] *& vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatē;* [d] *Erit etiā basis ABCDE, primā quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidē GHIK,*

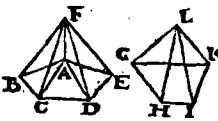
[a] 5. duode.
[b] 24. quin.
[c] 5. duode.
[d] 24 quin.

GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem, vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quā ob rem duæ pyramides qualibet, quarū vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat a polygono, eiusque pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoque ſumere a triangulo, eiuſque pyramide, vt dictum eſt.



SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygona, ſintq; plura latera in vna baſe, quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides. Quia vero, vt iam eſt demonſtratū, eſt vt baſis ABC, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatem; ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; [a] Erit etiam vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonſtratum eſt; Et eſt quoque, vt baſis ADE, quinta quantitas

[a] 24. quin.



titas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt ante eſt oſtenſum; a Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE. a 24. quin.

HANC autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes; eandem habent altitudinem.

QVOD non ſecus oſtendemus, ac ea, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, oſtenſa ſunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandē cōſtitutas, eſſe inter ſe æquales; cum eandē habeant proportionem cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

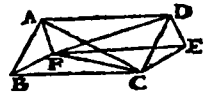
RVRSVS cōtra fit, pyramides multangulas æquales, & ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem. Hæc autem duo demonſtrabuntur, vt in corell. propoſ. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æqua-

les interſe, triangulares baſes habentes.

SIT priſma ABCDEF, cuius duo trianguia oppoſita, æqualia, ac ſimilia ABF, DCE. Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur.n.in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia ſunt; eſtq; vt baſis ABC, ad baſin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planũ ABCD, demiſſam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erũt pyramides ADFC, EFDC, ſuper æquales baſes ADF, EFD, conſtitutę, & ſub eadem altitudine, nempe perpẽdiculari a vertice C, ad planum ADEF, demiſſa. Eſt autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi ADF, & triãgulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ſeu CDEF, (quæ eadem eſt pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum priſma componẽtes, vt perſpicuum eſt) æquales ſunt inter ſe; Ac propterea priſma ABCDEF; in tres pyramides æquales eſt diuiſum. Quocirca omne priſma triangularem habens baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 34. primi

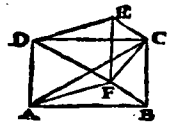
b 5. duode.

COROLLARIVM I.

HINC colligitur, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Siue priſma quodlibet triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſin, & altitudinem.

SIT

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF: ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem ABF. *Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis. Namſi ducatur recta DF, erit priſma diuiſum in tres pyramides aquales ABCF, ADCF, CDEF; vt demonſtratum eſt; Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hac illi ſit aqualis, immo eadem, quod eiſdem planis cõ prehẽdatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF.* a 7. duodec.



Cum igitur pyramis ABFC, aqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eãdem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. manifeſtum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem, & altitudinem; ac propterea priſma e contrario eſſe pyramidis triplum.

SIT deinde pyramis ABCDE, cuius baſis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD, & plano oppoſito EFGH, in triangula numero aqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diuiſum. Ductis ergo rectis AH, BH; DF, CF; erit, vt demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD; Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit, vt pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad priſma CDHGFB; b *Ac propterea vt vna pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, aquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſub ead altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt aquales, ex coroll.* b 12. quin.



propoſ. 5. huius lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE, BCDE, componant totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis AB-



CDE, tertia pars priſmatis ABCDEFGH. Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſim ABCD, conſtituta, per coroll. propoſ. 5. huius lib. perſpicuum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partẽ priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingula pyramides triangulares horũ priſmatum erunt tertia partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habẽtis baſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiuſmodi pyramis æqualis eſt pyramidi illi, quæ eãdem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Quam quidem iam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

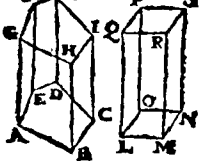
SCHOLIVM. I.

EX dictis facile demonſtrabimus hanc propoſitionem, videlicet.

SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcumque habeant baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

QVAMVIS enim hoc demonſtratum ſit in lib. 11. de priſma-

prismatis, quorum duo plana opposita, parallela, & aequalia, sunt triangula, licet eorũ bases sint parallelogramma, vertices vero linea recta; necnon de parallelepipedis, qua nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen idipsum demonstrabimus universe de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in unius base reperiantur, quam in base alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases sint figura multilatera. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, linea rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases: Ac proinde per coroll. pradictum, qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. [a] *Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basin, vt ostensum est propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basin, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.*



a 15. quin.

CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM. II.

VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel aequales bases quascunque, inter se sunt aequalia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ aequales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ECONTRARIO, Prismata aequalia super aequales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudi-

ne. Et priſmata æqualia eiuſdem altitudinis, baſes habent æquales, ſi non habuerint eandem. Quod quidem non aliter oſtendes, ac conuerſum propos. 31. lib. 11. fuit demonſtratum.

SCHOLIVM II.

CAETERVM tam ea, quæ in priori corollario, quam illa, quæ in ſcholio proximo demonſtrata ſunt, intelliguntur tantummodo de priſmatis, quæ in vertice habent plana baſi parallela, æqualia, & ſimilia. Quod dixerim, ne hallucineris in priſmate conſtante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & ſimilibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo priſma dici ab Euclide, vt in defin. priſmatis diximus. Nam ſi in huiuſmodi priſmate intelligatur quidem baſis vnum illorum triangulorum, erit neceſſario pyramis eiuſdem altitudinis, eandemque habens baſim, tertia paris ipſius priſmatis, vt in corollario 1. demõſtratum eſt. Item ipſum priſma ad quodlibet aliud priſma proportionem habebit, quam baſis ad baſin, vt in ſcholio oſtendimus. At vero ſi in priſmate tali baſis cõcipiatur vnũ parallelogrãmorum, ita vt in vertice ſit linea recta, non erit pyramis eandem habens baſim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, ſed dua tertię partes, hoc eſt, priſma ad pyramidem proportionem habebit ſeſquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic priſmati addatur aliud æquale & ſimile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars conſtituti parallelepipedi, ex corollario pradicto, cum parallelepipedum ſit priſma eandem & altitudinem, & baſin habens cum pyramide. Quare ſi pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum priſma propoſitum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum ſeſquialterã. Ex quo efficitur, pyramidem ſuper dimidium parallelogrammum conſtitutam, quæ eandem cum tali priſmate habeat altitudinem, cum ſit dimidium prioris pyramidis, eſſe tertiã partem priſmatis. Quæ cum ita ſint, non habebit tale priſma ita conſtitutum ad aliud priſma eiuſdem altitudinis, eandem proportionem, quam baſis ad baſin, niſi hoc aliud priſma in

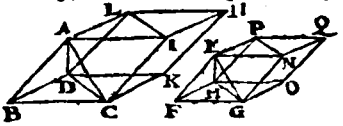
vertice

vertice lineam rectam habeat quoque, & baſin parallelogrammum. Itaque ea, quę oſtenſimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis eiuſdem altitudinis, quorũ vertices vel linea recta ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hac enim ratione, ſi vertices priſmatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiuſdemque altitudinis, dua tertia partes priſmatum, vt modo demonſtrauimus. Quare eandem habebunt rationẽ, quam priſmata, &c.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

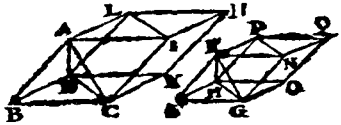
SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita vt baſes ABC, EFG, ſint ſimiles, & reliqua triangula vnius ſimilia reliquis triãgulis alterius. Dico ꝓportionẽ pyramidũ eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB,



perficianturq; parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ & æquales, cõuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur cõpletũ parallelepipedum BM, eiuſdem cum pyramide altitudinis; cũ plana ſolidi BM, ſint parallela, vt facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodẽ modo perficiatur parallelepipedũ FQ. Quoniã igitur ob ſimilitudinẽ pyramidũ, anguli plani ABC, EFG, ſunt æquales, eſtq; vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, ſimlia. Eodẽ modo cũ anguli ABD, EFH, ſint æquales, ſitq; vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Itẽ anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erũt & parallelogramma BL, BK, parallelogrãmis FP, FO, ſimilia. [a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepi-

[a] 24. vnde.



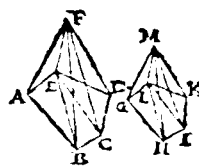
pedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM; quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, [b] prismata DBCILA, HFGNPE, habēt eandē proportionē, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; [c] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. [d] Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 24. unde.
[b] 15. quinti
[c] 11. quin.
[d] 33. unde.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilineæ similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos rectæ EB, EC; LH, LI, [e] diuisa erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis



[e] 20. sexti

triangulis GHL, LKI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum ſimilitudinem, triangula AEF, GLM, ſimilia ſunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter ſimilitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rurſus quia eſt vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triãgula ſimilia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum ſimilitudinẽm ſimilia ſint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum ſit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH. [a] Quare æquiangula, atq; adeo & ſimilia ſunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, ſimilia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. ſimiles ſunt. Eadem ratione ſimiles erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. [b] Quapropter, vt demonſtratum eſt, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, ſingula ad ſingulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorũ AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, ſingulorum ad ſingula. Cũ igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeãt vnã et eandem proportionem, ob ſimilitudinem baſium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnã eandemq; proportionem, triplicatam ſcilicet illius; [c] Atque idcirco erit, vt una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, [d] cũ pyramis ABEF, ad pyramidẽ GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod eſt propoſitum.

[a] 5. ſexti

[b] 8. duodec.

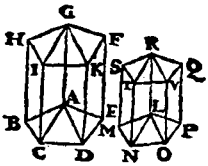
[c] 12. quinti

[d] 8. duodec.

SCHOLIVM.

EADEM ratione priſmata ſimilia habebunt triplicatã proportionem homologorum laterum. Sint enim duo priſmata ſimilia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum propor-

proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nã si ex angulis A, & L, ducãtur rectæ AC, AD; LN, LO, a erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam uero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM: Vt autem CB, ad CA, ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, sint æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erũt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sũt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostenderentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, qua demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterũ homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante usi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.



a 20. sexti

EX

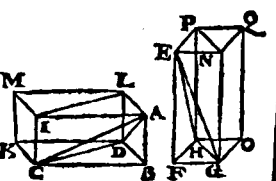
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

AEQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinē pyramidis EFGH, ad altitudinē pyramidis ABCD. Si.n. perficiantur, vt in præcedēti propos. dictū est, parallelepipeda BM, FQ, eorundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. [a] Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinē solidi BM: [b] Vt autē basis BI, ad basim FN, ita est triangulū ABC, ad triāgulū EFG. Igit erit quoq; vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eędem



[a] 34. vnde.

[b] 15. quin.

dem sint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea baſes, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius; cũ ſit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintque eędem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque baſes parallelepipedorum & altitudines eorundẽ reciprocæ; [b] Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallepipeda BM, FQ. Quare & priſmata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 15. quinti

[b] 34. unde.

[c] 9. duodec.

SCHOLIVM.

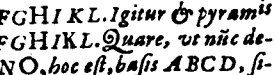
EADEM ratione Aequalium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentiũ reciprocãtur baſes & altitudines, illa ſunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, baſin habeat triangularem, at vero EFGHI, non triangularem. Fiat baſi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propoſ. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demõſtrauimus ad propoſ. 42. lib. 1. Deinde ſuper KLM, ſiat pyramis KLMN, eiuſdem altitudinis cũ pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent baſes, & eandem altitudinem; ipſæ erunt æquales, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 6. huius lib. oſtendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, baſes triangulares; erit vt baſis ABC, ad baſin KLM, hoc eſt, ad huic æqualem baſin EFGH, ita altitudo pyra-



pyramidis KLMN, hoc eſt, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo; cum baſis KLM, æqualis ſit baſi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI; ponatur autem eſſe vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt baſis ABC, ad baſim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. [a] Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum. [a] 9. duode.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum baſes ſint multãgulæ. Fiat rurſus triangulũ MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritque ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt nũc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt, baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, baſes & altitudines reciprocantur.



SED reciprocentur iam baſes harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſis MNO; æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante oſten

oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIKL: Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

OMNIA hæc facile quoque demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem báſes, æquales; cum ſint eorum tertiæ partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certe duæ tertiæ, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, linea recta, vt in ſcholio eiuſdē propoſ. oſtenſum eſt. Quare, vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atq; altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint triplæ, vel certe ſeſquialteræ, æqualia quoque ſunt. Quod eſt propoſitum.

9.

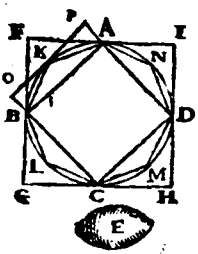
THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus baſin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quã triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratũ ABCD, & circa eũdem, quadratum FGHI; intelligantur que ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda.

Quo-

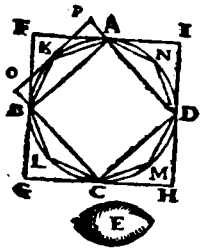
Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidiũ eſt quadrati FGHI, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; eſtq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidiũ parallelepipedi baſis FGHI; Ac proinde parallelepipedum baſis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius baſis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, vt ad propoſ. 27. lib. 3. oſtendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. [b] Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis ABOP: cum ſit priſma ad priſma, vt baſis ad baſim, quemadmodum ad propoſ. 7. huius lib. demonſtrauimus; Ac propterea priſma baſis AKB, maius erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura cõtenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariã, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodẽ modo priſmata eiuſdẽ altitudinis cũ cono, & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidia omniũ ſegmentorũ cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmẽta, & ſic deinceps. Quoniã uero ſi a cylindro, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis ABCD; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſium AKB, BLC,



[a] 33. vnde.

[b] 41. prim.

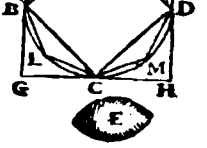
a 1. decim. BLC,&c. atq; in hunc modum ſemper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni: Sint iam ſegmẽta cylindri relicta baſium AK,KB,BL, &c. (quę quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, ſimul; Si ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior eſt dictis cylindri ſegmentis, erit reliquum priſma baſis multangulę AKBLCMDN, eandem habẽs altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſmatis ſit tertia pars pyramis, cuius eadẽ cum ipſo baſis & altitudo, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt cylindrus triplo coni.



SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis ſit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur rurſus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturq; ſuper hæc quadrata, pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI, vt ad propoſ. 9. lib. 4. demonſtrauimus, b eſtque vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidẽ eiuſdem altitudinis; Erit quoque pyramis ſuper ABCD, dimidium pyramidis ſuper baſin FGHI; ac proinde pyramis ſuper baſin ABCD, maior erit dimidio coni, cuius baſis circulus ABCD. Secẽtur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit

b 8. duodec.

erit ipſi AB, vt ad propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus. occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & ſuper AKB, ABOP, intelligatur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. [a] Quia ergo triangulũ AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis ſuper baſin AKB, dimidium pyramidis ſuper baſin ABOP, [b] cũ pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin AKB, maior erit dimidio ſegmenti coni, cuius baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erũt pyramides, quarum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul maiores ſunt, quã dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt ſimul, quã dimidia omniũ ſegmentorum coni ſimul, quorũ baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi a cono, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin ABCD, quam maiorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cuius baſis eſt circulus ABCD; & a reliquis ſegmẽtis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [c] relinquitur tãdem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri: Sint iam ſegmenta coni relicta baſium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahãtur ſegmẽta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior



[a] 41. primi.

[b] 6. duode.

[c] 1. decimi

est, præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cũ cono & cylindro, maior quã tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cũ prisma eandẽ habens basim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cũ cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum, erit huiuscemodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum, Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, propterea; conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS propositio hac solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos dũtaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuersa ita proponi potuit.

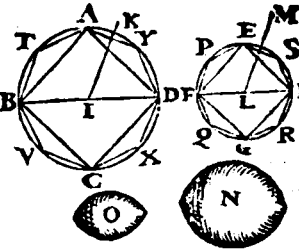
OMNIS conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni & cylindri.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt. vt bases.

SINT sub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ bases circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, &

rium. & cylindrum ad cylindrũ. Si enim hoc non credatur, sit vt basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si n. esset æqualis, haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionẽ eandẽ; ac propterea esset conus ad conum, vt basis ad basin: quod non cõceditur. Sit ergo primũ N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH. diuidanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, eiusdem altitudinis, & a reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedẽtis propositionis ostensum est; [b] relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidẽ bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmẽtis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonũ EPFQGRHS, eiusdẽ altitudinis cũ cono, maior quã N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonũ ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturq; circulorũ diametri BD, FH. Quã igit per coroll. ppos. 2. huius lib. est vt circulus ABCD, ad circulũ EFGH, ita polygonũ ATBVCXDY, ad poly-



[a] 7. quinti.

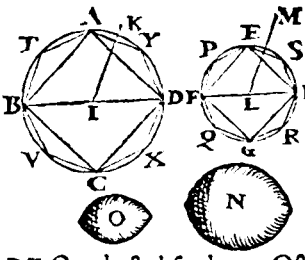
[b] 1. decimi

gonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABC *D*, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCD*K*. ad magnitudinem N, [a] & vt polygonum, ad polygonum, ita eſt pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidē EPFQGRHSM, vt conus ABCD*K*, ad N. Cum igitur pyramis *A*TBVCXDYK, minor ſit cono ABCD*K*, pars toto, [b] erit & pyramis EPFQGRHS*M*, minor quā N: Oſtēſa autem fuit & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGH*M*.

[a] *6. duodec.*

[b] *14. quinti*

SIT ſecundo N, maior cono EFG*H*M. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABC*D*K. Ponatur vt N, ad conum *A*BCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinē O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; [c] maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit vt circulus EFGH ad circulum A B C D, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono *A*BC*D*K. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Non ergo maior eſt N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor eſt oſtenſa; Aequalis igitur eſt. Quapropter cum ponatur, vt baſis *A*BC*D*, ad baſin E F G *H*, ita conus ABCDK, ad N; [d] Sit autem, vt conus ABCD*K*, ad N, ita idē conus A BCDK, ad conum EFGHM; erit quoque vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.



[c] *14. quin.*

[d] *7. quinti*

[e] *15. quin.*

[e] QVONIAM autem, vt conus ABCD*K*, ad conum EFGHM, ita eſt cylindrus ABCD*K*, (qui triplus eſt coni *A*BCDK;) ad cylindrum EFGH*M*; (qui triplus eſt coni EFGHM) Erit quoque vt baſis *A*BCD, ad baſin EFGH,

EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrũ EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo vſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, vt eius demonſtratio manifeſte indicat, ita vt propoſitio vniuerſe proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

CONVERTETVR hac propoſitio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

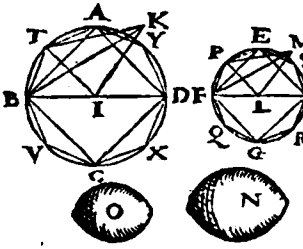
ITEM ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi nõ habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni,& cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

SINT ſimiles coni,& cylindri,quorum baſes circuli ABCD,EFGH,axes vero LK, LM, & diametri baſium BD,FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatã diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur,habeat conus ABCDK,ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, haberet conus ABCDK, ad conũ EFGHM, & ad N, pportionem eãdem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conũ EFGHM, eſſet quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH;quod non conceditur.Sit ergo primum N, minor,quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadẽ prorſus conſtructio figuræ,quæ in præcedenti propoſitione,ita vt rurſus pyramis EPFQGRHSM, maior oſtendatur,quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP,vt habeãtur duo triangula BKT,EMP, pyramidum ATBVCXDYK,EPFQGRHSM;& connectantur rectæ TI,PL. Quoniam igitur coni ABCDK,EFGHM,ſimiles ponuntur,erit,ex 24.defin.lib.11.vt diameter BD, ad diametrum FH, ac propterea vt ſemidiameter BI,ad ſemidiametrum FL,ita axis IK,ad axem LM; Ac permutãdo vt BI,ad IK, ita FL, ad LM.Cum igitur anguli BIK,FLM,recti ſint,ex defin.3.lib.11.quod coni recti ponantur,propterea que axes recti ad eorum baſes; Erunt triangula BIK, FLM,æquiangula; Ac propterea



a 7. quinti

b 15. quinti

c 6. ſexti.

d 4. ſexti

rea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autē BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob ſimilitudinē triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, inſiſtentes ſimilibus arcubus BT, FP, ſint æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtēſum eſt; ſitq; vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatē tam linearū BI, IT, quam FL, LP; erunt triangula BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rurſus quatera KI, IB, triāguli KIB, æqualia ſūt lateribus KI, IT, triāguli KIT, & anguli dictis lateribus cōprehēſi, recti, ex defin. 3 lib. 11. cū axis IK, rectus ponatur ad circulū ABCD, erūt baſes KB, KT, æquales. Eodē modo æquales erūt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cū vtrobiq; ſit proportio æqualitatis. Cūm vero vt KB, ad BT, ita KT, ad eandē BT; Itē vt MF, ad FP, ita MP, ad eandē FP: Erat autē vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit quoque vt KT, ad BT, ita MP, ad FP; Et cōuertēdo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cū ſit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF; & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP, Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti oſtenſum eſt; habebūt triāgula BKT, FMP, latera proportionalia, ideoq; æquiāgula erūt; Ac proinde ſimilia, ex definitione. Non aliter oſtendētur reliqua triangula ambiētia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter ſe ſimilia eſſe: Quæ cū ſint multitudine æqualia, erūt dictæ pyramides ſimiles, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Vt autē BT, ad FP, ita eſt BI, ad FL, ob ſimilitudinē triangulorum BIT, FLP; Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidē habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCD K, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYK; ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Oſtenſa autem eſt & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

a 6. ſexti.

b 4. primi

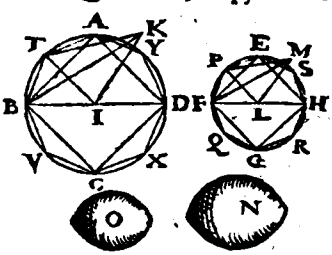
c 7. quinti

d 6. ſexti.

e 15. quinti

f 14. quinti

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autẽ & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime oſtendimus: Erit vt conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterũ PF, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoq; N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatã diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinẽ O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM, [a] erit quoq; conus ABCDK, maior quã O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinẽ O, minorem cono ABCDK, proportionẽ habet triplicatam diametri FH, ad diametrũ BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conũ ad magnitudinẽ alio cono minorẽ, proportionẽ habere triplicatã eius, quã habent baſiũ diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor eſt oſtenſa. Aequalis igitur eſt; [b] ac proinde conus ABCDK, eandẽ habet proportionẽ ad conũ EFGHM, & ad N. Cũ ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorũ BD, & FH; erit quoq; conus ABCDK, ad conũ EFGHM, in earundẽ diametrorũ proportione triplicata. [c]



[a] 14. quin.

[b] 7. quinti.

[c] 15. quin.

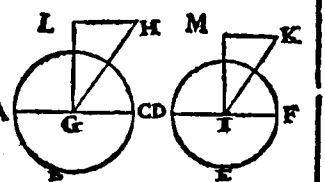
QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, ean-

ni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoq; cylindrus ad cylindrum proportionē diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo vſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

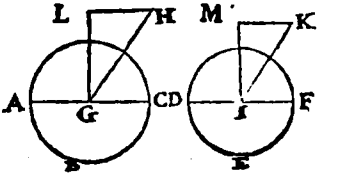
QVOD ſi maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perſpicuum eſt, in ſecunda parte huius propoſ. Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8. huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterū homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri ſemper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HÆC porro propoſitio, quamuis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cum in demonſtratione aſſumantur axes recti ad baſes. Quocirca eam hac ratione oſtendemus in ſimilibus conis & cylindris ſcalenis. Sint ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorum baſes circuli ABC, DEF, axes vero GH, IK, & diametri baſiū AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatā. Intelligantur enim ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti earundem cum ſcalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducāturq; per rectas GH, GL; item per IK, IM, plana ſecantia baſes lineis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti ſunt baſibus ABC, DEF; [a] erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad eaſdem recta. [b] A propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad baſes demiſſæ cadent in AC, DF, communes ſectiones; & proinde erunt anguli



[a] 18. vnde.
[b] 38. vnde.

anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cũ coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin.
a 32. primi 3. lib. 11. a Reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoq; erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta HL, per axiũ vertices ducta ipsi AC,
b 29. primi parallela, b ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula sunt; atque idcirco



c 4. sexti. erit vt GL, ad GK, ita IK, ad IM; & permutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axẽ IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponãtur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axẽ erit, vt diameter AC, ad DF, diametrũ; Et proinde coni & cylin
d 12. duod. dri recti ABCL, DEFM, similes erũt, ex definitione. d Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus CEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est æqualis, vt constat ex coroll. propos.
e 7. quint. 11. huius lib. e Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum et cylindrũ DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.

11.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SE-

SECETVR cylindrus *ABCD*, plano GH, paralle lo aduerſis planis AB, CD, quod quidem ſecet axẽ EF, in I. Dico vt eſt cylindrus ABHG, ad cylindrũ GHCD, ita eſſe axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantumlibet; Sumanturque in axe producto quotcunq; rectæ *EK*, KL, æquales ipſi EI; Itẽ quotcũque rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi FI. Deinde per puncta I, K, L, *M*, N, O, ducantur rectę IH, *K*P, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, deſcribent circulos GH, PR, QS, T*α*, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erũt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componẽtes totum cylindrum SQXY. Quoniã vero tam cylindri SP, PA, AH, ſuper baſes æquales QS, PR, BA, & ſub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales ſũt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, ſuper æquales baſes XY, VZ, T*α*, CD, & ſub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quã multiplex eſt axis IL, ipſius axis IE; Itẽ tã multiplex cylindrus X*G*, cylindri *CG*, quam multiplex eſt axis IO, ipſius axis IF. Quoniam autem ſi axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi IO, (multiplici axis IP, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro X*G*, (multiplici cylindri C*G*, quartæ magnitudinis) vt ex propoſ. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunq; hoc contingat multiplicatione: Erit, per defi. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axẽ IF, ſecundã magnitudinẽ, vt cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum C*G*, quartam magnitudinem. Si cylin



drus

drus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri LS, KR, EA, &c. semper æquidistantes circa centra L, K, E, &c. vna cũ recta SY, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

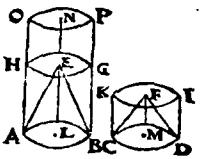


11. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE, MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturq; axis EN,

E N, æqualis axi *M F*, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo GH, vt fiat cylindrus GHO*P*, eiusdem altitudinis cum cylindro CDIK. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.



[a] propterea que cylindrus A G, ad ipſos eandem habet proportionem. [b] Eſt autem cylindrus *A* G, ad cylindrum HP, vt axis, ſeu altitudo LE, ad axem, ſeu altitudinem EN, hoc eſt, ad altitudinem M*F*, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum CI, erit quoque, vt altitudo LE, ad altitudinem MF.

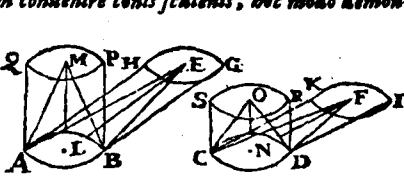
[a] *7. quinti.*
[b] *13. duod.*

[c] QVIA vero coni ABE, C D F, ſunt tertiæ partes cylindrorum *A* G, C I; [d] ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus ABE, ad conum C D F, vt altitudo LE, ad altitudinem MF. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

[c] *10. duode.*
[d] *15. quin.*

SCHOLIVM.

HOC idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A-BE; C D F, et cylindri A-BGH, C D I-



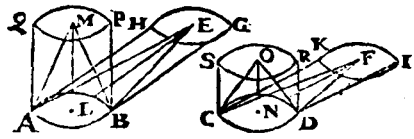
K, ſcaleni, quorum altitudines LM, NO. Dico conũ ABE, ad conum CDF, et cylindrum ABGH, ad cylindrum CD-IK, eſſe, vt eſt altitudo LM, ad altitudinem NO. Super baſin enim AB, conſtruatur cylindrus rectus ABPQ, ſub altitudine L M; Item ſuper baſin C D, cylindrus CDRS, ſub altitudine NO. [e] *Quoniã igitur eſt cylindrus rectus ABPQ, ad*

[e] *14. duode.*

ad cylindrum rectũ CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO: Est aũt cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Itẽ cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propos. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

[a] 10. duod. [b] 15. quin.

QVONIAM autem coni, [a] *cum sint tertiæ partes cylindrorum,* [b] *eandem habent proportionem, quam cylindri;*



Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodẽ argumento, quo vsi sumus in cylindris, confirmari potest, vt perspicuum est, si super bases AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundẽ altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit scalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus scalenus ABGH, æqualis sit cylindro recto ABPQ; sit autẽ cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonstrauit: Erit quoque cylindrus scalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod est propositum.

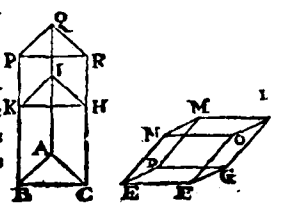
[c] 15. quin. [d] 10. duod.

[c] QVONIAM vero coni eandem habent proportionẽ, *quam cylindri,* [d] *cum illi horum sint tertiæ partes; Erit etiã conus scalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus ostendetur eadẽ rationes, quæ vsi sumus in cylindris, vt manifestum est.*

EADEM quoque hac propositio conuenit prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. Sint enim super bases æquales ABC, DEFG, prismata ABCHIK, DEFGKMNO, & pyramides sub eisdem altitudinibus. Dico esse prisma ad prisma, & pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem. Sint namque insistentes lineæ AI, CH, BK, prismatis ABCHIK, ad basin ABC,

perpendi-

perpendiculares, ita vt BK, sit altitudo prismatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, sumantur IQ, HR, KP, aquales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur prisma HIKPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Erunt q; prismata HIKPQR, EL, cum habeant & bases, & altitudines aquales, inter se aqualia, ex coroll. 2. propo. 7. huius lib. [a] Ac propterea prisma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propo. 25. lib. 11. prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, est vt planum BI, ad planum KQ; [b] Et vt planum BI, ad planum KQ, ita est recta BK, ad KP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma EL, vt BK, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod est propositum.



[a] 7. quinti.

[b] 1. sexti.

QVOD si insistētes lineæ AI, CH, BK nō sint perpendiculares ad basin ABC, cōstituēdū erit sup basin ABC. aliud prisma, cuius insistētes sint perpēdiculares ad basin, & aquales altitudini prismatis ABCHIK. Nam cū ex 2. coroll. propos. 7. huius lib. hæc duo prismata eandem habentia altitudinē, et basin, sint aqualia, siq; prisma constitutū ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinē; erit et prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinē huius

[c] QVONIAM vero pyramides eandē habent proportionem cum prismatis, [d] quod illa sint horū tertia partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.

[c] [d] 15. quin. 7. duode.

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque eb id eadem illis demonstratio possit accommodari.

HAEC omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA

OMNIA quoq; hac facile conuerti possunt hoc modo.

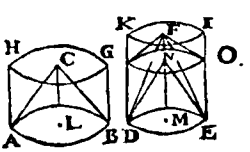
CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

NAM alia pars æqualis foret toti, vt in conuerso propos. 31. lib 11. ostensum est.

12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorũ reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes, altitudines ve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines sunt reciprocæ.



QVOD si altitudines LC, MF, inæquales fuerint, sit MF, maior, ex qua abscindatur MN, ipsi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, basi DE, parallelum,

vt

vt in ſcholio propoſ. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO. O K. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. [a] Eſt autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: [b] Item vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem M N, hoc eſt, ad huic æqualem L C; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

[a] 7. quinti.
[b] 11. duod.
[c] 14. duod.

IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, [d] cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demóſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF conſtituátur duo coni, vt in figura.

[d] 10. duod.

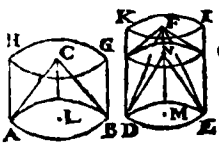
SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidé in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN; [e] Eſt autem vt baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: [f] Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrũ DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO;

[e] 11. duod.
[f] 14. duod.

a 9. quinti. a ideoq; cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

A T vero in conis hæc erit demõstratio. Si conorũ



ABC, DEF, baſes & altitudines reciprocẽtur, reciprocabũtur quoq; baſes, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cũ eædem ſint baſes, altitudineſque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt oſtenſum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo conos eſſe æquales, quo oſtẽdimus cylindros æquales eſſe. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocãtur baſes & altitudines, &c. Quod erat demonſtrandũ.

SCHOLIVM.

NON difficile erit idẽ oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoque recti eaſdem cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare vt oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eadem ſint baſes, & altitudines rectorum & ſcalenorum. Quare, vt demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac properea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. inter ſe quoque erunt æquales.

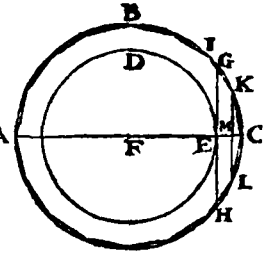
IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus.

13. **PROBL. 1. PROPOS. 16.**

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum

lygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idē centrū F, oporteatq; in maiori ABC, inſcribere polygonū æquilaterū, cuius latera numero pari cōtinentur, nō tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, ſecās circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Quoniā igitur arcus AGC maior eſt arcu GC, ſi ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex reſiduo BC, dimidium BI, & ex reſiduo IC, dimidium IK, & ſic deinceps; relinquetur tandem minor arcus quā CG. Sit igitur iā arcus CK, arcu CG, minor, & ſubtēdatur recta CK. Dico rectā CK, eſſe vnum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrās AB, in totidē partes æquales diuidaſ, in quot diuiſus ē quadrans BC; necnō ſemicirculus AHC, in totidē partes, quot cōtinet ſemicirculus ABC; deinde oībus arcubus rectę lineę ſubtēdātur, quę æquales quidē erunt ipſi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales ſubtendant: Deſcriptū erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidē non tangere circulum minorem DE, ita oſtendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, ſecans ipſam AC, in M. Qm igitur anguli GEM, KME, recti ſūnt; erūt rectę GH, KL parallelæ. Quare cū recta GH, tāgat circulū DE, in ſolo puncto E; recta KL, erit tota extra dictū circulū, nec vnquam ipſum continget, quod nunquā cum recta GH, cōueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abeſt, quam KL, circulum DE, tanget. Ac pro-



a 1. decimi

b 29. tertij.

c 28. primi

propterea neque alia latera polygoni inſcripti, cũ æqualia ſint lateri CK, ideoque æqualiter cum CK, a centro F, diſtent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtẽtibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

* 14. tertij.

COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed totam extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K. lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum DE.

14. PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphęra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſpheræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inſcribere ſolidũ polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorẽ ſphæram EFGH. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo per centrum, ſintq; communes ſectiones factæ in ſphęris planis ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntur, circumducti congruent ſectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes

omnes lineæ rectę cadentes ex I, ad peripherias ſectionũ ſunt æquales, cum ducãtur ex centro ſphærarum ad earum ſuperficiem; erunt ipſæ ſectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducãtur in his circulis diametri AC, BD, ſe ſe in centro I, ſecantes ad angulos rectos, vt ſint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. Deinde in maiori circulo ABCD, inſcribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidẽ vt facilius omnia demonſtrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam vſq; circuli ABCD, quæ circulũ EFGH, tanget in G, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Et rectę Gγ, applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero ſi arcui Cγ, intelligatur ſubtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, latus Cγ, oppoſitũ maiori angulo, nẽpe recto, maius eſt latere Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoq; recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maior erit, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. Abſcindatur ergo arcus Cζ, arcui Aε, æqualis. Quod ſi ex quadrante CD, dimidiũ auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidiũ LK, & ſic deinceps; relinquetur tandẽ arcus minor arcu Cζ, ſeu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritq; recta CK, ſubtenſa minor quam recta Aε, hoc eſt, quam Gγ, ex ſcholio propoſ. 29. lib. 3. Dico igitur, rectã CK, eſſe vnum latus polygoni æquilateri inſcribendi. Nam cum recta ſubtendens arcum Cζ, minorem arcu Cγ, non tãgat circulum EFGH, vt ex demonſtratione præcedentis propoſ. patet, multo minus recta CK, ſubtendens arcum minorem arcu Cζ, eundem circulũ tanget. Rurſus ducta diametro KN, erigatur ex centro I, ad plana circulorũ ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens ſuperficiei ſphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientq; cõmunes ſectiones, circulos, vt iam dictũ é, quorũ ſemicirculi ſint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti ſunt, ex defin. 3. lib. 11. ſquadrantes erunt OC, OK; atq; adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales ſint, quod eorum diametri ſint & ſphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes CD,

[a] 16. duod.

[b] 1. quarti.

[c] 19. primi.

[d] 1. decimi

[e] 18. vnde.

[f] 18. vnde.

[g] ſchol. 22. tertij.

OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL; & quadrates OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales a cubus quadrátis CD; Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, quæ in communes sectiones AC, NK, cadent; eruntque inter se parallelæ.

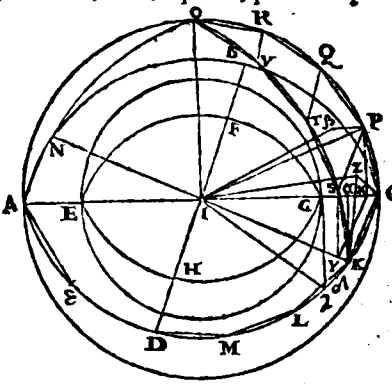
a 29. tertij.

b 38. vnde.

c 6. vndec.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoq; erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, trianguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY: Sunt autē & latera PC, SK, rectis angulis opposita, æqualia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY; æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter sese. At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demātur æquales rectę CX, KY relinquētur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK.) Erūt parallelę quoq; PS, CK, inter se, cum

d 27. tertij.



e 26. primi

f 33. primi

g 2. sexti.

h 9. vndec.

se, cum vtraq; parallela sit ipsi XY; ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent. Totũ igitur quadrilaterũ CKSP, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpediculares, & cónectantur rectæ QC, TK, ostẽdemus similiter CK, QT, esse parallelas; atq; adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cũ eidẽ CK, sint parallelę; totũq; quadrilaterũ PSTQ, in vno esse plano. Eadẽ ratione in vno erit plano qnadrilaterũ QTVR. [b] Est autẽ & triangulũ RVO, in vno plano. Si igitur eadẽ constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphęrio, vt tota sphęra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, cõstructis; inscriptũ erit in sphęra maiori solidũ polyedrũ circunscriptũ dictis quadrilateris, atq; triãgulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

a 7. vndec.

b 3. vndec.

DVCATVR. n. ex I, ad planũ CKSP, perpẽdicularis IZ, conectanturque rectæ ZC, ZK. Quoniã igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; [c] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratũ rectę IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarũ IZ, ZC, quadratis rectarũ IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipsę rectę ZC, ZK, æquales. Similiter ostẽdemus rectas, q̃ ex Z, ad PS, ducẽtur, æquales esse & inter se, & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallũ ZC, descriptus p quatuor pũcta C, K, S, P, trãsibit. Eadẽq; rõne circa reliqua quadrilatera PSEQ, QTVR, & triangulũ RVO, circulos describi posse, demõstrabimus. Qm vero, vt postea ostẽdemus, angulus CZK, obtusus est; [d] erit quadratum rectę CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectę ZC.

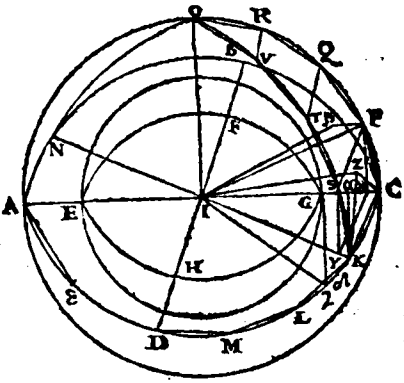
c 47. primi.

d 12. secun.

DVCATVR ex K, ad rectã AC, perpendicularis Kα. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aα, maior sit,

quá AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quá ob rẽ cum
[a] 1 ſexti. ſit, [a] vt AC, ad Aα, ita rectangulũ ſub AC, αC, ad rectan
gulũ ſub Aα, αC, quod baſes horum rectangulorum ſint
AC, Aα, & eadẽ altitudo αC; erit quoq; rectãgulum ſub
[b] 17. ſexti. AC, αC, minus duplo rectanguli ſub Aα, αC. [b] Eſt autem
rectangulũ ſub AC, αC, ęquale quadrato rectę CK; & re
ctangulũ ſub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quod
recta CK, inter AC, αC, ſit media proportionalis; & re
cta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim
connecteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum
ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit du
plo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum re
ctæ CK, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ
ZC; erit quadratũ rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC.

[c] 47. primi



[c] Quoniã vero quadratũ rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarũ IZ, ZC; & quadratũ rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK: Suntque ęqualia quadrata rectarũ ęqualiũ IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, ęqualia quadratis rectarũ Iα, αK. Si ergo ex his demantur quadratum maius, nempe rectę αK; & ex illis minus, videlicet rectę ZC, erit reliquum quadratũ rectę IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta IZ, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tãgat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta Kα, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cũ omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint a ſphæra EFGH,

EFGH, quam punctum Z, vt mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Cγ: [a] Eſt autem CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtuſus ſit, vt mox demonſtrabitur; Multo maior erit Gγ, quam ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [b] Quia vero quadratum rectæ Iγ, æquale eſt quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; ſunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, ſit ſphæræ minoris EFGH, ſemidiameter; exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

[a] 19. primi

[b] 47. primi

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, vt demonſtratum eſt: Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus IβP, rectus ſit, ex 3. defin. lib. 11. [c] erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Iβ, βP. Quia uero & quadratum rectæ IC, (quod æquale eſt quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Eſt aût quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior ſit, quam linea βP, vt poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoque & linea Iβ, maior quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum β, extra ſphæram EFGH, exiſtet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget ſphæram

[c] 47. primi

ram minorem E F G H. Eodem modo demonſtrabimus, quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſsint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

EX iis, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in vna ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; vt conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ a centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium; Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cum ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoque polyedrum vnius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidia-

me-

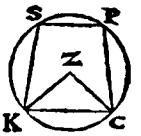
metrorum, atque adeo diametrorum ſphærarum, [a] *cum ſemidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.*

[a] 15. quinti

SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonſtranda.

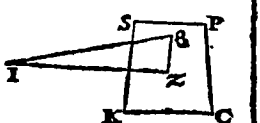
PRIMVM itaque oſtendendum eſt, angulum C Z K, *in quadrilatero* C K S P, *eſſe obtuſum. Quod vt commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro* Z, *circulus. Quoniam igitur in figura ſuperiori, eſt vt* I K, *ad* K C, *ita* I Y, *ad* Y X, *(quod per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula* I C K, I X Y, *ſimilia ſint.) Eſt autem* I K, *maior quam* I Y; [b] *erit & K C, maior quam* Y X. *Cum igitur* Y X, *æqualis ſit oſtenſæ ipſi* S P, *erit quoque* K C, *maior quam* S P; *Ac propterea arcus* C K, *maior erit arcu* S P, *ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3.* [c] *Quare cum arcus* C P, K S, *arcui* C K, *ſint æquales, quod & lineæ* C P, K S, *ipſi* K C, *lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus* C P, K S, *arcu* P S, *maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum* C K, C P, K S, *quadrantem circuli* C K S P, *excedet; atque adeo angulus* C Z K, *obtuſus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3.*



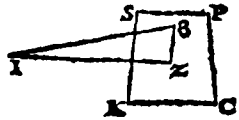
[b] 14 quin.

[c] 28. tertij

SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri C K S P, *longius a centro* I, *abeſſe, quam punctum* Z. *Sumatur enim quodcunque aliud punctum* ⊙, *in quadrilatero* C K S P, *& adiungantur rectæ* I ⊙, Z ⊙.



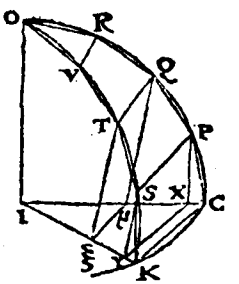
Quoniam



[a] 19. primi

Quoniã ergo angulus IZθ, *rectus eſt, ex defin. 3. lib. 11.* [a] *Erit latus illi oppoſitum* Iθ, *maius latere* IZ, *quod minori angulo* Iθ Z, *nimirũ acuto, opponitur; Ac propterea punctum* θ, *longius a centro* I, *diſtat, quam punctum* Z. *Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius diſtare.*

TERTIO, *ac vltimo probandum eſt, rectam* ZC, *maiorem eſſe recta* βP. *Quod vt aptius fiat, demonſtrandum prius erit, rectam* PS, *maiorem eſſe recta* QT. *Deſcribatur igitur pars ſuperioris figurae, ea videlicet, qua continetur ſemidiametris* IC, IO, *& quadrantibus* OC, OK, *&c. Demittantur deinde ex* Q, *&* T, *ad planum circuli* ABCD, *in quo eſt triangulum* ICK, *perpendiculares* Qμ, Tξ, [b] *qua in communes ſectiones* IC, IK, *cadent,* [c] *eruntque inter ſe ſe parallelae, vt de rectis* PX, SY, *dictum eſt. Quod ſi adiungatur recta* μξ, *erunt* QT, μξ, *parallela & aequales, quemadmodum oſtenſum fuit parallelas eſſe & aequales* PS, XY.



[b] 38. vnde.
[c] 6. vnde.

[d] 2. sexti
[e] 30. primi

[d] *Quia vero* μξ, *ipſi* CK, *parallela eſt; quod latera* IC, IK, *proportionaliter ſint ſecta in* μ, *&* ξ, *veluti diximus de recta* XY; [e] *erunt quoque* μξ, XY, *parallela. Quare erit, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. vt* IY, *ad* YX, *ita* Iξ, *ad* ξμ: *Eſt autem* IY, *maior quam* Iξ. *Igitur &* YX, *maior erit quam* ξμ; *Ac proinde &* PS, *qua aequalis eſt ipſi* XY, *maior erit quam* QT, *qua aequalis eſt ipſi* ξμ.

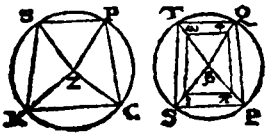
HOC *ergo demonſtrato, deſcribantur ex centris* Z, β, *circa quadrilatera* CKSP, PSTQ, *circuli, egrediunturque e centris recta* ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. *Si igitur* ZC, *non credatur maior, quam* βP, *erit vel aequalis, vel minor. Sit primum aequalis. Quia ergo latera* ZK, ZC, *aequalia*

lia ponuntur lateribus β S, β P, & baſis K C, maior eſt baſe P S; [a] *erit angulus K Z C, maior angulo S β P: Eadem ratione maior erit angulus S Z P, angulo T β Q. At quoniam baſes K S, C P, baſibus S T, P Q, ſunt æquales;* [b] *erunt anguli K Z S, C Z P, angulis S β T, P β Q, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur æqualis eſt recta Z C, rectæ β P.*

[a] 25. primi

[b] 8. primi

S I T deinde Z C, minor, quam β P. Et abſcindantur β π, β ρ, β ϖ, β φ, ipſis Z C, Z K, Z S, Z P, æquales, connectanturque rectæ π ρ, ρ ϖ, ϖ φ, φ π, [c] *quæ parallelæ erunt rectis P S, S T, T Q, Q P, eo quod rectæ ex centris ſectæ ſint proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit vt β S, ad S P, ita β ρ, ad ρ π. Cum ergo β S, maior ſit quam β ρ,* [d] *erit & S P, maior quam ρ π. Eademque ratione maiores erunt S T, T Q, Q P, rectis ρ ϖ, ϖ φ, φ π; Ac propterea cum P S, minor ſit, quam C K, & S T, P Q, æquales rectis K S, C P; & T Q, minor quam P S, erunt rectæ ϖ ρ, ρ ϖ, ϖ φ, φ π, minores rectis C K, K S, S P, P C. Quare cum rectæ β ϖ, β ρ, β ϖ, β φ, rectis Z C, Z K, Z S, Z P, ſint æquales;* [e] *erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales. quod tam illi, quam hi ſint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta Z C, quam β P: Sed neque æqualis eſt oſtenſa; Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.*



[c] 2. ſexti

[d] 14. quin.

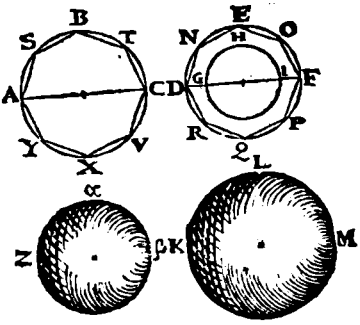
[e] 25. primi

THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

SPHAERAE inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

SINT

SINT duæ ſphæræ ABC, DEF, quarum diametri AC, DF. *Dico* ſphæram ABC, ad ſphæram DEF, habere proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphæra ABC, ad aliam ſphæram GHI, minorem, vel KLM, maiorem, quã DEF, triplicatam proportionem diametri AC, ad diametrum DF. Habeat primũ ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; intelligaturque ſphæra GHI, concentrica ſphæræ DEF. [a] Inſcribatur in ſphæra maiori DEF, polyedrum DNEOFPQR, non tangens minorem ſphæram GHI; Atque huic ſimile polyedrum ASBTCVXY, inſcribatur in ſphæra ABC. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ ABC, ad ſphæram GHI, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF: Eſt autem, per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, triplicata proportionis diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR. Quare cum ſphæra ABC, maior ſit polyedro ASBTCVXY, [b] erit & ſphæra GHI, maior polyedro DNEOFPQR, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra ABC, ad ſphæram GHI, minorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF.



[a] *17. duod.*

[b] *14. quin.*

HA-

HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt ſphęra KLM, ad ſphęram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Zαβ. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, maior, quam ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphęræ itaq; inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

HINC

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

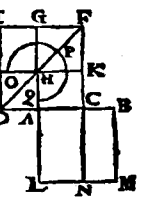
Et Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

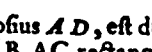
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumẽs dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR *recta A B, in C.* extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum A *C.* Producta autem B A, ad D, ſit A *D*, dimidia totius AB. Dico quadratum rectæ *C* D, quintuplum eſſe quadrati rectæ A *D*. Deſcribatur enim ſuper *C* D, quadratum CE, in quo ducta diametro D *F*, ducatur AG, ipſi *D*E, parallela, ſecans diametrum in H, puncto, per quod ducatur I *K*, parallela ipſi C D. Producta deinde G A, perficiatur quadratum A M, protrahaturque FC, ad N. eruntque

ex coroll. propos. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo est vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulũ CM, sub AB, CB, æquale ipsi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipsius AD, sitque AL, ipsi AB; & AH, ipsi AD, æqualis; erit quoque AL, ipsius AH, dupla: [c] Est autẽ vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur est AN, ipsius AK. [d] Quoniam autem AK, ipsi IG, est æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum sit quadrati AI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineę AD; erit & gnomon OPQ, eiusdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, si gnomoni OPQ, addatur ipsum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



ALITER. Ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum est quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. [e] Est autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis sub AB, AC, & sub AB, BC, comprehensis; Et rursus, quod sub AB, AC, æquale est ei, quod sub AD, AC, bis; (sicut enim AB, ipsius AD, est dupla, [f] ita quoque erit rectangulum sub AB, AC, rectanguli sub AD, AC, duplum, cum vtriusq; rectanguli eadem sit altitudo AC. Ac propterea rectangulum sub AD, AC, bis sumptum æquale erit rectangulo sub AB, AC.) [g] Quod vero sub AB, BC, æquale est quadrato rectæ AC, cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiusdem rectæ AD. [h] Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale sit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo sub AD, AC, bis; Erit & quadratum



rectæ

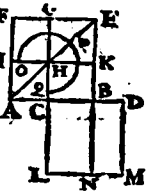
[a] 3. defin. sexti.
[b] 17. sexti.
[c] 1. sexti
[d] 43. primi
[e] 2. secundi
[f] 1. sexti.
[g] 17. sexti
[h] 4. secun.

rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum. Si recta igitur linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI recta linea ſuijpſius ſegmenti quintuplum poſsit; Duplæ prædicti ſegmenti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA ſit recta *AB*, in C, poſitque quintuplum ſegmenti AC; ſumatur autē ipſius AC, dupla CD, quę, vt poſt oſtēdemus, maior erit reliquo ſegmento BC. Dico ſi C D, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe C B, reliquā partem prioris lineę. Deſcribatur. n. I ſuper A B, quadratum B F, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipſi AF, parallela C G, ſecans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipſi A B. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; *E* B, ad N. Eruntque ex coroll. propoſ. 2. lib. F. CI, KG, quadrata rectarum AC, C*B*. Quia igitur quadratum B*F*, quintuplū ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratū *C* I, relinquetur gnomon OPQ, eiuſdē quadrati CI, quadruplus: Eſt autē & quadratum CM, quadruplum quadrati *C* I, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta C D, dupla ſit rectæ A C. Igitur gnomon O P Q, quadrato C M, æqualis erit. Rurſus quoniam CD, ponitur ipſius AC, dupla; eſtque L C, ipſi CD; & CH, ipſi AC, æqualis; erit & LC, ipſius C H, dupla. [a] Cum igitur ſit vt LC, ad CH, ita rectāgulum L B, ad rectangulum C *K*; erit quoque illud huius duplum: [b] Eſt autem C*K*, ipſi HF, æquale. Aequale igitur eſt LB,



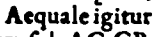
[a] 1. ſexti

[b] 43. primi

ipſis C K, H F; Ac proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo ſunt tres rectæ C D, C B, B D; eſtque rectangulum BM, ſub C D, BD, comprehenſum æquale ipſi KG, quadrato rectæ C B; [a] Erit vt C D, ad CB, ita C B, ad B D. Quam ob rem, ex definitione, recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum C B.

[a] 17. ſexti

ALITER. Quoniam quadratum rectę AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C; [b] eſtque quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum CB, AC, vna cum rectangulo ſub A C, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum C B, AC, una cum rectangulo ſub A C, C B, bis, quintuplum quadrati rectę AC. Dempto igitur quadrato rectę A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectę A C: Eſt autem & quadratum rectę CD, eiuſdem quadrati rectę AC, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequale igitur eſt quadratum rectę C B, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum ſub A C, C B, bis, æquale ſit rectangulo ſub C D, C B; (ſicut enim recta C D, dupla eſt rectæ A C, [c] ita quoque duplum erit rectangulum ſub C D, C B, rectanguli ſub AC, CB; cum vtriuſque rectanguli eadem ſit altitudo C B; Ac propterea rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectangulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: [d] At quadratum rectæ CD, æquale eſt rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD. Igitur quadratū rectæ CB, & rectangulum ſub C D, CB, æquale érit rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectāgulo ſub CD, BD; ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſuijpſius ſegmenti quintuplū poſsit, &c. Quod erat demonſtrandum.



[b] 4. ſecundi

[c] 1. ſexti

[d] 2. ſecundi

[e] 17. ſexti

LEM

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario, quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, a *cum æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod eſt propoſitum.*

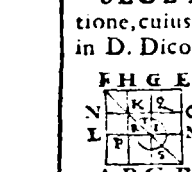
a 4. ſecundi

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum *A C*, bifariam diuidatur in D. Dico quadratũ rectę BD, quintuplũ eſſe quadrati rectæ C D. Deſcribatur. n. ſuper *AB*, quadratum A E, in quo diameter B F. Deinde ex C, D, ducantur ipſis A F, B E, parallelæ CG, DH, ſecantes diametrum in I, *K*, punctis, per quæ agantur ipſis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ ſecẽt rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. LG, PQ, *DO*, quadrata rectarum *AC*, CD, BD. Quoniam igitur recta A C, dupla eſt rectæ C D, erit ex ſcholio eiuſdem propoſ. quadratum LG, quadruplum quadrati P Q. Eſt autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum ſit vt *AB*, ad AC, ita AC, ad *CB*,[a] erit rectangulum ſub A B, C B, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipſi LG.) Igitur & CE, quadruplũ erit quadrati PQ. Quia vero æqualia ſunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earũ latera H *K*, *IQ*, æqualia;[b] ac proinde rectæ EO, OM, ipſis oppoſitæ æquales erunt.[c] Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt:[d] Eſt autem I O, ipſi I *D*, æquale. Ergo & QE, eidem I D, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, oſtenſum ſit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon RST, eiuſdem quadrati P Q, quadruplus; *A*c propterea addito quadrato P Q, erit quadratum *D* O, ex recta BD, quintuplum quadrati P Q, ex recta *C* D.



a 17. ſexti

b 34. primi
c 36. primi
d 43. primi

ALITER. Cum A *C*, diuiſa ſit bifariam in *D*, & ei addita CB;[e] erit rectangulum ſub A B, B C, vna cum quadrato rectę CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectangulum ſub *AB*, BC, quadruplum eſt quadrati rectæ CD; (Nam cum ſit, vt AB, ad *AC*, ita AC, ad CB;[f] erit rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato rectę *A C*: quod cum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadruplũ ſit quadrati rectæ CD; erit & rectangulum ſub AB, BC, quadruplum eiuſdem quadrati rectę *C* D.) *A*c propterea rectangulum ſub *A* B, B C, vna cum quadrato rectæ *C D*,



e 6. ſecundi

f 17. ſexti.

CD, quintuplum quadrati rectę CD. Igitur & quadratū rectę BD, quintuplum erit quadrati rectę C D. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, minus ſegmẽtum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonſtrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſsit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati; Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB, *diuiſa inaqualiter in* C, *cuius maius ſegmentum* AC, *bifariam ſectum ſit in* D; *ſitque quadratum rectæ* BD, *quintuplum quadrati rectæ* CD. *Dico rectam* AB, *diuiſam eſſe in* C, *extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propoſ. erit quadratum* LG, *rectæ* AC, *quadruplum quadrati* PQ, *rectæ* CD, *ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt autem & gnomon* RST, *eiuſdem quadrati* PQ, *quadruplus. (cum enim quadratum* DO, *rectæ* BD, *quintuplum ponatur quadrati* PQ, *ex rectæ* CD; *dempto quadrato* PQ, *relinquetur gnomon* RST, *eiuſdem quadrati* PQ *quadruplus.) Igitur gnomon* RST, *æqualis erit quadrato* LG: *At gnomoni* RST, *æquale eſt rectangulum* CE, *vt ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato* LG, *rectæ* AC, *æquale erit idẽ rectangulum* CE, *ſub* AB, BC, *comprehenſum:* [a] *Ac proinde erit, vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB. *Quocirca, ex definitione, ſecta erit* AB, *in* C, *extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.* [a] 17. ſexti

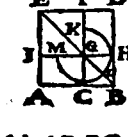
ALITER. Cum AC, *diuiſa ſit bifariam in* D, *& ei*

[a] 6. secundi addita CB; erit rectangulum sub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, descripti; erit & rectãgulum sub rectis lineis AB, BC, descriptum, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD; rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Est autem eiusdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale est [b] 17. sexti rectangulũ sub AB, BC. [b] Quamobrẽ erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde secta AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.

5. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundnm extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; segmentũ maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratũ A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntq; CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [c] 17. sexti erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon



KLM.

KLM, vna cum quadrato CH, duplus quadrati IF; A[c] proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectę BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atq; adeo rectangulum sub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. [b] Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarũ AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

[a] 17. sexti

[b] 7. secundi

SCHOLIVM.

CONVERSVM *etiam huius verum est, videlicet.*

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectã AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF; dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF; Ac propterea cum æqualia sint AH, & CD; erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, recta AC; [c] erit vt AB,

[c] 17. sexti

vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.

ALITER. Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla 17. *secun.* *sint quadrati rectæ AC;* [a] *Sint vero quadrata rectarũ AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectãgulo sub AB, BC. bis; erit & quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplũ quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectãgulum sub AB, BC, bis duplum quadrati rectæ AC; Et proinde rectangulum sub* [b] 17. *sexti.* *AB, BC, semel, æquale quadrato rectæ AC.* [b] *Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.*



EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod a maiori segmento describitur quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumẽs minus segmentum possit quintuplũ eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui adiatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmẽto. [c] *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC:* [a] *Rectangulum autem sub* [c] 8 *secundi* [a] 17. *sexti.* *AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continue proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, qua-*



quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum ſub AB, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiuſdem quadrati ex AC, quintuplum erit. quod eſt propoſitum.

SIT deinde recta AB, ſecta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis, ſitque quadratũ ex AD, quadrati ex AC, maiori ſegmento quintuplum. Dico AB, in C, ſectã eſſe extrema ac media ratione. Quoniã. n. [a] *quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum ſub AC, BC, quater, vna cũ quadrato ex AC, quintuplũ quadrati ex AC; ac propterea rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplũ quadrati ex AC: hoc eſt, rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato ex AC.* [b] *Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, ſecta eſt extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.*

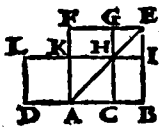
[a] *8. ſecundi*

[b] *17. ſexti.*

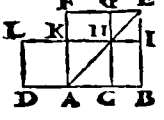
THEOR. 5. PROPOS. 5. 4.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecũdum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ a principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori ſegmento AC. Dico rectam BD, ſecari in A, extrema ac media ratione, eſſeque maius ſegmentum AB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipſi BE, parallela CG, ſecans diametrum



metrum in H, puncto, per quod agatur ipsi *BD*, parallela IK, & ex D, ducatur ipsi AF, parallela *DL*, occurrens ipsi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. *C K*, I G, quadrata rectarum A C, B C. Quoniam igitur est vt AB, ad A C, ita A *C*, ad *C B*; [a] Erit rectangulum IF, contentum sub AB, BC, æquale quadrato *C* K, rectæ AC. [b] Est autem *C* K, ipsi A L, æquale. Igitur IF, æquale erit ipsi A L; addito-que communi B K, erit rectangulum BL, contentum sub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ A B; [c] Ac proinde erit vt BD, ad A*B*, ita AB, ad D*A*. Quare BD, secatur in A, extrema ac media ratione, estque maius segmentum AB:

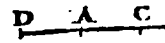


[a] *17. sexti.*

[b] *36. primi*

[c] *17. sexti*

ALITER. Quoniam est vt A *B*, ad A *C*, hoc est, ad A D, ita AC', ad CB; Erit conuertendo vt D A, ad *AB*, ita B*C*, ad CA; & componendo vt DB, ad AB, ita AB, ad *CA*, hoc est, ad AD. Secta igitur est *B*D, in A, extrema ac media ratione. Itaque si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, apponaturque ei æqualis maiori segmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonstrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonstrabimus.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmentum minus; erit maius segmentum sectum extrema ac media ratione, & maius segmetum est illa linea, quæ prioris lineæ minus segmentum erat.

RE-

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmẽtum AD; & ex maiori segmẽto AB, detrahatur recta AC, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum AB, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, et maius segmẽtum esse rectam AC, qua æqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figura constructione, cũ sit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; [a] *erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato cõmuni BK, erit AL, æquale ipsi IF;* [b] *Est autem AL, ipsi CK, æquale. Æquale igitur est IF, contentum sub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC;* [c] *Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentum maius est AC, minus vero segmentum recta CB. Quod est propositum.*

[a] 17. sexti.
[b] 36. primi
[c] 17. sexti.

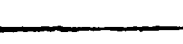
ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; [d] *erit quoque ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione.*

[d] 19. quin.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF. Cum enim sit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla; [e] *erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam:*



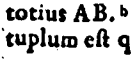
[e] 19. quin.

[a] 15. quin. *tam; Ac proinde & CB, dupla erit ipſius FE. 2 Quoniam vero eſt, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimidiam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Eſt autem ex defin. linea ſecta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, ſecta erit in F, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; Vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque ſegmentum AC, CB, eſſe lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori ſegmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [b] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum eſt quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [c] Quare commenſurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea quæ ipſæ rectæ CD, AD, commenſurabiles quoque exiſtent, ſaltem potentia: Eſt autem AD, Rationalis, cum ſit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarũ C D, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) [d] erunt rectæ CD, AD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex CD, Rationali detrahatur



[b] 1. tertij dec.

[c] 6. deci.

[d] 9. decimi

tur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; [a] erit reliqua AC, Irrationalis, quę appellatur Apotome. [a] 74. deci.

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum AE, equale quadrato rectę AC. Quâ ob rem quadratum Apotomę AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, [c] facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi equalem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum. [b] 17. sext. [c] 98. deci.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano *ostendemus.*

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. [d] *Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum;* [e] *ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsa recta BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erũt recta BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Ratio-*

A D C B

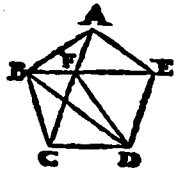
[d] 3. tertij dec. [e] 6. deci.

[a] 74. deci. *Rationali detrahatur* CD, *Rationalis potentia tantum communis mensurabilis*; [a] *erit reliqua* C B, *Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui nõ deinceps sint, æquales fuerint: AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi se intersecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD.



[b] 4. primi [c] 5. primi Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; [b] erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [c] Sunt autẽ & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE, BD; Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi: [d] Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; [e] erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera FE, ED, trianguli FED, æqualia sint lateribus FC, CD, triãguli FCD; [f] & basis communis FD; [f] erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli

[d] 4. primi [e] 6. primi [f] 8. primi

AEB,

AEB, BCA, ostensi æquales. Aequales igitur sunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cum angulo AED, ostensus sit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipsum pentagonum.

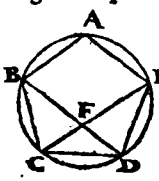
SINT secundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, triāguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti, æquales, ex hypothesi; [a] Erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [b] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia ostensa sint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonstratum est, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. primi.
[b] 5. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 11.

SI pentagoni æquilateri, & æquiāguli duos angulos, qui deinceps sint, subtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione se mutuo secant, & maiora ipsarum segmenta æqualia sunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui sunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, se mutuo secantes in F. Dico ipsas secari extrema ac media ratione, maioraque earum segmenta FB, FE, æqualia esse lateri cuilibet pētagoni. [c] De-



[c] 14. quar.

[a] 28 tertij.

[b] 4. primi

[c] 32. primi

[d] 33. sexti.

[e] 6. primi

[f] 27. tertij.

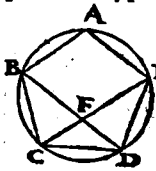
[g] 32. primi

[h] 4. sexti.

[i] 22. tertij.

[k] 28. primi

scripto enim circulo circa pentagonum;[a] erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi;[b] Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales,[c] & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE:[d] Est autem & angulus BCE, eiusdē anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt;[e] Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis.[f] Quoniā autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistētes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD;[g] Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD.[h] Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelā esse opposito lateri: hoc est, BD, parallelam esse lateri AE, et CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum,[i] *Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales; erunt etiā A, & AEC, duobus rectis æquales:*[k] *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositū.*

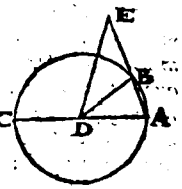
THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

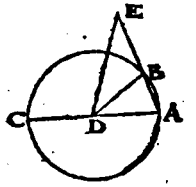
SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, cõponantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectũ addatur BE æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidẽ circulo inscripti. Dico EA, rectã sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusq; segmentũ esse EB, latus hexagoni. Ducatur. n. ex A, per centrũ D, diameter AC, coniungantur q; rectæ DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius periphæriæ circuli; continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies; Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. [a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni; (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) erũt & anguli BDE, BED, æquales: [b] quibus cum æqualis sit externus ABD; [c] erit angulus ABD, duplus anguli BED: [d] Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erunt anguli BED. [e] Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC; erit angulus BDC, quadruplus eiusdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint



[a] 33. sexti.
[b] 5. primi
[c] 32. primi
[d] 5. primi
[e] 32. primi

duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD; [a] erũt trian gula *ADE*, ABD, æquiangula. [b] Igitur erit vt *EA*, ad *AD*, hoc eſt, ad EB, ipſi AD, æqua lem, ita AD, hoc eſt, EB, ſibi æqua lis ad BA; Atq; idcirco recta EA, ſecta eſt in B, extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum EB, latus hexagoni. Itaque ſi hexa goni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componan-



tur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum,

a 32. primi. 4. ſexti.

SCHOLIVM.

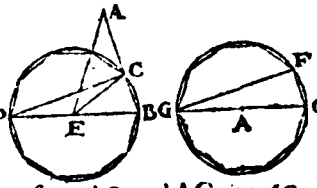
QVIA vero demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius lib. ſi minus ſegmentum linea diuiſa extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur; maius ſegmentum ſecari quoque extrema et media ratione, eiuſque ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile cum Campano demonſtrabimus. Videlicet.

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione ſitque,

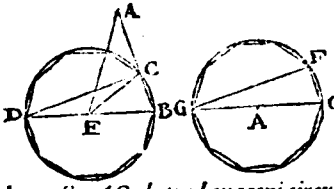
ſitque primũ AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Dico minus segmentum* CB, *eſſe eiuſdẽ circuli latus decagoni. Coaptetur enim* BC, *in circulo, ita vt* CA, *extra circulũ cadat. Et ducta ex* B, *per centrum* E, *diametro* BED, *connectantur rectæ* EA, EC. *Quia ergo eſt, vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB; *& eſt* AC, *latus hexagoni æquale ſemidiametro* EB, *ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoque vt* AB, *ad* BE, *ita* EB, *ad* BC, [a] *ideoque triangula* ABE, EBC, *æquiangula erunt, cũ habeant latera circa communem angulum* B, *proportionalia; eritque angulus* A, *angulo* BEC, *æqualis. Rurſus quia latera* CA, CE, *æqualia ſunt, nempe latera hexagoni;* [b] *erunt anguli* CAE, CEA, *æquales;* [c] *quibus cum æqualis ſit externus* BCE, *erit* BCE, *duplus anguli* A: [d] *Eſt autem angulo* BCE, *angulus* CBE, *ob æqualitatem laterum* EB, EC, *æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli* A; *Ac proinde duo anguli* BCE, CBE, *ſimul quadrupli erunt eiuſdẽ anguli* A. [e] *Cum ergo angulis* BCE, CBE, *æqualis ſit externus* CED; *erit quoque angulus* CED, *eiuſdem anguli* A, *& propterea anguli* BEC, *qui æqualis oſtenſus eſt angulo* A, *quadruplus.* [f] *Quare & arcus* CD, *quadruplus erit arcus* BC; *Ac proinde arcus ſemicirculi* BCD, *eiuſdem arcus* BC, *quintuplus exiſtet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus* BC. *Quapropter recta* BC, *latus eſt decagoni.*



SIT deinde CB, *minus ſegmentum, latus decagoni circuli* BCD. *Dico maius ſegmentum* AC, *eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus* BC, *in circulo* BCD, *ducaturque diameter* BED. *Deindè interuallo* AC, *deſcribatur circulus* CFG, *cuius diameter* CAG; *eritq; ex coroll. propoſ. 14. lib. 4.* AC, *latus hexagoni circuli* CF. *Quoniã igitur* AB, *ſecta eſt in* C, *extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum* AC, *latus hexagoni circuli* CFG; *erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum* CB, *latus decagoni eiuſdem circuli* CFG. *Deſcribatur ergo in circulo* CFG, *decagonum æquilaterũ & æquiangulum* CFG; *Item in circulo* BCD,

[a] 6. ſexti.
[b] 5. primi.
[c] 32. primi.
[d] 5. primi.
[e] 32. primi.
[f] 33. ſexti.

decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; *eruntque latera* BC, CF, *inter ſe æqualia. Quoniam vero, ſi connectantur rectæ* CD, FG, *anguli* CDB, FGC, *ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtendimus, quod inſiſtant arcubus ſimilibus* BC, CF, *nempe decimis partibus peripheriarum; &*
a 31. tertij. *ſunt quoque anguli* BCD, CFG, *in ſemicirculis æquales,* a *ni*
b 26. primi. *mirum recti:* b *Erunt quoque latera* BD, CG, *inter ſe æqualia. Quam ob rem cũ iametri* BD, CG, *ſint æquales, æquales quoque erunt circuli* BCD, CFG. *Ac proinde, cũ recta* AC, *ſit latus hexagoni circuli* CFG, *erit quoq; eadem recta* AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Quod eſt propoſitum.*



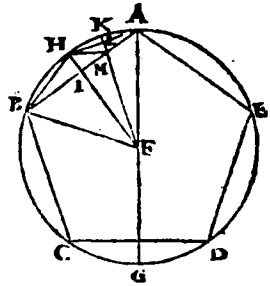
10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterũ deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, deſcriptum ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vna cũ quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur.n.diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, ſecans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, ſecans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Qm̃ igitur arcus AH, BH, æquales ſunt, c erũt & anguli ipſis inſiſtentes AFH, BFH, æquales. Quare
c 27. tertij.

cum

cum latera *AF*, *FI*, trianguli *AFI*, æqualia ſint lateribus *BF*, *FI*, trianguli *BFI*, & anguli ipſis contenti æquales quoque; [a] erunt & baſes *AI*, *BI*, æquales, & anguli *AIF*, *BIF*, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ *AL*, *HL*, & anguli *ALF*, *HLF*, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualibus *ABCG*, *AEDG*, demantur æquales arcus *ABC*, *AED*; relinquentur arcus *CG*, *DG*, inter ſeſe æquales, ideoq; erit arcus *CG*, dimidium arcus *CD*. Eſt autem & arcus *AH*, dimidium dimidium arcus *AB*. Igitur cum arcus *AB*, *CD*, æquales ſint; erunt quoque eorum dimidij arcus *CG*, *AH*, æquales; Ac proinde cum arcus *AH*, duplus ſit arcus *HK*, erit & arcus *CG*, duplus eiuſdem arcus *HK*. Eodem modo, quia arcus *AB*, *BC*, æquales ſunt, & eſt arcus *AB*, duplus arcus *BH*, erit etiam arcus *BC*, eiuſdem arcus *BH*, duplus. Quare arcus *CG*, *BC*, æquemultiplices ſunt, nempe dupli, arcuum *HK*, *BH*; [b] Ac propterea totus arcus *BG*, duplus quoq; erit totius arcus *BK*; [c] & idcirco angulus quoque *BFG*, duplus anguli *BFK*: Sed quia idem angulus *BFG*, ad centrum duplus eſt quoque anguli *FAB*; erunt idcirco anguli *BFM*, *FAB*, æquales; Ac propterea triangula *ABF*, *FBM*, cum habeant angulos *FAB*, *MFB*, æquales, & angulum *ABF*, communem, æquiangula erunt. [f] Quocirca erit vt *AB*, ad *BF*, ita *BF*, ad *BM*; [g] ideoque rectangulum ſub *AB*, *BM*, æquale erit quadrato rectæ *BF*.



RVRSVS quia latera *AL*, *LM*, trianguli *ALM*, æqualia ſunt lateribus *HL*, *LM*, triãguli *HLM*, & anguli quoq; ipſis contenti æquales, nẽpe recti: [h] erunt & baſes *AM*, *HM*, & anguli *LAM*, *LHM*, æquales: [i] Eſt autẽ angulus *LAM*, angulo *HBA*, æqualis, quod & latera *HA*, *HB*, æqualia ſint. Igitur & angulus *LHM*, eidem angu

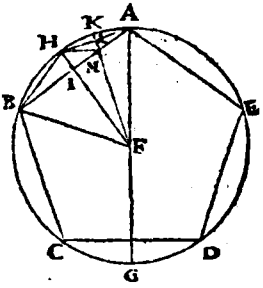
[a] 4. primi.

[b] 1. quin.
[c] 33. ſexti
[d] 20. tertij.
[e] 32. primi
[f] 4. ſexti
[g] 17. ſexti

[h] 4. primi.
[i] 5. primi.

[a] 32. primi

lo HBA, æqualis erit; [a] Ac propterea triangula A B H, A H M, cum habeant angulos A B H, A H M, æquales, & angulum H A M, commune m, æquiangula erũt.



[b] 4. sexti.

[c] 17. sexti.

[b] Quam obrẽ erit vt A B, ad A H, ita A H, ad A M; [c] ideoque rectãgulum sub A B, A M, æquale erit quadrato rectæ A H: Ostẽsum est autem & rectangulum sub A B, B M, æquale quadrato rectæ B F. Igitur rectangula sub A B, B M, & sub A B, A M, simul æqualia sunt quadratis rectarũ B F, A H: [d] At vero rectangula sub A B, B M, & sub A B, A M, æqualia sunt quadrato rectæ A B. Quadratum ergo rectæ A B, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum B F, A H, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.

[d] 2. secun.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam. qua ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam F H, propterea quod arcum A B, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam A B, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

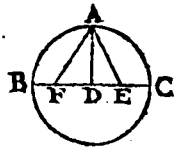
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pẽtagoni ductam diuidere & arcũ, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtẽdit; & la-

& latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos. Demonſtratum enim eſt, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppoſitum CD, ſubtendit, bifariam. Quare ex prafato coroll. cum tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterũ deſcribitur, eiuſque demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc a nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuiſa ſemidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abſcindatur EF, adiungaturque recta AF. Dico rectam AF, eſſe latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim



CD, ſecta ſit bifariam in E, eique addita DF; a erit rectangulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoq; quadrato rectæ EA, quæ ipſi EF, eſt æqualis. b Eſt autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectãgulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadratis rectarum AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquatur rectangulum ſub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc eſt, quadrato rectæ CD. c Quamobrem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF; propterea que recta CF, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius ſegmentum CD, ſit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmentum DF, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib. d Rurſus

a 6. ſecundi

b 47. primi

c 17. ſexti

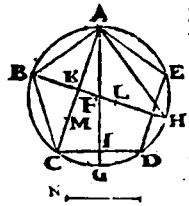
d 10. tertiædecimi

ſus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, *vna cum quadrato lateris decagoni* DF, *æquale eſt quadratum lateris*
47. primi *pentagoni eiuſdem circuli;* *Eſt autem eiſdem quadratis rectarum* AD, DF, *æquale quadratum rectæ* AF; *erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ* AF; *ac propterea recta* AF, *lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitū.*

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem, deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, eſſe lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, ſecetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, ſecet diametrum BH, in K. Abſcindatur quoque ex ſemidiametro FH, quarta eius pars FL; Item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoq; FL, BF, illi commenſurabiles, cum ſint eius partes aliquotæ, Rationales. Atque idcirco & tota BL, compoſita,
16. deci. cum ſit commenſurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit.



RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta ſecat AC, bifariam in B; ſecabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2 eiuſdem propoſ. Triangula ergo ACI, AFK, cū habeant angulos AIC,
32. primi AKF, rectos, & angulum CAI, communē, æquiāgula

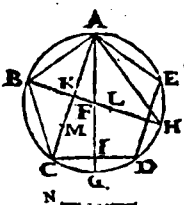
inter

inter se erunt. [a] Quam obrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA. [b] Vt autem CA, ad AF, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc est, vt CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad, FL; Atque componendo, vt CD, CK, simul ad CK, ita FK, FL, simul, nimirum recta KL, ad FL; [c] Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratū rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia vero si AC, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD,) [d] maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD; Erit quadratum rectæ compositę ex CD, maiori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL; Ideoque quadratum rectæ KL, commensurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

[a] 4. sexti.
[b] 15. quin.
[c] 22. sexti
[d] 8. tertij de cimi.
[e] 1. tertij de cimi
[f] 6. decimi

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL; erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. est quadratū rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. [g] habent enim quadrata proportionē laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. est quadratū rectæ FL, taliū 5. ostensum est quadratū rectæ KL. Qualiū igitur 25. est quadratū rectæ BL, talium 5. est quadratū rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [h] Erunt rectæ BL, KL, longitudine incōmensurabiles; ideoq, cū ostensæ sint Rationales, erunt Rōnales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rōnali BL,

[g] 20. sexti
[h] 9. deci.



BL, dematur Rationalis KL, potẽtia tantum commensurabilis; [a] erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congrues erit KL.

[a] 74. deci.

IAM vero recta BL, posit plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ BL, æquale est quadratis rectarum KL, & N; Qualiũ autem partiũ 5. fuit quadratũ rectæ BL, taliũ 1. fuit quadratũ rectæ KL; Erit reliquum quadratũ rectę N, talium partium 4. qualium 5. est quadratũ rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ habebunt, quam numerus ad numerum. [b] Quare commẽ surabilia erunt; propterea quæ rectæ ipsæ BL, & N, commensurabiles, saltem potentia: Est autem BL, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quę 5. ad 4.) [c] Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis, longitudine sit commẽsurabilis Rationali BH; (Qualium enim partium 8. est BH, talium 5. est BL,) posit que plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

[b] 6. decimi

[c] 9. decimi

POSTREMO quia recta AB, est media proportionalis inter BH, BK, ex coroll. propos. 8. lib. 6.) quod triangulum ABH, [d] habeat angulum BAH, rectum, a quo ducta est AK, ad basin perpendicularis; [e] erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo sub BH, BK. Quocirca cum superficiem cõtentam sub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, posit recta linea AB, [f] Erit AB, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c Quod erat demonstrandum.

[d] 31. tertij. [e] 17. sexti

[f] 93. deci.

8. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum

rum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. *Dico* quadratum lateris *A* B, triplum eſſe quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ ſecet, ex coroll. 2. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam B C, bifariã quoque & ad angulos rectos in puncto *F*; cum arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres ſextas partes totius circuli; arcus vero AB, cum ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus *BE*, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta *BE*, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro DE, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale eſt quadratis rectarum A*B*, *BE*, [b] quod angulus A *BE*, in ſemicirculo rectus ſit; Eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ *BE*, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla ſit lineæ BE; erunt quadrata rectarum A*B*, *BE*, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ *B* E; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum A*B*, *BE*, talium partium 1. erit quadratum rectæ *BE*; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A *B*. Quare quadratum rectæ A*B*, triplum eſt quadrati rectæ *BE*, quæ æqualis eſt ſemidiametro. *Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur*, &c. Quod erat oſtendendum.

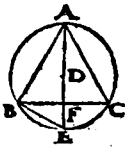


[a] *47. primi*

[b] *31. tertij.*

SE-

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli equilateri in eo circulo descripti. Nam cum latus AB, ostensum sit potentia triplum semidiametri AD; posito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum est quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propos. 8. lib. 6. vt est AE, ad AB, ita se habet AB, ad AF; erit quoque latus triãguli equilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad basim demissa potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib. 14. propos. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi potest, semidiametrum DE, bifariam secari in F, a latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BE; si ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. Est autem quadratum rectæ BE, æquale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF, FE. Est autem talium partium 3. quadratum rectæ BF, (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE. hoc est, quadra-

* 47. primi

quadratum rectæ DE, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Cum igitur, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. idem quadratum rectæ DE, quadruplum ſit quadrati dimidiæ lineæ ipſius DE; erit FE, dimidia ipſius DE. Quocirca DE, bifariam ſecatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſsim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito.

IN circulo ABC, *cuius centrum* D, *triangulum æquilaterum inſcribatur* ABC. *Dico rectam* AE, *per centrum* D, *ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum* BAC, *& latus* BC, *necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoque* DE, *ſecari a latere* BC, *bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis* BD, CD, BE; *cũ latera* AB, AD, *æqualia ſint lateribus* AC, AD, *trianguli* CAD, *& baſes* BD, CD, *æquales quoq; : Erunt anguli* BAD, CAD, *æquales. Quod eſt primum.*



[a] 8. primi

DEINDE, *cum latera* AB, AF, *trianguli* BAF, *æqualia ſint lateribus* AC, AF, *trianguli* CAF, *& anguli ipſis contenti æquales oſtenſi: Erunt & baſes* BF, CF, *& anguli ad* F, *æquales, ideoque recti. Quod eſt ſecundum.*

[b] 4. primi

POSTREMO, *cum anguli* BAE, CAE, *demonſtrati ſint eſſe æquales;* [c] *erunt & arcus* BE, CE, *æquales. Quare cum* BEC, *arcus ſit tertia pars circumferentiæ, erit* BE, *ſexta*

[c] 28. tertij

pars

pars eiusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque semidiametro proinde BD, aequalis, ex coroll. prop. 15. lib. 4. [a] *Igitur anguli BDE, BED, aequales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, aequales sunt angulis BEF, DFE, trianguli EBF, & latus BF, commune;* [b] *Erunt & latera DF, EF, aequalia.*

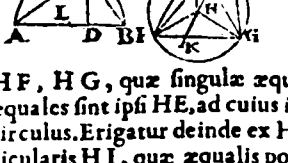
[a] 5. primi

[b] 26. primi

13. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT datę sphæræ diameter *AB*, circa quá semicirculus describatur ABC; & ex *AB*, auferatur tertia pars BD, vt sit AD, ipsius D*B*, dupla; at vero A*B*, eiusdem DB, tripla; & ipsius AD, sesquialtera. Deinde ducta *DC*, perpendiculari ad AB, cúnectantur rectę AC, BC. Ad interuallum rectæ H*E*, quæ æqualis sit ipsi DC, describatur circulus *EFG*, cuius centrũ H, in quo triangulũ æquilaterum inscribatur EFG, adiũganturq; rectæ HF, HG, quæ singulæ æquales erunt ipsi DC, cum æquales sint ipsi HE, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex *I*, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico solidum contentum quatuor triangulis FEC, IEF, *IFG*, IEG, esse Pyramidẽ, siue Tetraedrum. Quoniam.n. latera *DA*, DC, trianguli A*D*C, æqualia sunt lateribus HI, HE, trianguli IH*E*, & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 11. erit basis *AC*, basi IE, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam AC, æqualem esse rectis IF, IG. Rursus quia tres lineæ A D, D C, D *B*, proportionales sunt

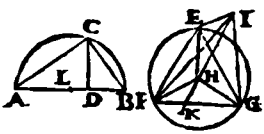


4. primi

sunt ex coroll. propos. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt AD, ad DB, ita quadratum rectæ A D, ad quadratum rectæ D C; & componendo, vt AB, ad DB, ita quadrata rectarum AD, DC, simul ad quadratum rectæ DC: Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectę AB. Igitur erit quoque vt AB. ad DB, ita quadratum rectæ A C, ad quadratũ rectæ DC; Ac proinde cum AB, sit ipsius D B, tripla, erit quoque quadratum rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis sit ipsi DC: Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque est eiusdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ EF, æquale erit; & propterea recta AC, rectæ EF. Quare cum recta AC, ostensa quoque sit æqualis rectis IE, IF, IG; erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter se. Constituta igitur iam est pyramis, seu Tetraedrum, cuius basis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi sphæra data, cuius diameter A B; & diametrum sphæræ A B, potentia sesquialteram esse lateris EF, vel AC.

[a] 47. primi

[b] 12. tertij dec.



EXTENDATVR perpendicularis IH, vsque ad K, vt sit HK, ipsi DB, & tota IK, toti AB, æqualis. Quia ergo tres rectæ AD, DC, DB, proportionales sunt, quibus æquales existunt tres IH, HE, HK; erunt quoque IH, HE, HK, proportionales. Quare cũ HE, sit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK, semicirculus circa IK, descriptus in plano rectarum IK, HE, transibit per E, vt mox ostendetur; Eodemque argumento tam semicirculus circa eandem rectam IK, descriptus in plano rectarum IK, HF, transibit per F, quam semicirculus circa eandem IK, descriptus in plano rectarum IK, HG, per G. Igitur quilibet horum semicirculorum circumductus, manente fixa diametro, sphæram describet, quæ constitutum Tetraedrum complectitur, cũ per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc sphęra descripta æqualis sit sphæræ datæ, quod diameter

meter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehende tur idem Tetraedrum ſphæra data.

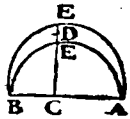
QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, taliũ 2. ſit AD. Igitur & quadratũ rectę AB, ſeſquialterum erit quadrati rectę AC; Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphęrę, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis; perſpicuũ eſt, diametrũ ſphęrę potẽtia ſeſquialterá eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo cõſtituimus, & data ſphęra cõplexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis duca tur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmen ta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectã deſcriptus tranſibit per extremum punctum li neæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter ſe æqualia, &*



a 17. ſexti

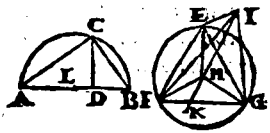
ipſa

ipsæ rectæ C D, C E, æquales erunt, pars & totum. Quod est absurdũ. Transibit ergo semicirculus per D.

HINC manifestum est, semicirculum in superiori figura descriptum circa I K, in plano rectarum I K, HE, transire per E, cum HE, sit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, MK.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum sphæræ esse potentia quadruplam sesquialteram semidiametri circuli circa basim pyramidis descripti. Cum enim diameter sphæræ AB, ostensa sit potentia sesquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualiũ 9. est quadratum rectæ AB: At qualium partiũ 6. est quadratum rectæ EF, taliũ partium 2. est quadratum rectæ H E,



quod quadratum rectæ EF, triplum sit quadrati rectæ H E. Qualium igitur partium 9. est quadratum rectæ A B, talium partium 2. erit quadratum rectæ HE; Ac propterea diameter sphæræ AB, potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri H E, cum proportio quadratorum sit, quæ 9. ad 2. [a] 12. terti decimi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro sphæræ ad planum basis pyramidis demissa, sexta pars erit diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. Sit enim L, centrum semicirculi ACB, eritque L, centrum quoq; sphæræ. Dico rectã L D, (quæ nimirũ ex centro sphæræ ad basin E F G, ducitur perpendicularis; cum AD, æqualis sit ipsi I H, & ideo punctum D,

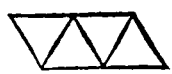
idem quod H, quemadmodum & L, idem est, quod centrum sphæræ) esse sextam partem diametri sphæræ, nempe rectæ AB, & tertiã partẽ semidiametri AL. Quoniã.n. AD, dupla est ipsius DB; Qualium partium 4. est AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & semidiameter AL, talium 3. Quare si AD, est 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, sexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipsius diametri. Est enim HI, eãdem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex constructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nã proportio 9. ad 4. est duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

QVOD si ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter se complicatis componetur Tetraedrum, secundum totã soliditatem. Hanc vero præsim, & sequẽtes quatuor, quibus reliqua quatuor solida regularia in materia quauis sensibili conficiuntur, desumpsimus ex Alberto Durero non ignobili scriptore.

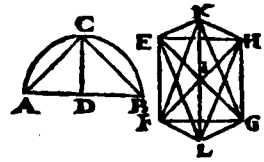


15. ## PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM constituere, & sphęra complecti, qua & pyramidem; & demon-

demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

SIT ſphæræ, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque rectæ AC, BC, [a] quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratũ EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, ſe mutuo ſecantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. lib. demonſtratũ eſt. Deinde ex I, in vtramq; partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipſi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, eſſe octaedrum, quod queritur. Quoniã. n. latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti, rectis; ipſe quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod ſit æqualis angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & baſium EH, GH.) [c] Erit & baſis EK, baſi EH, æqualis; Eodemq; modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula eſſe æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFGH, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphæra diametri AB, quanimirum & pyramis cõſtructa comprehenditur; & diametrum ſphæræ AB, potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.



[a] 4. primi

[b] 8. primi

[c] 4. primi

QVONIAM.n.IE,perpẽdicularis eſt ad KL,ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL;(quod tres rectę KI, IE, IL, æquales ſint, ideoque eandem habeãt proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL,IE, deſcriptus tranſibit per punctum E,ex lemmate præcedentis propoſ. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa candem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G,H.Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, deſcribet ſphęram,quę complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hęc ſphæra æqualis ſit datæ ſphærę, cuius diameter AB;(Nam cum rectæ AC, EF,æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC,duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ EF,quadrati rectę EI;Erunt & rectæ AD, EI,hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde ſphærę ipſarum æquales exiſtent.) comprehendetur idem octaedrum data ſphęra.

[a] 47. primi

QVIA vero quadratum rectæ AB,[a] æquale eſt quadratis rectarũ AC,BC,quæ æqualia ſunt; erit quadratũ rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cũ AB, ſit diameter ſphærę, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphęrę potentia duplam eſſe lateris octaedri. Itaque octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

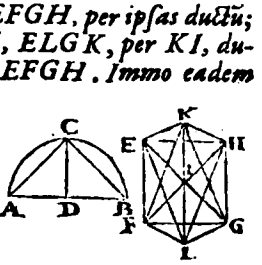
COROLLARIVM I.

EX dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphęrę: quales ſunt KL, EG, FH, ſecãtes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum KI, recta ſit ad lineas EG, HF;[b] *re-*

[b] 4. vndec.

cta

cta quoque erit ad planum EFGH, per ipſas ductũ; [a] Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt; Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera, ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, vt oſtendimus,) quadratum diametri HF, æquale exiſtit quadratis laterũ octaedri FK, KH. [b] Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus ſit. Eademque eſt ratio de cæteris angulis.



[a] 18. vnde.

[b] 48. primi

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, ſemidiametri IK, IL: cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, vt conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertiũ

lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. [a] Quoniam igitur diameter sphæræ est potẽtia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ. [b] Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partiũ 3. qualiũ 6. est quadratũ diametri sphæræ. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.

[a] 13. tertij decimi

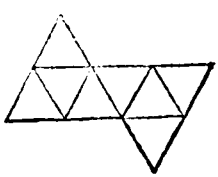
[b] 14. tertij decimi

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: [c] Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

[c] 15. vnde.

SCHOLIVM.



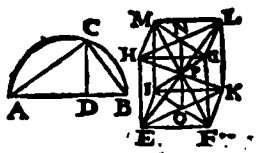
QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totam soliditatem, vt ait Albertus Durerus.

CVBVM

PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

CVBVM conſtituere; & ſphæra cõ plecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quã ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, cõnectantur rectæ AC, BC. Super rectã EF, quæ rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipſi BC, quarum extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planũ EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ EI, FK, parallelæ: [a] 6. vnde. Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis poſita ſit ipſi BC, hoc eſt, ipſi EF. [b] Igitur & EF, IK, parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammũ eſt EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: [c] Sũt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales ſint oppoſitis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, [d] cũ ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. [d] 24. vnde. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quod eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphæra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM,



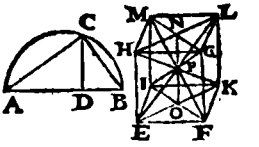
[b] 33. primi

[c] 34. primi

[e] 15. vnde.

GM, *H* L, per quæ ducantur plana E *K* L H, F I M G.

[a] *28. vnde.*



[a] Quia igitur tam planum E*K*L H, quam F I M G, cubũ bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi trãſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdẽ propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana E*K*L H, F I M G, re ctãgula ſunt, (Cũ.n. HE, perpẽdicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata E*M*, E*K*; [b] perpẽdicularis quoq; erit ad planũ E*K*, ideoq; & ad rectã E*K*, ex defi. 3. lib. 11. Re ctus ergo angulus eſt H E K. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano E*K*L H, necnon & anguli in pla no F I M G. Rectangula ergo ſunt plana E K L*H*, F I*M*G,) & æqualia, quod latera vnius æqualia ſint lateribus alte rius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æ- quales, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 34. lib. 1. *Ac* proin de & ſemidiametri *PE*, P*L*, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æ- quales erunt. Quare ſemicirculus circa E L, ex centro P, deſcriptus, & circumductus, fixa manente diametro E*L*, ſphærã deſcribet per omnes cubi angulos tranſeun tem; quam quidem æqualem eſſe ſphęrę diametri AB, ita demonſtrabitur.

[b] *4. vnde.*

[c] *47. primi*

[d] *47. primi*

[c] CVM quadratũ rectæ EK, æquale ſit quadratis æquali bus rectarũ æqualiũ E F, FK, ac proinde duplũ quadrati re ctę EF, hoc eſt, quadrati rectæ *K*L: Erũt quadrata rectã- rum E K, K L, tripla quadrati rectæ K L: [d] Eſt autem quadratis rectarum E*K*, K L, æquale quadratum rectæ EL, qđ angulus EKL, ſit rectus in rectangulo E K LH. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum erit quadrati rectæ K*L*, hoc eſt, quadrati rectæ BC: At vero eiuſdem quadrati rectæ *BC*, triplum eſt quadratum rectæ A B. (Nam tres rectæ *A*B, B C, BD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt eſt AB, ad B*D*, ita erit quadratũ rectæ *A* B, ad qua-

ad quadratum rectæ BC. Cum ergo *A* B, ipſius B D, ſit tripla; erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ B*C*, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia ſunt; ac propterea ipſæ rectæ EL, *AB*, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarũ ſphæræ æquales exiſtunt.

QVIA vero oſtenſum eſt quadratum diametri EL, triplum eſſe quadrati lateris cubi KL; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeque mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione oſtendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales ſunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis eſt alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ ſunt, cum ſint communes ſectiones planorũ parallelorum EFKI, GHML; c & angulus OPF, æqualis eſt oppoſito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erũt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.

a *29. primi*
b *16. vndec.*
c *15. primi*

CO-

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. [a] *Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris tetraedri:* [b] *Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrũ ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt AC, cubi vero BC.* [c] *Perſpicuum autem eſt, diametrũ ſphæræ AB, poſſe & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, ſit rectus.*

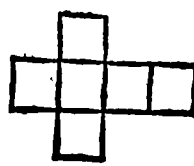
[a] 13. tertij dec.

[b] 15. tertij dec.

[c] 47 primi

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hac figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cuiuſpiam, vt conſtat.



16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras;

guras: & demonſtrare, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras cõprehẽdit, diameter AB, circa quã ſemicirculus deſcribatur ACB: Et ex AB, abſcindatur quinta pars BD, vt AB, ipſius BD, ſit quintupla: & ipſius AD, ſeſquiquarta; At vero AD, ipſius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipſi BC, ſit æqualis, circulus deſcribatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inſcribatur FGHIK. Poſt hæc diuiſis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, cõnectantur rectę FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex cẽtro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quę æquales ponantur ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. Eruntq; omnes inter ſe æquales; [b] ſed & parallelæ ſunt. Igitur rectæ, quæ illas cõiungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confuſionem, non duximus.); binæ inter ſe æquales erunt: Ac proinde cum æquales ſint EL, EM, &c, ſemidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter ſe, & ſemidiametro EF, ſeu rectę BC. [d] Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum eſt plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademq; ratione planum p rectas QS, QT, ductum parallelum eſt plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quę ad propoſ. 16. lib. 11. oſtendimus. Non aliter oſtendemus planũ per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineę QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde ſi ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus deſcribatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, tranſibit, eritque

[a] 11. quar.

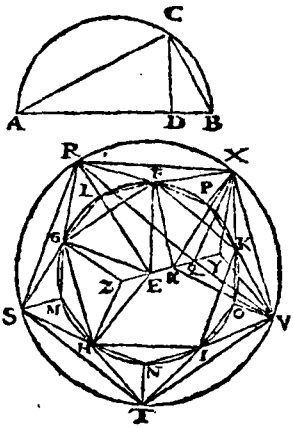
[b] 6. vndec.

[c] 33. primi.

[d] 15. vndec.

æqualis

æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R,S, T, V,X,rectis RS,ST,TV,VX,XR.[a] Quia igitur L R, PX, æquales ſunt,& parallelæ; ſi concipiatur duci recta LP; [b] erunt quoque LP,RX, æquales & parallelæ;[c] Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP,quintam partem circuli FGHIK,nempe duas decimas partes *FL,FP*. Igitur & RX,quintam partem auferet circuli RSTVX. Simili prſus argumento concludemus, reliquas rectas RS.ST, TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pẽtagonum æquilaterũ eſt RSTVX, omnia latera æqualia habẽs lateribus pẽtagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pẽtagoni FGHIK, rectæ R F, *RG*, SG, SH, TH, TI, VI, V*K*, X*K*, XF. Quia igitur perpendicularis *LR*, æqualis ponitur ſemidiametro EF, hoc eſt, lateri hexagoni circuli FGHI*K*; & eſt *L*F, latus decagoni;[d] erit quadratum lateris pẽtagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum *L*R, LF;[e] Eſt autem eiſdẽ quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus F*LR*, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ F R, æquale eſt quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR, lateri pẽtagoni *LP*, ſeu FG, hoc eſt, ipſi *RX*, æqualis erit. Eademq; rõne erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriuſq; pentagoni æquales; Ac propterea decem triãgula RFX, RFG, RGS, S*GH*, SHT, T*HI*, TIV, VI*K* VK*X*, X*K*F, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia; cum eorum omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri



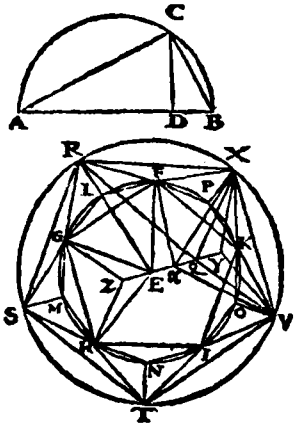
[a] 6. vndec.
[b] 33. primi
[c] 28. tertij.
[d] 10. tertij decc.
[e] 47. primi

lateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramq; partē extendatur, sintq; rectæ QY, EZ, æquales singulæ, lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Quoniam ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; erit quadratū lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarū QX, QY; Est autē eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiamet, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus,) quę omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariā in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QY, QX, sint semidiametri circuli RST, VX;

a 10 tertij decr.
b 47. primi.

VX: Sunt autem & anguli αQV, αQX, æquales, nempe re
[a] 4. primi. cti, ex defin. 3. lib. 11. [a] Erunt & baſes αV, αX, æquales. Eademque ratione, ſi ducãtur rectę ex α, Q, ad R, S, T, oſtendentur rectę αR, αS, αT, æquales & inter ſe, & ipſis αV, αX. Rurſus quia latera αQ, QX, trianguli αQX, æqualia ſunt lateribus α E, EF, trianguli αEF, cum QX, EF, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuiſa ſit bifariam in α: Sunt autem & anguli αQX, αEF, æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11.



[b] 4. primi. [b] Erunt quoque baſes αX, αF, æquales: eodemq; modo ſi ex α, E, ad G, H, I, K, rectę ducnatur, oſtendentur αG, αH, αI, αK, æquales ipſi αX; Ac proinde decem lineę ductę ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiuſdẽ circuli; [c] erit QZ, diuiſa in E, extremã ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens Eα, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt, recta αZ, [d] quintuplum poteſt eius, quod ex Eα, deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta αF, quintuplum eiuſdem quadrati rectę Eα. (Nam cum quadratum rectę EF, quadruplum ſit quadrati rectę αE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius Eα; erunt quadrata rectarum EF, Eα, ſemel quintupla quadrati rectę Eα. [e] Cum ergo quadratis rectarum EF, Eα, æquale ſit quadratum rectæ AF; erit quoq; quadratum

[c] 9. tertij dec.

[d] 3. tertij dec.

[e] 47. primi

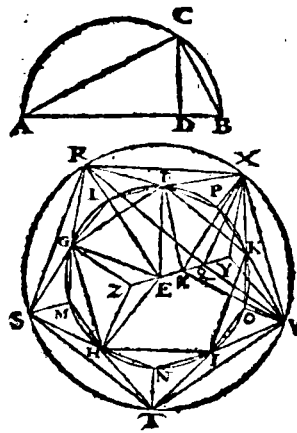
dratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zo, Yα, æquales fiant.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icosaedri constituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphęrę diametri AB.

a CVM.n. sit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipsius αZ, ad QE, duplam ipsius αE; Ac propterea vt quadratum rectę αZ, ad quadratum rectę αE, ita quadratũ rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratũ rectæ αZ, ostensum quintuplum quadrati rectæ αE: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectę BC: Est autem & ei usdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existẽte AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt. a 15. quin. b 32. sexti

QVONIAM denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendũ est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur.) pótq; quintuplũ quadrati rectæ BC, hoc est, rectę illi æqualis EF; erit quoque semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. c erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG, c 6. decim.

latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrum igitur cõſtituimus, & ſphæra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. quod erat facien.

COROLLARIVM I.



EX dictis infertur, ſphæræ diametrum eſſe potẽtia quintuplam ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutũ eſt, & qui quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum. n. eſt quadratum diametri AB, quintuplum eſſe quadrati rectæ BC, hoc eſt, ſemidiametri EF.

COROLLARIVM II.

ITEM manifeſtum eſt, ſphæræ diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli: Nam Υ Z, diameter ſphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QΥ, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

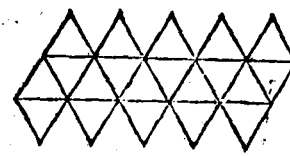
COROL-

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icoſaedri oppoſita, qualia ſunt RX, HI, eſſe parallela. Nam recta RX, oſtenſa eſt parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidē rectæ LP, ſit quoq; parallela recta HI, vt in ſcholio propoſ. 27. lib. 3. demonſtrauimus; (eo quod æquales ſunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perſpicuum eſt, rectas RX, HI, eſſe parallelas. Eademque eſt ratio de cæteris lateribus oppoſitis.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icoſaedrum ſecundum totam ſolidit atem, ſi rite inter ſeſe aptentur.

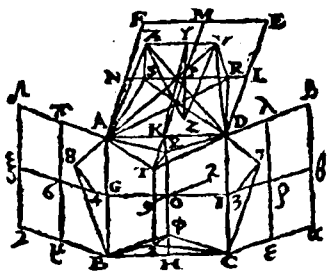


PROBL. 5. PROPOS. 17. 17.

DODECAEDRVM conſtituere; & ſphæra cõplecti, qua & prędictas figuras; & demõſtrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna baſis cubi data ſphæra comprehenſi, quadratũ *A*BCD, cui inſiſtat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt ſit cõmunis horum ſectio recta AD, (Inſi

ſunt enim omnes baſes cubi ſibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus conſtitueretur, rectæ ſunt ex angulis baſis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipſi baſi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere poteſt ex figura propoſitionis 15. huius lib. [a] Quare & baſes cubi per ipſas ductę, rectæ erunt ad eandem baſin EFGH.) Diuiſis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quę rectis cõnectantur ſecãtibus ſeſe in O, P, centris quadratorum, vt cõſtat ex demonſtratione octaui problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in pũctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales ſegmẽtis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, eſſe vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri conſtituendi. Quod enim pentagonum ATDVX, ſit in vno plano, ita oſtendetur. Cum RV, SX, ſint ad quadratum ADEF, rectę, [b] ipſę erunt parallelę; Ac proinde, cũ ſint æquales, (quia ſegmenta maiora PR, PS, quibus æquales ſunt poſitæ, æqualia ſunt, cum & lineæ ſectę PL, PN, æquales ſint.) [c] erunt quoque coniungentes rectę RS, VX, æquales & parallelę: [d] Eſt autem & AD, eidem RS, ſiue LN, parallela, eo quod AN, DL, parallelę ſunt & æquales. [e] Igitur & AD, VX, parallelę ſunt; [f] Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipſis erunt plano; ideoque trapezium ADVX, in vno exiſtet plano: Eſt autem & triangulum ATD, in vno plano. Dico quod & in eodẽ plano cum trapezio ADVX Ex P ducatur PY, parallela ipſi RV, quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta ſit RV: Et conectantur re-



a 18. vnde.
b 6. vndec.
c 33. primi.
d 33. primi.
e 9. vndec.
f 7. vndec.
g 8. vndec.

rectæ K T, K Y. Quũ igitur est vt O K, ad O Q, ita O Q, ad Q K, ob sectionem rectæ O K: Est autem K P, ipsi O K, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & P Y, ipsi O Q, (cum æqualis sit ipsi R V, quæ posita fuit æqualis ipsi O Q, maiori segmento;) Erit quoque vt K P, ad P Y, ita O Q, hoc est, Q T, illi æqualis, ad Q K. Quare cum triangula P K Y, Q T K, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum K, compositа, [a] ita vt homologa latera sint parallela, nempe P K, & Q T, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A B C D; & P Y, Q K, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A D E F: [b] Erunt reliqua latera K Y, K T, in rectam lineam collocata; [c] Ac propterea rectа T Y, in vno erit plano, ideoque planum A T D, & planum A D V X, vnum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno existit plano.

[a] 6. vndec.
[b] 32. sexti
[c] 1. vndec.

QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera A N, N S, trianguli A N S, æqualia sint lateribus A K, K Q, trianguli A K Q; (Sunt enim A N, A K, dimidia latera cubi, & N S, K Q, segmenta minora rectarum æqualium sectarũ.) & anguli A N S, A K Q, recti; si ducatur recta A Q, erunt bases A S, A Q, æquales. Rursus cum latera A S, S X, trianguli A S X, sint æqualia lateribus A Q, Q T, trianguli A Q T; (Nã rectæ A S, A Q, ostensæ sunt æquales, & S X, Q T, sunt segmenta maiora rectarum æqualium sectarum) & anguli A S X, A Q T, recti, ex defin. 3. lib. 11. [c] Erunt quoque bases A X, A T, æquales. Quod si ducatur recta D Q, ostendemus eodem argumento, rectam D T, rectæ A T; si vero ducatur recta D R, rectam D V, rectæ D T, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera X A, A T, T D, D V; æqualia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum V X, hac ratione. [f] Quadrata rectarum P N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ P S, hoc est, quadrati rectæ S X: Est autem quadrato rectæ P N, æquale quadratum rectæ A N. Igitur & quadrata rectarũ A N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ S X. [g] Cum ergo quadratis rectarũ A N, N S, æquale sit quadratum rectæ A S; erit quoque quadratum

[c] 4. primi.
[c] 4. primi.
[f] 4. tertiædecimi.
[g] 47. primi

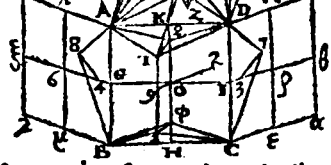
rectæ AS, triplum quadraxi rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarũ *A*S, SX, ſimul, quadrupla eiuſdẽ quadrati
[a] *47. primi.* rectæ SX. [a] Eſt autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ *A*X. Quadratũ ergo rectę AX, quadruplum quoque erit quadrati rectę SX, hoc eſt, quadra
[b] *34. primi* ti rectæ PS, hoc eſt, quadrati rectę XY; [b] Sunt enim rectæ P S, X Y, æquales. Cum igitur & quadratum rectę VX, quadruplum ſit eiuſdem quadrati rectę XY. ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod VX, dupla ſit ipſius XY; Erunt quadrata rectarũ AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipſę æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, oſtenſæ ſint eſſe æquales; æquilaterum eſt pẽtagonum ATDVX.

QVOD autem & æquiangulum ſit, ita perſpicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, ſecta ſit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori
[c] *5. tertij de.* ſegmento PS; [c] erit quoque N*R*, ſecta in P, extrema ac
[d] *4. tertij d.* media ratione, maiusque ſegmentum erit NP. [d] Quadrata igitur rectarum N*R*, R P, ſimul tripla ſunt quadrati rectę NP, hoc eſt, quadrati rectæ A N: Eſt autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla ſunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla
[e] *47. primi* ſunt eiuſdem quadrati rectæ A N. [e] Sunt autem quadrata rectarum N R, A N, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarũ RV, AR, quadrupla ſunt
[f] *47. primi* quadrati rectæ AN. [f] Cum ergo quadratis rectarũ *A*R, RV, æquale ſit quadratum rectæ A V; Erit quoque quadratum rectæ *A* V, eiuſdem quadrati rectę *A* N, quadruplum. At vero eiuſdem quadrati rectæ AN, quadruplum eſt quadratum rectæ AD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod A *D*, dupla ſit ipſius A N. *A*equalia igitur ſunt quadrata rectarum AV, AD, ideoq; & rectę AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis *D*S, DX, oſtendemus D X, *D* A, æquales eſſe; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter ſe eſſe æquales Quoniã igitur latera T*A*, TD, trianguli T A D, æqualia ſunt lateribus D V, VX, trianguli D XV; & baſes *A* D, DX, æquales quoque:
[g] *8. primi* [g] Erunt & anguli *A* TD, DVX, æquales. Non ſecus oſtendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV, Ac proinde,

cum

cũ in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeãtur anguli æquales ATD, DVX, AXV, ipſum erit æquangulũ. a 7. tertij do.

QVOD ſi ſumantur alia duo cubi quadrata CαβD, BγδA, recta ad quadratum ABCD, in communibus ſectionibus CD, AB, quorum ſingula latera bifariam ſecentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur ſe mutuo ſecantibus in quadratorũ centris ρ, σ. Secẽtur deinde OH, OK, ρI. σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q, 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educãtur ad partes cubi exteriores. perpendiculares φ2, QT, 37, 48, æquales ſegmentis maioribus φO, QO, 3ρ. 46, coniunganturq; rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonſtrabimus eadem ratione, pẽtagona T2C7D, T2B8A, æquilatera eſſe & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Conſtructa igitur iã ſunt tria pentagona tangẽtia cubi tria latera AD, DC, AB, & ſibi mutuo cohærẽtia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem ſimilia pentagona tãgentia reliqua nouem cubi latera; cõſtitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem ſphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ, hac arte demonſtrabimus.

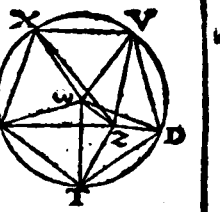


INTELLIGANTVR plana cubi oppoſita ſe cari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam ſecantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppoſitum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppoſitum, planis per rectas GI, HK, ductis. &c. Quoniã igitur plana ſecantia recta ſunt ad dicta plana cubi, qđ parallela ſint baſibus cubi, quæ rectæ ſunt ad plana ADEF, ABCD, b Erũt & cõmunes eorũ ſectiones ad eadẽ cubi plana rectæ. Quare cũ YP, recta ſit ad planũ ADEF, ipſa producta verſus Z, erit cõis ſectio b 19. undec.

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto ſi ex O, ad planum A B C D, erigatur perpendicularis
[a] 39. vnde. OZ; erit ipſa communis ſectio planorũ, quę per rectas GI, HK, ducuntur. [a] Quia vero dictæ communes ſectiones & diametri cubi ſe mutuo bifariam ſecant; ſecent ſe mutuo bifariam in Z: Secant autem ſeſe diametri cubi bifariam in centro ſphęræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propoſ. 13. huius lib Punctum igitur Z centrum erit ſphæræ circa cubum deſcriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter ſe æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoq; eſſe oẽs rectas ex Z. ad omnes angulos Dodecaedri ductas, ſic fiet perſpicuũ, ducta recta ZX. Quoniã parallelæ ſunt KP, OZ,
[b] 6. vnde. quod vtraq; recta ſit ad planũ ABCD; Itẽ parallelæ ſunt OK, ZP, quod vtraq; recta ſit ad planũ ADEF; erit PK-
[c] 34. primi OZ. (debent. n. duo puncta Z, intelligi eſſe cõiuncta) parallelogrãmum; ac ppea PZ, æqualis erit ipſi KO, hoc
[d] 4. tertij dec. eſt, ipſi NP, dimidio lateri cubi: Eſt autẽ & PY, ipſi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. [c] Quare cum quadrata rectarum NR, PR, ſimul tripla ſint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, ſecta ſit extrema & media ratione; erũt quoq; quadrata rectarum ZY, PY, hoc eſt, quadrata rectarum ZY, YX, ſimul tripla quadrati rectæ PZ: (Eſt. n. YX, æqualis ipſi PS, hoc eſt, ipſi PY:)
[e] 47. primi Eſt autẽ quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratũ rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc eſt, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiuſdem quadrati dimidij lateris cubi triplum eſt quoq; quadratũ ſemidiametri ſphæræ cubũ comprehen
[f] 15. primi dẽtis. (f Nã vt diameter ad latus cubi, ita eſt ſemidiame
[g] 22. ſexti. ter ad dimidiũ lateris; g Ac proinde vt quadratũ diametri ad quadratũ lateris, ita quadratum ſemidiametri ad
[h] 15. tertij dec. quadratũ dimidij lateris. h Cũ ergo quadratũ diametri triplũ ſit quadrati lateris, erit quoq; quadratũ ſemidiametri triplũ quadrati dimidij lateris.) Aequale igit eſt quadratũ rectæ ZX, quadrato ſemidiametri ſphrę, ſeu cubi; Ac ppea ZX, æqualis ſemidiametro. Eadẽ rõne erit ducta recta ZV, ſemidiametro æqualis. Vel certe qa cũ latera ZY, YX, triãguli ZYX, æqualia ſint lateribus ZY,

YV,

YV, trianguli ZYV, & anguli cõtenti recti. (cũ enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelã VX, perpẽdicularis.) Erunt bases ZX, ZV, æquales: Sunt aũt & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictũ est. Sunt ergo iã quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphæræ ad quatuor angulos pentagonii A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpendicularis demittatur Z ω, connectanturque rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. [b] Quoniam igitur quadratũ rectæ ZA, æquale est quadratis rectarum Zω, ωA; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Zω, ωX: Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quod rectæ ZA, ZX, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarũ Zω, ωA, quadratis rectarũ Zω, ωX, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectæ Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarũ ωA, ωX, ideoq; rectæ ipsæ ωA, ωX, æquales erunt. Non aliter ostendentur rectæ ωV, ωD, & inter se, & ipsis ω A, ωX, æquales, quod & rectæ ZV, ZD, æquales sint ostensæ rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectæ lineæ æquales, quam duæ, [c] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarũ Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT. [d] Cũ ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his vero quadratũ rectæ ZT; Erũt æqualia quadrata rectarũ ZA, ZT; ppeaq; & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



POSTREMO cum sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: erit

[a] 4. primi.

[b] 47. primi

[c] 9. tertij

[d] 47. primi

erit quoque vt NL, dupla ipſius NP, ad RS, duplam ipſius PS, ita RS, dupla ipſius PS, ad rectam compoſitam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipſius SN. Si igitur cubi latus NL, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum erit SR: Sed NL, tota ita ſecta, Rationalis eſt. (Nam eius quadratum commẽſurabile eſt quadrato diametri ſphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum ſit illud tertia pars huius.) [b] Igitur maius ſegmentum SR, hoc eſt, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis eſt linea, quæ uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & prædictas figuras; & demonſtrauimus, quòd Dodecaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ uocatur *Apotome*. Quod erat faciendum.

[a] 15. quin.

[b] 6. tertij d.

COROLLARIVM. I.

CVM ergo demonſtratum ſit; recta LN, extrema ac media ratione ſecta, maius ſegmentum eſſe rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perſpicuum eſt, ſi latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus Dodecaedri in eadẽ ſphæra deſcripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale eſt lineæ rectæ ſubtendenti angulum pẽtagoni Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Nam AD, latus cubi ſubtendit angulum T, pentagoni, eſtque oſtenſum æquale rectis AV, DX, ſubtendentibus angulos X, & V, eiuſdem pentagoni.

QVONIAM vero recta ſubtendens dictum angulum pentagoni ſecta extrema ac media ratione, [c] *facit maius ſegmentum latus pentagoni;* [d] *ac propterea recta compoſita ex dicta recta ſubtendente angulum pentagoni, hoc eſt, ex latere cubi, & ex maiori*

[c] 8. tertij decimi.

[d] 3. tertij de.

ſegmen-

ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri, ſimiliter diuiditur, facitque minus ſegmentum latus Dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Nam duo ex dictis lateribus ſunt V X, T 2, quæ videlicet parallela ſunt lateribus cubi E F, AB; aliaque quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cum parallela ſint cubi lateribus paralle lis & oppoſitis, ſecanturque, ex demonſtratis, bifariã & ad rectos angulos, a lineis rectis, quæ centra baſiũ cubi oppoſitarum coniungunt; quales ſunt rectæ ϒZ, 9Z, &c. quæ vt demonſtratum eſt, ſe mutuo interſecant in centro Z. Dico ſe mutuo ſecare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales ſint dimidio lateri cubi; et ϒP, 9O, æquales maioribus ſegmentis æqualibus PS, OQ; Erũt totæ ϒZ, 9Z, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad ſectiones oppoſitorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales ſunt, ſeque bifariam in centro Z, mutuo ſecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo K O Z P, angulus O Z P, rectus eſt, cum opponatur recto O K P. Non aliter oſtendentur reliquæ lineæ rectæ centra baſium coniungentes efficere angulos re-

Eos.

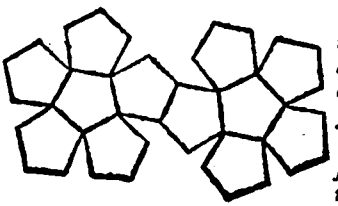
ctos. Omnes enim parallela ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos conſtituentibus, vt perſpicuum eſt.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE conſtat, ſi recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum eſt, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla oſtenſa ſint quadrati rectæ PZ; erit ZY, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmẽtum erit PZ, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; ideoque vt dupla ipſius ZY, nempe recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipſius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipſius ZP, ad duplam ipſius PY, hoc eſt, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ.

15. quin.

SCHOLIVM.



QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur duodecim pẽtagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, diſponãturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrũ ſecundum totam ſolidi-

tatem, ſi vtrò inter ſe complicentur.

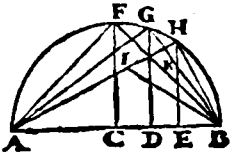
LATE-

PROBL. 6. PROPOS. 18.

18.

LATERA quinque figurarum exponere, & interſe comparare.

SIT ſphæræ diameter *AB*, quæ in *C*, ſecetur bifariam, In *D*, vero ita, vt *BD*, ſit ipſius pars tertia; In *E*, denique ita, vt *BE* ſit quinta pars eiuſdem. Deſcripto deinde circa *AB*, ſemicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex *C*, *D*, *E*, ipſi *AB*, perpendiculares *CF*, *DG*, *EH*; connectanturque rectæ *AF*, *BF*, *AG*, *BG*, *AH*, *BH*. Poſt hæc ex *HA*, abſcindatur *HI*, æqualis lateri Decagoni in eo circulo deſcripti, cuius ſemidiameter, ſeu latus Hexagoni eſt *BH*: connectaturque recta *BI*. Poſtremo *BG*, ſecetur extrema ac media ratione in *K*, ſitque maius ſegmentum *BK*.



QVOD igitur attinet ad expoſitionem laterum prædictarum figurarum, dico *AG*, eſſe latus Pyramidis, ſeu Tetraedri; *AF*, latus Octaedri; *BG*, latus cubi; *BI*, latus *Icoſaedri*; *BK*, denique; latus Dodecaedri. Quoniã. n. *AG*, media proportionalis eſt inter *BA*, *AD*, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propoſ. 20. eiuſdem lib. vt *BA*, ad *AD*, ita quadratum rectæ *BA*, ad quadratum rectæ *AG*: Eſt autem *BA*, ipſius *AD*, ſeſquialtera; cum talium partium 2. ſit *AD*, qualium 3. eſt *BA*. Igitur & quadratum rectæ *BA*, ſeſquialterum eſt quadrati rectæ *AG*; Ac proinde cum diameter ſphæræ ſit potentia ſeſquialtera lateris Tetraedri; erit *AG*, latus Tetraedri.

[a] 13. ſertij dec.

RVRSVS quoniam *AF*, eſt media proportionalis inter *BA*, *AC*, ex eodem coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde vt *BA*, ad *AC*, ita quadratum rectæ *BA*, ad quadratũ rectæ *AF*, ex adducto coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem *BA*, ipſius *AC*, dupla: Erit quadratum rectæ *BA*, duplum quadrati rectæ *AF*. [b] Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; erit *AF*, latus Octaedri. Eodem modo erit *BF*, latus Octaedri.

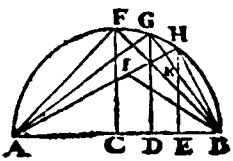
[b] 14. ſertij dec.

DEIN-

DEINDE cum BG, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipsius BD, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. [a] Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi.

[a] 15. tertij dec.

PRAETEREA quia, ex eisdem corollariis, B H, est media proportionalis inter A B, B E, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Est autem, ex cõstructione AB, ipsius BE, quintupla: Erit quadratum rectę A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex coroll. 1. propos. 16. huius lib. Erit B H, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli: Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. [b] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, simul; Ac proinde [c] cum quadratum rectæ B I, æquale sit quadratis rectarũ B H, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiusdem. [d] Quam ob rem B I, latus est Icosaedri.



[b] 10. tertij dec.

[c] 47. primi

[d] 16. tertij dec.

DENIQVE, cum BG, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius segmentum, latus Dedecaedri in eadem sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Expositа ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

QVOD uero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit, diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perspicuum est, qualiũ partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4. esse quadratum lateris Tetraedri; talium uero 3. quadratũ lateris Octaedri.

Diamet.	6.
Tetraed.	4.
Octaed.	3.
Cub.	2.

Octaedri; & denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertiũ lateris Octaedri, potẽtia uero duplũ lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterũ lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionẽ inter se habent, quam numerus ad numerum, [a] Ac propterea diameter sphæræ, & latera dictarum figurarum lineę sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. [b] Erũt huiusmodi lineæ, nimirũ diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, lõgitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc verò Apotome, vt demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum. ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

SED neque inter se ullo pacto cõmmensurabilia sũt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credãtur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, [c] erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, [d] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo, [e] quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor

[c] 104. deci.

[d] 105. dec.

[e] 16. tertij dec.

& Minor ſunt lineæ *Irrationales* prorſus inter ſe differentes, *ita* vt neutra ſit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphęræ, ideoque Rationalia exiſtant, duo vero poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſque lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: *Cernitur* tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri, Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus denique Icoſaedri maius latere *Dodecaedri*; Hoc eſt, eo *ordine* ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras conſtruximus. Quæ forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri, perſpicuum eſt. Cum enim *AG*, latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum, quá AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex ſcholio propoſ. 28. *lib.* 3.

EODEM modo oſtendemus latus Octaedri *maius eſſe* latere cubi. Nam BF, latus Octaedri *maiorem* arcum ſubtendit, quam *BG*, cubi latus.

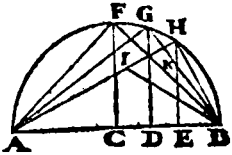
LATVS autem cubi *BG*, maius eſſe latere Icoſaedri BI, hac arte demonſtrabimus. Quoniam A B, tripla ponitur ipſius B D; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę *AB*, noncuplum quadrati rectę *BD*, cũ noncupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1, erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ *AB*, talium 3. eſt quadratum rectæ BG; [b] quod illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. *Igitur* ſi auferatur quadratum rectæ B*D*, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ G D. Quoniam vero quadratum rectæ A*B*, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ B H, minus quam talium partium 2. [c] Nam cum 9. ad 2. minorem habeant propor-

[a] *20. ſexti.*

[b] *15. vnde-cimi.*

tio-

tionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [a] erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectę GD, maius est quadrato rectæ BH, ideoq; recta GP, maior quã recta BH. Rursus quia diameter sphęrę AB, cõponitur ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrũ cõstituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI eiusdẽ circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. cõstat latus decagoni HI, minus esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertijs partibus, nẽpe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atque adeo, cum quadratum rectę AB, noncuplum sit ostensum quadrati rectę BD, erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdum. quintuplum enim est demõstratum. Non ergo HI, tertia pars est ipsius AB: Sed neque maior tertia parte. Si esiim recta HI, dicatur maior tertia parte rectę AB, & proinde dupla ipsius HI, maior quam duę tertiæ, hoc est, quam AD, erit BH, minor quã tertia pars BD. Quare quadratũ rectę AB, maius erit, quam nõcuplum quadrati rectæ BD. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neque æqualis tertię parti, vt ostendimus. Minor ergo est quã tertia pars, hoc est, quam BD. Itaque cum rectę GD, DB, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [b] Est autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectę BI, quadratis rectarũ BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoque erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus scilicet Icosaedri.



MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patebit. Cum rectæ BG, diuisæ

[a] 10. quin.

[b] 47. primi.

extrema ac media ratione, maius segmentum sit B K, & minus G K; erit rectangulum sub B G, B K, maius rectangulo sub BG, GK; atque adeo rectangula sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK: [a] Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub B G, G K, æqualia sunt duo quadrata rectæ B K. [b] (Nam cum sit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; [b] erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo sub BG, G K, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, G K.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ B G, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ B H, (Cum enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ B G, & quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quam quinque quadrata rectæ B H, æqualia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinq; quadrata rectæ BH, maiora erunt sex quadratis rectæ B K; Ac proinde vnũ quadratum rectæ B H, maius erit vno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK. quod est absurdum, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quam recta BK; Ac propterea cum BI, maior sit quam B H, multo maior erit BI, latus uidelicet Icosaedri, quam BK; latus Dodecaedri. Latera igitur quinq; figurarũ exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

[a] 2. secundi

[b] 17. sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter se æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requi-

quirantur ad ſolids anguli conſtitutionem.

EX tribus autem triangulis aquilateris, conſtat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus;

EX quinque, angulus Icoſaedri;

EX ſex autem huiuſmodi triangulis ad idem punctũ coeuntibus fieri non poteſt angulus ſolidus. Cum enim trianguli aquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propoſ 32. lib. 1. Erunt eiuſmodi anguli ſex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc eſt, quatuor rectis æquales. Quare ex ipſis nullus angulus ſolidus conſtituetur. Nam ſolidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam ſex planis eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. a 20 unde.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus cõficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus ſolidus conſtitui poteſt. Rurſus enim recti quatuor erũt. Multo ergo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cũ enim quinque anguli pentagoni æquales ſint ſex rectis, vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnũ rectũ, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiuſmodi anguli tres rectos, & inſuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erũt quatuor rectis, ideoq; ex ipſis angulus ſolidus cõſtituetur. Sed ex quatuor huiuſmodi angulis, nullus ſolidus angulus cõfici poteſt. Cum enim vnus, vt dictum eſt, maior ſit recto, eo quod continet vnũ rectum, & inſuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus ſolidus ex ipſis conſtituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. Nec ſane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis cõſtitui poterit angulus ſolidus. Nam cũ ſex anguli hexagoni æquales ſint octo rectis, vt ad propoſ. 32. lib. 1. eſt demonſtratum; Ac proinde vnus angulus contineat vnum rectũ, ac præterea duas partes ſextas vnius recti; continebunt tres anguli eiuſmodi tres rectos, & ſex ſextas partes recti, hoc eſt, quatuor rectos. Quare ex ipſis nullo modo cõponetur angulus ſolidus; Atque idcirco multo minus ex pluri-

bus eiuſmodi angulis, quam tribus, angulus ſolidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores ſunt quatuor rectis. Quam ob rem perſpicuum eſt, prater dictas quinque figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe conſtitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramidis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrũ viginti triangulis eiuſmodi contentum.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figura regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in unius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6. numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidiũ eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo triangul a

gula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiũt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniũt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorũ, qui simul coeunt ad angulũ solidum constituendũ, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3 (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidũ angulum Octaedri.) conficiũt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicẽtur in 3. numerũ angulorũ vnius trianguli, fiũt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituũt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot. n. anguli conueniunt ad constituendum angulũ solidũ Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solidos. Nam quot bases in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet sex bases,

& octo angulos solidos, octaedrum vero octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrum duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrum, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor bases totidēq; solidos angulos.

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et Solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinę ſocietatem commendatus, longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt: Cumque diſſererent aliquando de ſcripta ab Apollonio *comparatione* Dodecaedri *& Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorũ, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non rectè tradidiſſe Apollonium; quæ a ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderũt. Ego autẽ poſtea incidi*

in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidē cæpi voluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum coniicere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis cōſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum vel maxime in Geometria verſatus, ſcite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi ſumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ conſuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audius. Sed iam tempus eſt, vt prooemio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

TREDECIM *libri hactenus expoſiti ab omnibus* Euclidi aſcribuntur: *Duo vero ſubſequentes a pleriſque* Hypſicli Alexandrino *& recte, meo iudicio, tribui ſolent; in quorū quidem priori inter ſe comparantur* Icoſaedrū, *&* Dodecaedrū, *tam ſecundum ſuperficies, quam ſoliditates: In poſteriori vero exponuntur deſcriptiones aliquot figurarū regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum* Euclidis. *Verum quia plurima omiſſuntur ab* Hypſicle *ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inſcriptiones vnius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus abſolvitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuerſum diſſerere, proponendo varia theoremata, atq; problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuo inſcribūtur. Qua in re maximo nobis adiumento fuiſſe* Campanū, *&* Franciſcum Fluſſatem Candallam, *qui diligentem operā, & ſedulam*

ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim nõ ſolum inſequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; verumetiam integrum librũ, qui ordine decimusſextus eſt, adiũxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Caterum præcipuum fuiſſe Hypſiclis inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de compar atione mutua Icoſaedri & dodecaedri, facile intelligi poteſt ex eius proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.

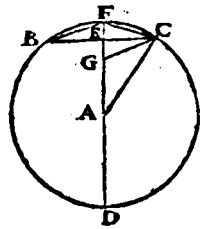
QVONIAM vero in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quam in earundem ordine, & inter ſe, & a Franciſco Fluſſate, ideoque a nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem vtriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior vero Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hac nota O, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemque in Campano intellige, ſi forte loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim AE, in vtram-

vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, ſumptaque EG, æquali ipſi EF; connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. [a] Quoniam igitur perpendicularis AE, ſecat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti ſint æquales, nempe recti; [b] erunt baſes CF, BF, æquales; [c] ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde exiſtente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiuſdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rurſus quia latera CE, EF, triãguli CEF, æqualia ſunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, ſuntque anguli contenti recti; [d] erunt & baſes CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars eſt ſemicircumferẽtiæ DCF, cum ſit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualiũ 4. eſt arcus DC, hoc eſt, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. [e] Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: [f] Eſt autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem ſit baſis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis oſtenſus CGF, duplus erit anguli CAF: [g] Atqui angulus CGF, externus, æqualis eſt internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, ſit dimidium anguli CGF, vt oſtenſum eſt, erit GCA, reliquum dimidium eiuſdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA; [h] ac proinde & latera AG, CG, æqualia: Eſt autem CG, recta oſtenſa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, hoc eſt AE, æqualis duabus EF, FC, ſimul: Ac proinde tres ſimul AE, EF, FC, hoc eſt, duæ ſimul AF, FC, duplæ erunt ipſius AE, atq; idcirco e contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pẽtagoni latus, dimidia duarũ ſimul AF, FC nẽpe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni



[a] 3. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 28. tertij.
[d] 4. primi
[e] 33. sexti
[f] 20. tertij
[g] 32. primi
[h] 6. primi.

goni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductã ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hac linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad BC, dimidere arcum BC, bifariam in F.

COROLLARIVM II.

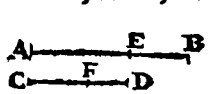
HINC quoque fit, perpendicularẽ ex centro ad latus pẽtagoni ductã, æqualẽ eſſe utriq; lineæ ſimul, et ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam. n. vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul; Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propo. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 4. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

SECEN-

SECENTVR binæ rectæ *A B*, *C D*, extrema ac media ratione in *E*, & F. Dico ipsas in easdem proportiones secari, hoc est, esse vt *A B*, ad *CD*, ita *AE*, ad *CF*, & *EB*, ad *FD*; Item vt *AE*, ad *EB*, ita *CF*, ad *FD*, &c. Cum enim sit, vt *AB*, ad *AE*, ita *AE*, ad *EB*; & vt *CD*, ad *CF*, ita *CF*, ad *FD*; [a] erit rectangulũ sub *AB*, *EB*, æquale quadrato rectæ *AE*; & rectangulum sub *CD*, *FD*, æquale quadrato rectæ *CF*. Quamobrem erit vt rectangulum sub *A B*, *E B*, ad quadratum rectæ *A E*, ita rectangulum sub *CD*, *F D*, ad quadratum rectæ *CF*; (est enim vtrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. vt quadruplum rectãguli sub *AB*, *EB*, ad quadratum rectæ *AE*, ita quadruplum rectanguli sub *CD*, *FD*, ad quadratum rectę *CF*: & componẽdo, vt quadruplũ rectanguli sub *AB*, *EB*, & quadratum rectę *AE*, ad quadratum rectę *AE*, ita quadruplum rectanguli sub *CD*, *FD*, & quadratum rectę *CF*, ad quadratum rectę *CF*: [b] Sed quod quater continetur sub *AB*, *EB*, vna cum quadrato rectę *AE*, æquale est quadrato lineę compositę ex *A B*, *EB*; Et quod quater continetur sub *CD*, *FD*, vna cum quadrato rectę *CF*, æquale est quadrato lineę compositę ex *CD*, *FD*. Igitur erit quoque, vt quadratum lineæ compositæ ex *AB*, *EB*, ad quadratũ rectæ *AE*, ita quadratum lineæ compositæ ex *CD*, *FD*, ad quadratum rectæ *CF*; [c] Ac proinde, vt recta composita ex *AB*, *EB*, ad rectam *AE*, ita recta composita ex *CD*, *FD*, ad rectam *CF*: Et componendo vt composita recta ex *AB*, *EB*, & recta *AE*, hoc est, dupla ipsius *A B*, ad rectam *AE*, ita recta composita ex *CD*, *FD*, & recta *CF*, id est, dupla ipsius *CD*, ad rectam *CF*; Et permutãdo, vt dupla ipsius *AB*, ad duplam ipsius *CD*, ita *AE*, ad *CF*; [d] Vt autem dupla ipsius *AB*, ad duplã ipsius *CD*, ita est *AB*, ad *CD*. Erit ergo vt *AB*, ad *CD*, ita *AE*, ad *CF*; Ac propterea, cum sit vt tota *AB*, ad totam *CD*, ita *AE*, ablata ad *CF*, ablatam; [e] erit quoque reliqua *EB*, ad reliquam *FD*, vt tota ad totam. Quare vt *AE*, ad *CF*, ita erit *EB*, ad *FD*, cum vtraq; proportio eadem sit proportioni *AB*, ad



[a] 17. sexti

[b] 8. secundi

[c] 22. sexti

[d] 15. quin.

[e] 19 quin.

ad CD: Et permutãdo, erit vt AE, ad EB, sic CF, ad FD & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodẽ circulo descriptorum cãdem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

QVONIAM. n. [a] latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; & recta subtendens pentagoni angulum sectæ extrema ac media ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni: [b] sit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad minus, qua maioris segmenti rectæ angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, vt maius segmẽtum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt rectæ subtendens angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.

[a] *9. tertiidecimi.*

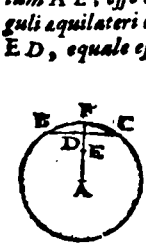
[b] *2. quartidecimi.*

EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpẽdiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus

nus vero æquale est dimidio lateris decagoni ei dem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, *circuli* B C, *ducta perpendicularis* A D, *ad latus* B C, *pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in* E, *extrema ac media ratione. Dico maius segmentum* A E, *esse æquale perpendiculari ex* A, *ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducta; minus vero segmentum* E D, *æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli.*



Extensa namque recta A D, *ad* F, *& connexa recta* F C; *erit* F C, *latus decagoni, cum ex coroll. 1. propos. 1. huius lib. arcus* B C, *nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in* F; [a] *Ac proinde recta compositum ex* A F, *latere hexagoni, &* F C, *latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum* A F, *latus hexagoni, minus vero segmentum* F C, *latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota* A D, *diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex* A F, F C, *similiter diuisam, ita* A E, *maius segmentum ad* A F, *maius segmentum; &* E D, *minus segmentum ad* F C, *minus segmentum:* [b] *Est autem tota* A D, *dimidium totius compositæ ex* A F, F C. *Igitur &* A E, *ipsius* A F, *semidiametri, &* E D, *ipsius* F C, *lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per corollarium propositionis 12. lib. 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum* A E, *æquale esse dictæ perpendiculari, minus vero* E D, *dimidio lateris decagoni.*

[a] *9. tertij decimi.*

[b] *1 quarti decimi.*

2. 4. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilate

rum

rum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, ſubtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarũ CD. AC, ſimul quintupla eſſe quadrati ex ſemidiametro circuli deſcripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H; erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoque recta ſubtenſa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla eſt rectæ FG; erit ex ſcholio propoſ 4. lib. 2. quadratũ rectę AG, quadruplum quadrati rectæ FG: [a] Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla ſunt quadrati rectæ FG; Atq; adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiuſdẽ rectæ FG; [b] Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirũ ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.



[a] 47. primi

[b] 10. tertij dec.

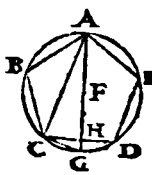
COROL-

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiã sphæra descripti; eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadẽ sphæra descripti. [a] *Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri FG, &c.*



[a] 3. quartidecimi.

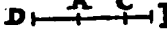
~~THEOR.~~

6. 3. ~~PROBL.~~ 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR. n. *AB*, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentũ AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdẽ circuli. Sit. n. *AD*, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum

rectum ipsi *AB*; [a] eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum *BA*: Ponitur autem & A B, secta in C, similiter. [b] Igitur erit vt *BD*, tota ad maius sui segmentum A*B*, ita *A* B, tota ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque vt BD, tota ad maius sui segmentum *AB*, ita AB, maius segmentū ad *A*D, segmentum minus, per definitionem lineæ sectę extrema ac media ratione. Igitur erit vt A*B*, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erūt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est *AB*; erit & AC, eiusdem circuli latus decagoni.



[a] *9. tertij decimi.*

[b] *2. quarti decimi.*

· ALITER. Adiungatur ipsi AB, in rectū recta *AD*, æqualis maiori segmento AC; [c] eritque tota recta BD, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, per ea, quę demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. AD, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & A C, æqualis ipsi A D, latus erit decagoni in eodē circulo descripti, cuius *AB*, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum.

[c] *5. tertij de.*

THEOR. 5. PROPOS. 5.

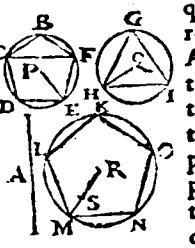
2.

5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triāgulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptū & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundē circulū circumscribere & pentagonum *B*CDEF, & triāgulū GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circum

ſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat.n. circulus KLMNO, pentagonum KLMNO, [a] ex quo icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoque quodlibet ipſorũ æquale cuinis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Secetурque RM, extrema ac media ratione in S; [b] eritque maius ſegmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtẽdat quoque recta CF, angulum B, pẽtagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdẽ propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti extrema ac media ratione; [c] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmentum ad RS, maius ſegmentum; [d] Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo, per ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectę RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [e] Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoq; quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cũ hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ



[a] 16. tertij dec.
[b] 4. quarti dec.
[c] 2. quarti dec.
[d] 22. ſexti.
[e] 10. tertij dec.

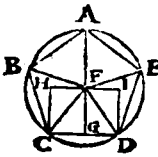
æ RS. Sed qm̃, (a cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectę MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; b sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectę MN, æqualia quindecim quadratis rectę QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectę PE, æqualia quindecim quadratis rectę QH; ac propterea vnum quadratum rectę PE, vni quadrato rectę QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrádum.

a 3. quarti decc.

b 12. terti decimi.

THEOR. 6. PROPOS. 6. 3. 6.

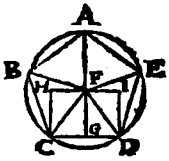
SI ex centro circuli pentagonũ Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.



EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulũ sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis.n. rectis ex F, ad oēs angulos pentagoni, resoluetur pẽtagonũ in quinq; triãgula æqualia, ex coroll. prop. 8. lib. 1. cũ

bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per F, recta HI, parallela ipsi CD, occurrēs duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex C, D, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum C I, contentum sub HC, hoc est, sub F G, & C D.

41. primi.



a Quoniam vero rectangulum C I, duplum est trianguli F C D, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi FCD, æqualium; erit rectangulum C I, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pētagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia sint vni pentagono; Atque adeo sextuplum rectanguli C I, quinquies sumpti, nimirum rectangulum C I, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorū pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

41. primi

b ALITER. Facta eadem figuræ constructione, cū rectangulum CI, duplum sit trianguli F C D, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulū CI, trigesies sumptū æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei Dodecaedri. Cum enim vnum pentagonum Dodecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabūt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triāgulis. Atq; idcirco triāgulum FCD, sumptum sexagesies æqualis erit superficiei Dodecaedri.

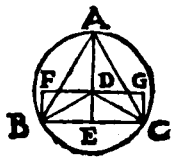
3. 7.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circūscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod

quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.

EX centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri *A* B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum ſub D E, & B C, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis nãque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *D*, recta *FG*, parallela ipſi BC, occurrens in *F*, & G, duabus perpendicularibus *BF*, CG, ex B, C, ductis ad B C; eritque rectangulum B G, contentum ſub *F*B, hoc eſt, ſub *D*E, & BC.[a] Quoniã vero rectangulũ BG, duplum eſt trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulũ BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint vni triãgulo Icoſaedri; *A*tq; adeo idẽ rectangulum trigeſies ſumptũ, nẽpe decuplũ rectãguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triãgulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirũ decuplo duorũ triangulorũ Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triẽgulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendũ.



[a] 41. primi

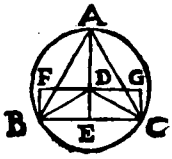
ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ,[b] cũ rectangulum *B*G, duplum ſit trianguli D B C, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectãgulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo D *B*C, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria cõficiunt vnũ.

[b] 41. primi

Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non



describantur amba figura in eadem sphæra, est sicut rectangulum contētum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pētagoni Dodecaedri in latus dictū, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus.

[a] *Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto;* [b] *Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri.* [c] *Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.*

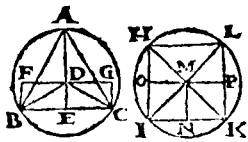
[a] 6. quartidec.
[b] 7. quartidec.
[c] 15. quinti

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei

Te-

Tetraedri; *In octaedro vero & cubo duodecies ſumptum, ſuperficies Octaedri, & cubi aquale. Sit enim primo triangulũ Tetraedri* ABC, *circumſcriptũ a circulo, cuius centrum* D, *a quo perpendicularis ducatur* DE, *ad latus* BC, *& reliqua fiant, vt de triangulo Icoſaedri dictum eſt. Dico rectangulum* BG, *ſexies ſumptum, aquale eſſe ſuperficici Tetraedri.* [a] *Quoniam enim rectangulum* BG, *duplum eſt trianguli* DBC, *hoc eſt aquale duobus eiuſmodi triangulis; erit ipſum ſexies ſumptum aquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula conſtituant totã ſuperficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula aquilatera ipſi* ABC, *aqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum* BG, *ſexies ſumptum, ſuperficiei Tetraedri, ſeu Pyramidis aquale.*



[a] 41. primi

SIT deinde idem triangulum ABC, *Octaedri, &c. Dico rectangulum* BG, *duodecies ſumptum, aquale eſſe ſuperficiei Octaedri.* [b] *Cum enim rectangulũ* BG, *duplum ſit trianguli* DBC, *hoc eſt, aquale duobus eiuſmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies ſumptum aquale vigintiquatuor huiuſmodi triangulis: Sed vigintiquatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum* BG, *duodecies ſumptum aquale eſt ſuperficiei Octaedri.*

[b] 41. primi

SIT tertio quadratum cubi HIKL, *circa quod circulus ex centro* M, *deſcribatur, & deducta* MN, *perpendiculari ad* IK, *ducantur ex* M, *ad omnes angulos quadrati recta linea, vt quadratum reſoluatur in quatuor triangula aqualia; Atque per* M, *agatur* OP, *ipſi* IK, *parallela. Dico rectangulum* IP, *contentum ſub* OI, *hoc eſt, ſub* MN, *& IK, ſumptum duodecies, aquale eſſe ſuperficiei cubi.* [c] *Quoniam enim rectangulũ* IP, *duplum eſt trianguli* MIK, *hoc eſt, aquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum aquale vigintiquatuor eiuſmodi triangulis. Quare cum vigintiquatuor talia triangula conſtituant ſex*

[c] 41. primi

quadrata, id est, totam superficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies sumptum aequale superficiei cubi. Quod est propositum.

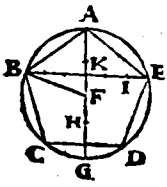
ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (sunt enim IP, PH, aequalia, cum recta OI, sit dimidium lateris HI, nempe aqualis ipsi MN) constituent duodecim talia rectangula sex quadrata eiusmodi, hoc est, totam superficiem cubi.

4. 8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum sub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque sextis partibus lineæ subtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo descripti; æquale est dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, describatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres sint AH: Angulum vero A, subtendens recta BE, secetur in sex partes æquales, quarum quinque sint BI, & vna IE, ita vt BI, sit quintupla ipsius IE. Dico rectangulũ cõprehensum sub AH, BI, æquale esse pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, cõtinet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum sit semidiameter; erit AH, ipsius AF, sesquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. ppos. 10. lib. 13. in puncto K; cõtinebit tã KB, q̃ KE, tres sextas rectæ BE; atq; adeo cũ BI, cõtineat quinq;, cõtinebit KI, duas; Ac proinde & KB, ipsius



ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrem erit vt A H, ad AF, ita KB, ad K I; [a] atque idcirco rectangulum ſub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo ſub mediis AF, KB. [b] Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin AF, & eâdem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta. Igitur & rectangulum ſub AH, KI, duplum erit eiuſdem trianguli A B F: [c] Eſt autem & rectangulum ſub A H, K I, duplum rectanguli ſub AH, IE; propterea quod & baſis KI, dupla eſt baſis IE, (continet enim KI, duas ſextas partes ipſius B E, & IE, vnam.) eademque ſemper altitudo AH. Igitur æqualia ſunt triangulum ABF, & rectangulum ſub A H, I E; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum eſt triãguli ABF, quod pentagonum in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rectis e centro F, vt propoſ. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum vero ſub AH, BI, quintuplum eſt rectanguli ſub AH, IE; quod & baſis BI, quintupla ſit baſis IE, eademque ſemper altitudo A H. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum ſub AH, BI, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16. ſexti

[b] 41. primi

[c] 1. ſexti

[d] 1. ſexti

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphera deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphera deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphera conſtituti, (comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub A H, & ſub quinque ſextis partibus lateris

[e] 3. quarti decimi.

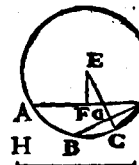
lateris cubi eidem sphæra, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.

4. 8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo ABCD, [a] circunscribente & pentagonũ Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & triãguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit deniq; H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, sectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentũ est EF, ex coroll propos. 2. huius lib. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; [c] Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF, æquale erit rectangulo sub medijs BD, EG. [d] Quia uero est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cum bases sint H, AD, altitudo vero semper eadem EF; Erit quoque vt H. ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectãgulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare eum, ex coroll. propos. 7. huius lib. sit, vt rectãgulum sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri



[a] 5. quarti decimi.

[b] 2. quarti decimi.

[c] 16. sexti

[d] 1. sexti

caedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque, vt *H*, latus cubi, ad *AD*, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

ALITER. [a] Circumſcribat pentagonum Dodecaedri *ABCDE*, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A. per centrum H, recta AI, quę per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quę latus erit cubi, ex corol. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextę partes ſint BK. Dico rurſus eſſe, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiē Icoſaedri. Quoniam. n. rectāgulum ſub AI, *BK*, ęquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub AI, IF, ęquale eſt triangulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum FG, baſis trianguli dupla ſit ipſius IF, baſis rectanguli: Erit vt rectangulum ſub AI, *BK*, ad rectangulū ſub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: [b] Eſt autem vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita BK, ad IF, cum baſes ſint BK, IF, & altitudo eadem ſemper *AI*. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum *AFG*, ita BK, ad IF; Ac proinde, (ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, ęquemultiplicētur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum AFG, & recta IF, ęquemultiplicentur per numerum 20. [c] erit quoque vt pentagonum *ABCDE*, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigeſies ſumptū, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta BK, duodecies ſūpta ad rectā IF, vigeſies ſumptā: Atqui recta BK, duodecies ſumpta ęquiualet lateri cubi BE, decies ſumpto; (Nam cum BK, contineat quinq; ſextas partes ipſius BE; continebit eadē BK, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdē BE, quę efficiūt decē integras



[a] 5 quarti decimi.

[b] 1. ſexti

[c] ſchol. 22. quinti.

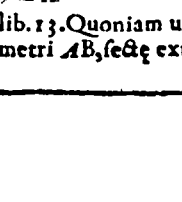
gras rectas BE.) Recta vero *IF*, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eo quod *FG*, est ipsius I F, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptum ad latus Icosaedri FG, decies sumptum; Ac propterea, 15. quin. [a] cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

4. 9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

SECETVR recta *AB*, in *C*, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum A*C*. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex *A*, centro, ad interuallum *AB*, circulus describatur, in quo cõstituatur & pentagonum æquilaterũ BFGHI & triangulum æquilaterum B*K*L. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam uero A*C*, maius segmentum semidiametri *AB*, secte extrema ac media rõne, est latus Decagoni



4. quarti. [b]

cagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus eſt Hexagoni; [a] poterit BF, latus pentagoni & totã AB, latus videlicet hexagoni, & maius ſegmentum AC, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſsit iam & recta M, totam AB, & minus ſegmentum BC, per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico ſic eſſe D, latus propoſitum cubi ad E, latus propoſitum Icoſaedri, vt eſt BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC [b]. Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum eſt quadrati ſemidiametri AB: [c] Item quadrata rectarum AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum rectæ M, ipſis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratũ rectæ AC: Eſt autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, ſectæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit BF, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. eo quod BG, eſt latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ; [d] Erit vt tota AB, ad maius ſegmẽtum AC, ita tota BG, ad maius ſegmentũ BF: Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę AC, ita quadratũ rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratũ rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratũ rectę M; [f] Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC. Cum igitur propoſita latera D, E, cubi, & Icoſaedri, eandem habeant proportionem, quam rectę BG, BK, vt mox oſtendemus; perſpicuum eſt, vt ſe habet recta BF, potens totã AB, & maius ſegmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC, ita ſe habere propoſitum

[a] 10. tertij dec.
[b] 12. tertij deci.
[c] 4. tertij d.
[d] 2. quarti decimi.
[e] 22. ſexti
[f] 22. ſexti

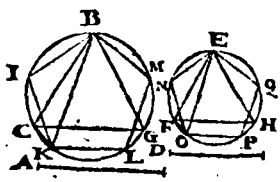
positum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæra eandem habeant proportionem, quam recta BG, BK; demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæræ: Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, et circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona aquilatera BIKLM, ENOPQ, connectãturq; rectæ BK, CK, EO, FO. a *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonii Dodecaedri in eadem cũ ipsis sphæra descripti; Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoq; ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circunferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione segmẽtorum similium, æquales inter se, quã anguli*



a 5. quarti dec.

guli BKC, EOF; inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, aqualis erit, & totum triangulū BCK, toti triangulo EFO, aquiangulū. a Quare erit, vt BK, hoc est, recta A, illi aqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri, ita EO, hoc est, recta D, illi aqualis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum. a 4 sexti.

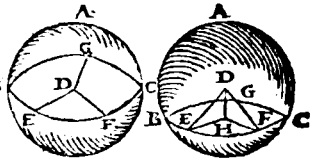
PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphæra.

LEMMA I.

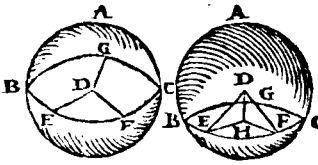
SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFCG. Dico BEFCG, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione BEFCG; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG.



DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, ciusque centrum D, idem cum centro sphæræ.

TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphęræ: Ducatur autẽ ex D, centro sphęræ ad planum secans perpendicularis DH; emittãturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectantur rectæ DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro sphęræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea cõtenta, circulus erit; eiusq; centrũ, punctũ H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.



47. primi

CO-

COROLLARIVM.

IT AQVE si planum secans transierit per centrum sphæra, efficietur circulus idem centrum habẽs, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæra centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæra ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant a centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes a centro sphęræ, æquales sunt.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter a centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectę EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis



[a] 47. primi.

rectarum EF, FB, quam quadratum rectę EC, quadratis

dratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro ſphæræ ad eius ſuperficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum ſint ſemidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter diſtant a centro E.

47. primi

SED iam æqualiter diſtent circuli AB, DC, a centro ſphæræ E. Dico ipſos eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius, oſtendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia eſſe quadratis rectarũ EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur diſtare a centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC; atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, ſemidiametri ſcilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

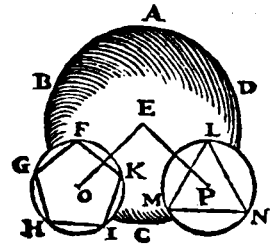


4. 10. THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, eſt vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eademque ſphæra.

IN

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum FGHIK: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in una eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in sphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN, Ac propterea, per lema 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabũt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarũ altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidũ Dodecaedri. [b] Quoniã aũt est, vt basis FGHIK, ad basin LMN,



[a] 6. quartidec.

[b] 6. duodec.

LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demõstrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt, vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: [a] Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atq; adeo, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. quartidecimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero oſtenſum eſt quoque, [b] *ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra:* [c] *Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemq; ſphæræ, vt eſt linea potens totam diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum:* [d] *Item ita eſſe Dodecaedrũ ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri*

[b] 9. quartidecimi.

[c] 10. quartidec.

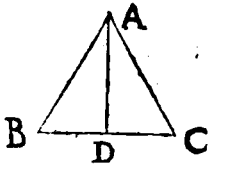
[d] 11. quartidec.

dri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 0. 11.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineę perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

IN triangulo æquilatero *A* B C ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum B C, perpendicularis *A* D. Dico quadratum lateris A B, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniã. n. ob æqualitatem laterum AB, AC, [a] anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erũt duo anguli B, & *D*, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autem & latus AD, commune, vel AB, *A*C, æqualia. [b] Igitur & reliqua latera B*D*, CD, æqualia ſunt; ac propterea latus B*C*, hoc eſt, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris AB, quadruplum quadrati rectæ B D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cũ igitur quadrato rectæ *A*B, æqualia ſint quadrata rectarum AD, B D; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ B*D*; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum A D, B D, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ *A*D. Quare quadratum rectæ *A*B, partiũ 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ *A*D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 5. primi.

[b] 26. primi

[c] 47. primi

COROLLARIVM.

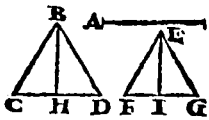
HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est BD, & CD, rectas æquales esse, hoc est, latus BC, secari bifariam a perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & basis BD, basi CD, æqualis; [a] *Erunt et anguli BAD, CAD, æquales, id est, angulus BAC, bifariam secabitur ab eadem perpendiculari AD.*

[a] *8. primi.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphærę diameter Rationalis A. Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphęra, esse Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius sphęrę, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera opposita CD, FG, perpendiculares BH, EI. [b] Quoniâ igitur quadratũ diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri BC, [c] & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, BC, EF, proportionem, quam numeri 6.4.3. [d] idcoque commensurabilia erunt. Quare lineę ipsæ A, BC, EF, commensurabiles existent, saltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales *B C*, *EF*, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, *FI*.



[b] *13. tertiædecimi.*
[c] *14. tertiædec.*
[d] *6. decimi.*

RVR-

RVRSVS, a quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectę BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, sesquitertium est; habebunt tã quadrata rectarum B C, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter se, quam numeri 4. 3. bideoque tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipsæ BC, BH, quam lineæ EF, EI, commensurabiles existent. Est autem & tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia videlicet toti, commensurabilis. c Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, ostensæ sint Rationales, erunt quoq; BH, EI, Rationales. d Quoniã vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. e cum ostensum sit talium partium 1. esse tã CH, quam FI, qualium 3. est tam BH, quam EI,) Erunt tam CH; BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commensurabiles; f Ac proinde tam rectangulum sub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus cõtentum, Medium erit: Sunt autem triãgula BCD, EFG, æqualia rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum C D, F G, duplę sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri triangulo BCD, sit commensurabilis; (est enim triangulum BCD, totius superficiei quarta pars) Item tota superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis; (Est enim triangulum EFG, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphęrę diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quã Octaedri in ea sphæra, Media.

Quod erat ostend.

a 12. quarti decimi.

b 6. decimi.

c 12. dec.

d 9. decimi.

e 11. quarti decimi.

f 23. deci.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulum equilaterum, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub CH, BH, & ſub FI, EI, hoc eſt, triangula BCD, EFG, ipſis aequalia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo equilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribãtur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

SIT ſphæræ diameter *A*, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulũ BCD; Octaedri vero baſis triangulũ EFG. Dico triangulum BCD, ſeſquitertiũ eſſe trianguli EFG; At vero ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialterã ſuperficiei Tetraedri. [a] Quoniã n. quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri CD; [b] duplũ vero quadrati lateris Octaedri FG; fit, vt quaduplũ partiũ 6. fuerit quadratũ diametri A, taliũ 4. ſit quadratum



[a] 13. tertiidecimi.
[b] 14. tertiidec.

dratū lateris CD,& taliū 3.quadratū lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG:Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triāgulum BCD, ad triangulum EFG. (a quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter ſe habent laterum CD,FG, duplicatam, cum ſint ſimilia.)Igitur & triangulū BCD,ſeſquitertium eſt trianguli EFG. a 20. et 19. ſexti.

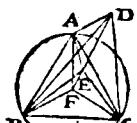
RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulum BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli EFG;Ac propterea qualiū partium 4.fuerit triangulum BCD, talium 3.eſſe triangulum EFG; Efficitur,vt triangulum EFG, octies ſumptum,hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri,ſit earūdem partium 24;At triangulum BCD,quater ſumptum,id eſt,tota ſuperficies Tetraedri, earūdem partium 16.Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphęræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

o. 15.

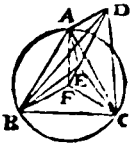
RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad dictam baſim.

SIT Tetraedrum ABCD, cōtentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E,centrum ſphæræ recta DEF, incidens in baſim ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC,& DF,perpendicula



rem

rem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex cētro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli AED, CED, æquales erūt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt, eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, triāguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF; & anguli ipsis contenti, oftensi æquales; Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoq; æquales erunt FB, FC, si considerentur triāgula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; erit F, centrū basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.



a 8. primi.
b 13. primi
c 4. primi.
d 9. tertij.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit; effi citur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdē circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra, quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

o. 16.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æqua-

æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis vero vtriuſque eſt quadratũ ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in ſphæra deſcriptum, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum, quarum baſis communis eſt quadratum ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, q̃ æquales ſunt, cum ſint ſemidiametri ſphærę, ductæ videlicet e cẽtro ad ſuperficiẽ ſphęrę: a qm̃ quadratum diametri ſphęrę duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri, AG, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri ſphęræ talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratũ rectę AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cũ ergo quadratum rectæ AG, æquale ſit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ A B, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; b Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGB, recti. c Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectũ erunt cõiunctæ; d atque adeo rectæ AC, BD, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtẽt plano; e Ac ꝓpterea rectæ earũ extrema cõnectentes AB, BC, CD, DA, in eodẽ plano erunt cũ ipſis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrũ in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum baſis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides æquales ſunt & ſimiles ex defin. 10. lib. 11. cũ quælibet conſtet ex quatuor triãgulis æquilateris octaedri, quæ æqualia ſũt & ſimilia, & baſi cõmuni ABCD. Dico iam earum altitudines eſſe æquales, & baſin ABCD, eſſe quadratũ ſubduplum



a 14. ſextĳ. elem.

b 48. primi

c 14. primi.

d 2. vndec.

e 7. vndec.

duplũ quadrati diametri ſphæræ. Quoniam.n. oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri AB, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG; [a] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis AG, DG, ſe mutuo ſecantibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, [b] ipſa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, DG, ductum, nempe ad baſin pyramidum. Quare E G, altitudo eſt pyramidis ABCDE. Similiter oſtendemus FG, altitudinem eſſe pyramidis ABCDF. Cum ergo EG, FG, ſint ſemidiametri ſphæræ æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia AC, [f] eſt diameter ſphæræ; [c] erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterũ AD, DC. [d] Quare angulus ADC, rectus eſt: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cum ſit deſcriptum ex latere octaedri AB; [e] conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Octaedrum ergo in ſphæra deſcriptum; &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 48. primi

[b] 4. undec.

[c] 14. tertij dec.

[d] 48. primi

[e] 12. tertij dec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propoſitionẽ demonſtrauimus in corollar. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur a Campano, nõ habita ratione conſtructionis octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM ſphæræ impo-

ſitum

ſitum ad Octaedrum in eadē ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri,& ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum ad quadratum diametri ſphæræ.

VEL, vt Campanus loquitur.

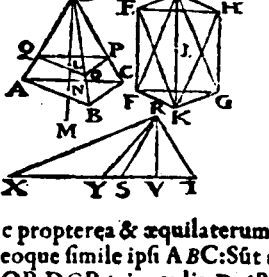
TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad octaedrum in eadē ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quę potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earūdem triū quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphærę.

SIT Tetraedrum ABCD,& octaedrum EFGHIK, in vna eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo *D*.per centrum L, diameter ſpæræ D *M*, incidens in baſin A B C, ad punctum N. [a] Erit igitur N, centrum baſis *ABC*, & DN, perpendicularis ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN. inter centrum ſphæræ & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit DL, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt L N; *Ac* propterea D N, talium 4. *Ducatur deinde*, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, paralle-

[a] *15. quartidecimi*

lum

lũ plano ABC;[a] Eruntq; rectæ QO, OP, PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; Ac



ppea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC,[b] cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum ex coroll propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulũ erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC: Sũt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11.[c] Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter; erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde,[d] cum pyramides simi les habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hęc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt cõstat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4, ad 3. vt constat ex ppos. 2. lib. 8. Rursus,[e] quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triãgulo DQP; demittaturq; ex R. ad ST, perpendicularis RV.[f] Eritque latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectę DP, taliũ 27. erit quadratum rectæ RV: Erat autem earũdem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens vigintiseptẽ sexagesimas quartas partes quadrati lateris tetraedri RVRSVS extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, vt

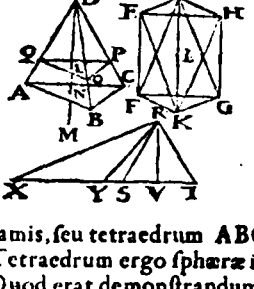
[a] 16. vnde.
[b] 10. vnde.
[c] 17. vnde.
[d] 8. duode.
[e] 20. sexti.
[f] 12. quarti dec.

Y, vt ſit TY, talium partium 32. qualium 27. eſt TS, ſeu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3. nempe ſeſquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, eſt 27. (proportio enim 36. ad 27. eſt ſeſquitertia.) Ac propterea qualium partium TY, eſt 32. Quare linea TY, cõtinet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK, vt rectãgulum cõtentum ſub recta RV, (q̃ pót vigintiſeptẽ ſexageſimasquartas partes quadrati lateris DC) & ſub recta TY, (q̃ cõtinet octo nonas partes eiuſdẽ lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

CVM enim ductis rectis RX, RY, a triãgulum RTX, duplum ſit triãguli RTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY: b Eſt autem & rectangulum ſub RV, TY, duplum eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo ſub RV, TY. c Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idẽ triangulum RST: d Eſt autẽ triangulum RTX, ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale; erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectãgulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD: At vero vt triangulũ QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nã cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoq; erit ad planũ QOP, ex ſcholio prop. 14. lib. 11. ideoq; ſphæræ ſemidiameter DL, altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: e Octaedrum autẽ EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarũ baſis cõis quadratum EFGH, dimidiũ quadrati diametri ſphęræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habẽt altitudines. Quare ex ſch. pp. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidẽ EFGHI; Ac ꝓpterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratũ diametri

a 1. ſexti
b 41. primi
c 7. quinti
d 1. ſexti
e 16. quarti decimi.

metri ſphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt, ad Octaedrũ EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub RV, potente viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitũ ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: ac proinde, [a] *cum recta RT, ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV; erit RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, ſunt talium partium 32. qualium 27. ST, ſeu DP; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, ſuperquintupartiens vigeſimas ſeptimas partes ipſius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare cõſtat, eſſe quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum ſub RV, quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, quæ ſuperquintupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

[a] 12. quartidecimi

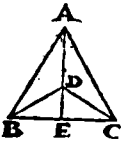
0. 17.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppo

oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro triāguli ad eandem baſin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum *ABC*, cuius centrum *D*. Ducatur ex *A*, per *D*, recta *AE*, quæ perpendicularis erit ad *BC*, camq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico *AE*, triplam eſſe rectæ *DE*, quæ ſcilicet perpendicularis eſt e centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis *BD*, *CD*, cum latera *DA*, *DB*, trianguli *ADB*, æqualia ſint lateribus *DB*, *DC*, trianguli *BDC*; (e cẽtro enim ducuntur;) ſit autem & baſis *AB*, baſi *BC*, æqualis: Erunt triangula *ABD*, *BDC*, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula *ADB*, *ADC*. Quare ob æqualitatem trium triangulorum *ADB*, *BDC*, *CDA*, triangulum *ABC*, triplum eſt trianguli *BDC*. Quoniam vero rectangulum ſub *AE*, *EB*, triangulo *ABC*; & rectangulum ſub *DE*, *EB*, triangulo *BDC*, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſis trianguli *BC*, dupla ſit baſis *BE*, vtriuſque rectanguli: Erit quoque rectangulum ſub *AE*, *EB*, triplum rectanguli ſub *DE*, *EB*: Eſt autem vt rectangulum ſub *AE*, *EB*, ad rectangulum ſub *DE*, *EB*, eiuſdē altitudinis *EB*, ita baſis *AE*, ad baſin *DE*. Igitur & *AE*, tripla eſt ipſius *DE*. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendum.



a 1. ſexti

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE; qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundē partiū 2. continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

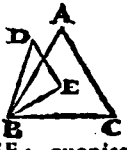
EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

0. 17.

SI octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphęrę potentia tripla eius perpendicularis, quę ex centro sphærę in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphera, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro sphęræ *D*, perpendicularis demittatur DE; ducaturque semidiameter sphæræ *DB*. Dico semidiametrum DB, potentia triplam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpẽdicularis DE, in centrum circuli sphærę, qui triangulum *ABC*, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; [a] quoniam quadratum diametri sphærę duplum est quadrati lateris octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri sphærę DB, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partiũ 12. erit quadratum lateris *AB*, 6. & quadratum semidiametri sphæræ DB, 3. [b] Quia vero quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris *AB*. Quare [c] cum quadratũ rectæ *DB*, æquale sit quadratis rectarum BE, DE; sit autem quadratum rectæ *DB*, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum sphæræ inscribatur, &c.



[a] *14. tertij dec.*

[b] *12. tertij dec.*

[c] *47. primi.*

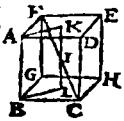
THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

o. 18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphęrę descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphęra collocati: Perpendicularis autem a centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, ęqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex quo *IK*, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem *IK*, æqualem esse dimidio lateris cubi. Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.



[a] 15. tertij dec.

PRODVCTA autem *KI*, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum *L*; cum *KL*, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, [b] quia AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE; ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas *AK*, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter se; *Ac* propterea parallelogrammum erit ABL*K*; atque adeo recta *KL*, æqualis lateri cubi AB. Quoniã vero perperpendicularis KL, e cẽtro sphęræ *I*, cadit in bases AE, BH, ad pũcta *K*, & L, erũt K, & L, cẽtra circulorũ dictas bases ambientiũ in sphæra, per coroll. lẽmatis 1. prop. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariã secabitur a dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13, ostendimus; Ac propterea

[b] 6. vndec.

[c] 16. vndec.

cum KL, oſtenſa ſit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiuſdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, ſolidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale eſſe cubo. [a] *Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphæræ;* [b] *Perſpicuum autem eſt, ſolidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe ſolido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in* BH, *tertiæ partē quadrati diametri ſphæræ, eo quod dicta ſolida habeāt et baſes, et altitudines æquales. Itaq; cū dicta duo ſolida cōpleant totum cubum, manifeſtum eſt, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe toti cubo. Quod eſt propoſitum.*

[a] 15. tertij dec.

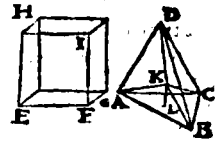
[b] 31. vnde.

ALITER proponi poteſt hoc corollarium, vt dicamus, ſolidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod eſt tertia pars quadrati diametri ſphæræ: Vt perſpicuum eſt.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem ſolidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſim ducta in tertiæ partē ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit .n. corpus regulare quodcunque

cunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, solidum autem EFGH, cõtentum sub EI, tertia parte superficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, quæ æqualis sit perpendiculari KL, ductæ ex centro K, ad basin ABC. Dico solidũ EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Nã ductis



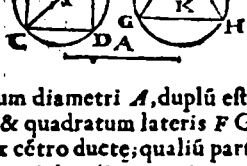
ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint; ipsi æqualiter a centro distabunt, per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpẽdiculares ex K, centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam verò prisma contentum sub basi ABC, & altitudine KL, triplũ est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.

THEOR. 21. PROPOS. 21. 0. 11.

IDEM circulus comprehendit & cũ bi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eũdem circulum cir-

cumscribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc est, circulos BCDE, FGH, ipsa circumscribentes, esse æquales. Sint. n. rectæ e cẽtris IB, KF. [a] Quia igitur quadratum diametri A, triplũ est quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI; (Nã ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum subtendat quadrantem; [b] Ac proinde quadratum rectę BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum rectarum æqualium BI, IC, æqualia sint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectę BI. qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratũ rectæ BI. Rursus [c] quia quadratum diametri A, duplũ est quadrati lateris octaedri FG; [d] & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectę FK, ex cẽtro ductę; qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & taliũ 1. quadratum rectę FK. Cum igitur & talium partium 1. ostensum sit quadratum rectę BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipsę; & circuli ex ipsis descripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 15. tertij decimi.

[b] 47. primi.

[c] 14. tertij dec.

[d] 12. tertij dec.

COROLLARIVM.

HINC fit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorũ, qui bases oppositas tam cubi, quam octaedri circumscribunt, æquales esse. Si enim ex cẽtro sphæræ ad bases cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorũ ipsas circũscribẽtiũ, ex coroll. lẽmatis 1. prop. 10. huius lib.: qui cum sint æquales ostensi, æqualiter distabunt a centro sphæræ, ex lemmate 2. eiusdem propos. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum sint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppositarum basium connectunt. (Nam si producantur, perpendiculares

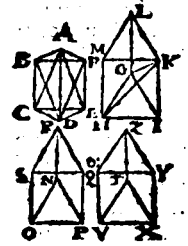
[a] 21. quarti dec.

lares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ ſunt oppoſitæ baſes in octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodũ & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod eſt propoſitum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphærę inſcribantur; Erit octaedrũ ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

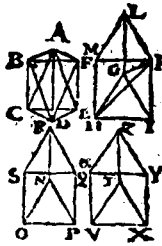
IN eadem ſphæra inſcriptum ſit & octaedrum A B C D E F, & tetraedrum G H I K. Dico ita eſſe octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus B F, ad latus H I. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus cõmune eſt ipſa diameter AD, & vertex cõmunis A, nẽpe in BCDA, cuius baſis BCD; in BDFA, cuius baſis BDF; in CDEA, cuius baſis CDE; & in DEFA, cuius baſis DEF; quæ quidem omnes baſes infra quadratum BCEF, exiſtunt cõtinentes cum ipſo di midiatam partem octaedri. Quoniã vero quælibet harum pyramidũ conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipſorũ cõe eſt AD, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtũt, [a] inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum cõtineãtur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus. Cõſtitua-



[a] 8. primi.

tur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedi triplum erit. per coroll. 1 propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. a Quũ igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex iis, quę ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. prop. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrũ.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα. Quia vero priſma TVXYZα, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadem quę octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrũ ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinẽ tetraedri: Eſt autẽ altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarũ coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpẽdiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atq; vt latus cubi ad altitudinẽ tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nã tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quã quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito. n. quadrato diametri ſphærę 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex prop. 15. lib. 13. & quadratũ altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2 pp. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratũ altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphærę 6. b erit quadratum lateris octaedri 3. &

a 14. quartidecimi



b 18. tertiædec.

& quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandũ erat.

COROLLARIVM.

EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. [a] Nam & quadratum diametri ad quadratũ lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.

[a] 18. tertij dec.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptum Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde

de Icoſaedri oppoſita AI, B K, connectantur recta I B, quæ ſubtendet unum angulum pentagoni ex *I* Icoſaedri lateribus cõpoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. quod etiam videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia vero AI, B*K*, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13, [a] erunt anguli *AIB*, IB*K*, æquales duobus rectis; Ac proinde, cũ ſint inter ſe æquales. (Ducta enim alia diametro I *K*; cum latera AI, IB, trianguli *AIB*, æqualia ſint lateribus *K*B, BI; & baſes quoque *AB*, I*K*, æquales; [b] Erunt anguli *AIB*, I B *K*, æquales) recti erunt; [c] ideoque quadratum rectæ propoſitæ A *B*, æquale erit quadratis rectarum A*I*, IB: Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypotheſi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia ſunt quadratis rectarum C D, CE; Ac propterea cum CE, ſit maius ſegmentum ipſius C D, diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius I B, ſimiliter diuiſæ; (Nam IB, ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt I*A*, latus Icoſadri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, [d] maius ſegmentum eſſe æquale lateri eiuſdem pentagoni) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi *I* A, lateri Icoſaedri. [e] Cum enim ſit vt C D, ad C E, ita *I*B, ad IA; [f] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ *I*B, ad quadratum rectæ *I A*; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum I*B*, I*A*, ad quadratum rectæ I *A*: Oſtenſa ſunt autem quadratis rectarum *CD*, *CE*, æqualia quadrata rectarum *I B*, *IA*; [g] Igitur & quadrato rectæ *CE*, æquale eſt quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, *I A*, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

29. primi.

8. primi.

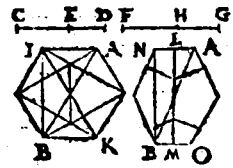
47. primi

8. tertij ec.

2. quarti dec.

22. ſexti.

14. quinti



RVRSVS latera Dodecaedri oppoſita AN, B O, ſecẽtur bifariã in *L*, & M, punctis quæ recta *L*M, & ipſa latera rectæ N*B*; coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales,

æquales, parallelę ſunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Eſt autem recta LM, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, [b] Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ A B, æquale erit quadratis rectarum N B, N A. Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale ſit poſitum quadratis rectarum F G, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, ſit minus ſegmentum ipſius FG, ſectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus ſegmentum ipſius NB, hoc eſt, ipſius LM, ſimiliter diuiſę, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus ſegmentũ ipſi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſupra demonſtrauimus CE, maius ſegmẽtum æquale eſſe ipſi IA, lateri Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 33. primi

[b] 47. primi

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphęra deſcripti duplum minoris ſegmenti.

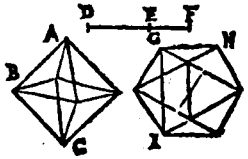
POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius ſegmentum DE, & minus EF, rectę DF, ſectę extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem ſphęrę inſcriptum Icoſaedrum GHI, cuius latus GH, & ſubtendens angulũ pẽtagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI, & diameter HI. Dico quadra-

quadratum lateris G H, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; [a] erit GH, maius segmentum ipsius G I, diuisæ extrema ac media ratione;

[a] 8. tertij decimi.

[b] 5. tertij decimi.

[c] 47. primi



[b] Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione, [c] Quia vero quadratũ diametri HI, æquale est quadratis rectarũ GI, GH, quod angulus IGH rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris A B, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarũ DE, EF: [d] Est autem quadratum diametri H I, duplum quadrati lateris octaedri A B. Igitur & quadrata rectarum G I, G H, dupla sunt quadratorum rectarũ DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratũ rectę GH, ad quadratum rectę EF. (Nã cũ sit vt GI. ad GH, ita DE, ad EF [f] Erit quoq; vt quadra tũ rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratũ rectæ DE, ad quadratũ rectę EF; & cõponendo, vt quadrata rectarum GI, GH ad quadratũ rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF. Et permutãdo, vt quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum DE, E F, ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ G H, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 8. tertij decimi.

[b] 5. tertij decimi.

[c] 47. primi

[d] 14. tertiidecimi.

[e] 2. quartidecimi.

[f] 22 sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur:

datur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.

LINEA recta AB, ſecta in C, extremæ ac media ratione conſtituat cum recta AD, quæ æqualis ſit minori ſegmento AC, angulum rectum A, cui recta ſubtendatur BD, ſitq; recta E, potentia ſubdupla ipſius BD. Dico E. latus eſſe octaedri illius ſphæræ, in qua AD, vel AC, latus eſt Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. maius ſegmentum BC, latus ſit cubi illius ſphæræ, cuius minus ſegmẽtum AC, vel AD, latus eſt Dodecaedri; erit diameter illius ſphęrę potentia triplæ maioris ſegmenti BC, nempe lateris cubi: [a] Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris ſegmenti, tripla eiuſdem quadrati maioris ſegmenti BC. Quadratum igitur diametri ſphęrę, æquale erit quadratis rectarũ AB, AD, hoc eſt, quadrato rectę BD; Ac proinde recta BD, diameter eſt ſphæræ. [b] Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; Poſsit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia ſubdupla ipſius BD; Erit E, latus Octaedri eiuſdem ſphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuiſa, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 4. tertiidc.

[b] 14. tertijdec.

COROLLARIVM.

[c] QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia ſeſquialterum eſt lateris cubi BC, cuius maius ſegmentum eſt AD, latus Dodecaedri, vt conſtat ex ijs, quæ oſtendimus ad propoſ. 4. lib. 13. cum BC, ſit ma-

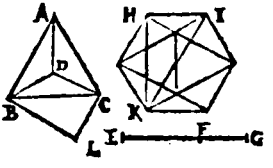
[c] 18. tertijdec.

ius ſegmentum, & AD, minus rectæ AB, extrema ac media ratione diuiſæ: Perſpicuum eſt, ſi linea quæuis recta (nimirum BC,) ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum (nimirum AD,) eſſe latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ, in qua Octaedrum deſcriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri poſſit maius & minus ſegmentum lineę rectæ extrema ac media ratione ſectę: latus Icoſaedri eidem ſphęræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius ſegmentum EF, & minus FG, rectę EG, diuiſæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icoſaedri HIK, eiuſdem ſphęrę. Dico HI, rectã potẽtia eſſe ſeſquialteram minoris ſegmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, connectaturque recta IK, diameter.



[a] Quia igitur HI, eſt maius ſegmentum rectæ HK, diuiſę extrema ac media ratione; [b] Erit quoque compoſita KHI, diuiſa eodem modo in H, maiuſque ſegmentum HK, & minus HI. [c] Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulũ BCL, ita vt BL, recta ipſi EF, & CL, ipſi FG, ſit æqualis. [d] Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur poſſe rectas BL, CL, hoc eſt, rectas EF, FG: Eſt autem & angulus IHK, rectus, vt propoſ. 23. huius lib. oſtendimus; Eſtque

[a] 8. tertij dec.
[b] 5. tertij dec.
[c] 22. primi
[d] 48. primi

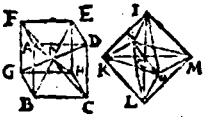
[a] Estque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. [b] Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt, [c] Ac propterea vt KI, ad HI, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CK: [d] Atqui IK diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FG. Si latus itaque Tetraedri possit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 2. quinti.
[b] 6 sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 13. terti. &c.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

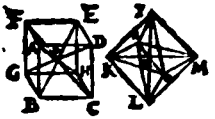
CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphęra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæræ cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eã esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec nõ, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines, (Cum enim circuli descripti circa pyramides, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter a centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triãgulum; æqualiter distabũt bases pyramidũ cubi, & Octae-



[e] 21. quartidecimi

& Octaedri a centro ſphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. demonſtrauimus, vt ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies videlicet tota cubi, ad baſim pyramidis Octaedri; Ideoque rurſus, ex eodem ſcholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.



SINT rurſus in eadé ſphæra cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphæræ, ſeu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars A M; Item ex ſemidiametro E L, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum, in quas Octaedrũ ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. [a] ſeſquialterum eſt quadrati BD, lateris cubi BC: Eſt autem & recta AB, rectæ BM, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabuntur baſes IFKH, BD, & altitudines AB, BM: [b] Ac propterea parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo ſuper baſim BD. & ſub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rurſus quia recta EL, rectæ EN, tripla eſt; erit & parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſim, & ſub altitudine EN, vt in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplum eſt pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propoſ. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper

[a] 18. tertiædecimi.

[b] 34. vndec.

ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla ſit altitudinis EN.



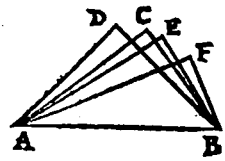
Item Octaedrum EFGHIK, duplũ eſt pyramidis IFKHE. Aequale igitur erit parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, eſt ad parallelepipedũ ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita eſt AB, ad EL. (Cum enim ſit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL; & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, æquale eſt oſtenſum cubo ABCD; Et parallelepipedũ ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, æquale eſt Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandũ proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 16. quartidecimi

SCHOLIVM.

QVIA demonſtratum eſt [b] *, diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialterã potentia lateris Tetraedri, ita vt, ſi quadratũ diametri ponatur 3. partium, earũdem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; per ſpicuũ eſt, ſi ex quadrato diametri data auferatur quadratũ duas tertias illius partes continens, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtẽdimus, latus, huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam, ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodẽ ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem quadratũ lateris*

[b] 13. tertiidec.



Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur A B, *ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ* AC, *continens duas tertias partes, quadrati diametri* AB; *Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum* AC, BC, *quadrato diametri* AB, *æqualia, ita vt quadratum rectæ* AC, *duplum ſit quadrati rectæ* BC; *Erit recta* AC, *latus Tetraedri.*

[a] 14. tertij dec.

RVRSVS, cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri; *Fit, ſi ex quadrato diametri* AB, *dematur quadratum rectæ* AD, *quod dimidium ſit quadrati diametri* AB; *Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum* AD, BD, *quadrato diametri* AB, *æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis, ſecundum doctrinam ſcholij propoſ. 33. lib. 6. rectam* AD, *latus eſſe* Octaedri.

[b] 15. tertij decimi.

DEINDE, quoniam docuimus, diametrum ſphæræ potentia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri AB, *auferatur quadratum rectæ* BC, *quod tertia pars ſit quadrati diametri* AB; *Vel ſi quadrato diametri* AB, *eò ſtruantur duo quadrata æqualia rectarum* AC, BC, *ita vt quadratum rectæ* AC, *duplum ſit quadrati rectæ* BC, *iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam* BC, *cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter* AB, *poſsit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri* AB, *auferatur quadratum lateris Tetraedri* AC, *relinqui quadratum lateris cubi* BC: *Quemadmodum e contrario, ſi ex quadrato diametri* AB, *tollatur quadratum lateris cubi* BC, *remanet quadratum lateris Tetraedri* AC.

[c] 23. quarti decimi.

PRAETEREA, quia ſi recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius ſegmentum; Maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cuius diameter eſt recta prior linea; Conſtat, ſi quadrato diametri AB, *exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum* AE, BE, *proportionem habentium, quam recta quauis extrema ac media ratione diuiſa ad maius ſegmen-*

segmentum; Rectam minorem B E, *esse Icosaedri latus.*

POSTREMO, quoniam si recta quapiam potuerit totã aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; [a] *Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri* A B, *constituantur duo quadrata æqualia rectarum* AF, BF, *proportionem habentium, quam quacunq; recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam* B F, *latus esse Dodecaedri.*

[a] 23. quartidec.

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt: Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiecimus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

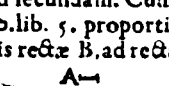
THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineę rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectę A, B, C, D, continue proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt *A*, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertię ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secũdę ad

secundam,& proportionem D,ad G, quartæ ad quartã, esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10.lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B,ad rectam A ; a habeat autem & quadratum rectæ B,ad quadratum rectæ A,duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B,ad rectam A: Erit vt recta C,ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, vt recta F,ad rectam A, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A: Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A , ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectę B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam A; & quadratum rectæ A , ad quadratum rectæ E, vt recta A , ad rectam F; Erit ex æquo quadratum rectæ B , ad quadratum rectæ E, vt recta C,ad rectam F: b Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B , ad rectam E . Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B , ad rectam E. Quod est primum.

a 20. sexti.



quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

b 20. sexti

RVRSVS cum recta D,ad rectam A,ex defin. 10. lib. 5.proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; c habeat autem & cubus rectæ B, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B,ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectã A, ita cubus rectæ B , ad cubum rectæ A. Eadem ratione erit vt recta G, ad rectã A, ita cubus rectæ E,ad cubum rectæ A ; Et conuertendo vt recta A , ad rectam G , ita cubus rectę A , ad cubum E. Quia ergo est cubus rectæ B,ad cubum rectæ A, vt recta D,ad rectam A;& cubus rectæ A, ad cubum rectæ E, vt recta A,ad rectam G; Erit ex æquo,cubus rectæ B, ad cubum rectę E, vt recta D,ad rectam G: d Est autem proportio

c 33. vnde.

Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G,

d 33. vnde.

portio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectę B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineę rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HOC idē demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositū BC, recta perpendicularis AD, quæ bifariam secabit latus BC, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris AB. Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris AB, ad triāgulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris AB, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub AD, BD, æquale sit triangulum ABC, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. [b] Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E: Aequalia erunt triangulum ABC, & quadratum rectæ E. [c] Quoniam uero quadratum lateris



[a] 13. sexti

[b] 17. sexti

[c] 20. sexti

ris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB, ad rectam E; Conſtat, quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.

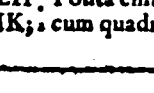
COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter AD, DB, æquale eſſe triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpẽdicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiuſuis ABCD, & Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E, ad latus oppoſitum FG, deducta diuidens FG, latus bifariam, ex coroll. propoſ. 12. huius lib. Dico, eſſe quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli EF, ad perpendicularem EH. Poſita enim inter EH, FH, media proportionali IK; cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum ſit quadrati



* 18. ſertij dec.

quadrati lateris cubi *AB*, [a] sit autem & duplum rectangu li sub latere *EF*, & dimidio eius *FH*, eo quod dictū quadratum. & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe *EF*: Erit rectangulum sub *EF*, *FH*, æquale quadrato lateris *AB*; [b] Ac propterea *AB*, media proportiona lis erit inter *EF*, *FH*, hoc est, tres rectæ *FH*, *AB*, *EF*, cōtinue erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ *FH*, *IK*, *EH*, continue proportionales, ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit *FH*, [c] erit proportio rectæ *EF*, ad rectam *EH*, tertiæ ad tertiā, proportionis rectæ *AB*, ad rectam *IK*, secundæ ad secundam duplicata. Quare cum & quadratum *AC*, rectæ *AB*, ad quadratum rectę *IK*, hoc est, ad triangulum *EFG*, (est enim ex coroll. propos. 29. huius lib. quadratum rectę *IK*, æquale triangulo *EFG*,) [d] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ *AB*, ad rectam *IK*; Erit quadratum cubi *AC*, ad triangulū Tetraedri *EFG*, vt latus *EF*, ad perpendicularem *EH*. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphæra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. sexti.

[b] 17. sexti.

[c] 28. quarti dat.

FH. IK. EF. EH.

[d] 20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis vero, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

SIT Tetraedri triangulū *ABC*, & altitudo, seu axis Tetraedri *DE*, latusq; cubi eiusdē sphęrę *F*. Dico latus Tetraedri *AB*, esse potētia sesquialterū axis *DE*: *Axem* vero *DE*, potentia sesquitertiū lateris cubi *F*. Nā circa

[a] 5. quarti.



triangulum, descripto circulo A B C; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis DE, vt constat ex propos. 15 huius lib. ducatur A D, semidiameter, & AE, latus Tetraedri. Quia igitur quadratũ lateris A E, hoc est, lateris A B, [b] æquale est quadratis rectarum A D, D E, [c] & triplum quadrati semidiametri A D; Fit, vt posito quadrato lateris A B, seu A E, partium 6. quadratum rectę A D, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

[b] 47. primi

[c] 12. tertiidec.

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, [d] potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris A B; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis D E, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 13. tertiidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. [e] *quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem vero partium 4. ostensum est quadratum axis DE; perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde,* [f] *cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. appparet. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.*

[e] 13. tertiidecimi.

[f] 20. sexti

COROL-

COROLLARIVM II.

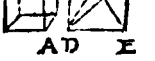
CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinẽ Tetraedri ad latus cubi eidem sphæra inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet [a] *tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deducta, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi.*

[a] 12. quartidec.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidẽ sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus *ABC*, & Tetraedrum *DEFG*. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [b] Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendiculare dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata *ABC*, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma



[b] 30. quartidec.

ma DEFGHI, triplum eſt pyramidis, ſeu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiuſdem tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphęræ inſcripti. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM

VNDE priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. Oſtenſum enim eſt, cubum ABC, æqualem eſſe priſmati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

ET SOLIDORVM QVINTVM vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus

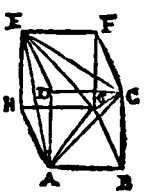
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

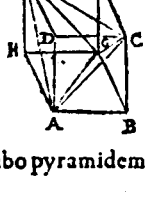
I.

IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato ABCDEFG*H*, oporteat deſcribere pyramidē, ſeu tetraedrū. *A*b vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri E A, E G, E C, ex quarū extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus baſibus. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales ſunt, quod potētia duplæ ſint late-



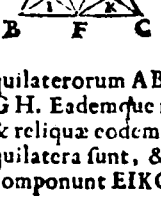
laterum æqualium quadratorum, vt in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAF, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; Ac propterea pyramidem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur, manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 31. lib 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.



2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedo *A B C D*, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis E F, F G, G E, *H I*, *I K*, *K H*, *E I*, *I F*, *F K*, *K G*, *G H*, *H E*, cõstituentur octo triangula, quorum quidem quatuor *E H I*, *I H K*, *K H G*, *G H E*, supra planum *E I K G*; quatuor autem *I F E*, *E F G*, *G F K*, *K F I*; infra idem planum cõsistunt. Quoniam vero latera *A E*, *A H*, trianguli *A E H*, æqualia sunt lateribus *A G*, *A H*, triãguli *A G H*, quod sint dimidia rectarum æqualium *A B*, *A D*, *A C*; Item & anguli contenti *E A H*, *G A H*, æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterorum *A B D*, *A C D*: [a] æquales erunt bases *E H*, *G H*. Eademque ratione æquales erunt rectæ *E H*, *H I*, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum componunt *E I K G H F*; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra



[a] *4 primi.*

intra tetraedrum deſcriptum eſt; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex conſtructione. In data igitur pyramide octaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

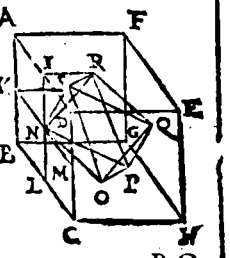
QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata ſunt aequalia, ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecãtia, vt in coroll. 1. prop. 14. lib. 13. demonſtrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, ſecat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipſam diuidit in pyramidem HIKD, & priſma HIKGAE; nection in pyramidem EBFI, & priſma EFCGKI; Conſtat autem pyramidem pyramidi eſſe aequalem, & priſma priſmati: [a] *Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifeſtum eſt, ſi in tetraedro octaedrum inſcribatur, tetraedrum bifariam ſecari, tribus quadratis aequalibus, quae octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant.*

[a] 3. duode.

PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

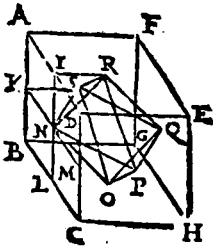
IN dato cubo octaedrum deſcribere.

DESCRIBENDVM ſit octaedrum in cubo dato AH. Diuidãtur latera baſis ABCD, bifariã in punctis I, K, L, M, quę connectantur rectis IL, KM, ſecantibus ſeſe in N, pũcto, quod quidem centrum eſt quadrati ABCD, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum baſium centra O,



P. Q,

P,Q,R,S. Erunt igitur omnes rectæ, ex dictis centris ductæ ad media puncta basiũ, cuiusmodi sunt NI, RI, NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, vt perspicuum est ex prædicta demonstratione propos. 8. lib. 4. Postremo si præfata cẽtra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triãgula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planũ NOQR; quatuor autẽ OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum est; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis sit recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt bases NR, NS, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum e centris ducantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI. ductas esse ad I, dimidiũ lateris AD, quod commune est quadratis AC, AE, quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ sunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune est quadratis AC, AG, quorum centra existunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt & æqualia inter se; ideoque Octaedrum constituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum est descriptum, cum omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centris.



[a] 11. vnd.

[b] 4. primi.

centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcriplimus. Quod faciendum erat.

ALITER. [a] In cubo dato inſcribatur pyramis; [b] In hac deinde pyramide Octaedrū figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonſtratione propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

[a] 1. quintidecimi.
[b] 2. quintidecimi

COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO, ſi ducerentur, ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra baſium cubi oppoſitarū: Manifeſtum eſt, rectas lineas centra baſium cubi oppoſitarum connectentes non ſolum ſe ſe mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. ſed etiam ad angulos rectos, vt hic oſtendimus, diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

IN dato octaedro cubum inſcribere.

DATVM octaedrum ſit *ABCDEF*, in quo oporteat deſcribere cubum. Quoniam in octaedro ſex pyramides quadrangulę continentur, quarum videlicet vertices ſunt ſex anguli octaedri, & quęlibet duę octaedrum conſtituunt; ſit vna earum pyramis A BCDE, cuius baſis *ABCD*, quadratum, triā gula vero equilatera ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quę ducantur



rc tę

rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC CD, DA, Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habeant communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, cõmune triangulis EMN, NEO; & denique EO, cõmune triãgulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triãgulũ LME, triãgulo EMN, hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostẽdemus. Quocirca & quatuor rectę LM, MN, NO, OL, inter se æquales sũt.



[a] Quia vero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP; [b] Est autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, [d] parallelum est plano ABCD; ipsa quoque inter se parallela erunt, atq; adeo, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per coroll. propos. 12. lib.

[a] 15. quinti.
[b] 2. sexti.
[c] 10. vndec.
[d] 15. vndec.

12.lib.13. [a] Erunt & baſes KL,KO,æquales, hoc eſt, recta L O, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione L M, MN, NO, bifariam ſecabuntur in G,H,I. Ac propterea rectæ GL,GM, HM,HN, IN,IO, KO,KL, cum ſint laterũ quadrati LN, dimidia, æquales inter ſeærunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [b] æquales erunt & rectæ GH,HI,IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati L N, angulosque comprehendunt rectos; ([c] cum enim anguli LKG,GKI,IKO, duobus ſint rectis æquales; Sint autem LKG,IKO, per corollarium 2.propoſ.32.lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus GKI; Eademq; ratione recti erũt anguli KGH,GHI, HIK.) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi

[b] 4. primi

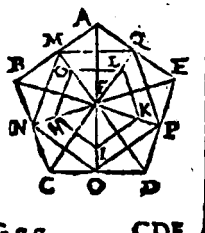
[c] 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

5.
6.

IN dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum videlicet baſes ſunt pẽtagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices vero, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius baſis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF,



CDF, DEF, EAF, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectãtur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. bifariã ſecabũt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales ſint, quę cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, [a] æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum, æqualium ad baſes oppoſitas demiſſæ. Cum enim latera FB, BM, trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, æqualia ſint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; [c] erunt baſes FM, FN, æquales; & ſic de reliquis. Quoniam vero & rectę FG, FH, FI, FK, FL, nimirum ſemidiametri circulorum ęqualium triangula æquilatera æqualia circũſcribentiũ, ęquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratum eſt; [d] Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. [e] Rurſus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quã anguli BNM, MNO, ONC, æquales ſunt duobus rectis. [f] Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, exiſtens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales ſint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplę ſunt ipſarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll. propoſ. 18. lib. 14. [g] parallelæ erunt



[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 13. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. ſexti.

læ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipſis MN, NO, OP, PQ, QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter ſe æquales erunt.[b] Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela ſunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto, conueniuntque in recta HI; ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum conſtituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 10. vnde.

[b] 15. vnde.

COROLLARIVM.

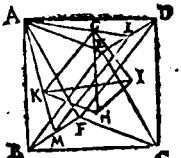
ITAQVE cum omnes rectæ e centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentium, atque adeo eorundem diſtantiæ exiſtant a centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemm. 2. eiuſdem propoſ. 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

10. 5.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro *ABCDEF*. In pyramide octaedri superiori ABCDE, sumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerso sibi respondentium AED, BEC; Item in pyramide inferiori *ABCDF*, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AF*B*: quæ quidem centra coniũgantur sex rectis *GH*, *GI*, *GK*, HI, H*K*, I*K*, vt fiat pyramis HI*K*G. Deinde ex A, demittantur per centra G, *K*, rectæ AL, AM, secantes latera opposita octaedri D E, B F, bifariam in *L*, & M, per scholium propos. 12. *lib.* 13. coniungaturq; recta *L* M, [a] quæ ipsi *BE*, vel *FD*, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, F*M*, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterũ D E, BF, oppositorũ in quadrato *EF*.



33. primi

Quoniam vero rectæ *A* L, A M, sectæ sunt proportionaliter in G, & *K*, punctis, quod AG, A*K*, dupla sint ipsarum GL, K*M*, ex coroll. propos. 18. lib. 14. [b] Erunt G*K*, LM, parallelæ; *A*c propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triãgula ALM, AGK, similia. [c] Quare erit vt *A*L, ad LM, ita *A*G, ad GK; & permutando, vt AL, ad *A*G, ita LM, ad GK: [d] Est autẽ AL, ipsius AG, sesquialtera; quod GL, sit tertia pars ipsius *A*L, ideoque AG, eiusdem *A*L, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostẽdemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentiũ sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HI*K*G, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis

2. sexti. 4. sexti.

18. quarti decimi.

confici,

confici, ideoque Tetraedrum cõstitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

ALITER. [a] In octaedro dato inscribatur cubus, [b] & in cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; & in angulis cubi collocẽtur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

[a] 4. quintidecimi.
[b] 1. quintidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA vero ostensum est, vtramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM; [c] *ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse; Atque eadem ratione KH, ipsis FC, EA, parallelam esse;* [d] *Atque id circo planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singula videlicet binis oppositis.*

[c] 9. vndec.
[d] 15. vnde.

COROLLARIVM II.

PRAETEREA, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetraedrum in cubo descriptũ, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituantur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphara circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, vt

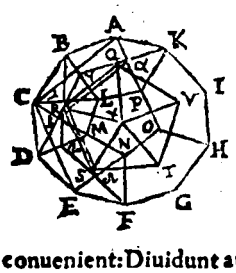
constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphaeræ sesquialtera axis tetraedri in ea sphæra descript: per coroll. 1. propos. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quæ centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deducta.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

0.
7.

IN dato dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, CM, per cētra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoq; in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiusdem propositionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant, (ᵃconstat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) ᵇIgitur Aα, Cβ, parallelæ sunt rectæ BY; ᶜatque adeo & inter se parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM; ᵈquę æquales sunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM,



ª 28. tertij.
ᵇ 28. primi 9. vndec.
ᶜ 4. primi.

DM, æqualia ſint, angulosque contineant æquales. Rectæ ergo ipſas connectentes AC, αβ, æquales erunt, & parallelę. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubtendant rectę CL, EN, per centra R, S, rectę ducatur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γδ, æquales eſſe ipſas CE, γδ: Sunt autem AC, CE, inter ſe æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt conſtat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt verſus X, vt figura monſtrare videtur, ſed extrorſum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter cum & rectę Xα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales ſint, (NãYQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum BL, DM, a centris Q, R, S, circulorum æqualiũ, qui nimirum pentagona æqualia circumſcribunt, atque adeo æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, diſtantię ſunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulorum æqualium, ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt,) Erunt quoque anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales ſint; æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorũ copulantes. Quare triãgula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri LMNOP, conſtituta, æquilatera erũt, & æqualia. Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri, ſimilia triangula conſtruantur: (Habet enim dodecaedrũ viginti angulos ſolidos.) quæ quidem latera habent communia, deſcriptum erit Icoſaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli ſolidi Icoſaedri conſiſtant in centris duodecim baſium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

a 33. primi.

b 4. primi

c 14. tertij.

d 14. tertij.

e 8. primi.

f 4. primi.

o.
8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubum describere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus, *ABCDE*. *EFGHA*, *AHIKB*, *BKLMC*, conuenientia ad latus AB; duo quidem *ABCDE*, *ABKIH*, secundum latus idem commune AB; alia autem duo *AEFGH*, *BCMLK*, secundum angulos *EAH*, *CBK*. In his vero pentagonis subtendantur angulis A, B, D, *I*, rectę EH, *CK*, *CE*, *HK*, quadrilaterum efficientes EHKC. [a] Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferũt ex circulo pentagonum ABCDE, circumscribente arcus æquales; *Erunt* ex scholio prop. 27. lib. 3. rectę AB, *CE*, parallelæ. Eademque ratione parallelę erunt AB, HK. [b] Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; [c] Ac propterea rectæ EH, *CK*, quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, [d] in eodemque cum ipsis plano; ideoque parallelogrammum erit EH*KC*; quod dico esse æquilaterum. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, *DC*, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, angulosque contineãt æquales, ex hypothesi; [e] æquales erũt bases EH, H*K*, K*C*, C*E*. Quia vero planũ *ECKH*, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1. propos. 10. lib. 14. circa quadrilaterum *EK*, descriptum; [f] Erunt tam anguli oppositi E, K, quam C, H, duobus rectis æquales; [g] Ac propterea cum oppositi E, & K, sint æquales, necnon & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli *E*, *C*, K, H, recti. Quare *EK*, quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pẽtagonis similiter octo angulis octo alię rectæ subtendan-



[a] 28. tertij.
[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 7. vndec.
[e] 4. primi.
[f] 22. tertij.
[g] 34. primi.

dantur eodem ordine; cõstitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt; cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis residēt. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum. a 4. primi.

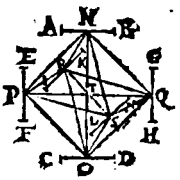
COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse oppositi lateri. Ostensum enim est, CE, ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 10. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum AB, CD; EF, GH, IK, LM, quæ bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. b Quo circa duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN.



b 4. primi.

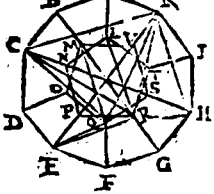
a 4. primi

QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erũt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineãtur; Ac proin de octo triãgula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentq; octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrũ descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pẽtagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus



tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, cõmuni pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex pũctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; b quoniam Dodecaedrũ in sphæra describitur; si planũ triangulí CHK, extendatur, fiet communis ejus sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib. 14. Ac propterea angulus CAH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostẽ-

b 17. tertij decimi

c 31. tertij

ostendemus rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. [a] Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autē quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarū CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH; (Hæ enim rectæ cum subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, [b] æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inscriptum erit intra Dodecaedrum.

ALITER. [c] In proposito Dodecaedro cubus describatur; [d] & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 47. primi

[b] 4. primi

[c] 8. quintidec.

[d] 1. quintidecimi

PROBL. 11. PROPOS. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

[e] DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrū; [f] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cū.n. anguli cubi resideāt in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedri in cētris basiū Icosaedri collocētur; tangēt anguli cubi eadē cētra basiū Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rē in dato Icosaedro cubū descripsimus. Qd faciēd. erat.

PROBL.

O. 11.

[e] 5. quintidec.

[f] 8. quintidecimi

0. 12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

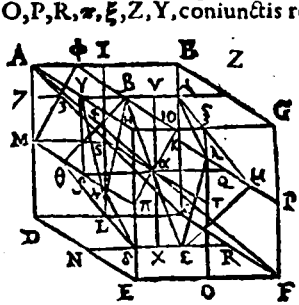
11. *quindecimi* 1. *quindec.* 11. *quindec.* 1. *quintilec.*

IN dato Icoſaedro [a] cubus deſcribatur, [b] & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. [c] Cum enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri; [d] & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri; Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam. In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.

SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrum. Secentur ſingula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, ϖ, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mϖ, KP, NR, nuſquâ inter ſe coeũtibus, ita vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, ſed vna duntaxat, quæ rurſus biſariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ ſe mutuo in centro α, biſariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius lib. docuimus, ſuntq; lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia recta-



rectarum Y Z, M π, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt ſint maiora ſegmenta, Yβ, Zγ, Mθ, πκ, ductis rectis Yρ, Yκ, βϑ, βι. Quoniam ergo Yρ. YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & ρκ, βV, ſegmenta minora rectarum æqualium YV, ρπ, æqualia quoque: [a] Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, ρκ, tripla eiuſdemquadrati rectæ Yβ. Quare, [b] cum quadratis rectarum Yρ, ρκ, æquale ſit quadratũ rectæ Yκ, [c] quod angulus Yρκ, rectus ſit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rurſus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, [d] recta eſt ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum, rectus erit angulus βYκ, ex defin. 3. lib. 11. Ac propterea quadratũ rectæ βκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yβ, exiſtens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ. (quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ, quadrupla etiam ſunt quadrati rectæ Yβ, cum quadratum rectæ Yκ, triplum ſit oſtẽſum quadrati rectæ Yβ.) Ideoque rcum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta βκ, rectę Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplę proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Eſt autem & θκ, dupla ipſius ρκ, quod minora ſegmenta θρ, κρ, rectarum æqualium Mρ, πρ, æqualia ſint. [g] Erit igitur vt Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipſius Yβ, ad θκ, duplam ipſius ρκ: Eſt autem Yβ, maius ſegmentum ad ρκ, rectam minori ſegmento βV, æqualem, vt tota ad maius ſegmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit vt tota ad maius ſegmentum; Ac proinde θκ, erit maius ſegmentum rectę βκ, ſectę extrema ac media ratione. Eadem ratione oſtendemus θκ, maius eſſe ſegmentum rectę βθ, extrema ac media ratione ſectę. ſi nimirum ducatur recta Yϑ. Quare æquales erũt βθ, βκ, conſtituentes triangulum Iſoſceles βϑκ, ſimile illi, quod ab Euclide conſtructum eſt propoſ. 10. lib. 4. vt poſtea demonſtrabimus; Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βϑκ, circumſcribente deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 11. propoſ. lib. 4.

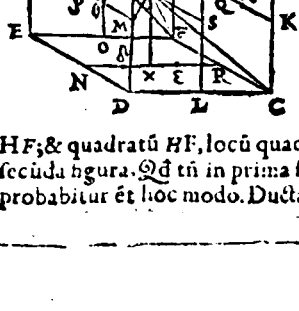
INTELLIGATVR iam planũm trianguli βϑκ, extendi, (ducta per β, recta βφ, ipſi Mπ, parallela,) per parallelas Mπ, φ 10. vt ſit planum extenſum φπ, occurrens

[a] 4. tertii decimi.
[b] 47. primi
[c] 29. primi.
[d] 4. vndec.
[e] 47. primi
[f] 20. ſexti
[g] 15. quinti

rens diametro AC, quadrati A B C D, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi $A\phi$, parallela, connectaturque MS, [a] quæ parallela est vtrique $A\phi$, 73. Quoniam igitur, per coroll. prop. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo AMS; [b] ac proinde vt A M, ad M S, ita est A 7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erũt quoque A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad $A\phi$, ita M 7. ad 73. Est autem A ϕ, maius segmentum rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione. ([c] quod æquales sint Aϕ, Yβ, necnõ & MA, YV, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7 A, maius segmentũ erit rectę M 7. extrema ac media ratione sectæ [d] Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M 7. [e] Atqui vt M 7. ad 7 A, ita est S 3 ad 3. A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusque segmentũ est S 3. [f] Quia vero SαT, parallela est ipsi $M\pi$; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per S α T, planũ ducatur parallelũ plano $\varsigma\pi$, ducto per M π, [g] secabũtur rectæ AS. Aα, in easdẽ rõnes, in punctis 3. & 4. Atque idcirco, cũ AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aα, semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmẽtum erit α 4.

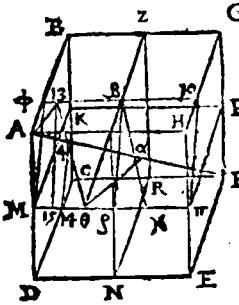
a 33. primi
b 4 sexti
c 34. primi
d 5. tertij d.
e 2. sexti
f 33. primi
g 17. vnde.

IISDEM argumentis ostẽdemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. pũcto extrema ac media ratione a plano $\varphi\varpi$, vt perspicuũ est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt.n. lineamẽta omnino similia lineamẽtis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratũ AC, locũ quadrati HF; & quadratũ HF, locũ quadrati AC, obtineat in hac secũda figura. Qđ tũ in prima figura, sine hac inuersione probabitur ét hoc modo. Ducta diametro cubi H C, i ea figu-



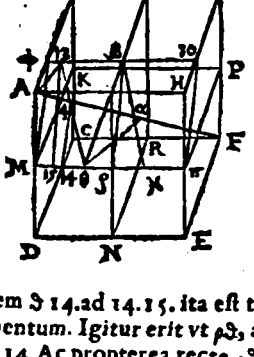
figura,(*Hęc* deeſt in figura,quâ tñ quilibet ducere poterit)quâ planũ $\phi\pi$,ſecet in 9.ppe pũctũ A;intelligaturq; per rectam *AH*,planũ plano $\phi\varpi$,parallelũ.Quoniam igitur rectæ $A\alpha$, $H\alpha$,in centro α,conueniũt,ſecãturq; planis parallelis in punctis A,H,& 4,9,[a] erit vt α 4,ad 4 *A*, ita α 9,ad 9 H.Cum ergo α *A*, ſecta ſit in 4,extrema & media ratione,erit quoque α H,ſimiliter ſecta.quæ quidem demõſtratio locum etiã habet in hac cubi inuerſione in ſecunda figura.Oſtendamus nunc,ſi rectæ iungantur θ 4. β 4, β 9. $\varkappa$ 9. rectilineum β 4 $\varkappa\theta$ 9. in plano $\phi\pi$, exiſtens,pentagonum eſſe æquilaterum, & æquiangulũ.

INVERTATVR rurſum cubus,vt quadrata *ADEH*, *ABGH*, quæ nimirũ continẽt triangulũ $\beta\theta\varkappa$,ſiue planũ $\phi\varpi$,hũc ſitũ habeãt, quẽ mõſtrat tertia hęcfigura. Deinde in plano $\phi\pi$,recta cõiuncta θ 4. extendaĩ vſque ad rectã ϕ 10.in punctum 13. Quoniã igitur ducta recta *K* P, & iũctis rectis M *K*, ϖ P,[b] planũ M P, parallelum eſt plano A G,(quod & rectæ P*K*, *K*M,parallelę ſint rectis GB,BA,)[c] ſecatq; cubũ bifariã;ideoq;per cẽtrũ α,traĩt,per ea,quæ in ſchol. prop.39.lib.11.oſtenſa ſunt;ſi per rectas α 4 *A*, 3 4.13. planũ extẽdatur,[d] fient $\alpha\theta$,A 13.cões ſectiones planorũ MP, *A*G,parallelæ,Ac proinde triãgula $\alpha\theta$ 4. α 13 4.æquiãgula erũt;[e] Eritq;vt α 4.ad 4.A,ita θ 4.ad 4.13.Quare cũ α A,in 4.ſecta ſit extrema ac media ratione,vt oſtẽdimus;eodẽ modo erit ſecta θ 13.in 4.Rurſus plano NZ, per centrũ α,tranſeũti,parallelũ ducatur planũ per punctũ 4.ex ſchol.propoſ.15.lib.11.ſecãs planũ $\phi\pi$,recta 4. 14.[f] Eſt autẽ eidẽ plano NZ,parallelũ planũ DB,[g] Rectę igitur α *A*, ρ M, in caſdẽ rónes ſecabuntur in pũctis 4.& 14. Quocirca & ρ M,in 14. ſecta erit extrema ac media róne minuſq; erit ſegmentũ 14.M,ideoq; æquale minori ρ 3, ipſius Mρ. Quare cũ ex ρ 14.maiori ſegmento ipſius



[a] 17. vnde.
[b] 15. vnde.
[c] 32. vnde.
[d] 16. vnde.
[e] 4. ſexti
[f] 15. vnde.
[g] 17. vnde.

sius ρ M, auferatur ρϑ, minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. ρ 14. diuisa in ϑ, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit ρϑ. Postremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallela,



[a] 2. sexti secabũtur rectę ϑ 13 ϑ 15. proportionaliter; Ac proinde & ϑ 15. secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ϑ 14. [b] Quapropter erit vt ρϑ, maius segmentũ ad ϑ 14. minus, ita ϑ 14. maius ad 14. 15. minus: Vt autem ϑ 14. ad 14. 15. ita est tota ϑ 15. ad ϑ 14. maius segmentum. Igitur erit vt ρϑ, ad ϑ 14. ita ϑ 15. ad eandem ϑ 14. Ac propterea rectę ρϑ, vel ρκ, & ϑ 15. æquales erũt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelũ per 4. 14. ductum, secantur plano φπ, [c] erunt communes sectiones βρ, 4. 14. parallelę, ideoque & 13 15. βρ. parallelę erunt, [d] angulusque externus βρκ, interno 13. 15 ϑ, æqualis. Cum igitur & latera ζρ, ρκ, lateribus 13. 15. 15 ϑ. sint æqualia. [e] aequales erunt iuoque rectę βκ, 13 ϑ; Ac proinde & earum segmenta maiora ϑκ, ϑ 4 (Ostensum enim est ϑκ, esse maius segmentum ipsius βκ,) æqualia erunt. Eadem arte & β 4. ipsi βγ, in prima figura ostendetur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basim βγ, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem ϑκ, βγ, æquales erunt κ 9. β 9. Aequilaterum ergo est pentagonum β 4 θ κ 9 3 quandoquidem βγ, θκ, rectę æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt YV, ZV, πρ, Mρ. Sed & æquiangulum, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triãgula, nimirum ad singulas rectas Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP; bina ipsi βϑκ, similia, & æqualia constituantur (Ita enim ad Mπ, duo huiusmodi triangu la vides

[b] 9. quartidec.

[a] 16. vnde.

[d] 29. primi

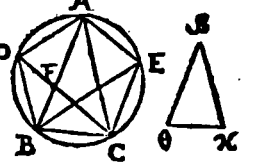
[e] 4. primi.

βθκ

βθκ. ϛθκ) & ipſorũ officio duodecim pentagona ipſi β4. & 9. ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis Mϖ, YZ. NR, IL, ξO, ϰP, bini nimirũ in ſingulis, octo uero reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quę ipſas extrema ac media ratione diuidunt, qualia ſunt puncta 4. & 9. in ſemidiametris Aα, & Hα, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptũ eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrũ, quãuis nõ proprie, cũ non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi cõſtituantur, ſed duodecim quidem in ſex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

LEMMA

QVOD autem triangulum βθκ. cuius baſis θκ. maius ſegmentum exiſtit vtriuſque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diuiſi ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus.



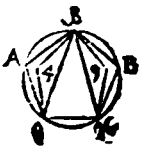
Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles ABC, quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuiſiſque angulis A BC, A C B, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum equilaterum & equiangulum ADBCE, vt propoſ. 11. lib. 4. tradimus, ſecentque ſe mutuo rectæ AB, CD, in F. [a] *Quoniam ergo A B, in F, ſecatur extrema ac media ratione, maiuſque eius ſegmentum eſt A F, æquale lateri BC:* [b] *Erit vt AB, tota ad maius ſuum ſegmentum*

[a] 8. tertiidecimi.

[b] 2. quartidecimi.

tum BC, ita β ϑ, tota ad maius ſuum ſegmentum ϑ ж; Eodemque modo, vt tota A C, ad maius ſegmentum CB, ita β ϑ, tota ad maius ſegmentum ж 9: Eſt autem quoque vt A B, ad A C, ita β 9, ad β ж, vtrobique enim eſt proportio æqualitatis. Triangula igitur β ϑ ж, A B C, proportionalia habentia latera, æquiangula ſunt, æqualeſque erunt anguli 9, B; Item ж, C, & β, A; propterea atque vterque angulorum 9, ж, duplus erit anguli 9; & triangula β 9 ж, A B C, ſimilia.

PENTAGONVM vero β 4 ϑ ж 9, æquilaterum, eſſe quoque æquiangulum, hac ratione oſtendemus. Deſcribatur circa triangulum β ϑ ж, circulus β A ϑ ж B; qui ſi tranſeat per puncta 4, & 9, perſpicuum eſt ex ijs, quæ ad propoſ. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum eſſe. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Deſcribatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propoſ. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A ϑ ж B. Quoniam igitur tam rectæ A ϑ, A β, quam rectæ 4 ϑ, 4 β, æquales ſunt rectæ ϑ ж, cum & β 4 ϑ ж 9, & β A ϑ ж B, pentagonum ſit æquilaterũ; Erunt tã duæ rectæ ϑ A, ϑ 4, quam duæ β A, β 4, æquales. quod fieri non poſſe demonſtratum eſt propoſ. 7. lib. 1. Tranſit ergo circulus triangulo β 9 ж, circumſcriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 9 ж 9, æquiangulum eſt.



SCHOLIVM.

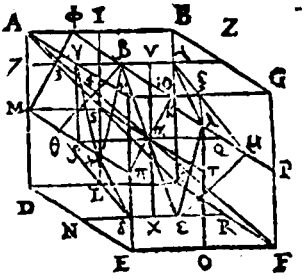
EX his colligere licebit ſequentes propoſitiones.

DIA-

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri βι, intelligaturq; coniuncta recta γι, [a] *aqualis existens & parallela lateri cubi VX, quod & Vγ, Xι, aquales sint, & parallela. Quoniam igitur angulus βVX, rectus est;* [b] *rectus quoque erit angulus βγι, ad γ, constitutus,* [c] *Ac proinde quadratum diametri βι, aquale erit quadratis laterum βγ, γι, nempe Dodecaedri, & cubi.*



[a] 33. primi

[b] 29. primi

[c] 47. primi

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, [d] *cum sit vt ΥV, ad βV, ita Υ Z, dupla ipsius ΥV, ad βγ, duplam ipsius βV; Sit autem βV, minus segmentum ipsius ΥV, secta extrema ac media ratione: Erit & βγ, minus segmentū lateris cubi ΥZ, secti extrema ac media ratione; composita vero ex Υβ, γZ, hoc est, recta βκ, (qua dupla fuit ostensa ipsius Υβ, ideoque composita ex Υβ, γZ, aqualis) maius segmentum. Constat autem ex constructione βγ, esse latus Dodecaedri,* [e] *& Cκ, seu βϑ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendat angulum pentagoni β 9 κ, vel β 4 ϑ.*

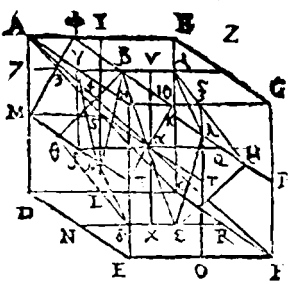
[d] 15. quinti

[e] 8. quinti dec.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi ΥZ, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipso descripti, & ex recta composita ex Υβ, γZ; quæ constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim ΥZ, cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib. Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris ΥZ, secti extrema ac media ratione: Eris βθ, existens quoque maius segmentum eiusdem lateris ΥZ, vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris ΥZ, circumscripti.



8. tertij dec.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

IN prima enim figura, recta connectens puncta β. θ. in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri θκ, oppositi, æqualis est recta VX, (quod & βV. θX. æquales sint, & par allela) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

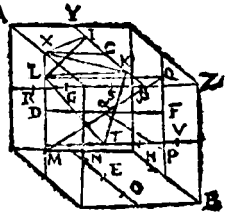
33. primi

PROBL

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrũ describere:

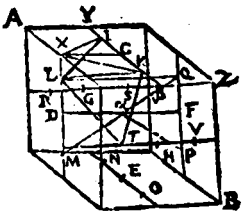
CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium cẽtra C, D, E, F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquã inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K; L, M; N, O; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Cõnectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; [a] & anguli contenti, recti, quod XC, parallela sit ipsi AY; [b] Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK; Ac propterea cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, triãguli LXK, & anguli contenti, recti; [c] æquales erunt bases LI, LK. Rursus [d] quoniam quadratũ rectæ LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX, quadrato rectæ IY; quadratum uero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale est tribus qua-



[a] 29. primi.
[b] 4. primi
[c] 4. primi.
[d] 47. primi

dratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ CI, (a Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdé quadrati rectę CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoq; quadrati rectæ CI; Ac propterea, cũ eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectę KI, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarũ LI, IK, ideoq; & rectæ ipsæ æquales. Aequilaterũ igitur est triangulũ IKL, lateri cubi AG, subtratũ.

a 4. tertij decimi



NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triãgula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triãgulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, commune est triangulo IKL; & latus KT, triangulo TVK; & latus TL, triangulo LMT; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia vigin ti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat facien.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositione sequentes.

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DV-

DVCTA enim recta LQ, [a] *qua lateri cubi DF, parallela est, & aqualis, quod & DL, FQ, parallelæ sint, & æquales;* [b] *manifestum est, quadratum diametri QM, æquale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrū describitur, cum angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, rectus sit.*

[a] 33. primi
[b] 47. primi
[c] 29. primi.

II.

BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, se se in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, eũ coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, seseque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF, FQ, triāguli αFQ, æqualia sunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, [d] *æquales erunt rectæ αQ, αP. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri.*

[d] 4. primi

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim CI, sit maius segmētum rectæ CY; [e] *sitque vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad βY, duplam ipsius CY;* [f] *erit quoque KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi βY.*

[e] 11. quinti
[f] 2. quartidec.

IIII.

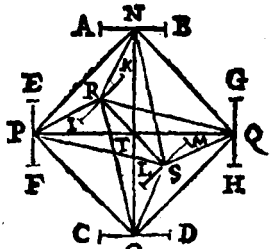
ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter ſe æqualia, angulóſque alternos habentia æquales, ex 4. propoſ. lib 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare a 33. vnde. *qualibet latera oppoſita parallela erunt;* a *Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela.*

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

EXPONANTVR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita, *AB*, *CD*, *EF*, *GH*, *IK*, *LM*, quorum bifarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, iũgant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſe ſe in centro T, bifariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ. præcedentis oſtenſa ſunt; ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; QR, QS, conſtituẽtes octo triãgula SNP, SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum ſint rectarum æqualiũ dimidia) angulóſque continent rectos, vt dictum eſt; b Æquales erunt baſes NS, NP: Eodemq; modo reliquę omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia; Ideoq; Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum eius anguli reſideant in bifariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaq; Icoſaedro Octaedrũ deſcripſimus. Quod faciẽdum erat.



b 4. primi

CO-

COROLLARIVM

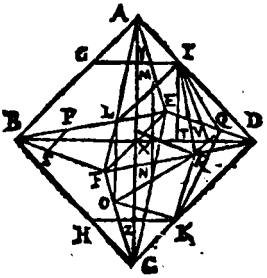
SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoque est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.

DATVM Octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit ABC*DEF*. Cũ a quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur a singulis bina non proxima, sed sibi e regione respondentia, hoc est, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt B*A*, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, *AE*; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nã a quolibet angulo sumẽda sunt tm̃ duo latera; at vero latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdẽ angulos A, C, ĩa sumpta fuere,) *EB*, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati *EBFD*; (Nã latera E*A*, EC; FC, FA, quadrati *A*ECF, iuxta eosdẽ angulos, E, F, iam accepta sunt,) q̃ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, R*L*, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, I*G*, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam linea-

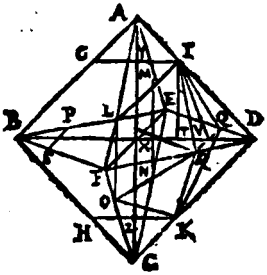
linearum confusionē. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt.n. tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum est, pyramidē constituunt; alia aūt duo sunt in duobus lateribus duorū trianguloru octaedri, quæ habent cōe illud latus, in quo punctū acceptū est. Vt qa punctū acceptū est R, in latere DF, qđ cū tribus DE, DA, DC, pyramidē cōstituit in vertice D, & est cōe triāgulis octaedri DFA, DFC; ppea ex R, ad quinque pūcta horū quinque laterum ductæ sunt lineę rectę, & sic de cæteris. Post hęc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, sese in cētro X, secantibus bifariā, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. prop. 14. lib. 13. quarū AC, BD, secāt rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipsi YX. Q̄m ergo latera DQ, DI, triāguli DQI, æqualia sunt lateribus DR, DI; (Sunt.n. DQ, DR, minora segmenta rectarum æqualium DE, DF,) & angulos cō prehendunt æquales, nēpe triangulorū Octaedri ADE, ADF; [a] Erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cū sit, [b] vt BG, ad GA, ita DI, ad IA; [c] erit GI, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR, ipsi EF, parallela; [d] Ac proinde vt DI, ad IA, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y, extrema ac media ratione. Rursus quia est vt AX, ad XD, ita AY, ad YI, (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & AY, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmentum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualē; ideoq; GI, rectam, bifariā in Y; similiterq; QR, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, triāguli DQR, (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; cōprehendant rectos,



[a] 4. primi.
[d] 2. quarti dec.
[c] 2. sexti
[d] 4. sexti

ctos, nempe quadratorum ABCD, DEBF.[a] Aequales erũt baſes GI, QR. Eadem ratione his æquales oſtendẽtur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtẽdunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, cõplectunturq; duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, maius eſt ſegmẽtum maioris ſegmenti XY, diuiſi extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad prop. 5. lib. 13. Eſt autẽ XY, rectę XV, æqualis. (cum ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD,)[b] & YI, rectæ XT; erit XT, maius ſegmẽtum ipſius XV, & idcirco TV, ſegmẽtum minus eiuſdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc eſt, ipſius IT, (c cum & recta IT, æqualis ſit ipſi XY) & TV, minoris ſegmẽti,[d] tripla ſunt quadrati rectę XT, maioris ſegmenti; Atq; adeo quadratum rectæ IV,[e] æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, triplum eſt eiuſdẽ quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, quæ æqualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cum RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarũ IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: At quadratis rectarũ IV, VR, æquale eſt quadratum rectæ IR, ſ qđ anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & ſubtẽſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoq; recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR; Ac propterea cum eiuſdem quadrati rectę VR, quadruplum quoq; ſit per ſcholium prop. 4. lib. 2. quadratum rectę QR; Aequalia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triãgula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN; atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium ſint æqualia inter ſe. quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis

[a] 4. primi.
[b] 34. primi
[c] 34. primi
[d] 4. tertij de.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 8. primi.



mentis minoribus laterum octaedri; duo vero reliqua ſubtendãt duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum cõtentos ſingulos duobus ſegmentis laterũ Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius triãguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipſa triangula æqualia, per corollarium propoſitionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ, GI, ſubtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehenſos minoribus ſegmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia ſunt. Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum ſubtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorũ ille continetur ſegmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic vero ſegmentis AL, AI, maiore & minore quoque. Non ſecus latera IR, GL, æqualia erũt. Aequalia igitur ſunt triangula IQR, GIL, per corollarium propoſ. 8. lib. 1. Atqui IQR, oſtenſum eſt eſſe æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterum eſt. Eademque eſt ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula ſupponuntur ſex angulis Octaedri, bina videlicet ſingulis. Ex his conſequitur reliqua octo triangula octo baſibus Octaedri impoſita, videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ in AED; GLS, in AFB; HOS, in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque eſſe, & prædictis æqualia, cum horũ latera cum illorum lateribus communia ſint. Viginti ergo hæc triãgula, quorum quina in ſingulis ſectionibus laterũ octaedri conueniunt ad conſtitutionem anguli ſolidi, (vt vides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, ſolidum angulum R, componentibus.) Icoſaedrum componunt Octaedro inſcriptum, cum Icoſaedri duodecim anguli, duodecim ſectiones laterum Octaedri poſſideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

Co-

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe minoris ſegmẽti. Cum. n. in triãgulo æquilatero ADE, maius ſegmentum lateris AD, ſit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, oſtenſa æqualis rectæ GI, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti AI, a cum quadratum rectæ GI, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perſpicuum eſt, & rectam IQ, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris AI. a 47. primi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS fit, cum octo Icoſaedri baſes collocatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. Suſcipiatur namq; Octaedri ſuperioris triangulum AED, in quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri IMQ, ſitq; C, centrum trianguli AED, ex quo rectæ educãtur CA, CE, CD; CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia ſunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ, (quod hæc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) angulosque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. oſtẽdimus; Erũt baſes CM, CQ, æquales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.



CO-

COROLLARIVM III.

NON difficile eſt denique ex dictis colligere, idē centrum eſſe Octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, cētro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunque duos angulos Icoſaedri, ni mirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cum latera XA, AG, trianguli XAG, aequalia ſint lateribus YF, FO, trianguli XFO, (Nā XA, XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FO, ſegmenta minora laterū aequalium Octaedri ſectorū extrema ac media ratione) angulosque complectantur aequales, ſemirectos videlicet; (cū AC, EF, diametri ſint quadratorū ABCD, EAFC; ac proinde, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam ſecent.) Aequales erunt & baſes XG, XO. Eodemque argumēto oſtendentur omnes aliae rectae ex X, ductae ad angulos Icoſaedri aequales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque eſt Icoſaedri.



[a] *4. primi.*

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

[b] *16. quintidecimi.*
[c] *5. quintidec.*

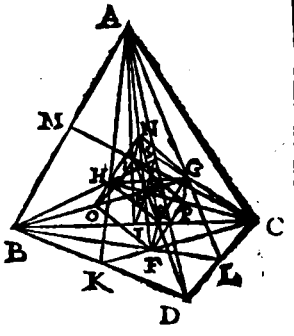
[b] INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrū; & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumq; erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarum octo concētricae ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. Manifeſtum eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem cētris octo baſium Octaedri, reliquos autē duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binae ſingulis ex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quan-

quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere poteſt. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

IN data Pyramide cubū deſcribere.

DETVR pyramis *ABCD*, in qua cubus iubetur deſcribi, ſitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur AEF, BEG, CEH, DE*I*, quæ cadent in centra baſium oppoſitarum *F*, G, H, *I*, eruntque perpendiculares ad eaſdē baſes BCD, *A*CD, ABD, AB*C*. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AH*K*, AGL, A*I*T, BF*L*, BHS, C*I*M, *C*FK, CGS, ſecantes baſes oppoſitas BD, CD, AB, AD, B*C*, bifariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis *K*, L, *M*, S, T. Secentur quoque rectæ ex ſolidis angulis p centrum E, demiſſę *A*F, BG, CH, D*I*, b fariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (centris, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circumſtantium, ita vt relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis cōiungātur, vt N, cū G, H, *I*; O, cū F, H, *I*; P, cū F, G, *I*; & Q, cū F, G, H. Dico ſolidū NF, contētum quadrilateris NO, NP, *N*Q, FG, FH, F*I*, cubū eſſe. Cū. n. latera AF, F*K*, trianguli AF*K*, æqualia ſint lateribus AF, FL, triāguli AFL, (qđ F*K*, FL, cū ꝑpendiculares ſint ad *B*D, CD, ex cētro F, ductæ oſtēdāt æquales diſtātias rectarū æqualium



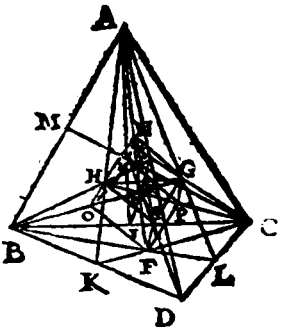
a 15. quarti dec.

æqualium BD, CD, a centro F, angulosque continent rectos; ex 3. defin. lib. 11. [a] Æquales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, trianguli ANG, (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualiũ ABD, ACD) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; [b] Æquales erunt bases NH, NG. Haud secus ostendentur æquales rectæ QG, QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si. n. recta ducatur FT, cũ latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK. (Sunt namque FT, FK, distantiæ rectarum æqualium BC, BD, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualiũ ABC, ABD;) angulosque contineant æquales: [c] Æquales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.

[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 4. primi.



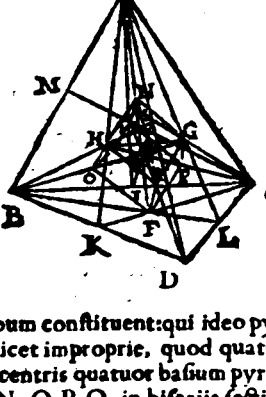
ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter octaedri in pyramide descripti, vt constat ex figura propos. 12. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum

F, cum & in illa sint latera opposita, sive non coeuntia BC. AD. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, vt mox demonstrabimus, transibit ST, per E, centrum pyramidis, aequalesque erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, per scholium propos. 12. lib. 13. erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiae partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter secantur, atque idcirco HG, parallela est lateri BC, secatq; latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC,) proportionaliter; idcoque & SR, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duae tertiae partes dimidiae SE. Rursus quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundē partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque ideirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadē ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secentur, recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars est triāguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE; tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duae tertiae partes eiusdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R, secabitur SE, a rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipsae HG, NQ, in eodem se se puncto intersecabunt. Quare in eodem sunt plano, propterea que & rectae HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ. Eademque est ratio de caeteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

CVM ostensa sit HG, ipsi BC, parallela, atque adeo triangulum SHG, simile triangulo SBC, ex coroll. propos. 4. lib. 6. erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC: Est autem SH, tertia pars ipsius SB: igitur & HG, tertia pars erit late-

[a] 12. quarti decimi.
[b] 2. sexti.
[c] 15. quarti decimi.
[d] 2. sexti
[e] 2. vndec.
[f] 2. sexti

ris BC. Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; [a] æquales erũt quatuor anguli HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cũ ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad ppos. 32. lib. 1. recti erunt; ideoq; quadratum erit NQ. Ademque ratione quadrata erunt reliqua quadri. latera; Ac præterea cubum constituent: qui ideo pyramidi dicetur *inscriptus*, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor basium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius bases ductarum residebant, vt constat.



[a] 8. primi.

ALITER. In data pyramide describatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in cẽtris octo basium octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex prop. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis quemadmodum etiam in priori demõstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. ([b] cum enim rectæ EG, EH, parallelæ sint rectis BC, BD; [c] erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas qua-

[b] 2. sexti.
[c] 15. vndec.

quatuor reliquas baſes octaedri perpẽdiculares, ex ſcholio prop. 14 lib. 11. Quare cũ prædictæ baſes abſcindant ex pyramidẽ pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt. * Et quia dictæ quatuor baſes octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc eſt, bifariã; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

* 7. vndec.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum per E, centrum pyramidis tranſeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorũ laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamq; eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis GNHQ, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat; Recta RS, dupla ipſius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, oſtenſa ſit tertia pars ipſius ST; perſpicuum eſt, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis AD, BC, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi RS.

LEMMA.

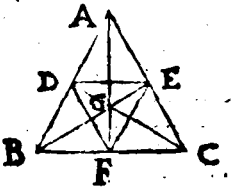
IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primum pyramis ABCD, cuius omnia sex latera bifariā secētur in E, F, G, H, I, K; & ex L, cētro Pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniā latera LM, ME, triāguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi a centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, a centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3 lib. 11.



14. primi. *Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cū igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea descripti.*

SIT deinde in basi pyramidis ABC, basis octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex

ex propoſ. 2. huius lib. ſit autem G, centrum trianguli ABC, a quo ad angulos vtriuſque baſis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia ſunt, angulosq; continẽt æquales, nimirũ ſemiſſes angulorum æqualium trianguli æquilateri: erunt & baſes GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum eſt trianguli DEF. quod eſt propoſitum.

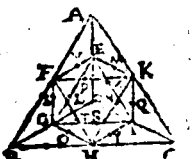


[a] 4. primi

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATAE Pyramidi ABCD, [b] inſcribatur octaedrũ EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina ſumãtur ex ſingulis angulis ſibi reſpõdentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorum octaedri cadentia, vt in propoſ. 16 huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH. in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quodlibet horum põctorum cum quinque proximis conjunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. deſcriptum erit Icoſaedrũ in dicto octaedro, vt cõſtat ex prop. 16 huius lib. habẽs oẽs duodecim angulos in duodecim pfatis ſectionibus duodecim laterũ octaedri. Cũ ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſiũ Pyramidis ſint ducta; manifeſtũ



[b] 2. quinti decim.

est, duodecim angulos Icosaedri in planis basium pyramidis constitui. ternos. s. in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nã in basi ABC, existunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit. per defin. 31. lib. 11 cuius quidem quatuor bases MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt cõstat. In data igitur Pyramide Icosaedrũ descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum describere.

PYRAMIDI datæ inscribatur Icosaedrum, [b] & in hoc Dodecaedrũ habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus; cõsistẽt quatuor anguli Dodecaedri dicto icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt. n. dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde, quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, [d] quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictũ est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictũ Dodecaedrũ descriptũ esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non proprie. Quam ob rẽ in data Pyramide

[a] 19. quintidec.
[b] 5. quintidec.
[c] 2. quintidec.
[d] 18. quintidecimi.

de Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 21. PROPOS. 21. 13.

IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

EX centro ſphæræ datum ſolidum cõplectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex corol. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, a quales cum ſint, æqualiter a centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies contingat ſingulas baſes in earum centris.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque ſolidorum regularium in quatuor reliquis inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum impropriè deſcribitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non propriè in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 18. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt propriè ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti cõſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31. lib. 11. expoſuimus: qua quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta. [a] *In octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim pũctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione ſecatur. Deinde* [b] *Icoſaedro imponitur Dodecaedrũ, & eidẽ octaedro inſcri-*

[a] 16. quinti decimi

[b] 5. quinti decimi

scriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro describitus est. Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

a 8. quintidecimi & b 1. quintidecimi

NEQVE vero prætereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, & conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat, sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoq; cubum atque pyramidem, cum sphæra illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

c 1. quintidecimi. d 8. quintidec.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: In centris quidem, basium Icosaedri, propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesve quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2, 18. 19. 20: In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMEN-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM,

Quo varia ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, a Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

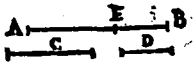
QVEMADMODVM *libro 14. tradita ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur,

tur,& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius segmentum ad minus rectę lineę diuisę extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, descripti sit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, descripti sit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quâ habet *AE* maius segmentum ad EB, minus. Cũ enim, vt in scholio vltimæ propos. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubusq; in illo descriptus, eadem comprehendantur sphæra; Diuiso autem latere cubi extrema ac media ratione, maius segmentum sit latus Dodecaedri in eadẽ sphæra cum cubo descripti, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. erit AE, maius segmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadẽ sphæra, & circa cubum illum descripti. Rursus quia ex demõstratis in scholio propos 13. lib. 15. si diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri in cubo illo descripti; erit EB, minus segmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo describitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circũscripti ad D, latus Dodecaedri eidẽ cubo inscripti, vt *AE* maius segmentũ ad EB minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatã lateris C, ad latus D, ex coroll. propos. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris segmenti *AE*, ad minus segmentum EB. Quocirca si Dodecaedro cubus inscribatur, &c. Quod erat demõstrandũ.

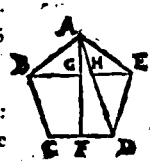


THE-

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono æquilatero, & æquiangulo ABCDE, ex angulo A ad latus oppositum CD, perpendicularis demittatur AF. Dico AF, a recta BE, subtẽdente angulum A, secari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, quæ secet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD, ex scholio propos. 18. lib. 13 est parallela, a secabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter: b Atqui AD, in H, secta est extrema ac media ratione, estque maius segmentũ DH. Igitur & AF, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.



a 2. sexti

b 18. terti-decimi.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectę oppositа latera secantes extrema ac media ratione, ita vt ppe quẽuis angulũ maius sit segmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio pducent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptã quidem

quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit *A B C*, cuius latera bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD. quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, cõstituentes GHI, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis BK, CL, AM. Dico has rectas suis sectionibus producere triãgulũ Icosaedri GHI, hoc est, rectam BK, transire per puncta G, I; & rectam CL, per pũcta H, I; & rectam AM, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipsi B C, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, simile, ex coroll propos. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum & FEC, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo ABC, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis est rectæ FH, maiori segmento rectæ FE, seu DF, ipsi æqualis: (Est enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualiũ laterum eiusdem trianguli comprehensos; ideoque æqualia sint.) Est autem & NH, æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, propterea quod FH, DF, parallelæ sunt rectis AB, BC seu NO. Ipsitur recta NO, composita ex NH, tota, & HO, maiori segmento, secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum ereparallelæ BC, NO, DF, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Rectæ autem AM, ex iis, quæ demonstrauimus



a 4. primi.
b 34. primi.
c 2. sexti.
d 5. tertij. dec.

uimus ad propoſ.4.lib.6.ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat,ipſam AM,tranſire per puncta G,H. Haud ſecus oſtendemus BK,per puncta G,I,& CL, per puncta H. I. tranſire,ſi per G,& I,rectæ ducantur parallelæ lateribus AC,AB;Atque idcirco rectæ BK,CL, AM, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri GHI.

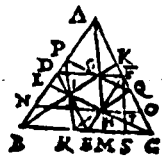
AGATVR iam per G,recta PQ, rectæ CL,parallela.Quoniam igitur AF, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectæ FE,cuius maius ſegmentum fuit FH, hoc eſt, FO, illi æqualis; Erit quoque FO, maius ſegmentum rectæ AF; ac proinde tota AO, ſecta in F, extrema ac media ratione:[a] Eſt autē vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO;& vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC,& AP, ad PL,ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, AC, AL,ſecantur in G,Q,P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ, AL,ſegmēta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt. Quia uero eſt[c] vt AQ, maius ſegmētum, ad QC,minus,ita AL,tota ad AP, maius ſegmentum; Et eſt AQ, recta rectæ AL,æqualis:Erit & QC,recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus ſegmentum erit lateris AB, maiusq; reliqua BP; ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I,ducitur parallela rectæ AM,ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet, Non aliter recta RQ,per H.ducta parallela rectæ BK,latera AC,CB,ſecabit extrema ac media ratione, atq; adeo in puncta R, Q, cadet.Quoniam vero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos,[d] æqualia inter ſe ſunt;erit triangulum PQR, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI:(Cum enim in triangulo ACL, recta PQ,parallela ſit lateri CL;ſecabuntur PQ, LC,in eaſdem rationes,ex ijs,quæ ad propoſ.4.lib 6.demonſtrauimus:Diuiditur autem CL,bifariam in H, ob triangulū ACL,in quo FH, parallela eſt lateri AL,[e] ſecans proportio-

[a] 5. tertij decimi.
[b] 2. ſexti.
[c] 2. quarti idē.
[d] 4. primi
[e] 2. ſexti.

portionaliter latera CA, CL. Igitur eadem bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP. Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media rõne, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt constat ex propos. 16. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, est æquale, recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. Cum igitur MC, bifariam secetur in S, ob triangulum AMC; sitque MS; ipsi GF, æqualis, ob parallelogrãmum GS; Erit & SC, æqualis eidem GF, minori segmento rectæ DF; Ac propterea cum tota DF, EC, æquales sint; erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC, in S, secta erit extrema ac media ratione. Deinde quia FE, FS, similiter secantur; secatur autem FE, extrema ac media ratione; secabitur & FS, in T, extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit FT, recta æqualis existens lateri Icosaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.



a 2. sexti.

b 34. primi

c 2. sexti.

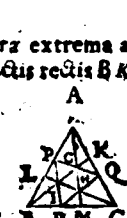
d 34. primi.

THE-

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione secti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cuius latera extrema ac media ratione secentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, basim Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli ABC, secent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipsa latera PQ, QR, RP, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in prop. præcedenti demonstratum est. Dico AP, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI. Cum enim PQ dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13 quadrupla vero potentia rectæ HI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2 & HI, 1. Quamobrem AP. dupla erit potentia rectę HI. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.



COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis; si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale, cũ diametro potentia sit cõmensurabile. Quare minus segmentũ lateris Pyramidis extrema ac media rõne secti Apotome erit; Atq; adeo cũ minori

a 13. tertiædec.

b 6. dec. 6 tertiædecimi.

minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentiæ sit commensurabile, (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri.) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptę diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptę.

RVRSVS, quia rectę coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli æquilateri duplum rectę coniungentis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos. 4. lib. 6. Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

a 9. sexti

b 16. undecimi

DENIQVE [b] quia diameter sphęræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cum diameter octaedri coniungat centra basium cubi oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus

tus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1, propos. 17. lib 13. lateris cubi, qui in eo describitur; a exiſtat denique latus cubi dimidium potẽtia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

a 5. semidec.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrũ, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus deniq; Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum.n. ex ijs, quę in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, mi-



nus ſegmentum ſit eiuſdem lateris cubi: Planum ſit, ita eſſe A, totam ad B, maius ſegmentum, vt B, maius ſegmẽtum ad C, minus. Si in cubo itaque deſcribatur & Icoſaedrum, &c. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplũ eſt lateris cubi in ea deſcripti.

CVM enim per ea, quæ propoſ. 18. lib. 15. ſunt demõſtrata, latus Pyramidis longitudine triplum ſit diametri baſis cubi in ea deſcripti; (oſtenſum. n. eſt ibi, GH, diametrum baſis cubi inſcripti tertiã eſſe partem lateris Pyramidis BC,). Et quadrata proportionem habeãt laterum duplicatam: Erit quadratũ lateris Pyramidis nõcuplum quadrati diametri baſis cubi in ea deſcripti, cũ noncupla proportio ſit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cũ quadratũ diametri baſis cubi duplũ ſit ipſius baſis cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſit, vt ſi ponatur baſis cubi, hoc eſt, quadratũ lateris cubi 1. quadratũ eiuſdẽ baſis diametri ſit 2. & quadratũ lateris pyramidis 18. Quamobrẽ latus Pyramidis potẽtia octodecuplũ eſt lateris cubi in ea deſcripti. Quod erat oſtendendum.

*20. ſexti

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentũ latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro deſcriptus, inſcriptus quoque ſit Pyramidi, cui illud dodecaedrũ inſcribitur, vt docuimus in ſcholio prop. vlt. lib. 15. Erit latus Pyramidis potẽtia octodecuplũ lateris cubi ſibi, & Dodecaedro

b 8. ſextidec.

caedro inſcripti: Huius autē lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. ppoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectę extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplū minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi.

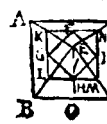
VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angulum continentiū prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi recta GI, ſubtēdens angulum rectum GAI, minoribus ſegmentis AG, AI, comprehenſum;) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare, cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſsit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum. *47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT vna ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis quadratū ABCD, triangula vero ad E, verticē, ABE, EBC, CED, DEA, ſintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelę. Quod ſi coniungantur rectę

FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Qm autem ducta recta EHO, sesqualtera est rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: Atqui vt EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partiũ 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac propterea quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum KL-MN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quę in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati GI, descriptum; cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.



a 2. sexti.

b 33. primi

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentũ latus Dodecaedri, cui inscribitur, per corol. 2. prop. 13. lib. 15. Inscribũturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidẽ octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltima lib. 15. Perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem octaedro inscripti, cuius quadruplũ sesquialterum potentia esse ostẽdimus latus octaedri.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM *Icoſaedri* in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt conſtat ex propoſ. 14. lib. 15. eiuſque ſcholio. Et in bifariis ſectionibus dictorum ſex laterum *Icoſaedri* reſident ſex anguli octaedri *in Icoſaedro deſcripti*, ex propoſ. 15. eiuſdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto *Icoſaedro* deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo *Icoſaedrum* deſcribitur. Quare, cum per ea, quæ ad propoſ. 14. lib. 15. oſtendimus, latus *Icoſaedri* ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoque idem latus *Icoſaedri* maius ſegmentum diametri octaedri in illo *Icoſaedro* deſcripti. [a] Atqui diameter ſphæræ, ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus *Icoſaedri* maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in *Icoſaedro* deſcripti. Quod oſtendendum erat.

[a] *14. tertij dec.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionē habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmē tum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extre-

ma ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. Minus segmẽtũ lateris cubi extrema ac media ratione sẽcti esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionẽ habeat duplicatã proportionis totius lineę ad maius segmentũ, vel maioris segmẽti ad minus, (quod tota linea, maius segmentũ, atque minus, sint tres rectæ continue proportionales:) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

PRAETEREA, cum cõstet ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. maius segmentũ lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestũ est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmẽtum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoq; conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratũ ABCD, triangula autẽ ad verticẽ E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorũ cẽtra F, G, H, I, quæ rectis iungãtur FG, GH, HI, IF, quadratum

dratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniã vero Pyramis in cubo descripta, describitur quoq; in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt cõstat ex ppos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, sesquialterũ esse lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L. ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque EK, EL, sesquialterę erunt rectarum EG, EI, per coroll. prop. 18. lib. 14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL. auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulũ EGI. simile triangulo EKL. Quare erit, vt EK, ad KL, ita EG, ad GI; & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI; ideoque cũ EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. [b] Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris Pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.



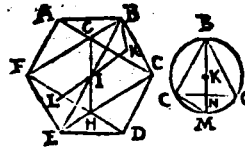
[a] 2. sexti.

[b] 33. primi

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplũ quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrũ I; triangula vero opposita & parallela, per coroll. 4 propos. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex cẽtro I, ad planũ BCG, perpẽdicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in



centrum *K*. Producta igitur *KI*, perpendicularis quoque erit ad planum *EFH*, parallelum plano *BCG*, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum *L*, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in *I* coſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium *I* coſaedri, vt cõſtat ex propoſ. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit *KL*. diameter cubi in *I* coſaedro deſcripti, tranſiens per *I*, centrum *I* coſaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum *I*, tranſeant, erit *I*. quoque centrum cubi inſcripti. ideoque *IK*, *IL*, ſemidiametri æquales: Coniũcta autem *K B*, ſemidiametro circuli triangulum *BCG*, circumſcribentis, [a] erit angulus *B K I*, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [a] Ac proinde quadratum rectæ *BI*, æquale quadratis rectarum *BK*, *KI*. Igitur & quadratum diametri *BE*, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri *BI*, vt in ſcholio propoſ. 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum *BCG*, circumſcribentis, & *KL*. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris *BK*, *KI*, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi *KL*, [b] quod triplum eſt quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri *I* coſaedri *BE*; remanet quadratũ diametri circuli triangulũ *BCG*, circũſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris *I* coſaedri *BC*. Deſcribatur enim ex centro *K*, circa triangulũ æquilaterũ *BCG*, circulus, extenſaq; *BK*. vſque ad *M*, quæ ſecet *CG*, in *N*, ducatur quoque recta *CM*. Quoniam igitur *BN*, per centrũ *K*, ducta perpendicularis eſt ad *CG*, per ea, quæ oſtẽdimus in ſchol. propoſ. 12. lib. 13. [c] erit recta *BC*, potẽtia ſeſquitertia rectæ *BN*: Vt autem *BC*, ad *BN*, ita eſt *BM*, ad *BC*, quod *BC*, ſit media proportionalis inter *BM*, & *BN*, ex corol. propoſ. 8. lib. 6. [d] cũ angulus *BCM*, rectus ſit in ſemicirculo exiſtẽs. Recta igitur *BM*, potentia quoq; ſeſquitertia eſt rectæ

[a] 47. primi

[b] 15. tertij dec.

[c] 12. quartidec.

[d] 31. tertij.

rectæ BC; Ac propterea quadratũ diametri BM. ſeſquitertiũ eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrũ Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri BE, æquale eſſe quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmẽtum eſt rectę lineę extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, vt manifeſtum eſt ex prop. 9. lib. 15. Eſt autem rectæ dictas ſectiones cõjungentis diuiſę extrema ac media ratione minus ſegmentũ latus Dodecaedri, ex coroll. 4. prop. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extremá ac media ratione diuiſæ, quę duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmodi recta coniũgat bifarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 14. terĩ decimi

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodē Icoſaedro deſcribātur, vt docuimus in ſcholio prop. vltimę lib. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphæræ pyramidē circundantis: [a] poteſt autem diameter ſphæræ ſeſquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſim Icoſaedri circumſcribentis ſeſquitertium poteſt lateris *Icoſaedri*, vt in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circūdantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſim Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

[a] *15. tertij decimi*

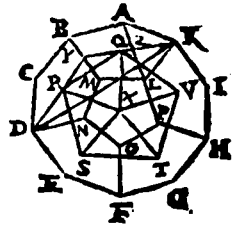
THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentū lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitū ductæ, atque extrema ac media ratione di-

uiſæ,

uiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pẽtagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

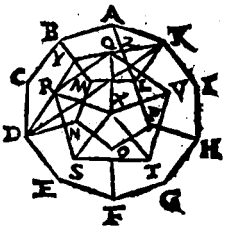
SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis *A*BMLK, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCB*M*, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, *TV*, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in cõmunem baſim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. conuenient in pũcto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſecabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita eſſe latus Dodecaedri IM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt KZ, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta DK, quæ, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius DK, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodẽ ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q; (ſunt enim RD, QK, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [b] parallela erit QR, ipſi DK; Ideoque triangulũ YRQ, triangulo YDK, ſimile per coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. [d] Vt autem



[a] 2. ſextidec.

[b] 2. ſexti
[c] 4. ſexti.
[d] 2. quartidec.

autem DK, tota ad totam K Y, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus K Z. Vt igitur L M, ad K Z, ita erit Q R, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita KZ, minus ſegmentum perpendicularis K Y, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minusq; eius ſegmentum a toto latere Icoſaedri ſublatum; a reliqua quoque recta pars rurſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus ſcoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cuius centrũ F; & ſuper quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex iis, quæ in propoſ. 16. lib. 13. ſunt demonſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterũ inſcribatur AHI. Quoniã igitur arcus ABC, AED, æquales ſunt, cũ quilibet duas quintas partes totius circumfe-



cũferentiæ cõtineat, necnon & duo arcus *ABH*, *AEI*, cũ sint tertiæ partes eiusdẽ circũferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; ppeaque rectæ HI, *CD*, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. *Ad* quas ex cẽtro F, perpendicularis deducatur *FKL*, secans rectas HI, CD, bifariam in *K*, & L; coniunganturque rectæ FC, F*D*. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum G B C, G C D, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur G N P, GO*L*, diuidentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita BC, C*D*, bifariam, & ad angulos rectos. Itaq; recta GO, in punctum L, in quo diuisa est CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt constat ex demoustratis in propos. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in *I*cosaedro descripti. *D*enique BP, dimidium lateris *I*cosaedri secetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento BQ, ex toto latere BC, reliquæ CQ, tertia pars detrahatur *C* R. Dico reliquã QR, æqualẽ esse lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri H *I*, secetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento FK, æqualis recta *KM*, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demõstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum *KM*, sectum quoque in L, a minori segmento *KL*, extrema ac media ratione; Ac proinde recta F M, excedit rectam F *L*, minore dimidiæ suiipsius segmento *LM*. Quoniam vero iuncta PL, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono ABC*DE*, descripti, idemque centrum *F*, habentis, ex scholio vltimo lib. 4. ideoque similis illi; erunt triãgula FCD, FPL, (si recta duceretur FP,) similia, per scholiũ propos. 20. lib. 6.[b] Quare vt FC, ad C*D*, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc est, sibi æqualis *FM*, excedit rectã *FL*, minore segmento dimidij ipsius *FM*, nempe minore segmẽto rectæ K M, vt ostendimus. Recta igitur C *D*, vel sibi æqualis B*C*, excedet quoque rectam LP, minore segmento dimidij ipsius B *C*, nimirum minore segmento rectæ

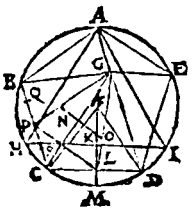
[a] 3. tertij.

[b] 4. sexti

BP,

BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æ qualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14.) a parallelę erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18 lib. 14. Quare & PL, hoc est, sibi æ qualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum CQ, sesquialtera quoq; sit rectæ QR. (Nam qualium partiũ 3. est CQ, talium 1. est CR, per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR,) æqualis erit QR. ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

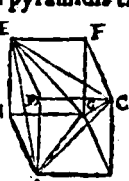
a. sexti.



THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilaterã circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus nõ resident quatuor anguli pyramidis æquilaterę inscriptę: (Ná super basin ACE, fundatur pyramis AGED; super basin AEG, pyramis AEGH; super basin CEG, pyramis CEGF; & super



per basin *ACG*, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis similibus æqualibusq; & multitudine & magnitudine. Quælibet. n. cõstat tribus æqualibus & similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptę.) Sit autẽ cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nã exempli causa, pyramis ABCG, basim habens *ABC*, dimidium basis cubi *BD*, altitudinẽ vero eandem, quã cubus, rectã videlicet *BG*, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinẽ habentis.[a] Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestũ est pyramidem ABCG, sextã partem esse cubi, propterea; cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquã pyramidẽ æquilaterã ACEG, cubo inscriptã eiusdem cubi tertiam esse partẽ. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum.

[a] 32. *vnde.*

ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15.[b] Cubus vero triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicue colligitur, cubũ triplũ esse sibi inscriptæ pyramidis, quãquidem hæc in eadẽ sphęra, in qua cubus, continetur.

[b] 32. *quemadmodũ.*

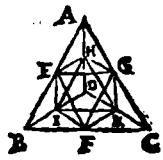
THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide *ABCD*, descriptũ sit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidẽ octaedri esse duplam. Cum enim octaedrũ circumstent quatuor pyramides pyramidi ABCD, similes, vt prop. 3. lib. 12. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales sunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD:

(quæ

(quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis ſimilibus, æqualibuſq; numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilateræ ABCD. per coroll. propoſ. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis ABCD, ex conſtructione propoſ. 2. lib. 15.) [a] Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis *ABCD*, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cum octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis A*BCD*, ad latera dictarum quatuor pyramidũ, triplicata, vt in his numeris 1.2.4.8. perſpicue apparet) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis A*BCD*; Atque idcireo omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium *pyramidis* ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.



[a] 8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ. 3. lib. 15. [b] Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus, [c] & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octae-

[b] 20. ſextidec.

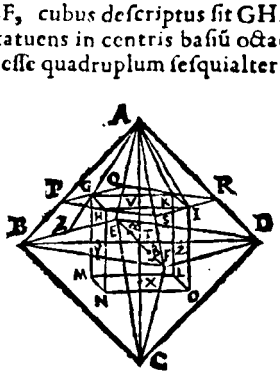
[c] 21. ſextidec.

octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus erit. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basiũ octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterũ. Assumpta enim pyramide octaedri BEDFA, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum constituẽtes PQRS, vt in 15. propos. 4. lib. 15. est demonstratum; [a] quod quidẽ parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. Ac proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati PQRS: [b] cum enim plana BEDF, PQRS, parallela secẽt rectas æquales AB, AE, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, AS, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [c] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ.

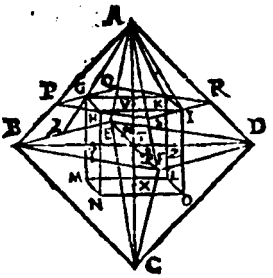


[a] 15. vnde.

[b] 17. vnde.

[c] 47. primi

VQ, propterea q; & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib. 4. Secantur. n. latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demõſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento cõcludemus X, centrũ eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. Cum ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX: nec non VT, XT. Recta igitur VX, cõiungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. rectæ centra baſium cubi oppoſitarum cõnectentes ſe ſe bifariã ſecẽt in cẽtro. Iã vero, qm VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla aũt fuit & AV, eiuſdẽ VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nẽpe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. prop. 7. lib. 12. cum vtriuſq; eadẽ ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX;



a 17. vnde.

b 6. duode.

b Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK, illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula

huius

huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.). proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB, lateris AP, sesquialterũ, quod & recta Aγ, [a] proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidẽ PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionẽ habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, taliũ 12. esse cubum GO, iam demonstratum est. (Nam nume 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2 quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

[a] 8. duodec.

[b] 2. sexti

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atq; cubi sibi inscripti. ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent.

[c] Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.

[c] 11. sextidec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ Pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.

QVONIAM vt oſtendimus ad finẽ lib. 15. cubus, ſibique inſcripta pyramis in eodem octaedro deſcribuntur; [a] Eſt autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſquialterum; & cubus ſibi, ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 2. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplã ſeſquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem habet, quã 27. ad 2. hoc eſt, tredecuplam ſeſquialteram. Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 23. ſextidec.
[b] 20. ſextidec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS ſibi inſcripti cubi nõcupla eſt.

IN pyramide ABDC, cubus intelligatur deſcriptus. Dico pyramidem cubi eſſe nõcuplam. Aſſumantur enim G, H, cẽtra duarum baſium AC D, ABD, commune latus AD, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppoſitum AD, rectæ ducantur CGS, BHS, diuidentes latus AD, bifariam, & ad angulos rectos, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Cõnexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ ſint rectarum HS, GS, ex coroll. propoſ. 18.



18.lib.14.ac proinde proportionaliter ſecentur BS,CS, [a] parallelæ erunt BC,HG,& per coroll.propoſ.4.lib. 6. triangulum HGS,triangulo BCS, ſimile. [b] Erit ergo vt BC,ad CS,ita HG,ad GS;& permutãdo, vt BC,ad HG, ita CS,ad GS:[c] Eſt autem CS,ipſius GS,tripla. Igitur & BC, tripla erit ipſius HG. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi,vt in propoſ.1.lib.15. demonſtratum eſt; Recta vero connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentiũ diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ.18.lib.15. (Ibi enim recta GH,iungens centra G,H,baſium ACD,ABD,cõmune latus AD,habẽtium diameter fuit baſis GNHQ, cubi deſcripti in pyramide.)Erit latus pyramidis BC, diameter baſis cubi pyramidem ABDC,circumſcribentis;GH, vero diameter baſis cubi in eadẽ pyramide deſcripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum,quam latera;(Eſt enim vt diameter vnius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quod proportio vtraque ſit potentia dupla: Permutãdo ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus)habeat autem BC,diameter baſis cubi circumſcripti ad GH, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At vero cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia,[d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi ABDC,proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis,vt hic 1.3.9.27. videre licet. Quam ob rem, [e] cum cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem,quam 9.ad 1.nimirum non cuplam; Atque adeo pyramis ſibi inſcripti cubi non cupla eſt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 2.ſexti
[b] 4.ſexti.
[c] 18.quarti decc.
[d] 33.vnde.
[e] 20.ſexti decc.

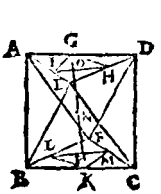
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionẽ habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

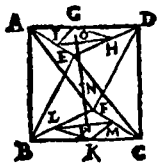
OCTAEDRVM ad sibi inscriptũ Icosaedrum proportionem habet, quam duæ basis octaedri ad quinque basis Icosaedri.

IN octaedro ABCDEF, concipiatur descriptũ Icosaedrum. *D*ico octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sunt duæ basis octaedri ad quinque basis *I*cosaedri. Cũ enim vt ex demonstratis in propos. 16. lib. 15. liquet, octo basis Icosaedri in octo basibus octaedri reponantur; sint duæ basis *I*cosaedri GH*I*, KLM, in duabus basibus oppositis octaedri A*D*E, BCF; atque ex N, cẽtro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim vtriusque est centrum. per coroll. 3. propos. *16.* lib. 15.) ad basim A*D*E, perpendicularis ducatur NO, cadens in centrum O, triãguli A*D*E, seu circuli ipsum ambientis, ex coroll. lemm. 1. prop. 10. lib. *14.* quod quidẽ O, centrum quoque est trianguli *G*HI, per coroll. 2. propos. *16.* lib. 15. Cum ergo plana opposita A D E, BCF, parallela sint, ex corollario *4.* propositionis *14.* lib. *13.* Recta O N, producta perpendicularis quoque erit, per scholium



lium propoſitionis 14. lib. 11. ad planum BCF, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis NO: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Erit priſma, cuius baſis ADE, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero priſma, cuius eadem baſis ADE, altitudo autem OP, dupla altitudinis ON, duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem ADE, altitudo vero ON, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus. Priſma igitur, cuius baſis ADE, & altitudo OP, æquale eſt ſex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim ADE, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli ADE, altitudo vero eadem OP. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem ADE, & ſub altitudine OP; cũ per ea, quæ docuimus ad prop. 7. lib. 12. priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint, vt baſes. Quare duo priſmata, quorum vnius baſis ADE, & altitudo OP, alterius autem baſis tertia pars baſis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia ſunt octaedro ABCDEF. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis GHI, altitudo vero OP, æquale eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: propterea que triplum huius priſmatis, nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis GHI, altitudo autem eadem OP, æquales eſſe 18. pyramidibus Icoſaedri. Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiã partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem GHI, & ſub altitudine OP, conſtituti; priſma ſcilicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli GHI, altitudo vero eadem OP; Atq; idcirco duo priſmata, quorum vnius baſis tripla ſit

trianguli GHI, altitudo autem O P, alterius vero basis tertia pars basis GH*I*, & altitudo eadem OP, æqualia erunt *I*cosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, *I*cosaedro æqualia, sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli *A*DE, continentes, (cum vnius basis sit A D E, nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius ADE,) ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes; (cum vnius basis tripla sit triãguli GHI, nimirum nouẽ tertias partes ipsius GH*I*, cõtinens, alterius vero basis tertia pars ipsius GHI,) Sint aũt, vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decẽ partes tertias trianguli G H *I*; [a] ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nẽpe dimidium quatuor tertiarũ, ad quinq; tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius G H I, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE, (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cum sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius G H I; (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur,) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrũ, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet *I*cosaedrum, vt duę bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum, proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.



Quod erat demonstrandum.

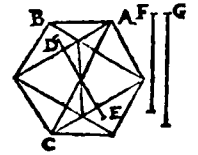
[a] 15. quinti

THE-

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphęra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat cẽtra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit AC; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectã DE. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrũ in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſiũ oppoſitarum; Erit DE, diameter dodecaedri in Icoſaedro ABC, deſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidẽtes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet ABC, Dodecaedro diametri AC, hoc eſt, in eadẽ ſphæra, in qua Icoſaedrum ABC, deſcripto, cum vtriuſque eadem ſit diameter; & Dodecaedro diametri DE, intra Icoſaedrum videlicet, ABC, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icoſaedri ABC, ad tertiã, videlicet ad Dodecaedrum diametri DE, ſibi inſcriptũ, compo-



componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri *ABC*, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadē ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri *D E*, in Icoſaedro ABC, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem ſphæra comprehēſum, ſit vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi: (a Nā Dodecaedrum diametri AC, ad Icoſaedrū ABC, eiuſdē diametri eſt, vt G, latus cubi ad F, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum A B C, ad Dodecaedrū diametri AC, vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi.) At vero Dodecaedrum eiuſdē diametri AC, ad Dodecaedrū diametri DE, in Icoſaedro videlicet ABC, deſcriptū, proportionē habeat triplicatā diametri AC, ad diametrū DE, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarū cōiungentem, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionē Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptū Dodecaedrū diametri DE, cōponi quoq; ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri *AC*, ad rectā *DE*. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionē habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

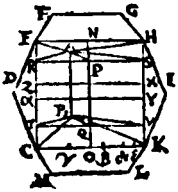
a 11. quarti dec.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis a quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

QVO-

QVONIAM ex demonſtratis prop.8.lib.15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtẽdũt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientiũ; ſint huiuſmodi pẽtagona ABCDE, EFGH*A*, A*H*IKB, *B*KLMC, conuenientia ad latus *AB*; duo quidem ABCDE, A H I K *B*, ſecundum latus idem commune A *B*, alia autẽ duo AEFGH, *B*CMLK, ſecundum angulos EA*H*, CBK. His vero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi E*CKH*, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribẽtis, ſolidum ſcilicet *CBKH*AE, conſtans quinque planis *CBK*, E*AH*, ABCE, AB*KH*, ECKH; quorum duo *CBK*, EAH, [a] triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni *A*E, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum E*AH*, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pẽtagona *ABCDE*, *ABKIH*, per hypoteſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HI*K*, [b] æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia *A*BCE, AB*K*H;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, p 10.defin.lib.11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit a CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi C*K*, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Sectis.n. lateribus EH, *CK*, bifariam in N, O, iunctaq; recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quã cadunt perpendiculares *A*P, B*Q*, demiſſæ in planum E*K*, vt conſtat ex demonſtratis propoſ.17. lib.13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN,



[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

VX.

VX,VR,XS, figuræ propoſ.17.lib.13.) *Erit* vtraque recta AB,PQ, maius ſegmentũ lateris cubi NO,vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB,ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadẽ propoſ.17.lib.13.Ac propterea ſi per P, Q, ducanturrectæ RS,TV,rectis EH,CK,parallelæ; erunt quoq; RT, SV,maiora ſegmenta laterum EC,HK; atque adeo ER, CT,ſimul,& HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. *Ductis* deinde rectis AR, AS,BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA,CTVKB,quæ per coroll.propoſ.6. lib.12. æquales inter ſe erunt,cũ & earũ baſes ERSH, TCKV,& altitudines PA, QB,æquales ſint; conſiſtentque extra *ſolidum* ABTVSR. [a] Quoniam autẽ AS,*ipſi* BV,& AR,*ipſi* BT,æqualis eſt,& parallela,cum cõiungant æquales rectas,& parallelas AB, SV,RT,[b] parallela erunt plana triangulorũ ARS,BTV, atque adeo inter ſe æqualia,ex coroll.prop.8.lib.1.cum latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS,BTV, & tribus parallelogrãmis RV,AT,AV,priſma eſt,ex definitione.



[a] 33. primi

[b] 15. vnde.

IAM vero, cum oſtenſum ſit rectas HS, KV, minus ſegmentum efficere lateris HK,fiat illis æqualis VX,dupla nimirum vtriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK,duas tertias partes cõtineat VY,tertia vero pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV,parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; [c] vtriuſque vero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX,& ſub eadem altitudine PA,vel QB,conſtituta,[d] quod & baſis TX,*dupla ſit* baſis CV, vel RH; Aequalis erit pyramis TVXZB,vtriquepyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX,& altitudo eadẽ QB, vertex vero linea recta,pars videlicet rectæ AB,quæ æqualis ſit ipſi VX,vt demonſtrauimus in ſcholio propoſ.7.lib.12. Item eiuſdem

[c] 6. duode.

[d] 1. ſexti.

dem prismatis, cuius basis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes cõtinet prisma, cuius basis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. [a] quod & basis TY, duas partes tertias cõplectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum cõtentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoq; a base cubi deficientem rectangulo a X, contento sub latere cubi a Y, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo quælibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadẽ altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases a base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis a base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmẽti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Di

uidatur

[a] 1. sexti.

ųidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemque C β, maius ſegmentum; & β K, minus bifariã in γ, δ; atque ex β K, abſcindatur βε, æqualis ipſi βγ, ſeu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars maioris ſegmenti Cβ, æqualis ſit ipſi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Poteſt autem ex minori ſegmento β K, abſcindi recta æqualis ipſi Cγ, dimidio maioris ſegmenti; quia β K, maior eſt, quam dimidium maioris ſegmenti Cβ. Cũ enim ſit, vt CK, ad Cβ, ita Cβ, ad β K; ſit autẽ CK, minor, quam dupla ipſius Cβ, quod Cβ, ſit ipſius maius ſegmẽtum; erit quoque Cβ, minor, quã dupla ipſius β K, hoc eſt, erit β K, maior, quam dimidium ipſius Cβ. Quoniã igitur eſt, vt tota CK, ad maius ſegmentũ Cβ, ita maius ſegmentum Cβ, ad minus β K; a erit quoq; vt CO, dimidia ipſius CK, ad Cγ, vel βε, dimidiã ipſius Cβ, ita Cγ, vel βε, ad βδ, dimidiã ipſius β K; Ac propterea ſi CO, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius illius ſegmentum Cγ, vel βε, & minus βδ. Quare & βδ, minus ſegmentum ſecabit βε, maius ſegmẽtum extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad prop. 5. lib. 13. critq; maius ſegmentum βδ, minus autẽ δε; Ac propterea rurſus δε, minus ſegmẽtum ſecabit rectã δK, maiori ſegmẽto βδ, æqualẽ, extrema ac media ratione, minuſq; ſegmẽtum erit εK. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi CK, minore ſegmẽto εK, rectæ δK, vel ſibi æqualis rectæ βδ, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmẽtũ minus oſtenſa. Conſtat ergo baſem parallelepipedi, quo dodecaedrũ excedit ſibi inſcriptum cubum a baſe cubi deficere rectãgulo cõtento ſub latere cubi, tertiaq; parte minoris ſegmẽti eiuſdẽ lateris cubi; altitudinẽ vero ab altitudine cubi deficere minore ſegmẽto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrũ excedit cubum ſibi inſcriptũ parallelepipedo, &c. Quod erat demõſtrãdum.

a 15. quinti

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum

vnius

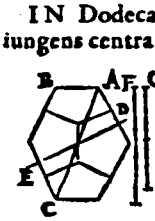
vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentũ exiſtit; Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubũ a Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto iam parallelepipedo adiungatur poſterius paralellepipedum, compoſitum erit parallelepipedum prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonſtratum eſt.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata

cata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadē sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in cētris basium oppositarum; erit recta DE, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem sphæra cū Icosaedro intra Dodecaedrū ABC, collocato describetur, cum eandem habeāt diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icosaedro eiusdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, descripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demōstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, descripti secundę magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro ABC, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll propos. 17. lib. 12.* Dodecaedrum vero



*11. quarti decimi.

vero diametri *DE*, ad Icoſaedrum eiuſdē diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro A*B*C, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus Icoſaedri; liquido conſtat proportionem Dodecaedri A*B*C, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cuius ſcilicet diameter *DE*, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri *A* C, ad diametrum D E. rectam videlicet centra oppoſitarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione F, lateris cubi, ad G, latus Icoſaedri, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaque ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes cō tinet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti ęqualis eſt, latitudo vero tertiæ parti minoris ſegmēti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique a latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo vero minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales.

QVONIAM ſi in Dodecaedro intra Pyramidem deſcripto cubus deſcribatur, hic idem cubus in eadē pyramide eſt deſcriptus, vt ad finē lib. 15. tradidimus; Cubus autē pyramidis, in qua deſcribitur, nona pars eſt, cū pyramis cubi ſibi inſcripti ſit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi duplā contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, ſeu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi ſibi inſcripti duplum ſit, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta eſt in verbis propoſitionis huius; non obſcure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inſcriptum duas nonas partes continere ipſius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt ſi dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, &c. Quod erat demonſtrandum.

* 25. ſextidec.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

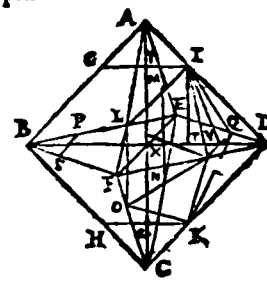
OCTAEDRVM excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrum Parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri extrema ac media ratione ſectæ.

OCTAEDRVM, cui inſcriptum eſt Icoſaedrū, ſit ABCDEF, repetita figura prop. 16. lib. 15 vbi demonſtratum eſt, viginti triangula Icoſaedrū inſcriptū cōponentia eſſe IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, GIK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo poſtrema octo baſibus octaedri ſunt impoſita, ſecantia videlicet

omnia

omnia eius latera extrema ac media ratione; ităq; rectum IT, perpendicularẽ ad BD, æqualẽ eſſe maiori ſegmẽto XY, ſemidiametri AX. Dico octaedrũ ABCDEF, ſupera re Icoſaedrũ ſibi inſcriptũ parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratũ lateris icoſaedri QR, altitudo vero IT, ma ius ſegmentũ ſemidiametri AX. Cũ.n.in quatuor baſib⁹ octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulũ ſolidũ octaedri D, conſtituẽtibus poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri IMQ, IIR, KNQ, KOR; remanebũt iuxta angulũ ſolidũ D, in eiſdẽ quatuor baſibus octaedri quatuor triãgula IQD, IRD, KQD, KRD. quibus ſi accedant duo triãgula Icoſaedri. QIR, KQR, & cõe triangulũ DQR, conſtituentur duæ pyramides ſuper cõem baſem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter ſe æquales, per coroll. prop. 5. lib. 12. cum earũ altitudo ſit recta eadẽ IT, maius videlicet ſegmẽtũ ſemidiametri octaedri. (Nã quemadmodum AX, ſecta eſt a recta GI, in Y, extrema ac media rõne, ita quoq; ſecta eſt CX, a recta HK, in Z. Quare ſi ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR; erit ea æqualis rectæ ZX, maiori ſegmẽto ſemidiametri CX hoc eſt, ipſi IT.) Quæ quidẽ pyramides extra Icoſaedrum in octaedro deſcriptũ cõſiſtũt. Simili modo prope ſingulos reliquos quinq; angulos octaedri conſtituentur binæ pyramides & inter ſe & dictis duabus æquales, extra Icoſaedrum prædictum: Ita vt octaedrum ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidiũ eſt quadrati lateris DQ; (Cum DQ, DR, rectæ æquales ſint, minora ſcilicet ſegmenta laterum octaedri, angulumq; contineant rectum.) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli DQR. Priſma igitur, ſiue parallelepipedum, cuius baſis quadra

tum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR. & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR, æquale est tribus pyramidibus earũ duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarũ pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidũ quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Æquale quoq; erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptũ; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.



COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplũ Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratũ lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demõstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidẽ Pyramidi esse inscriptum; a *octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadra-*

a 31. sextidec.

tum

tum lateris Icoſaedri, nempe recta QR, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri, recta vide licet IT, ſeu TX: Fit, vt octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis, cui inſcribitur, (quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti octaedri) ſuperet idem Icoſaedrũ in octaedro, ideoque & in Pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta TZ, coniungens bifarias ſectiones laterum Icoſaedri oppoſitorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata a nobis in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri copulans, Pyramis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

a 21. ſextidec.

DE QVINQVE CORPORVM Regularium deſcriptione in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino.

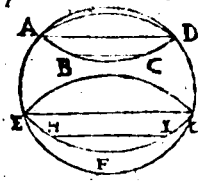
QVONIAM Euclides libro 13. quinq; corpora Regularia ſeorſum extra ſphæram conſtruxit, deinde vero eadem a ſphæra comprehendi, noua demonſtratione confirmauit; nõ erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data ſphæra deſcribat: præſertim cũ eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam cõſtructio illa ab Euclide præſcripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda ſunt, quorum aliqua etſi per elementa ſpharica Theodoſij demonſtrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere cenſeri poſſumus; quippe cum propoſitiones ſphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex ſolis 19. prioribus propoſitionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium conſtructionem percipi poſſint. In citandis autem

autem Theodosii propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataq; in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli ABCD, EFG; sitq; primū in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda sit diameter parallela. Ducatur, vt in scholio prop. 18. lib. 11. docuimus, p data metrū AD, planū rectū ad circulum ABCD, [a] faciens in sphæra superficie circulū AEGD. Quoniā igitur circulus AEGD, circulū ABCD, bifariā, & ad angulos rectos secat, erit circulus AEGD, maximus, trāsibitq; per polos circuli ABCD. ex schol. ppos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG, [b] cum paralleli eosdem polos habeant: [c] ideoq; eū bifariā secabit. Cōmunis ergo sectio EG, eius diameter erit: [d] qua cum sit ipsi AD, parallela, patet propositū.



[a] 1. 1. Theodosii.

[b] 1. 2. Theodosii.

[c] 15. 1. Theodosii.

[d] 16. vnde.

DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, nō sit eius diameter, cui ducēda sit diameter parallela in circulo EFG. [e] Ducatur ipsi BC, p centrū circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime ostendimus. Quoniam igitur vtraq; BC, EG, eidem AD, parallela est, ex constructione, & ipsa quoq; BC, EG, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.

[e] 31. primi

[f] 9. vnde.

EADEM ratione rectæ BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, a diametro EG, diuersa, qua ipsi BC, æqualis sit, si modo BC, maior non sit diametro EF. Nam si in circulo EFG, ducatur ipsi BC, parallela HI, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

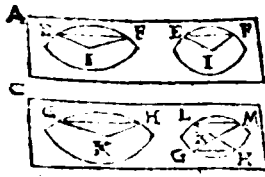
LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindāt arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema

vnius

vnius rectæ cum cẽtro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectę cũ cẽtro cõiungunt.

IN planis parallelis AB, CD, descripti sint duo circuli, in quibus rectæ EF, GH, *primum parallelæ sint, ad easdẽ partes centrorum I, K; auferantur arcus similes* EF, GH, *ac tandẽ iungãtur ad cẽtra rectæ* EI, FI, GK, HK. *Dico tã* EI, GK, *quam* FI, HK, *parallelas esse. Quoniam.n. arcus* EF, GH, *similes sunt, erunt anguli* I, K, *æquales, ex scholio prop. 22. lib.* 3. [a] *Igitur reliqui anguli* E, F, *reliquis angulis* G, H, *æquales erunt.* [b] *Cum ergo tã illi, quã hi, sint inter se æquales; erit tam angulus* E, *angulo* G, *quã angulus* F, *angulo* H, *æqualis. Quoniã igitur in planis parallelis rectæ* EF, GH, *parallelæ sunt, & rectæ* EI, GK, *ad easdẽ partes plani per* EF, GH, *ductæ efficiunt eũ ipsis æquales angulos* E, G; *erunt ex ijs, quæ in scholio propos. 10. lib. 11. demonstrauimus,* EI, GK, *parallelæ: Eademque ratione* FI, HK, *parallelæ erunt.*



[a] 32. primi

[b] 5. primi.

DEINDE *sint* EF, GH, *parallelæ, non ad easdẽ partes cẽtrorũ* I, K. *Dico tam* EI, HK, *quam* FI, GK, *esse parallelas. Productis enim* GK, HK, *iungatur recta* LM. *Et quia latera* GK, HK, *lateribus* LK, MK, *sunt æqualia,* [c] *angulosque ad verticẽ* K, *æquales cõtinent;* [d] *erũt & bases* GH, LM, *& anguli* H, L, *æquales. & anguli* G, M. [e] *Igitur arcus* GH, LM, *æquales sunt,* [f] *& rectæ* GH, LM, *inter se parallelæ: Ac pinde eã vtrãq;* EF, LM, *ipsi* GH, *sit parallela,* [g] *erunt &* EF, LM, *parallelæ inter se. Quia igitur* EF, LM, *parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes* EF, LM; *(Nam cum arcus* GH, *sit arcui* EF, *similis, erit quoque arcus* LM, *qui arcus* GH, *æqualis est, eidem arcui* EF, *similis.) erunt tam* EI, LK, *hoc est,* EI, HK, *quam* FI, MK, *hoc est,* FI, GK, *parallelæ. Quod est propositum.*

[c] 15. primi.

[d] 4. primi.

[e] 28. tertij.

[f] 27. primi.

[g] 9. vndec.

LEMMA III.

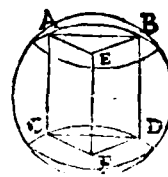
SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ &

æquales, ad easdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad easdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelę sunt, & ad plana circulorũ perpendiculares.

IN sphæra sint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *in quibus sint duæ rectæ æquales & parallelæ* AB, CD, *ad easdem partes centrorũ, quarum extrema iungantur ad easdem partes rectis* AC, BD. *Dico rectas* AC, BD, *æquales quoque esse, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares. Quoniam enim* AB, CD, *parallelæ sunt;* [a] *erunt* AC, BD. *in eodem cum ipsis plano. Quare cũ* AB, CD, *sint etiã æquales;* [b] *æquales quoque erunt ac parallelæ* AC, BD, *quod est primum.*

[a] 7. vndec.

[b] 33. primi



EX cẽtris deinde E, F, *ductis rectis* EA, EB; FC, FD, *iunctaq; recta* EF; *erunt tam* AE, CF, *quam* BE, DF, *parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autẽ & æquales ob circulorum æqualitatẽ.* [c] *Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales.* [d] *Quoniam vero circuli AB, CD, paralleli circa eosdẽ polos sunt,* [e] *rectæ per eorũ polos ductæ transibit per eorundẽ centra, & per centrum sphæræ, & ad plana eorũdem rectæ erit. Quocirca rectæ EF, eorum cẽtra coniungens, per eorũ polos, & centrum sphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra ducantur transire, nimirum rectæ EF, & rectæ per eorum polos extẽsæ. quod est absurdũ. Haberent enim illæ rectæ segmentum cõmune EF.* [f] *Igitur EF, ad plana circulorum AB, CD, rectæ est:* [g] *Ac propterea & vtraque AC, BD, ipsi EF, parallela, ad eadem plana erit recta. Quod est secundum.*

[c] 33. primi.
[d] 1. 2. Theo.
[e] 10. 1. Theodosii.
[f] 10. 1. Theodosii.
[g] 8. vndec.

HÆC demonstratio locũ etiam habet, quando parallelæ AB, CD, sunt circulorum diametri, sed tunc EA, EB, FC, FD, *erunt partes diametrorum, vt patet.*

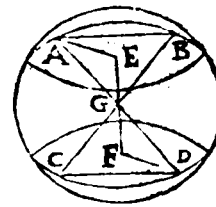
LEMMA IIII.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductę sint duę rectę parallelę

& æqua-

& æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema pũcta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: Rectæ vero earundẽ parallelarum extrema pũcta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

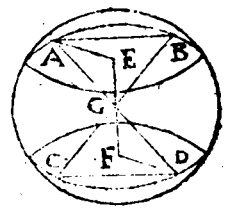
IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *& in iis duæ rectæ parallelæ & æquales* AB, CD, *non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad eaſdem partes iungantur rectis* AD, BC. *Dico & as* AD, BC, *in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoque diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales. Quoniam enim* AB, CD, *parallelæ ſunt;* [a] *Erunt* AD, BC, *in eodem cum ipſis plano; ac proinde ſe mutuo interſecabunt, vt in puncto* G: *quod dico eſſe cẽtrum ſphæræ. Connectantur. n. circulorum centra* E, F, *rectis* EA, EG; FD, FG. [b] *Et quia anguli* AGE, CGD, *ad verticem æquales ſunt:* [c] *Itẽ tam alterni anguli* BAD, CDA, *quã alterni* ABC, DCB; *æquiangula erũt triangula* ABG, CDG. [d] *Igitur erit vt* AB, *ad* BG, *ita* DC, *ad* CG: *Item vt* AB, *ad* AG, *ita* DC, *ad* DG. *Cum ergo* AB, CD, *ponantur æquales,* [e] *erunt quoque tam* BG, CG, *quam* AG, DG, *inter ſe æquales. Rurſus quia* AE, DF, *ſemidiametri circulorum æqualium æquales ſunt; ſunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* [f] *ideoque anguli alterni* EAD, FDA, *æquales; erunt duo latera* EA, AG, *duobus lateribus* FD, DG, *æqualia, angulosque comprehendent æquales.* [g] *Igitur & baſes* EG, FG, *& anguli* AGE, DGF, *æquales ſunt. Et quia*



[a] 7. vndec.
[b] 15. primi.
[c] 29. primi.
[d] 4. ſexti.
[e] 14. quinti
[f] 29. primi.
[g] 4. primi

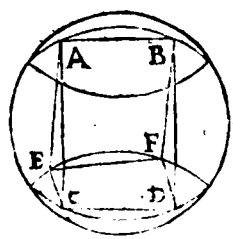
[a] 7. vndec. [b] 2. vndec.

[a] Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallela AE, DF; [b] & EG, FG, in eodē plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG in rectum & continuum constituta, propter aequales angulos ACE, DGF, vt ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphaerae trāsibit, vt in praecedenti lemmate demonstrauimus, [c] perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, aequales sint ostensae, erit G, centrū sphaerae, [d] propterea quod circuli aequales AB, CD, aequaliter a centro sphaerae absunt; inaequaliter vero abessent, si centrum sphaerae in recta EF, diceretur aliud punctū quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphaerae sunt, & inter se propterea aequales quod est primum.



[c] 19. 1. Theodosii. [d] 6. 1. Theodosii.

SED iam puncta extrema parallelarum aequalium AB, CD, ad easdem partes iungatur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & aequales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallela & aequales, [e] manifestum est, cum extrema puncta parallelarum aequalium coniungant. Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpēdiculares CE, DF, iungunturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, semicirculi erunt, [f] & anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, recta CD, EF, aequales sunt, [g] ideoque & AB, EF, parallela erunt, & aequales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum recta erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11.



[e] 33. primi. [f] 31. tertij. [g] 9. vndec.

lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramq; EC, EA, & ad vtramq; FD, FB, vt oſtendimus, a perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: b ac propterea & CD, AB, ipſi EF, parallelæ, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod eſt ſecundum.

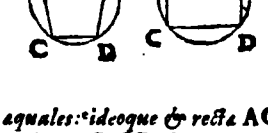
a 4. vndec.

b 8. vndec.

LEMMA V.

SI in ſphæra ſint duæ rectæ parallelę, rectæ earum puncta exttema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt.: Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniungentes non ſolum æquales, ſed & parallelæ erunt, rectosque cum ipſis angulos conficient.

SINT in ſphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis AC, BD, Dico AC, BD, æquales eſſe. Quia enim parallelæ ſunt AB, CD; c erit AC, BD, in eodem cum ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano, d fiat in ſphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ ſint AB, CD; erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales: e ideoque & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod ſi parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo oppoſita latera AB, CD, parallela, & æqualia; erit ex ſcholio propoſ. 31. lib. 3. ABDC, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod eſt propoſitum.



c 7. vndec.

d 1. 1. Theodoſii.

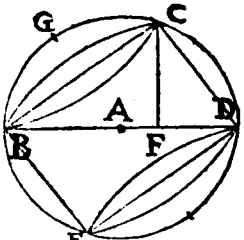
e 29. tertij.

LEMMA

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphærę sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, *per quod planum ductum faciat circulum maximũ* BCDE, *cuius diameter* BD, *ex coroll. 1. prop. 1. lib. 1. Theod. Secta aũt* BD, *in* F, *vt* BF, *ipsis* FD, *dupla sit; erit* BD, *taliũ partium* 3, *qualium* 2. *est* BF; *ac proinde* BD, *ipsius* BF, *sesquialtera est. Ducta quoq;* FC, *ad* BD, *perpẽdiculari, iungãtur recta* BC, DC, *ductaq,* DE, *ipsi* BC, *parallela, connectatur recta* BE. [a] *Et quoniam tam duo anguli* BCD, EDC, *quam duo* BED, CBE, *duobus rectis æquales sunt.* [b] *est q; tam* BCD, *quam* BED, *rectus; erit quoq; &* EDC, *&* CBE, *rectus. Igitur ex scholio prop. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum* BCDE, *parallelogrammum est;* [c] *ideoque recta* BC, DE, *æquales sunt. Diuiso iam arcu* BC, *bifariam in* G, *erit quoque arcus* EGD, *diuisus bifariã in* G, *quod ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoque* BE, CD, *æquales sint. Polo igitur* G, *& interuallis* GB, GE, *circuli in superficie sphæræ describantur transeuntes per* C, D, *ob æqualitatẽ tam arcuum* GB, GC, *quam* GE, GD; [d] *qui paralleli erunt, cum eosdem habeant polos.* [e] *Et quia circulus maximus* BCDE, *per polos secat circulos* BC, ED, *bifariam; erũt* BC, ED, *diametri ipsorum, quæ cum æquales sint ostensæ, erunt & circuli* BC, ED, *æquales. Dico diametrum sphæræ* BD, *ad vtramque diametrum* BC, ED, *proportionẽ habere potentiæ sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ* DB, BC, BF, *continue proportionales sunt; erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt* BD, *ad* BF, *ita quadratum*



[a] 29. primi

[b] 31. tertij.

[c] 34. primi.

[d] 2. 2. Theodosii.

[e] 15. 1. Theodosii.

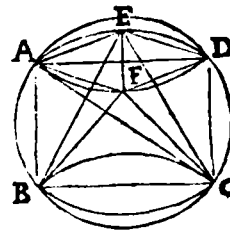
dratum ex BD, *ad quadratum ex* BC: *Est autẽ* BD, *ipsius* BF, *sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex* BD, *quadrati ex* BC, *atque adeo & quadrati ex* DE, *sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ* BD, *vtriusque diametri* BC, DE, *potentia sesquialtera est. quod est propositum.*

His demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data sphæra Pyramidem describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, *æquales, & paralleli, quorum diametrorũ potentia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur* ABCD, [a] *qui eos ad angulos rectos, ac* [b] *isariam secabit, ac proinde cum eis cõmunes sectiones faciet diametros* AD, BC. *Ducatur in circulo* AD, *alia diameter* EF, *secans* AD, *ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur* EB, EC, FB, FC. *Dico* EBCF, *esse pyramidẽ, hoc est, quatuor triãgula* EBC, BCF, CFE, EFB, *esse æquilatera & æqualia. Iũctis.n. rectis* AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; *erit* AC, *diameter sphæræ, ex lemmate 4. &* AB, DC, *æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique* AEDF, *quadratum erit in circulo* AD, *descriptum, vt constat ex prop. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex constructione quadratum ex diametro sphæræ* AC, *sesquialterum est quadrati ex* AD, *diametro circuli; si ponatur quadratũ ex* AC, 3. *erit quadratum ex* AD, 2. *Cum ergo quadratum ex* AC, [b] *æquale sit quadratis ex* AD, DC, *quod angulus* ADC, *rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex* DC, 1. *ac proin-*



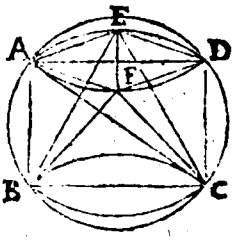
[a] 15. 1. Theodosii.

[b] 47. primi.

do

de quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio prop. 47. lib. 1. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DF: [a] 47. primi. a quibus cum æquale sit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; erit quadratū ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea; quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, recta AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoque BCF, triangulum est æquilaterum.

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum; est autem, ex scholio propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: [b] 47. primi b quibus cum æquale sit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo sunt quadrata ex CE, AD, propterea quæ recta CE, rectæ AD, hoc est, rectis BC, EF, æqualis est, atq; adeo & recta CF, quæ



ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est, & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatē. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FCE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphæra descripta, cum eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant, quod est propositum.

COROLLARIVM.

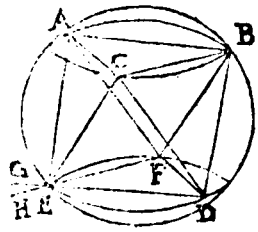
HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Namlatus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex cōstructione diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales & parallelí ABC, DEF, *ita vt ſphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera.* [a] *Deſcripto autem triangulo æquilatero* ABC, *in circulo* ABC, *ducatur per primum lemma, recta* AB, *in circulo* DEF, *parallela & æqualis* DE, *ad diuerſas partes centrorum: quæ latus etiam erit trianguli æquilateri in circulo* DEF, *deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero* DEF, *erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus trianguli* ABC, *æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum* AB, DE, *æqualitatem; parallela vero, ex ſchol. propoſ. 10. lib. 11. Cum enim parallelæ ſint* AB, DE, *& anguli* ABC, DEF, *æquales; productis rectis* DE, FE, *ad* G, H, *erunt quoque anguli* ABC, GEH, *æquales. Cum ergo parallelæ ſint* AB, GE, *&* BC, EH, *ad eaſdem partes plani per* AB, GE, *ducti; erunt quoque* BC, HE, *hoc eſt,* BC, EF, *parallelæ ex illo ſcholio propoſ. 10, lib. 11. Eadem ratione parallela erit* DF, *ipſi* AC. *Connectantur denique* AE, EC, CD, DB, BF, FA, *vt in figura. Dico* AD, *octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula* ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFE, *æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, rectæ* AB, DE, *æquales ſunt & parallelæ ad diuerſas partes centrorum, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ* AD, BE, *(quas tamen confuſionis vitandæ gratia non duximus) diametri ſphæræ, & rectæ* AE, BD, *æquales etiam erunt, ac perpendiculares ad ipſas* AB, DE. [b] *Quadratum igitur ex* BE, *duobus quadratis ex* BD, DE, *æquale erit: Poſito autem*

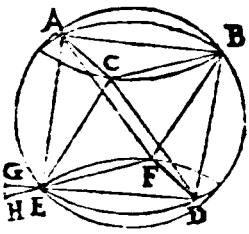


[a] 2. quarti.

[b] 47. primi

quadrato

quadrato ex diametro ſphæræ BE, 6. *quadratum ex* DE, *eſt* 3. (*Nam cum per conſtructionem diameter ſphæræ potentia ſit ſeſquialtera diametri circuli* DEF: *poſito quadrato ex* BE, 6. *erit quadratum diametri circuli* DEF, 4. *At poſito quadrato diametri circuli* DEF, 4. *quadratum lateris trianguli æquilateri* DE, *eſt* 3. *quod ex coroll.* 1. *prop.* 12. *lib.* 13. *diameter circuli potentia ſit ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri.*) *Igitur & quadratum ex* BD, *eſt* 3. *ac proinde quadrata ex* DE, BD, *æqualia ſunt, & rectæ ipſæ* DE, BD, *æquales. Eſt autem* DE, *ipſi* AB, *per conſtructionem, &* BD, *ipſi* AE, *per* 4. *lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ* AB, BD, DE, EA, *æquales erunt, conſtituentque quadratum* ABDE, *cum anguli ad* A, B, D, E, *recti ſint ex eodem* 4. *lemmate.*



RVRSVS quia BC, EF, *parallelæ ſunt & æquales ad diverſas partes centrorum; erunt quoque iunctæ rectæ* BE, CF, *non ad eaſdem partes, diametri ſphæræ, ex* 4. *lemmate, & rectæ* BF, CE, *æquales inter ſe, atque ad* BC, EF, *perpendiculares, eruntque rurſus, ut prius, quadratum* BCEF. *Non aliter oſtendemus,* ACDF, *quadratum eſſe; cum iunctæ rectæ* AD, CF, *ſint quoque ſphæræ diametri ex* 4. *lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata* AD, BE, CF, *conſtructa ſint ſuper latera æqualia* AB, BC, CA, *nimirum ſuper latera trianguli æquilateri, cui* AB, *latus ſit quadrati* AD; *&* BC, *quadrati* BE; *&* CA, *quadrati* CF; *erunt omnia triangula octo* ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, *æquilatera, & inter ſe æqualia. Octaedrum ergo eſt* AD, *ex defin.* 27. *lib.* 11. *& in data ſphæra deſcriptum, cum eius anguli ſolidi,* A, B, D, E, C, F, *ſphæræ ſuperficiem attingant. quod eſt propoſitum.*

COROLLARIVM.

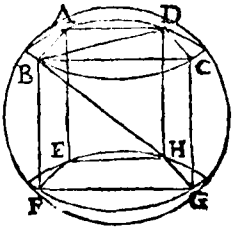
COLLIGITVR ex his, ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris octaedri in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum

ſtratum enim eſt, quadratũ ex BE, *diametro ſphæræ duplum eſſe quadrati ex* DE, *latere octaedri.*

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data ſphæra cubum deſcribere.

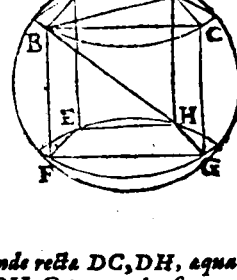
DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales ac parallelæ ABCD, EFGH, *quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ.* [a] *Deſcripto autem quadrato* ABCD, *in circulo* ABCD, *ducatur per 1. lẽma recta* AD, *in circulo* EFGH, *parallela* EH, *& æqualis ex eadẽ parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo* EFGH, *deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato* EFGH, *erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus quadrati* ABCD, *æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob lateru* AD, EH, *æqualitatem; parallela vero ex ſcholio propoſ. 10. lib. 11. Nã quia parallelæ ſunt* AD, EH, *ſuntq; anguli æquales* ADC, EHG, *nimirum recti; erunt quoque* DC, HG, *parallelæ, cum ſint ad eaſdem partes plani per* AD, EH, *ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ* AE, BF, CG, DH, *quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter ſe parallelæ. Dico* AG, *eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera* ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, *eſſe quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis* BH, BD, *erit ex lemmate 4.* BH, *diameter ſphæræ; at* BD, *diameter circuli* ABCD, *quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur per conſtructionem, quadratum ex* BH, *ſeſquialterum eſt quadrati ex* BD; *quadratum autem ex* BD, *quadrati ex* BC, *duplum, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſi ſtatuatur quadratum ex* BH, 3. *erit quadra-*



[a] 6. quarti.

dratum ex BD, 2. & quadratum ex DC, 1. atq; adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC, triplum erit. Rursus quia quadratum ex BH, est 3. & quadratum ex BD, 2.

[a] 47. primi.



[a] estque quadratum ex BH, aquale quadratis ex BD, DH, quod angulus BDH, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex DH, 1. Quadratum igitur ex BH, triplū est quadrati ex DH. Fuit autem idem quadratū ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DH, ac proinde recta DC, DH, æquales. [b] Cum ergo oppositis lateribus GH, CG, æquales sint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & EE, AH, BG, quadrata ostendentur: Sed & AC, EG, quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur est AG, ex defin. 25. lib. 11. & in data sphæra descriptus, cum eius anguli solidi A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.

COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ BH, triplum esse quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque est, eundē circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra describendorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ æqualis est circulo ABC, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propositio. 11.

PRO-

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data sphæra Icosaedrum describere.

REPERIATVR[a] *recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cũ pẽtagono descripti: Fiatq; ex coroll. prop. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiusdã lineæ, ad cuius interuallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Descripto maximo circulo in sphæra data,*[b] *accommodetur in eo recta, quæ inuenta semidiametri sit duplæ, cum hæc recta minor sit diametro sphæræ, siue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam si per eam rectã planum ducatur rectũ ad circulum illũ maximum,*[c] *faciet id circulũ ABC, in sphæra, cuius semidiameter, ex constructione, potentia subtripla est rectæ initio inuentæ. Deinde*[d] *inueniatur rursus recta linea, ad quam ita se habeat data sphæræ diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti; Fiatq; vt 3. ad 1. ita per coroll. prop. 6. lib. 10. quadratũ rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in sphæra describatur priori circulo ABC, parallelus: quod fiet, si in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ semidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad prop. 1. lib. 4. demõstrauimus, & per eam rectã planum extendatur priori circulo parallelum, hoc est, ad dictum circulum maximum rectũ, ex scholio propos. 18. lib. 11. Nam per idem scholium, planum hoc erit circulo ABC, parallelũ,*[e] *facietq; in sphæra circulũ, cuius semidiameter semidiametro inuentæ æqualis est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæræ alij duo æquales ac paralleli describantur GHI, KLM: quod facile fiet, si illorum diametri æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c.*[f] *Descripto autem in circulo DEF, triangulo æquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis sit vni lateri trianguli æquilateri in*

[a] 12. sexti

[b] 1. quarti.

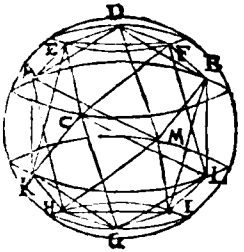
[c] 1. 1. Theodosii.

[d] 12. sexti

[e] 1. 1. Theodosii.

[f] 2. quarti.

circulo ABC, deſcripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipſi EF, hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, deſcripti. Complete ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipſi DF; at BC, MK, GI, ipſi DE: quod probabitur ex ſcholio propoſ. 10. lib. 11. vt in problemate ſecundo oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, ad diuerſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea triangula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confuſionem pareret, ſed tantum laterum extrema puncta notauimus. Poſtremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF: ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico DG, eſſe Icoſaedrum, hoc eſt, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod vt demonſtretur, oſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit propoſ. 16. lib. 13.) ſuos 12. angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulos in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notauimus.

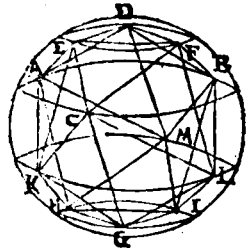


SIT igitur in ſphæra deſcripto Icoſaedro DG, duodecim anguli ſtatuti in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinque rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales ſunt, cum ſint latera triangulorum æquilaterorum æqualium, ſi ex polo D, per E, in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in vno

uno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eius latera ſint æqualia, vtpote latera Icoſaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonſtrata ſunt a nobis. Eadem ratione pentagonum aquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinq; latera Icoſaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinq; Icoſaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinque æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinq; latera Icoſaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEK, ob quinque Icoſaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK; ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaque inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam vero recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus; erit iuncta recta AB, ipſi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipſi DF, parallela in pentagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipſi DE, in pentagono DECLB. [a] Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela ſunt, [b] faciuntque circulos parallelos in ſphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipſi HI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipſi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipſi GH, in pentagono LBMHG: Ac propterea circuli in ſphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipſi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipſi EF, in pentagono GLFEK, [c] igitur EF, HI, cum ſint eidem iuncta AB, vel KL, parallelæ, inter ſe parallelæ ſunt. Eademque ratione DE, GI, cum ſint eidem iuncta BC, vel KM, parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; propterea quæ plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in ſphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter ſe

[a] 15. vnde.
[b] 1. 1. Theodoſii.
[c] 8. duodec.

ſunt; & tam circuli DEF, GHI, *inter ſe æquales, ob trian-*
gula æquilatera in illis deſcripta æqualia, q̃ circuli A B C,
K L M, *inter ſe etiam æquales, ob triangula æquilatera*
æqualia in ipſis, quæ ex iunctis A B, B C, C A; *&* K L,
L M, M K, *conſtituuntur: quippe cum latera hæc ſint recta*
ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium.



QVIA vero iuncta recta K B, *quæ connectit non ad eaſdem partes extrema* K, B *parallelarum* K L, A B, *in parallelis circulis non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphæra diameter eſt, & angulus* B A K, *rectus, ex 4. lemmate, quod* K A, *connectat ad eaſdem partes extrema* K, A, *earundem parallelarum;* [a] *erit quadratum diametri* K B, *æquale duobus quadratis ex* A B, A K. *Rurſus quia in pentagono* E A M B F, *recta iuncta* A B, *angulum* A M B, *ſubtendit: Vt autem recta angulum pentagoni ſubtendens ad latus pentagoni, ita eſt hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, ex ſcholio propoſitionis 2. lib. 14. erit* A B, *iuncta ad* E F, *vel* A K, *ipſi* E F, *æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco* [b] *cum latus pentagoni poſſit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum; erit diameter ſphæræ* K B, *(qua ambas* A B, A K, *poteſt, vt oſtendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo* A B, *latus eſt hexagoni, &* A K, *vel* E F, *latus decagoni. Quare ſphæræ diameter* K B, *ad iunctã* A B, *proportionẽ habet, quã pẽtagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad* E F, *eã, quã latus pẽtagoni habet ad latus decagoni:* [c] *Ac proinde cũ tã* A B, *latus triãguli æquilateri in circulo* A B C, *quã* E F, *latus trianguli æquilateri in circulo* D E F, *potentia triplum ſit ſemidiametri ſui circuli; erũt circuli* D E F, A B C, *ac proinde &* G H I, K L M, *qui illis æquales ſunt, illi, quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiame-*

tri

[a] 47. primi.

[b] 10. tertij dec.

[c] 12. tertij dec.

rri initio inuenta, minorem esse diametro sphæræ, vt supra diximus.

HIS demonstratis, facili negotio concludemus, solidam figuram a nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæræ diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphæræ KB, ad EF, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: [a] ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni. [a] 20. primi.

COROLLARIVM II.

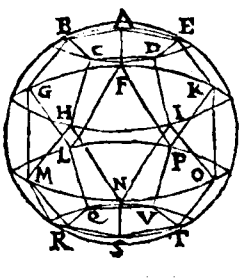
COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad iunctam AB, ex constructione; erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctam AB: [b] Est autem latus hexagoni in circulo ABC, hoc est, semidiameter potentia subtriplum rectæ iunctæ [b] 12. tertij dec.

AB, quod AB, *sit latus trianguli aquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo* ABC, *potentia subtriplum est diametri sphæræ, hoc est, diameter sphæræ potentia tripla est lateris pentagoni in circulo* ABC, *descripti.*

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propos. ABCDE, FGFGHIK, LMNOP, QRSTV, *ita vt semidiametri circulorum* ABCDE, QRSTV, *sint potentia subtripla duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorum* FGHIK, LMNOP, *potentia sint subtripla duarum rectarum, ad quas diameter sphæræ sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Descripto autem in circulo* ABCDE, *pentagono* ABCDE, *aquilatero, & aquiangulo, ducatur eius lateri* CD, *ad easdem partes centrorum parallela* HI, *in circulo* FGHIK, *& æqualis lateri pentagoni eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Rectæ autem* HI, *ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela* LP, *in circulo* LMNOP: *Huic tandem* LP, *ad eosdem centrorum partes ducatur parallela* QV, *in circulo* QRSTV. *Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis, (quorum tamen latera, vt confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus.) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni* ABCDE, *parallela, eo ordine, quo lateri* CD, *parallela ductæ sunt: quod demonstra-*



monſtrabitur, vt in probl. 2. oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erũt ipſi BC, &c. Poſtremo ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico AS, Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera eſſe, æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrãdum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſ. 17. lib. 13.) ſuos 20. angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atque in eo ſitu, quo eadem 20. puncta notauimus.

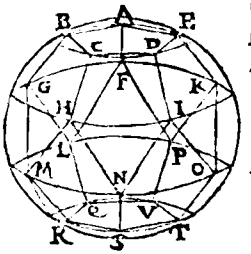
SIT ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos ſtatuẽs in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta ſubtẽdens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipſi AE, in pentagono AEKPF, & FG, ipſi AB, in pentagono ABGLF; & ſic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FG, parallelæ ſunt; [a] erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelũ erit planum per FG, GH, ductum; quod hæ rectæ rectis AB, BC, ſint parallelæ. Igitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter ſe parallela ſunt, cum eidẽ plano pentagoni ABCDE, ſint parallela; atque adeo, ex eodem ſcholio, cum conueniant in rectæ FG, vnum planum efficient. Non aliter oſtendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in ſphæra [b] efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos

[a] 15. vnd

[b] 1. 11. Theodoſii.

parallelos efficient QRSTV, LMNOP. Eruntq; tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL,

[a] 4. primi.



[a] quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.

[b] 9. vndec.

DEINDE quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ sunt in pentagonis CHNID, BGMHC; [b] erunt quoque ipsæ iunctæ ND, MB parallelæ: Sunt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant. [c] Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quod vtraq; lateri DI, sit parallela. [d] Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus est, cum ille ducatur per rectas NM, NO, hic vero per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ sunt ostensæ. Non secus ostendentur paralleli circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.

[c] 33. primi

[d] 15. vnde.

RVRSVS quoniam iunctæ rectæ EF, OV, cum ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, æquidistent, [e] parallelæ sunt; nec non & inter se æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant, [f] erunt & rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano est, [g] cum EF, OV, in eodem sint plano cum parallelis EO, FV. Est autem & in circulo, [h] propterea quod planum, in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur existit, quæ ad propos. 31. lib. 3. demonstrauimus, cum in eo quadrilatero oppositæ latera æqualia sint, quadrilaterum rectangulum est EFVO; ac proinde cum omnia latera æqualia sint, subtendētia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum potest lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, rectæ iunctæ FG, quod æquales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagono-

[e] 9. vndec.

[f] 33. primi

[g] 7. vndec.

[h] 1. 1. Theodosii.

tagonorum æqualium: ideoque qualium partium 1. ſtatuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata ſimul eorundem partium 3. Quibus [a] cum æquale ſit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter ſphæræ eſt; (Nam cū æquales ſint iunctæ FG, ON, ſubtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallelas, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ ſint, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iunctæ rectæ OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter ſphæræ.) erit quoque quadratum diametri ſphæræ 3. qualium 1. eſt quadratum rectæ FG, hoc eſt, quadratum diametri ſphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit. [b] Eſt autem & quadratum trianguli æquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ſphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris triāguli ad quadratum lateris hexagoni; [c] atque adeo vt diameter ſphæræ ad rectā FG, ita latus triāguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni eiuſdem circuli ad latus trianguli, quod FG, ſit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appoſita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque vt diameter ſphæræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

Diam. ſphæræ	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

[a] 47. primi

[b] 12. tertii dec.

[c] 22. ſexti

PRÆTEREA quia ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, vt iuncta recta FG, ſubtendens angulum pētagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pētagoni in circulo ABCDE, ita latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE; erit quoq; vt latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni ī eodē circulo

cum

cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo F G H I K, *ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodē circulo cū pētagono deſcripti, vt ꝓxime demōſtratū eſt. Igitur ex ęquo erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo* A B C D E, *ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodē circulo cū pentagono deſcripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque, vt diameter ſphæræ ad* E F, *latus trianguli in circulo* D E F, *ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterq; circulus* D E F, G H I, *figuræ antecedentis propoſ. vtrique circulo* A B C D E, Q R S T V, *huius figuræ æqualis. Quare circuli* A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, *ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.*

Diam. ſphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

QVIBVS demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram A S, *a nobis deſcriptam eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum* A B C D E, *omnes eius anguli ſolidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.*

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus D E F, *figura antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo* A B C D E, *figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14. propoſ. 5.*

MANIFESTVM quoque eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.

SCHO-

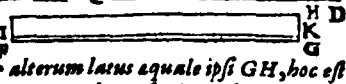
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facile etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in una eademque ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cū poſt Tetraedrum ſtatim octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper a minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quam octo quadrata ſimul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum CE, cuius vnum latus CD, octuplum ſit lateris quadrati A, & latus DE, lateri eiuſdem quadrati æquale: Eritque rectangulū CE, octuplum quadrati A, cum ſit, vt CD, ad latus quadrati A, ita rectāgulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cuius vnum latus FG, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſa, hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplū lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi GH, hoc eſt, altitudini trianguli B, vigecuplum eſt trianguli B; Ei autē triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum

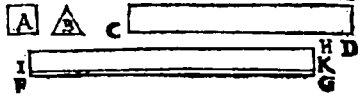


a 1. ſexti

b 1. ſexti

ctangulum FH, quippe cum baſis FG, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum FH, vigecuplũ trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum FH, maius eſſe rectangulo CE. [a] Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus DE, potentia ſeſquitertiũ eſt eius perpẽdicularis, hoc eſt, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potẽtia proportionẽ habet, quam 25. ad 16. quod FG, ſit 10. & CD, 8, hoc eſt, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſupernõcupartiens ſextaſdecimas, quam 4. ad 3. ſeſquitertia, quod maior ſit fractio $\frac{9}{16}$. quam $\frac{1}{3}$. [b] Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK; eritque maior quoque proportio DE, ad HK, quam ad GH; [c] ac proinde maior erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipſi FG, parallela, erit vt IK, ipſi FG, aequalis ad CD, ita DE, ad HK. [d] Igitur erit IH, rectangulũ rectangulo CE, aequale: ideo $\frac{1}{2}$ FH, maius, quam CE. Quod eſt propoſitum.

[a] 12. quarti dec.



[b] 12. ſexti

[c] 10. quinti

[d] 14. vel 16. ſexti.

II.

OCTO quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

[e] 20. quarti dec.

QVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæra deſcripta ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti aequalia ſunt: Duo vero eadem quadrata aequalia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæra deſcriptis, quod quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæra aequalia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæra. Quod eſt propoſitum.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur, erit perpendicularis e centro

tro ſphæræ ad vnam baſim Icoſaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri, & cubi ducta.

NAM [a] quia latus octaedri maius eſt latere Icoſaedri in eadem ſphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icoſaedri. Quare ſi vtrumq; ſolidum ita intra ſphæram conſtituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius ſit parallelum, longius a centro aberit Icoſaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis ſuperficiem ſphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis e centro ſphæræ ad baſim Icoſaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad baſim Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis ſit perpendiculari cubi; [b] quod baſis cubi, & baſis octaedri eodem circulo circumſcribantur, ideoque æqualiter a centro diſtent; erit quoq; perpendicularis Icoſaedri perpendiculari cubi maior. Quod eſt propoſitum.

[a] 3. 8. vnde.

[b] 21. quarti dec.

IIII.

SI Cubus & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior eſt.

QVONIAM viginti triangula æquilatera ſuper ſemidiametro ſphæræ maiora ſunt octo quadratis ex eadē ſphæra ſemidiametro deſcriptis, vt theoremate 1. demōſtrauimus: Sunt autem viginti triangula Icoſaedri maiora viginti triangulis æquilateris ſuper ſemidiametro ſphæra conſtructis, quod latus Icoſaedri ſemidiametro ſphæra maius ſit, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris. Igitur & viginti triangula Icoſaedri multo maiora ſunt octo quadratis ex ſphæra ſemidiametro deſcriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icoſaedri totam ſuperficiem Icoſaedri conficiant, at octo quadrata ex ſemidiametro ſphæra deſcripta, ſuperficiei cubi æqualia ſint, ex theoremate 2. paulo ante demonſtrato; erit quoque Icoſaedri ſuperficies maior ſuperficie cubi. Quod eſt propoſitum.

DE

DE COMPARATIONE Soliditatum quinque corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.

HIS præmiſſis, demonſtremus iam, Dodecaedrum maius eſſe Icoſaedro: Icoſaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icoſaedro maius eſt.

QVONIAM eſt, [a] *vt cubi latus ad latus Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad Icoſaedrum:* [b] *eſt autem latus cubi latere Icoſaedri maius; maius quoque erit Dodecaedrum Icoſaedro. Quod eſt propoſitum.*

[a] *11. quartidec.*
[b] *18. tertiædecimi*

II.

ICOSAEDRVM cubo maius eſt.

QVONIAM perpẽdicularis ex centro ſphæræ in vnã baſim Icoſaedri cadens, maior eſt perpendiculari ex eodem centro in vnam baſim cubi demiſſa, vt in 3. theoremate præmiſſo oſtenſum eſt: Item ex 4. theoremate, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior quoque eſt; Erit ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Icoſaedri contentum, maius ſolido, quod ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim cubi cadente, & tertia parte ſuperficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in ſcholio propoſ. 20. lib. 14. demonſtrauimus, illud ſolidum Icoſaedro ſit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icoſaedrum, quam cubus. Quod eſt propoſitum.

CV-

III.

CVBVS Octaedro maior est.

QVONIAM est, [a] vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius. (Nam, cum latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ; erit latus cubi multo maius semidiametro sphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.

[a] 37. quartidec.

[b] 18. tertiidec.

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

QVONIAM basis octaedri minor est basi Tetraedri, [c] quod basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad vnam basim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri maior, [d] cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Octaedri cadente, & tertia parte superficiei octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basim Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex scholio propos. 20. lib. 14. illud solidum octaedro sit æquale, hoc vero Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

[c] 14. quartidec.

[d] 14. quartidec.

ALITER. Quoniam est, [e] vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Te-

[e] 22. quartidec.

traedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrū. Igitur ex aqualitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam [a] *quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem tripla;* [b] *ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.*

[a] 18. tertij dec.

[b] 10. quin.

[c] 17. quartidec.

ALITER. [c] *Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectāgulum sub linea potente* $\frac{27}{64}$. *quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente* $\frac{8}{9}$. *lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphæræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphæræ, quod eius latera minora sint sphæræ diametro; quippe qua singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.*

[d] 32. quartidec.

[e] 27. quartidec.

ALITER. [d] *Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri: (Nam* [e] *cubus ad octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ; & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphæræ, quod & tota diameter, qua cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam.) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod est propositum.*

EODEM prorsus ordine se mutuo superant conuexa superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri: Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

[f] 9. quartidec.

[g] 18. tertij dec.

QVONIAM enim [f] *est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus latere Icosaedri maius,* [g] *vt supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.*

SVPERFICIEM vero Icosaedri maiorem esse superficie

perficie Cubi, demonſtratum eſt paulo ante theoremate quarto ante comparationem ſoliditatum quinque corporum Regularium.

DEINDE [a] quoniam eſt ſuperficies cubi ad octaedri ſuperficiem, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo oſtendimus, cubum Octaedro maiorem eſſe, demonſtratum eſt; Erit quoq; ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior.

[a] 27. quartidec.

DENIQVE [b] quia ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri; perſpicuum eſt, Octaedri ſuperficiem maiorem eſſe Tetraedri ſuperficie.

[b] 14. quartidec.

VIDES igitur ſuperficies & ſoliditates corporum Regularium contrario ordine reſpondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam ſuperficiem, at eo minus latus. Nam [c] vt ſupra demonſtratum eſt, Tetraedri latus eſt omnium maximum, eius vero ſuperficies atque ſoliditas, vt hic demonſtrauimus, omnium minima eſt: Item Dodecaedri latus omnium eſt minimum, eius vero conuexa ſuperficies & ſoliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, ſi Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icoſaedrum, & Dodecaedrum in eade ſphæra deſcripta ſint, latera eorum, eo ordine, quo propoſita ſunt, atque ab Euclide deſcripta, ſe mutuo ſuperant, [d] vt ſupra oſtenſum eſt; ita contrario ordine eorundem ſuperficies conuexæ, atque ſoliditates ſe mutuo ſuperant, vt hoc loco demonſtrauimus.

[c] 18. tertiidec.

[d] 18. tertiidec.

CÆTERVM prætereundum non eſt hoc loco id, quod a Pappo demonſtratum eſt lib. 5. Mathematicarum collectionum; ſoliditates videlicet quinque corporum Regularium, ſi Iſoperimetra ſint, atque idcirco, non in eadem ſphæra conſtructa, longe aliter ſe habere, quam a nobis demonſtratum eſt. Nam corpus, quod plures habet baſes, maius ſemper eſt corpore pauciorum baſium: Ita vt Icoſaedrum ſuperet Dodecaedrum, Dodecaedrũ maius ſit Octaedro, Octaedrum ſuperet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius ſit.

INVENTIO ANGVLI inclinationis duarum baſium cuiuſcunque ſolidi regularis, vnius ad alterum, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam ſecto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppoſitis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares ſint ad B D, communem ſectionem planorum A B D, C B D, in quibus exiſtunt.



a 8. primi. (a Sunt.n.in triangulis AEB, AED, anguli ad E, æquales,&c.) angulũ inclinationis AEC, baſiũ ABD, CBD, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur FGH, triangulum æquilaterum ſuper rectam FG, lateri pyramidis æqualem conſtructum, atque idcir co triangulo cuicunque pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum A B D, æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad F G, conſtituatur ſuper FG, triangulum FGK, habens vtrumque latus F K, G K.

GK, æquale perpendiculari HI, hoc eſt, vtrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem eſſe angulo inclinationis AEC, baſium ABD, CBD. Cum enim latera KF, KG, æqualia ſint lateribus EA, EC; & baſis FG, baſi AC: Aequales erunt anguli FKG, AEC. Dico inſuper angulum inclinationis AEC, acutum eſſe. [b] Cum enim latus AD, vel illi æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE; ideoque earundem partiũ 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cũ in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

[a] 8. primi.

[b] 12. quarti dec.

COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubtendanturque a lateribus pyramidis, quale ſuit AC; [c] omnes erunt inter ſe æquales, quod & omnes illa perpendiculares, quæ ipſos continent, æqua-

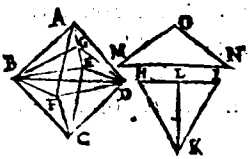
[c] 8. primi.

les ſint, nec non & latera pyramidis eoſdem ſubtendentia.

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR Octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis ABE, ADE, commune, bifariamq; ſectum in G, rectæ ducãtur BG, DG; quę cũ perpẽdiculares ſint ad AE, communẽ ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtũt, (quod in triãgulis BGA, BGE, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta KL, perpendiculari ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro



* 8. primi.

metro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri descripti, triangulum OMN, habens vtrũque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtrique perdendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales sint. Dico angulum MON, æqualem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GD; & basis MN, basi BD;[a] Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico præterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum. Cũ enim diameter octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB;[b] latus vero AB, potentia sesquitertium rectæ BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. quadratum rectæ BG; ideoque ambo simul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea angulus BGD, obtusus erit, vt in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.

[a] 8. primi.

[b] 14. tertiidecimi

[c] 12. quartidec.

COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales

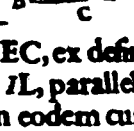
sunt BG, DG, subtendantúrque ab octaedri diametris, cuiusmodi est BD; [a] *omnes inter se æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, necnon & diametri octaedri eosdem subtendentes.*

[a] 8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus ABCDEFGH, in quo secetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; [b] quę cum æquales, ac parallelæ sint lateribus EF, EH, (quod & KF, IE, inter se, nec non & IE, LH, inter se æquales existant, & parallelæ) ideoque angulos rectos ad latus DE, efficiant, cõtinebunt KIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ IK, IL, parallelæ existentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, [c] angulum KIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, cõstituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonstrauimus, æqualis erit angulo inclinationis basium cubi.



[b] 33. primi

[c] 10. vnde.

CO-

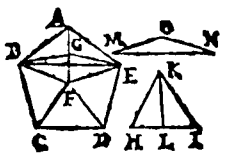
COROLLARIVM I.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum; perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

IIII.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alteram, inuenire.

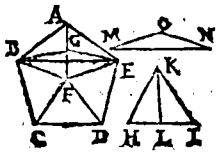
ESTO pyramis A B C D E F, una ex 12. pyramidibus Icoſaedri, cuius baſis pentagonum *ABCDE*, ex quinque Icoſaedri lateribus compoſi ſitum, vertex autem F. Diuiſo itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangu



lorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium, angulis *B*, & *E*, lateri AF, oppoſitis rectæ *BG*, *EG*, quæ cum ex demonſtratis in problemate 2. huius ſcholij, perpendiculares ſint ad AF, communem ſectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent

BGE,

B G E, angulum inclinationis basium A B F, A E F, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quotis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triãgulum æquilaterum HIK, super rectam H I, lateri Icosaedri æqualem fabricatũ, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet A B F, æquale, in quo ducta recta K L, ad H I, perpendiculari, constituatur super recta M N, quæ rectæ B E, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum O M N, habens vtrumque latus M O, N O, perpendiculari K L, æquale, hoc est, vtrique perpendiculari B G, E G, cum perpendiculares K L, B G, E G, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum M O N, angulo B G E, inclinationis basium A B F, A E F, æqualem esse. Cum enim latera O M, O N, æqualia sint lateribus G B, G E, & basis M N, basi B E; [a] Æquales erunt anguli M O N, B G E. Dico hunc etiam angulum inclinationis B G E, esse obtusum. Cum enim B G, angulum rectum faciat A G B; [b] erit recta A E, maior quam recta B G; ad eundemque modum A E, maior erit quam E G. Quare rectæ A B, A E, maiores quoque erunt rectis O M, O N, cum hæ rectis G B, G E, positæ sint æquales. Si itaque recta E E, super rectam sibi æqualem M N, intelli-



[a] 8. primi.

[b] 19. primi.

intelligatur poni; cadet angulus *A*, extra triangulum *MON*, ita vt rectæ *AB*, *AE*, rectas *OM*, *ON*, prorsus includant. [a] Angulus ergo *O*, maior erit angulo *BAE*: At hic obtusus est. (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintam. obtusus ergo erit, cum recto sit maior). Multo igitur magis obtusus erit angulus *MON*, hoc est, sibi æqualis *BGE*. [a] 21. primi

COROLLARIVM.

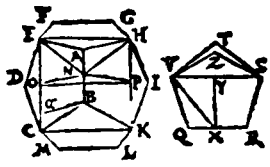
NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, EG, subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE: [b] *omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos,* [c] *æquales erunt.* [b] 8. primi. [c] 4. primi.

V.

ANGVLVM inclinationis duarũ basium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM

CVM per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum idem latus cómune AB; alia autē duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK.



His porro pētagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cum rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta

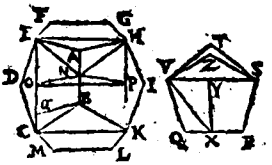
recta ſubtendatur V S, æqualis exiſtens rectæ E C, cum & latera T V, T S, lateribus D C, D E, æqualia ſint, angulóſque contineant æquales. Diuiſa deinde recta Q R, bifariam in X, ducatur a puncto X, ad Q R, perpendicularis X Y; propterea que perpendicularis ad V S, cum V S, ſit parallela ipſi Q R, ex ſcholio propoſit. 8. libri 13. Ac poſtremo ſuper rectam V S, triangulum fabricetur V Z S, habens vtrumque latus Z V, Z S, perpendiculari X Y, æquale. Dico angulum V Z S, æqualem eſſe angulo inclinationis O N P. Ductis enim rectis N E, N H, V X; cum latera E A, A N, æqualia ſint lateribus H A, A N: Item lateribus V Q, Q X, angulosque comprehendant æquales; [b] Aequales erunt & baſes N E, N H, V X, & anguli A N E, A N H, Q X V; ideoque & reſidui ex rectis, anguli videlicet E N O, H N P, V X Y, æquales erũt. Quoniã igitur anguli E N O, E O N, trianguli E N O, æquales ſunt angulis H N P, H P N, trianguli H N P; nec nõ & angulis V X Y, V Y X, triãguli V X Y; (ſunt. n. E O N, H P N, V Y X oſtenſi recti.) Et latus N E, lateribus N H, V X, æquale demonſtratum; [c] Aequalia erunt reliqua latera N O, O E, reliquis lateribus N P, P H; Item lateribus X Y, Y V. Quare rectæ Z V, Z S, æquales exiſtentes ipſi X Y, rectis N O, N P, æquales erunt. Iam vero, quia O E, P H, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoque recta coniuncta O P, æqualis & parallela ipſi E H, ideoque æqualis ipſi E C, hoc eſt, rectæ V S,

[b] 4. primi.

[c] 26. primi.

[d] 33. primi

VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia sint; basis item VS, basi
a 8. primi. OP; æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, esse obtusum. Nã ducta recta Bα, ipsi NO, parallela; cũ sit quoq; NB, ipsi Oα, paral-



lela, ex scholio prop. 8. lib. 13. Parallelogrãmum erit NOαB;
b 34. primi ideoq; recta Bα, ipsi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppositum angu-
c 29. primi lo CαB, qui rectus est, (æqualis nimirum interno CON,) maius est latere Bα, hoc est, recta NO, vel vtraque ZV, ZS, quæ ipsi NO, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, rectas ZV, ZS, includant omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior est angulo pentagoni T: Hic vero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli

guli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri *ad duo latera cubi in* Dodecaedro *descripti ductis; quales sunt* ℕO, ℕP, *subtendanturque a rectis, quę cubi inscripti lateribus sunt ęquales, vel certe, quę rectis subtendentibus angulos pentagonorum ęquales sunt, cuiusmodi est recta* OP, *lateri cubi inscripti* EH, *quod angulum pentagoni* EAH, *subtendit, ęqualis;* [a] *Erunt omnes inter se ęquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quę ipsos continent, ęquales sint, nec non & rectę illæ omnes, quę eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.*

[a] *8. primi.*

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

INDEX PROBLEMATVM,

QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR.

QVORVM EA, QVAE EVCLIDIS sunt, eodem charactere sunt expressa, quo in propositionum demonstrationibus vsi sumus: quæ vero adiecta a nobis, charactere, quo scholia notauimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, secundum significat. Vt autem facilius quisque inueniat problemata, quæ cupit, digessimus ea secundum materias, de quibus proponuntur.

ACVTANGVLVM trian gulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquila tera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquian gula figura. vide. Figura in tra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangu lum. vide. Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Angulum datum rectilineum bi fariam secare. pag. 97. A

Angulum datum rectilineum in quotuis partes æquales diuidere. pag. 99. & 902. A

Angulum rectum datū in tres angulos æquales partiri. 176. A

Angulum rectum ad pũctum in data recta linea datum constituere. 103. A

Angulum rectum ad extremũ punctum linea rectæ constituere. pag. 104. & 168. A

Angulum rectum in data recta per lineam ex puncto extra rectam dato ductam constituere. 105. & 106. A

Angulum rectũ in data recta constituere per lineam ductam ex puncto extra rectam dato, quando punctum vicinum est datæ rectæ, vel prope extremum plani cuiuspiam, vel quando recta data prope extremum plani est, vel denique quando & datum punctum est vicinum extremo plani, et recta data est prope aliud extremum plani. 107. & 168. A

Angulus propositus, rectus ne sit, an obtusus, acutusve, cognoscere. pag. 40. & 41. A

Angulum dato angulo rectilineo æqualem ad datã rectam lineam, datumque in ea punctũ constituere. 131. & 132. A

Angulos rectilineos, & arcus circulorum reperire incommensurabiles. 918. A

Ex tribus angulis planis, quorũ duo quomodocũque assumpti reliquo sunt maiores, solidũ angulum cõstituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse. pagina 579. B

Ad datam rectam lineam, eiusq; punctum angulum solidũ constituere solido angulo dato æqualem. 590. B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

Circuli dati centrum reperire. pag. 327. A

Per datum punctum in circumferentia rectam, quæ circulũ tangat, ducere. 352. A

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulũ tangat. 388. & 432. A

Circulis duobus datis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ utrumque circulum tangat. 389. A

Circulum per datum punctum describere, qui alium datum circulum tangat. 391. A

Linea recta, qua circulum secat, lineam parallelã ducere, qua eundem circulum tangat. 394. A

Circuli segmento dato, describere circulum, cuius est segmentum. 410. A

Circulum per tria puncta non existentia in linea recta, describere. 412. & 465. A

Arcum datum secare bifariam. pag. 425. A

Circuli segmẽtum super datam rectam describere, in quo angulus existens sit æqualis dato angulo rectilineo. 436. A

A dato circulo segmentum abscindere

scindere capiens angulum angulo dato rectilineo æqualem pag. 437.A

Circulis duobus datis, quorũ vnus non sit totus intra alium; circulum, qui vtrumque tangat, describere. 449.A

In circulo dato rectam accommodare datæ rectæ, quæ diametro maior nó sit, æqualem. pag. 456.A

In circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ, quæ circuli diametro maior non sit, & alteri rectæ parallelam. 457.A

Dato circulo, & duobus punctis, siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrũ sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnũ punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiã secant, parallela sit rectæ datæ duo puncta connectenti. 890.A

Datum arcum circuli in datã proportionem diuidere. 900.A

Datum arcum, vel angulum rectilineum in quotuis partes æquales partiri 902. A

Dato arcui circuli, ex cuius quadrante quadratrix descripta est, rectam lineam inuenire æqualem. 905.A

Dato circulo quadratum æquale constituere. 908.A

Dato quadrato, circulũ æqualem describere. 911.A

Circulum cuicũque rectilineo æqualem describere: Et circulo figurã rectilineam æqualem constituere, quæ cuicunque alteri similis sit. 912.A

Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli æqualem reperire. 912.A

Datis duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum; ex altero arcum æqualem abscindere. 913.A

Arcus circulorum, & angulos rectilineos inuenire incommensurabiles. 918.A

CIRCVMFERENTIA.

vide. Circulus.

COMMENSVRABILES, & incommensurabiles magnitudines.

An dua quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne, explorare. 293.B

Duabus magnitudinibus commẽsurabilibus datis, maximã earum communem mensuram inuenire. 294.B

An quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles nec ne, considerare. 295.B

Tribus magnitudinibus commẽ surabilibus datis, maximã earum mẽsuram communem inuenire. 297.B

Propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus, quam proportionem habeant in numeris, inuenire. 301.B

Rectam inuenire, ad quam ita se

habeat quęuis alia data recta, vt numerus ad numerũ. 303. B
Rectam inuenire, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius datæ rectę, vt numerus ad numerum. 303. B
Propoſitæ rectæ lineæ inuenire duas rectas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia. 319. B

COMPOSITI inter ſe numeri. vide. Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide. Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide. Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide. Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide. Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, atque aliam figuram.

In circulo dato triangulum deſcribere dato triãgulo ęquiangulum. 458 A
Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum. 459. A
In dato triangulo circulum deſcribere. 460. A
Trianguli lateribus cognitis, inuenire puncta, in quibus circulus inſcriptus ipſa latera tangere debet. 462. A
Circulum circa datum triangulum deſcribere. 463. A
In dato circulo quadratum deſcribere. 465. A
Circa datum circulum quadratum deſcribere. 466. A
In dato quadrato circulum deſcribere. 467. A
Circa datum quadratum circulum deſcribere. 467. A
In dato circulo pentagonũ ęquilaterum & æquiangulum inſcribere. 470. A
Super datam rectam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. 471. A
Circa datum circulum, pentagonum æquilaterũm, & æquiangulum deſcribere. 473. A
Circa circulum deſcribere quamcunque figuram regularem, quę circulo inſcribi poteſt. 474. A
In dato pentagono æquilatero & ęquiangulo circulum inſcribere. 475. A
In quacunque figura regulari circulum deſcribere. 476. A
Circa pentagonum æquilaterum & æquian-

æquiangulum circulum describere. 477.A
Circa quamcunque figuram regularem circulū describere. 477.A
In circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 478.A
In circulo quintidecagonū æquilaterum, & æquiangulum describere. 480.A
Figura quacunque regulari circulo inscripta, describere similem circa circulum, & in ea circulum inscribere, & circa eandem circulum describere. 492.A
Figura quacunque regulari circulo inscripta, inscribere aliam duplo plurium laterum. 492.A
Figuras regulares imparium laterum circulo inscribere beneficio Isoscelium, quorum anguli ad basim angulorum ad verticem multiplices sunt. 492.A
Figuras regulares parium laterum circulo inscribere beneficio Isoscelium, quorum anguli ad basim angulorum ad verticem multiplices sesquialteri sunt. 493.A
Figuram quamcunque regularem absque beneficio Isoscelium circulo practice inscribere. 494.A
Figuram quamcunque regularem super datā rectam practice describere. 495.A
Latus pentagoni, & decagoni in eodem circulo, ex Ptolemæo inuenire. 497.A. & 713.B
Quadratricem lineam intra quadrantem, & quadratum describere. 891.A
Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum. 675.B
Ex quo fit, perpendicularem ad diametrum ductam ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, totam extra minorem circulum cadere. 676.B
Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrū inscribere, quod non tangat minoris sphærę superficiē. 676.B
Ex quo fit, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. 682.B
Pyramidem constituere, & data sphæra complecti. 720. & 925.B
Octaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem. 725. & 927.B
Cubum constituere, & sphęra cōplecti, qua priores figuras. pag. 729. & 929.B
Icosaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras. 733 & 931.B
Dodecaedrū constituere, & sphę

ra complecti, qua & prædictas figuras. 739.& 936.B
Latera quinque corporum Regularium exponere, & inter se comparare. 749.B
Numerum laterum, & angulorum solidorum cuiusq; corporis Regularis expedite cognoscere. 756.B
In dato cubo pyramidem describere. 827.B
In data pyramide octaedrū describere. 828.B
In dato cubo octaedrum describere. 829.B
In dato octaedro cubum inscribere. 831.B
In dato Icosaedro Dodecaedrū inscribere. 833.B
In dato octaedro pyramidem describere. 836.B
In dato Dodecaedro Icosaedrum describere. 838.B
In dato Dodecaedro cubum describere. 840.B
In dato Dodecaedro octaedrum describere. 841.B
In dato Dodecaedro Pyramidem describere. 842.B
In dato Icosaedro cubum describere. 843.B
In dato Icosaedro Pyramidem describere. 844.B
In dato cubo Dodecaedrum describere. 844.B
In dato cubo Icosaedrum describere. 853.B
In dato Icosaedro octaedrum describere. 856.B
In dato octaedro Icosaedrum describere. 857.B
In dato octaedro Dodecaedrum describere. 862.B
In data pyramide cubum describere. 863.B
In data pyramide Icosaedrum describere. 869.B
In data pyramide Dodecaedrum describere. 870.B
In dato solido Regulari sphæram describere. 871.B
Datis duobus circulis in sphæra parallelis, dataque in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam: vel etiam aliam rectam, quæ data recta sit æqualis et parallela, dūmodo recta data maior nō sit diametro posterioris circuli. 918.B
In data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera. pag. 924.B
Angulum inclinationis duarum basium cuiusque corporis Regularis inuenire. 948.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

A data recta linea imperatā partem auferre. 768.A
Datam rectam lineā similiter secare, vt data altera recta secta fuerit. 769.A
Datā rectam in quotuis partes æquales secare. 210.& 770.A
Datā rectā secare in duas partes datam

datam proportionem habentes. pag. 773. A

Datam rectam in quotuis partes Arithmetice proportionales secare. 776. A

Datis duabus rectis, tertiã proportionalem inuenire. 777. A

Quotuis rectas in data proportione continue proportionales reperire. pag. 778. A

Datis tribus rectis, quartã proportionalem inuenire. 780. A

Datis duabus rectis, alias duas in eadem cum illis proportione reperire. 781. A

Datis tribus rectis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam. 781. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem inuenire. 782. A

Data recta, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius. 783. A

Secta recta in duas partes vtcunq; alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continue proportionales. 789. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalẽ in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792. A

Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire. 793. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire. 793. A

Datis duabus rectis, minorẽ extremitatẽ in Geometrica proportionalitate inuenire. 794. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 794. A

Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire. 795. A

Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Harmonica medietate inuenire. 796. A

Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 797. A

A data recta dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere. 810. A

Dato rectilineo simile, similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere. pag. 839. A

Ad datam rectam, dato rectilineo, quod maius non sit parallelogrammo ad dimidiam applicato, æquale parallelogrãmum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ simili sit alteri parallelogrammo dato. 846. A

Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammũ applicare, excedens figura parallelogramma, quę similis sit parallelogrammo alteri dato. pag. 847. A

Datâ rectâ terminatâ extrema, ac media rône secare. 850.A
A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablati, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum. 869.A
Datis duobus rectilineis, tertium proportionale inuenire. 870.A
Datis tribus rectilineis, quartū proportionale inuenire. 870.A
Datis duobus rectilineis, medium proportionale inuenire. 871.A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantq; datam proportionem inter se. 872.A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quæ cuiuis rectilineo similia sint, similiterq; descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se datam proportionem. 873.A
Datis duobus rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum dato rectilineo. 874.A
A dato puncto in latere trianguli rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum datam proportionem. pag. 879.A
Dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere, maius vel minus, secundum datam proportionem. 881.A
In dato quadrato aliud quadratum describere in data proportione, quæ dupla maior non sit. pag. 885.A
Datum arcum circuli in datâ proportionem diuidere. 900.A
Isosceles triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam. 902.A

FIGVRAE plane quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & linex proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.

Proportionem ex duabus, vel pluribus proportionibus componere. pag. 831. A

Proportionem minorem ex maiore auferre. 831. A

MINVTIAE numerorum.

Duas minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere. 249. B

Integrum numerum quemcunque ad dati denominatoris minutiã reducere. 249. B

Datam minutiam duplare, ac dimidiare. 250. B

Minutiam minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere. 253. B

Datis duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numeret, per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ productos. 254. B

Datam minutiam ad minimos terminos reducere. 257. B

Datam minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare 257. B

Minutias plures in vnam summam colligere. 259. B

Minutiam minorem ex maiore detrahere. 261 B

Minutiam per minutiam multiplicare. 263. B

Minutiam per minutiam diuidere. 264. B

Minutiam in minutiam inferre. pag. 267. B

NVMERI proportionales in communi.

Ex datis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri. 800. A

Datis duobus numeris, mediũ Harmonice proportionalem inuenire. pag. 802. A

Datis duobus numeris, minorẽ extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 803. A

Datis duobus numeris, maiorẽ extremitatem in proportionalitate Harmo-

Harmonica inuenire. 803.A
Datis duobus numeris, maiorem extremitatē in Harmonica proportionalitate inuenire, 805.A
Datis numeris quotcunque, repe rire minimos omniū eandem rationem habentium cum ipsis. 95.B
Duos minimos numeros reperire in proportione quotuis numerorum continue proportionalium. pag. 96.B
Numeros reperire deinceps pro portionales minimos quotcū que quis iusserit in data ratione. 110.B
Numeros quotcunque integros, & minimos continue proportionales aliter reperire, in proportione data non multiplici. 114.B
Datis quotcunque rationibus in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus. 117.A
Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri. pagina 210.B
Tribus numeris datis, considera re, an ipsis quartus proportionalis possit inueniri. 211.B
Datis quotlibet numeris, considerare, an ipsis possit alius proportionalis adiungi. 213.B
Summam quotcunque numerorum continue proportionalium inuenire. 230.B
Inuenire quotcūq; numeros cōtinue proportionales in data proportione, quorum summa aqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis aqualiter distant. 239.B
Item *quorum summa sit numerus quadratus, cuius radix sit medius terminus.* 239.B
Duos numeros in data proportione inuenire, quorum summa aqualis sit numero producto ex vno in alium. 239.B

NVMERVS fractus, vide. Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Dati duo numeri an sint primi, inter se, necne, considerare. 34.B
Datis duobus numeris non primis inter se; maximam eorum communem mensuram reperire. 35.B
Dati quotuis numeri sint ne primi inter se, an non, considerare. pag. 36.B
Datis tribus numeris nō primis inter se, maximā eorū communem mensuram reperire. 37.B
Datis duobus numeris, minimū numerum ab eis numeratum reperire. 97.B
Tribus numeris datis, reperire minimum ab eis numeratum. pag. 100.B

Datis quotuis numeris, inuenire minimum ab eis numeratum. pag. 102.B

Numerũ reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes. pag. 103.B

Numerum reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt qualibet pars contineat partem subsequentem. 106.B

Primis numeris datis quotcunque, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum. 216.B

Omnes pariter pares tantum reperire. 226.B

Omnes pariter impares tantum inuenire. 227.B

Omnes pariter pares, & pariter impares inuenire. 229.B

Omnes numeros perfectos inuenire. pag. 233.B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, similes plani, ac solidi numeri.

Quadratum numerum inuenire, cũ quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat: Et a quo idem datus numerus subtractus relinquat quadratũ. 265. 268. 272. & 278.A

Planos numeros, vel solidos duos nõ similes reperire. 171.B

Planos, vel solidos numeros quotcunque non similes inuenire. pag. 318.B

Duos numeros planos similes inuenire, pares, vel impares, vel vnũ parem, & alterũ imparem. pag. 366.B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit. pagina 367.B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt excessus eorum quadratus etiam sit. 368.B

Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus non sit quadratus. 368.B

Duos numeros quadratos inueuire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus. 369.B

Duos numeros inuenire, ita vt compositus ex ipsis ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. pag. 372.B

OBTVSANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & plana parallela.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo nõ est, parallelum planum ducere. 565.B

A data recta linea, dato solido parallelepipedo simile & simiiter positum solidum parallelepipedum describere. pagina 592.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammum constituere, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraque circa illum angulum datis duabus rectis æqualia. 165. A

Parallelogrammum secare bifariã per rectam per quoduis punctum ductam, quod non sit in diametro, nisi quando diametrum secat bifariam. 183. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale constituere in dato angulo rectilineo. 218. A

Parallelogrãmo dato æquale triãgulum constituere in dato angulo rectilineo. 218. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale cõstituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221. A

Parallelogrãmo dato æquale triangulum constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223. A

Parallelogrammum dato rectilineo æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 224. A

Parallelogrammum datis quotcunque rectilineis æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 225. A

Rectilineis duobus inæqualibus datis, excessum maioris supra minus inquirere. 226. A

Quadratum supra datam rectam constituere. 226. A

Quadratis duobus inæqualibus datis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia inter se sint, & simul sumpta æqualia duobus datis simul sumptis. 236. A

Quadratis quotlibet datis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 238. A

Quadratis duobus datis, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ua ut tota figura composita sit etiã quadrata. 238. A

Quadratum dato rectilineo æquale constituere. 315. A

Dato excessu diametri alicuius quadrati supra latus eiusdem: Inuenire latus ipsius quadrati. pag. 317. A

Dato circulo quadratũ æquale constituere. 908. A

Dato quadrato, circulum æqualem describere. 911. A

PAR, & impar numerus. vide. numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri ſimiles. vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. vide. Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarũ, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide. Numeri Proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſitæ Rationali commen-

mensurabiles inuenire, quarum vna Rationali expositæ sit aqualis, 342. B

Duas Rationales lõgitudine & inter se, & expositæ Rationali eem mensurabiles inuenire, quarum neutra Rationali expositæ aqualis sit. 342. B

Duas Rationales longitudine quidem inter se, potentia vero tantũ expositæ Rationali cõmensurabiles inuenire. 343. B

Rationales quotcũque longitudine inter se cõmensurabiles inuenire. 343. B

Duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire, quarum altera expositæ Rationali sit æqualis. 348. B

Duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire, quarũ neutra sit expositæ Rationali æqualis. 348. B

Rationales quotcunque potẽtia tantum inter se commensurabiles reperire. 349. B

Datis quotcunque Rationalibus potentia solum commẽsurabilibus, inuenire aliam Rationalem illis omnibus potentia tantum commensurabilem. 350. B

Duas Medias rectas longitudine commensurabiles; Itẽ duas potentia tantum commensurabiles inuenire, 357. B

Medias inuenire potentia tantũ commensurabiles, quę Rationalę comprehendant. pagina 364. B

Medias inuenire potentia tantũ commensurabiles, quę Med ũ contineant. 365. B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quã minor, plus possit quadrato rectæ longitudine sibi cõmensurabilis. pag. 373. B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quã minor plus possit quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. pag. 374. B

Duas Medias inuenire potentia tantum commẽsurabiles, quę Rationale contineant, ita vt maior plus possit, quã minor, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis, vel incommensurabilis. 376. B

Duas Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ Medium cõtineant, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. 378. B

Duas rectas inuenire potẽtia incommensurabiles, quæ faciãt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. pagina 382. B

Duas rectas inuenire potẽtia incommensurabiles, quæ faciãt compositum quidem ex ipsarum

rum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. 384.B
Duas rectas inuenire potẽtia incommenſurabiles, quæ faciãt & compoſitum ex ipſarũ quadratis Mediũ, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis. pag. 386.B
Duas Medias inuenire longitudine, & potentia incommenſurabiles. 387.B
Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur, inuenire. 409.B
Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur, inuenire. 469.B

RECTA LINEA.

Rectæ datæ lineæ æqualem rectam lineam ad datum punctũ ponere. 80.A
Rectam lineam æqualẽ datæ minori ex maiore detrahere. pag. 81.A
Rectam lineam datam finitã bifariam ſecare. 101.A
Rectam perpendicularem ad rectam lineam ex puncto in ea dato educere. 102.A
Rectam perpendicularem ad rectã in puncto extremo erigere. pag. 104. & 106. A
Rectam perpendicularem ad rectam ducere ex puncto extra eam dato. 105. & 106. A
Rectam perpendicularem ad rectã ducere ex puncto extra eam dato, quando punctum datum eſt vicinum datæ rectæ, vel prope extremũ plani cuiuſpiã, vel quando recta data prope extremum plani eſt, vel denique quãdo & datum punctum eſt vicinum extremo plani, & recta data eſt prope aliud extremum plani. pagina 107. & 168. A
Rectæ datæ parallelam rectam a dato puncto ducere. 164. A
Rectam lineam a puncto extra datam rectam lineã propoſito ducee, qua cũ data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. 165. A
Rectam lineam data recta parallelam ducere per punctum datæ rectæ vicinum. 167. A
Inter duas rectas infinitas angulũ facientes lineã rectam datæ lineæ æqualem collocare, qua cum vtralibet earũ faciat angulum dato angulo æqualem, dummodo datus angulus, & angulus cõprehẽſus datis rectis minores ſint duobus rectis. 184. A
Rectam datam lineam finitam, in quotlibet partes æquales ſecare. pag. 210. & 770. A
Rectis duabus inæqualibus datis, inuenire id, quo plus poteſt maior, quam minor. 237. A. & pag. 326. B.
Datis duab. rectis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectã, quæ

quæ illas p̃t. 236. A. & 327. B
Rectam lineam datam secare, vt rectangulum sub tota, & altero segmẽto æquale sit quadrato reliqui segmenti. 286. A
Datis duabus rectis, alterutri earũ rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita, & adiuncta, æquale sit quadrato alterius. 446. A
Rectam lineam cuilibet arcui circuli, ex cuius quadrãte Quadratrix linea describitur, æqualem inuenire. 905. A
Duabus datis rectis inæqualibus quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata. 332. B
Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulũ sub segmentis contentũ æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum. 324 B
A dato pũcto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam ducere. 560 B
Dato plano, a punctο, quod in illo datum est, perpendicularẽ rectam excitare. 561. B
Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum. 571. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide. Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac solidi numeri. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra sphæram, atq; aliam figuram vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri similes. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. numerus planus, &c.

SPHAERA. vide. Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM

Triangulum æquilaterum super data recta linea terminata cõstituere. 175.A

Isosceles super data recta constituere. 77.A

Scalenum super data recta constituere. 78.A

Triangulum ex tribus rectis lineis, quæ sunt tribus datis rectis lineis æquales, quarum quælibet duæ reliquâ sint maiores, constituere. 129.A

Triangulum alteri dato triangulo æquilaterum, & æquiangulum constituere. 130.A

In scaleno, & Isoscele, cuius basis minor nõ sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarũ vtraque simul vtriquelateri simul sit æqualis. 185.A

In æquilatero, vel Isoscele, cuius basis vtrouis latere minor sit, quælibet duæ lineæ intra triangulum ductæ sunt simul minores duobus lateribus simul. 187.A

In Scaleno, & Isoscele, cuius basis minor non sit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraque vtriquelateri sit æqualis, vel maior. pag. 188.A

Triangulum bifariam secare per lineam æqualis puncti in ambitu datum ductam. 199.A

Triangulo dato æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo. 218.A

Triangulum dato parallelogrammo æquale constituere in dato angulo rectilineo. 219.A

Triangulo dato parallelogrammum æquale cõstituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221.A

Triangulum dato parallelogrammo constituere æquale super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223.A

Trianguli rectanguli cognitis duobus lateribus, inuestigatione reliqui lateris peruenire. 229.A

Amblygonium triangulum constituere, in quo propos. 12. lib. 2. numeris possit accommodari. 293.A

Oxygonium triangulum constituere, in quo prop. 13. lib. 2. numeris possit accommodari. 298.A

Trianguli cuiusuis aream cognoscere. 311.A

Isosceles construere, quod habeat vtrumque angulorum ad basim reliqui duplum. 288.A

Isosceles oxygonium construere, cuius tertium latus vtrouis quælibet sit maius. 270.A

In dato triangulo quocunque quadratum describere. 254.A

FINIS.

INDEX THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR:

QVORVM EA, QVAE AB EVCLIDE demonſtrantur, eodem charactere ſunt notata, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ vero a nobis adiecta, charactere, quo ſcholia excuſimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem facilius quiſque inueniat theoremata, quæ cupit, digeſsimus ea ſecundum materias, de quibus demonſtrantur.

ACVTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquilatera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquiangula figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangulum. vide. Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Anguli recti omnes ſunt inter ſe æquales. 66.A

Anguli oppoſiti ad verticẽ duarum rectarum ſe interſecantium ſunt æquales. 111.A

Anguli quatuor a duabus rectis ſe interſecantibus facti, ſunt quatuor rectis æquales. 112.A

Anguli quotcunq; circa idem punctum quatuor rectis ſunt æquales. 112.A

Angulus externus trianguli maior eſt vtrouis interno oppoſito. 114.A

Angulus externus figuræ quadrilateræ maior eſſe poteſt quouis interno oppoſito. 115.A

Anguli duo trianguli quomodocunque ſumpti duobus rectis ſunt minores. 117.A

Anguli duo trianguli orthogonij, & amblygonij ſunt acuti. 118.A

Anguli omnes trianguli æquilateri, & duo Iſoſcelis ſupra baſem, acuti ſunt. 119.A

Anguli tres cuiuſcunque trianguli æquales ſunt duobus rectis: Et externus æqualis eſt duobus internis

ternis oppoſitis ſimul. 169.A
Anguli omnes interni cuiuſcunque figuræ rectilineæ quot rectis angulis æquiualeãt. 171.& 172.A
Anguli omnes externi cuiuſcunq; figuræ rectilineæ, productis ſingulis lateribus ordinatim verſus eandem partem, quatuor rectis ſunt æquales. 173.A
Anguli quinque, q fiunt ex cõcurſu binorũ laterũ pẽtagoni productorũ æquales sũt duobus rectis. 174.A
Angulus cõtactus vere angulus eſt, contra Peletarium, vbi eius ſophiſmata diſſoluuntur. 354. vſque ad 387.A
Angulo quouis contactus dari poteſt alius minor, & hoc alius minor vſq; in infinitũ: Item maior, & hoc alius maior ĩ infinitũ. 361.A
Anguli contactus, quo modo inter ſe ſint æquales, & qui æquales ſint. pag. 363.A
Anguli cõtactus, quotquot ſint, efficiunt aggregatũ omni rectilineo acuto angulo minus. 365.A
Anguli contactus Apologia aduerſus Peletariũ. 366. vſq; ad 387.A
Angulus quiſpiam poteſt in infinitum augeri, & alius in infinitũ minui; & tamẽ augmẽtũ illius, quantũcunq; ſit, minus ſemper erit decremento huius. 387.A
A minori angulo trãſitur ad maiorẽ, et per oẽs intermedios, nũquã tamẽ p æqualẽ. 387.& 430.A
Anguli oppoſiti in quadrilatero intra circulũ deſcripto æquales sũt duobus rectis. 401.A
Angulus externus quadrilateri in circulo, æqualis eſt ei, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A
Angulus rectus in cẽtro inſiſtit quadrãti; acutus uero arcui quadrãte minori; & obtuſus maiori. Et cõtra, angulus in cẽtro quadrãti inſiſtẽs, rectus eſt; inſiſtẽs uero arcui quadrãte minori, acutus; & maiori, obtuſus. 417.A
Angulus curuilineus angulo rectilineo æqualis eſſe poteſt. 634.A
Si duæ rectæ ſe mutuo tãgẽtes, ad duas rectas ſe mutuo tãgẽtes ſint parallelę, non autẽ in eodẽ plano; illę angulos æquales cõprehendent. 558.B
Idem euenier, ſi omnes illa recta ſint in vno plano. 558.B
Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur; Ex his duo quilibet vtut aſsũpti tertio ſunt maiores. 573.B
Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis cõtinet. 574.B
Si fuerint tres anguli plani, quorũ duo vtlibet aſſumpti reliquo ſint maiores, cõphendãt aũt ipſos rectę lineę æquales; fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulũ cõſtituatur. 576.B
Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumq. vtriquę in ſublimibus aũt lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his

ad plana, in quibus conſiſtunt
anguli primum poſiti, ductæ
fuerint perpendiculares; pun-
ctorum vero, quæ in planis a per-
pendicularibus ſunt, ad angu-
los primum poſitos adiunctæ
fuerint rectæ lineæ: Hæ cum
ſublimibus æquales angulos
comprehendent. 609. B

Si fuerint duo anguli plani æqua-
les, quorum verticibus ſubli-
mes rectæ æquales cum lineis
primum poſitis angulos con-
tinentes æquales, vtrumque
vtrique erunt a punctis extre-
mis linearum ſublimium ad pla-
na angulorum primum poſi-
torum demiſſæ perpendicula-
res, inter ſe æquales. 611. B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

*Circulus a diametro bifariam di-
uiditur.* 95. A

*Circulus a recta, quæ diameter non
ſit, diuiditur non bifariam.* 96. A

Si in circulo recta aliqua linea
rectam quampiam bifariam ſe
cet & ad angulos rectos, in ſe
cante centrum erit circuli.
pag. 328. A

Si in circuli peripheria duo pun
cta contingantur linea recta;
cadet recta intra circu-
lum. 328. A

Recta circulum in vno tantum
puncto tangit, nec tanget, vt
eum non ſecet. 329. A

Si in circulo recta linea per cu-
ram ducta ſecet alia non per
centrum ductam bifariam; &
ad angulos rectos ipſam ſeca-
bit. Et ſi ad angulos rectos ei
ſecet; bifariam quoque eam
ſecabit. 330.

*Duobus circulis ex eodem centro de-
ſcriptis, ſi ab aliquo puncto ſit
circumferentiæ exterioris recta du-
catur interiorem circumferentiã
ſecans; eorum ſegmenta inter
vtramq. circumferentiam aqua-
lia.* 331. A

In circulo duæ rectæ non per
centrum extenſæ, ſe mutuo bi
fariam non ſecant. 332. A

Duo circuli ſe mutuo ſecantes
non habent idem centrum.
pag. 333. A

Duo circuli ſe mutuo interius
tangentes non habent idem
centrum. 333. A

Si in diametro circuli a puncto,
quod centrum non ſit, plura-
mæ rectæ cadãt: maxima cen
nium erit, in qua centrum; mi
nima vero reliqua: aliarum
autẽ propinquior ei, quæ per
centrum, remotiore ſemper
maior eſt: Duæ autem ſolum
rectæ æquales ab eodem pun-
cto in circulum cadent ad
vtraſque partes minimæ vel
maximæ. 333. A

*Intra circulum punctum ſumi-
tur, ad quod in circulum vota a-
lium cadentium quæ quidem ſit*

maxima, una vero minima, & reliquarum alia sint inæquales, alia æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidē erunt maxima propinquiores, æquales autem a minima vel maxima æqualiter distabunt. 336.A

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum una quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: In cauam peripheriā cadentiū rectarum, maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autē propinquior ea, quæ per centrū transit, remotiore semper maior est, &c. 338.A

Ex puncto extra circulum sumpto, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ rectæ æquales cadunt ad vtrasque partes maximæ lineæ. 340.A

Si ex puncto extra circulum ducatur recta tangens circulum, erit ea minor omnibus ex eodem puncto in concauam peripheriam cadentibus, maior vero omnibus in conuexam peripheriā cadentibus. 340.A

Punctū in circulo, a quo plures quam duæ rectæ æquales ad peripheriam ducuntur, centrum circuli est. 341.A

Circulus circulum in pluribus punctis, quam duobus, non secat. 342.A

Recta per centra duorum circulorum se interius tāgentium ducta, cadit in circulorū contactum. 343.A

Recta per centra duorum circulorum se exterius tangentiū ducta, transit per circulorum contactum. 344.A

Circulus circulum non tangit in pluribus pūctis, quam vno. pag. 345.A

Si in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus, tangit peripheriam circuli in eo puncto extremo, totusq; extra eundem cadet. 347.A

In circulo æquales rectæ æqualiter a centro distant. Et quæ æqualiter a centro distant, sunt æquales. 348.A

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior. 349.A

Ex puncto circumferentiæ in concauam peripheriam duæ tātum rectæ æquales cadunt ad vtrasque partes diametri. 341.A

Quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locū inter ipsam rectam, & peripheriā comprehensum, altera recta

ēta non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo angulo maior eſt, reliquus autem minor. 351.A

Recta ad extremū diametri ppē dicularis circulū tāgit. 353.A

Si circulū recta tangat; recta ad cōtactū ducta, perpēdicularis eſt ad tāgentē lineam. 394.A

Circulis duobus ex eodē centro deſcriptis; recta interiorē tāgentes, & vſq; ad exteriorē extēſę, inter ſe æquales ſunt, bifariāq; in punctis cōtactuum ſecantur. 395.A

Si circulū tetigerit recta; ppēdicularis ad tāgentem in puncto cōtactus, p cētrū trāſit. 395.A

In circulo, angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, ſi fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 396.A

In circulo ſpatium ad cētrū, duplū eſt anguli ad peripheriā, cū fuerit eadem peripheria baſis ſpatij, & anguli. 399.A

In circulo, qui in eodē ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales. 399.A

Si a duobus punctis quatuor recta ducantur, ex ſingulis bina, quæ in concurſu contineāt duos angulos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorū deſcriptus, per alterū quoq; angulum trāſibit. 401.A

In circulo quadrilaterū quodcū que habet angulos oppoſitos duobus rectis æquales. 401.A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipsū deſcribi pōt. 402.A

Si ex ſemicirculis, aut circulis ſimilia ſegmēta detrahātur; reliqua ſegmēta ſimilia etiā sūt. 403.A

Arcus, quibus anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtunt, ſimiles ſunt: Et anguli arcubus ſimilibus inſiſtentes ſiue ad centra, ſiue ad peripherias, æquales ſunt. 404.A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abſcindunt arcus ſimiles. pag. 405.& 862.A

Si duo aut plures circuli ſe mutuo tangant interius; Recta a puncto contactus ducta abſcindunt arcus ſimiles. 406.A

Si vnum latus quadrilateri in circulo producatur; angulus externus æqualis eſt angulo, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A

Segmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ſuper eadem recta linea. 407.A

Segmēta ſimilia ſuper æqualibus rectis, ſunt æqualia. 408.A

Segmenta ſimilia, & æqualia, ſunt conſtituta ſuper æquales rectas, vel ſuper eandem rectā. 409.A

In circulis æqualibus, vel eodē anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias. 413.A

In circulis æqualibus, vel eodē maior angulus, maiori peripheria inſiſtet. 414.A

In circulis æqualibus, vel eodē anguli æqualibus peripherijs inſiſtētes, sūt æquales. 415.A

In circulis ęqualibus, vel eodem angulus maiori peripheria inſiſtēs maior eſt. 415.A

In circulo, duę recta ſe nō interſecātes, et intercipientes arcus ęquales, parallela ſūt: Et parallela intercipiūt arcus aquales. 416.A

Recta, quę ex medio pūcto arcus alicui⁹ ducii tāgēs circulū, parallela eſt chordę illius arcus 416.A

Angulus rectus in cetro inſiſtit quadrāti; acutus vero, arcui minori quadrante; & obtuſus, maiori. Et contra, angulus in centro inſiſtens quadrati, rectus eſt; inſiſtēs vero arcui quadrante minori, acutus; et maiori obtuſus. 417.A

Recta e centro ſecans rectam aliā bifariam, ſecat quoq; arcum bifariam. Et ſecans arcum bifariam, ſecat quoque chordā bifariam. 418.A. & 712.763.B

In circulis ęqualibus, vel eodem rectæ æquales, auferunt arcus æquales. 419.A

In circulis ęqualib. vel eodē, maior linea maiorē arcū auſert, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus ſermo fiat: minorē vero, ſi de ſegmētis maioribus agatur. 420.A

In circulis æqualibus, vel eodē, ſi arcus ſint æquales, erunt & rectæ æquales. 420.A

In circulis æqualibus, vel eodē maior arcus habet chordā maiorē, ſi de arcubus ſemicirculo minoribus loquamur: minorem vero, ſi de maioribus. 421.A

Circuli, e qb. ęquales recta auferūt ſimiles arcus, aquales ſūt. 422.A

Ex circulis inaqualibus recta ęquales auferūt arcus diſſimiles. 422.A

Ex circulis inaqualibus linea rectę auferentes arcus ſimiles, inaquales ſunt. 422.A

Recta linea auferētes arcus ſimiles inaquales ex quibuſuis circulis, inaquales ſunt. 423.A

Si in diametro circuli prater cētrū ſumaī pūctū, ab eoq; in peripheriā duę recta nō in eaſdē partes cadētes efficiāt ad diametrū angulos aquales; recta illa aquales erūt, et arcus abſcindēt ęquales. Et ſi linea ſint aquales, cōſtituēt ad diametrū angulos ęquales, abſcindētq; arcus ęquales. Si denicq; abſcindāt arcus ęquales, erūt rectę illa aquales, angulosq; ad diametrū ęquales cōſtituēt. 423.A

Si in diametro circuli prater cētrū ſumatur pūctū, a quo ad eaſdē partes duo anguli aquales conſtituantur, inſiſtent hi anguli arcubus inaqualibus, maiorque erit ille, qui a minori portione diametri remotior eſt. 425.A

In ſemicirculo angul⁹ rectus eſt: In maiore ſegmēto acutus: Et in minore obtuſus. Angulus item maioris ſegmenti recto maior: minoris vero ſegmenti recto minor. 426.A

Segmētū circuli, in quo angulus rectus ē, eſt ſemicirculus, in quo vero acutus, ſegmētū maius eſt. & ī quo obtuſus, ſegmētū minus. Et ſegmētū, cuius angulus eſt recto maior, ē maius; cuius vero angulus ē recto minor, ē minus. 431.A

Circulus ex puncto medio lateris re
A cto angulo opposito in triangulo re
ctangulo descriptus per vnã angu
lum trãsit quoq; p reliquos. 431. A
Si per centrum circuli alius circu-
lus describatur, & per vtriusq;
centrum recta circumferatur a pun-
cto vero, ubi hæc recta posteriorẽ
circulũ secat, ducatur recta vsq;
ad priorẽ, secabitur eius portio intra
priorẽ circulum bifariã. 432. A
Si circulum tangat recta, & a cõ
tactu ducatur linea vtcunque
secans: anguli ad contingen-
tem æquales sunt angulis in
alternis segmentis. 434. A
Si recta ducta ad extremitatem re
cta circulum secantis faciat cũ
ea angulos æquales angulis in al
ternis segmentis; recta illa ducta
circulum tangit. 435. A
Si in circulo duæ rectæ se secẽt:
rectãgulũ sub segmẽtis vnius
æquale est rectangulo sub seg
mentis alterius. 438. A
Si duæ rectæ ita se secent, vt rectan
gulum sub segmentis vnius æqua
le sit rectãgulo sub segmentis al-
terius: describi poterit per quatuor earum puncta extrema cir
culus. 439. A
Si extra circulum sumatur pun-
ctum, a quo ducatur recta tan
gens, & altera secãs: erit qua-
dratũ tangẽtis æquale rectã-
gulo sub tota secante, & eius
segmento exteriore. 440. A
Si a puncto extra circulũ ducantur
plures rectæ secantes; rectangula
sub totis secantibus, & segmẽtis
exterioribus æqualia sunt. 441. A
Duæ rectæ tãgẽtes circulũ ab eodẽ
puncto ductæ, sibi æquales. 442. A
Ab eodẽ puncto duæ rectæ circu-
lũ tangẽtes duci possunt. 443. A
Si duæ rectæ æquales ducantur ab
eodem puncto ad circulum, una
autem earum sit tangens, erit &
altera tangens. 443. A
Si a puncto duæ rectæ egredientes in
secentur in binas partes æqua-
les, vt rectãgula sub totis, & segmẽ
tis prope puncta, æqualia sint: de
scribi poterit circulus per extre-
ma reliquarũ segmentorũ. 443. A
Si extra circulum puncta sumã
tur, a quo ducatur recta secãs,
& altera incidẽs, vt ad circ-
umferentiã conuexã, fiat aũt
quadratum incidẽtis æquale
rectãgulo sub tota secante, &
eius segmẽto exteriore: Inci-
dẽs circulum tanget. 447. A
Si a puncto duæ tangentes ad circu
lum ducantur, una duæ secantes
æquales: Recta ab eodem puncto
per centrũ ducta dimidiat angulũ
ab eis cõprehensum, bifariam. Et
contrã, Recta secãs angulum bi-
fariam, per centrum circuli tran
sit. 448. A
Æquales rectæ ex circulis inæquali
bus auferũt arcus inæquales, ma
iorque est arcus maioris circuli,
quam vt similis sit arcui circuli
minoris. 862. A
Æquales rectæ ex circulis inæqua
libus auferũt arcus similes, qui
nequa-

inæquales, maioris est arcus circuli minoris simpliciter, & non solum maior, quam vt similis sit arcui circuli maioris. 864. A

Si in circulo, ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secãtibus, altera earũ producatur, ejq; ex vna parte quotquot parallelæ agantur dimidentes vtrumque quadrantem in partes æquales, ad denique ex puncto extremo alterius diametri per extremũ punctum proximæ parallelæ rectæ ducatur cõtinens cũ diametro producta: Erit tota recta inter punctũ concursus, & cũuauã peripheriã circuli, eibus parallelis, vna cum diametro, quæ producta est, simul sumptis æqualis. 869. A

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemq; punctum duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpẽdicularibus; erit rectangulũ sub vtralibet secãtiũ, & eius segmẽto interiore cõprehensum quadrato diametri æquale. 887. A

Si in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secẽt, & ab vnius extremo recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alteram diametrũ siue productam, siue intra circulum; erit rectangulum sub ductibus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremũ prioris diametri, & secundam diametrum, alterum vero inter eundem punctũ extremum, & circumferẽtiam interciditur, æquale quadrato intra circulum descripto. 888. A

Circumferentia circuli ad eius diametrum quã proportionem plus minus, habeat. 907. A

CIRCVMFERENTIA.

Vide. Circulus.

COMMENSVRABILES & incommensurabiles magnitudines.

Duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiore auferatur maius quã dimidium; & ab eo quod reliquũ est, rursus detrahatur maius quam dimidiũ: & hoc semper fiat: relinquetur tandẽ quædã magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine. 289. B

Idem eueniet, si dimidium auferatur, &c. 290. B

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedẽtẽ metiatur: incommensurabiles erũt ipsæ magnitudines. 291. B

Si duabus magnitudinibus incõmẽsurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã reliqua præcedentẽ metietur. 293. B

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur

semper

ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã reliqua precedentẽ metietur. 293. B

Si duabus magnitudinibus commẽ menſurabilibus propoſitis, detrahatur ſẽper minor de maiore, alterna quadã detractione metietur quadã reliqua precedẽtẽ. 293. B

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earũ mẽſurã communẽ. 295. B

Magnitudo metiẽs tres aut quotcũque magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem. 298. B

Si ſint quotcunque magnitudines, & totidẽ numeri, qui bini in eadem ratione ſumãtur, in qua bina magnitudines: et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 298. B

Commẽſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quã numerus ad numerum. 300. B

Commẽſurabiles magnitudines proportionem habent eãdem, quam numeri, per quos earum menſura communis maxima ipſas metitur. 301. B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles erunt magnitudines. 302. B

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem nõ habent, quam numerus ad numerum. 304. B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: incommenſurabiles erunt magnitudines. 305. B

Si ſint tres quãtitates continue proportionales, & alia tres continue quoq; proportionales, ſitq; vt prima illarum ad tertiã, ita prima harũ ad tertiã; erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam. 306. B

Idem ſequitur ſi plures quantitates ſint, quam tres, &c. 306. B

Quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiũt quadrata, inter ſe proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter ſe proportionẽ habẽtia, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; & latera habebũt lõgitudine cõmenſurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incõmenſurabilibus fiũt quadrata; inter ſe proportionẽ non habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratũ numerũ; neq; latera habebũt lõgitudine cõmẽſurabilia. 307. B

Rectæ longitudine commẽſurabiles, omnino & potẽtia ſunt cõmenſurabiles; quæ vero potentia cõmenſurabiles ſunt, non omnino & lõgitudine cõmẽſurabiles ſunt. Et q̃ lõgitu

di

dine sunt incõmensurabiles, nõ oĩno & potentia incõmensurabiles sunt, quæ vero potẽtia incõmensurabiles sunt, omnino & lõgitudine incommensurabiles sunt. 310.B

Si quatuor magnitudines sint ꝓportionales, prima vero secũdæ sit cõmẽsurabilis; & tertia quartæ cõmensurabilis erit. Et si prima secundæ sit incommensurabilis, & tertia quartæ incommẽsurabilis erit. 315. B

Recta media proportionalis inter duas rectas potẽtia tantũ cõmensurabiles, vtrilibet illarũ incommensurabilis est lõgitudine et potẽtia ac proinde appellabitur Irrationalis, si alterutra illarũ statuatur Rationalis. 321. B

Quæ eidẽ magnitudini sunt cõmensurabiles, & inter se sunt commensurabiles. 321.B

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiã commẽsurabilis; erit & reliqua eidẽ cõmensurabilis. 323. B

Si sint duæ magnitudines, & altera quidẽ eidẽ sit cõmensurabilis, altera vero incõmensurabilis; incommensurabiles erũt magnitudines. 324.B

Si sint duæ magnitudines cõmensurabiles, altera autem ipsarũ magnitudini cupiã incõmensurabilis fuerit; Et reliqua eidẽ incõmẽsurabilis erit. 325.B

Quæ incommensurabilibus sunt cõmensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt. 326.B

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima vero tãto plus possit, q̃ secũda, quantũ est quadratũ rectæ sibi cõmensurabilis lõgitudine; Et tertia tanto plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ sibi lõgitudine cõmẽsurabilis. Q̃d si prima tãto plus possit q̃ secũda q̃tũ est quadratũ rectę sibi incõmẽsurabilis lõgitudine; Et tertia tãto plus poterit q̃ quarta q̃tũ est quadratũ rectę sibi lõgitudine incõmẽsurab. 328.B

Si duæ magnitudines cõmensurabiles cõponantur; & tota magnitudo vtriq; ipsarũ cõmensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarũ cõmẽsurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt. 329.B

Si tota magnitudo ex duabus cõposita, cõmensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliquæ commensurabilis est. 330.B

Si duæ magnitudines incõmẽsurabiles cõponant̃; & tota magnitudo vtriq; ipsarũ incõmẽsurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarũ incõmensurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt. 330.B

Si tota magnitudo ex duabus cõposita incõmensurabilis sit alteri ipsarũ; eadem & reliquæ incommensurabilis est. 331.B

Si sint duæ rectę inæquales, quartæ aũt parti quadrati, q̃d sit a mino-

minore, æquale parallelogrammũ ad maiorẽ applicetur, deficiés figura quadrata & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat. Maior tãto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. 336. B

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat. Maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine incommensurabilis, quartæ autẽ parti quadrati quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiés figura quadrata, In partes longitudine incommensurabiles ipsam dividet. 338. B

Diameter quadrati longitudine incommensurabilis est lateri. pag. 556. A & 130. B & 516. B

Inuentis rectis lineis longitudine incommensurabilibus, inuenientur & alia quamplurima magnitudines, plane scilicet, atque solida incommensurabiles inter se. 119. B

COMPOSITI inter se numeri, vide Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus, vide Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare vide Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus, vide Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus, vide. Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli, vide. Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, sphæram, atque aliam figuram.

Quadrilaterũ in circulo habet oppositos angulos duobus rectis æquales. 401. A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales circulus circa ipſum deſcribi poteſt. pag. 402. A

Quod deſcripti in circulo angulus externus æqualis eſt ei, qui oppoſitus eſt deſcripto. 407. A

Quando laterũ in circulo, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum. 413. A

In omni triangulo, cui circulus inſcribitur, tres quauis latera ſubtendant reliquum recta linea, cuius quadratum æquatur triplum eſt rectangulo comprehenſo ſub recta ab angulo illis lateribus compræhenſo in centrum peripheriæ ducta, & ſub ſegmento eius exteriore. Quod ſi angulus cõprehenſus ſit rectus, ſuperabunt duo illa latera latus recto angulo oppoſitũ diametro circuli triangulo inſcripti. Vel duo quauis latera ſuperant reliquum duabus rectis tangentibus inter angulum illorum laterum, & circulum interpoſitis. 462. A

Si centrum circuli triangulo circũſcripti cadat intra triangulum, omnes eius anguli acuti ſunt: Si in unum latus, angulus oppoſitus rectus eſt: Si denique extra unũ latus, angulus oppoſitus obtuſus eſt. 464. A

In triangulo acutangulo centrum circuli circumſcripti cadit intra: In rectangulo, in latus rectum angulo oppoſitum: In obtuſangulo denique extra latus angulum obtuſum ſubtendens. 465. A

Quadratum circulo circumſcripti duplum eſt quadrati eidem circulo inſcripti. 468. A

Recta quæ circulo inſcripti hexagoni, & quadrati, & aequilateri, & aequianguli, quæ circa eundem circulum ſunt, ſunt inter ſe rationales. 471. A

Si in circulo figura quauis æquilatera & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum excitentur perpendiculares, conſtituent hæ perpendiculares ſimilem figuram circulo circumſcriptam. 474. A

Hexagoni circulo inſcripti latus, æquale eſt ſemidiametro circuli. 479. A

Si in circulo ab eadem puncto inſcribantur latera duarũ figurarum regularium, continebis arcum interillas incluſum 401. latera alterius figuræ inſcribendæ in eadem circulo, quot unitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum. Figura autem inſcribenda continebit tot latera, quot unitates ſunt in numero ex multiplicatione denominatorum producto. 482. A

Omnis figura æquilatera circulo inſcripta, eſt quoque æquiangula: at non omnis figura æquilatera circulo circũſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus angulorum impar eſt &c. 485. A

Omnis

Omnis figura æqui angula circulo circũſcripta, eſt quoq; æquilatera: at non omnis figura æquiãgula circulo inſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus laterum &c. 488. A

Si bifariæ ſectiones laterũ regularis figuræ rectis coniũgantur, inſcripta erit ſimilis figuræ, idem centrum habens. 497. A

Solum triangulum æquilaterum, quadratum, & Hexagonum æquilaterum atque æquiangulũ, ex omnibus figuris regularibus, locum replent. 499. A

In figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contra, recta linea diuidens angulũ bifariam, ſecat quoque latus oppoſitum bifariam. Si vero numerus angulorum eſt par, recta linea ex quouis angulo ad oppoſitum angulũ ducta ſecat vtrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea ſecans quemuis angulum bifariam, cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam etiam diuidit. 866. A

Si baſis quadratricis intra quadrãtem & quadratum deſcripta ſituatur ſemidiameter alicuius circuli; eius latus, ſiue ſemidiameter quadrantis æquabitur quadranti illius circuli, &c. pagina 906. A

Quæ in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata. 625. B

Si pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint; æquiangulum erit ipſum pentagonum. 704. B

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant lineæ rectæ; hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri. pag. 705. B

Recta ſubtendens vnum angulum pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela eſt oppoſito lateri. pag. 706. & 841. B

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum componantur; tota recta linea extrema atque media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. 707. B

Si latus hexagoni ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum eſt latus decagoni. pag. 708. B

*Si linea diuiſa extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; erit minus ſegmẽtum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius ſegmentum latus hexagoni

ni eiuſdem circuli. 708. B

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum. pag. 710. B

Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni, vel alterius figuræ æquilateræ imparium laterum, diuidit & latus oppoſitum bifariã, & ad angulos rectos, & arcum, quem illud latus ſubtendit. pag. 712. B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus potẽtia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur. 717. B

Diameter circuli potentia eſt ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. 718. B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; diameter ex vno angulo ducta diuidit & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque vicißim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito. pag. 719. B

Sphæræ diameter potentia eſt ſeſquialtera lateris pyramidis in ea deſcriptæ. pag. 720. & 926. B

Diameter ſphæræ potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri circuli circa baſem pyramidis in ea ſphæra exiſtentis deſcripti. 723. B

Perpendicularis ex cẽtro ſphæræ ad baſim pyramidis in ea ſphæra exiſtentis demiſſa, ſexta pars eſt diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. 723. B

Altitudo pyramidis intra ſphæram continet duas tertias partes diametri. Et diameter potentia eſt dupla ſeſquiquarta altitudinis pyramidis. 724. B

Sphęræ diameter potẽtia eſt dupla lateris octaedri in ea deſcripti. 725. & 928. B

In octaedro tres diametri ſe mutuo ad angulos rectos ſecant. pagina 726. B

Octaedrum diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales; quarum baſis communis quadratum lateris octaedri, altitudo vero ſemidiameter ſphæræ vel octaedri pag. 727. & 795. B

Si tetraedrum, & octaedrũ in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. pag. 728. & 749. B

Octaedri baſes oppoſitæ ſunt inter ſe parallelæ. 728. & 927. B

Sphæræ diameter potẽtia eſt tripla lateris cubi in ea deſcripti. 729. & 930. B

Omnes diametri cubi æquales ſunt, ſeſeq; bifariam ſecant in centro ſphæræ. Itẽ rectæ coniungentes cẽtra baſiũ oppoſitarũ ſe mutuo bifariã ſecat in eodẽ cẽtro. 732. B

Poten-

Potentia diametri sphæræ, seu cubi æqualis est potentiis laterum tetraedri & cubi simul. 732. B

Si diameter sphæræ sit Rationalis linea; latus Icosaedri in ea est Irrationalis linea, quæ vocatur Minor. 733. B

Sphæra diametri potentia est quintuplæ semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis. pagina 738. B

Diameter sphæræ composita est ex lateribus hexagoni, & duobus lateribus decagoni eiusdem circuli. pagina 738. B

Icosaedri latera opposita sunt parallela. 739. & 931. B

Si diameter circuli sit Rationalis linea; latus Dodecaedri in ea descripti est Irrationalis linea, quæ vocat Apotome. 739. B

Si latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum est latus Dodecaedri eiusdē sphæræ. 746. B

Latus cubi æquale est rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eiusdem sphæræ. 746. B

Si recta secetur extrema ac media rōne, minusq; segmentū sit latus Dodecaedri, maius segmētū erit latus cubi eiusdē sphæræ. 747. B

In Dodecaedro sunt sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifaria quoque, & ad angulos rectos secantibus. 747. B

Si recta diuidēs opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, secetur extrema ac media ratione, maius segmētum est latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæræ. 748. B

Plura corpora Regularia, quam quinque, constitui non possunt. pag. 754. B

Cubus & octaedrum: Item Icosaedrum & Dodecaedrum, reciprocantur, quod ad numerū basium & angulorum attinet. Solum tetraedrum tot bases habet, quot angulos solidos. 757. B

Quæ ex cētro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti. 761. B

Perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis est vtriquè rectæ simul, & ei, quæ ex cētro ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. 763. B

Latus hexagoni ad latus decagoni eiusdem circuli, eandem proportionem habet, quā recta subtendens angulum pentagoni, ad latus ipsius pentagoni. 765. B

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpendiculari ex eodē centro

tro ad latus trianguli æquilateri ducta, minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli. 766. B

Si in circulo pentagonum æqui laterum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. 767. B

Si in ſphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inſcribantur; quadratũ lateris cubi, et quadratũ lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pẽtagonũ dodecaedri circũſcribentis. 768. B

Si latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media rõne; maius illius ſegmentũ erit latus decagoni eiuſdẽ circuli. 768. B

Idem circulus comprehendit & Dodecardri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphærę inſcriptorum. pagina 769. & 940. B

Si ex centro circuli pẽtagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehẽditur, rectangulũ trigeſies ſumptum Dodecaedri ſuperficiei æquale. 771. B

Si ex cẽtro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehẽditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale. 773. B

Suporficies cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri cuiuſcunque, etiamſi non deſcribantur amba figura in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ex centro pentagoni Dodecaedri in latus illud ducta contentum ad rectangulum contentũ ſub latere Icoſaedri, & perpẽdiculari ducta ex cẽtro triãguli Icoſaedri in illud latus. 774. B

Si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel octaedri, ſiue quadratum cubi, circumſcribentis perpẽdicularis ducatur ad vnũ latus; Erit quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei Tetraedri: In octaedro vero & cubo, duodecies ſumptum ſuperficiei octaedri, & cubi æquale. 774. B

Rectangulum contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineę ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti, æquale eſt dicto pentagono. 776. B

Rectangulum contentum sub perpendiculari ex angulo trianguli Icosaedri ad vnum eius latus ducta, & sub quinque sextis partibus lateris cubi in eadem sphæra cum Icosaedro descripti, æquale est pentagono Dodecaedri eiusdem sphæræ. 777. B

Superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadē sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri. pag. 778. B

Si recta linea secet extrema ac media rōne; erit vt recta potens id, quod a tota, & id, qđ a maiori segmēto, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minore segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti. 780. B

Quam proportionem habent latera cubi & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum. 782. B

Si sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit. pag. 783. B

Si planum secans transit per centrum sphæræ, fit circulus idem centrum habens cum sphæra: Si vero non transit per centrum, fit circulus, cuius centrum punctū est, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad circulum ducta. 785. B

Circuli in sphæra æquales æqualiter distant a centro sphæræ: Et circuli æqualiter distantes a centro sphæræ, æquales sunt. 785. B

Dodecaedrum ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum est, vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eadēque sphæra. 786. B

Eadem proportio est lateris cubi ad latus Icosaedri, quæ superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, & lineæ potentis totam quamcunque sectam extrema ac media ratione, & eius segmentum maius, ad potentem totam eandem, & eius segmentum minus; & Dodecaedri ad Icosaedrum eiusdem sphæræ. pag. 788. B

Basis Tetraedri sesquitertia est basis octaedri eiusdem sphæræ: Superficies autem octaedri sesquialtera superficiei Tetraedri. 792. B

Recta ex angulo Tetraedri per cētrum sphæræ ducta, cadit in centrum basis oppositæ, estque perpendicularis ad basim. 793. B

Tetraedrum ad octaedrum eiusdem sphæræ se habet, vt rectangulum sub linea potente viginti septē sexagesimas quartas partes lateris Tetraedri, & sub linea cōtinente octo nonas partes eiusdem lateris comprehensum, ad quadratum diametri sphæræ. 797. B

Sphæræ semidiameter potentia tripla

pla est eius perpendicularis, qua ex centro sphæræ in basim octaedri eiusdē sphæra cadit. 802. B

Duplū quadrati ex diametro sphæræ descripti, æquale est superficiei cubi eiusdem sphæræ: perpendicularis autem a centro sphæræ in basim cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi. 803. B

Solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictū cubum comprehendentis, æquale est cubo. Item quod fit ex latere cubi in tertiā partem eius quadrati. 804. B

Solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscunque corporis Regularis in basim demissa, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori Regulari. 804. B

Idem circulus cōprehendit & cubi quadrati, & octaedri trianguli eiusdē sphæræ. 805. et 930. B

Rectæ coniungentes centra basium oppositarum tam in cubo, quam in octaedro, æquales sunt. 806. B

Octaedrum ad triplum Tetraedri eiusdē sphæræ est, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. 807. B

Altitudo Octaedri ad altitudinē Tetraedri eiusdem sphæræ est, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri: Item diameter sphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. 809. B

Si recta proposita potuerit totam aliquam rectam extrema ac media ratione sectam, et maius eius segmentum: Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum; Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris linea latus dodecaedri eius sphæræ, cuius recta, apposita diameter est. 809. B

Si latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum recta extrema ac media ratione secta; poterit latus Icosaedri eiusdem sphæræ duplum minoris segmenti. 811. B

Si recta diuisa extrema ac media ratione, cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur; erit recta, quæ potentia sit subdupla eius rectæ subtensæ, latus Octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus est Dodecaedri. 813. B

Si recta secetur extrema ac media ratione, & alia recta potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum erit latus Dodecaedri eiusdem cum Octaedro sphæræ. 814. B

Cubus ad Octaedrum eiusdē sphæræ est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrū sphæræ. 815. B

Alia inuentio laterum quinq; corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum. 817. B

Quadratum cubi ad triangulum

Tetraedri eiusdem sphæra est, vt latus Tetraedri ad perpendicularē ex vno angulo, trianguli Tetraedri ad latus oppositum ductam. 822.B

Latus Tetraedri potentia sesquialterum est axis, uel altitudinis ipsius: Axis vero Tetraedri potentia sesquitertius est lateris cubi eiusdem sphæræ. 823.B

Diameter sphæræ sesquialtera est axis Tetraedri illius sphæræ. pag. 824.B

Axis Tetraedri ad latus cubi eiusdem sphæræ est, vt latus Tetraedri ad perpēdicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. 825.B

Cubus triplus est Tetraedri eidem sphæræ inscripti. 825.B

Prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo eiusdem sphæræ. pag. 826.B

Si in Tetraedro Octaedrum inscribatur; Tetraedrum bifariam secatur tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos intersecant. 829.B

Rectæ connectentes centra basium cubi oppositarum se mutuo secāt & bifariam, & ad angulos rectos. 831.B

Idē est centrum Icosaedri, atq; sibi inscripti Dodecaedri. 835.B

Si Tetraedrum Octaedro inscribatur; erunt quatuor bases Tetraedri octo basibus Octaedri parallelæ, singulæ binis. 837.B

Item recta centra basium octaedri oppositarum coniungens, sesquialtera est axis Tetraedri. 838.B

Diameter Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrū inscribitur. 851.B

Si latus cubi secetur extrema ac media ratione; minus segmentum latus est Dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmētum latus cubi in hoc Dodecaedro descripti. 851.B

Latus cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, et Dodecaedri circa eundem cubum descripti. pagina. 852.B

Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur. 852.B

Diameter Icosaedri potest & latus Icosaedri & cubi Icosaedri ambientis. 854.B

Bifaria sectiones sex oppositarū laterum Icosaedri coniungantur tribus rectis æqualibus, sese in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus. pag. 855.B

Si latus cubi extrema ac media ratione secetur; maius segmentum latus est Icosaedri in eo cubo descripti. 855.B

Icosaedri tam latera, q̄ triangula opposita sunt parallela. 855.B

Idem

Idem eſt centrũ Icoſaedri, & octaedri in eo deſcripti. 857. B

Idem eſt centrum baſis octaedri, & baſis Icoſaedri in eo deſcripti. quod intelligendum eſt de octo baſibus Icoſaedri in octo baſibus octaedri collocatis. 861. B

Idem eſt centrum octaedri, & Icoſaedri in eo deſcripti. 862. B

Idem eſt centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. 867. B

Recta coniungens biſarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, eſtque tripla lateris cubi in pyramide deſcripti. 867. B

Idem eſt centrum pramidis, & octaedri in ea deſcripti. 868. B

Idem eſt centrum baſis pyramidis, & baſis octaedri in ea deſcripti. quod intelligendum eſt de quatuor baſibus octaedri in quatuor baſibus pyramidis iacentibus. pag. 868. B

Quæ ſolida Regularia, in quibus propriæ deſcribantur, & quæ nõ: Et alia de hac inſcriptione mutua. 871. B

Si in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum; erit proportio Dodecaedri exterioris ad interius Dodecaedrum triplicata proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ. 874. B

Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ ſecantes oppoſitæ latera extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſim Icoſaedri in ea pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa biſariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri productæ. pag. 876. B

Latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius ſegmentum eſt rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. 878. B

Minus ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti, potentia duplum eſt lateris Icoſaedri in ea deſcripti. pag. 879. B

Latus cubi potentia dimidium eſt lateris pyramidis in eo deſcripta: Latus vero pyramidis duplum eſt lõgitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri. 880. B

Latus Dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia dimidium poteſt lateris pyramidis ſibi inſcriptæ. 881. B

Si in cubo deſcribaĩ & Icoſaedrũ, & Dodecaedrũ; Latus Icoſaedri mediũ ꝓportionale erit inter

latus cubi, & latus Dodecaedri pag. 881. B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. 882. B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. pagina 882. B

Si in octaedro Icoſaedrum deſcribatur; erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi. 883. B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti. 883. B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterũ recta extrema ac media ratione ſecta, cuius maius ſegmẽtum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti. pag. 884. B

Latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. 885. B

Latus cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus recta extrema ac media ratione ſecta. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem recta linea. 885. B

Latus octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcripta pyramidis. pag. 886. B

Si ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; reliquitur quadratum ſeſquitertiũ quadrati lateris Icoſaedri. pag. 887. B

Diameter Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in eo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. 889. B

Latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, quæ duplum poteſt lateris Icoſaedri in eo deſcripti. 889. B

Diameter Icoſaedri poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, & lateris pyramidis in eo deſcripta ſeſquialterum. 890. B

Latus Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſic habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione ſectæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſita. 891. B

Si dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſecetur, minusque eius ſegmentum, a toto latere Icoſaedri detrahatur; a reliqua quoq; recta pari rurſum tertia demat ur; reliquetur

quetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. 892.B
Cubus ſibi inſcripta pyramidis triplus eſt. 894.B
Pyramis ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. 895.B
Cubus ſibi inſcripti octaedri ſextupla eſt. 896.B
Octaedrum ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. pag. 897.B
Idem eſt centrum Octaedri, atque cubi in eo deſcripti. 899.B
Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eſt, vt quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi in eo deſcripti. 899.B
Octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt. 900.B
Pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. 900.B
Cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, eſt vt 27. ad 1. pag. 902.B
Octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. 902.B
Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphæra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarũ coniungentem. 903.B
Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: at vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. 906.B
Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertia parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit: alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit; ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. 911.B
Dodecaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum cubo

cubo deſcripti. 912.B
Dodecaedrum pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti aqualis eſt, latitudo vero tertia parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique a latere eiuſdē cubi deſcit minore ſegmento eius linea, qua dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit: alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi pradicti eſt aqualis, altitudo vero minus ſegmentū eius linea, qua dimidiati lateris cubi eiuſdē ſegmentū minus exiſtit, ita vt amborū altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdē cubi ſint aquales. 913. B
Octaedrum excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrū parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratū lateris Icoſaedri, altitudo vero maius ſegmētū ſemidiametri octaedri extrema ac media rōne ſecta. 914.B
Pyramis excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratū lateris Icoſaedri, altitudo vero recta bifarias ſectiones oppoſitorum laterū Icoſaedri coniungens. 916.B
Si in ſphara ſint duo circuli paralleli, & aquales, in quibus ducta ſint duæ rectæ parallelæ & aquales, ad eaſdem partes cētrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, aquales quoque & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares. 920.B
Si in ſphara ſint duo circuli parallelis & aquales, in quibus ductę ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphara ſe interſecant, ac proinde diametri ſphara erunt, & inter ſe aquales: rectæ vero earundem parallelarum extrema pūcta ad eaſdem partes connectentes, & aquales ac parallelę inter ſe sūt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt. 921.B
Si in ſphara ſint duæ rectæ parallelæ; rectę earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, aquales inter ſe erunt. Et ſi parallelæ fuerint aquales, coniungentes non ſolum aquales, ſed & parallelæ erūt, rectoſque cum ipſis angulos conficient. 923.B
Sphęrę diameter ad latus Icoſaedri in ea deſcripti eſt, vt latus pentagoni ad latus decagoni eiuſdē circuli cuiuslibet. 935.B
Latus Icoſaedri maius eſt ſemidiametro ſphara, in qua deſcribitur. 935.B
Sphara diameter potentia eſt tripla lateris pentagoni deſcripti in circulo, qui per tres angulos Icoſaedri eius ſphara incedit, parallelusque eſt vni triangulo Icoſaedri. 935.B

Iidem circuli ſphæra ſuſtinent & angulos Icoſaedri, & angulos Dodecaedri in ea ſphæra deſcriptorum. 940.B

Si *quadratum, & triangulũ æqualaterum æqualia habeant latera; erũt viginti triangula ſimul maiora, quam octo quadrata ſimul.* 941.B

Octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti. 942.B

Si *octaedrũ, cubus, & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit perpẽdicularis ex cẽtro ſphæræ ad vnam baſim Icoſaedri ducta maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri, & cubi ducta, pagina.* 943.B

Icoſaedri ſuperficies maior eſt ſuperficie cubi in eadem ſphæra deſcripti. 943.B

Dodecaedrum *Icoſaedro maius eſt. pag.* 944.B

Icoſaedrum cubo maius eſt. pagina. 944.B

Cubus Octaedro maior eſt. 945.B

Octaedrum Tetraedro maius eſt. pag. 945.B

Superficies Dodecaedri ſuperficiem Icoſaedri ſuperat, & hæc ſuperficiem cubi, & hæc ſuperficiem Octaedri, atque hęc denique ſuperficiem Tetraedri. 946.B

Latus Tetraedri maius eſt latere Octaedri, & hoc maius latere cubi, & hoc maius latere Icoſaedri, atque hoc denique maius latere Dodecaedri. 749.B

Si *corpora regularia ſint 1ſoperimetra, illud, quod plures habet baſes, maius eſt: Vt Icoſaedrũ maius Dodecaedro, & hoc maius Octaedro, & hoc maius Cubo, atque hoc denique maius Tetraedro.* 947.B

Omnes inclinationes duarum baſium cuiuſque corporis Regularis æquales ſunt. 948.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem eſt altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes. 752.A

Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt baſes, æquales habent altitudines, vel eandem. 754.A

Triangula & parallelogramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eadem, ita ſe habens inter ſe, vt altitudines. 754.A

Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant. 755.A

Si ad vnũ triãguli latus parallela ducta ſit, hęc ſecabit duo latera reliqua pportionaliter. Et ſi duo latera ſecta ſint pportionaliter; recta linea ſectiones iungens.

iungẽs, parallela erit reliquo lateri. 756.A

Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secãs autem angulum recta linea secet & basim: basis segmentã ita se habebunt inter se, vt reliqua duo latera: Et si basis segmenta ita se habeant, vt reliqua duo latera: recta a vertice ad sectionẽ ducta, bifariam secabit angulum trianguli. 758.A

Aequiangulorum triangulorum proportionalia sũt latera circa æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur. pag. 759.A

Recta lineã vni lateri trianguli parallela aufert triangulum toti triangulo simile. 760.A

Si ex duobus punctis rectæ, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineã, duæ parallelæ inter se educantur ad easdem partes, ita vt habeant eandem proportionem, quam recta inter ipsas, & alterum punctum extremum inclusa: Recta coniungẽs extremum vnius earum, cum extremo prioris linea transibit per extremum alterius linea. 761.A

Si in triangulo parallela vni lateri agatur, recta ex angulo opposito ducta secat parallelam, & latus illud in easdem rationes. pag. 762.A

Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, & æquales habebũt eos angulos, sub quibus homologa latera subtẽduntur. 763.A

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, æqualesque habebunt angulos, sub quibus latera homologa subtenduntur. pag. 764.A

Si duo triãgula vnum angulum vni angulo æqualem, circa autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia sunt latera. 765.A

Si in triangulo rectãgulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit: quę ad perpẽdicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt. 767.A

Item tam perpẽdicularis est mẽdia proportionalis inter duo basis segmenta, quam vtrumlibet laterum circa rectum angulum inter totam basim, & segmẽtum basis ei lateri adiacens. 768.A

Si duæ rectæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ sectiones in eadem proportione cum quibuslibet

bet ſegmentis duobus. 774.A
Si recta in quotcunque partes Arithmetice proportionales ſecta ſit, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoq; partes huius lineæ Arithmetice proportionales. 775.A
Si duæ rectæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoq; exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum vna ad vnam poſteriorum. 776.A
Recta a quouis puncto diametri ducta perpendicularis vſq; ad circumferentiam ſemicirculi, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta. 782.A
Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera circa æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 784.A
Aequalium & vnum vni æqualé habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera circum æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circa æquales angulos, illa ſunt æqualia. 785.A
Si quatuor rectę proportionales ſint; rectangulũ ſub extremis æquale eſt rectangulo ſub medijs. Et ſi rectangulum ſub extremis æquale ſit rectangulo ſub medijs, illę quatuor rectæ proportionales ſunt. 786.A
Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, ſed tantum æquiangula. 787.A
Si tres rectæ ſint proportionales; rectãgulum ſub extremis quadrato mediæ æquale eſt. Et ſi rectangulũ ſub extremis quadrato mediæ ſit æquale; illæ tres proportionales ſunt. pag. 788.A
Recta, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub duabus rectis quibuſcunque, media proportionalis eſt inter eas duas rectas. pag. 788.A
Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, æquiangula tamen. 789.A
Triangula ſimilia inter ſe ſunt in duplicata ratione homologorum laterum. 814.A
Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiã, ita eſt triangulum ſuper primam ad triangulum ſuper ſecundã ſimile, ſimiliterque deſcriptũ pag. 815.A
Similia polygona in ſimilia triãgula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habẽt rationem homologorum laterum. 817.A
Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam, ita

ita eſt polygonum ſuper primam, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum. 819.A

Similia polygona aquilatera, & aquiangula, diuiduntur in ſimilia triangula, & numero aqualia, & homologa totis; ductis rectis a centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos. 821.A

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. pag. 823.A

Si quatuor rectæ ſint proportionales: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia ſunt. Et ſi a rectis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia ſint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt. 823.A

A equalia rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, ſunt ſuper aquales rectas. 825.A

Si tres rectæ ſint proportionales; erũt quoque rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta ab eis proportionalia, &c. 826.A

Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent ex lateribus compoſitam. 837.A

Triangula vnum angulum vni angulo aqualem habentia proportionem habẽt ex lateribus circa aqualẽ angulũ cõpoſita. 836.A

Triangula vnũ angulũ vni angulo aqualẽ habentia, eandẽ proportionem habent, quam rectangula ſub lateribus circa angulũ aqualem contenta. 832.A

Parallelogramma aquiangula eandem rationem habent, quam rectangula ſub lateribus circa angulũ aqualem contenta. 833.A

Triangula & parallelogramma inter ſe rationem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. pagina. 833.A

In parallelogrammo parallelogramma circa diametrum, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia. pag. 835.A

Datis duobus parallelogrammis aquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare. 837.A

Si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit ſimile toti, & ſimiliter poſitum, cõmunem cum eo habens angulum; hoc circa eandem cum toto diametrum conſiſtit. pag. 840.A

Idem eueniet, ſi angulũ habeant non communem. 842.A

Parallelogrammorum ſecundũ eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis ei, qd a dimidia deſcribitur; maximum id eſt, quod ad dimidiũ applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui. pag. 844.A

In rectangulis triangulis, figura quæuis

quæuis a latere rectum angulum ſubtendẽte deſcripta æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ a lateribus rectum angulũ cõtinẽtibus deſcribũtur. 852. A

Si figura, q̃ ab vno latere triãguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ a reliquis duobus lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis: angulus ſub reliquis his lateribus comprehenſus, rectus eſt. 854. A

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulũ compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint parallela; tũ reliqua latera in rectam lineam collocata reperientur. 855. A

In circulis æqualibus, anguli eã dem habent rationem cũ peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſup vero & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt. 856. A

In circulis æqualibus, eſt ſector ad ſectorẽ, vt angulus ad angulum in centro. 859. A

Vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad totã circunferentiã. Et cõtra. 859. A

Similia circulorum ſegmenta eandem habent proportionem ad totas circumferentias. 861. A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Recta ex centro ducta abſcindunt arcus ſimiles. pag. 405. & 862. A

Si in circulo duæ rectæ ſe mutuo ſecent: erunt ſegmenta vnius ſegmẽtis alterius reciproca. 875. A

Si extra circulum ſumatur pũctũ aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ circulum ſecantes; erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto rectæ ducantur circulum tangens; erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, et eius ſegmẽtũ exterius. 875. A

Si duæ rectæ ſe mutuo ſecent, & a duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarũ vna inter vnum terminorum, & ſectionem, altera vero inter ſectionẽ, & prioris lineæ aſſumpta perpendiculariter interijcitur, alijs duabus eodem modo incluſis reciprocæ. 876. A

In parallelogrammo duæ rectæ laterib⁹ parallelę ſe mutuo ſecantes, dimidiãt parallelogrammum in quatuor parallelogrãma proportionalia. 877. A

Omne quadrilaterũ a duab. diametris diuiditur in quatuor triãgula proportionalia. 877. A

In triãgulo rectãgulo, in quo perpẽdicularis ab angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione; tria latera ſunt continue proportionalia. Et ſi tria

latera

Latera trianguli rectanguli sint continue proportionalia; perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa, secat basim extrema ac media ratione. 878.A

Si ex centro per quauis puncta lineæ Quadratricis ducantur rectæ vsque ad peripheriam quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & alia recta eidem basi parallela: Erunt arcus quadrantis inter semidiametros interiecti, perpendicularibus, vel segmẽtis semidiametri intra parallelas positis, proportionales. 898.A

Si quadrãtis & Quadratricis idẽ centrum sit; erunt arcus quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continuæ proportionales. 904.A

Circumferentia circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, qua sit. 907.A

Si sint duæ rectæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum primæ ad rectangulum sub illis duabus contentum. Et vt secunda ad primam, ita rectãgulum sub ipsis ad quadratum primæ. 344.B

Si sint duæ rectæ inæquales. erit vt prima ad secundam, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum secundæ. 375.B

Si sint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur. 377.B

Si recta linea secetur in partes duas inæquales; erit vt alterutra pars ad alteram, ita rectãgulum sub tota & priore parte assumpta, ad rectangulum sub tota, & altera parte contentum. 380.B

Si recta sit secta vtcunque; erit rectangulum sub partibus cõtentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum sub tota, & vna parte contẽtum, mediũ proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratũ dictæ partis. 416.B

Si duæ rectæ parallelis planis secentur; In easdẽ rationes secabuntur. 568.B

Si solidum parallelepipedũ plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. 585.B

Idem conuenit in omne prisma. pag. 587.B

Si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. 590.B

Solida parallelepipeda sub eadẽ altitudine; inter se sunt, vt bases. 602.B

Si parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 603.B

Similia solida parallelepipeda, inter

inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterũ. pag. 603.B

Si sint quatuor rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primã descriptum, ad parallelepipedum similes, similiterque descriptum super secundam. 605.B

Aequalium solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocãtur. Et quorum solidorum parallelepipedorũ bases & altitudines reciprocantur; illa sunt æqualia. pag. 605.B

Hæ quinque, quæ proxime de parallelepipedis dicta sunt, conueniunt etiam prismatis, in quibus duo plana opposita sunt triãgula. 608.B

Si tres rectæ sint proportionales; quod ex illis fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto a media linea solido parallelepipedo, qđ æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto. 612.B

Si *parallelepipedum ex tribus rectis descriptum, æquale sit parallelepipedo sibi æquiangulo a media recta descripto; erunt tres rectæ continue proportionales. pag. 613.B*

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quę & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineę proportionales erunt, 614.B

Eodem modo si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterque descripta ex eis, proportionalia, etc. pag. 616.B

Idem quoque quadrat in prismata triangularium planorum, oppositorum ex quatuor rectis, vel tribus, continue proportionalibus descripta, si similia, similiterque posita sint. 616.B

Circuli inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. 626.B

Circulus ad circulum est, vt polygonum in illo descriptũ ad polygonum simile in hoc descriptum. 629.B

Sub eadem altitudine existẽtes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. 635.B

Si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine 637.B

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases. 638.B

Idem verum est de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vna basim habet plurium angulorum, quam altera. 639.B

Pyra-

Pyramides quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes; eandem habent altitudinẽ. 641. B
Pyramis quælibet tertia pars eſt priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem. Siue priſma quod libet triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim & altitudinẽ. 642. B
Eodem modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem baſi, & altitudinem altitudini æqualem. 644. B
Priſmata eiuſdem altitudinis ſuper quaſcunque baſes, inter ſe ſunt, vt baſes. 644. B
Si priſmata quarumcũque baſium inter ſe ſint, vt baſes: ipſa erunt ſub eadem altitudine. 645. B
Quæ de priſmatis dicta ſunt, intelligi debent de ijs, quę habẽt plana oppoſita baſibus æqualia, & ſimilia. 646. B
Similes pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorũ laterum ratione. 647. B
Similes pyramides, quarum baſes plura latera, quã tria continent, habent proportionem homologorum laterũ triplicatam 648. B
Similia priſmata triplicatam proportionem habent laterum homologorum. 649. B
Pyramides multangulæ ſimiles diuiduntur in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. 651. B
Priſmata multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. pag. 651. B
Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habẽtium reciprocantur baſes, & altitudines; illæ ſũt æquales. 651. B
Æqualium pyramidum, quarum baſes non ſunt triangulares, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentium reciprocantur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. 652. B
Idẽ conuenit priſmatibus. 654. B
Sub eadẽ altitudine exiſtẽtes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. 658. B
Atque hoc verum eſt, ſiue coni & cylindri recti ſint, ſiue ſcaleni. pag. 661. B
Si coni & cylindri quicunque inter ſe ſint, vt baſes, ipſi ſub eadem altitudine erunt. 661. B
Coni & cylindri ſimiles, in triplicata ratione ſunt diametrorũ, quæ in baſibus. 662. B
Idem hoc locum habet in conis & cylindris ſcalenis. 665. B
Si cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 667. B

Idem

Idem intelligatur de cyclindro ſcaleno. 668.B

Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. 668.B

Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 669.B

Item priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. 670.B

Coni et cylindri tã recti, q̃ ſcaleni: Itẽ priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionẽ habẽtes eãdem, quam altitudines, baſes habebunt æquales. 672.B

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum & cylindrorũ reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales. 672.B

Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 674.B

Sphęrę inter ſe sũt in triplicata rõne ſuarũ diametrorũ. 685.B

Ex quo fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum ſimile in hac deſcriptũ. 688.B

Si recta linea ſecũdũ extremã & mediam rationẽ ſecetur; maius ſegmẽtũ aſſumẽs dimidiã totius, quintuplũ poteſt eius, quod a dimidia totius deſcribitur, quadrati. 689.B

Si recta linea ſuijpſius ſegmenti quintuplũ poſsit; Duplæ prædicti ſegmẽti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ a principio, rectæ. 691.B

Si recta linea ſecũdum extremã & mediam rationem ſecetur; minus ſegmẽtum aſſumens dimidiã maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. 693.B

Si recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentũ aſſumens dimidiũ maioris ſegmẽti quintuplũ poſſit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione. 695.B

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; quod a tota, quodq; a minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla sũt eius, quod a maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. 696.B

Si recta inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vnacum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur. 697.B

Si recta ſecũdũ extremã et mediã rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentũ, quintuplũ põt eius, q̃ a maiori ſegmẽto deſcribitur, quadrati. Et ſi recta inæqualiter ſecetur, totaq; aſſumens minus ſegmentum poſſit quintuplum eius, quod a maiori ſegmento deſcribitur, quadrati; Recta illa ſecundũ extremã & mediã rationẽ ſecta eſt. 698.B

Si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quę a principio, recta linea. 699.B

Si recta secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmẽtum minus; erit maius segmentum sectiõ extrema ac media ratione, et maius segmẽtum est illa linea, qua prioris lineæ minus segmentum erat. 700.B

Si recta secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti; erit quoq; dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius linea. 701.B

Si ad rectam perpendicularis ducatur, quæ sit media proportionalis inter segmenta lineæ; semicirculus circa illam lineam rectã descriptus transibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 722.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione secẽtur; ipsę similiter secabuntur, in easdẽ scilicet proportiones. 763.B

Si sint quatuor recta continue proportionales, necnon & alia quatuor, ita vt eadem sit antecedẽs omnium; erit proportio tertia ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quarta ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata. 819.B

Si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmẽtum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; recta connectens puncta sectionum duplum potest minoris segmenti. 861.B

Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione. 875.B

FIGVRAE planę quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.

Si sint tres recta Arithmetice proportionales: rectangulum sub extremis, una cum quadrato excessus, æquale erit quadrato lineæ mediæ. 271.A

Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmeticæ, Geometricæ, atque Harmonicæ, siue Musicæ, proprietates variæ. a 505. *vsque ad* 632.

Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit. 643.A

Si sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinũ æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tã multiplices erunt & omnes omnium. 675.A

Si prima secũdę æque fuerit multiplex, atq; tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ: erit & composita prima cum quinta, secũdæ æque multiplex, atque tertia cum sexta quartæ. 676.A

Idem sequitur, si prima & tertia, æquales sint secundæ & quartę; at quinta & sexta, æque multiplices secundæ & quartę: Vel prima et tertia, æque multiplices secundę & quartę; at quinta & sexta, æquales secundæ ac quartæ: Vel denique si tam prima & tertia, quam quinta ac sexta, æquales sint secundæ ac quartæ. pag. 677.A

Si sit prima secũdæ æque multiplex, atq; tertia quartæ: sumãtur autẽ æque multiplices primæ ac tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusq; æque multiplex, altera quidẽ

secundæ, altera autem quartæ. 678.A

Si prima ad secundã habeat eandẽ rationem, quam tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebũt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint. pag. 679.A

Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales sunt. 681.A

Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 683.A

Si duæ magnitudines duarũ magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædã sint earundem æque multiplices: Et reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarũ multiplices. 685.A

Aequales ad eãdem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. 687.A

Eodem modo, æquales ad æquales eandẽ habent rationem.688.A

Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorẽ rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorẽ. 688.A

Quæ ad eandem, eandẽ habent rationem, æquales sunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoque sunt. 691.A

Ad eandem magnitudinẽ rationẽ habentiũ, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est. 692.A

Quæ eidẽ sunt eędẽ rationes, & inter se sunt eædem. 693.A

Quæ eisdem sunt eadẽ rationes, & inter se sunt eadem. 694.A

Si sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnã consequẽtiũ, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes cõsequentes. 695.A

Si prima ad secundam, eandẽ habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam, tertia vero ad quartam maiorem rationẽ habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, maiorem rationem habebit, quã quinta ad sextam. 696.A

Si prima ad secundã, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, minorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorẽ rationem habebit quam quinta ad sextã. 697.A

Si prima ad secundam, maiorẽ habuerit rationem, quã tertia ad quar-

quartam; tertia itē ad quartā, maiorē habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, maiorem habebit, quā quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quā tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorē, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, minorem rationē habebit, quā quinta ad sextam. 697.A

Si prima ad secundā sit, vt tertia ad quartam; sit autem prima maior, quam tertia: erit & secūda maior quam quarta. Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 698.A

Eodē modo, si secunda maior fuerit quā quarta; erit et prima maior quā tertia: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 699.A

Partes cū pariter multiplicibus in eadē sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur. 700.A

Magnitudines quatuor proportionales, vicissim quoq; proportionales sunt. 701.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales, sit aūt prima maior q̄ secunda: erit quoq; tertia maior q̄ quarta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 702.A

Si compositæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoque diuisæ proportionales erunt. 703.A

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoq; cōpositę proportionales erunt. 705.A

Si sit, vt totum ad totū, ita ablatum ad ablatum: erit quoque reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 708.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales; hæ quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. 709.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadē ratione sumantur; sit autem ex æquo prima maior, quam tertia; erit & quarta maior quā sexta; Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 710.A

Si sint tres magnitudines, & alię tres, quæ binæ & in eadem ratione sumantur, fueritq; perturbata earum proportio: ex æquo autē prima maior fuerit q̄ tertia: Erit & quarta maior quā sexta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 711.A

Si sint quotcūq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, q̄ binæ in eadē rōne sumātur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 713.A

Si sit prima ad secundā, vt tertia ad quartā: habebūt aquemultiplices primę ac tertię ad secūdā & quartam, eādem rationem: Itē aquemultiplices secunda & quarta ad primā ac tertiā. Et contra, eandem rationem habebūt secunda & quarta ad aquemultiplices prima ac tertię: Itē

prima ac tertia, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ. 715. A

Si ſint tres magnitudines, alięq; ipſis æquales numero, quę binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 716. A

Si ſit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam; Item quinta ad ſecũdam, vt ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta ad ſecũdam erit, vt compoſita tertia cum ſexta ad quartam. 717. A

Si dua magnitudines ad duas eandem habeant rationem, & detractæ ex prioribus ad eaſdẽ poſteriores eandem quoque habeat rationem: Et reliquæ ad eaſdem poſteriores eandem rationem habebunt. 718. A

Si quatuor magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 719. A

Si tres magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima maiores erũt, quam dupla reliqua. pag. 720. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationẽ, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecũda ad primam, minorem rationẽ, qua quarta ad tertiam. pag. 721. A

Si prima ad ſecundæ habeat minorẽ proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecũda ad primã, maiorẽ rõnẽ, quã quarta ad tertiam. 721. A

Si prima ad ſecundã habeat maiorem rationẽ, quã tertia ad quartam: habebit quoq; viciſſim prima ad tertiã, maiorẽ rationem, quã ſecunda ad quartã. 722. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; viciſſim prima ad tertiam, minorem rationem, quam ſecunda ad quartam. 722. A

Si prima ad ſecundã habeat maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem rationem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 723. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam minorem rationem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 724. A

Si compoſita prima cum ſecũda ad ſecundam, maiorem habeat rationem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam. pag. 724. A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam minorem rationẽ habeat, quam tertia cũ quarta ad quartam

tam: habebit quoque dividendo prima ad secũdam minorem rationem, quam tertia ad quartam. 725. A

Si composita prima cum secũda ad secundam habeat maiorẽ rationem, quam composita tertia cũ quarta ad quartã: habebit per conuersionem rationis, prima cũ secunda ad primam, minorem rationem, quam tertia cũ quarta ad tertiam. 726. A

Si prima cum secunda ad secundam, minorem habeat rationẽ, quam tertia cũ quarta ad quartam: habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, maiorem rationem, quam tertia & quarta ad tertiam. 726. A

Si sint tres magnitudines, & alia ipsis aquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam secunda posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex aqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam. pag. 727. A

Idem eueniet, si proportio prima ad secundam eadem fuerit, quæ prima ad secundam; at secunda ad tertiam maior, quam secunda ad tertiam: Vel contra, si proportio prima ad secundam fuerit maior, quam prima ad secundam; at secunda ad tertiã eadem, quæ secũda ad tertiam. pag. 728. A

Quod si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint: erit quoque ex aqualitate minor proportio prima ad tertiam, quam prima ad tertiam. 729. A

Idem eueniet, si proportio prima ad secundam fuerit eadem, quæ prima ad secundam; at secunda ad tertiam minor, quam secunda ad tertiam: Vel contra, si proportio prima ad secundam fuerit minor, quam prima ad secundam; at proportio secundę ad tertiam eadem, quæ secunda ad tertiam. 729. A

Quod si plures sint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; siue vna tantum maior, quam vna, vel dua, &c. Erit maior vel minor proportio prima ad vltimam in vno ordine, quam prima ad vltimam in alio ordine. 729. A

Si sint tres magnitudines, & alia ipsis aquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam prima posteriorum ad secundam: Erit quoque ex aqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quã

prima posteriorum ad tertiam. pag. 730. A

Idem eueniet, si proportio primæ priorum ad secundam sit, quæ secũdæ posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam maior, quam prima priorum ad secundam: Vel contra, ratio primę priorum ad secundam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam eadem, quæ prima posteriorum ad secundã. pag. 731. A

Quod si in primis magnitudinibus aliquæ proportiones, vel omnes sint minores; erit minor proportio prima ad tertiam, quam prima ad tertiam. 831. A

Quod si plures sint magnitudines quam tres in quolibet ordine: erit quoque maior vel minor proportio prima ad vltimam, quam prima ad vltimam. pag. 731. A

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quam totius ad totum. 731. A

Si fuerit minor ratio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quam totius ad totum. 732. A

Si sint quotcunque magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior ratio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum. 733. A

Propositis quotcunque magnitudinibus, proportio primæ ad vltimã cõponitur ex omnibus proportionibus intermediis, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 742. A

Si quatuor magnitudines sint Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; hæ vicissim quoque erũt Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. pagina 458. B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut compositus

poſitus ex integro & fracto, in ſe multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. pag. 658. A

Dua minutia eundem habentia denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 240. B

Numerator cuiuſuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius eſt minutia. pag. 241. B

Minutia qualibet, pars eſt numeratoris a denominatore denominata. 242. B

Dua minutia eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores. pag. 243. B

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad poſteriorem, vt prior numerus productus ad poſteriorem. pag. 244. B

Integrum ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorũ productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur. 245. B

Si dua minutia eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris. 246. B

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionẽ, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eãdem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior eſt: Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. pag. 247. B

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, ſunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorẽ proportionem habet, quam denominator, illa maior eſt: Et maioris numerator maiorem habet proportionẽ quam denominator. 248. B

Minutia minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur. 251. B

Dua

Dua minutia, quarum numeratores in denominatores viciſsim ducti gignunt numeros æquales, æquales ſunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores viciſsim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt: & maioris minutia numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. pag. 255.B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens eſt minutia, cuius numerator eſt numerus minor diuiſus, denominator vero maior numerus diuidens. 258.B

NVMERI proportionales in communi.

Propoſitis quatuor numeris proportionalibus, ſumptiſque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item ſecundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiã multiplicationem: ſi multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. pag. 650.A

Propoſitis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior ſit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum; ſi ſumantur æque multiplices primi ac tertij, item æque multiplices ſecundi ac quarti, fieri poteſt, vt multiplex primi maior ſit multiplice ſecundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 651.A

Propoſitis quatuor numeris, ſumptiſque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus ſecundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationẽ; ſi multiplex primi exiſtente maiore, quam multiplex ſecundi, multiplex tertij maior quoque ſit neceſſario, quam multiplex quarti; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi minor, minor: Erit eadem proportio primi ad ſecũdum, quæ tertij ad quartum. 654.A

Propoſitis quatuor numeris, ſumptiſque primi ac tertij æque multiplicibus, item ſecundi & quarti æque multiplicibus; ſi quando contingat, multiplicẽ primi maiorẽ eſſe multiplice ſecundi, multiplicem vero tertij nõ maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad ſecundum, quam tertij ad quartum. 655.A

Datis tribus terminis Geometricæ proportionalibus ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus: Summa ex primo ſemel, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma conflata ex ſecundo et tertio ſemel; ac tertius ſemel, ſunt etiã

Geome-

Geometrice proportionales. pagina 806. A

Datis tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata; ac denique tertius ſemel, ſunt Arithmetice proportionales. 808. A

Datis tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel; ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel, & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coacernata, Harmonice proportionales ſunt. 809. A

Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita ſe habet ad alterutrũ multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem. 12. B

Numerus ex diuiſione duorum numerorum procreatus ita ſe habet ad vnitatem, vt diuiſus numerus ad diuidentem. 13. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſq; ſimul eadẽ pars erit, quæ vnus vnius. 40. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 41. B

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri. 41. B

Si ſint quotcunque numeri quotcũque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars: Et omnes omniũ ſimul eadẽ pars erunt, quæ vnus vnius. pag. 42. B

Idẽ numeris fractis cõuenit. 42. B

Si ſint quotcũque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æque multiplices: quam multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erũt & omnes omnium. pag. 43. B

Idem verum eſt de numeris fractis. 44. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterq; vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius. 44. B

Idem locum habet in numeris fractis. 45. B

Si ſint quotcũque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eadẽ partes: Et omnes omnium ſimul eadem partes erũt, quæ vnus vnius. 45. B

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit qualis totus totius. 45. B

Idem locum habet in numeris fractis. 46. B

Si numerus numeri æque fuerit multi-

multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 46.B

Idem verum eſt de numeris fractis pag. 46.B

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. pag. 47.B

Idem in fractis numeris verum eſt. 48.B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſsim quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti. 49. B

In fractis numeris idem cõcludes. pag. 50.B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſsim quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars. 50.B

Numeris fractis hoc idem conuenit. 51.B

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 51.B

Idem in fractis numeris verum eſt. 52.B

Si primus ſecundũ, & tertius quartum, æqualiter contineat, eandemque inſuper partem, aut partes; erit ſecundus primi, & quartus tertij eadem partes. Et ſi ſecundus primi, & quartus tertij eadem partes ſit; continebit primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter, eandemque inſuper partẽ, aut partes. 53.B

Idẽ verum eſt in numeris fractis. pag. 63.B

Si ſint quotcunque numeri proportionales; erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedẽtes ad omnes cõſequentes. 56. B

Verum quoque hoc eſt in numeris fractis. 58.B

Si quatuor numeri proportionales ſint; Et viciſsim proportionales erunt. 58.B

In fractis idem cernitur. 60.B

Si ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumãtur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erũt. pag. 61.B

Idem in numeris fractis verum eſt. 62.B

Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem ſunt; inter ſe quoque ſunt eadem. pag. 62.B

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et viciſsim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum. 63.B

Si numerus duos numeros multipli-

tiplicans fecerit aliquos: geniti ex ipſis eãdem rationem habebunt, quam multiplicati. 66. B

In fractis numeris idem verum eſt. 67. B

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis eandem rationẽ habebunt, quam multiplicantes. 67. B

In fractis idem habet locũ. 67. B

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri eaſdem rationes, quas numeri multiplicantes. 68. B

Si quatuor numeri ſint proportionales; qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis eſt ei, qui ex ſecundo & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis ſit ei, qui ex ſcõdo & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri ꝓportionales erũt. 68. B

Verum eſt idem in numeris fractis pag. 69. B

Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis æquales erunt. 69. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 69. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecundũ quam tertij ad quartũ; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior eſt eo, qui ex ſecũdo & tertio fit, numero: Et contra; tã in fractis numeris, quã integris. 70. B

Si tres numeti ſint proportionales; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, q̃ a medio efficitur: Et ſi qui ſub extremis cõtinetur, æqualis ſit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt. 71. B

In fractis idem verum eſt. 72. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecũdũ, quã ſecũdi ad tertiũ; maior erit numerus ex primo in tertiũ, q̃ ex ſcõdo in ſe: Et contra, tã in numeris fractis q̃ integris. 72. B

Minimi numeri omniũ eandem cũ eis rationẽ habentiũ, metiuntur æque numeros eandẽ cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem. 73. B

Si tres numeri ſint continuo proportionales, & primi duo dicantur in ſua proportione minimi; metietur primus ſecundum, & ſecundus tertium. 74. B

Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarũ proportionũ, ſiue eadẽ ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidẽ alios numeros, q̃ eaſdẽ cũ eis ꝓportiones hẽnt, primus primũ, ſecũdus ſcẽm, et tertius tertiũ. etc. 74. B

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini

ni ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio: etiã ex æqualitate in eadem ratione erunt. 76.B

Idem verum eſt in numeris fractis pag. 77.B

Si quatuor numeri tam integri, q̃ fracti, proportionales ſint; & conuertendo proportionales erunt. pag. 78.B

Si compoſiti numeri ſiue integri, ſiue fracti, proportionales ſint; & diuiſi proportionales erũt. 78.B

Si diuiſi numeri proportionales ſint ſiue integri, ſiue fracti; & diuiſi proportionales erunt. 79.B

Si compoſiti numeri tam fracti, q̃ integri, proportionales ſint; & per conuerſionem rationis proportionales erunt. 79.B

Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum: habent autem & quintus ad ſecundum eandem rationem quam ſextus ad quartum, tam in fractis numeris, quam integris: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eãdem habebit rationem, quam tertius cũ ſexto ad quartum. 80.B

Si duo numeri ad duos numeros eãdem habeant rationem; & detracti quidã habeant ad eoſdem eandem, tam in numeris fractis, quam integris: Et reliqui ad eoſdem eandẽ rationem habebunt. 81.B

Si primus ad ſecundum eãdem habeat rationem, quã tertius ad quartum; habeat autem & primus ad quintum eãdem, quam tertius ad ſextum, tam in integris quam fractis numeris: Etiã primus ad compoſitũ ſecundum cum quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cum ſexto. 81.A

Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quẽdam alium eundem, tam in fractis, quam integris numeris: habebunt quoque omnes illi ſimul ad eundem, proportionem, quam hi alij omnes ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcũque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionẽ, quã idem alius numerus ad hos omnes ſimul. 82.B

Vltima nouem propoſ. lib. 5. a Campano adiecta, qua ratione eodẽ modo demonſtrentur in numeris improportionalibus. 83.B

Maxima menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros minimos eãdem cũ ipſis proportionem habẽtes. pag. 96.B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor

nor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 98. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorũ primi inter se sint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 109. B

Si sint quotuis numeri non continue proportionales, extremi vero ipsorum sint inter se primi; ipsi minimi sunt in continuatione suarum proportionum. 110. B

Si tres numeri sint minimi continue proportionales; extremi quadrati sunt: Si autem quatuor cubi, &c. 112. B

Extremi numeri continue proportionalium quotcũque minimorum primi sunt inter se. pag. 114. & 116. B

Duo numeri minimi in sua proportione metiũtur omnes medios quotcũque minimorum in eadem ratione. 114. B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam vllum metietur. 123. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex; neque alius quisquã vllius multiplex erit. 124. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus vero secũdum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur: Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunq; alius cuiuslibet sequentiũ multiplex erit. 125. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur, neq; primus secundum metietur. Et si primus vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit. 126. B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur; is etiam metietur secundum. pag. 126. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit. 127. B

Si inter duos numeros medij cõnua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 127. B

Inter duos numeros duplæ, triplæ, aut quintuplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis non potest cadere medius

dius numerus proportionalis. pag. 129. & 130. B

Item neque inter duos numeros ſola vnitate, aut binario differentes. 129. B

Ex quo ſit, neque Diapaſon, neq; Tonum in Muſicis diuidi poſſe biſariam. 130. B

Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ inter vtrumque eorum, & vnitatẽ medij continua proportione cadẽt. pag. 133. B

Si numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquum, & rurſum multiplicet productum, &c. omnes producti ſunt continue proportionales ab vnitate. 132. B

Si inter duos numeros & vnitatem cõtinue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrumque ipſorum. & unitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 133. B

Si quotquot numeri ſint ab vnitate continue proportionales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & ſic deinceps. 135. B

Si *ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine aqualiũ; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quã habent ſecũdi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam, & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius. 135. B*

Si ſint ab aliquo numero eodẽ duo ordines numerorum cõtinue proportionalium, & multitudine aqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam, &c. 136. B

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, cõtinue proportionales ceciderint numeri, quot inter vtrumque ipſorum, et aſſumptũ deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 138. B

Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primũ poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos; ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 143. B

Primi autẽ numeri producti ſunt in duplicata rõne ꝓportionis datorũ numerorum: & ſecũdo loco geniti in triplicata. &c. 145. B

Si ab

Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales; minor quicunque maiorē quēlibet metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris. 186. B

In numeris ab vnitate cōtinue proportionalibus, quantū abeſt maior quilibet a minore quouis eū metiente, tantum ab vnitate diſtat numerus, per quem minor maiorem metitur. Item quilibet numerus ſeipſum multiplicans, producit numerum tantū ab eo diſtantem, quantum ipſe ab vnitate abeſt: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantum a maiore diſtans, quantum minor ab vnitate. 187. B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſint; quicunque primorum numerorum ultimum metiūtur, iidem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur. 188. B

Itaque neque vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiēs, metiri poteſt ultimū. 190. B

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſint, qui uero poſt unitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus. 191. B.

Si quotcunq; numeri continue proportionales, ſint minimi omniū eādem rationem habentiū cum ipſis; Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorū, qui in eadem rōne ſunt minimi; vel certe ad alterū erit cōpoſitus. 194. B

Si tres numeri ſint deinceps proportionales, & minimi omnium eādem cum ipſis rationem habētium; Duo quilibet ſimul, ad reliquū primi erunt pag. 205. A

Si quotcūque numeri deinceps proportionales, ſint minimi omniū eandem cum illis rationem habentium; ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul collecti, erunt primi. 207. B

Si duo numeri, primi inter ſe fuerint; non erit ut primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam. 209. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; non erit ut primus ad ſecūdum, ita ultimus ad alium quempiam. 209. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahātur, aūt a ſecundo, & ultimo æquales ipſi primo; Erit ut ſe cūdi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes. 229. B

Quolibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus,

conuerſo ordine proportionales. pag. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotiẽtibus reſpondentibus cõuerſo ordine proportionales. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continue proportionales. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorũ ad quemlibet eorũ, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdẽ prorſus Quotientes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa facit. 236. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum; procreabuntur alternis ſemper iidẽ primi Quotientes ordine conuerſo. 237. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omnium quotiẽtum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi quotientum numerus fueris impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. pag. 238. B

Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quotientum eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens. pag. 238. B

Proportionum compoſitio, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & deſinit. 5. lib. 6. non eſt vere additio proportionum, vt plerique falſo exiſtimant. 273. B

Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant. 275. B

NVMERVS fractus, vide. Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Numeros, quotquot inſſerit quis, qui inter ſe multiplicati datum numerũ gignãt, repire. 749. A

Numero per numerum diuiſo; diuiſus numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuiſionẽ inuenti in numerum diuidentem. 13. B

Si

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, qnoad aſſumpta ſit vnitas : qui principio dati ſunt numeri, primi inter ſe erunt. pag. 32. B

Si duobus numeris inter ſe primis datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: nũquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas. 33. B

Si datis duobus numeris inter ſe cõpoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione : detractio ad vnitatẽ vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 34. B

Numerus duos numeros metiens : metitur quoque maximam eorundem menſuram. pag. 36. B

Numerus tres numeros metiẽs, uel plures ; metitur etiam maximam eorũ menſuram communem. 38. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. 39. B

Si duo numeri mutuo ſe multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt. 64. B

Idem in fractis numeris concludes pag. 65. B

Si duo numeri ſe mutuo multiplicauerint ; procreabitur vnus, idemque numerus. 65. B

Verum hoc etiam eſt in numeris fractis. 66. B

Primi inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eãdem cum eis rationem habentium. 84. B

Minimi numeri omnium eandem eum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. pag. 84. B

Quotcunque numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionũ. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi. 85. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint ; qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit. 86. B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint ; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. pag. 87. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 88. B

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint : Et qui ex eis gignẽtur primi inter ſe erũt. pag. 88. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; & multiplicans uterque ſe ipſum fecerit aliquẽ ; Et geniti ex ipſis primi inter

se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicãtes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semp circa extremos hoc eueniet. 89.B

Si duo numeri primi inter se fuerint; etiam vterque simul ad quemlibet illorũ primus erit. Et si vterque simul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt. 90.B

Numerus, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primus erit. 91.B

Omnis primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. pagina 91.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autẽ ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 92.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit. pag. 93.B

Omnem compositum numerũ, aliquis primus numerus metitur. 93.B

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 94.B

Si duo numeri numerum quẽpiam metiantur: Etiam minimus, quẽ illi metiuntur, eundem metietur. 99.B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eũdem metietur. 101.B

Idem eueniet in pluribus numeris. pag. 102.B

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam. 102.B

Si numerus partem habuerit quamlibet, metietur illum numerus a parte denominatus. pag. 103.B

Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiũtur, minimus est habens partes a numeris metientibus denominatas. 104.B

Datis quotlibet numeris, idem semper numerus procreabitur ex eorũ mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter se permutent. 155.B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur. 193.B

Demonstratio priorum 10. propositionum lib. 2. in numeris. pagina 196.B

Nullus numerus ita dimidi potest, vt productus ex toto in vnam

partem, ſit æqualis quadrato alterius partis. 204. & pag. 222. B
Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum. 215. B
Si pares numeri quotcũq; componantur; totus par erit. pag. 216. B
Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorũ ſit par, totus par erit. 217. B
Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar, & totus impar erit. 217. B
Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus additus, facit imparem. 218. B
Si a pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. pagina 218. B
Si a pari numero impar detrahatur; & reliquus impar erit. pag. 219. B
Si ab impari numero impar detrahatur; reliquus par erit. pag. 219. B
Si ab impari numero par detrahatur; reliquus impar erit. pag. 220. B
Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 220. B
Si par numerus parem multiplicãs fecerit aliquem; factus par erit pag. 220. B
Par in ſe multiplicatus facit parem. 221. B
Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; factus impar erit. pag. 221. B
Impar numerus in ſe multiplicatus gignit imparem. 221. B
Numerus impar numerum parem metiens, per numerũ parem eum metitur. 222. B
Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 222. B
Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur. 223. B
Si impar numerus ad aliquẽ numerum primus ſit; & ad illius duplum primus erit. 224. B
Immo & ad quadruplum, octuplũ, ſedecuplum, & ſic deinceps in proportione dupla. 225. B
Numerorum a binario duplorũ vnuſquiſque parirer par eſt tantum. 225. B
Si numerus dimidiũ habeat imparem; pariter impar eſt tantum. 226. B
Si par numerus neque a binario duplus ſit, neque dimidium habeat imparem; pariter par eſt, & pariter impar. 228. B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. pag. 231. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

Nullus numerus compoſitus ex integro & fracto, vel numerus fractus in ſe multiplicatus procreat numerum quadratũ integrum. pag. 658.A

Plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. 121. B

Duorum quadratorum numerorum unus medius eſt proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatã habet latéris ad latus rationem. 140.B

Medio proportionali cadente inter duos quadratos; erit is ad vtrumuis quadratorum compoſitus. 141.B

Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 141.B

Duobus medijs proportionalibus cadentibus inter duos cubos; erunt ij, & vterlibet cuborum inter ſe compoſiti. 142.B

Si quadratus numerus quadratũ numerũ metiatur; & latus unius metietur latus alteri⁹. Et ſi vnius quadrati latus metiaſ latus alterius; & quadratus quadratũ metietur, 146.B

Si cubus numerus cubũ numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubũ metietur. 147.B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius quadrati non metiatur latus alterius; neq; quadratus quadratum metietur. 148.B

Si cubus numerus cubum numerũm non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi unius latus alterius nõ metiaſ; neq; cubus cubum metietur. 149.B

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris multiplex erit. Et ſi latus lateris nõ ſit multiplex; neq; quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex. 149.B

Duorum ſimilium planorum numerorum unus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planũ duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. pag. 150.B

Medius numerus proportionalis inter

ter duos planos ſimiles, ad vtrũlibet compoſitus eſt. 151.B

Duorum ſimilium ſolidorũ numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationẽ habet lateris homologi ad latus homologum. pag. 152.B

Duo numeri medij proportionales inter duos ſolidos ſimiles, et uterque ſolidorum, ſunt compoſiti inter ſe. 153.B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; ſimiles plani erunt illi numeri. 158.B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; ſimiles ſolidi ſunt illi numeri. 159.B

Si tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit. 161.B

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autẽ ſit cubus; Et quartus cubus erit. 161.B

Si duo numeri rationem habeãt inter ſe, quam quadratus ad quadratum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit. 165.B

Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non poteſt in duobus numeris quadratis. pag. 165.B

Duo numeri in quintuplæ proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratũ. pag. 166.B

Si duo numeri rationem inter ſe habeant, quã cubus ad cubum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit. 166.B

Proportio cubi ad non cubum, reperiri non poteſt in duobus numeris cubis. 167.B

Similes plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus ad quadratum. 167.B

Numeri proportionem habentes, quam quadratus ad quadratũ, ſimiles plani ſunt. 168.B

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus ad cubum. 168.B

Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, ſimiles ſolidi ſunt. 169.B

Nulli numeri habentes duplã proportionem, vel ſuperparticularẽ, vel ſuperbipartientem: vel duo numeri primi, vel primi inter ſe, quãuis neuter primus ſit, dummodo quadrati nõ ſint, aut cubi; ſimiles plani ſunt, aut ſolidi. 169.B

Si ſint duo numeri plani, aut ſolidi ſimiles, ſitque minor primus; metietur minor maiorem. 170.B

Duo numeri inter ſe primi, quorum minor primus ſit, nõ poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. pag. 171.B

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant

quendam; productus quadratus erit. 173. B
Si duo numeri se mutuo multiplicantes, faciãt quadratum; similes plani erunt. 174. B.
Duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes producunt quadratum. 174. B
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit. 175. B
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus, reliquus nõ quadratus erit. 175. B
Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum. 175. B
Si cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 176. B
Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. pag. 177. B
Si cubus numerus numerũ quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 177. B
Cubus non cubum multiplicans facit non cubum. 178. B
Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. pag. 178. B
Si numerus seipsum multiplicans faciat cubum; Et ipse cubus erit. 178. B
Si compositus numerus numerũ aliquem multiplicans quempiam faciat; Factus solidus pag. 179. B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales sint; tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes; quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes. 179. B
Si sint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, septimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proxime positos in locis, tertio, sexto, nono, & alijs, qua ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri, quartus, septimus, decimus, &c. sunt cubi. Omnes vero, qui proxime sequuntur positos in locis, sexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, qua metitur senarius, quales sunt, septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. sunt cubi simul & quadrati. 181. B
Si ab vnitate quotcunque numeri sint deinceps proportionales, qui vero post vnitatem, sit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt. pag.

pag. 181.B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps sint proportionales, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. pag. 184.B

Quando in numeris ab vnitate proportionalibus continue, qui post vnitatem, non est cubus simul & quadratus; non necesse est, nullum alium esse quadratum simul & cubum, præter septimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes: quia aliquando etiam quartus, est quadratus simul ac cubus, non existente primo ab vnitate quadrato ac cubo simul. 185.B

OBTVSANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ solidæ non Regulares, ac plana parallela.

Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius, linea vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti. pag. 559.B

Ad quę plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela. 563.B.

Si sint duo plana parallela; recta linea, quæ ad vnum eorum recta est, ad reliquum quoque recta erit. 563.B

Si duæ rectæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano; Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana. 564.B

Si duo plana parallela plano quopiam secentur; communes illorum sectiones sunt parallelæ. 566.B

Quæ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela; vel si conueniunt, vnum planum efficiet. pag. 567.B

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorũ parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum. 571.B

Si solidum parallelis planis continetur; aduersa illius plana parallelogramma sunt similia, & æqualia. 584.B

Si solidum parallelepipedũ plano secetur per diagonios aduerso-

uerſorum planorum; bifariã ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. 593.B

Solida parallelepipeda ſuper eãdem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineę in ijſdem collocãtur rectis lineis, ſunt inter ſe æqualia. 594.B

Solida parallelepipeda ſuper eãdem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorũ inſiſtentes lineæ non in ijſdẽ collocantur rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. 596.B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſim, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine. 597.B

Solida parallelepipeda ſuper æquales baſes cõſtituta, & in eadẽ altitudine; æqualia ſunt inter ſe. 598.B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſim. 601.B

Hæc quinque, quæ proxime dicta ſunt de parallelepipedis, conueniunt etiam in priſmata, in quibus duo plana oppoſita ſunt triãgula. 608.B

Si ſolidi parallelepipedi eorum, quę ex aduerſo, planorũ latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: Communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariã ſe mutuo ſecabunt. 617.B

In omni prallelepipedo diametri ſe mutuo bifariã diuidunt in vno puncto. 618.B

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum; bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam, per centrum tranſibit ipſum planum. pag. 619.B

Si fuerint duo priſmata planorum triangularium oppoſitorum æqualis altitudinis, quorum hoc quidẽ baſim habeat, triangulum, illud vero, parallelogrammum, duplum autẽ fuerit parallelogrãmũ trianguli; Æqualia erunt ipſa priſmata. 623.

Omnis pyramis triangularem habẽs baſim diuiditur in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis. pagina 630.B

Si fuerint duę pyramides eiuſdẽ altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarũ vtraque diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diuiſa

diuisa sit vtraque pyramidū, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idq; semper fiat: Erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia. 633.B

Pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares, sunt inter se æquales. 637.B

Pyramides triāgulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiusdē q; altitudinis, habent bases æquales, vel eandē. 637.B

Pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases quascunque, vel eandem, sunt inter se æquales. 641.B

Pyramides multangulæ æquales, et super æquales bases, vel super eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemque habentes altitudinem; bases habent æquales, vel eandem. 641.B

Omne prisma triāgulare habēs basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habētes. 642.B

Prismata eiusdē altitudinis super eandē, vel æquales bases quascunq;, inter se sunt æqualia. Et prismata æqualia super æquales bases, vel eandē, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdē altitudinis, bases habent æquales, vel eandem. 645.B

Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de ijs, quæ habent plana opposita basibus æqualia & similia. 646.B

Omnis conus tertia pars est cylindri eādem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. 654.B

Atque hoc verum est, siue coni & cylindri sint recti, siue scaleni, licet non sit idem axis conorū, & cylindrorum. 658.B

Coni & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases cōstituti, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, inter se sunt æquales. 661.B

Coni & cylindri æquales super eandem vel æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et coni ac cylindri æquales in eadem altitudine, super æquales bases sunt, vel eandem. 661.B

Si in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindāt arcus similes; erūt duæ rectæ coniūgētes extrema vnius rectæ cū cētro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cū centro coniungūt. 919.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiusq; æqua-

lia

lia ſunt & latera oppoſita, & anguli oppoſiti, atque ipſum diameter ſecat bifariã. 177. A

Quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, parallelogrammum eſt. 178. A

Quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, parallelogrammum eſt. 179. A

Rhombus, & Rhomboides, parallelogramma ſunt. 179. A

Quadratũ, & altera parte lõgius, parallelogramma ſunt. 179. A

Quadrilaterum diuiſum bifariã ab vna diametro, non ſemper eſt parallelogramum. 179. A

Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. 180. A

Quadrati, & Rhombi angulos ſecat diameter qualibet bifariã. pag. 180. A

Rhomboidis, & altera parte longioris angulos ſecat diameter non bifariam. 181. A

Quadrati, & altera parte longioris diametri sũt æquales. 181. A

Rhombi, & Rhomboidis diametri non ſunt æquales. 181. A

Parallelogrammi cuiuſque diametri ſe mutuo ſecant bifariam. pag. 182. A

Quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuo bifariam ſecant, parallelogramum eſt. 182. A

Parallelogrammum bifariam diuiditur a recta, quæ diametrum bifariam ſecat: Et recta diuidens parallelogrammum bifariam, ſecat diametrum quoque bifariam. 183. A

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdẽ parallelis conſtituta ſunt æqualia. 190. A

Parallelogrãma æqualia ſuper eandem baſim, ad eaſdemque partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas. 192. A

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt æqualia. 193. A

Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdẽ partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eiſdem parallelis, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 193. A

Parallelogrammorum inter eaſdẽ parallelas, quod maiorem baſim habet, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 194. A

Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro diuiditur bifariam, parallelogrammum eſt. 201. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes ſunt æquales, ſunt æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadẽ baſi, habent baſes oppoſitas æquales. 204. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quod maiorem habet baſim oppoſitam, ma-

ius eſt: Et quod maius eſt, habet baſim oppoſitam maiorẽ. 205. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper aqualibus baſibus, quorũ oppoſita baſes ſint aquales, aqualia ſunt. Et trapezia aqualia in eiſdem parallelis, & ſuper aqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas aquales. 205. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, et ſuper aqualibus baſibus, quod maiorem habet oppoſitã baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim oppoſitã. pag. 206. A

Parallelogrammum duplum eſt trianguli eandem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 213. A

Parallelogrammũ aquale eſt triãgulo duplam habenti baſim, & in eiſdem parallelis conſtituto. pag. 214. A

Parallelogrammũ duplum eſt triãguli aqualem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 214. A

Si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, eandemque habuerint baſim, vel aquales, & ad eaſdem partes conſtituta; in eiſdem erunt parallelis: Et ſi parallelogrammum duplũ fuerit triãguli, in eiſdemque parallelis; erunt baſes ęquales, ſi non ſit eadem. 215. A

Si trapezium & triangulum ſuper eadẽ baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij, ſit baſis triãguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli; erit trapezij maius duplo trianguli. 216. A

Trapezium habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt triãguli, quod baſim habet unum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio pũcto lateris oppoſiti. 217. A

In parallelogrammo, complementa circa diametrum ęqualia ſunt. 219. A

Si parallelogrammo diuiſo in quatuor parallelogramma, duo aduerſa ſint aqualia, cõſiſtent reliqua duo circa diametrũ. 220. A

Quadrata linearum aqualiũ ſunt aqualia: Et quadratorum ęqualium aquales ſunt lineæ. 227. A

Quadratum ex diametro quadrati deſcriptum, duplum eſt ipſius quadrati. 235. A

Quadratum diametri figura altera parte lõgioris, aquale eſt duobus quadratis laterum inaqualium. 235. A

Parallelogrammũ, cuius vnus tantum angulus detur rectus, habet omnes angulos rectos. 250. A

Rectangulũ quodcunq; aquale eſt alteri rectangulo ſub duabus rectis contento, qua duobus lateribus illius ſint aquales. 251. A

Parallelogramma circa diametrum quadrati, ſunt quadrata. pag. 263. A

Qua-

Quadratum cuiusque rectæ quadruplum est quadrati rectæ, cuius illa dupla est. Et si quadratum quadrati sit quadruplum, latus lateris duplum est. 264. & 821. A

Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiens quadrato, quale est rectangulo sub segmentis per applicationem factis comprehenso. 848. A

PAR. & impar numerus. vide. Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus, vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri similes. vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarū, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide. Numeri Proportionales in cōmuni.

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum,&c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Omnes Rationales linea non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe ſunt commenſurabiles. pag. 343.B

Spatium Rationali ſpatio commenſurabile,& ipſum Rationale eſt. 345.B

Quod ſub Rationalibus longitudine commẽſurabilibus rectis(quomodocunque cõmenſurabiles ſint expoſitę Rationali)cõtinetur rectangulum; Rationale eſt. 345.B

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalẽ,& ei, ad quam applicatum eſt, longitudine cõmenſurabilem. 346.B

Quod ſub Rationalibus potentia ſolum commẽſurabilibus rectis continetur rectangulũ, Irrationale eſt: Et recta ipſum potens, Irrationalis. Vocetur autem Media. 351.B

Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantũ commenſurabiles, Irrationalis eſt, qua vocatur Media. 352.B

Rectangulum ſub duabus Rõnalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Mẽdium dici poteſt. 352.B

Non omne rectangulum Medium continetur ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus. 352.B

Quod a media fit, ad Rationalẽ applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quã applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem. 353.B

Omne ſpatium Medium æquale eſt rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. 353. & 355.B

Medię commenſurabilis, Media eſt. 355.B

Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt. 356.B

Non omnis Media recta cuilibet Mediæ eſt cõmẽſurabilis. 358.B

Quod ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Mediũ eſt. 358.B

Quod

Quod ſub Medijs potẽtia tantũ cõmenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulũ; vel Rationale eſt, vel Medium. 359.A

Quod ſub Medijs longitudine & potentia incõmenſurabilibus continetur, nec Rationale eſt, nec Medium, ſed Irrationale aliud, quod æquale eſt rectangulo ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento. 361.B

Medium non ſuperat Medium Rationale. 362.B

Rationale ſuperat Rationale Rationali. 364.

Duo ſpatia Irrationalia componere poſſunt ſpatium Rationale. 383.B

Duo ſpatia Rationalia componunt ſemper ſpatium Rationale, pag. 384.B

Si duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 387.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quę Rationale cõtineãt; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima. 389.B

Quod ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum. Irrationale eſt. 390.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium cõtineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs, ſecunda. 390.B

Si duæ rectæ potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis cõtinetur, Medium; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 393.B

Si duæ rectæ potentia incommẽ ſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Mediũ, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Mediũ potens. 394.B

Si duæ rectę potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis cõtinetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 395.B

Sex lineæ Irrationales compoſitæ, vt ea, quæ ex binis nominibus, quæ ex binis Medijs prima, quæ ex binis Medijs ſecunda, Maior, Rationale ac Mediũ potens, & bina Media potens, adunum dumtaxat punctum diuiduntur in nomina, ſingulæ. 398.B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 406.B

Si ſex ſpatia contineantur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, ac ſexta; Rectæ ea potentes Irrationales ſunt hæ ordine; ex binis Medijs prima, ex binis Medijs ſecunda, Maior, Rationale ac Medium potens, & bina Media potens 417.B

Quadrata ſex harum linearum Irrationalium; eius quæ ex binis nominibus, ex binis Medijs primæ, ex binis Medijs ſecundæ, Maioris, Rationale ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine ſex lineas ex binis nominibus. pag. 426.B

Rectæ longitudine commenſurabiles ſex lineis Irrationalibus prædictis, ſunt quoque eiuſdem ordinis, & nominis Irrationales. 435.B

Idem eueniet, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur. 437.B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens. 443.B.

Si duo Media inter ſe incõmenſurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex Medijs ſecunda, vel bina Media potens. 445.B

Ea, quæ ex binis nominibus, & alię quinq; Irrationales eam ſequentes, & inter ſe, & a Media differunt. 447.B

Recta linea media proportionalis ſecundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, per compoſitionem facta, eſt quoque Irrationalis eiuſdem ordinis. pag. 448.B

Si a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti: *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome. 449.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis medijs prima, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. pag. 451.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; *Vel*

latera trianguli rectanguli sint continue proportionalia; perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa, secat basim extrema ac media ratione. 878.A

Si ex centro per quauis puncta lineæ Quadratricis ducantur rectæ vsque ad peripheriam quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & alia recta eidem basi parallela: Erunt arcus quadrantis inter semidiametros interiecti, perpendicularibus, vel segmẽtis semidiametri intra parallelas positis, proportionales. 898.A

Si quadrãtis & Quadratricis idẽ centrum sit; erunt arcus quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continue proportionales. 904.A

Circumferentia circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, qua sit. 907.A

Si sint duæ rectæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum primæ ad rectangulum sub illis duabus contentum. Et vt secunda ad primam, ita rectãgulum sub ipsis ad quadratum primæ. 344.B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad secundam, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum secundæ. 375.B

Si sint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur. 377.B

Si recta linea secetur in partes duas inæquales; erit vt alterutra pars ad alteram, ita rectãgulum sub tota & priore parte assumpta, ad rectangulum sub tota, & altera parte contentum. 380.B

Si recta sit secta vtcunque; erit rectangulum sub partibus cõtentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum sub tota, & vna parte contẽtum, mediũ proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratũ dictæ partis. 416.B

Si duæ rectæ parallelis planis secentur; In easdẽ rationes secabuntur. 568.B

Si solidum parallelepipedũ plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. 585.B

Idem conuenit in omne prisma. pag. 587.B

Si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. 590.B

Solida parallelepipeda sub eadẽ altitudine; inter se sunt, vt bases. 602.B

Si parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 603.B

Similia solida parallelepipeda, inter

inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterũ. pag. 603.B

Si sint quatuor rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primã descriptum, ad parallelepipedum similem, similiterque descriptum super secundam. 605.B

Aequalium solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocãtur. Et quorum solidorum parallelepipedorũ bases & altitudines reciprocantur; illa sunt æqualia. pag. 605.B

Hæ quinque, quæ proxime de parallelepipedis dicta sunt, conueniunt etiam prismatis, in quibus duo plana oppositæ sunt triãgula. 608.B

Si tres rectæ sint proportionales; quod ex illis fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto a media linea solido parallelepipedo, qđ æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto. 612.B

Si parallelepipedum ex tribus rectis descriptum, æquale sit parallelepipedo sibi æquiangulo a media recta descripto; erunt tres rectæ continue proportionales. pag. 613.B

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quę & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineę proportionales erunt. 614.B

Eodem modo si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterque de scripta ex eis, proportionalia, etc. pag. 616.B

Idem quoque quadrat in prismata triangularium planorum, oppositorum ex quatuor rectis, vel tribus, continue proportionalibus descripta, si similia, similiterque posita sint. 616.B

Circuli inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. 626.B

Circulus ad circulum est, vt polygonum in illo descriptũ ad polygonum simile in hoc descriptum. 629.B

Sub eadem altitudine existẽtes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. 635.B

Si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine 637.B

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases. 638.B

Idem verum est de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vna basim habet plurium angulorum, quam altera. 639.B

Pyra-

Pyramides quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes; eandem habent altitudinẽ. 641. B

Pyramis quælibet tertia pars eſt priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem. Siue priſma quod libet triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim & altitudinẽ. 642. B

Eodem modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem baſi, & altitudinem altitudini æqualem. 644. B

Priſmata eiuſdem altitudinis ſuper quaſcunque baſes, inter ſe ſunt, vt baſes. 644. B

Si priſmata quarumcũque baſium inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. 645. B

Quæ de priſmatis dicta ſunt, intelligi debent de ijs, quę habent plana oppoſitæ baſibus æqualia, & ſimilia. 646. B

Similes pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorũ laterum ratione. 647. B

Similes pyramides, quarum baſes plura latera, quã tria continent, habent proportionem homologorum laterũ triplicatam. 648. B

Similia priſmata triplicatam proportionem habent laterum homologorum. 649. B

Pyramides multangulæ ſimiles diuiduntur in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. 651. B

Priſmata multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. pag. 651. B

Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habẽtium reciprocantur baſes, & altitudines; illæ ſũt æquales. 651. B

Æqualium pyramidum, quarum baſes non ſunt triangulares, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentium reciprocantur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. 652. B

Idẽ conuenit priſmatibus. 654. B

Sub eadẽ altitudine exiſtẽtes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. 658. B

Atque hoc verum eſt, ſiue coni & cylindri recti ſint, ſiue ſcaleni. pag. 661. B

Si coni & cylindri quicunque inter ſe ſint, vt baſes, ipſi ſub eadem altitudine erunt. 661. B

Coni & cylindri ſimiles, in triplicata ratione ſunt diametrorũ, quæ in baſibus. 662. B

Idem hoc locum habet in conis & cylindris ſcalenis. 665. B

Si cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 667. B

Idem

Idem intelligatur de cyclindro ſca leno. 668.B
Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. 668.B
Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 669.B
Item priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. 670.B
Coni et cylindri tã recti, q̃ ſcaleni: *Itẽ priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionẽ habẽtes eãdem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.* 672.B
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum & cylindrorũ reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales. 673.B
Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 674.B
Sphęrę inter ſe sũt in triplicatã rõne ſuarũ diametrorũ. 685.B
Ex quo fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum ſimile in hac deſcriptũ. 688.B
Si recta linea ſecũdũ extremã & mediam rationẽ ſecetur; maius ſegmẽtũ aſſumẽs dimidiã totius, quintuplũ poteſt eius, quod a dimidia totius deſcribitur, quadrati. 689.B
Si recta linea ſuijpſius ſegmenti quintuplũ poſsit; Duplæ præ dicti ſegmẽti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ a principio, rectæ. 691.B
Si recta linea ſecũdum extremã & mediam rationem ſecetur; minus ſegmẽtum aſſumens dimidiã maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. 693.B
Si recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentũ aſſumens dimidiũ maioris ſegmẽti quintuplũ poſsit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione. 695.B
Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; quod a tota, quodq; a minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla sũt eius, quod a maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. 696.B
Si recta inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur. 697.B
Si recta ſecũdũ extremã et mediã rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentũ, quintuplũ põt eius, q̃ a maiori ſegmẽto deſcribitur, quadrati. Et ſi recta inæqualiter ſecetur, totaq; aſſumens minus ſegmentum poſsit quintuplum eius, quod a maiori ſegmento deſcribitur, quadrati; Recta illa ſecundũ extremã & mediã rationẽ ſecta eſt. 698.B

Si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturq; ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secundum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quę a principio, recta linea. 699.B

Si recta secetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori segmento segmẽtum minus; erit maius segmentum sectii extrema ac media ratione, et maius segmẽtum est illa linea, qua prioris linea minus segmentum erat. 700.B

Si recta secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti; erit quoq; dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum. erit dimidium maioris segmenti totius linea. 701.B

Si ad rectam perpendicularis ducatur, qua sit media proportionalis inter segmenta linea; semicirculus circa illam lineam rectã descriptus transibit per extremum punctum linea perpendicularis. 722.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione secẽtur; ipsę similiter secabuntur, in easdẽ scilicet proportiones. 763.B

Si sint quatuor recta continue proportionales, necnon & alia quatuor, ita vt eadem sit antecedẽs omnium; erit proportio tertia ad tertiam proportionis secunda ad secundam duplicata; & proportio quarta ad quartam eiusdem proportionis secunda ad secundam triplicata. 819.B

Si duo latera trianguli æquilateri secentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius segmẽtum, alterius vero minus sit prope angulum ab ipsis comprehensum; recta connectens puncta sectionum duplum potest minoris segmenti. 861.B

Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione. 875.B

FIGVRAE planę quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRA-

IRRATIONALES magnitudines. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.

Si sint tres recta Arithmetice proportionales: rectangulum sub extremis, una cum quadrato exces sus, aquale erit quadrato linea media. 271. A

Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmetica, Geometrica, atque Harmonica, sive Musica, proprietates varia. a 505. *vsque ad* 632.

Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum aque multiplicia definierit. 643. A

Si sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinũ ęqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tã multiplices erunt & omnes omnium. 675. A

Si prima secũdę ęque fuerit multiplex, atq; tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ: erit & composita prima cum quinta, secũdæ æque multiplex, atque tertia cum sexta quartæ. 676. A

Idem sequitur, si prima & tertia, aquales sint secunda & quarte; at quinta & sexta, aque multiplices secunda & quarte: Vel prima et tertia, eque multiplices secunde & quarte; at quinta & sexta, aquales secunda ac quarta: Vel denique si tam prima & tertia, quam quinta ac sexta, aquales sint secunda ac quarta. pag. 677. A

Si sit prima secũdæ æque multiplex, atq; tertia quartæ: sumãtur autẽ ęque multiplices primæ ac tertiæ: Erit & ex ęquo, sumptarum vtraque vtriusq; æque multiplex, altera quidẽ

ſecundæ, altera autem quartæ. 678.A
Si prima ad ſecundã habeat eandẽ rationem, quam tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebũt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint. pag. 679.A
Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales ſunt. 681.A
Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 683.A
Si duæ magnitudines duarũ magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædã ſint earundem æque multiplices: Et reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarũ multiplices. 685.A
Aequales ad eãdem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. 687.A
Eodem modo, æquales ad æquales eandẽ habent rationem. 688.A
Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorẽ rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorẽ. 688.A
Quæ ad eandem, eandẽ habent rationem, æquales ſunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoque ſunt. 691.A
Ad eandem magnitudinẽ rationẽ habentiũ, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt. 692.A
Quæ eidẽ ſunt eędẽ rationes, & inter ſe ſunt eædem. 693.A
Quæ eiſdem ſunt eadẽ rationes, & inter ſe ſunt eadem. 694.A
Si ſint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnã conſequẽtiũ, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes cõſequentes. 695.A
Si prima ad ſecundam, eandẽ habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam, tertia vero ad quartam maiorem rationẽ habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quã quinta ad ſextam. 696.A
Si prima ad ſecundã, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, minorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, minorẽ rationem habebit quam quinta ad ſextã. 697.A
Si prima ad ſecundam, maiorẽ habuerit rationem, quã tertia ad quar-

quartam; tertia itē ad quartā, maiorē habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, maiorem habebit, quā quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quā tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorē, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, minorem rationē habebit, quā quinta ad sextam. 697.A

Si prima ad secundā sit, vt tertia ad quartam; sit autem prima maior, quam tertia: erit & secūda maior quam quarta. Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 698.A

Eodē modo, si secūda maior fuerit quā quarta; erit et prima maior quā tertia: Et si aqualis, aqualis: Et si minor, minor. 699.A

Partes cū pariter multiplicibus in eadē sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur. 700.A

Magnitudines quatuor proportionales, vicissim quoq; proportionales sunt. 701.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales, sit aūt prima maior q̄ secunda: erit quoq; tertia maior q̄ quarta: Et si aqualis, aqualis: Et si minor, minor. 702.A

Si compositæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoque diuisæ proportionales erunt. 703.A

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoq; cōposi tę ꝓportionales erunt. 705.A

Si sit, vt totum ad totū, ita ablatum ad ablatum: erit quoque reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 708.A

Si sint quatuor magnitudines ꝓportionales; hæ quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. 709.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadē ratione sumantur; sit autem ex æquo prima maior, quam tertia; erit & quarta maior quā sexta; Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 710.A

Si sint tres magnitudines, & alię tres, quæ binæ & in eadem ratione sumantur, fueritq; perturbata earum proportio: ex æquo autē prima maior fuerit q̄ tertia: Erit & quarta maior quā sexta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 711.A

Si sint quotcūq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, q̄ binæ in eadē rōne sumātur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 713.A

Si sit prima ad secundā, vt tertia ad quartā: habebūt aquemulti plices primę ac tertię ad secūdā & quartam, eādem rationem: Itē aquemultiplices secunda & quarta ad primā ac tertiā. Et contra, eandem rationem habebūt secunda & quarta ad aquemultiplices prima ac tertię: Itē

prima ac tertia, ad æque multiplices secunda & quartę. 715. A

Si sint tres magnitudines, alięq; ipsis æquales numero, quę binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 716. A

Si sit prima ad secundam, vt tertia ad quartam; Item quinta ad secúdam, vt sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta ad secúdam erit, vt composita tertia cum sexta ad quartam. 717. A

Si duæ magnitudines ad duas eandem habeant rationem, & detractæ ex prioribus ad easdē posteriores eandem quoque habeāt rationem: Et reliquæ ad easdem posteriores eandem rationem habebunt. 718. A

Si quatuor magnitudines sint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 719. A

Si tres magnitudines sint proportionales: Maxima & minima maiores erūt, quam duplæ reliquæ. pag. 720. A

Si prima ad secundam habeat maiorem rationē, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secūda ad primam, minorem rationē, quā quarta ad tertiam. pag. 721. A

Si prima ad secundā habeat minorē proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secūda ad primā, maiorē rōnē, quā quarta ad tertiam. 721. A

Si prima ad secundā habeat maiorem rationē, quā tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiā, maiorē rationem, quā secunda ad quartā. 722. A

Si prima ad secundam habeat minorem rationem, quā tertia ad quartam: habebit quoq; vicissim prima ad tertiam, minorem rationem, quam secunda ad quartam. 722. A

Si prima ad secundā habeat maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoq; composita prima cum secunda, ad secundam maiorem rationem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam. 723. A

Si prima ad secundam habeat minorem rationem, quā tertia ad quartam: habebit quoq; composita prima cum secunda, ad secundam minorem rationem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam. 724. A

Si *composita prima cum secūda ad secundam, maiorem habeat rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque dividendo prima ad secundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam. pag. 724. A*

Si *prima cum secunda ad secundam minorem rationē habeat, quam tertia cū quarta ad quartam*

tam : habebit quoque dividendo prima ad secũdam minorem rationem, quam tertia ad quartam. 725. A

Si compoſita prima cum secũda ad ſecundam habeat maiorẽ rationem, quam compoſita tertia cũ quarta ad quartã : habebit per conuerſionem rationis, prima cũ ſecunda ad primam, minorem rationem, quam tertia cũ quarta ad tertiam. 726. A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam, minorem habeat rationẽ, quam tertia cũ quarta ad quartam : habebit per conuerſionem rationis, prima cum ſecunda ad primam, maiorem rationem, quam tertia & quarta ad tertiam. 726. A

Si ſint tres magnitudines, & alię ipſis æquales numero, ſitque maior proportio prima priorum ad ſecundam, quam prima poſteriorum ad ſecundam ; Item ſecunda priorum ad tertiam maior, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam : Erit quoque ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima poſteriorum ad tertiam. pag. 727. A

Idem eueniet, ſi proportio prima ad ſecundam eadem fuerit, quæ prima ad ſecundam ; at ſecunda ad tertiam maior, quam ſecunda ad tertiam : Vel contra, ſi proportio prima ad ſecundam fuerit maior, quam prima ad ſecundam ; at ſecunda ad tertiã eadem, quæ ſecũda ad tertiam. pag. 728. A

Quod ſi proportiones priorum magnitudinum minores fuerint : erit quoque ex æqualitate minor proportio prima ad tertiam, quam prima ad tertiam. 729. A

Idem eueniet, ſi proportio prima ad ſecundam fuerit eadem, quæ prima ad ſecundam ; at ſecunda ad tertiam minor, quam ſecunda ad tertiam : Vel contra, ſi proportio prima ad ſecundam fuerit minor, quam prima ad ſecundam ; at proportio ſecundæ ad tertiam eadem, quæ ſecundæ ad tertiam. 729. A

Quod ſi plures ſint magnitudines tribus, ſiue omnes proportione in vno ordine magnitudinum ſint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum ; ſiue vna tantum maior, quam vna, vel dua, &c. Erit maior vel minor proportio prima ad vltimam in vno ordine, quam prima ad vltimam in alio ordine. 729. A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, ſitque maior proportio prima priorum ad ſecundam, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam ; Item ſecunda priorum ad tertiam maior, quam prima poſteriorum ad ſecundam : Erit quoque ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quã

prima posteriorum ad tertiam. pag. 730. A

Idem eueniet, si proportio primæ priorum ad secundam sit, quæ secũdæ posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam maior, quam prima priorum ad secundam: Vel contra, ratio primæ priorum ad secundam maior, quam secundæ posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam eadem, quæ prima posteriorum ad secundã. pag. 731. A

Quod si in primis magnitudinibus aliquæ proportiones, vel omnes sint minores; erit minor proportio prima ad tertiam, quam prima ad tertiam. 831. A

Quod si plures sint magnitudines quam tres in quolibet ordine: erit quoque maior vel minor proportio prima ad vltimam, quam prima ad vltimam. pag. 731. A

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quam totius ad totum. 731. A

Si fuerit minor ratio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quam totius ad totum. 732. A

Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior ratio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum. 733. A

Propositis quotcunque magnitudinibus, proportio primæ ad vltimã cõponitur ex omnibus proportionibus intermedijs, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 742. A

Si quatuor magnitudines sint Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; hæ vicissim quoque erũt Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. pagina 458. B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut compositus

poſitus ex integro & fracto, in ſe multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. pag. 658.A

Dua minutia eundem habentia denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 240.B

Numerator cuiuſuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius eſt minutia. pag. 241.B

Minutia qualibet, pars eſt numeratoris a denominatore denominata. 242.B

Dua minutia eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores. pag. 243.B

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad poſteriorem, vt prior numerus productus ad poſteriorem. pag. 244.B

Integrum ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorū productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur. 245.B

Si dua minutia eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris. 246.B

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionē, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eādem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior eſt: Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. pag. 247.B

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, ſunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorē proportionem habet, quam denominator, illa maior eſt: Et maioris numerator maiorem habet proportionē quam denominator. 248.B

Minutia minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur. 251.B

Duæ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: & maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. pag. 255. B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens. 258. B

NVMERI proportionales in communi.

Propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiã multiplicationem: si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. pag. 650. A

Propositis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; si sumantur æque multiplices primi ac tertij, item æque multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 651. A

Propositis quatuor numeris, sumptisque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationẽ; si multiplex primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necessario, quam multiplex quarti; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor: Erit eadem proportio primi ad secũdum, quæ tertij ad quartum. 654. A

Propositis quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus, item secundi & quarti æque multiplicibus; si quando contingat, multiplicẽ primi maiorẽ esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij nõ maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. 655. A

Datis tribus terminis Geometrice proportionalibus sine æqualibus, sine inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo et tertio semel; ac tertius semel, sunt etiã

Geometrice proportionales. pagina 806. A

Datis tribus terminis siue aqualibus, siue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; ac denique tertius semel, sunt Arithmetice proportionales. 808. A

Datis tribus terminis siue aqualibus, siue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel; ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel; & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coacernata, Harmonice proportionales sunt. 809. A

Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita se habet ad alterutrũ multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem. 12. B

Numerus ex diuisione duorum numerorum procreatus ita se habet ad vnitatem, vt diuisus numerus ad diuidentem. 13. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusq; simul eadẽ pars erit, quæ vnus vnius. 40. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 41. B

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri. 41. B

Si sint quotcunque numeri quotcũque numerorum aqualium numero, singuli singulorum, eadem pars: Et omnes omniũ simul eadẽ pars erunt, quæ vnus vnius. pag. 42. B

Idẽ numeris fractis cõuenit. 42. B

Si sint quotcũque numeri quotcunque numerorum aqualium numero, singuli singulorum, aque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erũt & omnes omnium. pag. 43. B

Idem verum est de numeris fractis. 44. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterq; vtriusque simul eadẽm partes erit, quæ vnus vnius. 44. B

Idem locum habet in numeris fractis. 45. B

Si sint quotcũque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eadẽ partes: Et omnes omnium simul eadem partes erũt, quæ vnus vnius. 45. B

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit qualis totus totius. 45. B

Idem locum habet in numeris fractis. 46. B

Si numerus numeri aqus fuerit multi-

multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 46.B

Idem verum est de numeris fractis pag. 46.B

Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. pag. 47.B

Idem in fractis numeris verum est. 48.B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti. 49. B

In fractis numeris idem cõcludes. pag. 50.B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars. 50.B

Numeris fractis hoc idem conuenit. 51.B

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 51.B

Idem in fractis numeris verum est. 52.B

Si primus secundũ, & tertius quartum, æqualiter contineat, eandemque insuper partem, aut partes; erit secundus primi, & quartus tertij eadem partes. Et si secundus primi, & quartus tertij eadem partes sit; continebit primus secundum, & tertius quartum æqualiter, eandemque insuper partẽ, aut partes. 53.B

Idẽ verum est in numeris fractis. pag. 63.B

Si sint quotcunque numeri proportionales; erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedẽtes ad omnes cõsequentes. 56. B

Verum quoque hoc est in numeris fractis. 58. B

Si quatuor numeri proportionales sint; Et vicissim proportionales erunt. 58.B

In fractis idem cernitur. 60. B

Si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumãtur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erũt. pag. 61. B

Idem in numeris fractis verum est. 62.B

Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem sunt; inter se quoque sunt eædem. pag. 62.B

Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum. 63.B

Si numerus duos numeros multipli-

tiplicans fecerit aliquos: geniti ex ipſis eâdem rationem habebunt, quam multiplicati. 66. B

In fractis numeris idem verum eſt. 67. B

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis eandem rationẽ habebunt, quam multiplicantes. 67. B

In fractis idem habet locũ. 67. B

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri eaſdem rationes, quas numeri multiplicantes. 68. B

Si quatuor numeri ſint proportionales; qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis eſt ei, qui ex ſecundo & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis ſit ei, qui ex ſcdo & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri ꝓportionales erũt. 68. B

Verum eſt idem in numeris fractis pag. 69. B

Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis æquales erunt. 69. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 69. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecundũ quam tertij ad quartũ; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior eſt eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et contra; tã in fractis numeris, quã integris. 70. B

Si tres numeti ſint proportionales; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, q̃ a medio efficitur: Et ſi qui ſub extremis cõtinetur, æqualis ſit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt. 71. B

In fractis idem verum eſt. 72. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecũdũ, quã ſecũdi ad tertiũ; maior fiet numerus ex primo in tertiũ, q̃ ex ſcdo in ſe: Et contra, tã in numeris fractis q̃ integris. 72. B

Minimi numeri omniũ eandem cũ eis rationẽ habentiũ, metiuntur æque numeros eandẽ cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem. 73. B

Si tres numeri ſint continue proportionales, & primi duo dicantur in ſua proportione minimi; metietur primus ſecundum, & ſecundus tertium. 74. B

Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarũ proportionũ, ſiue eadẽ ſint, ſiue diuerſa proportiones, metiuntur æque totidẽ alios numeros, q̃ eaſdẽ cũ eis ꝓportiones hẽnt, primus primũ, ſecũdus ſcdm, et tertius tertiũ. etc. 74. B

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bi-

ni

ni ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio: etiã ex æqualitate in eadem ratione erunt. 76. B

Idem verum eſt in numeris fractis pag. 77. B

Si quatuor numeri tam integri, q̃ fracti, proportionales ſint; & conuertendo proportionales erunt. pag. 78. B

Si compoſiti numeri ſiue integri, ſiue fracti, proportionales ſint; & diuiſi proportionales erũt. 78. B

Si diuiſi numeri proportionales ſint ſiue integri, ſiue fracti; & diuiſi proportionales erunt. 79. B

Si compoſiti numeri tam fracti, q̃ integri, proportionales ſint; & per conuerſionem rationis proportionales erunt. 79. B

Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum: habeat autem & quintus ad ſecundum eandem rationem quam ſextus ad quartum, tam in fractis numeris, quam integris: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eãdem habebit rationem, quam tertius cũ ſexto ad quartum. 80. B

Si duo numeri ad duos numeros eãdem habeant rationem; & detracti quidã habeant ad eoſdem eandem, tam in numeris fractis, quam integris: Et reliqui ad eoſdem eandẽ rationem habebunt. 81. B

Si primus ad ſecundum eãdem habeat rationem, quã tertius ad quartum; habeat autem & primus ad quintum eãdem, quam tertius ad ſextum, tam in integris quam fractis numeris: Etiã primus ad compoſitũ ſecundum cum quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cum ſexto. 81. A

Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine aquales ad quẽdam alium eundem, tam in fractis, quam integris numeris: habebunt quoque omnes illi ſimul ad eundem, proportionem, quam hi alij omnes ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcũque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis aquales: habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionẽ, quã idem alius numerus ad hos omnes ſimul. 82. B

Vltima nouem propoſ. lib. 5. a Campano adiecta, qua ratione eodẽ modo demonſtrentur in numeris improportionalibus. 83. B

Maxima menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros minimos eãdem cũ ipſis proportionem habẽtes. pag. 96. B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor

nor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 98. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorũ primi inter ſe ſint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 109. B

Si ſint quotuis numeri non continue proportionales, extremi vero ipſorum ſint inter ſe primi; ipſi minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. 110 B

Si tres numeri ſint minimi continue proportionales; extremi quadrati ſunt: Si autem quatuor cubi, &c. 112. B

Extremi numeri continue proportionalium quotcũque minimorum primi ſunt inter ſe. pag. 114. & 116. B

Duo numeri minimi in ſua proportione metiũtur omnes medios quotcũque minimorum in eadem ratione. 114. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neque alius quiſquam vllum metietur. 123. B

Si ſint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex; neque alius quiſquã vllius multiplex erit. 124. B

Si ſint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecũdum metiatur; & quicunque alius quemlibet ſequentium metietur: Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunq; alius cuiuſlibet ſequentiũ multiplex erit. 125. B

Si ſint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quiſquam nullum a ſecundo metiatur, neq; primus ſecundum metietur. Et ſi primus vel alius quiſquam nullius a ſecundo ſit multiplex; neque primus ſecundi multiplex erit. 126. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur; is etiam metietur ſecundum. pag. 126. B

Si ſint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet a ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquam cuiuslibet a ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit. 127. B

Si inter duos numeros medij cõnua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 127. B

Inter duos numeros dupla, tripla, aut quintupla proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis non poteſt cadere medius

dius numerus proportionalis.
pag. 129. & 130. B
rum neque inter duos numeros ſola vnitate, aut binario differentes. 129. B
quo fit, neque Diapaſon, nec Tonum in Muſicis diuidi poſſe bifariam. 130. B
duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ inter vtrumque eorum, & vnitatẽ medij continua proportione cadẽt. pag. 133. B
i numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquem, & rurſum multiplicet productum, &c. omnes producti ſunt continue proportionales ab vnitate. 132. B
i inter duos numeros & vnitatem cõtinue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrumque ipſorum. & unitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 133. B
i quotquot numeri ſint ab vnitate continue proportionales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & ſic deinceps. 135. B
Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine aequalium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quã habent ſecũdi ab vnitate; quartus vero eiuſdem triplicatam, & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius. 135. B
Si ſint ab aliquo numero eodẽ duo ordines numerorum cõtinue proportionalium, & multitudine aqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam, &c. 136. B
Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, cõtinue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, et aſſumptũ deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 138. B
Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primũ poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos; ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 143. B
Primi autẽ numeri producti ſunt in duplicata vñe proportionis datorũ humerorum: & ſecũdo loco geniti in triplicata. &c. 145. B

Si ab

Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales; minor quicunque maiorē quēlibet metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris. 186. B

In numeris ab vnitate cōtinue proportionalibus, quantū abeſt maior quilibet a minore quotus eū metiente, tantum ab vnitate diſtat numerus, per quem minor maiorem metitur. Item quilibet numerus ſeipſum multiplicans, producit numerum tantū ab eo diſtantem, quantum ipſe ab vnitate abeſt: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantum a maiore diſtans, quantum minor ab vnitate. 187. B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſint; quicunque primorum numerorum ultimum metiūtur, iidem & cum, qui vnitati proximus eſt, metientur. 188. B

Itaque neque vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiēs, metiri poteſt ultimū. 190. B

Si ab unitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſint, qui uero poſt unitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, prēter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus. 191. B.

Si quotcunq; numeri continue proportionales, ſint minimi omniū eādem rationem habentiū cum ipſis; Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorū, qui in eadem rōne ſunt minimi; vel certe ad alterū erit cōpoſitus. 194. B

Si tres numeri ſint deinceps proportionales, & minimi omnium eādem cum ipſis rationem habētium; Duo quilibet ſimul, ad reliquū primi erunt pag. 205. A

Si quotcūque numeri deinceps proportionales, ſint minimi omniū eandem cum illis rationem habentium; ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul collecti, erunt primi. 207. B

Si duo numeri, primi inter ſe fuerint; non erit ut primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam. 209. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; non erit ut primus ad ſecūdum, ita ultimus ad alium quempiam. 209. B

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahātur, aūt a ſecundo, & ultimo æquales ipſi primo; Erit ut ſe cūdi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes. 229. B

Quolibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus,

conuerſo ordine proportionales. pag. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotiẽtibus reſpondentibus cõuerſo ordine proportionales. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continue proportionales. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorũ ad quemlibet eorũ, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdẽ prorſus Quotientes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa facit. 236. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum; procreabuntur alternis ſemper iidẽ primi Quotientes ordine conuerſo. 237. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omnium quotiẽtum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. pag. 238. B

Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quotientum eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens. pag. 238. B

Proportionum compoſitio, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & deſinit. 5. lib. 6. non eſt vere additio proportionum, vt plerique falſo exiſtimant. 273. E

Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant. 275. B

NVMERVS fractus, vide. Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Numeros, quotquot inſſerit quis, qui inter ſe multiplicati datum numerũ gignãt, repire. 749. A

Numero per numerum diuiſo; diuiſus numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuiſionẽ inuenti in numerum diuidendum. 13. B

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, qnoad aſſumpta ſit vnitas : qui principio dati ſunt numeri, primi inter ſe erunt. pag. 32. B

Si duobus numeris inter ſe primis datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: nũquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas. 33. B

Si datis duobus numeris inter ſe cõpoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione : detractio ad vnitatẽ vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 34. B

Numerus duos numeros metiens : metitur quoque maximam eorundem menſuram. pag. 36. B

Numerus tres numeros metiẽs, uel plures ; metitur etiam maximam eorũ menſuram communem. 38. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. 39. B

Si duo numeri mutuo ſe multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt. 64. B

Idem in fractis numeris concludes pag. 65. B

Si duo numeri ſe mutuo multiplicauerint ; procreabitur vnus, idemque numerus. 65. B

Verum hoc etiam eſt in numeris fractis. 66. B

Primi inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eãdem cum eis rationem habentium. 84. B

Minimi numeri omnium eandem eum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. pag. 84. B

Quotcunque numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionũ. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi. 85. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint ; qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit. 86. B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint ; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. pag. 87. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 88. B

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint : Et qui ex eis gignẽtur primi inter ſe erũt. pag. 88. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; & multiplicans uterque ſe ipſum fecerit aliquẽ ; Et geniti ex ipſis primi inter

se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicãtes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semp circa extremos hoc eueniet. 89.B

Si duo numeri primi inter se fuerint; etiam vterque simul ad quemlibet illorũ primus erit. Et si vterque simul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt. 90.B

Numerus, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primus erit. 91.B

Omnis primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. pagina 91.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autẽ ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 92.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit. pag. 93.B

Omnem compositum numerũ, aliquis primus numerus metitur. 93.B

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 94.B

Si duo numeri numerum quẽpiam metiantur: Etiam minimus, quẽ illi metiuntur, eundem metietur. 99.B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eũdem metietur. 101.B

Idem eueniet in pluribus numeris. pag. 102.B

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam. 102.B

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus. pag. 103.B

Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiũtur; minimus est habens partes a numeris metientibus denominatas. 104.B

Datis quotlibet numeris, idem semper numerus procreabitur ex eorũ mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter se permutent. 155.B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur. 193.B

Demonstratio priorum 10. propositionum lib. 2. in numeris. pagina 196.B

Nullus numerus ita diuidi potest, vt productus ex toto in vnam

par

partem, ſit æqualis quadrato alterius partis. 204. & *pag.* 222. B

Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum. 215. B

Si pares numeri quotcũq; componantur; totus par erit. pag. 216. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorũ ſit par, totus par erit. 217. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar, & totus impar erit. 217. B

Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus additus, facit imparem. 218. B

Si a pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. pagina 218. B

Si a pari numero impar detrahatur; & reliquus impar erit. pag. 219. B

Si ab impari numero impar detrahatur; reliquus par erit. pag. 219. B

Si ab impari numero par detrahatur; reliquus impar erit. pag. 220. B

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 220. B

Si par numerus parem multiplicãs fecerit aliquem; factus par erit pag. 220. B

Par in ſe multiplicatus facit parem. 221. B

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; factus impar erit. pag. 221. B

Impar numerus in ſe multiplicatus gignit imparem. 221. B

Numerus impar numerum parem metiens, per numerũ parem eum metitur. 222. B

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 222. B

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur. 223. B

Si impar numerus ad aliquẽ numerum primus ſit; & ad illius duplum primus erit. 224. B

Immo & ad quadruplum, octuplũ, ſedecuplum, & ſic deinceps in proportione dupla. 225. B

Numerorum a binario duplorũ vnuſquiſque parirer par eſt tantum. 225. B

Si numerus dimidiũ habeat imparem; pariter impar eſt tantum. 226. B

Si par numerus neque a binario duplus ſit, neque dimidium habeat imparem; pariter par eſt, & pariter impar. 228. B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. pag. 231. B

VMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

Vllus numerus compoſitus ex integro & fracto, vel numerus fractus in ſe multiplicatus procreat numerum quadratū integrum. pag. 658.A

ani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. 121. B

iorum quadratorum numero rum unus medius eſt proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatā habet latēris ad latus rationem. 140.B

edio proportionali cadente inter duos quadratos; erit is ad vtrumuis quadratorum compoſitus. 141.B

uorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 141.B

uobus mediis proportionalibus cadentibus inter duos cubos; erunt ij, & vterlibet cuborum inter ſe compoſiti. 142.B

quadratus numerus quadratū numerū metiatur; & latus unius metietur latus alteri⁹. Et ſi vnius quadrati latus metiat latus alterius; & quadratus quadratū metietur, *146.B*

cubus numerus cubū numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubū metietur. 147.B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius quadrati non metiatur latus alterius; neq; quadratus quadratum metietur. 148.B

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi unius latus alterius nō metiat; neq; cubus cubum metietur. 149.B

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris multiplex erit. Et ſi latus lateris nō ſit multiplex; neq; quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex. 149.B

Duorum ſimilium planorum numerorum unus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planū duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. pag. 150.B

Medius numerus proportionalis in-

ter

ter duos planos ſimiles, ad vtrũlibet compoſitus eſt. 151.B

Duorum ſimilium ſolidorũ numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationẽ habet lateris homologi ad latus homologum. pag. 152.B

Duo numeri medij proportionales inter duos ſolidos ſimiles, et uterque ſolidorum, ſunt compoſiti inter ſe. 153.B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; ſimiles plani erunt illi numeri. 158.B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; ſimiles ſolidi ſunt illi numeri. 159.B

Si tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit. 161.B

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autẽ ſit cubus; Et quartus cubus erit. 161.B

Si duo numeri rationem habeãt inter ſe, quam ſquadratus ad quadratum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit. 165.B

Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non poteſt in duobus numeris quadratis, pag. 168.B

Duo numeri in quintuplã proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratũ. pag. 166.B

Si duo numeri rationem inter ſe habeant, quã cubus ad cubum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit. 166.B

Proportio cubi ad non cubum, reperiri non poteſt in duobus numeris cubis. 167.B

Similes plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus ad quadratum. 167.B

Numeri proportionem habentes, quam quadratus ad quadratũ, ſimiles plani ſunt. 168.B

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus ad cubum. 168.B

Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, ſimiles ſolidi ſunt. 169.B

Nulli numeri habentes duplã proportionem, vel ſuperparticularẽ, vel ſuperbipartientem: vel duo numeri primi, vel primi inter ſe, quãuis neuter primus ſit, dummodo quadrati nõ ſint, aut cubi; ſimiles plani ſunt, aut ſolidi. 169.B

Si ſint duo numeri plani, aut ſolidi ſimiles, ſitque minor primus; metietur minor maiorem. 170.B

Duo numeri inter ſe primi, quorum minor primus ſit, nõ poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. pag. 171.B

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant

quendam; productus quadratus erit. 173. B
Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes, faciãt quadratum; ſimiles plani erunt. 174. B.
Duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes producunt quadratum. 174. B
Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit. 175. B
Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus, reliquus nõ quadratus erit. 175. B
Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum. 175. B
Si cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 176. B
Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. pag. 177. B
Si cubus numerus numerũ quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 177. B
Cubus non cubum multiplicans facit non cubum. 178. B
Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. pag. 178. B
Si numerus ſeipſum multiplicans faciat cubum; Et ipſe cubus erit. 178. B
Si compoſitus numerus numerũ aliquem multiplicans quempiam faciat; Factus ſolidus pag. 179. B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſint; tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes omnes; quartus autem eſt cubus, & duos intermittentes omnes; ſeptimus vero cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes. 179. B
Si ſint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, minimum in tertio, quinto, ſeptimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, & alijs, qua ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri, quartus, ſeptimus, decimus, &c. ſunt cubi. Omnes vero, qui proxime ſequuntur poſitos in locis, ſexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, qua metitur ſenarius, quales ſunt, ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. ſunt cubi ſimul & quadrati. 181. B
Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales, qui vero poſt vnitatem, ſit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt. pag.

pag. 181.B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps sint proportionales, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. pag. 184.B
Quando in numeris ab vnitate proportionalibus continue, qui post vnitatem, non est cubus simul & quadratus; non necesse est, nullum alium esse quadratum simul & cubum, præter septimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes: quia aliquando etiam quartus, est quadratus simul ac cubus, non existente primo ab vnitate quadrato ac cubo simul. 185.B

OBTVSANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ solidæ non Regulares, ac plana parallela.

Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius, linea vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti. pag. 559.B
Ad quę plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela. 563.B.
Si sint duo plana parallela; recta linea, quæ ad vnum eorum recta est, ad reliquum quoque recta erit. 563.B
Si duæ rectæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano; Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana. 564.B
Si duo plana parallela plano quopiam secentur; communes illorum sectiones sunt parallelæ. 566.B
Quæ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela; vel si conueniunt, vnum planum efficiet. pag. 567.B
Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorũ parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum. 571.B
Si solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana parallelogramma sunt similia, & æqualia. 584.B
Si solidum parallelepipedũ plano secetur per diagonios aduerso-

uerſorum planorum; bifariã ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. 593.B

Solida parallelepipeda ſuper eã dem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineę in ijſdem collocãtur rectis lineis, ſunt inter ſe æqualia. 594.B

Solida parallelepipeda ſuper eã dem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorũ inſiſtentes lineæ non in ijſdẽ collocantur rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. 596.B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſim, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine. 597.B

Solida parallelepipeda ſuper æquales baſes cõſtituta, & in eadẽ altitudine; æqualia ſunt inter ſe. 598.B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſim. 601.B

Hæc quinque, quæ proxime dicta ſunt de parallelepipedis, conueniunt etiam in priſmata, in quibus duo plana oppoſita ſunt triãgula. 608.B

Si ſolidi parallelepipedi eorum, quę ex aduerſo, planorũ latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: Communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariã ſe mutuo ſecabunt. 617.B

In omni prallelepipedo diametri ſe mutuo bifariã diuidunt in vno puncto. 618.B

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum; bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam; per centrum tranſibit ipſum planum. 619.B

Si fuerint duo priſmata planorum triangularium oppoſitorum æqualis altitudinis, quorum hoc quidẽ baſim habeat, triangulum, illud vero, parallelogrammum, duplum autẽ fuerit parallelogrãmũ trianguli; Æqualia erunt ipſa priſmata. 623.

Omnis pyramis triangularem habẽs baſim diuiditur in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis. pagina 630.B

Si fuerint duę pyramides eiuſdẽ altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarũ vtraque diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diuiſa

diuiſa ſit vtraque pyramidū, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idq; ſemper fiat: Erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia. 633.B

Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares, ſunt inter ſe æquales. 637.B

Pyramides triāgulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiuſdē q̄ altitudinis, habent baſes æquales, vel eandē. 637.B

Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes quaſcunque, vel eandem, ſunt inter ſe æquales. 641.B

Pyramides multangulæ æquales, et ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemque habentes altitudinem; baſes habent æquales, vel eandem. 641.B

Omne priſma triāgularē habēs baſim, diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares baſes habētes. 642.B

Priſmata eiuſdē altitudinis ſuper eandē, vel æquales baſes quaſcunq;, inter ſe ſunt æqualia. Et priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandē, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdē altitudinis, baſes habent æquales, vel eandem. 645.B

Quæ de priſmatis dicta ſunt, intelligi debent de ijs, quæ habent plana oppoſita baſibus æqualia & ſimilia. 646.B

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eādem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. 654.B

Atque hoc verum eſt, ſiue coni & cylindri ſint recti, ſiue ſcaleni, licet non ſit idem axis conorū. & cylindrorum. 658.B

Coni & cylindri eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes cōſtituti, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, inter ſe ſunt æquales. 661.B

Coni & cylindri æquales ſuper eandem vel æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et coni ac cylindri æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes ſunt, vel eandem. 661.B

Si in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ rectæ abſcindāt arcus ſimiles; erūt duæ rectæ coniūgētes extrema vnius rectæ cū cētro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cū centro coniungūt. 919.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiuſq; æqua

lia

lia ſunt & latera oppoſita, & anguli oppoſiti, atque ipſum diameter ſecat bifariã. 177. A

Quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, parallelogrammum eſt. 178. A

Quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, parallelogrammum eſt. 179. A

Rhombus, & Rhomboides, parallelogramma ſunt. 179. A

Quadratũ, & altera parte lõgius, parallelogramma ſunt. 179. A

Quadrilaterum diuiſum bifariã ab vna diametro, non ſemper eſt parallelogramum. 179. A

Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. 180. A

Quadrati, & Rhombi angulos ſecat diameter qualibet bifariã. pag. 180. A

Rhomboidis, & altera parte longioris angulos ſecat diameter non bifariam. 181. A

Quadrati, & altera parte longioris diametri ſiũt æquales. 181. A

Rhombi, & Rhomboidis diametri non ſunt æquales. 181. A

Parallelogrammi cuiuſque diametri ſe mutuo ſecant bifariam. pag. 182. A

Quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuo bifariam ſecant, parallelogramum eſt. 182. A

Parallelogrammum bifariam diuiditur a recta, quæ diametrum bifariam ſecat: Et recta diuidens parallelogrammum bifariam, ſecat diametrum quoque bifariam. 183. A

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdẽ parallelis conſtituta ſunt æqualia. 190. A

Parallelogrãma æqualia ſuper eandem baſim, ad eaſdemque partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas. 192. A

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt æqualia. 193. A

Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdẽ partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eiſdem parallelis, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 193. A

Parallelogrammorum inter eaſdẽ parallelas, quod maiorem baſim habet, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 194. A

Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro diuiditur bifariam, parallelogrammum eſt. 201. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes ſunt æquales, ſunt æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadẽ baſi, habent baſes oppoſitas æquales. 204. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quod maiorem habet baſim oppoſitam, ma-

ior-

ius eſt: Et quod maius eſt, habet baſim oppoſitam maiorẽ. 205. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper aqualibus baſibus, quorũ oppoſita baſes ſint aquales, aqualia ſunt. Et trapezia aqualia in eiſdem parallelis, & ſuper aqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas aquales. 205. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, et ſuper aqualibus baſibus, quod maiorem habet oppoſitã baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim oppoſitã. pag. 206. A

Parallelogrammum duplum eſt trianguli eandem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 213. A

Parallelogrammũ aquale eſt triã gulo duplam habenti baſim, & in eiſdem parallelis conſtituto. pag. 214. A

Parallelogrammũ duplum eſt triã guli aqualem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 214. A

Si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, eandemque habuerint baſim, vel aquales, & ad eaſdem partes conſtituta; in eiſdem erunt parallelis: Et ſi parallelogrammum duplũ fuerit triãguli, in eiſdemque parallelis; erunt baſes ęquales, ſi non ſit eadem. 215. A

Si trapezium & triangulum ſuper eadẽ baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij, ſit baſis triãguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli; erit trapezium maius duplo trianguli. 216. A

Trapezium habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt triãguli, quod baſim habet unum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio pũcto lateris oppoſiti. 217. A

In parallelogrammo, complementa circa diametrum ęqualia ſunt. 219. A

Si parallelogrammo diuiſo in quatuor parallelogramma, duo aduerſa ſint aqualia, cõſtarent reliqua duo circa diametrũ. 220. A

Quadrata linearum aqualiũ ſunt aqualia: Et quadratorum ęqualium aquales ſunt linea. 227. A

Quadratum ex diametro quadrati deſcriptum, duplum eſt ipſius quadrati. 235. A

Quadratum diametri figuræ alterę parte lõgioris, aquale eſt duobus quadratis laterum inæqualium. 235. A

Parallelogrammũ, cuius vnus tantum angulus detur rectus, habet omnes angulos rectos. 250. A

Rectangulũ quodcunq; aquale eſt alteri rectangulo ſub diuabus rectis contento, qua duobus lateribus illius ſint aquales. 251. A

Parallelogramma circa diametrum quadrati, ſunt quadrata. pag. 263. A

Qua-

Quadratum cuiusque rectæ quadruplum est quadrati rectæ, cuius illa dupla est. Et si quadratum quadrati sit quadruplum, latus lateris duplum est. 264. & 821. A

Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiens quadrato, æquale est rectangulo sub segmentis per applicationem factis comprehenso. 848. A

PAR, & impar numerus, vide. Numerus par, &c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar, vide. Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus, vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri similes, vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. *Parallelepipedum*, &c.

PROPORTIO Figurarū, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide, Numeri Proportionales in cōmuni.

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Omnes Rationales lineæ non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe ſunt commenſurabiles. pag. 343. B

Spatium Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt. 345. B

Quod ſub Rationalibus longitudine commẽſurabilibus rectis (quomodocunque cõmenſurabiles ſint expoſitę Rationali) cõtinetur rectangulum; Rationale eſt. 345. B

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalẽ, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine cõmenſurabilem. 346. B

Quod ſub Rationalibus potentia ſolum commẽſurabilibus rectis continetur rectangulũ, Irrationale eſt: Et recta ipſum potens, Irrationalis. Vocetur autem Media. 351. B

Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantũ commenſurabiles, Irrationalis eſt, quæ vocatur Media. 352. B

Rectangulum ſub duabus Rõnalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium dici poteſt. 352. B

Non omne rectangulum Medium continetur ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus. 352. B

Quod a media fit, ad Rationalẽ applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quã applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem. 353. B

Omne ſpatium Medium æquale eſt rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. 353. & 355. B

Mediæ commenſurabilis, Media eſt. 355. B

Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt. 356. B

Non omnis Media recta cuilibet Mediæ eſt cõmẽſurabilis. 358. B

Quod ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Mediũ eſt. 358. B

Quod

Quod ſub Medijs potẽtia tantũ cõmenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulũ; vel Rationale eſt, vel Medium. 359.A

Quod ſub Medijs longitudine & potentia incõmenſurabilibus continetur, nec Rationale eſt, nec Medium, ſed Irrationale aliud, quod æquale eſt rectangulo ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento. 361.B

Medium non ſuperat Medium Rationale. 362.B

Rationale ſuperat Rationale Rationali. 364.

Duo ſpatia Irrationalia componere poſſunt ſpatium Rationale. 383.B

Duo ſpatia Rationalia componunt ſemper ſpatium Rationale. pag. 384.B

Si duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 387.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quę Rationale cõtineãt; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima. 389.B

Quod ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum. Irrationale eſt. 390.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium cõtineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs, ſecunda. 390.B

Si duæ rectæ potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis cõtinetur, Medium; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 393.B

Si duæ rectæ potentia incommẽ ſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Mediũ, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Mediũ potens. 394.B

Si duæ rectę potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis cõtinetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 395.B

Sex lineæ Irrationales compoſitæ, vt ea, quæ ex binis nominibus, quæ ex binis Mędijs prima, quæ ex binis Mędijs ſecunda, Maior, Rationale ac Mediũ potens, & bina Media potens, a dvnvm vmtaxat punctum diuiduntur in nomina, ſingulæ. 398.B

Sex

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 406.B

Si ſex ſpatia contineantur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, ac ſexta; Rectæ ea potentes Irrationales ſunt hæ ordine; ex binis Medijs prima, ex binis Medijs ſecunda, Maior, Rationale ac Medium potens, & bina Media potens 417.B

Quadrata ſex harum linearum Irrationalium; eius quæ ex binis nominibus, ex binis Medijs primæ, ex binis Medijs ſecundæ, Maioris, Rationale ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine ſex lineas ex binis nominibus. pag. 426.B

Rectæ longitudine commenſurabiles ſex lineis Irrationalibus prædictis, ſunt quoque eiuſdem ordinis, & nominis Irrationales. 435.B

Idem eueniet, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur. 437.B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens. 443.B

Si duo Media inter ſe incõmenſurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex Medijs ſecunda, vel bina Media potens. 445.B

Ea, quæ ex binis nominibus, & alię quinq; Irrationales eam ſequentes, & inter ſe, & a Media differunt. 447.B

Recta linea media proportionalis ſecundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, per compoſitionem facta, eſt quoque Irrationalis eiuſdem ordinis. pag. 448.B

Si a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti: *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome. 449.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis mediis prima, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. pag. 451.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; *Vel*

si a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. pag. 452.B

Si a recta linea auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidē ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur Medium; (*Vel si a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. 454.B

Si a recta auferatur recta potentia incōmensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat cōpositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; (*Vel si a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. pag. 455.B

Si a recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommēsurabileque compositō ex quadratis ipsarum; (*Vel si a maiori nomine eius, quæ bina Mediæ potest, minus nomen auferatur*) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens. pag. 457.B

Apotomę vna tantum congruit recta Rationalis, potentia solum commensurabilis existēs toti. 459.B

Mediæ Apotomæ primæ vna tā tum congruit recta Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens. pag. 461.B

Mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens. pag. 462.B

Minori vna tantum congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium. pag. 464.B

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciēs compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. pag. 465.B

Ei, quæ cum *Medio Medium* totum facit, vna tantũ cõgruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositũ ex ipsarum quadratis *Medium*, & quod sub ipsis continetur, *Medium*, incommensurabileque composito ex ipsarũ quadratis. 466.B

Sex genera linearum Irrationaliũ, quæ Apotomæ dicuntur. pag. 467.B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & Apotoma prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta; Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine; Apotome, *Mediæ* Apotome prima, *Mediæ* Apotome secunda, *Minor*, ea quæ cum Rationali *Medium* totum efficit, & ea quæ cũ *Medio* Medium totum efficit. pag. 475.B

Quadrata harum sex linearum Irrationalium, Apotomæ, *Mediæ* Apotomæ primæ, *Mediæ* Apotomæ secundæ, Minoris, eius quæ cum Rationali *Medium* totum efficit, & eius, quæ cum *Medio Medium* totum efficit; ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex Apotomas. 485. B

Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, quę per detractionem fiunt, sunt quoque Irrationales eiusdem ordinis, & nominis. 493.B

Idem eueniet, si potentia tantũ eis sint commensurabiles, præterquam in Apotoma. 494.B

Medio a Rationali detracto; Recta, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor. 500.B

Rationali a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali *Medium* totum efficiens. 501.B

Medio a *Medio* detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duę Irrationales fiunt, vel *Mediæ* Apotome secũda, vel cum *Medio* Medium totum efficiens. 503.B

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus. 504.B

Apotome, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & a *Media* differunt. pag. 505.B

Tredecim lineæ Irrationales inter se diuersæ. 506.B

Quadratum Rationalis ad eã, quæ ex binis nominibus, applicatũ, latitudinẽ facit Apotomen, cuius nomina cõmensurabilia sũt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome quę fit, eundem habet ordinem, quem

ea, quæ est ex binis nominibus. 508.B
Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quê ipsa Apotome. 511.B
Si spatium cõtineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commẽsurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta spatium potens, est Rationalis. 513.B
Rationale spatium cõtineri potest sub duabus rectis Irrationalibus. 514.B
A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 515.B
Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; vtrunique segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome. 702.B
Si recta secundum extremam & mediam rationem secetur, sitq; maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum Apotome. 703.B
Si in circulo Rationalem habẽte diametrum, pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. pag. 714.B
Si sphæra diameter fuerit Rationalis; erit tã superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media. 790.B
Triangulum æquialterum, cuius latus est Rationale, superficies Media est. 792.B
Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome. 879.B

RECTA LINEA.

Rectæ duæ lineæ non habent vnum, & idem segmentum commune. pag. 64.A
Rectæ duæ in vno puncto concurrentes, si producantur amba, necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt. 65.A
Rectæ duæ lineæ spatium non comprehendunt. 68.A
Rectæ duæ lineæ duabus eisdem rectis lineis super eadem recta linea æquales, vtraque vtrique, non constituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. pag. 91.A
Recta linea alteri insistens facit cum ea aut duos rectos angulos, aut duobus rectis æquales. 108.A
Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo

lo puncto educta cum illis facit duos angulos non ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 109.A

Recta dua ad vnum punctum coniuncta non faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cũ illis facit duos angulos ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 110.A

Rectæ duæ ſe interſecantes faciunt angulos ad verticẽ oppoſitos æquales. 111.A

Recta dua ſe interſecantes faciunt quatuor angulos quatuor rectis æquales. 112.A

Rectæ quotcunq; ad vnum punctũ conuenientes faciunt omnes angulos quatuor rectis æquales. 112.A

Recta dua facientes cum alia recta in eodem puncto, non ad eaſdem partes, angulos ad verticem æquales, in directum ſunt coniuncta. 113.A

Recta quatuor in eodem puncto facientes binos oppoſitos angulos æquales, conſtituunt duas rectas lineas. 113.A

Recta linea inter ſe æquales ex vno puncto ad rectam lineam plures quam duæ, duci non poſſunt. pag. 116.A

Recta linea ad eandem rectã perpendiculares, plures quam vna, duci non poſſunt. 117.A

Recta linea faciente cum alia angulos inæquales, perpendicularis ex vno illius puncto ad hanc demiſſa cadit ad partes anguli acuti. 118.A

Rectarum omnium ex vno puncto ad aliam rectam demiſſarum, minima eſt perpendicularis. pag. 121.A

Rectæ duæ lineæ ab extremitatibus vniús lateris trianguli interius conſtitutæ, reliquis triãguli duobus lateribus minores quidem ſunt, maiorem vero angulum continent. pag. 126.A

Recta dua linea intra triangulum, quarum vna ab extremo vnius lateris, altera vero non ab extremo ducitur, maiores eſſe poſſunt reliquis trianguli duobus lateribus, minoremque angulum comprehendere. pag. 127.A

Rectę duæ lineę parallelæ ſunt, ſi recta in eas incidens faciat alternos angulos æquales. pag. 142.A

Rectæ duę lineæ parallelę ſunt, ſi recta in eas incidens faciat externum angulum interno ad eaſdem partes oppoſito æqualem; aut internos ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 143.A

Rectas duas lineas concurrere productas, ſi recta in eas incidens faciat duos internos angulos ad eaſdem partes duobus rectis minores: quo modo a Proclo demonſtretur. 147.A

Rectas eaſdem duas concurrere,

qua ratione a nobis demonſtretur. 159. A

Rectarum linearum angulum conſtituentium diſtantia, ſi in infinitum producantur, omnem finitam magnitudinē excedet. pag. 145. & 149. A

Recta linea ſecans vnam duarum parallelarum, producta ſecat & alteram. 146. A

Linea, cuius omnia puncta a recta linea, qua in eodem cum ea plano exiſtit, æqualiter diſtant, recta eſt. 150. A

Recta linea ſuper aliam rectam in tranſuerſum mota, conſtituenſque in ſuo extremo cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet altero ſuo extremo lineam quoque rectam. 152. A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares recta erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; erit perpendicularis ex quouis pũcto huius rectę ad priorem rectam demiſſa, vtrilibet priorum perpendicularsũ æqualis. 154. A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares recta linea erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; efficiet hæc recta cum vtraque perpendiculari angulum rectum. 155. A

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectũ, & cum altera ex eadem parte acutum; duæ illæ rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera vero parte ſemper inter ſe magis diſtabunt. pagina 156. A

Recta incidens in duas parallelas facit & angulos alternos æquales, & externum interno ad eaſdem partes æqualem, & internos duos ad eaſdē partes duobus rectis æquales. 162. A

Rectæ lineæ, eidem parallelę, & inter ſe ſunt parallelæ. pag. 163. A

Rectæ lineæ, eidem parallelæ, ſi inter ſe coeant, conſtituunt vna lineam rectam. 164. A

Rectæ lineæ, quæ parallelas ad eaſdem partes connectunt, æquales ſunt, & parallelæ. pag. 176. A

In figura aquilatera, & aquiangula parium laterũ, oppoſita qualibet duo latera ſunt parallela. pag. 189. A

Recta ſecans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri eſt parallela. 201. A

Si fuerint duæ rectæ, ſeceturq; ipſarum altera in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorũ comprehenduntur, rectangulis. 254. A

Si fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque amba in quotuis segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectanlis. 255. A

Si sint duæ rectæ lineæ, secenturque amba vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenso, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso. 256. A

Si recta linea secta sit vtcunque, vel etiam in plura segmenta: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehendûtur, æqualia sunt ei, quod a tota fit quadrato. 257. A

Si linea recta secetur in quotuis segmenta: quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis. 259. A

Si recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato. pag. 260. A

Si recta linea secta sit vtcunque: Quadratum totius æquale est quadratis segmentorum, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis. pag. 261. A

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam: rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato intermediæ sectionũ, æquale est quadrato ex dimidia descripto. pag. 266. A

Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato rectę compositæ ex dimidia, & adiecta. pag. 269. A

Si recta linea secetur vtcunque: Quadratum totius, & quadratum vnius segmenti, simul æqualia sunt rectangulo sub tota & illo segmento bis contento vna cum quadrato alterius segmenti. 273. A

Si recta linea inæqualiter secetur: Erunt quadrata segmentorum æqualia rectangulo bis sub segmentis comprehenso, vna cum quadrato excessus, quo vna ius segmentum superat minus. pag. 274. A

Si recta linea ſecetur vtcunque; rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum quadrato reliqui ſegmenti, æquale eſt quadrato rectæ compoſitę ex tota, & priore ſegmento. pag. 275. A

VEL.

Si linea recta ſecetur vtcunque; eique in rectum adijciatur alia recta vni ſegmentorum ęqualis: Quadratum totius lineæ compoſitę æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub data linea, & adiecta ſiue dicto ſegmento, vna cum quadrato alterius ſegmenti. pag. 277. A

VEL.

Si linea recta ſecetur bifariam, eique in rectum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compoſitæ lineæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub linea compoſita ex dimidia, & adiecta, & dimidia, vna cum quadrato adiectæ. pagina. 278. A

Si recta linea ſecetur bifariam, & nó bifariam: quadrata ſegmentorum inęqualium, ſimul dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex intermedia ſectionum. 279. A

Si recta linea ſecetur bifariam, adijciatur aũt ei in rectum quępiam recta linea: Quod a tota cum adiecta, & quod ab adiecta, vtraque ſimul quadrata dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex compoſita ex dimidia & adiecta. pag. 283. A

Perpendicularis linea ex puncto aliquo ad rectam quampiã cadens, eſt omnium ex eodem puncto ad eandem rectam cadentium breuiſſima. 321. A

Si recta ſecetur extrema ac media ratione; Iſoſceles, cuius baſis maiori ſegmento ſit æqualis, vtrumuis vero laterum æqualium ſecta linea, habet vtrumque angulorum ad baſim duplũ reliqui. 470. A

Si ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. pag. 351. B

Si ſint duæ rectæ inæquales, erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli ſub alterutra earum, & dimidio alterius contenti. pagina. 381. B

Si recta linea non bifariam ſecetur; erit compoſitum ex quadratis partium maius, quam rectangulum ſub partibus bis comprehẽſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem

rem ſuperat. 392. B
Si recta non bifariam ſecetur, & rurſus nó bifariam in alio puncto; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partiũ minus inæqualium ſimul. 396. B
Rectę lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædã vero in ſublimi. 548. B
Si duæ rectę ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano pag. 549. B
Si duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. 550. B
Si recta linea rectis duabus ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. 551. B
Si recta linea rectis tribus ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illæ tres rectæ in vno ſunt plano. 553. B
Si duæ rectæ eidem plano ad rectos ſint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. pag. 554. B
Si duæ ſint parallelæ rectæ, in quarum veraque ſumpta ſint quælibet pũcta: Illa recta, quę ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. 555. B
Idem euenit, ſi rectæ non ſint parallelæ, in eodem tamen exiſtat plano. 555. A
Si duæ ſint parallelæ rectæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 555. B
Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cũ illa plano; hæ quoq; ſunt inter ſe parallelæ. 557. B
Dato plano, a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes. 562. B
Item neque a puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ perpendiculares demittentur. 562. B
Si recta plano cuipiamad rectos ſit angulos; & omnia, quæ per ipſum, plana eidem plano ad rectos angulos erunt. pag. 570. B
Si duo plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. pag. 572. B
Si planum ad planum rectũ fuerit; & ab aliquo puncto eorũ, quæ in vno ſunt, planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit; In communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis pag. 616. B

RECTANGVLVM paral lelogrammum. vide. Parallelo grammum,&c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram,&c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac ſolidi numeri. vide. Numerus planus,&c.

SOLIDA Figura intra, & extra ſphæram, atq; aliam figuram. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri ſimiles. vide. Numerus planus,&c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum,&c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. Numerus planus,&c.

SPHAERA. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram,&c.

TRAPEZIVM. vide. Parallelogrammum,&c.

TRIANGVLVM.

Triãgula duo habẽt & baſes, & angulos æquales, ipſaq; æqualia ſunt, ſi duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, angulosq; contentos habeant æquales. 82. A

Iſoſcelium triangulorum anguli tam ſupra baſem, quam infra, æquales ſunt. 85. A

Æquilaterum triangulum habet tres angulos æquales. 87. A

Triangulum, cuius duo anguli ſupra baſem æquales ſunt. habet duo latera angulis illis oppoſita æqualia. 88. A

Triangulum, cuius omnes anguli æquales ſunt, æquilaterum eſt. pag. 89. A

Triangulum, cuius duo anguli infra baſem æquales ſunt, Iſoſceles eſt. 90. A

Triangula duo habent vnũ angulum vni angulo æqualem, ſi duo latera vnum ambientia æqualia ſint duobus lateribus alterum ambientibus, & baſis baſi. 94. A

Triangula duo æqualia ſunt, & inter ſe æquiangula, ſi duo latera vnius ſint æqualia duobus lateribus

teribus alterius, & baſis baſi. pag. 96.A
Trianguli externus angulus maior eſt vtrouis interno oppoſito. 114.A
Trianguli duo quilibet anguli duobus rectis minores ſunt. pag. 117.A
Trianguli orthogonij, vel amblygonij duo reliqui anguli ſunt acuti. 118.A
Trianguli æquilateri omnes anguli, & Iſoſcelis duo ſupra baſem, acuti ſunt. 119.A
Triãguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. 119.A
Scalenum habet omnes tres angulos inæquales. 119.A
Trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. 120.A
Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans partiatur baſem inæqualiter; latera circa illum angulum inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, quod maiori ſegmento baſis adiacet. 121.A
Trianguli angulo inæqualibus lateribus comprehenſo bifariam ſecto, recta ſecans diuidit baſim inæqualiter, maiuſque ſegmentũ maiori lateri adiacet. 123.A
Trianguli angulo bifariam ſecto, ſi recta ſecans diuidat baſem bifariam, latera circa eum angulum æqualia ſunt: Et ſi æqualia ſint, recta ſecans angulum bifariam, ſecat & baſim bifariam. 124.A
Trianguli duo latera quomodocunq; ſumpta, reliquo ſunt maiora. 125.A
Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, angulum vero comprehenſum angulo maiorem, habent & baſem baſe maiorem. 132.A
Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, baſem vero baſe maiorem, habent & angulum comprehenſum angulo maiorem. 135.A
Triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, vnumque latus uni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſiue quod uni æqualiũ angulorum ſubtenditur; habent & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum anguli reliquo angulo æqualem. pagina 138.A
Triangula habentia eaſdem conditiones, de quibus proxime dictũ eſt, ſunt inter ſe æqualia. 139.A
In triangulo æquilatero, vel Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidenſque vel angulum, vel baſem bifariã, perpendicularis eſt ad baſem; & ſi quidem angulum bifariã diuidat, ſecabit quoq; baſem bifariam. Si vero baſem ſecet bifariã, diuidet quoq; angulum bifariam.

Et contra, linea perpẽdicularis ad baſem ducta diuidit & baſem, & angulum bifariam. pag. 140. A

Triangulum, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad baſem perpendicularis diuidit vel baſin, vel angulum bifariam, habet duo latera circa illum angulum æqualia: Et ſi quidem baſis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam ſecabitur: ſi vero angulus bifariam ſecetur baſis quoque diuidetur bifariã. pag. 141. A

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod tamen neque æqualibus adiacet angulis, neque vni æqualium angulorum opponitur; nihil colligi poteſt. 166. A

Triãguli externus angulus duobus internis oppoſitis eſt æqualis: Et omnes tres anguli duobus rectis æquales ſunt. pag. 169. B

Trianguli cuiuslibet omnes tres anguli ſimul æquales ſunt tribus angulis ſimul cuiuſcunque alterius trianguli. 174. A

Iſoſcelis duo anguli ſupra baſim ſemirecti ſunt, quando reliquus angulus rectus eſt. 175. A

Æquilateri trianguli quilibet angulus continet duas tertias partes vnius recti, vel vnã tertiam partem duorum rectorũ. 175. A

Æquilaterum triangulum a perpendiculari ex angulo ad baſim ducta diuiditur in duo ſcalena orthogonia, &c. 175. A

Triangula ſuper eadem baſi cõſtituta, & in eiſdẽ parallelis, ſint æqualia. 195. A

Triangula, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique angulum vero contentum angulo maiorem, quo pacto poſſint æqualia eſſe, & inæqualia. pagina 196. A

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 198. A

Triangulum a recta ex angulo ad medium punctum lateris oppoſiti ducta ſecatur bifariam. pag. 199. A

Triangula æqualia ſuper eadẽ baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 200. A

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdẽ partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 202. A

Triangula æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 203. A

Triangulorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem habet baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. pag. 203. A

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur; Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq; alterutrã parallelarum biſariam, diuidit quoq; alterã biſariam.... 207. A

In rectangulis triangulis, quadratum lateris angulo recto oppoſiti, æquale eſt duobus quadratis ſimul reliquorum duorum laterum. 229. A

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia; erunt duo quadrata, reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. 236. A

Si ex angulo a duobus lateribus inæqualibus trianguli cuiuſuis comprehenſo ad baſim perpendicularis ducatur cadens intra triangulum; ſecabitur baſis inæqualiter, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, ſi baſis a perpendiculari ſecatur inæqualiter, erunt duo latera inæqualia, maiusque erit prope maiorem partem baſis. 240. A

In omni triangulo, parallelogramma quacunque duorũ laterum æqualia ſunt parallelogrammo reliqui lateris, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum recta ducta ab angulo, quem duo illa latera cõtinent, ad punctũ, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur. 241. A

Si quadratũ vnius lateris trianguli æquale ſit duobus quadratis reliquorũ duorum laterum; angulus ſub his comprehenſus, rectus erit. 242. B

Triangulorum comparationes varia, & quo modo fiant.... 243. A

In amblygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti quanto maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum. 288. A

In amblygoniis triangulis perpendicularis ex alterutro angulorũ acutorum ad latus oppoſitũ demiſſa, cadit extra triangulum ad partes anguli obtuſi. 289. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis aliorum duorum laterum: angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit. pag. 290. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: demiſſa hac linea ad latus productũ perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus. 290. A

In oxygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo acuto oppoſiti, quanto minus ſit quadra-

dratis aliorum duorum laterum, 296. A
In quolibet triangulo perpendicularis in latus duobus acutis angulis adiacens ex oppoſito angulo demiſſa, cadit intra triangulum. 298. A
Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterum; angulus illi lateri oppoſitus, eſt acutus. 300. A
Si in triangulo quadratum vnius lateris minus ſit quadratis reliquorum duorum laterũ, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub recta linea inter angulum priori lateri oppoſitum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri oppoſito demiſſam: Linea hæc demiſſa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, acutus. 301. A
Si in triangulo a quouis angulo recta linea ducatur ſecans latus oppoſitum bifariam, erunt duo quadrata laterum circa illum angulum, ſimul dupla duorum quadratorum, quorũ vnum ex linea ducta, alterũ vero ex dimidiato latere deſcribitur. 310. A
Triãguli angulus, qui reliquis duobus eſt æqualis, rectus eſt. 450. A
Iſoſcelis trianguli, cuius vterq; angulorum ad baſim duplus eſt reliqui, angulus reliquus continet quintam partem duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti; vterque vero ad baſim continet duas quintas duorum rectorum, vel quatuor quintas vnius recti. 469. A
Si recta ſecetur extrema ac media ratione; Iſoſceles, cuius baſis maiori ſegmento ſit æqualis, vtrumuis uero laterum æqualium data linea ſecta, habet vtrumque angulorum ad baſim duplũ reliqui. 470. A
Si in triangulo rectangulo ab angulo recto demittatur perpendicularis ad baſim; erit rectangulum ſub baſe, & alterutro baſis ſegmento, æquale quadrato lateris illi ſegmento adiacentis; Rectangulum vero ſub baſis ſegmẽtis æquale quadrato perpendicularis; Rectangulum denique ſub baſe, & perpendiculari æquale rectangulo ſub lateribus circa angulum rectum. 380. B
Triangulum omne in vno eſt plano. 549. B
Latus trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt perpẽdicularis ex vno angulo ad baſim demiſſæ. 718 & 789. B
Perpendicularis ex angulo trianguli æquilateri ad baſim oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro triãguli ad eandem baſim deducitur: ſeſquialtera vero ſemidiametri circuli triangulum circũſcribentis. 801. B

Qua-

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionẽ duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris. 821.B

Quadratũ rectæ mediæ proportionalis inter dimidiũ latus trianguli æquilateri, & eius perpendicularem, æquale est ipsi triangulo. 822.B

FINIS.

ERRATORVM POSTERIORVM DECEM Lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata.	Correctiones.
50	4	D, $\frac{7}{22}$.	D, $\frac{14}{22}$.
64	19	a 15. defin.	a 13. septimi.
68	penult.	C, tertium.	in C, tertium.
80	7. a fine	ad F H,	ad E H.
145	12. a fine	D, F, I, M,	C, F, I, M,
147	3. a fine	G, ad D.	C, ad D.
163	11. a fine	I, & C	L, & C,
183	11. a fine	propos. 10. lib. A,	propos. 10. lib. 8. A,
208	7	medios B, G;	medios B, C;
212	10. a fine	64 per 1.	64. per 3.
219	3	A C, ad D E, ita C B,	AC, ad C B, ita D E,
219	4. a fine	C a B;	C B;
327	20	deleatur vox (aliter)	
768	9. a fine	PROBL. 4.	THEOR. 4.
806	5. a fine	æquilater	æqualiter

Emendentur quoque numeri paginarum in folijs I. X. Vu. Iii.

Præterea pro figura paginæ 626. describatur figura paginæ 628.

Restitura sunt omnia.

BAYERISCHE STAATS- BIBLIOTHEK MÜNCHEN

REGESTVM.

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii KK Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii KKK Lll Mmm Nnn Ooo.

a b c d e f.

Omnia sunt integra folia.

ROMAE,
Apud Sanctium, & Soc.
M. D. LXXXIX.