Notes du mont Royal

www.notesdumontroyal.com

Cette œuvre est hébergée sur « *Notes du mont Royal* » dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Google Livres

1971

EVCLIDIS

ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS eſt, ſecundũ quam vnumquodq; eorum, quæ ſunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana verſatur; reſtabat altera ſolidorum. Verum ante ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus diſſerere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeò, vt abſque eis ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neque ſuis numeris abſoluta. Huc accedit, quod abſque eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quam ſolidorum, ſi Geometria Theoria in opus conferatur, atq; vſum, neq; exprimi queãt, neq; intelligi. Nam non rarò pleraque laterum ſunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel, ſi non ſunt Irrationales, longitudine certè inter ſe ſunt incommenſurabiles, atque adeo ſub menſuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio,

atque intelligentia cum numeris eſt implicata, & coniuncta, vt abſque his nullo modo cognoſcantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrina ſuus ordo, ratioq́; conſtaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectioneſque, quantum ea rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more ſuo a principijs, definit initio vnitatem, docetque eam eſſe, ſecundum quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum eſſe dicitur. Nam ſecundum vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere ſolemus. Caterum vnitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus compoſita multitudo.

CVM numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus cõpoſita, manifeſtum eſt, numerum quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes: Ita vt vnitas ſit pars cuiuſuis numeri denominata ab ipſo numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidẽ partes, nimirum in 8. vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur, quarum qualibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

EX his ſequitur, omnes numeros, quotcunque ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cum eos vna eademque menſura, nimirum vnitas, vt dictum eſt, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cum plurima earum menſuram communem non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, vt clariſſime lib. 10. oſtendetur.

PARS

fLL 7771

III.

PARS est numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON est dissimilis hac definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ exposuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc solum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12.18.24.30.60.630. &c. quia ille singulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum singuli hi metiantur, vt perspicuum est.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen sibi sumit, per quem ipse numerum, cuius pars est, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit septima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, sed partes appellari: cuiusmodi est numerus 5. si conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum non metiatur, nisi per suas vnitates, pars ipsius dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum qualibet decimaoctaua pars est numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimaoctauas numeri 18. Ex quibus liquido constat, Euclidem nomine partis intellexisse partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin superuacanea esset hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quacunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis eorum numerorum mensura vtrumque eorum metitur, & eum scilicet, qui partes

dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt si communis duorum numerorum mensura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quinta. Tales partes sunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum mensura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione exprimemus numerum 6. dicemus sex decimas eiusdem numeri 10. cum unitas, eorum communis mensura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD si roges, cur Euclides hoc loco non solum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars est, verum etiã illum, qui partes: non autem idipsum quinto lib. in magnitudinibus præstiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; sed tantũ eam, quæ maiorem metitur, partem. Respondemus, huius rei causam esse, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars est, aut partes, vt propos. 4. huius lib. ostenditur; pars quidem, cum ipsum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter se res habet. Non enim, propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, necessario minor aut pars, aut partes est maioris; cum ea persæpe sint incommensurabiles, vt aperte liber decimus demonstrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam solum in magnitudinibus commensurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, si illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille solum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoq; ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, quẽ minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor est pars, sit vicissim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars est numeri 30. & hic illius multiplex est, &c. Si vero maiorem minor non

non metiatur, nulla modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes aequales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt a pari,

OMNES hi numeri 5. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10. 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parē.

QVIA numerus par est, qui bifariam diuiditur, sit vt quemlibet parem aliquis numerus par, ... sem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem ... numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiusmodi est numerus hic par 32. Metitur enim ipsum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD si numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis est par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2. per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CAETERVM si rectè dua proximæ definitiones expendantur, perspicuum erit, fieri posse, vt vnus idemque numerus par, sit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rursus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, existimantes hoc esse absurdū, vt excluderent numeros eiusmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur esse, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, secundum eos, sit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propositus numerus par 24. neq; pariter par sit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. sed etiam par 8. per imparē 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum est, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed

apte

apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriusque, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Verum tamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum recte explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifeste omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonstratque omnes numeros a binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, esse pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, vt sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarum propositionum, hos postremos numeros, aliosque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici recte pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5. numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

PRIMVS

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neque pariter par., neque pariter impar, neque impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus Primus; quales ſunt omnes iſti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31.&c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura, metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatẽ, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15.8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3.& 5. poſteriorem vero iſti 2.4. tamen nullus iſtorum vtrumque metitur, ſed ſola vnitas vtriuſque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter ſe dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quamquam poſtremi duo habeant communem menſuram hunc numerum 5. Denique vnitas,& quinis numerus, dici poſſunt, licet improprie, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem,& numerũ quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quẽ numerus quiſpiam metitur.

NVMẽ-

NVMERVM, quem prater vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometra compoſitum, cuiuſmodi eſt hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, prater binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos prater vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam menſura communis, metitur, dicuntur inter ſe compoſiti, licet non quilibet ſit compoſitus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem prater vnitatem, numerus quiſpiam metitur, compoſitus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compoſiti inter ſe ſunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis menſura, metitur. Ita etiam inter ſe compoſiti erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & ſe ipſum, & reliquos duos metitur, licet per ſe ſumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicáte vnitates, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 6. multiplicare dicetur numerum 8. quando numerus

numerus 8. sexie fuerit compositus, toties nimirum, quot sunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque viciſſim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6. ſi numerum 6. octies ſumpſerimus, toties ſcilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimuſque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic ſumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel e contrario. Et ſic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus ſit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium eſt vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio ſiue ductus vnius numeri in alium ita quoque deſcribi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, eſt inuētio numeri, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quā alter multiplicantium ad unitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, ſiue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita ſe habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda eſt hac alia docens, quid ſit numerum diuidere numerum: quippe qua neceſſaria omnino ſit ad ea, quæ nos in ijs, quæ ſequuntur, ſumus demonſtraturi.

NVME-

NVMERVS numerū diuidere dicitur, cū numerus acceptus fuerit, qui ſuis unitatibus indicat, quoties diuidēs numer⁹ in diuiſo cōtinetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum ſumptus fuerit numerus 8. qui octo ſuis unitatibus indicat, diuidentem numerum 6. in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoque viciſſim numerus 8. diuidere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6. qui ſex ſuis unitatibus indicat, diuidentem numerum 8. in diuiſo 48. contineri ſexies.

HINC fit, numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad unitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, ut in definitione diximus, procreatus numerus ſuis unitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiſo contineatur; continebit numerus productus unitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad unitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque Diuiſio unius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

DIVISIO numeri per numerum, eſt inuentio numeri, qui ad unitatem habet eandem proportionē, quam numerus diuiſus ad diuidentē.

ITA vides ex diuiſione numeri 48. per 6. procreari numerum 8. qui ita ſe habet ad 1. ut 48. ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48. per 8. produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. ut 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A, per B, procreetur numerus C. A, 48. B, 8. C, 6. D, 1. *Dico numerum A, gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad B, ut C, ad unitatē D: Ex definitione autē diuiſionis, ita quoq; ſe habet A, ad B, ut C, ad unitatē D; perſpicuū eſt, numerū ex C, in B, genitum eſſe numerum A; cum tam ille genitus, q̄ A, eandē proportionē habeat ad B, quā C, ad D, unitatē.*

HÆC

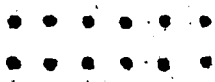
HÆC omnia conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractũ, vel integer fractum, vel fractus integrum (sine fracti adhæreant integris, sive non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuisus ad diuidentem, Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoq; sui, qua est 10. Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productusq; fuerit idem numerus 10: Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10. ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1, Vel ita esse 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. se mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet vnitatis, Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$. sive $\frac{3}{6}$. & semissis numeri $\frac{1}{3}$. sive $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. dividere dicetur numerum 10, cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiso numero 10: ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1. quæ numeri diuisi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$. dividere dicetur $\frac{1}{6}$. quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiso $\frac{1}{6}$. sed tertiam eius partem. Nam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{6}$. liquidò constat tertiam

tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. contineri in $\frac{1}{6}$. Caterum quo pacto fiat diuisio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuisione & fractorum diximus, planiora fient.

XVI.

CVM autem duo numeri mutùo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia secundum sumæ vnitates in longum, & latum dispositas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera sunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, & ipsum cõtineant, non secus, ac recta linea angulum rectũ ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24. productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius sunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum disposita, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus sex vnitates, alterum vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiusque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinita sint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plana apud Geometras: Euclides solum definit planũ quadrangulare rectangulum, qui videlicet sub duobus numeris, ex quorum

quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc solo in hisce libris numerorum disputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, similes sint, & æquales, siue ambitu, siue aream, capacitatemue spectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. qtũ ad ambitũ spectat: tamẽ si aream, seu capacitatem consideres, ab ijsdem multum discrepant. Id quod perspicuum est cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari possit, vt numerus 24. non solum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2. in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. est genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, si bini inter se multiplicentur, gignatur.

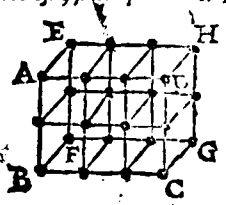
QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes se mutuo, quòd quilibet eorum toties sumptus, quot sunt in altero vnitates, ipsum procreet, liquido constat, omnem planum numerum esse compositum: Quod etiam de numero solido, qui iam: am definietur, dici potest. Verum est, vnitatem aliquando dici posse numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera sunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipsam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo se se multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, solidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo se se multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2.3.4. mutuo sese multiplicantes, producunt

producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. solidus, numeri vero 2. 3. 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum dispositæ referunt figuram quandam solidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimensiones exprimunt tres numeri se mutuo multiplicãtes; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam si primũ multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. basis solidi numeri longa quatuor vnitates, & lata duas: Et si hæc basis in 3. multiplicetur, hoc est, si accipiatur ter, exurget totus numerus solidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At si numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur basis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum solidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro base, quæ bis sumpta faciet numerum eundem solidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perspicua sunt in figura proposita. Si enim basis sit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & BF, latitudo, duas complectitur; superponentur ei duæ aliæ bases similes, & æquales, vt totus numerus solidus contineat 24. vnitates, eiusque altitudo B A, vnitates tres. Similiter, si basis sit A B F E, sex vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo BF, duas continet vnitates; superponentur ei aliæ tres bases similes, & æquales, fietque totus solidus numerus rursum 24. altitudinem B C, habens quatuor vnitatum. Si denique basis sit A B C D, 12. vnitatũ, cuius longitudo BC, quatuor cõtinet, & latitudo AB, tres, superponetur illi alia basis similis, & æqualis EFGH, consistetq; totus numerus solidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinẽ dabũt AE, vel BF. Idem hic numerus solidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de alijs numeris solidis iudicandũ erit.



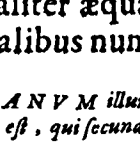
DENIQVE & unitas interdum solidus appellabitur numerus, etsi non proprie, quia eius latera sunt tres unitates, ipsam unitatem ex mutua earum multiplicatione procreãtes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum solidum rectangulum, cuius bases oppositæ sunt parallelæ, & qui continetur sub tribus numeris, omissis infinitis alijs, de quibus Iordanus, ob causam in præcedenti definitione datam; quia scilicet hi prorsus æquales sunt, & similes cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus est, qui æqualiter æqualis. Vel qui sub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis est, hoc est, qui secundum unitates suas in longum & latum dispositus, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini est æqualis, ita vt omnia latera sint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo sub illis continetur, vocat quadratum. Huiusmodi est numerus 25. contentus sub numeris æqualibus 5. & 5. hoc est, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam si eius unitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque unitates, ideoq; æqualiter æqualis erit.

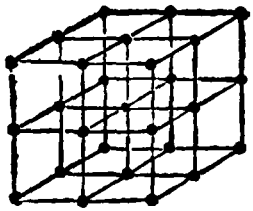


ALTERVTER autem numerorum æqualium, sub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero ab Arithmeticis plerisque appellatur.

CVBVS

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æqualiter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoque illum numerũ vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius unitates in longum, latum, atque profundum diſpoſita cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam ſolidam reductæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cũ primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eędem

partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inaqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inaquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio etenim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atq; imperfecta, comprehẽdit ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicique, & in proportionibus reliquis minoris inaqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, aque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inaqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neq; aque multiplex eſt, neque eadem pars, neque eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, aqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes; vt perſpicuum eſt ex iis, qua docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicuimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti aque multiplex ſit, nimirũ triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Denique 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 11. 5. 22. 10. & 12. 5. 24. 10. ſunt numeri proportionales.*

Nam

Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eãdem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & praterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes; nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, & primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et e contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habẽt. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundẽ ad æquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionẽ, vel ad quos idẽ eandem habet proportionẽ, æquales eſſe. Cũ enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundẽ æqualiter cõtineant, eandemq;

insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus aqualium sit vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos aqualiter continent, eandemque insuper eorum partem, vel partes; perspicuum est, aquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad aquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, sunt illius vel aquemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illum aqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel aque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos aqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, vel partes, secundum hanc eandem definitionem; manifestū est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, aquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Qua omnia perspicua sunt, si recte hac definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, aque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$. & posteriores quoque ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}$. $\frac{38}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}$. $\frac{10}{4}$. atque ita de cæteris.

SIMI-

XXI.

SIMILES plani, & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero sit similis, non necesse est, qualibet duo illius latera quibusuis duobus lateribus huius esse proportionalia; sed satis est, illum habere aliqua duo latera, quæ sint proportionalia quibusdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, si secundum suas unitates in formam planam redigantur, prout latera assumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. similes sunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia sunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eisdem non sint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo, vt duo numeri solidi similes sint, non requiritur, vt quauis tria unius latera proportionalia sint tribus quibuslibet lateribus alterius; sed sufficit, vt tria unius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, si secundum unitates in formam solidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri solidi 192. & 24. sunt similes, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. sunt proportionalia, licet his eisdem nequaquam proportionalia sint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE possunt duo numeri plani, vel solidi, esse similes, licet lateribus aliquibus unius acceptis nullo modo reperiri queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. similes, vt dictum est; & tamen si latera prioris sumantur 3. & 8. nulla reperientur in posteriori illis proportionalia. Sic etiam solidi similes sunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris assumptis 3. 4. 16. nulla reperiantur proportionalia in posteriori.

HÆC porro similitudo planorum, & solidorum reperitur quoque in fractis numeris, siue in integris cum fractis. Nam si sumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tũ duo priores, quàm duo posteriores inter se multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri similes, &c.

Dixi, plerunq;, quia fieri potest, vt interdum integri numeri gignantur. Nam si duo latera sint $\frac{2}{3}$.6. & alia duo $1\frac{1}{3}$. 12. quæ eandem proportionem habeni noncuplam, producent priora duo numerum planum 4. posteriora vero numerum 16.

XXII.

PERFECTVS numerus est, qui suis ipsius partibus est æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes suæ partes simul sumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales sunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiusmodi sunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1.2.3. quæ simul sumptæ conficiũt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ sunt hæ 1.2.4.7.14. quarum summa constituit ipsum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1.2.4.8.16.31.62.124.248. quas omnes in vnam summam collectas componere numerum 496. perspicuum est. Qui autem numeri perfecti sint, & qua via, ac ratione procreentur, (sunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonstrabitur ab Euclide propos. vltima lib. 9.

QVOD si partes omnes aliquotæ alicuius numeri simul acceptæ maiores sint ipso numero, dici solet numerus ille, Abundans: si vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide sumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus esset perfectus, cum suis ipsius partibus sit æqualis, si quilibet numerus minor numeri maioris pars dici potest, siue eum metiatur, siue non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propositis adiungenda mihi videntur ex Campano, aliisq; scriptoribus nonnulla alia, quibus proxime succedent postulata, & communes animi notiones, præsertim ea, quibus in demonstrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

NVME-

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12 producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est unitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero vt propos. 16. huius lib. ostendemus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3. in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. procreari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerũ $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterũ, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirũ quintuplus, dicetur hac cõparatio, habitudoue, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est; & sic de reliquis.

QVÆ

QVÆ cum ita sint, perspicuum est, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus secundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; insuper illius partem, vel easdem partes, vt supra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, siue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadē proportione minores sumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad secundum: Et semper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copiosè explicata est defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi scripsimus, ad numeros huc transferri facile possint, non est, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum com-

ponī

poni dicitur ex propottionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita ſe habere, pluribus verbis a nobis demonſtratum eſt ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illa in quinto libro tradita de alterna ratione, inuerſaque; de compoſitione, diuiſione, & conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur, demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero ſumi poſſe maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri poteſt infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero propoſito maior exhiberi poteſt, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione conſurgit.

AXIO-

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem ęque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

QVORVM idē numerus ęque multiplex eſt, vel æque multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IIII.

QVORVM idem nūmerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quę in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum metitur.

NAM vnitas sumpta toties, quot sunt in numero proposito vnitates, ipsum constituit. Quamobrem ipsum metitur per vnitates, quæ in ipso sunt, hoc est, per ipsummet numerum ex suis vnitatibus constitutum.

VI.

OMNIS numerus se ipsum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus semel sumptus sibi ipsi sit æqualis, manifestum est, omnem numerum seipsum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquē produxerit, metietur multiplicās productum per multiplicatū, multiplicatus autem eundem per multiplicantē.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compositus constituat ipsum C, quot sunt in A, vnitates; perspicuum est B, metiri ipsum C, per A, &

A .... B ...
C .....

eadem ratione A, ipsum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipsum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonstrabitur propos. 16. huius lib.

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente sunt, vnitates, hoc est, per ipsum numerum metientem.

VT

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc eſt, per vnitates, qua in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma precedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C, per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, vel multiplicatum a B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipſum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum producere ipſum C.

A .... B ...
C .....

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

METIATVR numerus A, numeros BC, CD. Dico eundem A. metiri quoq; ex ipſis compoſitum BD. Cum enim A, metiatur ipſos BC, CD; erit tam BC, quam CD, ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo BC, in partes BE, EC, ipſi A, aquales,

æquales, & ipſo C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.

A . . . .
B . . . . E . . . . C . . . . F . . . . G . . . . D

XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipſum C D; erit C D, ipſius B, multiplex. Diuiſo ergo C D, in partes C E, E D, ipſi B, æquales; metietur A, ipſos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E, E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum.

A . . .
B . . . . . .
C . . . . . E . . . . . D

XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & B C, & B D; erit tam B C, quam B D, ipſius A, multiplex, aut certè B D, ipſi A, æqualis erit.

Diuiſo

Diuiſo ergo tam BC, quam BD, in partes ipſi A, æquales; Erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum DC. Quod eſt propoſitum.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio ꝓpoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erũt.

SINT duo numeri propoſiti inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB: Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars ſit ipſius AE, vel certe ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) [a] metietur quoque H, ipſum AE: At H, metitur quoque totum AB. [b] Igitur & reliquum

[a] 11. *prop.*
[b] 12. *prop.*

quum EB, metietur. Metitur autem EB, ipſum CF.[a] Igitur & H, ipſum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur,[b] metietur quoq; reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipſum EG;[c] metietur etiam H, ipſum EG: Metiebatur autem & H, totum EB.[d] Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.
[c] 11. pron.
[d] 12. pron.

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit unitas.

SINT duo numeri inter ſe primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur.

A ..... E .. G — B
C ..... F .. D

Metiatur enim, ſi fieri poteſt, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipſum EG,[e] *metietur quoque GB, ipſum EG. Cum ergo GB, & ſe ipſum metiatur,*[f] *metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum CF.*[g] *Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipſum FD, poſitus ſit metiri;*

[e] 11. pron.
[f] 10. pron.
[g] 11. pron.

a. 1. e. pron. b. 11. pron.

a metietur quoque ipsum CD, ex CF, FD, compositum. At vero CD, metitur ipsum AE. b Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipsum EB, metiatur, vt ostensum est; c metietur & ipsum AB, ex vtroque AE, EB, compositum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipsi erunt inter se compositi. Quod est absurdum, cum ponantur inter se primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus præcedentem metiatur, donec assumpta sit vnitas. Quod est propositum.

A . . . . . E . . G --B
C . . . . . F . . D

c 10. pron.

EQ D E M modo & hoc verum est.

SI propositis duobus numeris inter se compositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem usque non perueniet, sed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur.

d 31. septimi.

N A M si detractio huiusmodi ad vnitatem vsque perueniret, essent propositi numeri inter se primi, d vt Euclides demonstrauit. Quod est absurdum, cum ponantur inter se compositi.

e 1. septimi.

E X his facile dignoscemus, an duo quicunque numeri propositi sint inter se primi, nec ne. Nam detracto semper minore de maiore, alterna quadam detractione; si nunquam reliquus præcedentem metiatur, quoad assumpta sit vnitas; ipsi erunt inter se primi, e vt Euclides demonstrauit: Si vero reliquus aliquis numerus præcedentem metiatur, ipsi erunt inter se compositi, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propositum metiatur, vt perspicuum est ex demonstratione superioris huius scholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur præcedentem numerum FD, ostensum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

2.

DVOBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter se, quorum maximam communem mensuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatque EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidē peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed cum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB; & EB, ipſum CF; [b] metietur quoque FD, ipſum CF; atq; adeo cum & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipſum EB, [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

A ..... E ..... B
C ..... F .. D
G ——

[a] 1. ſeptimi.
[b] 11. pron.
[c] 10. pron.
[d] 11. pron.
[e] 10. pron.

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quam FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, [f] metietur quoque G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum EB: At vero EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum FD; maior minorem.

[f] 11. pron.
[g] 12. pron.
[h] 11. pron.
[i] 12. pron.

Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum AB, CD.

QVOD ſi minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

A ..... B
C ..... D

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.

HOC elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademque ratio eſt de cæteris.

SCHOLIVM.

EX iis quæ dicta ſunt, facile cum Campano experietur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi: Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter unitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

A .....
B .....
C .....

SI vero A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, & ſit eorum maxima menſura communis inuenta D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos, cum habeant numerum D, communem menſuram.

D . . .

7. ſeptimi.

QVOD

QVOD si D, maxima mensura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter se primi, vel non: Si sint inter se primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi, sed inter se primi. Si enim dicantur esse inter se compositi, ita vt habeant numerum communem mensuram, metiatur eiusmodi communis mensura numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, per coroll. huius propos. Quare cum eadem illa mensura metiatur quoque numerum C, non erunt inter se primi numeri C, & D. Quod est contra hypothesim. Si autem C, & D, non sint inter se primi, erunt tres numeri A, B, C, inter se compositi. [a] Inuenta enim numerorū C, & D, maxima mensura communi E; cum E, metiatur ipsum D; D, autem ipsos A, & B; [b] metietur quoque E, eosdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipsum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipsi inter se erunt compositi. Quod est propositum.

A .....
B .....
C .....
D . . .

[a] 2. septimi.
[b] 11. prom.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, sint inter se primi, an potius inter se compositi. Nam si dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter se, quorum maximam mensuram communem oportet reperire. [c] Sit D, maxima mensura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipsum C, perspicuum est D,

esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem, per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B, C, inter se compositi metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B. Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi. [a] Sit eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur. Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipsos A, & B; [b] metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

A .....
B ..... D ....
C ..... E .. F ——

[a] 2. septimi.

[b] 11. prop.

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll. propos 2 huius lib. numerum D, maximam eorum mensuram communē. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem. quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quā E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum. Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum menſuram communem: Eademque in cæteris eſt ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, nanciſcemur inter ſe, maximam eorum communis menſuram inueniendi; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium numerorum: ſi quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis menſura, &c. Reliqua vero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, eſſe aut partem, aut partes ipſius B.

Sint enim primum A, & B, inter ſe primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars eſt numeri B; perſpicuum eſt, numerum A, eſſe partes numeri B, tot nimirum, quot ſunt in A, vnitates.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, non primi inter ſe, ſed inter ſe compoſiti, & metiatur A, ipſum B. Quo poſito, manifeſtum eſt A, partem eſſe numeri B, ex defin. 3. huius lib.

A .....
B .....

SED iam A, non metiatur ipſum B, [a] inuenta autem maxima eorum menſura communis ſit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum ſingulæ ipſi C, ſint æquales. [b] Quia igitur C, pars eſt ipſius B, cum ipſum metiatur; erit quoque AD, pars eiuſdem B: ſimiliter & DE, & EF; Ac propterea totus numerus A, eſt partes numeri B, tot

A .. D .. E .. F
B .....
C ..

[a] 2. ſeptimi.
[b] 3. defin.

videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ eſt numerus D, numeri E F. Dico vtrumque numerum A, & D, ſimul vtriuſq; numeri B C, & E F, ſimul eandem eſſe partem, quæ eſt vel A, ipſius B C, vel D, ipſius E F.

A . . . . . | D . . . .
B ..... G ..... C | E .... H .... F

Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes B G, G C; E H, H F, ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri B C, æqualis multitudini partium numeri E F, propterea quod eadem pars eſt A, ipſius B C, quæ D, ipſius E F. Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, ſimul æquales ipſis B G, & E H, ſimul: Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C, & H F, ſimul æquales: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in B C, vel D, in E F, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, ſimul vtriuſque B C, & E F, ſimul, quæ eſt A, ipſius B C, vel D, ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit; &c. Quod erat oſtendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

*IDEM hoc verum eſt in numeris fractis, eadem*q; *prorſus demonſtratio adhibebitur: ut in hoc exẽplo apparet, vbi numerus A, numeri BC, & numerus D, numeri EF, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A, D, vtriuſque BC, EF, ſimul eadem pars oſtendetur, quæ A, ipſius BC: ſi nimirum BC, EF, diuidantur in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, D, æquales, &c.*

A, $\frac{2}{9}$ D, $\frac{3}{7}$

B, $\frac{3}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C E, $\frac{3}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

QVOD ſi quando contingat, numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Protrahitur enim hac ratione alia fractio pridri æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4. & ſic gignantur fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$. ſecũda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adſunt integra, reuocanda prius erũt una cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus $4\frac{2}{7}$. ſecundus ſit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{32}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{96}{21}$. cuius tres partes æquales ſunt $\frac{32}{21}$. $\frac{32}{21}$. $\frac{32}{21}$. Atque hac in ſequentibus quoque propoſitionibus obſeruanda ſunt, quando fractionibus accommodantur: Et ſemper nomine fractionum intelligendi quoque ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.

EODEM modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas & nnmerus

ſimul

simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

HOC autem perspicue in his appositis exemplis apparet. Eadem enim prorsus est demonstratio.

A.	D.
B. G. C	E. H. F

A.	D...
B. G. C	E... H... F

POSSVMVS etiam hanc propositionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, singuli singulorũ, eadem pars; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, singuli singulorum eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, simul omnium numerorum DE, FG, HI, simul eandem esse partẽ, quæ est A, ipsius DE.

A....	B...	C..
D.... K .... E	F... L... G	H.. M.. I

Divisis enim numeris DE, FG, HI, in partes ipsis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tẽ numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales sunt; si illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, simul æquales ipsis DK, FL, simul: quibus si rursum addantur æquales C, & HM; erunt quoque A, B, C, simul æquales ipsis DK, FL, HM, simul. Simili ratione erunt A, B, C, simul æquales ipsis KE, LG, MI, simul; & sic deinceps, si plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI, æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, simul ipsorum DE, FG, HI, simul, quæ A, ipsius DE.

IDEM sequitur, si loco vnius numerorum A, B, C, sumatur

sumatur vnitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures vnitates, vt de duobus dictum est. Id quod sequentes figura indicant.

A.	*B..*	*C...*	*A.*	*B.*	*C.*
D.K.E.	*F..L..G*	*H...M...I*	*D.K.E*	*F.L.G*	*H.M.I*

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam si quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, singuli singulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium simul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonstrabitur: etiamsi aliqui numerorum sint integri, vel vnitates, vt hic videre licet.

A, 1.	*B*, $\frac{1}{2}$.	*C*, $\frac{3}{4}$.
D, 1 *K*, 1 *E*	*F*, $\frac{1}{2}$ *L*, $\frac{1}{2}$ *G*	*H*, $\frac{3}{4}$ *M*, $\frac{3}{4}$ *I*

THEOREMATI quoque primo quinti lib. simile proponemus, in hunc modum.

SI sint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, singuli singulorum, æque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic est, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonstrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, singuli singulorum. Dico & omnes A, B, C, simul omnium D, E, F, simul tam multiplices esse, quam est A, multiplex ipsius D. Cum enim tam sit multiplex A, ipsius D, quã est B, ipsius E, & C, ipsius F; erit e contrario D, eadem pars ipsius A, quæ E, ipsius B, & F, ipsius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonstrata sunt, erunt D, E, F, simul eadem pars

A	*B*	*C* ....
D	*E* ...	*F* ..

ipsorum

ipſorum A, B, C, ſimul, quæ D, ipſius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, B, C, ſimul, omnium D, E, F, ſimul, quam eſt multiplex A, ipſius D.

SI numeri A, B, C, fracti ſint, & ipſorum D, E, F, fractorum æquemultiplices; quàm multiplex eſt vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonſtratione liquet.

QVOD ſi loco vnius numerorum D, E, F, aſſumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonſtrabitur, vt ex ſequentibus figuris apparet.

A .. B .... C ..... | A .. B .. C ..
D . E .. F ... | D . E . F .

6. THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, ſimul vtriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ eſt AB, ipſius C, vel DE, ipſius F. Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE, numerorũ C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE; propterea quod eædem partes eſt numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars eſt AG, numeri C, eadem eſt DH, numeri F; erit vterque AG, DH, ſimul eadem pars vtriuſque C, F, ſimul, quæ AG, ipſius C, vel DH, ipſius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, ſimul eadem pars vtriuſq; C, F,

A ... G ... B | D ... H .... E
C ..... | F .....

5. ſeptimi.

C, F, simul, quæ GB, ipsius C, vel HE, ipsius F: Et sic deinceps, si plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars est numerorum C, F, simul, quæ pars est AG, ipsius C; quot partes eædem est numerus AB, ipsius C, vel DE, ipsius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, simul, vtriusque numeri C, F, simul, quæ AB, ipsius C, vel DE, ipsius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EADEM hac propositio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonstratione: vt hoc exemplum demonstrat.

A, $\frac{1}{9}$ G, $\frac{1}{9}$ B — C, $\frac{1}{9}$ — D, $\frac{2}{7}$ H, $\frac{2}{7}$ E — F, $\frac{2}{7}$

SED & hanc propositionem ad quotcunque numeros siue integros, siue fractos extendentes, hoc modo amplificabimus.

SI sint quotcunque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eædem partes; Et omnes omnium simul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim est demonstratio, si modo pro quinta propos. assumatur id, quod secundo loco demonstrauimus in scholio præcedenti; vt hic perspicuum est.

A . . K . . B	C . . . L . . . D	E . . . . M . . . . F
G	H	I . . . . .

THEOR. 5. PROPOS. 7.

7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadē pars erit, qualis totus totius.

SIT

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD.

A . . . E . . B
G . . . . C . . . . . F . . . . D

Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC; 5. eptimif. erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD; erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A, $\frac{1}{8}$, E, $\frac{2}{5}$, B
G, $\frac{4}{5}$, C, $\frac{6}{8}$, F, $\frac{4}{5}$, D

LOCVM etiam habet hæc propositio, vnà cum eius demonstratione in numeris fractis; vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris & ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A . E . . . B	A . . . E . B	A . E . B
G . . . . C . . F . . . . . D	G . . C . . . . . F . . D	G . . C . . F . . D

CÆTERVM & ex his theoremati quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tũ in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD

QVOD quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus A B, totius C D, æque multiplex, atque ablatus A E, ablati C F. Dico & reliquum E B, reliqui F D, ita eſſe multiplicem, vt eſt totus A B, totius C D. Cum enim A B, ipſius C D, ſit æque multiplex, atque A E, ipſius C F; erit e contrario totus C D, totius A B, eadem pars, qua ablatus C F, ablati A E. a Quare & reliquus F D, reliqui E B, eadem pars erit, qua totus C D, totius A B; Ac proinde e contrario E B, ita multiplex erit ipſius F D, vt A B, ipſius C D, eſt multiplex.

A . . . . . E . . . . B
C . . . F . . D

a 7. ſeptimi.

QVOD ſi ex C D, ablata fuerit vnitas C F; vel reliqua ſit vnitas F D: vel denique in integris & ablata ſit vnitas C F, & alia reliqua F D; idem demonſtrabitur, vt hac exempla commonſtrant.

A . . . E . . . . . B	A . . . . E . . B	A . . . . E . . . . B
C . F . . D	C . . F . D	C . F . D

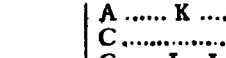
THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus A B, partes eædem numeri C D, quæ ablatus A E, ablati C F. Dico reliquum E B, eaſdem eſſe partes reliqui F D, quæ totus A B, eſt totius C D. Sumpto enim numero G H, æquali ipſi A B; erit G H, eædem partes ipſius C D, quæ A B, eiuſdem C D, hoc eſt, quæ A E, ipſius C F. Diuiſo ergo G H, in partes G I, I H. numeri C D; & A E, in partes A K, K E, numeri C F; erit multitudo partium G I, I H, multitudini partium A K, K E, æqualis, eademque pars tam

A . . . . . K . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . . . D
G . . . . . L . . I . . . . . M . . H

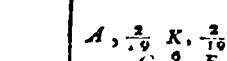
G I,



GI, quam IH, ipsius CD, quæ tam AK, quam KE, ipsius CF. Cum ergo CD, numerus maior sit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipsius CD, maior tam numero AK, quam KE, parte ipsius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipsis AK, KE; erit GL, eadem pars ipsius CF, quæ AK, eiusdem CF, hoc est, quæ GI, ipsius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, sit eadé pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento ostendemus MH, eandem esse partẽ ipsius FD, quæ est totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem est pars ipsius CD, quæ est tam LI, quam MH, ipsius FD; erit vterque GI, IH, simul eędem partes ipsius CD, quę vterque LI, MH, ipsius FD. Est autem GH, eædem partes ipsius CD, quæ AB, eiusdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, simul eædem partes erit ipsius FD, quæ AB, ipsius CD. Quia vero si ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, simul æquales sunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem, quæ vterque LI, MH, simul erat eiusdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

7 septimi.

SCHOLIVM.



IN numeris fractis eadem hac propositio eodem prorsus modo demonstrabitur, vt hic manifestum est.

NON demonstrauit Euclides hanc propositionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non constabat hic, reliquum numerum EB, alicuius numeri eosdem esse partes, quas est numerus AE, numeri CF, ibi vero perfectum erat, reliquum EB, alicuius numeri eandem esse partem, quæ est AE, ipsius CF. Licet enim ipsius EB, duplum

duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, sintque A, BC, minores ipsis D, EF, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales BC, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter se sunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipsius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipsius HF; [a] ac propterea & vterque BG, GC, simul, nimirum BC, secundus vtriusque EH, HF, simul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipsius EH, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertii. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A ....
B .... G C
D .....
E ..... H ..... F

[a] 5. vel 6. septimi.

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{11}$
B, $\frac{3}{11}$ G, $\frac{3}{11}$ C
D, $\frac{7}{22}$
E, $\frac{14}{22}$ H, $\frac{14}{22}$ F

IN numeris fractis propositio hæc, vnà cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

QVOD si loco primi numeri vnitas accipiatur, qua numeri alicuius pars sit, qua alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, qua secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo apparet.

A .
B . G . C
D .....
E ..... H ..... F

10. **THEOR. 8. PROPOS. 10.**

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri E, sintque AB, C, ipsis DE, F, minores, singuli singulis. De his enim etiã intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim, numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipsius C, quæ tam DH, quam HE, ipsius F. [a] Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes AG, ipsius

A..G..B
C.....
D.....H.....E
F.....

[a] 9. septimi.

ipſius DH,& GB,ipſius HE,quæ C, ipſius F. Ac propterea eadem pars erit,vel partes AG,ipſius DH,quæ GB, ipſius HE. [a] Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB,eadem pars erit,aut partes vtriuſque DH, HE, ſimul,nimirum DE,tertij,quæ AG,ipſius DH,hoc eſt,quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat. [a] 5. vel 6. ſeptimi.

SCHOLIVM.

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

$A, \frac{2}{15}$ $G, \frac{2}{15}$ B
$C, \frac{6}{15}$
$D, \frac{3}{10}$ $H, \frac{3}{10}$ E
$F, \frac{6}{10}$

THEOR. 9. PROPOS. 11. 12.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB,ad totum CD, ita ablatus AE,ad ablatum CF.
Dico & reliquum EB,ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB,ad totum CD.

A..... E..... B
C.....F...D

Cum enim ſit, vt AB,ad CD, ita AE,ad CF; [b] erit AB, ipſius CD,& AE, ipſius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB,ipſum CD, & AE,ipſum CF,æqualiter continebit,eandemque inſuper illius partem,vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD,& AE,ipſius CF,æque multiplex. Quo poſito, erit e contrario CD,totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF,ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipſorum CD,CF. [c] Igitur & reliquus FD,reliqui EB, eadem pars erit,quæ totus CD,totius AB; Ac propterea [b] 20. defin. [c] 7. ſeptimi.

e contrario A B, ipsius CD, & EB, ipsius FD, æque multiplex erit. [a] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[a] 20. defin.

SIT deinde AB, ipsius CD, & AE, ipsius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo posito, [b] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; [c] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A.... E..B
C..... F...D

[b] 7. vel 8. septimi.

A.... E..B
C..... F...D

[c] 20. defin.

CONTINEAT tertio AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, eandemque insuper illius partem, vel partes. Quo posito, erit e contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonstrabimus. [d] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eæ-

[d] 5. septimi.

A.....E...B | A..... E.....B
C.... F..D | C..... F.....D

dem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, e contrario AB, ipsum CD, & EB, ipsum FD, æqualiter continebit, eandemque insuper illius partem, vel partes, vt mox ostendemus. [e] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

[e] 20. defin.

QVOD si AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perspicuum est reliquum EB, quoque esse æqualem reliquo FD. Nam si ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, sunt æqualia. Itaque si fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonstrandum.

A.....E ...B
C.....F...D

SCHOLIVM.

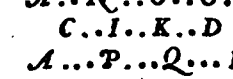
EODEM modo demonstrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò constat in his exemplis, quæ exemplis tertij casus demonstrationis respondent.

$A, \frac{6}{9}\ E\ \frac{3}{10}\ B$ | $A, \frac{14}{21}\ E\ \frac{28}{29}\ B$
$C, \frac{4}{9}\ F\ \frac{2}{10}\ D$ | $C, \frac{2}{21}\ F\ \frac{10}{29}\ D$

LEMMA.

LEMMA.

QVOD autem, si AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque insuper partem illius vel partes; e contrario CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes: Et si CD, ipsius AB, & CF, ipsius AE, sit eadem partes; e contrario AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonstrabimus. Contineat primum AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, nimirum semel, vel bis, vel ter, &c. eandemque insuper partem; GB, quidem ipsius CD, & HE, ipsius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, sint vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Diuisis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipsis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipsius CD, sit eadem pars, quæ HE, ipsius CF. Similiter diuisis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eisdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cum enim AG, AH, vel æquales sint ipsis CD, CF, vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel



certe numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea aque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipſis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipſius AE.

CONTINEAT deinde AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, videlicet ſemel, bis, ter quaterue, &c. eaſdemque inſuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, ſint rurſum vel æquales ipſis CD, CF, vel eorum æquemultiplices. Diuiſis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipſius GB, multitudini partium ipſius HE, æqualis. Simili modo, diuiſis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partium ipſius CD, multitudini partium ipſius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB, eadem pars eſt numeri CD, quæ vnaquæque partium

A . P . . Q . . G . . I . . B
C . . L . . M . . D
A . . . R . . . S . . . H . . . K . . . E
C . . . N . . . O . . . F

partium numeri H E, eſt numeri C F. Denique diuiſis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eiſdem partibus GL, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorum æquemultiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipſius CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium ipſius CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus ſi addantur æquales multitudines partiũ numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partiũ numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atq; adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipſius AE. Quod eſt primo propoſitum.

IAM vero ſit CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, eadem partes. Dico e contrario AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continere, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Diuiſis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter ſe æquales. Item diuiſis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter ſe æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, ſupereritque eadem pars, vel partes ipſius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in A E, *& quæ pars, aut partes ipſius* C F, *ſuperſunt, propter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *&* A B, A E. *Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum* A B, A E, *contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum* C D, C F, *& inſuper in duobus illis numeris ſuperſint partes numerorum* C D, C F, *multitudine æquales. Quam ob rem* A B, *ipſium* C D, *&* A E, *ipſium* C F, *æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quod ſecundo eſt propoſitum.*

13. THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

SINT quotcunq; numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico eſſe quoq; omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, vt eſt A, ad B.

A .... C .. E ...
B ..... D .... F .....

Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem,[a] eadem pars eſt, aut partes A, ipſius B, quæ C, ipſius D, & E, ipſius F; [b] erit quoque vterque A, C, ſimul vtriuſq; B, D, ſimul eadem pars, aut partes, quæ A, ipſius B, vel E, ipſius F. Rurſus quia vterque

[a] *20. defin.* [b] *5. vel 6. ſeptimi.*

vterque A,C, ſimul, tanquam vnus, vtriuſq; B, D, ſimul, tanquam vnius, eadem pars eſt, aut partes, quæ E, ipſius F; [a] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, ſimul, amborum B, D, tanquam vnius, & F, ſimul eadem pars, vel partes, quæ A, ipſius B. [b] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

[a] 5. ſeptimi.

[b] 20. defin.

SINT deinde A, C, E, maiores, & æque multiplices numerorum B, D, F. Quo poſito, erit e contrario B, ipſius A, eadem pars, quę D, ipſius C, & F, ipſius E; Atq; adeo vt prius, [c] erunt omnes B, D, F, ſimul, omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B, ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æque multiplices. [d] Quare eadem eſt proportio omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B. Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem. Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hic apparet, adiuuante tamen ſcholio propoſ. 5. huius lib.

A ..... C ..... E .....
B ..... D ..... F .....

[c] 5. ſeptimi.

[d] 20. defin.

A... C..... E.....	A... C... E.....	A... C... E...
B. D.. F...	D. D. F..	B. D. F.

SINT tertio A, C, E, maiores quam B, D, F, at non multiplices. [e] Quia igitur, propter eandem proportionem, A, ipſum B, & C, ipſum D, & E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem, vel partes; Erit per lemma præcedentis propoſ. B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, [f] erunt omnes B, D, F, ſimul omniũ A, C, E, ſimul eædem partes, quæ B, ipſius A; Atque adeo per idem lemma, e contrario cõtinebunt omnes numeri A, C, E,

A ..... C .... E .....
B ..... D ... F .....

[e] 20. defin.

[f] 6. ſeptimi.

A, C, E, simul, omnes numeros B, D, F, simul, & A, ipsum
[a] 20. defin. B, æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. [a] Quare eadem proportio est omnium A, C, E, simul, ad omnes B, D, F, simul, quæ ipsius A, ad B.

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipsis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, si æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiũt A, C, simul æqua-

A....C...E..... les ipsis B, D, simul: quibus si rur-
B....D...F..... sum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, simul, omnibus B, D, F, simul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, simul ad omnes B, D, F, simul, cum vtrobique sit proportio æqualitatis. Si sint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propositio hæc vera esse eodem modo conuincetur, vt patet, si pro numeris integris fracti assumantur.

14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et vicissim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico vicissim esse A, ad C, vt B, ad D. Nã sint primum A, & C, minores quã B, & D; & A, quoq; minor, quam C.

A...C..... Quo posito, erit, propter eandem
B....D..... proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, eadem pars, vel partes.

[b] 9. vel 10. septimi. [b] Vicissim ergo & A, ipsius C, & B, ipsius D, eadem pars erit, vel partes: [c] Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.

[c] 20. defin. SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo posito, erit, ob eandem proportionem, C, ipsius D, & A, ipsius B, eadem pars, vel partes.

[d] 9. vel 10. septimi. [d] Vicissim ergo & C, ipsius A, & D, ipsius B, eadem pars erit,

erit, vel partes: Atque adeo e contrario, vel A, ipsius C, & B, ipsius D, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. A, ipsum C, & B, ipsum D, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes. [a] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.....C...
B.....D....

[a] 20. d. fin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C. Quo posito, erit ob eádem proportionem, vel A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo e contrario erit B, ipsius A, & D, ipsius C, vel eadem pars, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. [b] Vicissim ergo & B, ipsius D, & A, ipsius C, eadem pars erit, vel partes, [c] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A....C.....
B...D.....

[b] 9. vel 10. septimi.
[c] 20. defin.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo posito, erit C, ipsius D, & A, ipsius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipsum D, & A, ipsum B, æqualiter continebit, eandemque insuper partem, vel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipsius C, & B, ipsius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. eædem partes. [d] Vicissim ergo & D, ipsius B, & C, ipsius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea e contrario vel B, ipsius D, & A, ipsius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propos. 11. huius lib. B, ipsum D, & A, ipsum C, continebit æqualiter, eandemque insuper partem, vel partes. [e] Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc est, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.....C.....
B.....D....

[d] 9. vel 10. septimi.
[e] 20. defin.

SINT quinto A, & C, ipsi B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes sunt; [f] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A...C....
B...D....

[f] 20. defin.

SINT

SINT sexto A, & C, ipsis B, & D, æquales, at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel æque multiplices sunt, vel certe illi hos æqualiter continent, eandemque insuper partem, vel partes; [a] erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A .... C ...
B .... D ...

[a] 20. defin.

SINT septimo ac vltimo A, & C, inter se æquales, siue ij maiores sint quam B, & D, siue minores, siue æquales. [b] Quoniam igitur, ob eandem proportionem, A, ipsius B, & C, ipsius D, æque multiplex est, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe A, ipsum B, & C, ipsum D, æqualiter continet, eandemque insuper partem, vel partes; suntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A, ad æqualem C, ita B, ad æqualem D. Quocirca, si quatuor numeri proportionales sint, & vicissim proportionales erunt. Quod erat demonstrandum.

A ..... C .....
B ... D ...

[b] 20. defin.

SCHOLIVM.

QVOD si pro numeris integris fractos numeros substituas, demonstrabis eodem modo propositionem hanc veram esse in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque est, propositionem hanc non variari, etiamsi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò sumus in hac propositione, & duabus præcedentibus tot casus recensere, eosque demonstrationibus certissimis confirmare, vna cum lemmate propos. 11. vt earū veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim, & nonnulli alij interpretes, illas duntaxat ostendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes sunt consequentium, vt perspicue ex eorundem auctorum demonstrationibus apparet; nisi maiorem numerum minoris numeri partes esse dicamus, vt nonnulli concedunt, inter quos etiam est (quod miror) Federicus Commandinus præstans Geometra: quod est absurdum, & ab Euclidis instituto alienum, cum partes appellarit

larit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius constat, vbi numeros proportionales docuit esse, cum primus secundi, & tertius quarti aque multiplex est, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam si existimaret, maiorem numerum minoris partes esse, satis fuisset dicere, cum primus secundi, & tertius quarti, eadem pars est, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendisset, vt manifestum est: quare reliqua omnia verba definitionis supervacanea essent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 15.

SI sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, sitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque esse vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniã. n. est, vt A, ad B, ita D, ad E; [a] erit vicissim, vt A, ad D, ita B, ad E: Similiterque, eãdem ob causam, cum sit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit vicissim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cũ enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem sit proportioni B, ad E, vt demonstratum est; & ipsæ inter se eædem erunt, vt mox ostendetur.) [b] Ac proinde vicissim, vt A, ad C, ita D, ad F.

A ..... D .....
B ..... E .....
C .... F ...
G ..... H .....

[a] 13. septimi.

[b] 13. septimi.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiã quemadmodũ C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C,

vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij, illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

A. D...
B.. E.....
C... F.....
G. H...

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſint

A ..... B ..... C ....
D ..... E ..... F ...

eædem, quales ſint in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni E, ad E, ſiue numeri ſint integri, ſiue fracti; ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes; vel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel

partes

partes. [a] *Quare numeri* A, D, C, F, *proportionales sunt, vt quidem* A, *ad* D, *ita* C, *ad* F. *Quod est propositum.* [a 20. 7. hui.

HOC idem demonstratum fuit ab Euclide lib. 5. de proportionibus magnitudinum, propos. 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 16.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiso enim numero

BC, in vnitates BG, GH, HC, & numero EF, in partes EI, IK, KF, ipsi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metietúrq; æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipsum EI, atque vnitas GH, ipsum IK, & vnitas HC, ipsum KF: atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius lib. ostendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, simul numerorum EI, IK, KF, simul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc est, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compositus, numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compositum æque metietur. Si

A B C D E I K F

vnitas

vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris, propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, æque metitur, atque numerus D, numerum EF; erit vnitas A, eadem pars numeri BC, qua numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A, eadem pars numeri D, qua numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, æque metietur.

HÆC propoſitio fractis numeris conuenire non poteſt. Nã ſi vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur viciſſim æque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & ſecundus integer quartum fractum;

a 15. defin. *ſed ſolum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam ſecundus ad quartum.*

17. ## THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo numeri mutuo ſe ſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.

E.
A . . . B . . . .
D . . . . . C . . . . . .

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipſum B, faciat C, at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipſum B, multiplicans faciat C; b erit C, ex B, totics compoſitus, quot ſunt in A, vnitates; atque adeo

b 15. defin.

vnitas

vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. [a] Viciſsim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rurſus eodem modo, quia B, multiplicans ipſum A, facit D; [b] erit D, ex A, toties compoſitus, quot ſunt in B, vnitates; atq; adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur; Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerũ C, æque. Aequè igitur numerus A, vtrumq; numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter ſe æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo ſe ſe multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 15. ſeptimi.
[b] 15. defin.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis hæc propoſitio ita demonſtranda eſt. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque eſt D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propoſ. 14. ac proinde æquales inter ſe erunt C, & D. Quod erat oſtendendum.

E.
A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{2}{7}$.
D, $3\frac{1}{7}$. C, $3\frac{1}{7}$.

POTEST hæc eadem propoſitio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipſum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, ſi B, ipſum A, multiplicet. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipſum B, faciat C, oſtendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, æque metiri. At vero, ſi numerus B, ipſum A, multiplicet, [c] etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum æque metitur.

E.
A . . . B . . . .
C . . . . . .

[c] 15. defin.

Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipſum numerus A, æque metitur, atque vnitas E, ipſum B.

QVOD ſi numeri A, & B, ſint fracti ambo, vel vnus eorum, demonſtrabimus idem hoc modo.

E.
A ... B....
C .....

Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At ſi B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod eſt propoſitum.

18. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita D, ad E. Aſſumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compoſitus toties, quoties vnitas F, eſt in A: ſimiliterque toties E, compoſitus erit ex C, quoties eadem vnitas F, eſt in eodem A: Atque adeo B, ipſum D, & C, ipſum E, æque metietur. Quare B, ipſius D, & C, ipſius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c.

F .
A . . .
B . . C . . . .
D..... E .....

[a] 15. defin.
[b] 20. defin.
[c] 13. ſeptimi.

Quod oſtendendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans B, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. tam D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; [a] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cum ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [b] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . B . . . . .
C . . .
D ..... E .....

[a] 16. septimi.

[b] 17. septimi.

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & præcedentem, ad quoscunq; numeros cum Campano accommodabimus, sive numeri omnes sint integri, sive non; hac ratione.

SI numerus qnotcunque numeros multipli cet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico eaſdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E ..... F ..... G .....

habent: hoc eſt, eſſe, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nã cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F; erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.

*17. vel 18. ſeptimi.

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, ſecundo C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C.

in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D, hoc est, vt A, ad B, ita G, ad E. Rursus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propos. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. scripsimus.

[a] 17. septimi.

[b] 18 septimi.

A...
B..
C.....
D....
E.....
F.....
G.....

SED iam sit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipsi F, producto ex B, secundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales esse, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rursus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipsi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rursus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædē sint proportioni G, ad F, eædem inter se erunt, per lemma propos. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 17. septimi.

[d] 18. septimi.

SCHOLIVM.

LVCE clarius est, eandem demonstrationem huius propos. locum habere in numeris fractis, siue omnes fracti sint, siue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiã ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quã illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum consequentem horum, & consequens antecedentem; geniti ex ipsis, æquales inter se erunt.

IT A enim oſtenſum eſt numerum E, qui ſit ex A, antecedente in D, conſequentem, æqualem eſſe numero F, qui procreatur ex B, conſequente in C, antecedentem.

SED & ſequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propoſ. 19. demonſtrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundũ, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, eſſe maiorem eo, qui fit ex B, in C. Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, vt C, ad D; (ſive E, numerus integer ſit, ſive fractus; ſive integer cum fracto: qui quidem reperietur, vt ad propoſ. 19. lib. 9. oſtendemus ſi numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quàm E, ad B: ac proinde A, maior erit, quã E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: [a] *At qui fit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.*

A ..... E .....
B ....
C .....
D .....

[a] 19. ſeptimi.

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (ſive E, numerus ſit integer, ſive fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quàm E, ad B: [b] *At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.*

[b] 19. ſeptimi.

QVOD

QVOD si minor fueris proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero: Et si, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex secundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonstratio erit, si modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc apposito exemplo apparet. Quod tamen sic etiam ostendi potest. Quoniam minor est proportio A, ad B, quàm C, ad D: hoc est, maior est proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, siue ex B, in C, quàm ex D, secundo in A, tertium, siue ex A, in D, vt demonstratum iam est: hoc est, minor numerus fiet ex A, in D, quàm ex B, in C quod est propositum. Deinde si minor numerus fiat ex A, in D, quàm ex B, in C; hoc est, maior ex B, in C, siue ex C, in B, quàm ex A, in D, siue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, secundum, quàm A, tertij ad B, quartum, vt iam est demonstratum: hoc est, minor proportio erit A, ad B, quàm C, ad D. Quod est propositum.

A..... E.....
B....
C...
D..

THEOR. 18. PROPOS. 20.

20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui sub extremis continetur, æqualis est ei, qui a medio efficitur: Et si, qui sub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio describitur; ipsi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem esse ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipsi B, sit æqualis, erit vt

B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita D, ad C; numeruſque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur.

A.....
B.....D.....
C....

[a] 19. ſeptimi.

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 19. ſeptimi.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hac non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium. Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundũ, quam ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſ. liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt habeantur

A.....
B.....D.....
C.....

A....
B.....D.....
C.....

habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

THEOR. 19. PROPOS. 21.

21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri AB, CD, *minimi* in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum AB, ad CD, *ita* E, ad F. Dico AB, CD, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem AB, ipsum maiorem E, at minorem CD, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem.

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . . . .
F . . . . . .

Cum enim sit, vt AB, ad CD, *ita* E, ad F; [a] erit vicissim, vt AB, ad E, *ita* CD, ad F; Atque adeo cum AB, CD, minores sint, quam E, F; [b] erit AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH, HD; Ac propterea AG, ipsius E, & CH, ipsius F, eadem pars. [c] Erit ergo, vt AG, ad E, *ita* CH, ad F; [d] & vicissim, vt AG, ad CH, *ita* E, ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quam AB, CD, eandem habebunt proportionem, quam AB, CD. Quod est absurdum; cum AB, CD, in sua proportione ponantur *minimi*. Nõ ergo AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea AB, ipsum E, & CD, ipsum

[a] 13. *septimi.*
[b] 20. *defin.*
[c] 20. *defin.*
[d] 13. *septimi.*

ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt, ſi quis dicat, tres numeros eſſe continuè proportionales, primoſq; duos eſſe in ſua proportione minimos. Hoc enim poſito, oſtendetur eodem modo, primum metiri ſecundum; & ſecundum, tertium, vt in hoc appoſito exemplo apparet, vbi tertius numerus ſecundo

A ----- G --- B
C ..... H ..... D
E.....
F.....

æqualis eſt. Quamuis autem dari non poſſint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in ſua proportione ſint minimi, niſi primus ſit vnitas; idem tamen demonſtratur in tribus, etiamſi primus ab aduerſario non dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod idcirco dixerim, vt propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primoſq; duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.

PARI ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri AB, CD, EF, minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit

A... K...B C.. L.D E.... M.... F
G..... H..... I.....

proportio AB, ad CD, qua CD, ad EF, ſiue non; ita vt non poſſint

poſſint reperiri alij numeri ipſis AB, CD, EF, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, vt AB, ad CD; & ſecundus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; nimirum proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis AB, CD; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeru non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4 & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G, ad H, vt AB, ad CD; & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, metiri æque. Cum enim ſit vt AB, ad CD, ita G, ad H; [a] erit viciſſim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum ſit vt CD, ad EF, ita H, ad I; [b] erit quoque viciſſim, vt CD, ad H, ita EF, ad I. [c] Quare AB, ipſius G, & CD, ipſius H, & EF, ipſius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuiſis enim, ſi fieri poteſt, AB, CD, EF, in AK, KB; CL, LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AB, quot in CD, & in EF: atque adeo AK, ipſius G, & CL, ipſius H, eadem pars. [d] Erit ergo vt AK, ad G, ita CL, ad H; [e] & viciſſim vt AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL, ad EM, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AB, CD, EF, & minores quam AB, CD, EF. Quod eſt abſurdum, cum hi ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eadem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, æque metietur. Quod eſt propoſitum.

[a] 13. ſeptimi.
[b] 13. ſeptimi.
[c] 20. deſin.
[d] 20. deſin.
[e] 13. ſeptimi.

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionũ, ita vt etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipſos D, E, F, æque

A .. B ..... C ...
D ..... E ..... F .....

A .. B ..... C ...
D .... E ..... F .....

aque metiri. Nam per hanc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, aque metiuntur ipſos D, E; eademque ratione B, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, aque metiatur, ac B, ipſum E; metiuntur aque omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

CÆTERVM hac propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo conuenire poteſt numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus alijs propoſitionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt, eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Alia autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, aquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod ſatis eſt ſemel hoc loco monuiſſe.

19.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim ſit vt A, ad B, ita E, ad F;

erit

[a] erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum sit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, secundo in D, tertium, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

A..... H...
B... D....
C..... E.....
G..... F..

[a] 19. septimi.

[b] 19. septimi.

[c] 19. septimi.

QVOD si fuerint plures numeri, quam tres, ita vt sit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc esse, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam sit ostensum in tribus numeris, esse vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione sumuntur, estque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris ostensa, erit rursus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem ostendemus in quinque numeris, per quatuor, sicut id in quatuor numeris demonstratum fuit per tres, & sic de pluribus. Itaque si fuerint tres numeri, & alij ipsis multitudine æquales, qui bini sumantur, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonstrabitur propositio in numeris fractis, vt constat.

QVONIAM verò Euclides ex illis sex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonstrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris ostendit, nimirum eum, qui a permutata proportione sumitur, propos. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propos. 14. & 22. huius lib. non alienum a nostro instituto esse, breuiter reliquos quatuor modos ostendere in numeris, & alia quædam quinti libri sequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales sint: Et inuersa ratione, siue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, siue inuersa ratione, esse vt B, ad A, ita D, ad C.

A ..... C ...
B .... D ..

Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D, [a] *erit viciſſim A, ad C, vt B, ad D. Rurſus quia eſt B, ad D, vt A, ad C,* [b] *erit viciſſim B, ad A, vt D, ad C. Quod eſt propoſitum.*

[a] 13. ſeptimi.
[b] 13. ſeptimi.

II.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque diuiſi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo eſſe, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim ſit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE;

A ..... C ... B
D .... F .. E

[c] *erit viciſſim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE,* [d] *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc eſt, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* [e] *Viciſſim ergo erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.*

[c] 13. ſeptimi.
[d] 11. ſeptimi.
[e] 13. ſeptimi.

EADEM ratione demonſtrabimus Diuiſionem rationis conuerſam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuiſionem rationis conuerſam eſſe quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Dico per diuiſionem rationis contrariam, eſſe quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim eſt, vt AC, ad AB, ita DF, ad

DE;

DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod est propositum.

III.

SI diuisi numeri proportionales sint: Hi quoque compositi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo esse, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [a] erit vicissim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF; [b] Ac proinde AB, BC, simul ad DE, EF, simul, vt BC, ad EF: [c] Et vicissim AB, BC, simul, hoc est, totus AC, ad BC, vt DE, EF, simul, hoc est, totus DF, ad EF. Quod est propositum.

A..... B...C
D....E..F

[a] 13. septimi. [b] 12. septimi. [c] 13. septimi.

SIMILITER Compositio rationis conuersa, & contraria ostendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis conuersam esse quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim est, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod est propositum.

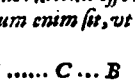
DEINDE sit rursus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compositionem rationis contrariam esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE; Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.

IIII.

SI compositi numeri proportionales sint: Hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

SIT

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuersionem rationis esse quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim sit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] erit vicissim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE; [b] Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF. [c] Vicissim igitur, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod est propositum.



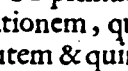
[a] 13. septimi,
[b] 11. septimi.
[c] 13. septimi,

RVRSVS ex his facile demonstrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus ostendit Euclides propos. 24. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad secundum eandem rationem, quam sextus ad quartum: Etiam compositus primus cum quinto ad secundum eandem habebit rationem, quam tertius cum sexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, secundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item vt BG, quintus ad C, secundum, ita EH, sextus ad F, quartum. Dico ita esse AG, compositum ex primo & quinto, ad C, secundum, vt est DH, compositus ex tertio & sexto, ad F, quartum. Cum enim sit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad FH. Quoniam igitur est vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex aequalitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cum rursus sit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH: & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex aequalitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod est propositum.



EODEM

EODEM modo & hoc Theorema ostendemus, quod ad propos. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonstrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad eosdem eandem: Et reliqui ad eosdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquũ GB, esse ad C, vt est reliquus HE, ad F. Cũ enim sit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur est, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex aequalitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rursus sit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex aequalitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod est propositum.

A . . . . . G . . B D . . . . . H . . . E
C . . . . F . . . . . .

ITEM & hoc demonstrabimus.

VII.

SI primus ad secundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad sextum: Etiam primus ad compositum secundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum sexto.

SIT vt primus A, ad secundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintũ CG, ita tertius D, ad sextum FH. Dico ita esse A, primum ad BG, compositũ ex

secundo & quinto, vt est D, tertius ad EH, compositum ex quarto & sexto. Cum enim

A..... D..... sit, vt A, ad BC, ita D, ad
B....C.. G E..... F.... H EF; erit conuertendo, vt BC,
ad A, ita EF, ad D. Quia igitur est vt BC, ad A, ita EF, ad D; & vt A, ad CG, ita D, ad FH; erit ex aqualitate vt BC, ad CG, ita EF, ad FH; & componendo, vt BG, ad CG, ita EH, ad FH; & conuertendo, vt CG, ad BG, ita FH, ad EH. Quoniam ergo est, vt A, ad CG, ita D, ad FH; & vt CG, ad BG, ita FH, ad EH; erit ex aqualitate, vt A, ad BG, ita D, ad EH. Quod est propositum.

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebũt quoque illi omnes simul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi simul ad alium illum eundem. Et si idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos simul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes simul.

HABEANT quotcunque numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K: Hoc est, sit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos simul, hoc est, ipsum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes simul habent, hoc est, quam ipse FI, habet ad K. Cum enim sit, vt AB, primus ad E, secundum, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E,

A .... B ..... C ..... D	F .. G ... H I
E	K .....

ad E, secundum, ita GH, sextus ad K, quartum; erit quoq; vt AC, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FH, tertius cum sexto, ad K, quartum. Rursus quia est, vt AC, primus ad E, secundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, secundum, ita HI, sextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, secundum, ita FI, tertius cum sexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, si plures fuerint.

SED habeant iam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD, proportiones easdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc est, sit vt E, ad AB, ita K, ad FG; & vt E, ad BC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico esse, vt E, ad omnes illos simul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes simul, vtpote ad FI. Cum enim sit, vt E, primus ad AB, secundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, sextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum sexto. Rursus quia est, vt E, primus ad AC, secundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, sextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, secundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum sexto. Atque ita de reliquis, si plures fuerint.

IAM vero, his demonstratis, ostendentur nouem vltima propositiones lib. 5. à Campano adiecta, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonstrata fuere; si pro magnitudinibus intelligantur numeri siue integri, siue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. sunt demonstrati, assumantur iidem modi hoc lib. demonstrati: Vt opus non sit eas hic repetere. Satis enim est, vt dixi, si propositiones illæ quinti lib. in manus sumantur, & magnitudines intelligantur esse numeri, eademq; prorsus demonstrationes adhibeantur.

21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter se numeri, minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter se primi. Dico eos esse minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quã ipsi A, & B. Nam si non sunt minimi, erunt aliqui alij minores ipsis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, si fieri potest, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque ipsis A, & B. Quoniam igitur C, D,

A . . . . . B . . . .
C —— D —
E —

[a] 21. sept. minimi sunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipsum A, & D, ipsum B, æque; atque adeo secundum eundem numerum, qui sit E, ita vt C, toties metiatur ipsum A, & D, ipsum B, quoties vnitas est in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur; [b] 15. sept. metietur & vicissim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rursus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur; [c] 15. sept. metietur quoque vicissim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B; Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis mensura. Quare A, & B, non sunt primi inter se, sed compositi. Quod est absurdum, & contra hypothesin. Non sunt igitur alij numeri ipsis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi sunt. Primi ergo inter se numeri minimi sunt, &c. Quod erat demonstrandum.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter se sunt.

SINT

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cũ ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi mẽſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem menſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At vero ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties cõpoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B; [a] fit, vt D, & E, ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [b] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cum D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

A ..... B .....
C ——
D —— E ——

[a] 9. prom.
[b] 18. ſept.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunq; numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarũ proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari nõ poſſint, quamuis proportio

A ..... B ..... C ....
D ---- E ------ F ---
G ----

duorum in minoribus numeris reperiatur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, nimirum D, E, F, minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æque per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus; atque adeo ſecundum vnum eundem numerum, qui ſit G; ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D, ipſum A, æque metitur; a metietur quoque viciſſim æque vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metietur & ipſum B, & ipſum C, æque, atque vnitas ipſos E, F; Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionis A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.

15. ſept.

I A M vero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communi menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D; & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E; & ipſum C, toties, quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F; fit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores ſint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum. Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.

24. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT

SINT inter se primi A, & B; & ipsum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Si enim non sunt inter se primi B, & C; metiatur eos communi mensura, si fieri potest, numerus D.

Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipsum A; metietur etiam D, ipsum A: Metitur autem & ipsum B. Igitur A, & B, non sunt inter se primi, cum habeant mensuram communem numerum D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Est ergo C, ad B, primus. Eodem modo, si numerus quispiam metiatur ipsum B, erit is ad A, primus. Quapropter si duo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

A ..... B ....
C .... D ——

[a] 11. prom.

THEOR. 24. PROPOS. 26. 25.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundē primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum esse. Si enim C, & D, non sunt inter se primi; sit eorum communis mensura numerus E, metiens ipsum D, toties, quot vnitates sunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compositus facit ipsum D, quot sunt vnitates in F; [b] fit vt F, ipsum E, multiplicans gignat ipsum D; [c] & contra E, ipsum F, multiplicans producat eundem D. Genitus est autem idē D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, secundo in B, tertium; [d] erit vt E, primus ad A, secundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia vero A, & C, primi inter se sunt; & E, ipsum C, ponitur metiri; [e] erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A, cum sint inter se primi, [f] in sua proportione minimi

A ..... B ...
C .....
D .....
E —— F ——

[b] 9. prom.
[c] 6. sept.
[d] 19. sept.
[e] 25. sept.
[f] 13. sept.

[a 21. sept.] erunt. [a] Aeque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habētes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiā primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

26. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquū primus erit.

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt,

A.... B.....
C.....
D ....

[b 26. sept.] [b] erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eādemque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

27. THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A, & B, ad vtrumq; C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit ad

ad C; erit quoque E, ex ipsis genitus, ad eundem C, primus. Rursus cum vterque A, & B, ad D, sit primus, erit eodem modo E, ipsis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus est ad E; erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat ostendendum.

A..... B...
E.....
C... D..
F.....

a 26. sept.

b 26. sept.

THEOR. 27. PROPOS. 29. 28.

SI duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque se ipsum fecerit aliquem; Et geniti ex ipsis primi inter se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter se A, & B, & ex A, in se fiat C; at ex B, in se fiat D. Dico & C, D, primos inter se esse: Et si rursum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque esse inter se primos. Cū enim A, B, sint inter se primi, erit C, factus ex A, in se, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi sint inter se, erit & D, factus ex B, in se, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter se erunt.

A... B..
C.....
E..... F.....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

c 27. sept.

RVRSVS

[a] 27. sept. RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, [a] erit & C, factus ex A, in se, ad B; & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [b] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C; primi sint ad B, [c] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus est; [d] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, [e] erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A; [f] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

A...	B..	
C.....	D....	
E.....	F.....	
G, 81.	H, 16.	
I, 243.	K, 32.	

[b] 28. sept.

[c] 26. sept.

[d] 28. sept.

[e] 26. sept.

[f] 28. sept.

29.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi AB, BC. Dico & vtrumque simul AC, primum esse & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum AC, & ablatum AB; [a] metietur quoque reliquum BC,

[a] 12. prop.

BC. Non igitur primi inter se sunt AB, BC, cũ eos metiatur numerus D. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, ostendemus eundem esse primum.

A.....B.....C
D——

SED iam vterque AB, BC, simul, primus sit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad AB. Dico & AB, BC, inter se primos esse. Si enim non sunt inter se primi, metiatur illos, si fieri potest, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC; [a] metietur quoque D, numerum AC, ex AB, BC, compositum; Ac proinde AC, AB, non sunt inter se primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Sunt igitur AB, BC, inter se primi. Eodemque argumento ostendemus AB, BC, inter se primos esse, si AC, ad BC, primus esse ponatur. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *10. pron.*

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, numerum, qui ex duobus compositus ad unum illorum primus est, ad reliquum quoque primum esse. Si enim AC, ad AB, primus est, erunt AB, BC, inter se primi, per secundam partem huius propos. Igitur & AC, ad BC, primus erit, per primam partem eiusdem. Quod est propositum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. 32.

OMNIS primus nũmerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum esse; hoc est, A, & B, esse inter se primos,

primos, licet B, compositus sit. Si enim A, & B, non sunt inter se primi, metiatur eos, præ
A ..... B ..... ter vnitatem, si fieri potest, com
C — muni mensura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A, ponatur non metiri ipsum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus igitur est A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonstrandum erat.

33. THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri sese mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, se mutuo multiplicantes faciãt C, quam metiatur numerus pri-
A .... B ..... mus D. Dico & D, metiri saltem
C ..... vnũ ipsorum A, & B, si non vtrum-
D... E ..... que metitur. Non metiatur enim D, ipsum A; metiatur vero ipsum C, toties quot sunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus est ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D primo in E quartum, æqualis est numero genito ex A, secundo in B, tertium; [a] erit vt D primus ad A, secũdum, ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia vero primus D, ad A, primus est, cum eum non metiatur; [c] erunt D & A in sua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipsos B, & E; nimirum D, ipsum B, & A, ipsum E; Ac proinde si D, non metitur ipsum A, metietur saltem ipsum B: Eodemque modo si D, non metiatur ipsum B, metietur saltem ipsum A. Si duo ergo numeri se se mutuo

[a] 19. sept.
[b] 31. sept.
[c] 23. sept.
[d] 21. sept.

mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

SI duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad unum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem uel metiatur numerus non primus D, uel certe compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, uel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoque ad unum ipſorũ A, B, compoſitum eſſe: id eſt, uel D, & A; uel D, & B, eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit uterque A, & B, ad D, primus. [a] *Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur uel metiri ipſum C, uel certe ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, uel ad B, cum non ſit primus ad utrumque.*

A ... B ....
C .....
D .....

[a] 26. ſept.

PROBL. 31. PROPOS. 33. 30.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerũ primũ eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si uero cõpoſitus, metiatur eum numerus C, qui uel primus erit, uel cõpoſitus: Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; [b] metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus

[b] 11. pron.

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia vero numerus non diminuitur infinite, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes præcedentes, [a] metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

A ..... B..... C....

[a] 11. pron.

ALITER. Quia numerus A, compositus est; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; [b] metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A .....
B.... C--

[b] 11. pron.

31. THEOR. 32. PROPOS. 34.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si vero compositus; [c] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

A .....

[c] 33. sept.

34. PROBL. 3. PROPOS. 35.

NVMERIS datis quotcunque, reperire

perire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipsis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quascunque proportiones, siue eadem sit proportio A, ad B, quæ B, ad C, siue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eisdē proportionibus sint minimi. Quoniam A, B, C, sunt inter se aut primi, aut compositi: Si primi inter se sunt; erunt ipsi in continuatione suarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propos. 24. huius lib. demonstrauimus. Si vero non sunt inter se primi, [a] inuenta sit maxima eorum communis mensura numerus D, qui metiatur ipsos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos esse in proportionibus numerorum A, B, C. Quòd enim easdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, sic ostendetur. Quoniam D, ipsos A, B, C, metitur per E, F, G; [b] fit, vt D, ipsos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propos. 18. huius lib. ostendimus, easdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A ..... B .... C .....
D ..
E ... F .. G ....
H —— I —— K ——
L ——

[a] 3. sept.

[b] 9. pron.

QVOD vero E, F, G, sint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis, hoc modo perspicuum fiet. Si non sunt minimi, erunt aliqui alij ipsis minores, minimi in eisdem proportionibus. Sint ergo, si fieri potest, minimi H, I, K; qui quoniam ipsos A, B, C, metiūtur æque, vt ad propos. 21. huius lib. ostendimus; metiantur eos per numerum L. Quo posito, [c] fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K, producat numeros A, B, C; [d] & vicissim L, ipsos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A; & H, secundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [e] erit, vt E, primus ad H, secundum, ita L, tertius ad D, quartum: Est autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipsos A, B, C, metiatur; non erit D, ma-

[c] 9. pron.

[d] 8. pron.

[e] 19. sept.

D, maxima mensura communis numerorum A, B, C. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, sed ipsi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

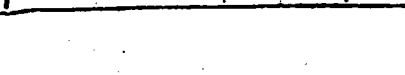
HINC fit, maximam mensuram quotlibet numerorum, metiri ipsos per numeros, qui minimi sunt omnium eandem proportionem cum ipsis habentium. Ostensum enim est, numeros E, F, G, per quos D, maxima mensura numerorum A, B, C, ipsos A, B, C, metitur, minimos esse in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque est in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili uia comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continue proportionales. Vt si proponantur continue proportionales A, B, C, D, E, sine illi sint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, sine non; reperiemus duos in eadem proportione minimos, si per hoc problema sumamus F, & G, minimos in proportione duorum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis mensura eos metitur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum



E, F, G, per hanc propos. inuentorum esse unitatem; quando scilicet

scilicet D, maxima mensura vni ipsorum A, B, C, aequalis est, vt ex his exemplis apparet. Manifestum est autem, tunc inuentos E, F, G, esse minimos in continuatione suarum proportionum, cum minor numerus dari non possit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter se primi, seseque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, esse minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perspicuum est. Nam cum producatur C ex A, in B, vel ex B, in A; [a] metietur A, ipsum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipsum C, metitur. Quod autem C, sit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, sic demonstrabimus. Si C, non est minimus; metiantur, si fieri potest, A, & B, alium numerum D, ipso C, minorem; metiaturque A, ipsum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo posito, [b] tam ex A, in E, quam ex B, in F, & è contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, secundo in F, tertium; [c] erit, vt A, primus ad B, secundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter se,) [d] & ob id, in sua proportione minimi) [e] æque metientur ipsos F, & E; nimirum A, ipsum F, & B, ipsum E. Quoniam vero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [f] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipsum E, vt ostensum est; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod est absurdum. Non igitur A, & B,

A .... B .....
C .....
D
E —— F —

[a] 7. pron.
[b] 9. pron.
[c] 19. sept.
[d] 23. sept.
[e] 21. sept.
[f] 17. sept.

metientur alium numerum minorem ipſo C; atq; adeo C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. [a] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, nimirum A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, [b] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cũ tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus a C, ipſum E, producat; [c] metietur tam A, quam B, ipſum E. Quod vero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, [d] fiet F, tam ex A, in G, quã ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium; [e] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G; [f] metientur ipſos H, & G, æque; nimirum C, ipſum H; & D, ipſum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; [g] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipſo E, minorem; atque adeo E, minimus eſt omnium, quos metiuntur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

A.... B.....
C.. D...
E.....
F———
G—— H—

[a] 35. ſept.
[b] 19. ſept.
[c] 7. pron.
[d] 9. pron.
[e] 19. ſept.
[f] 21. ſept.
[g] 17. ſept.

COROLLARIVM.

HINC ſit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci numerum minimum, quem illi metian-

metiantur. Nam propositis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonstratum est, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, esse minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Campanum est propositio 35. huius libri septimi; Et sequens propositio apud eundem, corollarium est propositionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD, sitque alius numerus E, minimus, quem ijdem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipsum CD, metiri. Si enim E, ipsum CD, non metitur; ablato E, ex CD, quoties potest auferri, relinquetur numerus quidã minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties potest, numerum, si fieri potest, FD, minorem se, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quam B, ipsum E, metitur, & E, ipsum CF; [a] metietur quoque tam A, quam B, ipsum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; [b] metientur & reliquum FD. Est autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus est numerus, quem A, & B, metiuntur.

A . . B . . .
C . . . . . F — D
E . . . . . .

[a] 11. *pron.*

[b] 12. *pron.*

Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare E, ipſum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerũ quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerũ.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [a] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipſum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipſum D, metiuntur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque eſſe, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt A, B, C, alium numerum E, ipſo D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo, cum A, & & B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem iidem A, & B, metiuntur; [b] metietur quoque D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum.

A... B....C.....
D.....
E ---------

[a] 36. ſept.

[b] 37. ſept.

SED iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. [c] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita oſtendetur. Cũ A, & B, metiantur ipſum D, & D, ipſum E; [d] metientur quoque A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quod autem E ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt,

A.. B... C....
D.....
E.....
F---------

[c] 36. ſept.

[d] 11. prop.

poteſt, A, B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipſum F, metiuntur; [a] metietur quoque eundem F, numerus D, nimirum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipſum F, minorem, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D, metiantur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo cum C, & D, metiantur ipſum F; [b] metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipſo E, minorem metientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

[a] 37. ſept.

[b] 37. ſept.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonſtrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum DE, ſitque F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum DE, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem DG, relinquatque numerum GE, ſe minorem.

A .. B ... C ....
D ..... G —— E
F .....

Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur; & F, ipſum DG; [c] metientur quoque A, B, C, eundem DG; Ac proinde, cum & totum DE, ponantur metiri; [d] metientur & reliquũ GE,

[c] 11. prop.

[d] 12. prop.

G E, ipso F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Metitur igitur F, ipsum D E.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illis minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum est.

37. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam a B, denominatam. Metiatur enim B, ipsum A, toties, quot vnitates sunt in numero C. Quia igitur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æque metitur; [a] & vicissim vnitas æque ipsum B, & C, ipsum A, metietur; atque adeo eadem pars erit vnitas ipsius B, quæ C, ipsius A: Est autem vnitas pars ipsius B, denominata ab ipso B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipsius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quispiam numerus metiatur, &c. Quod ostendendum erat.

A . . . . . B
B . . . . C . . .

[a] 15. sept.

THEOR.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nam cum B, pars denominetur a C; sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æque. Vicissim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . .
B . . . C . . . . .

[a] 15. sept.

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F; [b] minimusq; quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G, metiantur, [c] habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod vero G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest,

D . . A. *Secunda*
E . . . B, *Tertia*
F . . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H———

[b] 38. sept.

[c] 39. sept.

D.. A, *Secunda*
E... B, *Tertia*
F.... C, *Quarta*
G.....
H ———

H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [a] metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominati; Atque adeo, cum H, minor ſit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, ſed ipſe G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum ſit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

[a] 40. ſept.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipſum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipſius G, denominatæ ſcilicet à

A, Secunda D.. I..... D, E, F. Cum enim D,
B, Tertia E... K.... E, F, ipſum G, metiantur per I, K, L; metietur aque vnitas ipſos I, K, L, & numeri D, E, F, ipſum G. [b] *Viciſſim ergo metietur quoque vnitas ipſos D, E, F, & numeri I, K, L, ipſum G; atque adeo vnitas ipſorum D, E, F, eadem pars erit, qua numeri I, K, L, ipſius G. Cum ergo vnitas ſit pars ipſorum D, E, F, ab ipſis denominata; erunt & I, K, L, ipſius G, partes denominatæ à D, E, F.*

[b] 15. ſept.

C, Quarta F....L...
G.....

EX his autem ſequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, eſſe minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Oſtenſum enim eſt, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum eſſe, qui habeat partes A, B, C, cuiuſmodi ſunt I, K, L, a metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, ſi inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur

habebitur secundus numerus post minimum, tertius, quartus, &c. easdem partes continens. Inuento enim G, minimo, qui habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; sit illius duplus, numerus H; triplus vero I, &c. Dico H, esse secundum numerum, qui easdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt neque inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens easdem partes, sed ipsi soli H, I, & cæteri multiplices ipsius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas scilicet à D, E, F, ita ostendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur

G..... A, D..
H..... B, E...
I..... C, F....
K ---------- M ------ L
N ---------- P ------ O

ipsum G, per constructionem; & G, ipsos H, I, & reliquos multiplices ipsius G; [a] metientur quoque D, E, F, eosdem H, I, & reliquos multiplices ipsius G. [b] Quare H, I, & reliqui numeri ipsius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C. [a] 11. pron. [b] 39. sept.

QVOD autem H, duplus ipsius G, minimi, sit secundus eas partes habens, hoc modo demonstrabimus. Si H, non est secundus, sit, si fieri potest, alius K L, ipso prior, qui nimirum maior sit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipsius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipso G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; [c] metientur ipsum numeri D, E, F, a partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propos. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, sibi æqualem. [d] Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, secundus est huiusmodi partes habens. [c] 40. sept. [d] 12. pron.

NON

NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet NO, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex NO, relinquatur PO, minor ipſo G. Quia igitur NO, partes habet A, B, C, [a] metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem NO, per 37. coroll. propoſ. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſum NP, ablatum ipſi H, duplo aequalem. [b] Igitur & reliquum PO, idem G, metietur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, cadens partes habet A, B, C, datas; Ac propterea I, tertius eſt illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

[a] 40. ſept.

[b] 12. pron.

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datae partes A, B, C; inueniendus ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; fiatq; G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quaeritur. Quod enim habeat datas partes ordine praedicto, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H; erit G, toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt

A, Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . . . .
H . . . . . .
. Vnitas
I ----------
K ----------
L ----------
M ----

est ipsius H, ab eodem D, denominata; Atque adeo H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipsius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipsius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipso F, denominatam, perspicuum est B, partem ipsius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, sit minimus eas partes hoc ordine cõtinens, hac ratione ostendetur. Si enim non est minimus, habeat minor numerus I, si fieri potest, easdem partes eodem ordine, ita vt K, sit ipsius I, pars A, à numero D, denominata; & L, ipsius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipsius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars est ipsius I, à D, denominata; erit K, totties in I, quoties vnitas in D; [a] Atq; adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaq; cum D, ipsos G, & K, multiplicans faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur est, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propos. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autẽ H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod est absurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine predicto, sed ipse H, minimus est. Quod est propositum.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

[a] 15. defin.

[b] 17. sept.

Si vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorsus est via tenenda ac demonstratio. Vt si numeri 2. 3. 4. 5. 6. sint denominatores partium, sient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hac partem a 3. denominatam; & hac aliam a 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifestum est.

QVOD

QVOD si numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet secundum, tertium, quartum, &c. qui eadem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit, ipsius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipsius H. Eademque est ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorum primi inter se fuerint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter se primi sint. Dico A, B, C, D, minimos esse omnium eandem cum eis proportionem habêtium. Si enim non sunt minimi, erunt alij ipsis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipsis minores in eadem ratione E, F, G, H, si fieri potest. Quoniam igitur quotcunq; numeri sunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini sumuntur, & in eadem ratione, a erit, ex æquali-

A ..... E ---
B ..... F -----
C ..... G ----------
D ..... H ----------

a 14. sept.

æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: [a] Sunt autem A, & D, in sua proportione minimi, quod inter se primi esse ponantur. [b] Igitur tam A, ipsum E, quàm D, ipsum H, æque metietur, maior minorem. Quod est absurdum. Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D, sunt in eadem cum eis ratione, sed ipsimet minimi sunt; Ac propterea, si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 23. sept.

[b] 21. sept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex demonstratione, numeros A, B, C, D, esse minimos in continuatione suarum proportionum, si extremi A, & D, inter se primi sint, sive A, B, C, D, sint continue proportionales, vt vult Euclides, sive non. Vt hoc exemplum ostendit, in quo proportiones omnes diuersa sunt, quemadmodum in sui; erigri eadem semper proportio reperitur.

A .....
B .....
C .....
D .....

E ---
F -----
G ------
H --------

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iusserit quispiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, seipsum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans seipsum faciat E. Dico C, D, E, esse tres minimos in proportione A, ad B; hoc est, esse vt C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales sint in data proportione A, ad B, sic ostendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; [c] erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rursus cum ex B, in A, & B, fiant D, &

[c] 17. sept.

D, & E; [a] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in se ipsos; [b] sunt autem A, & B, inter se primi, quòd minimi sint in sua proportione; [c] Erunt & C, E, extremi, inter se primi. [d] Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A.. B...
C.... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

[a] 17. sept.
[b] 24. sept.
[c] 29. sept.
[d] 1. octaui.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, easdem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; [e] erit quoque, vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F, G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [f] Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in E; [g] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [h] Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

[e] 18. sept.
[f] 24. sept.
[g] 29. sept.
[h] 1. octaui.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c.

Quod faciendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo peracto, [a] numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex ijs, qua ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius.

[a] 18. sept.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A..	B..
C....	D..... E.....
F, 8.	G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16.	L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione

cationetrium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri aliy ſub alijs denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari. Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verũ quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt ijs, quiper hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hãc propoſ. Si vero dati, maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi. quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales:

A --- B ----- C ------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

ſumptiſq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atq; ita, cum ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eadẽq; ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erũt. Eadẽq; ratio eſt de quatuor, aut pluribus.

Quòd ſi A, dicatur minor, quàm F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt. quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si vero A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non ſunt. quod eſt contra hypotheſim. Cum ergo A, minor non ſit, aut maior, quàm F; aqualis omnino erit; ideoq; vt oſtenſum eſt, & B, C, ipſis G, H, aquales erunt. Quod eſt propoſitũ.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum fuit de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonſtratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones a numero A, horum vero a B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. fit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium ſint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris data rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extre-

extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, esse vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, esse vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem si quis optet inuenire quoscunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis est, quippe qua ab vnitate incipias) continue proportionales; id facile hac via consequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, sumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator sit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum, qui si per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur secundus, & si hic rursum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & sic deinceps. Vt si quis desideret octo minimos numeros in proportione sesquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in sesquialtera proportione, sumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, qua denominatur a 2. hoc modo 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Nam horum vltimus 128. erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi sint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187. si maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis est ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicat, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices secundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione fit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia desiderantur octo numeri minimi in proportione sesquialtera, sumendi sunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui nimirum denominantur a denominatore partis secundæ, seu dimidiæ, cuius mentio fit in proportione sesquialtera, hoc est, a 2. Quod si optentur quinque numeri minimi in proportione sesquiquin-

ta, ſumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. eſt primus quinque numerorum in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet; 625. 750 900. 1080. 1296. Atque ita de cateris. Porro hac arte non poſſunt inueniri (quod mirum videri poſſit) plures numeri continue proportionales, quam propoſiti ſunt. Nequit enim poſt 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neq; in priori exemplo poſt 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialterum habeat. Ratio autem huius rei eſt, quod extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, vt ex demonſtratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non poſſit eſſe ad alium quempiam numerorum, vt primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

3. THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandē cum eis rationem habentium; Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter ſe primos eſſe. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K, L,

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

M, N, æqualis ſit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Id quod nos Geometrice demon

demonſtrauimus ad finem coroll. 1. ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll. 2. propoſ. præcedentis K, & N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt A, & D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & verbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, inueniri non poſſent, ex precedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immo ſi diuerſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, continuati in ſuis proportionibus diuerſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compoſiti ſint inter ſe. Itaque hoc Theorema primi eſt conuerſum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter ſe ſunt primi, minimi ſunt in ſua proportione, vt conſtat ex 1. theor. Et viciſſim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, velut hic demonſtratum eſt. At vero primum theorema, prout ſpectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, vt ex ſcholio propoſ. 1. huius lib. liquet; Tamen non ſemper e contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, vt manifeſtum eſt in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. 4.

RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus.

a 36. sept. a Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum F, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H.

A, 6. B, 5. C, 4 D, 3.
H; 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I—— K —— L ——

b 9. prop. c 18. sept. Quo posito, b A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. c Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli, in eisdem rationibus: sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione;

d 21. sept. d ipsi æque metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur;

e 37. sept. e metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sint quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus.

f 36. sept. f Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ip-

E, ipſum I, metitur, toties F, metiatur ipſum K. Dico H, G, I, K, minimos eſſe in datis rationibus. Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B, ipſos H, & G, æque metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quòd tam C, & D, ipſos G, & I, quàm E, & F, ipſos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; [a] ipſi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metiantur; [b] metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,5. F,7.
H,24. G,20. I,15. K,21.
L—— M—— N—— O——

[a] 21. ſept.

[b] 37. ſept.

SED iam E, non metiatur ipſum I. [c] Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipſum K, metitur, toties quoque G, ipſum L; & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M, L, K, N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipſos M, L, K, æque metiantur; erit vt ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Eſt autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D; quòd & A, B, ipſos H, G; & C, D, ipſos G, I, metiantur æque. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L; & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7.
H,24. G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30. N,105.
O—— P—— Q—— R——

[c] 36. ſept.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. H,24. G,20. I,15. M,48. L,40. K,30. N,105. O---- P---- Q---- R---- est K, ad N, cum E, F, æque ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namque non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt; [a] ipsi æque metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atq; adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur; [b] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia vero ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque idcirco, cum metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [c] quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q; [d] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

[a] 21. sept.

[b] 37. sept.

[c] 21. sept.

[d] 37. sept.

QVOD si quatuor rationes datæ fuerint; inueniendi prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, vt nuper cũ tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,3. T,2. M,48. L,50. K,30. N,105. O,70.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,9. T,2.
M,48. L,40. K,30. N,105.
R,144. Q.120. P,90. O,315. V,70.

tionales in datis rationibus minimi. Si vero S, ipsum N, non metiatur; sumemus O, quem S, & N, minimum metiantur. Et quoties N, ipsum O, metitur, toties metiatur K, ipsum P; & L, ipsum Q; & M, ipsum R; quoties vero S, eundē O, metitur, toties T, ipsum V, metiatur. His enim peractis, erunt R, Q, P, O, V, deinceps proportionales minimi in rationibus A, ad B; C, ad D; E, ad F, & S, ad T. Quæ omnia eo argumento, quo prius, demonstrabimus. Eodem modo operabimur, si quinque, vel plures rationes datæ sint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

a 36. sept.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliquæ datæ fuerint in numeris nō minimis, absoluemus nihilo minus problema propositum; sed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad intentionem minimorū numerorū deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonstratione manifestū est.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propositione 35. lib. 7. demonstratum est, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius sit & antecedens, & cōsequens, licet proportiones sint diuersa, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, si ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eisdem rationibus deinceps proportionales, vt constat ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. demonstrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5.

PLANI numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam.

SINT

SINT duo numeri plani A,B,& latera prioris quæcunque C,D; posterioris vero E,F. Dico proportionem A,ad B,compositam esse ex laterum proportionibus,nimirum ex proportionibus C,ad E, & D, ad F;vel ex proportionibus C,ad F, & D,ad E;ita vt latera vnius sint antecedentia,& alterius consequentia, quemadmodum propos.23.lib.6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C,& E,fecit A,& G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo,quia E, multiplicans D,& F, fecit G, & B;erit G,ad B, vt D,ad F.Quare A,G,B,sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D,ad F. [b] Componitur autem proportio A,ad B,ex proportionibus A,ad G,& G, ad B. Eadem ergo proportio A,ad B,ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24. B, 48. G,18. C,4. D,6. E,3. F,16.

[a] 17. sept.

[b] 27. defin.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A,ad B,compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D,ad E,si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D,multiplicans C, & F,faciat A,& G; [c] erit A, ad G, vt C,ad F.Similiter cum F,multiplicans D, & E, faciat G,& B;erit G,ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C,ad F,& D,ad E. [d] Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A,ad G,& G, ad B; Eadem ex proportionibus C,ad F,& D,ad E,componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

A, 24. B, 48. G,96. C,4. D,6. F,16. E,3.

[c] 17. sept.

[d] 27. defin.

SCHOLIVM.

ESSET hoc loco disputandum de compositione proportionum, quemadmodum in expositione defin.10.lib.5.& defin.5.lib.6.& in scholio propos.23.lib.6. facturos nos hoc loco recepimus.

recepimus. Sed quia res hæc accuratè explicari non potest sine fractorum numerorum operationibus, quas ad finem lib. 9. demonstrabimus; differendam eam eundem in locum censuimus. Hoc Lectorem commonere volui, vt sciat, vbi res hæc pertractetur à nobis, & cur eam hic, vt polliciti sumus, non exponamus.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neq; alius quisquam vllum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, secundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proxime insequẽtem metiatur, manifestum est. Nam cum sit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, vero ipsum B, non metiatur; neque B, ipsum C, neque C, ipsum D, neque D, ipsum E, metietur. Quod vero nec alius quisquam illorum vllum metiatur, sic demonstrabimus. [a] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero est vt A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipsum B; neque F, ipsum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipsum G, metietur, cum vnitas omnem numerum metiatur. [b] Quare cum F, & H, sint inter se primi, & F, non sit vnitas; nõ metietur F, ipsum H; Atque ob id neque A, ipsum C, metietur. Est enim ostensum esse A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione ostendemus, quod nec B, tertium a se numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod si quatuor numeri minimi sumantur in ratione A, ad B, simili modo demonstra-

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
F, 4. G, 6. H, 9.

[a] 2. octaui.

[b] 3. octaui.

monſtrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius eſſe multiplicem. Quod enim nullus proxime inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neque B, ipſius C; neque C, ipſius D; neque D, ipſius E, multiplex erit. A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16. *Quod autem neq; alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur e contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et E, primus ſecundum D, non metitur; a neq; alius quiſquam illorum vllum metietur. Quare e contrario, ſi maiores ad minores referantur, neque quiſquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus.*

a 6. eiuſd.

SED & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecundum metiatur; & quicun-

quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quilibet proxime inſequentem metiatur, A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. perſpicuum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipſum B; & B, ipſum C; & C, ipſum D; & D, ipſum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet ſequentium metiatur, nempe B, ipſos D, & E, hoc modo oſtendetur. Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D; [a] metietur quoque B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur; [b] metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis.

[a] *11. pron.*
[b] *11. pron.*

SED iam primus A, multiplex ſit B, ſecundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cum enim ſit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: ſit autem A, ipſius B, multiplex; erit & B, ipſius C; & C, ipſius D; & D, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3. proxime inſequentis multiplex eſt. Rurſus quia D, ipſius E, eſt multiplex; metietur e contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, vt demonſtratum eſt; Ac propterea e contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſque ſequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propoſitionem ſextam, & theorema, quod prime loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

SI

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur; neque primus secundum metietur. Et si primus, vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex: neque primus secundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quisque nullum à secundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81. *secundum. Si enim A, primus secundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ secundo loco in hoc scholio ostendimus, quicunque alius quemlibet sequentium. Quod est absurdum, cum neque primus, neque alius quisquam vllius a secundo metiri ponatur. Non ergo A, ipsum B, metietur.*

IAM vero A, primus, vel alius quisquam nullius a secundo B, sit multiplex.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16. *Dico neq; A, primum multiplicem esse B, secundi. Si namque A, primus multiplex esse dicatur B, secundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet sequentium, ex ijs, quæ secundo theoremate huius scholij demonstrauimus. Quod est absurdum. Neque enim primus, neque alius quisquam vllius a secundo multiplex esse ponitur. Non igitur A, ipsius B, multiplex erit.*

7. ## THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur secundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus

primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri: neq; alius quiſquam vllum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundum metietur; Atque idcirco, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. [a] 6. octaui.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod ſecundo loco in ſcholio præcedentis propoſ. demonſtrauimus, conuertamus, ampliſicabimus hanc propoſ. hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet a ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquã cuiuslibet a ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex; neque alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propoſ. 6. & 1. theorematis ſcholij præcedentis.

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot ſunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad B, atq; adeo vt E, ad F, ita G, ad K. [a] Quare cum G, & K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorũ numerorum; [b] ac propterea in ſua proportione minimi; [c] æque metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos. [d] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F, producũt; in eiſdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales ſunt; Atque idcirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 24. C, 36. D, 54. B. 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

[a] *3. octani.*
[b] *23. ſept.*
[c] *21. ſept.*
[d] *9. prom.*

SCHOLIVM.

NON ſolum ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L, M, F, quæ eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadem eſſe proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B.

Igitur

Igitur & E, L, M, F, eandem habent, quam A, C, D, B.

EADEM hac propositio vera est, si existentibus numeris A, & B, sumatur vel E, vel F, vnitas. Item si vel A, vel B, fuerit vnitas, existentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros duplæ proportionis, vel superparticularis cuiusuis, vel superbipartientis, non posse cadere numerum medium proportionalẽ. Cum enim duplæ proportionis minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; superparticularis vero inter numeros sola vnitate differentes; superbipartiens denique inter numeros, quorum differentia est binarius: si inter duos numeros duplæ proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros sola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui easdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione potest. Nam neque inter binarium & vnitatem, neque inter duos numeros sola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abest, vt aliquem medium proportionalem ipsi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter se distantes interijcitur solum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla posse ratione esse inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonstrabimus. Differant numeri AB, CD, (sive CD, vnitas sit, & AB, ternarius, sive non,) binario, inter quos cadat numerus EF, minor vnitate quam AB, maior vero quam CD, vnitate quoque. Dico EF, non esse medium proportionalẽ inter AB, CD. Si enim dicatur esse AB, ad EF, vt EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipsi EF, æquali, vt reliqua sit vnitas GB; & ex EF, numero EH, ipsi CD, æquali, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoq; vt AB, totus ad EF, totum, ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipsis EF, CD, æquales sint, ex constructione. Igitur erit quoque reliquus GB, ad reliquum HF, hoc

A .. G . B	A ..... G . B
E . H . F	E ..... H . F
C . D	C ..... D

HF, hoc eſt, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo EF, medius proportionalis eſt inter AB, & CD.

ITA QVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter ſe differunt. quod fieri non poſſe, proxime demonſtrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non poſſe, ita demonſtrabimus. Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt ſit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniã vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipſum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque ſenarium AE. Igitur D, metitur totum AE, & ablatum AB:

A.....B.E
D.. D...
C.

[a] 11. prop. [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatẽ BE. Quod eſt abſurdum.

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendemus ergo, vt prius, D, metiri quinariũ AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE:

A....E.B
D....
C.

[b] 11. prop. [b] ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem EB, metietur. Quod eſt abſurdum.

EX quibus fit, neque illud internullum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; neque illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt Tonus, ſeu vulgo Secunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet) ſecari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco proportio

proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros dupla proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum internallorum illud in proportione sesquialtera, hoc vero in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inaequales. Ita quoque Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea, quae ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti; quadratorum vero proportio sit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quòd inter numeros dupla proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus; manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est, diametrum esse lateri incommensurabilem. quae de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac

vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, inter se primos medij continue proportionales C, D. Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; [a] sumantur in eadē proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & sic deinceps, donec multitudo assumptorum æqualis sit multitudini A, C, D, B.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.	
Vnitas.	
1.	
E, 2. F, 3.	
G, 4. H, 6. I, 9.	
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.	

[a] 2. octaui.

[b] 1. octaui. Quoniam ergo A, B, extremi inter se primi sunt; [b] erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F. Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex constructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipsis A, C, D, B, æquales sunt, singuli singulis, vt K, ipsi A; & N, ipsi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt constat ex demonstratione propos. 2. huius lib. E, seipsum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipsum G, fecit K, [c] metietur E, ipsum G, per E; & G, ipsum K, per eundem E: [d] Metitur autem & vnitas ipsum E, per E. Aeque igitur metietur vnitas ipsum E, & E, ipsum G, & G, ipsum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius E, & E, ipsius G, & G, ipsius K. [e] Proportionales ergo sunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifestum sit ex eadem demonstratione propos. 2. huius lib. quòd F, se ipsum multiplicans producat I, multiplicans vero ipsum I, faciat N; [f] metietur F, ipsum I, per F; & I, ipsum N, per eundem F: [g] Metitur autem & vnitas ipsum F, per F. Aeque igitur metietur vnitas ipsum F, & F, ipsum I, & I, ipsum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipsius F, & F, ipsius I, & I, ipsius N. [h] Proportionales ergo sunt cōtinue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis sit multi-

[c] 7. pron.
[d] 5. pron.
[e] 20. defin.
[f] 7. pron.
[g] 5. pron.
[h] 20. defin.

multitudini K,L,M,N, vel A,C,D, B; (vt perspicuum est ex propos. 2. huius lib. Nam duo E,F, sunt secundi ab vnitate: & tres G,H,I, tertij; & quatuor K,L,M, N, quarti, &c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem, & K, numerum, seu A, sibi æqualem; & inter vnitatem, & numerum N, siue B, sibi æqualē, quot inter numeros A, B. Si duo ergo numeri, sint inter se primi, & inter eos medij, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM

PERSPICVVM autem est, numeros, qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A, ad C; hoc est, quas habēt E, & F, numeri ad vnitatem; id quod in scholio propos. 2. huius lib. quoque asseruimus.

CONSTAT etiam ex demonstratione hac, si numerus seipsum multiplicans aliquem fecerit, & rursum multiplicet productum, & sic deinceps: omnes productos esse continue proportionales ab vnitate. Ostensum enim est & E,G, K, & F, I,N, qui hac ratione sunt procreati, ex demonstratione propos. 2. huius lib. continue esse proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

10.

SI inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A,B, & vnitatem, quotcunq; numeri medij continue proportionales; inter A, quidē & vnitatē, numeri C,D,E: At vero inter B, & vnitatē, numeri F,G,H, illis multitudine æquales. Dico totidē medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter vtrumque A, B, & vnitatem.

Multiplicantes enim se mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rursus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot sūt inter vtrumque A, B, & vnitatē. Quoniam igitur est, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E, & E, ad A; æque metietur vnitas ipsum C, & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A: [a] Metitur autem vnitas ipsum C, per C. Igitur & C, ipsum D, & D, ipsum E, & E, ipsum A, per C, metietur. [b] Quare C, seipsum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, seipsum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [c] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [d] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rursus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc est, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales sunt in ratione C, ad F. Postremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex ijs, quæ a nobis sunt demonstrata ad propos. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc est, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [f] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta sit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca si inter duos numeros,

[a] 5. prom.
[b] 9. prom.
[c] 17. sept.
[d] 17. sept.
[e] 18. sept.
[f] 18. sept.

A 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

numeros, & vnitatem, continue proportionales cecidérint numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EX his conſtat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales ſunt C, & F.

PATET etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri ſumpti ab vnitate continue proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc ſimi quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtratum enim eſt, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales ſint ab vnitate; D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium ſumentes.

I.

SI ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem &

D,81. M,108. N,144. O,192. H,256. C,27. K,36. L,48. G,64. B,9. I,12. F,16. A,3. E,4. 1. Vnitas.

vnitatem, numerus A: Ab inter F, & vnitatem numerus E; [a] cadet quoq; inter B, & F, vnus medius proportionalis: atque adeo, per scholium huius propos. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & sit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui sint K, L; quot nimirum cadent inter vtrunque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui sint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Est autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G; triplicata est proportionis C, ad K; & est vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationē habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & sic de cæteris.

[a] 10. 8. Ha.

HOC idem demonstrabimus, si fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI sint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium; & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius; quam habent secundi ab eodem; quarti vero eiusdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & semper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rursum, proportionis B, ad F, esse duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, tri-

H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in se fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in se fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex B, in O, fiat P. Postremo ex F, quoq; in se fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continuè proportionales ab vnitate, vt cõstat ex scholio propos. 9. huius lib. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata est rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius scholij: Est autem, ex defin. eiusdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate est ratio E, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiusdem, ex defin. duplicata est ratio A, ad G. Quare cum sit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex aquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata est rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius scholij; quòd tam B, N, quam F, Q, sint ab vnitate cõtinuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G, duplicata est rationis B, ad F. Eisdẽ argumẽtis erit ratio D, ad H, triplicata rationis B, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata est rationis B, ad A; quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, sint ab vnitate continuè proportionales, ex scholio propos. 9. huius lib. & eiusdẽ triplicata est ratio D, ad A, ex defin. Igitur est D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo est A, ad H, vt L, ad R: quòd vtraque proportio triplicata sit proportionis A, ad F.

E, 162. L, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 64. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. 1. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16,
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

Proportio

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas H, 3.
C, 36. G, 9.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 1382 4. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

Proportio quidem A, ad H, ex defin. 9. proportio L, ad R, ex 1. theor. huius scholij, proinde quòd tam A, K, L, quam E, Q, R, cõtinuè proportionales sunt ab vnitate, ex scholio propos. 9. huius lib. Est ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata est rationis B, ad F, ex 2. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, sint continuè proportionales ab vnitate ex scholio propos. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata est eiusdem rationis B, ad F. Non secus demonstrabimus rationem E, ad I, esse quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonstrabitur, si numeri vnius ordinis desinant in vnitatem, vt ex hac subiecta figura est manifestum, in qua I, est vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonstrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propos. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius est hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonstratis efficiemus propositionem hanc 20. Euclidis magis vniuersalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipsorum, & assumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipsos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & assumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, vero & C,

& C. totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc est, D, ad G: Sed per theor. 2. huius schol. ij, ratio quoque E, ad H, duplicata est eiusdem rationis D, ad G. Igitur est ut K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L;[a] cadet quoque vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quatuor minimi numeri, ostendemus, inter F, & I, duos medios cadere, sicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, si in eadem proportione D, ad G, sumantur quinque numeri minimi.

[a] 8. octaui.

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.	
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.	
E, 18. N, 24. H, 32.	
D, 6. G, 8.	
C, 2.	
K, 9. L, 12. M, 16.	

HOC etiam verum est, si loco alterius numeri, nimirum B, vnitas assumatur, veluti perspicuum est in hac subiecta figura in qua numero B, vnitas est, cadunteque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quos scilicet inter A, & B, cadunt, &c.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.	
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.	
E, 4096. N, 128. H, 4.	
D, 256. G, 8.	
C, 16.	
K, 1024. L, 32. M, 1.	

EX his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero assumpto C, propinquiores.

THEOR.

11. THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationẽ.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, esse duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim se mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans seipsum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati; & ipsum D, multiplicãs fecit E, ex constructione; [a] erit vt A, 9. E, 21. B, 49. C, ad D, ita A, ad E. Rursus, quia D, C, 3. D, 7. multiplicans C, fecit E, ex constructione; & multiplicans seipsum, ex [b] defin. quadrati, fecit B, quadratum; [b] erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales sunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quia vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales sunt, numerus A, ad B, duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem sit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 17. sept.

[b] 17. sept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM est ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in conti-

nuis

inter proportione lateris ad latus. Nam eadem est proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, qua lateris C, ad latus D, vt demonstratum est.

PAR I ratione liquet, numerũ A, 9. E, 21. B. 49. mediũ proportionalem E, & vtrãlibet quadratorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, E, B, proportionales sint ostensi in ratione G, ad D, hoc est, esse A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum sui: um B, consequens consequentem, si de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & C, ipsum E, antecedens antecedentem; quandoquidem est E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum suum A. Igitur E, & A, mensuram communem habent C; atque adeo inter se sunt compositi. Similiter cum sit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, suum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipsum E, consequens consequentem. Quare cum & latus D, metiatur suum quadratum B; habebunt E, & B, communem mensuram D; Ideoque compositi erunt inter se. Perspicuum autem est ex hac demonstratione, priorum numerorum A, E, communem mensuram esse C, latus prioris quadrati A; posteriorum vero E, B, mensuram communem esse D, latus quadrati posteriaris B.

THEOR. 10. PROPOS. 12. 11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et proportionẽ A, ad B, cubi ad cubũ, tripli-

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E; & D, seipsum multiplicans faciat F; At C, & D, se mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes vero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, [a] 17. sept. [b] 17. sept. cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F; propterea que E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex [c] 17. sept. constructione multiplicans ipsum G, fecit H; erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicans vero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit [d] 17. sept. cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita [e] 18. sept. I, ad B: Est autem & H, ad I, vt C, ad D; quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerunt ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus; cum sit C, ad D, vt A, ad H Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione

ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens conſequentem. ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo & ipſum H, quòd H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C; atque adeo inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D, cubum ſuum B; immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D; Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt, priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A; poſteriorum verò trium H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi B.

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 12.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & rurſum multiplicates ipſos G, H, I,

G,H,I,faciant K,L,M,& ita deinceps. Dico quoque D, E,F,& G,H,I,& K,L,M,continue esse proportionales. Multiplicantes enim A,& B, se mutuo faciant N; & B, C,se mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A,multiplicans N,E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O, F,

A, 2. B, 4. C, 8.
D, 4. N, 8. E, 16. O, 32. F, 64.
G, 8. P, 16. Q, 32. H, 64. R, 128. S, 256. I, 512.
K, 16. T, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y, 512. Z, 1024. a, 2048. M, 4096.

faciat R,S.Simili modo A,multiplicans P, Q, H,faciat T,V,X;& B,multiplicans R,S,I,faciat Y,Z, a.Quoniam
[a] 17. sept. igitur A,multiplicans seipsum,& B,fecit D,& N; [a] erit vt A,ad B,ita D,ad N.Eodem modo,quia B,multiplicãs A,& seipsum,fecit N,& E;erit etiam,vt A, ad B, ita N, ad E.Sunt igitur D,N,E,continue proportionales in ratione A,ad B.Rursus,quia B,seipsum, & numerum C,
[b] 17. sept. multiplicans fecit E,& O; [b] erit vt B,ad C,sita E,ad O. Eademque ratione,cum C, multiplicans B, & seipsum, fecerit O,& F; erit, vt B,ad C,ita O,ad F; propterea q; & E,O,F,continue proportionales sunt in ratione B, ad C,seu A,ad B Quare cum D,N,E,in eadem ratione sint continue proportionales,in qua E,O,F;erit ex æquo D, ad E,vt E,ad F; atque adeo D,E,F,continue proportionales sunt.

DEINDE, quia A,multiplicans D, N, E, fecit G, P,Q; erunt ex ijs,quæ ad propos.18. lib. 7. ostendimus, G, P, Q, in eadem ratione,in qua D, N, E,hoc est, in ratione A,ad B,proportionales. Item quia A,& B,mul-
[c] 18. sept. tiplicantes E,fecerunt Q, & H; [c] erit quoque, vt A,ad B,ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A,ad B. Similiter, quia B, multiplicans E,O,F,fecit H,R,S; erunt ex demonstratis ad propos. 18.lib.7.H,R,S,proportionales in ratione E, O, F, hoc est, B,ad C,seu A,ad B. Et eodem modo,cum B,C,mul-
[d] 18. sept. tiplicantes F,fecerint S,& I; [d] erit vt B,ad C, hoc est, vt A,ad B,ita S,ad I;propterea que & H,R,S,I, proportionales sunt in ratione A,ad B.Quo circa,cũ G, P, Q,H, eandem

eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales.

NON diſsimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus. Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco producti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorũ A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionẽ duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionẽ totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continuè proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdem numeri G, H, I; & rurſum ex eiſdẽ in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continue proportionales. Nã ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & D, F, I, M, continue ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, cõtinue ſunt proportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodẽ modo oſtẽdemus G, H, I, eſſe proportionales cõtinue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

	A, 2.	B, 4. C, 8.
	D, 4.	E, 16. F, 64.
	G, 8.	H, 64. I, 512.
	K, 16.	L, 256. M, 4096.

EX qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco productos eſſe in duplicata ratione datorum numerorum; ſecundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholij propoſ. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonſtratione huius propoſ. 13. dati ſint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C; eãdem tamen propoſitionem demonſtrabimus, etiamſi plures fuerint, quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, quiſi ipſes multiplicantes faciant E, F, G, H; poſtea vero multiplicantes ipſos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, ex demonſtratis, proportionales ſunt in ratione A, ad B: item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc eſt, in eadem ratione A, ad B; cum illi producti ſint ex A, B, C, proportionalibus in ſe ipſos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in ſe ipſos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non ſecus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodem modo producti.

A, 2. B, 4. C, 8. D. 16.
E, 4. F, 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

13. PROBL. 12. PROPOS. 14.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonſtratione propoſ. 12. huius lib. A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; [a] metietur quoque A, primus ſecundum E. Quare cum ſit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus latus D, metietur.

A, 4. E. 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

[a] 7. 9 Euci.

METIA-

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 14.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuo faciant G. Multiplicantes denique G, faciant H, I.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

Quoniam igitur, vt appareret ex demostratione propos. 12. huius lib. tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; * metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

* 7. octaui.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione G, ad D, vt ostensum est propos. 12. huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D; metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B,

mum B, cubus cubum, ex 13. quæ ad propos. 6. huius lib. demonstrauimus. Itaque si cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonstrandum.

15. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et si latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Nó metiatur autem A, ipsum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri potest, metiatur
A. 16. B. 81. C, ipsum D. Quia igitur C, latus quaC. 4. D. 9. drati A, metitur D, latus quadrati B;
[a] 14. octa. [a] metietur & quadratus A, quadratū B. Quod est absurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergò latus C, metitur latus D.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A,
[b] 14. octa. metiri dicatur ipsum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod est absurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alteriu

alterius metietur. Et si latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipsum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod est absurdum, tum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A,8. B,27. C,2. D,3.

a 15.octa.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam si metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod est absurdum. Ponitur enim nō metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, si cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonstrandum erat.

b 15.octa.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propositionis hoc etiam modo proponi possunt, si maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, sit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et si vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius sit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non sit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et si latus lateris non sit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi I
sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A; & cu
a 14. & 15. octaui. bus B, cubum A. a Igitur & latus D, latus C, metietur; a
proinde latus C, lateris D, multiplex erit.

QVOD si latus C, lateris D, multiple
A, 36. B, 9. sit; metietur latus D, latus C. b Igitur & I
b 14. & 15. octaui. C, 6. D, 3. ipsum A, quadratus quadratum, & cubi
cubum metietur; Ac propterea A, ipsius I
A, 64. B, 8. quadratus quadrati, & cubus cubi, er
C, 4. D, 2. multiplex.

AT vero si A, ipsius B, quadratus qua
A, 49. B, 9. drati, & cubus cubi, non sit multiplex; no
C, 7. D, 3. metietur B, ipsum A, quadratus quadratū
c 16. & 17. octaui. aut cubus cubum. c Igitur neque latus D
A, 125. B, 8. latus C, metietur. Quare C, latus lateris D
C, 5. D, 2. non erit multiplex.

SIMILITER si C, latus lateris D
d 16. & 17. octaui. non sit multiplex; non metietur D, latus latus C. d Igitur ne
B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metie
tur; Atque adeo A, ipsius B, quadrati quadrati, & cubu
cubi, multiplex non erit.

16. THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius vero illis proportionalia E, F; ita vt C, D, se mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B; sitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis

portionis laterum homologorum C,E, vel D,F. Multiplicantes enim se mutuo D,E, faciant G. Quoniam igitur est C,ad D,vt E,ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G, erit A, ad C, vt D, ad F. Et quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B, erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A, 12. G, 18. B, 27. C, 6. D, 2. E, 9. F, 3.

[1] 17. sept.

[2] 17. sept.

QVIA vero, cum A, G, B, sint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quâ habet A, ad G, hoc est, C, ad E, vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F; manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem; si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentē, quòd sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui & C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D; Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem C, D, latera suum planum A, antecedentes

antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuorum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F; ideoque erunt inter ſe compoſiti.

EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

18. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorũ duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionẽ A, ad B, eſſe triplicatam eius, quã habẽt latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H. Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Itẽ D, F, ſe mutuo multiplicãtes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicãtes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, &

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4 G, 6. H. 10.

[a] 17. ſept.

D, & G, fecit L, & K; [a] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; ſit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [b] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [c] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [d] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

[a] 17. ſept.

[b] 17. ſept.

[c] 17. ſept.

[d] 18. ſept.

QVONIAM vero, cum A, M, N, B, ſint proportionales continue; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M; Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

Cum M demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum C, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

Ex ijs, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiã eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cum enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ra-

in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc eſt, eſſe A, ad M, & M, ad N, & N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N, ad B, & C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, loquamur; metientur quoque C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem; quòd ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (Cum enim M, factus ſit, per conſtructionem, ex E, in L; metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K, ipſum B, quod B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I, ipſum M; Metiuntur autem & C, D, latera planum ſuum I.

a 11. pron. a Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atque adeo C, D, E, ipſum M, metientur.) Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quam D, quam E; Ideoque compoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A, antecedentes antecedentẽ;

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240. metientur quoque F, G, H, ipſum M, conſequentes
I, 6. L, 12. K, 24. conſequentem. Metiuntur
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H. 10. vero & F, G, H, ipſum N;

(Cum enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionem; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quòd A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cum ergo & F, G, latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque F, G, ipſum N; atque adeo F, G, H, ipſum N, metientur.) Nec non & ipſum B, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, quam H. Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat, priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At verò F, G, H, latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

QVIA verò ſolidus numerus tria latera habet; ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſiue primum latus ducatur

tatur in secundum, & numerus procreatus in tertium; siue primum in tertium, & numerus genitus in secundum; siue denique secundum in tertium, & productus numerus in primum: Quin etiam, propositis quotuis numeris, eundem semper numerum gigni ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunque ordinem inter se permutent. Qua quidem res magnum usum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo infrà theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem semper numerus, quomodocunque ordinem inter se permutent.

SINT primùm tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D; & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, si ex A, in C, fiat F, & F, in B, multiplicetur: Item si ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E; erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [b] ita quoque est F, ad A; quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, ita est A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, facit D. Igitur ex aequalitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: [d] atque ideirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc est, ipsemet numerus E, aequalis erit numero facto ex B, in F, producto ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod est primum.

A 3. B 5. C 8.
D 15. E 120. F 24. G 40.
[a] 15. defin.
[b] 15. defin.
[c] 15. defin.
[d] 19. sept.
E, F, D, A, B, vnitas.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [f] ita etiam est G, ad B, eò quòd G, factus ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita est B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus est ex A,

[e] 15. defin.
E, G, D, B,
[f] 15. defin.
[g] 15. defin.
A, vnitas.

ex A, in B. Igitur ex æquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: [a] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id
a 19. sept. est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in C. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in G; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod est secundum.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atq; ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundē E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Itē ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D: Itē ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B: Itē ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C: Itē ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B: Itē ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D: Itē ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A: Itē ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt prater primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersa producentes eundem semper numerum. Quoniam enim vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id, quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

DEINDE quia vt in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est, eundem numerū gigni tū ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tū ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, quod est secūdū.

TERTIO quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in B, patet, eundē generari numerū tū ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, Cū ergo ille sit æqualis proxime ostensus primo producto, erit & hic æqualis eidē, q est tertiū.

QVARTO quia, vt in tribus ostensum est, idē numerus fit ex

fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B; gignetur quoq; idē numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille ostensus est primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est quartum.

QVINTO quoniā, vt demonstratū est in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idē numerus ex A, in C, & ex producto in D, ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cū ergo ille sit ostensus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem æqualis. Quod est quintū.

SEXTO, quia, vt in tribus demonstrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; itaque eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quàm ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod est sextū.

SEPTIMO quia, vt in tribus ostēdimus, idē numerus gignitur, siue ꝓductus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, siue prius in D, deinde hic ꝓductus in A; cōstat eādē numerū fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in A, qui fit ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex ꝓducto in D. Sed hic proximè ostēsus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille ꝙ est septimū.

OCTAVO quia, vt in tribus ostensum est, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A; gignetur quoq; idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco ostensus est æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod est octauum.

NONO quia, vt demonstratum est in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, quē ex B, in D, & ex ꝓducto in C, & ex producto in A. Sed ille ostensus est septimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod est nonum.

DECIMO

DECIMO quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A, in C,

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

& ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, aqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in B. Igitur & hic. Quod est decimum.

POSTREMO quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem aqualis erit. Quod est undecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum est in quinq; vel pluribus numeris; dummodo interdum in quinq; assumatur id quod iam in quatuor demonstratum est; & in sex, quod in quinque, &c.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, apparet, quorum ordinem ter immutauimus, idemque semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quomodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quam tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum; fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

17. THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B, Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C; [a] metientur D, & E, ipsos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: A, 18. C, 24. B, 32. [c] Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B, Quia ergo D, 3. E, 4. F, 6. G, 8. E, multiplicans F, & G, fecit C, & B; [d] erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G; & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quóniam vero F, multiplicans D, fecit A; erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 21. sept.
[b] 9. pron.
[c] 9. pron.
[d] 17. sept.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 19.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E, & G, plani similes: sint ipsius E, latera H, I; ipsius vero G, latera

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.
A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

[e] 20. octa.

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

[a] 21. *sept.* A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi sint in ratione A, C, D, æque metiuntur ipsos A, C, D, eiusdem rationis cum illis; metiantur per M. Eo-

[b] 21. *sept.* demque modo, [b] quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [c] ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eosdem E, F, G, faciat C, D, B. Fa-

[c] 9. *prop.* ctus est autem E, ex multiplicatione mutua suorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione suorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M; & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, solidus est numerus, ex defin. latera habens H, I, M; & B, solidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D,

[d] 18. *sept.* vt ostendimus; [d] erit C, ad D, vt M, ad N: [e] Sunt autem

[e] 17. *sept.* C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quòd N, multiplicans E, & F, fecerit ipsos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos similes E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propos. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N; & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo sunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea similes sunt numeri solidi A, & B. Quam ob rem, si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

DVO exempla apposuimus, in quorum priori liquido constat, vnitatem E, esse planum numerum, & vnitates H, I, eius latera, licet improprie, vt in definitione numeri plani meminimus. Si enim vnitatem a numeris, planis excludamus,

non

non poterimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in aliis omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodem priori exemplo. Hoc autem eſt abſurdum, cum Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamque ſine vlla exceptione demonſtret.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 20.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cum inter A, & C, cadat medius proportionalis B, erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 9. B, 54. C, 324.

[a] 20. octaui

THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter A, & D, cadant duo medij proportionales B, C; erunt A, & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quā ob rē, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendū.

A, 27. B, 45. C, 75. D, 125.

[b] 21. octaui

SCHOLIVM.

HAEC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio precedentium duarum propositionum; quam qui diligẽter examinare velit, inueniet sane mãcam esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros planos, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia; dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quadam alterius; Iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnus fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, vt duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, nimirum 4. & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera aqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, immo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quoque aqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quanquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla cõcedemus, his lateribus prioris aqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se aqualia? Idem dicendum est de solidis similibus. Quapropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A; cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9. huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem; atque adeo cum inter numerum A, eundem, & tam numerum C, quam vnitatem, cadant

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
vni-tas

cadat medij proportionales multitudine æquales, nimirum vnus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter æqualitatem, æque C, numerum, nimirum vnus, qui sit E. Quoniam igitur vnitas & E, C, numeri sunt continuæ proportionales; producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C; metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, æque, ex ijs, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniã extremi D, F, minimorũ trium numerorũ, per coroll. 1. propos. 2. huius lib. sunt quadrati: Est autem & A, quadratus, ex hypothesi; [a] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero est, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F; & permutando, vt A, ad D, ita C; ad F; [b] cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, nimirum H. Cum ergo F, primus metiatur C, vltimum; [c] metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F; metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur; ita vt H, ad F; & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. [d] Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicatæ, quòd conuertendo sint proportionales etiam C, H, F; erit L, ad F, vt C, ad F; Ac proinde I, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

ALITER. [e] Quoniam A, & C, similes plani sunt; sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A; at F, G, ipsius C; ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadrati A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, [f] erunt D, H, E, continuæ proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E; cadatque inter D, & E, medius

A, 36.	B, 48.	C, 64.	[a] 11. octaui
		H, 32.	
D, 9.	E, 12.	F, 16.	
L, 64.	K, 8.	I, 4.	

[b] 8. octaui

[c] 7. octaui

[d] 11. octaui

[e] 20. octaui

A, 36.	B, 48.	C, 64.	[f] 20. sept.
	H, 6.	I, 8.	
D, 3.	E, 12.	F, 4. G, 16.	

[a] 8. octaui. dius proportionalis H,[a] cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales; [b] 20. sept. idem numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Fit autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

A,36. B,48, C,64. H,6. I,8. D,6. E,6. F,8. G,8.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quarum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A; fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 9. huius lib. E, F, A, continue proportionales ab vnitate; atque idcirco & proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum inter numerum D, & vnitatem, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine aquales, videlicet duo; cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 10. huius lib. totidem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 10. huius lib. a nobis est demonstratum. Quare D, cubus est, ex definitione, cuius latus G.

A,64. B.160. C,400. D,1000. F,16. H,100. E,4. G,10. vnitas

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, metietur E, ipsum A, & H, ipsum D, aque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor minimorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autem & A, cubus, ex hypothesi; [c] 12. octaui cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H; & per-

A,64. B,160. C,400. D,1000. K,32. M,500. I,16. L,250. E,8. F,20. G,50. H,125. P.1000. O,10. N,5.

& formando, vt A, ad E, ita D, ad H; [a] cadent quoque inter H, D, duo medij proportionales, qui sint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum, [b] metietur idem & L, secundum. Sumpto deinde N, latere cubi H; metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipsum L; ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: sit quoque P, cubus ipsius O. [c] Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata sit rationis O, ad N, lateris ad latus; hoc est L, ad H: sit autem & ratio D, ad H, eiusdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata, quod conuertendo proportionales etiam sint D, M, L, H; erit P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales erunt. Quare cum P. cubus sit, ex constructione, cubus quoque erit D.

[a] 8. octaui

[b] 7. octaui.

[c] 12. octaui

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

SI duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem sit quadratus, & secundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; sitque A, quadratus. Dico & B, esse quadratũ. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; [d] cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, vt delicet E; [e] cadet quoque inter A, & B, medius vnus, qui sit F. Quia igitur tres numeri sunt continue proportionales A, F, B; & A, primus est quadratus; erit & B, tertius, quadratus. Quare si duo numeri rationem habeant inter se, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat ostendendũ.

A, 36. F, 48. B, 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

[d] 11. octaui

[e] 8. octaui

[22. octaui

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiusuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum

exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, [a] essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibita, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim [b] 4. existente quadrato, [b] esset & 8. quadratus. Igitur [c] & 16. & 32. &c. quod est absurdum. [c] Nam inter 4. & 8: & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis, si essent quadrati: cum tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.

SIMILI modo numeri in quintupla proportione proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, [d] caderet inter eos medius proportionalis. [e] Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non posse, demonstratum a nobis est in scholio propos. 8. huius lib.

a 24. octaui

b 24. octaui

c 11. octaui

d 11. octaui

e 8. octaui

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubũ; sitq; A, cubus. Dico & B cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; [f] cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F; [g] cadent quoque

A. 8. G. 12. H. 18. B. 27.
C. 64. E. 96. F. 144. D. 216.

f 12. octaui

g 8. octaui

quoque inter A, & B, duo medij, qui sint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, sunt continue proportionales, & A, primus est cubus; [a] erit & B, quartus cubus. Quocirca, si duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 23. octaui

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiusuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non posse reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, [b] essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperta, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod est absurdum. Penitur enim secundus, non cubus. [b] 25. octaui

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24.

SIMILES plani numeri rationem inter se habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani similes A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendã quadratum. Cum enim A, & B, sint plani similes; [c] cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione cõtinua A, C, B, erunt extremi D, & F, quadrati, ex corõll. 1. propos. 2. huius lib. Quare cum sit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifestum est, ita esse A, ad B, vt est quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo [c] 18. octaui

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.
A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

similes plani numeri rationē inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. [a] *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit* a 11. octaui

A, 8. B, 18. unus medius proportionalis: Et est, vt C, [b] *cadet quoque me-* b 8. octaus

C, 16. D, 36. ad D, ita A, ad B, [b] *dius proportionalis inter A, & B.* [c] *Quare* c 20. octaui

A, & B, plani similes sunt.

EX hoc perspicuum est planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent, essent, vt modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B. Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, sunt solidi similes; [d] cadent inter eos d 19. octaui

duo medij proportionales. qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erūt extremi E, H, ex coroll. 1. propos. 2 huius

huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo sit A. ad B, vt E, ad H; constat ita esse A, ad B, vt est cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo solidi numeri rationem habent inter se, &c. Quod erat ostendendum.

A, 240.	C, 360.	D, 540.	B, 810.
E, 8.	F, 12.	G, 18.	H, 27.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonstrabimus; scilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, sunt solidi similes.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter se, quam cubi C, D. Dico A, B, solidos esse similes. Nam cum sit A, ad B, vt C, ad D; [a] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; [b] cadent quoque inter A, B, duo medij. [c] Sunt ergo A, & B, solidi similes.

A, 16.	B, 54.	
C, 64.	D, 216.	

[a] 12. octani
[b] 8. octanus
[c] 27. octani

EX his omnibus perspicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel superparticularem, vel superbipartientem, esse similes planos, vel solidos. Si enim essent similes plani, [a] caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non posse, iam dudum ostensum est in scholio propos. 8. huius lib. Eadem ratione non erunt similes solidi, cum inter eos cadere non possint duo medij proportionales. [b] Nam alias caderent quoque duo medij inter minimos earundem proportionum numeros. Quod fieri non potest, quod bi vel sola vnitate, vel certe binario tantum inter se distent, vt in scholio praedicto traditum est; inter quos certum est, non posse interuipi duos numeros, medium duos medios proportionales.

[a] 18. octani
[b] 8. octani

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi esse possunt plani similes, vel solidi, cum non possint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui sit numerus

rus primus, latera habet ſolummodo vnitatem, & ſeipſum, quamuis improprie. Vt hi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, qua conſtat non eſſe proportionalia. Quinis vero numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit, latera tantùm habet duas vnitates, & ſe ipſum. Vt hi numeri ſolidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1. 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perſpicuum autem eſt, ea non poſſe eſſe proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles, vel ſolidi ſimiles eſſe poſſunt. Si enim duo huiuſmodi numeri inter ſe primi, dicantur eſſe plani vel ſolidi ſimiles; [a] cadet inter illos vnus medius proportionalis, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter ſe primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter ſe primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis menſura metiri poſſit, propter duos extremos inter ſe primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in ſcholio propoſ. 24. lib. 7. demonſtrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propoſ. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod abſurdum eſt. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi.

[a] 18. & 19. octaui

EX his ſequitur, ſi duo numeri ſint plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit primus, minorem numerare maiorem. Nam ſi eum non numeraret; [b] eſſent duo propoſiti numeri inter ſe primi: ac proinde, vt proximè oſtendimus, non poſſent eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. quod abſurdum eſt, & contra hypotheſim. Verum hoc oſtenſiuè quoque ita demonſtrabimus. Sint primum duo numeri plani ſimiles A, B, ſitq; A, minor, primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint C, vnitas, & numerus D, ipſi A, aqualis, quòd nullus alius numerus, prater C, vnitatem, & numerum D, ipſi A, aqualem, metiatur primum numerum A: ſint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt ſit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur per mutando C, ad D, vt E, ad F. [c] Igitur nume-

[b] 31. ſept.

A, 3. B, 48.
C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

[c] 19. ſept.

rus factus ex C, primo in F, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertiũ: Fit autem ex C, vnitate in F, ipsa met numerus F. Idem ergo numerus F, fiet ex D, in E. [a] Quare D, ipsum F, metietur: [b] Metitur autem F, ipsum B, quòd B, gignatur ex E, in F. [c] Igitur & D; id est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum. [a] 4. prom. [b] 4. prom. [c] 11. prom.

HINC Perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse planos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed compositi. quod est contra hypothesim.

SINT deinde duo solidi similes A, B, sitque A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri. Nam cum A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullius alius numerus, præter vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit E, ad F, vt C, ad F; & D, ad G.

A, 3. B, 24. B, 1. C. 1. D, 3. E, 2. F, 2 G, 6.

Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. [d] Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. [e] Quare D, ipsum G, metietur. [f] Metitur autem G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B. Igitur & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum. [d] 19. sept. [e] 4. prom. [f] 4. prom. [g] 11. prom.

AT QVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & se ipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi. quod est contra hypothesim.

ITA QVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel super particularem, vel superbipartientem; vel certe duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neuter quadratus sit, aut cubus; erunt

erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani ſiue ſolidi non ſimiles.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter uero non quadratus, plani ſunt non ſimiles; quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles, [a] haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato, [b] eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum. ponitur enim non quadratus.

[a] 26. octaui

[b] 24. octaui

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter uero non cubus, ſolidi ſunt non ſimiles, ut 27. & 40. Si enim eſſent ſolidi ſimiles, [c] haberent proportionem, quam cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit, [d] eſſet & 40. cubus. quod eſt abſurdum. ponitur enim non cubus.

[c] 27. octaui

[d] 25. octaui

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

I.

SI duo similes plani numeri multiplicantes se mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani similes A, B, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, quadratum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicãs A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum sint plani similes [b], vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt sint continue proportionales D, E, C. Itaq; cũ tres D, E, C, continue sint proportionales, sitq; primus D, quadratus, ex constructione; [d] erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo similes plani numeri multiplicantes se mutuo, &c. Quod erat demonstrandum.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

[a] 17. septimi.
[b] 18. octaui
[c] 8. octaui
[d] 22. octaui

THEO-

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum; similes plani erunt.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratū. Dico A, B. esse similes planos. Multiplicans enim A, seipsum faciat D, quadratū.

A,6. B,54. D,36. C,324.

Quoniam igitur A, multiplicās A, & B, fecit D, & C; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter A, & B, vnus medius proportionalis cadet; [d] Ac propterea A, & B, similes plani sunt. Quare si duo numeri se mutuò multiplicantes, &c. Quod demonstrandū erat.

[a] 17. sept.
[b] 11. octaui
[c] 8. octaui
[d] 20. octaui

SCHOLIVM.

EX his demonstrabimus quatuor insequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, se mutuo multiplicātes faciāt C. Dico C, esse quadratum. Cum enim A, & B, sint similes plani, nimirum quadrati; [e] erit C, ex eis productus, quadratus.

A,4. B,25. C,100.

[e] 1. noni

II.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant

ciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus.
Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratū: erunt A, & B, similes plani: atque adeo inter eos unus medius cadet proportionalis, videlicet D. Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

A, 9. D, 12. B, 16. C, 144.

a 2. noni
b 18. octaui
c 22. octaui

III.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum; sitque A, quadratus.
Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratum, per theor. 1. huius scholij; Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. B, 20. C, 80.

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus esset & B, ex theor. 2. huius scholij, quadratus: Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

A, 9. B, 20. C, 180.

THEO-

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.

FACIAT cubus A, seipsum multiplicans numerũ B, Dico B, esse cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in se fiat D, & idcirco ex C, in D, ipse cubus A, gignatur. Quia igitur C, seipsum multiplicãs fecit D: metietur C, ipsum D, per C: Metitur autem & vnitas ipsum C, per C. Igitur eadem pars est vnitas ipsius C, quæ C, ipsius D, nimirum denominata a C; Ac proinde vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rursus quia C, multiplicans D, fecit A; metietur D, ipsum A, per C, Metiebatur autem & C, ipsum D, per C. Eadem ergo pars est C, ipsius D, quæ D, ipsius A; ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: sed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. At quia A, ipsum B, metitur per A, quòd A, se ipsum multiplicans fecerit B; metitur vero & vnitas ipsum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipsius A, quæ A, ipsius B; Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; cadent totidem inter A, & B, nimirũ E, & F. Cũ ergo quatuor numeri A, E, F, B, sint continue proportionales, & A, primus sit cubus, erit quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus se ipsum multiplicans, &c. Quod erat demonstrandum.

a 7. pron.
b 5. pron.
c 20. defin.
d 7. pron.
e 20. defin.
f 17. pron.
g 5. pron.
h 10. defin.
i 8. Octavi.
k 23. Octavi.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multi-

multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; [a] eritq; D, cubus. Quoniá vero A multiplicans A, & B, fecit D, & A, 8. B, 27.
C; [b] erit vt A, ad B, ita D ad C. D. 64. C, 216.
[c] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt, [d] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [e] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubũ numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 3. noni.
[b] 17. sept.
[c] 12. octaui
[d] 8. octaui.
[e] 23. octaui

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C, Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, [f] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit A, 8. B, 27.
D, & C, [g] erit vt A, ad B, ita D, ad D, 64. C, 216.
C; [h] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [i] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [k] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

[f] 3. noni.
[g] 17. sept.
[h] 12. octauus
[i] 8. Octaui
[k] 23. octaui

SCHOLIVM.

EX his & hac, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, vicissim.

I

SI cubus numerus non cubum numerum

multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non esse cubum. Si enim C, sit cubus; & multiplicatus B, cubus erit. quod non ponitur.

A,8. B,20. C,160.

a 5. noni

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non esse cubum. Si namque B, sit cubus, & factus C, cubus erit. quod est contra hypothesim.

A,8. B.17. C,136.

b 4. noni

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus seipsum multiplicans cubum faciat: Et ipse cubus erit.

MVLTIPLICANS seipsum numerus A, faciat B, cubũ. Dico & A, cubũ esse. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in se faciat B, & ipse C, ex A, in B, gignatur, atque adeo æqualis æqualiter æqualis sit, vt perspicuum est ex ijs, quæ ad definitionem cubi scripsimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C, erit & A, cubus. Quare si numerus se ipsum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonstrandum.

A,8. B,64. C,512.

c 5. noni

SCHOLIVM.

ALIAM demonstrationem interpretes Euclidis hoc loco

loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt: [a] *Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt.* [b] *Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quòd A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit;* [c] *cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales.* [d] *Atque adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio breuior est, & planior, vt perspicuum est.*

A, 8. B, 64. C, 512.

[a] 12. oct. aui
[b] 17. sept.
[c] 8. oct. aui
[d] 23. oct. aui

THEOR. 7. PROPOS. 7. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit,

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum. Cum enim A, sit compositus, [e] metietur eum, præter vnitatē, numerus aliquis: metiatur D, ipsum A, per E. Quo posito, [f] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicās fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorū D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin. cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2. E, 3.

[e] 13. defin.
[f] 9 pron.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittētes omnes: Septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittētes omnes.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A,B,C,D,E,F,G,H,I,K,L,M. Dico tertiũ quidẽ B, ab vnitate esse quadratũ, & vnũ intermittẽtes

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561. I,19683. I,K.59049. L,177147. M,531441.

omnes, quales sunt D,F,H,K,M: Quartum autem C, cubum, & duos intermittentes omnes, cuiusmodi sunt F,I, M: septimum vero F, cubũ simul, & quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M. Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B; æque metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: [a] Metitur autem vnitas numerum A, per A. Ergo & A, ipsum B, per A, metietur; [b] Atque adeo A, multiplicans A, ipsum B, producet. Quare B, quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sunt B,C,D, & est B, quadratus; [c] erit & D, quadratus. Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D,E,F, cum D, sit quadratus, [d] & F, quadratus erit; Nec non & omnes vnum intermittentes.

[a] 5. pron.
[b] 9. pron.
[c] 22. octaui
[d] 22. octaui

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C; æque metietur vnitas numerũ A, & numerus B, numerũ C; [e] Metitur autem vnitas ipsum A, per A. Igitur & B, ipsum C, per A, metietur; [f] atque adeo B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C. Quare cum A, seipsum multipli cans faciat B, multiplicans vero B, faciat C, vt est ostensum; erit C, cubus. Quia vero quatuor deinceps proportionales sunt C,D,E,F, & est C, cubus; [g] erit & F, cubus. Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionalibus F,G,H,I, cum F, sit cubus; [h] & I, cubus erit; atque omnes semper duos intermittentes.

[e] 5. pron.
[f] 9. pron.
[g] 23. octaui
[h] 23. octaui

POSTREMO quia F, septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirũ quinque G, H, I, K, L, cubus erit simul & quadratus; Nec non & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

HOC theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

SI ſint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono, vndecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime numeros poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quę ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus, decimusſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes vero qui proxime ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimooctauo, vigeſimoquarto, & alijs, quę metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigeſimus quintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper vnum intermittunt poſt tertium ab vnitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab vnitate. Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſe primum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem ſit quadratus, Et reli-

qui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, ſitque primum A, proximus

Vnitas. A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint, [a] iam demonſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres continue propor

Vnitas. A,4. B,16. C,64. D,256. E,1024. F,4096.

[b] 22. octani tionales ſint A, B, C; ſitque A, quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue pro-
[c] 22. octani portionalibus C, D, E, cũ C, ſit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati ſunt. Idẽ oſtendemus, ſi plures numeri ſint cõtinue proportionales.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes

Vnitas. A,8. B,64. C,512. D,4096. E,32768. F,262144.

duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi, [d] 8. noni iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æque, metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B. [e] 3. pröni [f] 9. pron. Metitur autem vnitas numerũ A, per ipſummet A. Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum metietur. [g] 3. noni Atque adeo cũbus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit. Quare B, cubus eſt. Quoniam vero quatuor continue proportionales ſunt A, B, C, D, eſtque A, cubus, [h] 23. octani & D, cubus erit. Eademq; ratione, aſſumptis quatuor

tuor deinceps proportionalibus B, C, D, E, cum B, cubus sit: & E, cubus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, cubi sunt. Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 23. octaui

SCHOLIVM.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt; vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B; erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

quæ A, B, quadrati; erit & C, quadratus, ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntq; A, C, quadrati; erit ex eodē scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps: cum ex illo scholio propos. 10. lib. A, multiplicans D, producat E; & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seip-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

sum multiplicans facit B; [b] erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, suntq; A, B, cubi; [c] erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio, A, multiplicans C, facit D, suntq; A, C, cubi; [d] erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E; & multiplicans E, procreet F, &c.

[b] 3. noni
[c] 4. noni
[d] 4. noni

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcũq; numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I,&c. & primum A, proximus vnitati nõ sit quadratus. Dico nec aliũ vllũ esse quadratũ, præter tertiũ ab vnitate, & vnũ intermittẽtes omnes, hoc est, præter B,D,F,H.&c. Sienim præter hos alius

Vnitas.A,1.B,4.C,8.D,16.E,32.F, 64. G, 128.H, 256, I,512. K,1024. L,2048. M,4096.

a 8. noni

est quadratus, sit quadratus E. a Cum ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D, vel F, ad E, ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E: sed B, tertius ab vnitate est quadratus. b Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum: ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos, quadratum esse.

b 8. noni
c 24. octani

SED iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos

& duos intermittétes omnes, videlicet præter C, F, I &c. Nam si præter hos alius poteſt eſſe cubus, ſit D, cubus. Cũ ergo & F, cubus ſit, ſitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod erat D, E, F, eandem habeant rationem, quã tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D. Sed C, eſt cubus, cum ſit quartus ab unitate. Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit. quod eſt contra hypotheſim. Non igitur D, cubus eſt. Quod ſi E, credatur eſſe cubus; cum & C, cubus ſit, ſitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; exiſtente C, cubo, erit, & A, cubus. quod non ponitur. Non ergo E, cubus eſt. Quemadmodum autem oſtenſum eſt duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non eſſe, ita quoque eadem ratione oſtendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, eſſe cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 8. noni.

b 8. noni

c 23. elem

d 8. noni

e 8. elem

SCHOLIVM.

NON eſt autem neceſſe, ſi numerus, qui poſt vnitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul, & quadratum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cuius aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus poſſit eſſe cubus ſimul, & quadratus, non exiſtente primo ab vnitate cubo ſimul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui poſt vnitatem cubus quidem, non autem ſimul & quadratus.

Dico B, tertium eſſe cubum ſimul & quadratum; cubum quidem, quod primo exiſtente cubo, omnes cubi ſint, quadratum vero, quod tertius ſit ab vnitate.

Vnitas. B, 8. B, 64.

f 9. noni.

g 8. noni

SIT deinde A, poſt vnitatem quadratus quidem, non autem ſimul & cubus. Dico quartum C, eſſe cubũ

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

ſimul & quadratũ; h Cum bum quidem, quod quartus ſit ab vnitate; quadratum vero,

h 8. noni

[a] 9. noni

ro, [a] quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

SIT postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, praeter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

[b] 10. noni

enim primo non existente quadrato, [b] nullus alius quadratus sit, praeter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos. 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, [c] nullus alius sit cubus, praeter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de caeteris. Nam in hac loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquido constat ei, qui recte propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

[c] 10. noni

12.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, F, G. Dico quemlibet minorem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

quem numerorum A, B, C, D, E, F, G. Cum enim sit ex æquo vt C, ad G, ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C; numerum G: Sed vnitas metitur numerum D, per ipsummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipsum F, per A, quod sit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipsum G, per F, cum sit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat ostendendum.

[a] 20. defin.

[b] 3. prop.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem est ex his, quantum abest maior numerus a minore metiente, tantum distare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem esse debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem; vt

Vnitas: A, 3. B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729. G, 2187.

ex demonstratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per D, nimirum per se ipsum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interiecti sunt numeri.

HINC rursus efficitur, quemlibet numerum, qui se ipsum multiplicet; producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo distat, quantum ipse ab vnitate: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet; procreari numerum, qui tantum a maiore distat, quantum minor ab vnitate; propterea quod si numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, [c] *producatur ille, quem metitur. Ergo C, se ipsum multiplicans gignet F; cum F, tantum absit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipsum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quo-*

[c] 9. prop.

quod

que B, multiplicans D, faciet eundem F; quòd D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.

11. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimũ metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namque non metitur ipsum A; [a] erit E, cum primus sit, ad A, primus: hoc est, A, & E, inter se primi erunt.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

Metiatur E, ipsum D, per F, [b] atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in scholio præcedẽtis proposi. ostendimus; producetur idem numerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium, [c] Quare erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, sint inter se primi; [d] ac proinde in sua proportione minimi; [e] metietur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, [f] atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C; per B, [g] atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, secundum, ita G, tertius

[a] 31. sept.
[b] 9. prop.
[c] 19. sept.
[d] 23. sept.
[e] 21. sept.
[f] 9. pron.
[g] 9. pron.
[h] 19. sept.

tertium ad B, quartum. Quapropter cum A, & E, sint inter se primi, ac propterea in sua proportione minimi; [a] metietur æque A, ipsum G, & E, ipsum B. Metiatur E, ipsum B, per H, facta vt E, multiplicans H, faciat B. Metitur autem & A, ipsum B, per A, atque idcirco A, se ipsum multiplicans facit B, vt ex eodem scholio præcedentis propos. apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H, tertiũ, & ex A, medio in seipsum, [d] Quare erit vt E, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad H, tertium. Cum ergo E, & A, inter se primi sint; [e] ac proinde in sua proportione minimi; [f] æque metietur E, ipsum A, & A, ipsum H. Quod est contra hypothesim. ponitur enim E, ipsum A, non metiri. Quare falsum est E, ipsum A, non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipsum A, semper demonstrabitur E, ipsum A, metiri; Quod est absurdum. Metitur ergo E, ipsum A. Eodem argumento ostendemus quoscunque alios numeros primos ipsum D, metientes metiri quoque ipsum A; Eademque erit ratio si C, vel B, vltimus numerus statuatur.

[a] 23. sept.
[b] 21. sept.
[c] 9. pron.
[d] 20. sept.
[e] 23. sept.
[f] 21. sept.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D. Dico & E, ipsum A, metiri. Si enim nõ metiatur; [g] erit E, ad A, primus. Quia igitur A, & E, inter se primi sunt, & A, seipsum multiplicãs fa cit B, vt ex scho lio propos. præ cedentis constat, [h] erit B, ad E, primus. Quia ergo A, & B, ad E, primi sunt; fit autem C, ex A, in B, per idem scholium præcedentis propos. [i] erit C, ad E, primus. Rursus eodem modo, quia A, & C, ad E, primi sunt; & fit D, ex A, in C, ex eodem scholio præcedentis propos. [k] erit D, ad E, primus. Non igitur E, ipsum D, metitur. Quod est contra hypothesim. Metitur ergo E, ipsum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

Vnitas. A, 6. B, 36. C, 216. D, 1296. E, 3.

[g] 31. sept.
[h] 27. sept.
[i] 26. sept.
[k] 26. sept.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui

maior

maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiens, metiri potest vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonstratum est. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propositionis demonstratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipsum A, ostendit demonstratione affirmatiua E, ipsum A, metiri: quod uidetur fieri non posse. Nam si quis demonstrare instituat, Socratem esse album, ex eo, quod non est albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur afferre: Cuis tamen non absimile quid factum hic est in numeris ab Euclide, & in alijs nonnullis propositionibus, qua sequuntur. Cardanus quoque simile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propos. 201. gloriaturque se primum omnium hanc rationem demonstrandi reperisse quod arbitror eum nō dicturum fuisse, si diligentius uim huius demonstrationis expendisset, vel certe, si expendit, eam in memoriam reuocasset; quandoquidem ipso longe prior Euclides vsus est hoc etiam demonstrandi modo, vt ex hoc theoremate 12. est manifestum. Eodem genere demostrandi vsus est Theodosius lib. 1. sphæricorum propos. 12. vt ibidem monuimus.

CAETERVM ex demonstratis perspicuum est, quemcumque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipsum. [a] *Cum enim metiatur proximum vnitati; hic autem omnes subsequentes,* [b] *quod semper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris;* [c] *manifestum est, quod & ille omnes metiatur.*

a 12. noni
b 11. noni
c 11. prop.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui ve-

ro

ro poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continue proportionales quotcũque numeri A, B, C, D, quorum A. proximus vnitati ſit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipſos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D. Manifeſtum autem eſt, E, non eſſe numerum primum. Si enim primus ſit, & metiatur extremum D; [a] metietur quoque ipſum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur E, primus eſt, ſed compoſitus; [b] atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium eſſe non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; [c] metietur quoque ille alius primus eundem D, [d] atq; adeo & ipſum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipſum E, metitur. Metiatur iam E, ipſum D, per F. Dico F, diuerſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipſum D, per aliquem ipſorum A, B, C; [e] & viciſsim aliquis ipſorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipſum D, metitur,) metietur D, per E. [f] Cũ ergo quilibet ipſorũ A, B, C, metiatur D, per aliquẽ ipſorũ A, B, C; erit E, idẽ qui aliquis ipſorũ A, B, C, qđ eſt cõtra hypotheſim. ponitur. n. E, nõ idẽ, qui aliquis ipſorũ A, B, C. Nõ igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quoniã vero E, metitur D, per F; [g] metietur viciſsim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus: ſi enim ſit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus; [i] atque adeo cum aliquis

Vnitas. A, 5. B, 25. C, 125. D, 625.
E —— H —— G —— F ——

[a] 12. noni
[b] 33. ſept.
[c] 11 pron.
[d] 12. noni
[e] 8. pron.
[f] 11. noni
[g] 8. pron.
[h] 12. noni
[i] 23. ſept.

Vnitas. A,5. B,25. C,125. D,625.
E— H— G— F—

aliquis numerus primus metietur. quem rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quã A, metiatur F; cum F, metiatur D, extremum; , metietur quoque ille alius primus eundem D; [b] atque adeo & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metitur. Iam vero quoniã E, metitur D, per F; [c] fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium; [d] Ac proinde erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum: Metitur autem A, ipsum E, vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (relinquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & nõ primum, sed compositum, quẽ solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B; metiaturq; F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B; [e] & vicissim aliquis ipsorum A, B (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) metietur C, per F. Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B. quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniã autem F, metitur C, per G; [g] metietur vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C; metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod est absurdum. Non ergo G, primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G; cum G, metiatur C, vltimum; [k] metietur quoque ille alius

[b] 12. noni
[c] 9. pron.
[d] 19. sept.
[e] 8. pron.
[f] 11. noni.
[g] 8. pron.
[h] 13. noni
[i] 33. sept.
[k] 11. pron.

alius primus eundem G; atque adeo & ipsum A, vnitati proximum, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum G, metitur. [b] Iam vero quia C, fit ex F, in G; quòd F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in scholio propos. 11. huius lib. Fiet idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex F, secundo in G, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad F, secundum, ita G, tertius ad B, quartum. Metitur autem A, ipsum F, vt demonstratum est. Igitur & G, ipsum B, metietur. metiatur per H. Quia ergo G, diuersus ab A, metitur B, vltimũ (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; ostendemus similiter H, diuersum esse ab A; quemadmodum id ostensum est de numeris B, & G.

NAM si H, idem sit qui A; metiaturque G, ipsum B, per H; metietur vtique G, ipsum B, per A, [d] Et vicissim A, ipsum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A, ipsum B, per A, vt constat ex scholio propos. 11. huius lib. erit G, idem qui A. quod est absurdum. ostensum est enim G, non esse eundem, quem A. Non ergo H, idem est, qui A, sed diuersus. [e] Iam uero quia B, fit ex G, in H; quòd G, ipsum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in se, vt in scholio propos. 11. huius lib. docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in se ipsum. [f] Quare erit vt H, primus ad A, secundum, ita A, secundus ad G, tertium: At A, metitur ipsum G, vt est demonstratum. Igitur, & H, ipsum A, metietur, numerum primum. Quod est absurdum. Quare si A, primus est, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipsos A, B, C. Ac proinde si ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 12. noni

[b] 9. pron.

[c] 19. sept.

[d] 8. pron.

[e] 9. pron.

[f] 20. sept.

THEOR. 14. PROPOS. 14. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

N SIT

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipsos B, C, D, metiri ipsum A. Metiantur enim, si fieri potest, primus numerus E, diuersus à B, C, D, ipsum A, per numerum F. Quia igitur E, metitur A, per F; [a] multiplicans E, ipsum F, faciet A. [b] Quare singuli B, C, D, alterum ipsorũ E, F, metientur: non quidem ipsum E, primum, & ab ipsis diuersum: ergo ipsum F, qui minor est quam A. Quod est absurdum. Ponitur enim A, minimus, quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 9. pron.
b 32. sept.

SCHOLIVM

ADDIT hoc loco Gampanus sequens theorema ad ea, quæ sequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipsis: Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoq; alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione sumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compositus.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B, C, D, E, in ſua proportione minimi, in qua ſumantur etiam duo minimi F, G: Metiatur autem primò H, primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, vel certè ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit enim H, non primus, ſed compoſitus: c *Et ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L; & quatuor M, N, O, P; & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E.*

c 2. octaui

Quoniam

Quotiam igitur, vt A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81. sumptas ex modo pro- M, 8. N, 12. O, 18. P, 27. trahendi quotlibet numeros tradito in 1. pro- F —— F, 4. K, 6. L, 9. posi. lib. 8. numerus A, F, 2. G, 3.

sit ex F, in M; metiatur autem H, ipsum A; erit H, compositus ex scholio propos. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propositum; si vero ad M, qui quidem sit ex F, in I, vt cõstat ex demõstratione propos. 2. lib. 8. erit, ex scholio eiusdẽ propos. 32. li. 7. rursus H, cõpositus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propositum: si vero ad I, cum I, gignatur ex F, in se ipsum; erit H, compositus ad F, ex eadem scholio propos. 32. lib. 7. Quod si H, sit primus, ostendemus eodem modo, ex propos. 32. lib. 7. non autem ex scholio, eum metiri ipsum F.

DEINDE metiatur H, non primus secundum B. Quia ergo B, sit ex F, in N; erit vt prius H, compositus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propositum; si vero ad N, qui quidem sit ex F, in K; erit H, eodem modo compositus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propositum; si vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G; erit quoque H, compositus vel ad F, vel ad G. Quod si H, sit primus, demonstrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propos. 32. lib. 7.

RVRSVS metiatur H, non primus tertium C; qui cum fiat ex F, in O; erit H, compositus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propositum; si vero ad O, qui quidem fit ex F, in L; erit H, compositus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propositum; si vero ad L, cum L, gignatur ex G, in se; compositus quoque erit H, ad G. Quod si H, sit primus, probabimus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

PRAETEREA metiatur H, non primus quartum D; qui tum fiat ex F, in P; erit H, compositus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propositum; si vero ad P, qui quidem sit ex G, in L; erit etiam H, compositus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propositum; si vero ad L, cum L, producatur ex G, in se; erit quoque H, ad G, compositus. Quod si H, primus sit, ostendemus eodem modo ex propos. 32. lib. 7. eum metiri ipsum G.

EODEM modo si H, non primus metiatur vltimum E, ostendemus H, compositum esse ad G; Si vero H, primus

sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si verò H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique H, metiatur aliquem, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

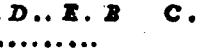
QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quædam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, perinde ac si eadem de numeris essent ostensa; non alienum instituto nostro duximus, nonnulla ex ijs, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idē & Barlaam monachum fecisse a nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

L

SI fuerint duo numeri, sumaturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B; Fiatque F, ex C, in A B: Item G H, ex C, in A D; & H I, ex C, in D E; & I K, ex C, in E B. Dico

Dico F, æqualem esse numeris G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex GH, H I, I K, composito.



Quoniam enim C, multiplicans A B, fecit F; a metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadē ratione A D, ipsius G H; & D B, ipsius H I; & E B, ipsius I K, pars erit à C, denominata, eadem nimirum, quæ A B, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, totus totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F; b Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum. a 2. prom. b 4. prom.

II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.

NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto in partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B; erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.

D ..... B
A ... C .. D. B

IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quam in duas secetur, vt ex apposita secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, nimirum quadratus ipsius A B, æqualis numeris, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B.

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus sub toto, & vna parte comprehensus æqualis est & illi, qui sub partibus continetur, numero, & illi, qui a prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum, qui fit ex toto A B, in partem A C, æqualem esse & ei, qui sub partibus A C, C B, continetur, & quadrato dictæ partis A C. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti A C, æqualis sit; erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc est, ex, A C, in A B; vel (quod idem est) ex A B, in A C, æqualis numeris factis ex D, hoc est, ex A C, in C B, & ex D, hoc est, ex A C, in A C, quadrato scilicet ipsius A C. Quod est propositum.

D . . . .
A . . . . C . . . . . B

IIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis est quadratis, qui a partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis sub partibus continetur.

SIT numerus A B, diuisus in A C, C B. Dico numerum quadratum ex A B, factum æqualem esse quadratis partium A C, C B, vna cum numero, qui fit bis ex parte A C, in partem C B. Nam ex 2. theorem. numerus quadratus ipsius A B, æqualis est numeris, qui sunt ex A B, in A C, & in C B. Est autem numerus, qui fit ex A B, in A C, per 3. theorema, æqualis numero genito ex A C, in C B, vna cum quadrato ipsius A C: Item numerus,

A . . . . . C . . . . B

rus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo æqualis numero producto ex A C, in C B, una cum quadrato ipsius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus æqualis est quoque numeris quadratis partium A C, C B, una cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod est propositum.

V.

SI numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus sub partibus inæqualibus contentus, una cum numero quadrato numeri inter duas sectiones medij, æqualis, est quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

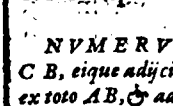
NVMERVS, n. AB, secetur in partes æquales A C, C B; & non æquales A D, D B. Dico numerum sub partibus inæqualibus A D, DB, contentum, una cum quadrato numeri intermedij C D, (qui quidem excessus est inter semissem AC, vel CB, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) esse æqualem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Num cum numerus quadratus ipsius C B, per 4. theorema, æqualis sit quadratis partium C D, D B, una cum plano numero bis cõprehenso sub C D, D B; numero vero comprehenso semel sub CD, DB, una cũ quadrato ipsius D B, æqualis sit, per 3. theorema, numerus factus ex C B, in D B; fit, vt si hic numerus factus ex C B, in D B, sumatur pro quadrato ipsius DB, una cum numero facto ex C D, in DB; numerus quadratus ipsius C B, æqualis etiam sit reliquo quadrato ipsius C D, una cum reliquo numero facto ex C D, in D B, semel, & numero ex C B; hoc est, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeri, qui fiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis est numero, qui fit ex toto A D, in D B. Igitur quadratus ipsius C B, æqualis erit quadrato ipsius C D, una cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc est, numero facto ex A D, in D B, una

A ..... C ... D .. B

cum quadrato ipſius C D, æqualis erit quadrato ipſius C B. Quod eſt propoſitum.

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.



NVMERVS enim A B, ſecetur in partes æquales A C, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam vno, nimirum ex A D, in adiectum B D, vna cum quadrato dimidij numeri C B, æqualem eſſe quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam vno, hoc eſt, quadrato ipſius C D. Cum enim quadratus ipſius C D, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C B, B D, vna cum numero bis comprehenſo ſub C B, B D, hoc eſt, quadratis partiũ C B, B D, vna cum numeris ſub C B, B D, & ſub A C, B D, comprehenſis, numeris autem contentis ſub C B, B D, & ſub A C, B D, & ſub B D, B D, hoc eſt, quadrato ipſius B D, æqualis ſit ex 1. theorem. numerus factus ex A D, in B D; ſit, vt ſi hic numerus factus ex A D, in B D, ſumatur pro quadrato partis B D, vna cum numeris factis ex C B, in B D, & ex A C, in B D, quadratus ipſius C D, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius C B, vna cum numero facto ex A D, in B D; hoc eſt, numerus factus ex A D, in B D, vna cum quadrato ipſius C B, æqualis ſit quadrato ipſius C D. quod eſt propoſitũ.

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus

dratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero, qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, una cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC.

A ..... C .... B

Cum enim, ex 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, una cum numero, qui fit bis ex AC, in CB; si quadratus ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, CB, CB, una cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, bis, fumatur numerus fallus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, una cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

VIII.

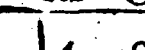
SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum, qui fit quater ex toto AB, in partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim

A ... C ... B ... D

numero BD, qui æqualis sit di-

Æe



cta parti C B; cum quadratis totius A D, compositi ex A B, & B D, siue dictæ partis C B, sit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, una cum numero qui fit bis ex A B, in B D, hoc est, quadratis numerorum A B, C B una cum eo, qui fit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum A B, C B, simul æquales numero bis comprehenso sub A B, C B, una cum quadrato numeri A C; fit, vt si pro quadratis numerorum A B, C B, sumatur numerus factus bis ex A B, in C B, una cũ quadrato ipsius A C, quadratum factus ex A D, æqualis sit numero, qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod est propositum.

IX.

Si numerus secetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli sunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS sit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos esse quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem excessus est inter semissem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis numerorum A C, C D, una cum numero bis, qui fit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis D B; erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, una cum numero bis, qui fit ex A C, hoc est, ex C B, in C D. At qui quadrato ipsius D B, una cum numero bis, qui fit ex C B, in C D, æquales sunt ex 7. theor. quadrati, qui fiunt ex C B, hoc est, ex A C, & C D. Igitur, si pro quadrato ipsius D B, una cum eo, qui fit bis ex C B, in C D, sumantur quadrati ipsorum A C, C D, erunt

qua

quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod est propositum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quispiam numerus: Quadratus compositi numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, simul dupli sunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero composito ex dimidio, & adiecto.

IIT numerus AB, diuisus in partes duas æquales AC, CB, cuique adijciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compositi ex toto AB, & adiecto BD, & quadratum adiecti numeri BD, utrosque simul, duplos esse quadratorum, qui sunt ex AC, dimidio, & ex CB, composito ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipsius AD, æqualis sit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc est, ex CB, in CD, si communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Vel per 7 theorem. quadrato ipsius BD, una cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales sunt quadrati numerorum CB, CB; & quadrato ipsius CB, æqualis est quadratus ipsius AC. Igitur si pro quadrato ipsius BD, una cum numero, qui fit bis ex CB, in CD, sumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc est, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD; æquales quadratis numerorum AC, CD bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod est propositum.

IAM

IAM vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, aequalis sit quadrato reliquae partis, vt ibi monuimus, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR. si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, aequalis est quadrato numeri medij AC;

[a] 20. sept. [1] erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB. Ablato iam CD, qui ipsi CB, sit aequalis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AB, detractus ad CD, ex toto AC, [b] 11. sept. detractum; [b] erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, aequalis, ad AD, ex AC, residuum. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit aequalis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad [c] 11. sept. DE, ex toto CD, detractum; [c] erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuus, hoc est, DE, ipsi AD, aequalis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE, ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, aequalis; & sic deinceps, nec unquam finis erit huius detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidetur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partium factus, aequalis sit quadrato reliquae partis. Quod est propositum.

ALITER. Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui

qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato ipsius A C, quinetuplum erit quadrati partis A C. Est autem numerus contentus quater sub A B, C B, una cum quadrato ipsius A C, quadratus; quippe cum æqualis sit quadrato numero, qui fit ex numero composito ex A B, & C B, per 8. theorema. Igitur duo numeri quadrati (nimirum is, qui quater continetur sub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 1. ad 5. vel 25. ad 5. Quod est absurdum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuidetur ita in C, vt is qui productitur ex A B, in C B, æqualis sit quadrato ipsius A C. Quod est propositum.

A C B

VERVM hoc idem clarius demonstrabimus ad propos. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipsis rationem habẽtium; Duo quilibet compositi, ad reliquum primi erũt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habẽtium. Dico quoslibet duos compositos, ad reliquum primos esse, nimirũ A, B, simul ad C; & B, C, simul ad A; & A, C, simul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex scholio propos. 35. lib. 7. manifestũ est ex demonstratione propos. 2. lib. 8. D, seipsũ multiplicante facere A; multiplicante vero ipsum E, facere B; atq; E, seipsum multiplicante facere C. Quia igitur D, E, minimi in sua proportione inter se primi sunt; [b] erit & vterq; D, E, simul ad quẽlibet illorũ primus. Itaq; cũ tã cõpositus ex D, E,

A, 9 B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

[a] 24. sept. [b] 30. sept.

a 26. sept. D,E, quam ipse D, ad E, primus sit; a erit quoq; numer
factus ex D,E, tanquam vno, in D, ad eundem E, prim
Qui autem fit ex D,E, tanquam vno, in D, æqualis est p
3. theoremâ scholij præcedêtis, & numero A, facto ex D
in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, comp
b 27. sept. siti, primi sunt ad E; b Ac proinde & ad C, qui factus
ex E, in se, primi sunt A, B, simul compositi.

c 30. sept. DEINDE quia, vt prius, c vterque D, E, simul pri
mus est ad quemlibet ipsorũ D, E; efficitur (eum tam c
positus ex D, E, quam ipse E, pri
d 26. sept. B, 12. C, 16. mus sit ad D,) d numerum factur
A, 9. ex D, E, tanquam vno, in E, pri
D, 3. E, 4. mum esse ad D. Qui autem fit e
D, E, tanquam vno, in E, æqual
est per 3. theorem. scholij antecedêtis, & numero C, fact
ex E, in se, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, si
e 27. sept. mul cõpositi, ad D, primi sunt, atq; adeo & ad ipsum A
qui factus est ex D, in se, primi sunt B, & C, simul com
positi.

f 30. sept. POSTREMO quia, vt prius, c vterque D, & E, simu
ad quemlibet ipsorum primus est; atq; adeo e contra qu
quilibet ipsorũ D, E, primus est ad compositum ex D, E
g 26. sept. h 27. sept. crit quoq; qui fit ex D, in E, ad compositũ ex D, E, pr
mus; h Ac proinde & idem qui fit ex D, in E, ad eũ qui fi
ex D, E, tanquã vno, in se, primus erit. Qui autem fit e
D, E, tanquam vno, in se, æqualis est, per 4. theorem. ant
cedêtis scholij, eis qui fiunt ex D
A, 9. C, 16. & E, in se ipsos, vna cum eo qui e
B, 12. D, in E, bis. Igitur & factus ex D
D, 3. E, 4. in E, primus erit ad eos, qui fiunt e
D, & E, in se ipsos, & ex D, in E, bis
Quoniã ergo duo numeri simul, videlicet compositus e
ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, i
E, atq; is qui fit ex D, in E, primi sunt ad aliquẽ ipsorũ, n
i 30. sept. mirũ ad eũ, qui fit ex D, in E, vt ostensũ est; Erunt etiam
duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiũt ex D, & E, i
se ipsos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui fit ex D
in E, inter se primi. Rursus quia duo numeri simul, videl
cet compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atq
is, qu

is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eũ qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostẽsum est; erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum. 2 30. sept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet eorũ reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; A, 8. B, 12. C, 18. D 27. *sumãturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D,* E --- F, 2. G, 3. H --- *numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autẽ E, aliquẽ eorũ, nimirũ D metietur quoq; E, alterum ipsorum F, G, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius libri. Atque idcirco ipsum E, & alterũ ipsorum F, G, aliquis numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur E; & E,*

A, 5. B, 12. C, 18. D, 27.
E —— F, 2. G, 3. H, ——

& E, tenitur metiri compositum ex A, B, G, & ipsum D; [a] metietur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur ex coroll. 3. propos. 2. lib. 8. [b] metietur quoque H, medios B, G; ac propterea & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur tum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, vt demonstrauimus; [d] metietur quoque idem H, reliquum A: Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. [e] Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.

[a] 11. pron.
[b] 11. pron.
[c] 10. pron.
[d] 12. pron.
[e] 3. octaui

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C; metietur eos, vt prius, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui rursum ex scholio propos. 14 huius lib. vel metietur alterum ipsorum F, G, vel compositus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsorum F, G. Itaque cum H, metiatur E; & E, compositum ex A, B, D; [f] metietur etiam H, eundem compositum ex A, B, D. Quia vero H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metiuntur, per corell. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C, [g] metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum; ex A, B, D, & detractum B, [h] metietur quoque H, compositum ex A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum A, & G, ipsum D, metitur, vt constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. [i] metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. [k] Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. [l] Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositi sunt. Ergo primi: Quod est propositum.

[f] 11. pron.
[g] 11. pron.
[h] 12. pron.
[i] 11. pron.
[k] 12. pron.
[l] 3. octaui

NON aliter ostendemus & A, C, D, compositos, esse ad B, primos; nec non, & B, C, D, simul ad A. Eademque ratio est de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

17. THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter se fuerint

rint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

SINT primi inter ſe A, & B. Dico non eſſe vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C.

Quoniam igitur A, & B primi ſunt inter ſe, [a] atque adeo in ſua proportione minimi; [b] ipſi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes. nimirum A ipſum B, & B ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A B primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium. Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A . . . .
B . . . . . [a] 23. ſept.
C ——— [b] 21. ſept.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint inter ſe primi, [c] minimi in ſua proportione. [d] Igitur æque metientur ipſos B, & E; nimirum A, ipſum

A. 8. B. 12. C. 18. D. 27. E ——

[c] 23. ſept. [d] 21. ſept.

ipſum B, & D, ipſum E. Ac-
A, 8. B, 12. C, 18. D, 27. E.— qui eſt vt A, ad B, ita B, ad C: Ergo cum A, metiatur
[a] 11. prop. ipſum B; & B, ipſum C, metietur; [a] atque ob id & A, ipſum C, metietur. Et quia eſt vt B, ad C, ita C, ad
[b] 11. prop. D; metitur autem B, ipſum C; metietur & C, ipſum D. Quare A, metiens ipſum C, [b] metietur quoque ipſum D. Metitur vero & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A, D, inter ſe primos. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eodem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad alium. Quocirca ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

19.

PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri ſint A, & B, oporteatque conſiderare, an inueniri poſsit tertius ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam
A, 4. B, 7. numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B, primi inter ſe ſunt, aut non. Si ſunt
[c] 16. noni inter ſe primi [c] perſpicuum eſt ex demonſtratis, non poſſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si vero non ſunt A, & B, inter ſe primi; multiplicans B, ſe ipſum faciat C. Aut igitur A, metitur ipſum C, aut non. Metiatur primum A, ipſum C, per
A, 4. B, 6. D, 9. C, 36. D. Dico ipſis A, B, inueniri poſſe tertium proportionalem, immo ipſum D, eſſe tertium proportionalem. Cum
[d] 9. prop. enim A, metiatur C, per D, [d] fiet C, ex A, in D: Fit autẽ ex conſtructione, idem C, ex B, in ſe ipſum. Igitur, qui continetur ſub extremis A, D, æqualis eſt ei, qui ex me-
[e] 20. ſept. dio B, deſcribitur; [e] Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad D. Quare D, inuentus eſt tertius proportionalis ipſis A, B.

SED

SED non metiatur A, ipsum C. Dico ipsis A, B, nō posse reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri potest, inuentus sit D, ita vt
sit A, ad B, quemadmodum A, 6. B, 4. D —— C, 16.
B, ad D Quoniam igitur est,
vt A, ad B, ita B, ad D; erit numerus contentus sub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in se ipsum, hoc est, ipsi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; metietur A, ipsum C, per D: sed & non metiri ponitur. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, secundo in se ipsum. Eadem via considerabimus, an ipsis B, & A, inueniri possit alius tertius numerus, ad quem ita sit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis considerauimus, &c. Quod faciendum erat.

[a] 20. sept.

[b] 7. prom.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, considerare, an possit ipsis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, siue deinceps proportionales, siue non; oporteatque considerare, an possit reperiri quartus ipsis proportionalis, hoc est, an sit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216.
Multiplicans B, ipsum C, faciat D. A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72.
Aut igitur A, ipsum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipsum D, per E. Dico ipsis A, B, C, inueniri posse quartum proportionalem, immo ipsum E, esse quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per constructionem. Igitur qui sub extremis A, E, continetur, æqualis est ei, qui sub B, C, secundo, & tertio cōtinetur; Ac propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuētus est E, ipsis A, B, C, quartus proportionalis.

[c] 9. prop.

[d] 19. sept.

SED iam non metiatur A, ipſum D. Dico ipſis A, B, C, non poſſe inueniri quartum proportionalem. Sit enim, ſi fieri poteſt, inuentus quartus proportionalis E; ita vt ſit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo A, 4. B, 6. C, 9. E—— D, 54. A, 3. B, 4. C, 10. E—— D, 40. quatuor numeri A, B, C, E, proportionales ſunt,

a 19. ſept. [a] erit numerus contentus ſub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, ſecundo fit in C, tertium, hoc eſt, ipſi D. Quare

b 7. pron. [b] cum D, fiat ex A, in E; metietur A, ipſum D, per E: ſed & ponitur non metiri. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, ſecundo in C, tertium. Eadem methodo conſiderabimus, an ipſis C, B, A, inueniri poſsit aliquis quartus, ad quem ita ſe habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis conſideraui mus, an poſsit, &c. Quod erat faciendũ.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propoſitionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19. demonſtrata ſunt, intelligi debent de numeris integris. Nam ſi de fractis loquamur, poteſt quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter ſe primi ſint. Nam datis duobus, ſi quadratus numerus ſecundi diuidatur per primũ, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. ſi quadratus numerus ſecundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3, inuenietur tertius proportionalis 21 1/3. hoc modo. 3. 8. 21 1/3. Quia enim diuiſis 64. per 1. ſit numerus 21 1/3. producetur numerus diuiſus 64. ex multiplicatione Quotientis 21 1/3. per diuiſorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus

c 20. ſept. *64. factus ſit ex medio numero 8. in ſe; [c] erunt 3. 8. 21 1/3. continue proportionales.*

DATIS autem tribus numeris, ſi numerus ex ſecundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. ſi numerus 120. ex ſecundo in tertiũ genitus diuidatur per primum 9. reperietur quartus proportionalis 13 1/3, hoc modo 9. 6. 20. 13 1/3.

Cum

Cum enim diuiſus 120. per 9. fiat 13 $\frac{1}{9}$. producetur numerus diuiſus 120 ex multiplicatione Quotientis 13 $\frac{1}{9}$. per diuiſorem 9. ex 15. qua in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autẽ idem numerus diuiſus ex ſecundo in tertium. [a] *Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$. proportionales ſunt.* [a] 19. ſept.

EX *his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, ſi ipſis alius poteſt inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis.*

THEON, *& qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus commandinus, quatuor membris hoc problema abſoluunt. Aut enim (aiunt) tres dati numeri & deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; Aut non deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi primi inter ſe; Aut deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi non primi inter ſe; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter ſe primi. Vbi mirari ſatis non poſſum, quo nam modo diligentiſſimi Euclidis interpretes, & in aliis quidẽ demonſtrationibus vigilantiſſimi, in ſecundo membro huius problematis demonſtrando dormitarint, & quaſi ſui oblui, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, ſi tres numeri dati non ſint deinceps proportionales, ſed eorum extremi inter ſe primi, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falſum eſt, & demonſtratio, qua id ipſum comprobare nituntur, vitioſa. Nam falſitas huius rei perſpicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. ſunt inter ſe primi, & nihilominus eis adiungi poteſt quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, eſſe vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio ſit ſubdupla? Idem videri poteſt in exemplis aliis infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum trium ſunt inter ſe primi, cum tamen ipſis adiungatur poſterior quartus proportionalis. Falſum ergo eſt, illis dari non poſſe quartum proportionalem. Quod autem vitioſa ſit eorum demonſtratio, qua hoc probare conenduntur, perſpicuum fiet, ſi demonſtrationem ipſam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.*

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter se primi. Dico ipsis inueniri nullo modo posse quartum proportionalem. Si enim po-

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E — *test inueniri, sit ille D, ita vt sit quẽadmodum A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex aequo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed sunt A, C, inter se primi,* [a] *& ob id minimi.* [b] *Igitur metientur aequè ipsos C, E, nimirum A, ipsum C, & C, ipsum E. At vero & A, se ipsum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter se. Quod fieri non potest. Ipsis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.*

[a] 23. sept.
[b] 21. sept.

HÆC est eorum demonstratio, in qua assumunt esse vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri posse, nusquam demonstrarunt: Immo hoc ipsum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis possit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc constet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro concesso assumant, vt hic idem fieri non posse, ostendunt; liquido constat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonstrando. Quin etiam, quotiescunque quatuor numeri dantur proportionales, sed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter se sunt, quales ponuntur esse A, B, C, D; nulla ratione fieri potest, vt detur alius, ad quem ita se habeat quartus, sicut secundus ad tertium: quod tamen ipsi tanquam concessum, atque probatum assumunt; quandoquidem sine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita se habeat quartus D, vt B, secundus ad C, tertium. Hoc vero non posse fieri, facile demonstrabimus eodem argumento, quo ipsi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, sintque A, & C, primus, & tertius, inter se primi. Dico fieri non posse, vt sit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, si potest fieri, vt B, ad C, ita

ita D, ad E. Est ergo ex aequo, vt A, ad G, A, 4. B, 12. C, 3. D, 9. E — ita C, ad E; Atque adeo vt ipsi ostenderunt, metietur A, duos A, & C, primos inter se. Quod est absurdum. Non ergo fieri potest, vt D, ad E, sit, quemadmodum B, ad C. Quare apertissime falsum in demonstratione secundi membri assumpserunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem sequuntur.

PRIMVM vero membrum perspicue & aperte ostendunt. Nam si tres numeri deinceps proportionales sunt, & eorum extremi inter se primi, [a] manifestum est, ex demonstratis, non posse ipsis quartum proportionalem inueniri. Postremum tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema absoluimus. [a] 17. huius

THEOR. 18. PROPOS. 20. 21.

PRIMI numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorũ numerorũ.

SINT propositi primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipsis A, B, C, plures esse primos numeros. [b] Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; apponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus est, aut non primus. sit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures proposita multitudine A, B, C. [b] 38. sept.

A, 2. B, 5. C, 7.
30 1
D ——— E . F

SED iam non sit primus D F, [c] Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipsorũ A, B, C, eundẽ esse. Si namque G, sit idẽ, qui vnus ipsorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipsum D E; & G, eundẽ D E, metietur. Quare G, metiens totum D E, & detractum D E, [d] metietur quoq; E F, reliquũ, numerus vnitatẽ. Quod est absurdum. Ergo G, primus non est idem, qui vnus ipsorum A, B, C; Ac proinde [c] 33. sept.

A, 3. B, 5. C, 7.
105 1
D ——— E . F
55
G ——

[d] 11. prop.

inde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures propo sita multitudine primorum numerorũ A, B, C. Eademq; via plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet D F, si primus est, vel certe G, qui ipsum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

22. THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B; & F, ipsius B C; & G, ipsius C D.

A . . . . B . . . . C . . . . . D
E . . . F . . . G . . . .

Quoniam igitur est vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod semper fit proportio dupla.) * erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G,

* 12. sept.

E,F,G, simul. Est autem AB, ipsius E, duplus Igitur & totus A D, compositi ex E,F,G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par A B, B C, C D. D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cum enim A B, BC, CD, DE, sint impares; differet A...B.....C.....D.....E quilibet vnitate a pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. b Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

a 21. noni

b 21. noni

THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorũ multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata

A . . . . B . . . C . . . . . . E . D

ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus CE, par. Est autẽ & A C, compositus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. Igitur & AE, compositus ex paribus AC, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod ostendendum erat.

a 22. noni

b 21. noni

SCHOLIVM

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam demptæ vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate. Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rursus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari sola vnitate differat. Quod est propositum.

c 21. noni

25.

THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

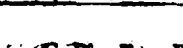
EX pari numero A B, detrahatur par CB. Dico & reliquum AC, parem esse. Aut enim CB, par detractus dimidia pars est ipsius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor. Sit primũ dimidia pars.

A . . . . . C . . . . . B

Cum igitur ipsi C B, pari æqualis sit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

SED iam CB, par detractus maior sit, vel minor dimidia parte ipsius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; sit D B, dimidia pars ipsius A B; & E B, dimidia ipsius C B. Itaque cum sit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad EB, dimidium;

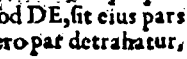
midiũ; erit permutando vt AB, ad CB, ita DB, ad EB; & diuidendo vt AC, ad DE, ita CB, ad EB; Rursusque permutando, vt AC, ad DE, ita CB, ad EB. Atqui CB, ipsius EB, duplus est: Igitur & AC, ipsius DE, duplus erit; Ac propterea AC, cum bifariam diuidatur, (quod DE, sit eius pars dimidia) par erit. Si ergo a pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.



THEOR. 23. PROPOS. 25. 26.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero AB, impar detrahatur CB. Dico & reliquum AC, imparem esse. Detracta enim vnitate CD, ex CB, reliquus sit numerus DB, par. Quia igitur AC & totus AB, ponitur par; erit & reliquus AD, par. Dempta ergo vnitate CD, reliquus AC, impar erit. Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.



a 24. noni

THEOR. 24. PROPOS. 26. 27.

SI ab impati numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero AB, impar detrahatur CB. Dico reliquum AC, parem esse.
Detracta enim DB, vnitate ex imparibus AB, CB; erunt reliqui AD, CD, pares. Quia ergo ex pari AD, par aufertur CD; erit & reliquus AC par. Quare si ab impari numero impar detrahatus, &c. Quod erat demõstrãdũ.

b 24. noni

THEOR.

28. **THEOR. 25. PROPOS. 27.**

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

EX impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum AC, imparem esse. Detracta enim A D, vnitate ex impare A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus DC, par quoq; erit; Ac proinde addita vnitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

a 24. noni

A . D . . . . C . . . . . B

29. **THEOR. 26. PROPOS. 28.**

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit.

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot in A, sunt vnitates. Quare cum C, sit par, componetur C, ex tot paribus ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A; Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

b 21. noni

A . . . B . . . .

C . . . . . B

SCHOLIVM.

EADEM demonstratione ostendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM

NAM rursus C, componatur ex tot paribus ipsi B, aequalibus, quot in A, continentur vnitates, &c.

A .. B .....
C .....

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur aequales.

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, impare esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirum æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A .. B .....
C .....

[a] 23. noni

COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur aequales.

EX

EX CAMPANO.

NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.

METIATVR impar A, parem B, per C, Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [b] erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.

[b] 29. noni

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.

METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [b] erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.

[b] 28. noni

SCHOLIVM.

EX his clarissimè quoque demonstrabimus theorema 11. lib. 2. numeris non posse accommodari: Id quod etiam in scholio propos. 14. huius lib. aliter ostendimus; recepimus autem hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita ut numerus ex A B, in C B, factus, aequalis sit quadrato reliqua partis A C. Aut igitur utraque pars A C, C B, impar est, aut maior A C, impar, & minor C B, par; aut contra, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique utraque pars A C, C B, par. Sit primum utraque pars A C, C B, impar, [c] ideoque totus numerus A B, par. [d] Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui vero ex A C, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos. 29. Cum ergo numerus ex A B, in C B,

[c] 22. noni
[d] 28 noni.

C B, genitus ponatur aequalis ei, qui fit ex A C, in se; erit par numerus impari aequalis. quod fieri non potest.

DEINDE sit A C, impar, & C B, par, ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [a] Quia ergo numerus ex A B, impare in parem. C B, factus, par est: & numerus ex impare A C, in se genitus, impar, ex coroll. huius propos. 29. erit rursus ille par huic impari aequalis. quod est absurdum. [a] 28. noni

TERTIO sit A C, par, & C B, impar; ideoque ex scholio propos. 23. huius lib. totus A B, impar. [b] Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar est: & numerus ex pare A C, in se genitus, par, ex coroll. propos. 28. huius lib. erit rursus ille impar huic pari aequalis. quod absurdum est. [b] 29. noni

QVARTO sit vtraque pars A C, C B, par. Inuentis igitur, ex scholio propos. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad C B; [c] erunt D, E, inter se primi: ac proinde ambo pares non erunt, sed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia est, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus D E, ad D: [d] Est autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex A B, in C B, aequalis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoque vt totus D E, ad D, ita D, ad E, [e] ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, aequalis erit quadrato ipsius D. Totus ergo numerus D E, factus est in partes D, E, quarum vel vtraque impar est, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto D E, in partem E, aequalis sit quadrato alterius partis D. quod fieri non posse, iam demonstratum est in numero A B, quando vtraque pars A C, C B, vel impar est, vel vna impar, & altera par. Constat ergo propositum. [c] 24. sept. [d] 20. sept. [e] 19. sept.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 33.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiũ quoq; ipsius B, metiri. Metiatur A, ipsũ B, per C. Erit ergo,

ergo, ex ijs, quæ in antecedente propos. ex Campano demonstrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiã
[a] 8. pron. partem habebit. Itaque cum A metiatur B per C, metietur quoque C, ipsum B, per A;
A... C....
B .....
Ac proinde C, pars erit ipsius B, denominata ab A, vt ad 3. definitionẽ lib. 7. docuimus. Quoniam vero est vt C, ad dimidium sui, ita B, ad dimidium sui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipsius C, ad dimidiam partem ipsius B. Est autem C, pars ipsius B, denominata ab A, vt ostensum est; erit & dimidium ipsius C, dimidij
[b] 40. sept. ipsius B, pars ab eodem A, denominata, [b] Ac propterea A, dimidium ipsius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendũ.

34. THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus sit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus sit ad numerum B, cuius duplus sit C. Dico A, ad C, quoque primum esse. Si enim A, C, non sunt inter se primi; metietur eos aliquis numerus, qui sit D; qui necessario impar erit. Nã si sit par, cũ metiatur imparem A;
A ..... B.....
C ..... D
[c] 28. noni erit A. factus ex D, pari in eum numerũ, per quem metitur, par. Quod est absurdum. ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metitur; (est enim C, par. cum dimidium habeat B.)
[d] 29. noni [d] metietur quoque numerum B, eius dimidium: Metitur autem & A. Igitur D, ipsos A, B, primos inter se metitur. Quod est absurdum. Non igitur A, ad C, primus non est. Ergo primus. Quapropter si impar numerus ad aliquem numerum primus sit, &c. Quod erat ostendendum.

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Namsi primus est ad duplum, [a] *primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.*

[a] *31. noni*

THEOR. 30. PROPOS. 32. 35.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tãtum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est. Nam exposita vnitate, cum A, sit binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [b] Quare A, quilibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, vtpote dupli a binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E. 32.

[b] *11. noni*

QVOD autem ijdem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continue proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirũ binarius; [c] nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E;

[c] *13. noni*

qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis facile colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum.

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.
I ---- H ---- G -----

Sint. n. A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hac demonstratis omnes sunt pariter pares tantum. Dico nullum alium esse pariter parem tantum, prater eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeo si ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantũ inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad unitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars unitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sint a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F, ponitur autẽ, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, praeter eos, qui a binario sunt dupli.

36. THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT

HABEAT numerus A dimidiam partem numerum imparem. Dico A, esse pariter imparem tantum. Quod enim sit pariter impar, ita perspicuum fiet. Quoniã A dimidium habet imparem; metietur binarius numerus par ipsum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar est. Quod autem idem A, sit pariter impar tantum, hoc modo demonstrabimus. Sit B, dimidia pars ipsis A; & C, binarius. Si igitur A, non est pariter impar tantum; ipse erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur fit A, ex D, in E: sed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartũ æqualis est ei, qui fit ex D, secundo in E, tertium. [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipsum B, metietur, par impa rem. Quod est absurdum. Non est ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca si numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . .
B . . . . . C . .
D —— E ——

[a] 9. pron.
[b] 19. sept.

SCHOLIVM.

ITAQVE si omnium numerorum imparium dupli sumantur, inuenientur omnes numeri, qui sunt pariter impares tantum.

Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.	*Quod enim quilibet illorum sit pariter impar tãtum, constat ex hac propositione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi soli sint pariter impares tantum, perspicuum erit ex sequenti theoremate, in quo demõstratur, omnes pares, qui nec a binario sunt dupli, neque dimidios habent impares, esse pariter pares, & pariter impares. Cum ergo*
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.	

nullus alius par habeat dimidium imparem, praeter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, praeter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparem.

37. ## THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neque sit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet.

A . . . . . Nam cum dimidium habeat parem, metietur cum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, [a] cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque a binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 29. noni

SCHO-

SCHOLIVM.

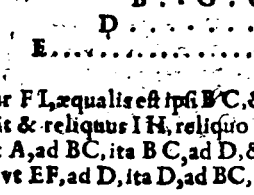
FACILE ex hic inuenietur omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

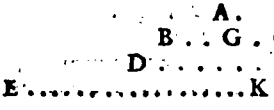
PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia vero est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque





est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, & H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D. B C. A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc est, vt B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

* 12. sept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum cõtinue proportionalium, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & vltimo dematur, fiatque vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad aliũ. Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijcia-

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

tur vltimus, habebitur tota summa. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt, excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirũ vnitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo, erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summã omnium, excepto vltimo, si secũdus numerus 1. multiplicetur per tertiũ 2186. fiet numerus 2186 qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si addatur summæ inuentæ 1093. procreabitur summa omnium 3280.

THEOR.

THEOR. 34. PROPOS. 36. 39.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A,B,C,D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, esse numerũ perfe

Vnitas. A,2. B,4. C,8. D,16.
E,31. G——62. H,124. I,248. F——496.
K,31. M,31. L,31. N,465.
O—— P ——

ctum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nimirum E,G,H,I. Quia igitur A,B,C,D, eandem rationem habent, quam E,G,H,I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [a] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [b] ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I, duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. [c] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (Cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui

[a] 19. sept.
[b] 7. pron.
[c] 35. pron.

compositus eidem E, per constructionem, est æqualis) erit compositus ex LN, nimirum ipsc F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, simul. Quare cum vni-

Vnitas. A, 2. B, 4. C. 8. D. 16.
E, 31. G——62. H, 124. I, 248. F——496
K, 31. M, 31. L, 31. N. 465.
O——P——

tas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipsum F; (Cum enim F, factus sit ex E, in D; [a] metietur D, ipsum F; [b] atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, [c] qui ipsum D, metiuntur. Rursus cum I, ipsum F, metiatur, vt ostensum est, [d] metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, [e] qui ipsum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipsum F, metiatur, vt mox ostendemus; Erunt unitas & numeri A, B, C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere potest: Quibus cum æqualis ostensus sit ipse F; erit F, ex definitione; perfectus.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipsum F, metiatur, ita demonstrabimus. Metiatur, si fieri potest, alius numerus O, præter illos, ipsum F, per P; [f] atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem P, factus est ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, secundo in O, tertium; [g] ac propterea est vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cũ A, B, C, D, ab unitate sint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [h] vltimum D, nullus alius, præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipsorum A, B, C; non metietur O, ipsum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E, ipsum P, metietur. Cum ergo E, primus sit, [i] erunt E, & P, inter se primi; [k] ideoq; in sua proportione minimi: [l] Ac proinde æque metietur E, ipsum O, & P, ipsum D. [m] Nullus vero alius præter A, B, C, ipsum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipsorũ A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot sunt B, C, D, tot ab E, sumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; [n] Ac proinde idem numerus

[a] 7. pron. [b] 11. pron. [c] 11. nons [d] 11. pron. [e] 11. noni
[f] 9. pron. [g] 19. sep. [h] 13. octaui
[i] 31. sept. [k] 23. sept. [l] 21. sept. [m] 23. octa. [n] 19. sept.

tus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, secundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem est, qui O. Quod est absurdum. ponitur enim O, diuersus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipsum F, metitur, sed ipsum soli A, B, C, D, E, G, H, I, metiuntur. Quam ob rem, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonstrandum. * 19. sept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus simul sumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipsi æquales sunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in vnam summã colligantur, donec compositus sit numerus primus; Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorũ, perfectus. Quod si ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, sumantur tot continue dupli (ipso primo etiam computato) quot sunt numeri illi dupli ab vnitate, exclusa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, una cum ipsa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere potest. Quæ omnia perspicua sunt ex demonstratione theorematis, & facile ex subiectis exemplis percipi possunt. Vt quia numerus 3. compositus ex 1. 2. primus est; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 3. Item, quia cõpositus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus est: idcirco 28. factus ex 7. in 4. est perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. hoc est, 15. non est primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compositus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus est; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ sunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc locò demonstrare proprietates quasdam propor-

proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. septimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, exposuimus. hinc exordientes.

I

QVOLIBET numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerso ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuisus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico esse, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiso A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. scripsimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, secundo in E, tertium; a *erit vt B, primus ad C, secundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod est propositum.*

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

a 19. sept.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiso, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus respondentibus conuerso ordine proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, sint Quotiens F, G, H, I. Dico esse, vt B, ad C, ita G, ad F: Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifestum est ex theoremate 1. proxime demonstrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Itē cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita.

A, 48. B, 2. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 3.

ita H, ad G. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse.

A, 15.
B, 1. C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15, G, 7 1/2, H, 3 3/4, I, 1 7/8.

Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H; Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

IIII.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum summa D: Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, vt D, ad A, B, C, sigillatim, ita H, ad E, F, G,

A, 3. B, 6. C, 20.
D, 29.
E, 6. F, 12. G, 40.
H, 58.

E, F, G, ſigillatim. Cum enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt, H, ad G. quod eſt propoſitum.

QVIA igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F. quod eſt propoſitum.

DENIQVE quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdē proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM, vt in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſq; proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quæq; per ſuum, diuidatur. Eademq; ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſ.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continuè proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes;

Et

Et horum ſecundorum Quotiẽtum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitũ: procreabuntur alternis ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT cõtinue proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorũ ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotiẽtes F, G, H, I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandẽ continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A, B, C, D: Et Quotientes L, M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quã numeri A, B, C, D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cũ ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L. &c. quod eſt propoſitum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8
E. 15.
F, 15. G, 7 1/2. H, 3 3/4. I, 1 7/8.
K, 28 1/8.
L, 1 7/8. M, 3 3/4. N, 7 1/2. O, 15.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorũ ab extremis æqualiter diſtantium, vel deniq; (ſi Quotientum numerus

merus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in se.

SINT primum quotus numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D, E, F, quorum summa G,

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 32. G, 63.

H, 63. I, 31 1/2. K, 15 3/4. L, 7 7/8. M, 3 15/16. N, 1 31/32. O, 124 1/2.

per ipsos singillatim divisa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum summa O. Dico summa O, æquale esse numero qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, sunt continue proportionales eodem ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, ut I, ad H. a *Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc est, idem ex H, in N, qui ex I, in M. Eademq; ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. summa O, divisa per H, I, K, L, M, N, producit eosdem Quotientes converso ordine, hoc est, summa O, divisa per H, facit Quotientem N; producetur summa O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.*

a 19. sept.

SINT deinde quotus numeri multitudine impares continuè proportionales A, B, C, D, E, quorum summa E, per ipsos sigillatim divisa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum summa M. Dico summa M, æqualem esse numerum genitum ex G, in L; & ex H, in K; & ex I, in seipsum. Quod enim æqualis sit ei, qui fit ex G, in L, & ex H, in K, demonstrabimus, ut prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, continue proportionales sunt; b *erit numerus ex H, in K, genitus, id est, summa M, æqualis numero, qui ex I, in seipsum ducto generatur. quod est propos.*

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 31. G, 31. H, 15 1/2. I, 7 3/4. K, 3 7/8. L, 1 15/16. M, 60 1/16.

b 20. sept.

HINC fit, quando numerus terminorum est impar, summam Quotientum esse numerum quadratum, cuius latus, sive radix, est medius terminus.

ITAQVE

ITAQVE si inueniendi sint quotcunque numeri continuè proportionales in data proportione, quorũ summa aqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis aqualiter distant: accipiendi sunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam si eorum summa per ipsos sigillatim diuidatur; erunt Quotientes quasiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perspicuum est: Quod si desiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum summa sit numerus quadratus, cuius latus, siue radix sit medius terminus: sumendi sunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumq; summa per eos sigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quasiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile sanè est, posse reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium summa aqualis sit producto ex primo in vltimum; & ex quibuslibet duobus, qui ab extremis aqualiter distant, inter se multiplicatis; & denique, si terminorum numerus est impar, ex medio termino in seipsum multiplicato.

SIC etiam si quis optet duos numeros in data proportione, quorum summa aqualis sit numero producto ex vno in alterum, sumat duos numeros in data proportione quoscunque, eorumq; summam per vtrumq; dimidat. Quotientes enim dabunt numeros quasitos, vt ostensum est: quia videlicet eorum summa aqualis est numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc est, in secundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione sesquiquinta, quorum summa aqualis sit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione sesquiquinta, nempe 6 & 5. eorumque summa 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{1}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. sunt numeri quasiti. Habent enim proportionem sesquiquintam datam, & tam eorum summa, quàm numerus ex multiplicatione eorum productus, est $4\frac{1}{30}$.

MINV-

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum

DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ *A B*, *C B*, eundem habentes denominatorem, & numerator *C*, sit vnitas. Dico ita esse minutiam *A B*, ad minutiam *C B*, vt est numerator *A*, ad numeratorem *C*. Quoties enim vnitas *C*, continetur in *A*, toties minutia *C B*, in minutia *A B*, includitur; propterea quòd minutia *AB*, diuiditur in tot minutias minutiæ *C B*, æquales, quot vnitates sunt in *A*, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem *C*, & denominatorem *B*. Igitur eadem pars est vnitas *C*, numeri *A*, quæ minutia *C B*, minutiæ *A B*; ac proinde est, vt vnitas *C*, ad *A*, ita minutia *C B*, ad minutiam *A B*: Et conuertendo, ita *A*, ad *C*, numerator ad numeratorem, vt minutia *AB*, ad minutiam *CB*. quod est propositum.

A, 6. *C*, 1.
B, 11. *B*, 11.

, 20. defin.

QVONIAM vero minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiuspiam numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quòd falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibuslibet etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosus lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas asserimus.

SINT

SINT ergo data minutia $\frac{6}{11}$. *&* $\frac{1}{11}$. *particula, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius* $\frac{1}{11}$. *est 4. &* $\frac{6}{11}$. *sunt 24 perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.*

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniuersum de quibuscunq; duabus minutijs eiusdem denominationis, etsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quacunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia AB, ad suum integrũ. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, æqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit æqualis. Quando enim numerator denominatori est æqualis, minutia suo integro æquiualet; quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat. [a] *Quoniã igitur est, vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex æquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, æqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum. quod est propositum.*

A, 3.	*C, 1.*	*D, 5.*
B, 5.	*B, 5.*	*B, 5.*

[a] *1. huius*

ALITER. Sit primum data minutia A E, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C. sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quòd tot minutiæ ipsi AB, æquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vni-

A, 1.	*C, 1.*	
B, 5.	*C, 30.*	

[a] 20. defin. tas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. [a] Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod est propositum.

DEINDE non sit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas

A, 3. D, 1. C, 1. & denominator idem B, qui minutiæ

B 5. B, 5. C, 30. A B. [b] Et quia est, vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia

[b] 1. huius A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minutia D B, ad integrum C, vt proxime demonstrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod est propositum.

ITAQVE si data minutia $\frac{3}{5}$ sit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita esse 18. ad 30. vt est 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars est numeratoris à denominatore denominata.

SIT qualibet minutia A B. Dico eam esse partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. [c] Quoniam enim est, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia

[c] 2. huius A, 3. C, 1. A B, ad suum integrum C; erit permutando, vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo

B, 5. C, 30. integrũ C, sit pars denominatoris B, (hoc est, integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore B.) ab ipso denominatore B, denominata; (Cum enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipsum integrum toties acceptum, quoties vnitas est in denominatore; sit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quoties vnitas est in denominatore) erit quoque minutia A B, numeratoris A, (hoc est, integri toties accepti, quoties

quoties est vnitas in numeratore A.) eadem pars a denominatore B, denominata. quod est propositum.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. esse huius integri 30. cuius $\frac{1}{5}$. sunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc est, valet 90. & denominator 5. valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. sumitur respectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque.) liquido constat, 18. esse quintam partem numeratoris, hoc est, triam vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, qua tres vnitates faciunt 90. partem, inquā, a denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars est denominatoris, hoc est, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. significat, qua quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, a denominatore 5. denominata.

IIII.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propositione ostensum est de duabus minutijs, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonstratur hic de quibusuis minutijs. Habeant ergo dua minutia A B, C B, eundem denominatorem B. Dico esse minutiam A B, ad minutiam C B, vt est A, ad C, numerator ad numeratorem. [a] *Quia enim est, vt A, ad B, ita minutia A B, ad suum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B;* (*Nam* [b] *cum sit, vt C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B.*) *erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B. quod est propositum.*

A, 6. B, 7. C, 3. B, 7.

[a] 2. huius

[b] 2. huius

DATAE minutia $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. *sint huius integri 28. enim* $\frac{6}{7}$ *sunt 24 &* $\frac{3}{7}$ *sunt 12. vbi perspicuum est, ita esse 24. ad 12. vt est numerator 6. ad numeratorem 3:*

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem.

SINT dua minutia AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico esse minutiam AB, ad minutiam CD, vt est F, ad G. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H, [a] *erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B,* [b] *ita est minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rursus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H,* [c] *erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D. ad C, ita est integrum ad minutiam CD. (Nam* [d] *cum sit, vt C, ad D, ita minutia CD, ad integrum, erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam CD.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam CD. Ex aquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia AB, ad minutiam CD. quod est propositum.*

a 18. sept.
b 2. huius
c 18 sept.
d 2. huius

F, 10. G, 12.
A, 2. × C, 4.
B, 3. D. 5.
H, 15.

F. AB.
H. Integrum.
G. CD.

SI dua minutia $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$ *sint particulae numeri 30. erunt dua tertiae eius, 20. at quatuor quintae eiusdem, 24. Perspicuum autem est, ita esse 20. ad 24 vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati sunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.*

ITAQVE si productus numerus F, aqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia AB, minutiae CD, aqualis: si minor, minor: Et si maior, maior; propter eandem pro-

proportionem F, ad G, & minutia ad minutiam. Atque hac eſt demonſtratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoſcendum, vtra duarum minutiarum maior ſit.

VI.

INTEGRVM ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita eſſe integrum ad ſummam minutiarum A B, C D, vt eſt H, ad ſummam numerorum F, G. [a] Quoniam enim eſt, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad G; erit componendo, vt ſumma minutiarum A B, C D, ad minutiam C D, ita ſumma numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia C D, ad integrum, ita eſt G, ad H, (Nam [b] vt minutia C D, ad ad integrum, ita eſt C, ad D. [c] Et vt C, ad D, ita eſt G, ad H: propterea quòd C, D, ipſum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt ſumma minutiarũ AB, CD, ad integrum, ita ſummum numerorum F, G, ad H: Et conuertendo, vt integrum ad ſummam minutiarum AB, CD, ita H, ad ſummam numerorum F, G. quod eſt propoſitum.

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B 3. ⋈ D, 5.
H, 15.

[a] 5. huius

[b] 2. huius
[c] 18. ſept.

SINT rurſus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$. ſunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem 24. ac proinde ſumma minutiarum 44. Vbi vides, ita eſſe integrum 30. ad hanc

summam 44. vt est 15. ex denominatoribus productus ad 22. summam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita esse minutiam AB, ad minutiam AC, vt est denominator C, ad denominatorem B. Fiat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, facit D, E; [a] *erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt aut D, ad E,* [b] *ita est minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod est propositum.*

D. 105. E. 35. A, 5. B, 7. A, 5. C, 21.

[a] 17. *sept.*
[b] 3. *huius*

DVÆ minutiæ $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. sint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$ sunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiusdem 10. Manifestum ante est, ita esse 30. ad 10. vt posterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior

maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ *AB, CD*, sitque eadem proportio *A*, ad *B*, quæ *C*, ad *D*, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales esse. [a] Quoniam enim est, vt *A*, ad *B*, ita minutia *AB*, ad integrum: Et vt *C*, ad *D*, ita minutia *CD*, ad idem integrum: vt autem *A*, ad *B*, ita ponitur *C*, ad *D*; erit quoque minutia *AB*, ad integrum, vt minutia *CD*, ad idem integrum. Æquales ergo sunt minutiæ *AB, CD*. quod est propositum.

A, 3. *C*, 9.
B, 4. *D*, 12.

[a] 2. huius

SED sint iam æquales minutiæ *AB, CD*. Dico esse, vt *A*, ad *B*, ita *C*, ad *D*. Cum enim æquales sint minutiæ, erit vt minutia *AB*, ad integrum, ita minutia *CD*, ad idem integrum. [b] Est autem, vt minutia *AB*, ad integrum, ita *A*, ad *B*; Et vt minutia *CD*, ad integrum, ita *C*, ad *D*. Igitur erit quoque, vt *A*, ad *B*, ita *C*, ad *D*. quod est propositum.

[b] 2. huius

DEINDE sit maior proportio *A*, ad *B*, quàm *C*, ad *D*. Dico maiorẽ esse minutiam *AB*, quàm *CD*. [c] Cum enim sit, vt *A*, ad *B*, ita minutia *AB*, ad integrũ; & vt *C*, ad *D*, ita minutia *CD*, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio *A*, ad *B*, quàm *C*, ad *D*; erit quoque maior proportio minutiæ *AB*, ad integrum, quàm minutiæ *CD*, ad idem integrum. Maior ergo est minutia *AB*, quàm minutia *CD*. quod est propositum.

A, 3. *C*, 2.
B, 4. *D*, 3.

[c] 2. huius

VERVM sit iam minutia *AB*, maior, quàm minutia *CD*. Dico maiorem esse proportionem *A*, ad *B*, quàm *C*, ad *D*. Erit enim maior proportio minutiæ *AB*, maioris ad integrum, quàm minutiæ *CD*, minoris ad idem integrum. [d] Cũ ergo sit, vt minutia *AB*, ad integrum, ita *A*, ad *B*; & vt minutia *CD*, ad integrum, ita *C*, ad *D*: erit quoque maior proportio *A*, ad *B*, quàm *C*, ad *D*. quod est propositum.

[d] 2. huius

MINVTIARVM $\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{12}$. integer numerus sit 24. cuius tã $\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{12}$. sunt 18. ac proinde æquales sunt minutiæ $\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{12}$. At $\frac{2}{3}$ eiusdem numeri 24. sunt 16. vbi manifestum est, nume-

rum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{1}{4}$. maiorem esse minutia $\frac{2}{8}$.

IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores: sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator.

SINT duas minutiæ AB, CD, sitq; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] ac proinde minutiæ æquales erunt. quod est propositum.

A, 6.	C, 2.		
B, 9.	D, 3.		

[a] 8. huius

SED sint iam minutiæ æquales AB, & CD. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. [b] Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propos.

[b] 8. huius

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem esse minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D, [c] ac propterea maior erit minutia AB, quàm CD. quod est propositum.

A, 6.	C, 3.		
B, 9.	D, 5.		

[c] 8. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm CD. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. [d] Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod est propositum.

[d] 8. huius

SINT duas minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{8}$. partes integri numeri 90. vbi

vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. *hoc est, 60. æqualem esse minutiæ* $\frac{2}{3}$. *id est, numero 60. At vero minutiam eandem* $\frac{6}{9}$. *id est, 60. maiorem esse minutia* $\frac{3}{5}$ *hoc est, numero 54.*

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ AB, CD, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarũ numeratores E, F & denominator idem G, esse æquales minutijs AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G;

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 5.
G, 15.

[a] *erit vt A, ad B, ita E, ad G. Quare minutia AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G, [c] erit vt C, ad D, ita F, ad G. [d] Igitur minutiæ CD, FG, æquales erunt. quod est propositum.*

[a] 18. sept. [b] 8. huius [c] 18. sept. [d] 9. huius

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiã BC, vnitati A, æqualem esse. [e] Quia enim est, vt B, ad C, ita minutia BC, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis, Igitur & minutia BC, integro A, id est, vnitati, erit æqualis. quod est propositum.

B, 6.
A, 1.
C, 6.

[e] 2. huius

DEINDE sit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numerator.

tor. Dico minutiã BC, integro A, aqualem esse. Supponatur enim integro A, vnitas D, vt fiat minutia AD, tot vnitatibus aqualis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, ita B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cum ergo minutiarum AD, BC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandē proportionem habeant, [a] ipsa inter se aquales erunt. Quare cum minutia AD, sit integro A, aqualis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoque minutia BC, eidem integro A, aqualis. quod est propositum.

A, 7. B, 42. D, 1. C, 6.

[a] 8. huius

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam CB, AD, duplam esse minutiæ AB. Cum enim minutia AB, CB, eundem habeant denominatorem; [b] erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.

A, 3. C, 6. A, 3. B, 8. B. 8. D, 4.

[b] 4. huius

RVRSVS quia minutia AB, AD, eundem habent numeratorem; [c] erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.

[c] 7. huius

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numera-

A, 6. B, 11. A, 6. C, 22. D, 3. B, 11.

numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtrãq; minutiam A B, D B, dimidium esse minutiæ A B. Cum enim minutiæ A B, A C, eundem habeant numeratorem; [a] *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia A C, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum.* [a] 7. huius

RVRSVS cum minutiæ A B, D B, habeant eundem denominatorem; [b] *erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum.* [b] 4. huius

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam data minutia sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, siue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutiæ exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B.

Et

[a] 2. huius

[b] 18. sept.

[c] 3. huius

[d] 17. sept.

[e] 3. huius

Et quoniam est, vt A, ad B, ita minutia AB, ad suum integrum, nimirum ad minutiam C D, cuius integrum est E: Item vt A, ad B, ita est F, ad H; quòd A, B, ipsum C, multiplicantes faciãt F, H: Erit quoque, vt minutia AB, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rursus quia est, vt C, ad D, ita minutia C D, ad suum integrum E: Item vt C, ad D, ita est H, ad G; quod B, ipsos C, D, multiplicans fecerit H, G: Erit quoq; vt C D, minutia ad suum integrum E, ita H, ad G. Quoniã igitur est, vt minutia AB, ad minutiam C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrũ, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita est simplex minutia K, ad idem integrum E; quòd simplex minutia K, equalis posita sit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cum eius valorem respectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia simplex K, ad integrum E.

A B. F.
C D. H.
E. G.

[e] *Cum ergo quoque sit, vt F, ad G, ita minutia FG, ad idem suum integrum E; æquales erunt minutiæ simplices K, & FG: ac proinde cum minutia K, æqualis sit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque simplex minutia FG, æqualis datæ minutiæ A B, respectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod est propositum.*

[a] 2. huius

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiæ $\frac{3}{4}$. respectu integri 24. Huius numeri $\frac{3}{4}$. sunt 18. & huius numeri $\frac{2}{3}$. sunt 12. qui numerus est $\frac{1}{2}$. dati integri numeri 24. Manifestum autem est, si tam numeratores 2, 3. inter se multiplicentur, quàm denominatores 3, 4. procreari minutiam $\frac{6}{12}$. quæ huic $\frac{1}{2}$. æquivalet qualis nimirum erat numerus 12. respectu numeri integri 24.

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam

tiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

SIT primum AB, minutia minutia CD, Ex A, in C, ſiat E; & ex B, in D, fiat F. [a] *Et quoniam minutia EF, exprimit valorem minutiæ AB, reſpectu minutiæ CD; reducta erit data minutia minutia ad ſimplicem minutiam EF. quod eſt propoſitum.*

[a] 13. huius

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

DEINDE ſit AB, minutia minutiarum CD, EF, ita vt CD, ſit minutia minutiæ EF; & AB, minutia minutiæ CD. Fiat G, ex A, in C; & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq; ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeris vltimo loco productis I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam IK, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem eſſe. [b] *Nam minutia GH, æqualis eſt minutiæ AB, minutiæ CD, reſpectu minutiæ EF, tanquam integri cuiuſdam.* [c] *Item minutia IK, æqualis eſt minutiæ GH, (hoc eſt, minutiæ AB, minutiæ CD.) minutiæ EF, reſpectu integri, cuius EF, eſt minutia; & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia IK, ex numeris vltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum. quod eſt propoſitum.*

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

[b] 13. huius

[c] 13. huius

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. ſunt 6. qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis nimirum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.

XV.

DATIS duabus minutijs, alterutram earum

rum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductę in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductę, productos.

SINT dua minutia A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Itē ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutię A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicās A B, facit G, H; [a] *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* [b] *ac proinde minutia A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F,* [c] *metietur C, ipsum F, per D:* [d] *Metitur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata; propterea, quòd G, fit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, sunt que numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* [e] *constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, (quas minutias C, F, M, seorsum scripsimus) respectu eiusdem integri G; cuius nimirum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominateribus producitur. Quare cum numeratores gignant unitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus*

G, 24. K, 8.
A, 2. C, 3.
B, 3. F, 12. D, 4.
H, 36. L, 9.
C, 1/4. F, 1/2. M, 1/8.

[a] 17. sept.
[b] 8. huius
[c] 7. pron.
[d] 3. pron.
[e] 13. huius

quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus est numerus K, constituet minutia C, minutiæ F, respectu integri G, minutiâ simplicè eiusdē integri G, cuius numerator est unitas, & denominator numerus K, qualis est minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ CD, qui constituit C, minutiam minutiæ F, respectu integri G, pars erit ipsius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipsum G, metietur per K; toties nimirum sumptus, quoties unitas est in K, numero. Eadem prorsus ratione demonstrabimus, D, metiri ipsum H, per L, numerum. Quod est propositum.

XVI.

DVAE minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignūt numeros æquales, æquales sunt: Et minutiarū æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: sintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales esse. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quartum æqualis est numero F, facto ex C, secundo in B, tertiū; [a] *erit vt A, primus ad C, secundū, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem.* [b] *Quare minutiæ A B, C D, æquales sunt. VEL sic.* [c] *Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Est autem E, ipsi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod est propositum.*

a 19. sept.

E, 24. A, 2/3 B, 3. ✕ F, 24. C, 8/12 D, 12.

b 9. huius
c 5. huius

SED

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerũ E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem mi-
[a] 9. huius nutiarum [a] erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita
[b] 19. sept. B, ad D, denominator ad denominatorem. [b] Quapropter idẽ numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri.
[c] 5. huius VEL sic. [c] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita E, ad F; bonuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod est propositum.

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque AB, maiorem esse minutia CD. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; gignetur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in
[d] 19. sept. D, quartum, & ex C, secundo in B, tertium, [d] erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autẽ maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; ergo A, maior sit quã G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad
[e] 9. huius D; [e] ac proinde minutia AB, maior erit, quàm minutia CD.
[f] 5. huius VEL sic. [f] Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; Est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia AB, maior quàm minutia CD. quod est propositum.

E, 24, F, 21
G, 1 3/4 A, 2 / B, 3 — C, 7 / D, 12.

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum
[g] 9. huius enim maior sit minutia AB, quàm minutia CD, [g] erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quam A, habebit ad C, eandẽ proportionem, quam B, ad D,
[h] 19. sept. qui sit G. [h] Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartũ, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quàm ex G, in D; propterea quod A, maior est quàm G; erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C,
[i] 5. huius in B, genitus. VEL sic. [i] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F: Est autem AB, minutia maior quàm minutia CD; erit quoq; E, maior quàm F. quod est propositum.

AT QVE hæc est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum

duarum minutiarum propositarum maior sit. Id quod etiam ad 5. propositionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, sint inter se primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, sed ipsa iam in minimis erit terminis constituta. Reducatur enim si fieri potest, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutiæ AB, sit æqualis. [a] *Quoniam igitur est, vt A, ad B, ita C, ad D; sintque C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi termini in sua proportione:* [b] *sunt autem & minimi, cum primi inter se sint. quod est absurdum.*

A, 11. C. ∽
B, 12. D, ∽

[a] 8. huius
[b] 23. sept.

SI vero A, B, non sint inter se primi; [c] *sit eorum maxima mensura C, quæ metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualem esse datæ minutiæ AB, & in minimis terminis constitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E;* [d] *producentur A, B, ex C, in D, E.* [e] *Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E,* [f] *ac propterea minutiæ AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima mensura numerorum A, B, metitur ipsos per D, E; erũt ex coroll. propos. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod est propositum.*

A, 36. D, 3
B, 48. E, 4.
C, 12.

[c] 2. sept.
[d] 9. prop.
[e] 17. sept.
[f] 8. huius

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam,

cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator data minutia per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datus, aequalem esse minutiae A B, datae. Quia enim B, metitur D, per E, [a] fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C. [b] Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum; [c] ideoque minutia AB, EC, aequales erunt. quod est propositum.

A, 2. E, 9
B, 4. C, 12.
D, 36.

[a] 9. pron.
[b] 19. sept.
[c] 8. huius

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procreatum, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutia A B, E C, aequales sunt; [d] erit vt A, ad B, ita E, ad C. [e] Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C. [f] Igitur B, mettetur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.

A, 3. E, ∽
B, 4. C, 10.
D, 30.

[d] 8. huius
[e] 19. sept.
[f] 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorē diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. [g] Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad diuidentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.

A, 6. B, 11.
A, 6.
B, 11.

[g] 2. huius

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum

numerum minorem, aliquid superſit; Quotienti integro inuento addendam adhuc eſſe minutiam, cuius numerator ſit numerus ex diuiſione reliquus; denominator vero, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui neceſſario minor eſt numero diuidente, diuidendus adhuc eſt per eundem numerum diuidentem, qui maior eſt. Verbi gratia. Diuiſo numero 23. per 4. Quotiens integer eſt 5. & ſuperſunt 3. adhuc diuidenda per 4. [a] Fit ergo minutia $\frac{3}{4}$. ita vt totus Quotiens ſit $5\frac{3}{4}$. [a] 19. huius

X X.

MINVTIAS plures in vnam ſummam colligere.

SINT primum addenda duæ minutiæ A B, C B. eiuſdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat ſumma D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam D B, eſſe ſummam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habent denominatorem; [b] erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et componendo, vt A, C, ſimul ad C, ita minutia A B, C B, ſimul ad minutiam C B. [c] Vt autem C, ad D, ita quoque eſt minutia C B, ad minutiam D B. Igitur, ex æquo erit, vt A, C, ſimul ad D, ita minutiæ A B, C B, ſimul ad minutiam D B. Cum ergo A, & C, ſimul æquales ſint ipſi D, ex conſtructione; erunt quoque minutiæ A B, C B, ſimul æquales minutiæ D B. quod eſt propoſitum.

A, 3	C, 4	D, 7
B, 10.	B, 10.	B. 10.

[b] 4. huius

[c] 4. huius

DEINDE ſint addenda duæ minutiæ A B, C D, diuerſarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem poſterioris; & C, numerator poſterioris in B, denominatorem prioris, collectaque ſit ſumma E, ex duobus illis productis, cui ſupponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorũ B, D, procreatus. Dico

A, 2	✕	C, 3	E, 17.
B, 3		D, 4.	F, 12.

A, 2 / B, 3 × C. 3 / D, 4. E, 17 / F, 12

minutiam E F, esse summã ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam. Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis; erit conuertendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F: Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, C D, aqualis erit minutiæ E F: ac proinde minutia E F, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum. VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex multiplicatione denominatorum inter se, fiunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs A B, C D, aquales, vt ex demonstratione propos. 10. cõstat: si summa E, productorum ex numeratoribus in denominatores supponatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, summa minutiarũ A B, C D, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas A B, C D, reducta sunt, vt instio huius propositionis est demonstratum.

6. huius

2. huius

IAM vero datis pluribus minutijs, addenda primum erunt duæ primæ: deinde hæc summa cum tertia coniungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. vnitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{9}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{1}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{21}{27}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

MINV-

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX *maiore minutia* A B, *detrahenda sit minor* C B; *sintque primum ha minutia eiusdem denominationis. Detracto numeratore* C, *minoris minutia ex* A, *numeratore maioris, reliquus sit numerus* D, *cui idem denominator* B *supponatur. Dico minutiam* D B, *reliquam esse post detractionem minutiæ* C B, *ex minutia* A B. *Quia enim* C, *ex* A, *subtractus reliquit* D; *componetur* A, *ex* C, *&* D. *Minutia ergo* A B, *cuius numerator* A, *ex numeratoribus* C, D, *collectus est, summæ est duarum minutiarum* CB, DB, *vt in prima parte antecedentis propositum est. Quare detracta minutia* C B, *ex minutia* A B; *reliqua fiet minutia* DB. *quod est propositum.*

A. $\frac{7}{10}$	C, $\frac{3}{10}$	D, $\frac{4}{10}$	

DEINDE *minutiæ* AB, CD, *habeant diuersos denominatores, detrahendaque sit minor* CD, *ex maiore* A B. *Ex* C, *numeratore minoris in* B, *denominatorem maioris fiat* E; *& ex* A, *numeratore maioris in* D, *denominatorem minoris fiat* F: *atque* E, *ablatus ex* F, *relinquat* G, *cui supponatur denominator* H, *ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam* G H, *esse reliquam post detractionem minutiæ* C D, *ex minutia* A B. *Quoniam enim* D, *multiplicans* A, B, *facit* F, H; [a] *erit vt* A, *ad* B, *ita* F, *ad* H: [b] *vt autem* A, *ad* B, *ita est minutia* A B, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* F, *ad* H, *ita minutia* A B, *ad integrum. Rursus quia* B, *multiplicans* C, D, *facit* E, H; [c] *erit vt* C, *ad* D, *ita* E, *ad* H: [d] *Vt autem* C, *ad* D, *ita est minutia* C D, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* E, *ad* H, *ita minutia* CD, *ad integrum. Quia igitur est, vt* E, *primus ad* H, *secundum, ita minutia* C D; *tertius numerus ad integrum.*

F, 15.	E, 8.		
A, $\frac{3}{4}$	C, $\frac{2}{5}$	G, $\frac{7}{20}$	
B,	D,	H, 20.	

[a] 17. sept.
[b] 2. huius
[c] 17. sept.
[d] 2. huius

a 2. huius

grum, quartum numerum; a Et vt G, quintus ad eundem secundum H, ita minutia G H, sextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. scholij propos. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus simul, ad H, secundū, ita minutia C D, G H, tertius & sextus numerus simul, ad integrum. Vt autem E, G, simul ad H, ita est F, ipsis E, G, aqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutia C D, G H, simul ad integrum. Cum ergo ostensum sit, vt est F, ad H, ita esse minutiam A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrum, ita minutia C D, G H, simul ad idem integrum: ac propterea aquales erunt minutia A B, & minutia C D, G H, simul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod est propositum. VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex ductu denominatorum inter se, gignuntur duo minutia eiusdem denominationis minutijs datis aquales, vt ex demonstratione propos. 10. constat; si E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, supponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua post detractionem minutia C D, ex minutia A B, veluti initio huius propos. ostensum est.

b 11. huius

I A M vero si dentur integra vna cum minutijs, subtrahenda erunt integra seorsum ab integris, & minutia à minutia. Quòd si minutia detrahenda, maior sit, quàm ea, à qua fieri debet subtractio, b reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit subtractio, ad minutiam denominatoris minutia adhærētis. Vt si subtrahēda sint $6\frac{2}{5}$. ex $10\frac{3}{4}$. subtractis 6. ex 10. supersunt 4. & subductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. superest minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit $4\frac{7}{20}$. At si subtrahenda sint $4\frac{6}{7}$. ex $20\frac{3}{4}$. faciemus ex vna unitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. qua cū $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunt 9; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. supersunt 15. & subducta minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$. reliqua est minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit $15\frac{25}{28}$.

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutia huius numeri integri 40. Igitur si $\frac{2}{5}$. id est, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc est,

ex

ex 30. superſunt 14. numerum $\frac{7}{30}$. integri numeri 40. vt ſuperior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F: [a] *Eritq; vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia vero C, multiplicans A, F, facit E, H;* [b] *erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F;* [c] *erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex æqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D:* [d] *Et vt A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutiæ A B, in minutiam C D. quod eſt propoſitum.*

	H, 60.	G, 40.	
A, 2. / B, 3.	C, 4 / D, 5	E, 8 / F, 15.	
A.	G.		
E.	F.		
B.	H.		

[a] 5. huius
[b] 17. ſept.
[c] 17. ſept.
[d] 2. huius

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero unitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem unitas. Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eiuſdem minutiæ propoſita denominator; propterea quòd unitas integro numero ſuppoſita in denominatorem datæ minutiæ dicta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

[a] 11. huius

SI vero integris minutia adhærent, ea reuocanda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator constituí. Vt si multiplicanda sint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient ha duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accõmodemus, nõ erit minutia producta cũ integro numero assumpto conferenda, vt in additione, ac subtractione factũ est, sed cum quadrato numeri integri assumpti: quia cum comparatio inter similia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter se gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri. hoc est, cum eius quadrato. Itaque sint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Necesse est ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiusdem faciãt numerum, qui constituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in se producitur: Id quod liquido constat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. sunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiusdem sunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc est, quadrati ipsius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuisus A, per C. Quotiens sit E, & diuisus B, per D, Quotiens sit F. Dico minutiam E F, esse Quotientem diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [b] *gignetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F.* [c] *Igitur minutia A B, producta est ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: at proinde ex definitione multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia*

A, 12	C, 3	E, 4.
B, 16.	D, 8.	F, 2.
A, 6	C, 3	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.
A, 3	C, 3	E, 1
B 8.	D, 4.	F, 2.

[b] 9. pron.
[c] 22. huius

minutiæ E F, ad 1. Quocirca cum sit, vt A B, minutia diuisa ad C D, minutiam diuidentem, ita minutia E F, ad 1. erit ex defin. Diuisionis minutia E F, Quotiens diuisionis minutiæ A B, per minutiam C D: quod est propositum.

DEINDE numeri C, D, minutiæ C D, non metiantur numeros A, B, minutiæ A B: [a] Reducatur minutia A B, ad aliam æqualem E F, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutiæ C D, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: quæ quidem fiet, si K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt ignantur E, F, veluti propos. 15. ostensum est. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H, erit minutia G H, Quotiens diuisionis minutiæ E F, vel A B, illi æqualis, per minutiam C D, vt initio huius propos. demonstratum est. quod est propositum.

[a] 15. huius

E, 24.	A, 8	K, 12.	C, 3:	G, 8
F, 36.	B, 3.		D, 4.	H, 9.
E, 90.	A, 6	K, 15.	C, 3	G, 30
F. 135.	B, 9.		D, 5.	H. 27.

QVIA vero G, H, numeri minutiæ Quotientis G H, ignantur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum est, satis est ad diuisionem cuiuisuis minutiæ per quamlibet minutiam; si numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis; & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & posterior H, denominatorem Quotientis minutiæ G H: Atque hoc verum est in omnibus huiusmodi minutijs; siue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, siue non. Nam semper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis; & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutiæ diuidendæ secundum doctrinam propos. 15. reuocatur, vt ex eius propos. demonstratione liquet; atque in hoc appositio exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B,

E, 48.	A, 8.	K, 6.	C, 2.	G, 4	H, 24
F, 54.	B, 9.		D, 3.	H, 3.	L, 18.

metiuntur

metiũtur per G, H; & numeros E, F, procreatos ex A, B in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiũtur per K, L: atque adeo tam minutia G H, quàm K L, Quotiens est minutia A B, per minutiam C D, diuisa.

IAM vero si numerus integer diuidendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, supponenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet

$\frac{8}{1.}$ $\frac{1}{2.}$ $\frac{16}{1.}$ Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appositio priori exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerum 8. fiet

$\frac{1}{2.}$ $\frac{8}{1.}$ $\frac{1}{16.}$ Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo apparet.

QVOD si minutia adhereant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhaerente, veluti ad finem antecedentis propos. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutia diuidenda in denominatorem minutia diuidentis signi numeratorem Quotientis minutia, denominatorem autem ex numeratore minutia diuidentis in denominatorem minutia diuidenda; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutia diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutia diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens

$\frac{3}{4.}$ $\frac{7}{2.}$ $\frac{21}{8.}$ erit $\frac{21}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutia diuidenda semper ducitur in denominatorem minutia diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, qua praecipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{9}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum

cum autem est, diuisis 525. per 200. Quotientem esse $2\frac{5}{8}$. id est, minutiam $\frac{21}{8}$. quæ proximè inuenta est. Sic etiam si integer numerus 10. octies sumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus supra fuit, ex diuisione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia A B, in minutiam C D, inferenda, sitque primum sensus, addendam esse minutiam A B, vnius particulæ minutiæ C D, ad minutiã C D: hoc est, addendas esse $\frac{3}{4}$. vnius septimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F, cui addatur A, numerator prioris, & composito numero G, supponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam G H, procreari ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo sensu, quem diximus, hoc est, minutiam G H, æqualem esse minutiæ A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, additæ ad minutiam C D. Quoniam enim A B, minutia vnius particulæ minutiæ C D, [a] reducitur ad simplicem minutiam A H, cuius numerator idem est, qui A, productus nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appositio hoc exemplo apparet. Item minutia F H, minutiæ C D, æqualis est, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C, D, faciat

F, 24.		
A, 3	C, 6	G, 27.
B, 4.	D, 7.	H, 28.

[a] 14. huius

A, 2	1	A, 3
B, 4.	D, 7.	H, 28.

F, H;

[a] 17. *sept.* [b] 8. *huius*

F, H; a erit vt C, ad D, ita F, ad H; b ac propterea minutia C D, F H, æquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, vt initio propos. 20. ostensum est; hoc est, summa ex minutia A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutia A H, ostensa est æqualis, & ex minutia C D, quæ ostensa est æqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D; id est, æqualis est minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutia C D, simul. quod est propositum.

I A M vero si plures minutiæ A B, C D, E F, G H, sint inserendæ, hoc est, si minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore postrema minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numerator eiusdem penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiusdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adijciatur A, numerator eiusdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur semper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; productoq; numerator eiusdem proximè antecedentis minutiæ adijciatur, donec nulla minutia supersit. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N; post

P, 119. M, 59. K, 14.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15,

poſt hac N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex inſitione datarum minutiarum produci in eo ſenſu, quem expoſuimus. Nam vt in duabus minutijs oſtenſum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiæ E F, in minutiam G H, hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [a] *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis poſitam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus,* [b] *æqualis eſt minutiæ K L:* [c] *quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propoſ. 20. demonſtrauimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rurſus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H,* [d] *facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus,* [e] *æqualis eſt minutiæ M N,* [f] *quod numeratores harũ minutiarum ad denominatores eãdem proportionem habeãt, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propoſ. 20. monſtratum eſt;*

[a] *14. huius*
[b] *8. huius*
[c] *17. ſept.*
[d] *14. huius*
[e] *8. huius*
[f] *17. ſept.*

est; aqualis quoque erit eadem minutiæ P Q, summæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ C D, quod est propositum. Eademque ratio est de pluribus.

SIT deinde sensus, addendam esse minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore posterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, supponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, produci ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, sensu; hoc est, minutiam G H, aqualē esse summæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, [a] *reducitur ad minutiam simplicem E H, cuius numerator est E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appositum demonstrat:* [b] *Minutia quoque F H, aqualis est minutiæ C D;* [c] *quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quæ ex iis, quæ ad initium propos. 20. ostendimus, aqualis est summæ minutiarum E H, F H,) aqualis summæ collectæ ex minutia C D; (hoc est, ex minutia F H) & ex minutia A B, minutiæ C D, (id est, ex minutia E H,) atque ideo minutia G H, procreatur ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc posteriori sensu. quod est propositum.*

E, 18. F, 24.
A, 3 C, 6 G, 42
B, 4. D, 7. H, 28.

a 14. huius

A, 3 C, 6 E, 18
B, 4. D, 7. H, 28.

b 8. huius
c 17 sept.

QVOD si plures sint minutiæ inserendæ A B, C D, E F, G H, hoc est, minutia A B, minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ G H; & minutiæ C D, minutiæ E F, minutiæ

tia G H ; & minutia E F , minutia G H , addenda sint ad minutiam G H, ita agendum erit . Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus , vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus , vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B , addatur numerus ex A , C , E , G , procreatus , vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur semper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ , numeroque procreato adijciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vsque locum assumptarum productus , donec nulla superſit minutia. Numero autem P , qui vltimo loco procreatus eſt , ſupponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus , vt in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum , ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt . Nam, vt in duabus minutijs demonſtratum eſt , minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt , æqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia E F , totius minutiæ G H, & ex minutia G H . Deinde minutia C D , totius minutiæ E F, totius minutiæ G H , [a] facié minutiam ſimplicem , cuius numerator ex numeratoribus G, E , G , producitur denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus . Minutia quoque , cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N , ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus ; [b] æqualis eſt minutiæ K L; [c] quòd numeratores harũ minutiarũ ad denominatores habeant proportionẽ eandẽ: quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cũ minutia M N, cuius numerator M, cõſtatur ex numero, quem numeratores C, E, G,

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

[a] 14. huius

[b] 8. huius
[c] 17. ſept.

gignunt,

gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collecta ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutiæ MN, ſummæ collectæ ex minutia GH; & ex minutia EF, minutia GH; & ex minutia CD, minutia EF, minutia GH. Rurſus minutia AB, minutia CD, minutia EF, minutiæ GH, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autē Q, ex B, in N, procreatus, ſive ex denominatoribus H, F, D, B. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autē eſt idem Q, ex B, in N, procreatus, [b] æqualis eſt minutiæ MN; [c] quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conſtatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis ſit, ex iis, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G. producitur, denominator autem eſt Q; atque ex minutia cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoque erit ſumma collecta ex minutia GH; & ex minutia EF, minutia GH; & ex minutia CD, minutia EF, minutia GH; & ex minutia AB, minutiæ CD, minutia EF, minutia GH. quod eſt propoſitum. Eadem de pluribus eſt ratio.

[a] 14. huius
[b] 5. huius
[c] 17. ſept.

DE PROPORTIONVM compoſitione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonſtrationes pertinent, reliquum eſt, vt compoſitionem proportionum explicemus: id quod ad propoſ. 5. lib. 8. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in iis propoſitionibus, vbi duplicatam, triplicatam,

aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe verè additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicatave: Item vt proportio ex pluribus proportionibus cõpoſita ſit verè totũ quippiã, cuius partes ſint proportiones, ex quibus cõponi dicitur, vt plerunq; interpretes Eucl. exiſtimant, ex hoc perſpicuè confirmari poteſt: quòd pars eſſet vel aqualis, vel maior toto. Nam cũ hac compoſitio intelligẽda ſit, ſiue maior quantitas cũ minore, ſiue minor cũ maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5. oſtẽdimus, ſi, poſitis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolũ duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coacervata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. aqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt, partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorẽ eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partẽ aqualem eſſe toti? Sic etiã, ſi, poſitis his tribus terminis nõ cõtinuè proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8, verè coacervaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdẽ auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior quam totũ, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret aqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundũ, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimũ. Id quod cogunt omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2.

Poſterioris vero 3. & 16. Quoniã igitur 24. 48.
Euclides ibi demonſtrat, proportionẽ 24. 12. 2. 3. 16.
ad 48. compoſitã eſſe ex proportionibus

laterum, hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componẽs, (ſi hac cõpoſitio eſt vera additio.) nimirũ proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportionẽ videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. verè totũ eſt, & eius partes componẽtes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi altera earũ ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt, nimirũ proportio quadru-

pla 12. ad 3. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſuboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quòd ſi poſteriores numeri plani 48. latera ſumantur. 12. & 4. erit vna partium componentiũ, nimirum proportio 2. ad 4. aqualis toti, proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione aquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio aqualitatis 12. ad 12. quamaior eſt quàm totũ, hoc eſt, quàm proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totũ non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. vere coaceruatur ex proportionibus 12 ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. valut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint aquales: ſi cum illis terminis cõtinuentur adhuc alij tres termini hoc modo. 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadẽ proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eadem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coaceruatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorũ. Huc accedit, quòd ſecundum communem hominum ſenſum dua proportiones tripla conſtituunt proportionem ſextuplã, non autem nonuplam, vt prædicti auctores uolunt, quanquã nõ cupla proportio dicatur tripla duplicata, vt in his numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiã communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla conficiproportionem octuplã, propterea quòd duo mouẽtia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autẽ ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationẽ compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorũ agentiũ vires nõ poſſe dimidiari, eo quòd inter duos numeros, qui proportionẽ agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. nõ poſſet habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem non

non ſtatim intelligat: agens vt 3. in duplã proportionẽ minus eſſe, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiuſmodi compoſitionem proportionũ non eſſe additionem, ſed proportionũ continuationẽ, qua per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus compoſita propter terminorum cõtinuationem, quemadmodũ & ad defin. 10. lib. 1. explicauimus, cur, poſitis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorũ proportio appellatur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportiones, quam primi duo termini habent. Hac autem planius percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirũ additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio, fieri debent per proportionũ denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proportionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cui denominatori cuiuslibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit vnitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab vnitate denominata.) quarũ qualibet æqualis eſt fractioni, quæ conſtituũt duo quicunq; numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedẽte fiat numerator, & ex cõſequente denominator: manifeſto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractorũ numerorũ nõ differre, ſiue per proportionũ denominatores, ſiue per numeros earundẽ proportionũ quoſcunq;, poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarũ, inſtituãtur, vt egregie Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM .n. ſint in vnã ſummã colligẽda dua proportiones, tripla, & quintupla. Quoniã denominatores ſũt 3. & 5. ex quorũ additione fit ſũma 8. concer nabitur eãdem proportio ex illis, quæ ſũma etiã colligitur, ſiue denominatores, ſuppoſita prius vnitate cuilibet illorũ, inſtar minutiarũ addãtur, ſiue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos data proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent fracti

3	5	12		40.
1	1.	4		8.
	8			256
	1.			32.

S 8

fracti numeri, positis terminis consequẽtibus sub antecedentibus, in unã summã colligãtur. Priori enim modo colligitur proportio 8. ad 1. posteriori autẽ 256. ad 32. quarũ utraq; octupla est. Sic etiã ex proportione decupla superquadrupartiẽte septimas, & sesquialtera, quarũ denominatores sunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & quæ inter numeros 54. 21. & 6. 4. reperiuntur, fit proportio quadrupla sesquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quãdo per denominatores instituitur operatio, reuocandi prius sunt denominatores ad vnicas fractiones, vt hic factũ est. Nam $2\frac{4}{7}$. reuocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligendum est.

18	3	54	6	57	3	342	6
7	2	21	4.	14.	2.	84	4.
57		342		72		864	
14.		84.		28		336.	

DEINDE si ex proportione octupla subtrahatur proportio tripla: Itẽ ex proportione quadrupla sesquidecimaquarta deducatur proportio sesquialtera; reliqua fient proportiones quintupla, & dupla superquadrupartiens septimas, vt hic perspicuum est.

8	3	256	12
1	1.	32	4.
5		640	
1.		128.	

57	3	342	6
14	2.	84	4.
72		864	
28		336.	

TERTIO si multiplicanda sit proportio tripla per 2. vel quod idem est, per proportionẽ duplam: Item proportio sesquialtera per supertripartientem quintas; instituenda erit operatio, vt hic vides, producetur q; ibi proportio sextupla, hic autem dupla superbipartiens quintas.

3	2	6		12	10	120		3	8	24	
1	1.	1.		4	5.	20.		2	5.	10.	

9	16	144	
6	10.	60.	

QVARTO & vltimo si proportio sextupla diuidẽda preponatur per proportionẽ triplã: Itẽ proportio dupla superbipartiens quintas per proportionẽ sesquialterã, si diuisoris termini permutentur, vt in diuisione minutiarum docuimus, ita instituetur operatio.

VIDES

6—1	6	120—4	480	24—2	48	144—6	864
1—3.	3.	20—12.	240.	10—3.	30.	60—9.	540.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re diſcrepare, niſi quòd in proportionibus neceſſe non eſt interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutijs.

IAM vero multiplicationem proportionũ à nobis præſcriptam, quam quidam additionem falſo nũcupant, cum proportionum compoſitione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defi. 5. lib. 6. egit, conuenire, atq; adeo compoſitionẽ illam Euclidis verè eſſe multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonſtrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, ſiue æquales, ſiue inæquales; ducaturq; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex cõſequente vero B, in conſequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, qua ex illa multiplicatione

producitur, eſſe compoſitam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt ſi proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin. 10. lib. 5. ſi autem fuerint inæquales, dicatur ex illis compoſita, ex ſententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia, ex A, B, in C, fiunt E, & G;	A, 6. C, 12. / B, 2. D, 4. / E, 72. F, 8. / G, 24.	A, 3 C, 6 / B, 2. D, 5. / F, 18. F, 10. / G, 12.

[a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rurſus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autẽ proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eadẽ ſint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonſtratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cũ enim compoſitio proportionum ab Euclide deſcripta reſpondeat multiplicationi denominatorum inter ſe, vt ibi demonſtrauimus, noſtra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum nõ differat, liquido conſtat, compoſitionem illam proportionum eſſe multiplicationem, quam tradidimus.

[a] 18. ſept.
[b] 17. ſept.

EADEM ratione oſtendemus, ſubtractionem proportionum, quam ijdem auctores docent, non eſſe aliud, quàm diuiſionem à nobis explicatam, eſſeque compoſitioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipſi uolunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem eſt, ac ſi termini proportionis C, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, qua ex diuiſione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, eſſe eam, qua relinquitur, ſublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C.

A, 9.	C, 3		A, 4.	C. 6.	
B, 1.	D, 1.		B, 2.	D, 3,	
E, 9.	F, 3.		E, 8.	F, 12.	
G, 27.			G, 24.		

[a] 18. sept. [b] 17. sept.

Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F; [a] erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rurſus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G ad F, compoſita ſit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (qua eadem eſt, qua G, ad F,) compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E, hoc eſt, C, ad D, & E, ad F: ac proinde ſubducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum ſi ex proportione G, ad F, (poſito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua eſt proportio E, ad F. Sed quis nõ videt, hoc potius eſſe diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quàm proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahi, ne manus ex minore auferri dicatur, vt in poſteriori exemplo accidit? Atque hac de proportionum compoſitione: qui plura deſiderat, legat eruditiſſimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conſcriptum.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT *Euclides in antecedentibus tribus libris ea, qua ad numeros spectant, quantum satis visum est ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad disputationem linearum commensurabilium, & incommensurabilium, quarum causa numerorum tractationem ab eo susceptam esse superius diximus. Nam sine cognitione harum linearum complures magnitudines cum solida tum plana, neque perfecte intelligi possunt, neq; cum ves tulerit, in opus atque usum conferri; propterea & plerunq; latera earũ incõmensurabilia sunt: Id quod & de pla-*

nis ipsis atque solidis dici potest, quippe cum & hæc incommẽ surabilia sæpenumero existãt, vt ad finem huius libri demonstrabimus. Quoniam vero hic liber multis obstructus est difficultatibus, ob linearum, de quibus disserit, obscuritatem; omnes neruos industriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide sunt demonstrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt sine multo labore a quouis, qui præcedentiũ tamen librorum demonstrationes recte intellexerit, possit percipi. Neque enim in eorum possum sententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam esse necessariam eam partem Arithmeticæ, quæ de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, sermonem instituit: Immo contra persuasum mihi prorsus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmeticæ pendere ex hoc 10. lib. tantum abest, vt existimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino sit ignarus, propterea quod ille demonstrationes ad vsum possit reuocare, hic vero nullo modo. Hæc enim de eam sa & nos priora decem theoremata secundi lib. numeris accõmodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo studiosus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonstrantur, facilius arbitraremur intelligi posse ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vsurpasti, vt ea res & maiori voluptati esset, & commodo legentibus? In promptu causa est, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci sint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars sit cognita, videbantur numeri illi, si adhiberentur, tenebras potius offusuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perspicuitatis; quippe ita ingenia studiosorum pro adiumẽto, ac luce, quam his nostris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minusq; demonstrationes ipsas percipererent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, qua sola necessaria ibi fuerunt, nemo fere sit, qui ignoret. Huc accedit, quod qui in Algebra sunt versati, facili negotio demonstrationes huius lib. ad numeros accommodare possunt per se ipsos, quando volunt.

da nolunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQVE, vt ad institutum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadē mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mēsura C, metitur, (metitur enim C, ipsum A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorū & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quā dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commēsurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.

II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, vt propositione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commē-

surabiles

surabiles sunt, cum quadrata earum idem spatium metitur.

LINEARVM rectarum quadam commensurabiles sunt longitudine, quas nimirũ alia linea, tanquam mensura communis, metitur; cuiusmodi sunt illa, quas in expositione defin. 1. commẽ surabiles simpliciter diximus: quadam vero longitudine incommensurabiles, quas scilicet nulla linea, tanquam mensura communis, metitur. Rursus linearum, quæ sunt incommẽ surabiles longitudine, alia sunt eiusmodi, vt earũ quadrata sint commensurabilia; alia vero ita se habent, vt & quadrata earum incommensurabilia sint. Linea ergo illa longitudine incommensurabiles, quarum quadrata sunt commẽ surabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commensurabiles; quia videlicet secundum earum potentias, hoc est, secundum earum quadrata (est enim, vt ad propos. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiusque linea, quadratum ab ea descriptum) commensurabiles sunt, licet ipsa secundum longitudinem sint prorsus incommensurabiles.

QVOD si quis roget, cur Euclides definierit seorsum lineas potentia commensurabiles, non autem commensurabiles longitudine; respondendum est, lineas longitudine commẽ surabiles satis superq; esse explicatas in definitione commensurabilium magnitudinum, cũ huiusmodi lineas una communis mensura metiatur, vt dictũ est: At vero quoniã lineas potentia commensurabiles nulla communis mensura metiri potest, sed tantummodo earum quadrata idem spacium metitur, ideo necessarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum spatium, quod sit communis eorum mensura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommensurabiles, quarum

rum etiam quadrata incommensurabilia sunt, vocat incommensurabiles potentia.

HABENT autem lineæ cõmensurabiles tã lõgitudine quàm potentia, hanc quasi conuenientiã inter se, & cõnexionem, vt lineæ longitudine cõmensurabiles, sint etiã commensurabiles potentia, ita vt nulla linea dari possint commensurabiles lõgitudine, quin earum quadrata commẽsurabilia quoque sint; quoniam quadratum ex communi earũ mensura descriptum metitur tanquã mensura communis earum quadrata, vt in subiecta figura apparet: sicut enim recta A B, metitur rectas C D, E F, ita quoq; quadratũ A G, quadrata C H, E I, metitur: Non autẽ, vt omnes lineæ potentia cõmensurabiles, sint etiam commensurabiles longitudine; multæ enim lineæ sunt potentia commensurabiles, hoc est, quadrata habent commensurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommensurabiles sunt, vt in hoc libro demonstrabitur, Rursus inter lineas incommensurabiles tam longitudine quàm potentia, huiusmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint etiam incommensurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter se incommensurabiles, cum tamen potentia, hoc est, secundum earum quadrata, commensurabiles existant: Quæ quidem omnia perspicua erunt ex corroll. propos. 9. huius libri.

V.

HIS positis, ostenditur, cuicunq; rectæ propositæ rectas lineas multitudine infinitas & commensurabiles esse, & incommensurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia solum. Vocetur autem proposita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erit ea omnium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum: Item quædam illis incommenſurabiles longitudine tantum; quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonſtrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quamquàm eius verba hoc ſonare videantur) hæc ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdã dici poſſe propoſita recta linea commenſurabiles longitudine, & potentia, quaſdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo ſequitur, ſed demonſtrabitur in ſequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa propoſita, ratione cuius aliæ commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles, dicitur Gracis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniã ea ponitur ſemper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non ſemper notæ ſunt, quamuis ſingulæ ſeorſum ſumptæ exiſtant certæ quoque, ac notæ; cum qualibet in quotcunque partes æquales poſſit diuidi.

VI.

ET huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commenſurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex poſitione, vt illa, ſed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE ex ſententia Euclidis, radix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem eſt, linea recta, cuius quadratum eſt 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia ſit commenſurabilis lineæ Rationali, (eſt enim tam numerus 20. quàm 1000. commenſurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine ſit eidem

eidem incommenſurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non poſſit exprimi.

VII.

HVIC vero incommenſurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel qua potentia tãtum ſunt commenſurabiles propoſitæ rectæ Rationali, appellauit Rationales; liquido conſtat, eum hic eas dicere Irrationales, quæ propoſitæ rectæ Rationali incommenſurabiles ſunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifeſtum eſt, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c. ſeu (quod idem eſt) lineam, cuius quadratũ eſt 20. vel 1000. &c. non poſſe appellari Irrationalem, cum non ſit longitudine, & potentia, ſed longitudine tantum Rationali linea propoſitæ incommenſurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a propoſita recta fit dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponitur, ac nota, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea deſcriptum, Rationale vocatur, quia & ipſum certum eſt, ac notum, comparationeque illius alia ſuperficies, commenſurabiles, incommenſurabilesue dicuntur.

IX.

ET huic commenſurabiles quidem, Rationalia.

OMNES

OMNES plana ſuperficies quadrato Rationalis lineæ propoſitæ commenſurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex poſitione, vt illud, ſed quia cum eo collatæ reperiũtur ei vel commenſurabiles, vel incommenſurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potẽtia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies plana quadrato à Rationali lineæ deſcripto incommenſurabiles, Irrationales uocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatijs incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita vt ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidẽ quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia; ſi uero non fuerint quadrata, ſed alia quacunque figura rectilinea, appellentur recta, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatijs incommenſurabilibus, Irrationales.

COL-

COLLIGITVR autem, lineas potentes spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum supra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ possunt spatia commensurabilia eidem quadrato Rationalis lineæ, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ possunt illa spatia incommensurabilia, sunt potentia incommensurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommensurabiles, sint quoque incommensurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonstrabiturque in coroll. propos. 9. manifestum est, ex 7. defin. lineas illas, quæ possunt spatia incommensurabilia quadrato Rationalis lineæ, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non est, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potẽtia, atq; potentia tãtum: apponere fere semper vocibus istis: commensurabiles, ac incõmensurabiles: Vix autem, & rarissimè his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commensurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; Item incommensurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus uero recte Rationales longitudine & potentia, uel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animaduertit, occasionem multis prabuit, ut uarie, & obscure in hoc 10. lib. de lineis commensurabilibus, incommensurabilibusque, nec non Rationalibus, Irrationalibusque sint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus postulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum usus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties posse multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiusdem generis excedat.

PROPO-

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiusdem generis inæqualibus, cum maior infinita non sit, minor vero infinite possit augeri; perspicuum est, minorem toties posse multiplicari, donec superet maiorem. Cõstat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5. scripsimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum censeri eiusdem magnitudinis, cum alterutra ita potest multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuersi esse generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compositam quoque ex ipsis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, ostensa sunt a nobis in vltimis tribus pronunciatis lib. 7. Quare cum sit eadem ratio in magnitudinibus, non est, quod frustra eorum demonstrationes hic repetamus, præsertim quod ad verbum

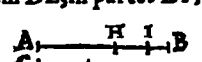
bem hæc poſſint tranſferri, mutata ſolum voce numeri in vocem magnitudinis.

CÆTERVM quia hoc in libro diſcedendū nobis fuit a numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani negleximus; vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine e regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autē Campani ſeriem demōſtraret. Quod ſi vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem, & Campanum diſcrepantiam, intelliges, quod ad numerum propoſitionum attinet.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

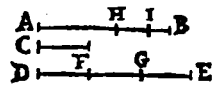
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quędam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITAE ſint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarū AB, ſit maior. Dico ſi ex AB, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinquitādem magnitudinē quandam, quæ minor ſit quā C. Multiplicetur. n. C, toties, donec magnitudo facta DE, maior ſit quā AB, ita vt DE, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quā AB. Diuiſa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipſi C, æquales, detra

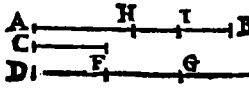


hatur ex AB, maius quā dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidiū HI; atq; hoc ſemper fiat, donec partes ipſius AB,

multi-



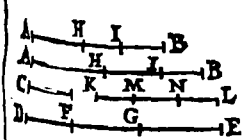
multitudine æquales sint partibus ipsius D E. Sint ergo iam partes AH, HI, I B, tot, quot sunt ipsæ DF, FG, GE Quia igitur DE, maior est quã A B; At ex DE, ablatũest DF, minus quã dimidiũ, vel certe dimidiũ, si DE, ipsius C, sit duplex; ex A B, vero maius quã dimidiũ AH: Erit reliquum FE, reliquo H B, maius. (Cum enim DE, maior sit quam AB; si ex D E, dimidium auferretur, necnon & ex A B, dimidium, esset quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex A B, Si ergo ex D E, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB) Rursus quoniam FE, maior est quàm HB, auferturq; ex FE, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, si F E, maior sit quam duplex ipsius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo I B: atque ita procedendo ostẽdemus tandem postremam partem ipsius DE, qualis hic est GE, maiorem esse postrema parte ipsius A B, qualis hic est IB. Dum ergo G E, postrema pars ipsius D E, æqualis sit ipsi C; erit quoque C, maior quam I B, postrema pars ipsius AB. Relicta igitur est I B, magnitudo, quæ minor est magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, si a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonstrandum.



IDEM demonstrabitur, si ex A B; auferatur dimidium A H, & ex reliquo H B, rursus dimidium HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo H B, nec non & reliquum G E, maius reliquo I B; cum ex maiori D E, ablatum sit D F, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori A B, dimidium A H, &c.

ALITER. Facta constructione, vt prius, sumatur K L, ita multiplex ipsius I B, vt est multiplex D E, ipsius C. Diuisa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipsi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam vero

vero AH, maior est quam HB, vel certe illi æqualis, si ablatum sit dimidium ex AB; & HB, maior est, quam IB; erit quoque AH, maior quam IB, hoc est, quam K M. Rursus quia HI, maior est quam IB, vel certe illi æqualis; est autem IB, ipsi MN, æqualis: erit quoque HI, maior quam MN, vel illi æqualis; atque adeo tota AI, maior, quã tota KN. Additis ergo æqualibus IB, NL, erit tota AB, maior quam tota KL: Est autem DE, maior adhuc, quam AB. Multo ergo maior erit DE, quam KL. Quare cũ sit, vt DE, ad C, ita KL, ad IB; (Sumpta enim fuit KL, ipsius IB, tam multiplex, quam multiplex est DE, ipsius C,) erit quoq; C, maior quam IB. Ac proinde relicta est IB, minor quam C. Quod erat demonstrandum.



[a] 14. quinti

SCHOLIVM.

IPSE clarius ex demonstratione huius Theorematis apparebit, quantitates inæquales propositas debere esse tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem possit superare. Id quod ad propos. 16. lib. 3. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

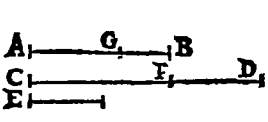
THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommensurabiles erunt ipsæ magnitudines.

2.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propositis AB, CD, quarũ minor AB, detrahatur ex maiore CD, & reliqua huius ex AB, & sic deinceps, alterna quadam

detractione, auferatur ſemper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommenſurabiles eſſe. Si enim non ſunt incommenſurabiles, metietur eas aliqua menſura communis. Metiatur eas ſi fieri poteſt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipſi AB, vel minor. Detracta autē AB, ex CD, quoties poteſt, relinquat FD, ſe minorē, ita vt AB, ipſam CF, metiatur. Rurſus detracta FD, ex AB, relinquat ſe minorē GB, ita vt FD, metiatur ipſam AG; atq; hoc ſemper fiat. Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, ſe minorē, erit CF, ablata maior, quam dimidia ipſius CD; alias ſi eſſet dimidia, vel minor quam dimidia, poſſet adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipſius AB: Et ſic deinceps ſemper fiet. Quare cum ſemper auferatur maius, quam dimidiū, relinquetur tādem magnitudo quædam minor quā E.) Sit ergo iam relicta GB, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur AB; & AB, metitur CF; metietur quoque E, ipſam CF: Metitur autem E, & totam CD. Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG: quare & E, ipſam AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB: ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.



a 1. decimi

b 1. decimi

c 2. pron.

d 3. pron.

e 2. pron.

f 3. pron.

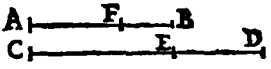
SCHOLIVM I.

HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, de trahatur ſemper minor de

de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommensurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturq; minor AB, ex CD, & reliqua sit ED. Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & sic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri potest, metiatur FB, præcedentem ED. Quoniam igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [a] metietur quoque FB, ipsam AF: Metitur autem & se ipsam: [b] Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipsam CE. [c] Igitur & FB, ipsam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipsam ED: [d] Igitur & FB, totam CD, metietur. Ostensa est autem & FB, ipsam AB, metiri. Quare FB, utramq; AB, CD, metitur, quod est absurdum. ponuntur enim AB, CD, incommensurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod est propositum.



SIMILITER & hoc demonstrabimus.

[a] 2. pron.
[b] 1. pron.
[c] 2. pron.
[d] 1. pron.

SI duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM si nunquam reliqua metietur præcedentem, essent propositæ magnitudines incommensurabiles, vt demonstrauit hoc theoremate Euclides. Quod est absurdum. ponuntur enim commensurabiles.

ITA QVE facile ex his dignoscemus, an duæ quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne. Nã detracta semper minore de maiore, alterna quadam detractione, si reliqua quapiam metiatur præcedentem; erunt magnitudines propositæ commẽsurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propositam, vt cõstat ex

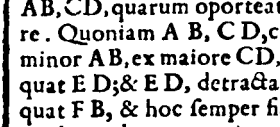
demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur precedentem E D, oſtenſum eſt, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si uero nunquam reliqua magnitudo precedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

3

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

DATAE duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam A B, C D, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties poteſt, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat F B, & hoc ſemper fiat alterna quadã detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iã F B, reliqua præcedentem ED. Dico FB, eſſe maximam menſuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim vtramque metiatur, ita oſtendemus. Quoniam FB, metitur ED, & ED, metitur A F; metietur quoque FB, ipſam A F: At metitur F B, & ſe ipſam igitur FB, totam A B, metietur; atque adeo & ipſam C E, quam A B, metitur. Cum ergo, & ipſam ED, metiatur; metietur quoq; F B, totam CD Metitur ergo FB, utramque A B, CD. Quare vtriuſque A B, C D, communis menſura eſt FB.



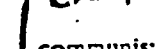
a 2. pron.
b 1. pron.
c 2. pron.
d 1. pron.

QVOD autem FB, ſit maxima earum communis mẽſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quam F B. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem

autem & AB, ipſam CE; metietur quoq; G, ipſam CE: At metitur quoq; totam C D. Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED, ipſam AF. Ergo & G, ipſam A F, metietur. Quare cum G, totam etiam A B, metiatur; metietur quoq; eadem G, reliquam FB, maior minorem Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quam F B, communis menſura eſt ipſarum A B. C D. Quare F B, maxima earum communis menſura eſt.

a 2. pron.
b 3. pron.
c 2. pron.
d 3. pron.

QVOD ſi minor magnitudo AB, metiatur maiorẽ C D, ita vt detracta ex C D, nihil relinquat; erit ipſa AB, ambarum maxima menſura communis; cum & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.



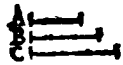
COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt FB, eſſe maximam menſuram communem ipſarum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoque maximam menſuram FB. Eademque eſt ratio de cæteris.

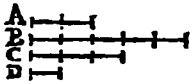
SCHOLIVM.

EX his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quælibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propo. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuũ eſt, omnes tres A, B, C,

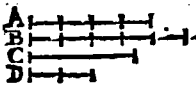


esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

SI vero A, & B, fuerint commensurabiles. sit earum maxima communis mensura inuenta D; qua si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.



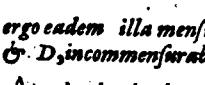
QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima cõmunis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinũ A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.



SI vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, cõmensurabiles. [a] *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cũ E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;* [b] *metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

[a] 3. decimi

[b] 2. pron.



SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si data sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensu-

mensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A, B, C, quarum maximam mẽsuram inuenire oporteat. [a] Sit D, maxima mensura ipsarũ A, B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse *mensuram* omnium trium A, B, C. Nam si maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A, B, C; metietur eadẽ, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A, B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest, Si uero D, non metiatur C, erunt saltẽ D, C, commensurabiles. Cum enim A, B, C, sint commensurabiles, metietur quælibet mensura earum cõmunis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A, B, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoq; ipsam D; erunt D, & C, commensurabiles. [b] Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D, & C; & D, metitur A, & B; [c] metietur quoq; E, ipsas A, & B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A, B, C, quemadmodum asseruimus.

QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quam E, si fieri potest, earum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximã mẽsuram D, per coroll. præcedẽtis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem corol. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

[a] 3. decimi

[b] 3. decimi

[c] 2. prom.

COROL-

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

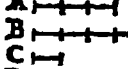
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam enim ex ijs, quæ ad defi- 5. *lib. 5.*

lib. 6 a nobis demonstrata sunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perspicuum est, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compositæ proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales esse, hoc est, esse vt A, ad D, ita E, ad H. Quod est propositum.



E, 3.
F, 4.
G, 1.
H, 2.

IDEM sequitur, si magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo est, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorsus est demonstratio.

E, 3.
F, 12.
G, 4.
H, 6.

SCHOLIVM.

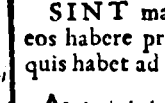
QVONIAM præcedenti lemmate & in propositione, quæ sequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonstrare, cum non facile videantur ex demonstratis sequi. Nam magnitudo & numerus diuersa genera quantitatis constituũt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris ostensa tantum est in quãtitatibus eiusdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonstratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri possit, cum omnes demonstrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonstratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent easdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

THEO.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5. **COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.**

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eos habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. * Sit enim earum maxima



menſura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas repetita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Eſt autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipſam B, atq; vnitas numerum E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commenſurabiles ergo magnitudines inter ſe rationem habent, &c. Quod erat dqmonſtrandum.

* 3. decimi

SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinum commenſurabilium, qualis fuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, vt rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum. Ea enim ſola communem recipiunt menſuram, atq; adeo in eis demonſtratio locum habet.

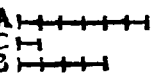
QVOD ſi linea ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem, quam numerus

numerus ad numerum, quia commensurabilia sunt, atque id circo mensuram habent communem, ipsisque demonstratio huius theorematis conuenit: At ipsæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommensurabiles cum sint, cõmunis mensura sunt expertes, ac propterea huius theorematis demonstratio in ipsas conuenire nullo modo potest.

EX demonstratione porro eiusdem huius theorematis liquido constat, commensurabilium magnitudinum proportionem esse eam, quam habent numeri, per quos eorum communis mensura maxima ipsas metitur. Ostensum enim est, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos scilicet earum mensura communis maxima C, ipsas metitur.

VNDE si propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; sumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac communis magnitudinum commensurabilium A, & B, mensura maxima C, ipsas magnitudines metitur. Nam vt demonstratum est, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD si loco maximæ mensuræ C, sumamus aliam quãcunque communem earum mensuram, nihilominus hoc theorema demõstrabimus eodem argumẽto. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac posteriori demonstratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionẽ cum illis, vt ex apposita figura apparet. Quoniã vero in priori demonstratione numeri inuenti, sunt minimi omnẽ eandem cum ipsis proportionẽ habentiũ; propterea fortassis Euclides in demonstratione maximam communem mensuram assumpsit, & non quamlibet, licet id necessarium non sit.



D, 6.
Vnitas.
E, 4.

THEOR. 4. PROPOS. 6.

6.

SI duę magnitudines inter se proportionem

tionem habeant, quam numerus ad numerum: commensurabiles erunt magnitudines.

HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines esse commensurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuisa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis sit magnitudo E. Deindequoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C; continebit æqualiter A, ipsam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Est autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipsam F, & vnitas ipsum D, æque metiatur. Igitur per lemma propos. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiã vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A. ad F; ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter se sunt. Quocirca cum E, ipsam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipsam B: Metiebatur autem & ipsam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur; Ac proinde A, & B, magnitudines commensurabiles inter se sunt. Si igitur duę magnitudines inter se proportionẽ habeant, &c. Quod erat demonstrandum.

A — C, 5.
B
E — Vni. tas.
F — D, 3.

a 9. quinti

b 1. defin.

ALITER. Quot sunt unitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuisa magnitudo A, quarum partium uni æqualis sit magnitudo E. Quoniam igitur est vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipsam A, & vnitas ipsum C, æque metiatur; poniturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idẽ lemma superius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magni-

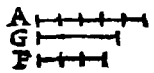
E — Vni. tas.
A — C, 5.
B — D, 3.

magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipſam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem menſuram E, a commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum. a 1. den.

COROLLARIVM.

EX priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot equales partes, quot vnitates ſunt in C; et ſumenda alia linea F, tot earundem partium, quot vnitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonſtratum eſt.

HINC rurſus apparet, quanam arte poſsit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius data recte, vt numerus ad numerum. Si namque inuenienda ſit linea, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum linea data A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex ijs, quamodo diximus, ad quam ſic ſe habeat A, vt C, ad D: b *Deinde accipienda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres recte A, G, F, ſint continue proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum ſit vt A, ad F, ita C, ad D,) ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta.*



C, 3.

D, 3.

b 13. ſexti

SCHO-

SCHOLIVM

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tantum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

7. 0. THEOR. 5. PROPOS. 7.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B.

Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum; erũt ipsæ commensurabiles. Quod *6. decimi est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommẽsurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias, vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

8. 0. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI duæ magnitudines inter se proportio-

portionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommensurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter se proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incōmensurabiles esse Si enim A, & B, credantur esse cōmensurabiles; [a] erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod est absurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commensurabiles sunt A, & B. Quocirca si duæ magnitudines inter se proportionem non habeant, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 5. decimi

SCHOLIVM.

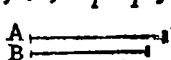
QVOD si lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipsa necessario, ex hoc theoremate, longitudine incommensurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propos. 5. huius lib. demonstrauimus. quod est contra hypothesim. Non autem colligendū est ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, necessario & potentia incommensurabiles esse, vt manifestum est ex demonstratione. Non enim sequitur, si potentia tantum sint commensurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonstratione theorematis assumitur; immo nullo modo talem proportionem habere possunt, vt in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonstratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine esse incommensurabiles.

LEMMA.

SI sint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportionales

nales; ſitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundã.

SINT continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non; ſitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque eſſe vt A, ad B, ita D, ad E.



Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata eſt; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales ſunt.

IDEM ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quã tres; ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

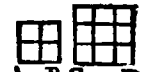
7. THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commẽſurabilia. Quæ

vero

vero a rectis lineis longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata; inter se proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter se proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commensurabilia.

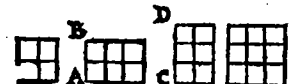
SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commensurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. Quoniam. n. rectæ AB, CD, longitudine sunt commẽsurabiles; [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerũ: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipsorum E, & F, sint G, & H. Quoniam igitur est AB, ad CD, vt E, numerus ad numerũ F: [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Itẽ & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratũ ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerũ quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ sunt proportionum æqualium. Quod est propositũ.



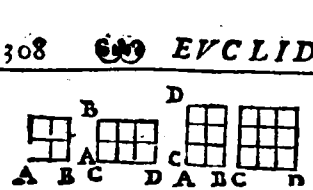
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 9.

[a] 5. decimi
[b] 20. sexti
[c] 11. octa.

ALITER. Posita eadẽ constructione, cõtineatur rectangulum BD, sub rectis AB, CD. Et E, F, se mutuo multiplicãtes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G,



E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.

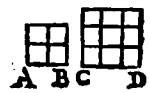


H, vt constat ex demonstratione propos. 11. lib 8 atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in scholio eiusdē propos.

[a] 1. sexti Quoniam igitur est A B, ad C D, vt E, ad F: [a] Vt autem A B, ad C D, ita est quadratum ex A B, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem A B, si CD, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est G, ad I: Erit quoque quadratum ex A B, ad rectangulum B D, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rursus quia est A B, ad

[b] 1. sexti CD, vt E, ad F, [b] Vt autem A B, ad CD, ita est rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, si AB, ponatur basis rectanguli; Item vt E, ad F, ita est I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex A B, rectangulum BD, & quadratum ex CD, in eadem ratione continua sunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propos. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod est propositum.

SIT secundo quadratum ex A B, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, esse longitudine cōmēsurabiles. Sint. n. numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur est quadratum ex AB, ad quadratum ex C D, vt quadratus numerus G, ad quadratū numerū H:



[c] 20. sexti [c] Habet aūt quadratū ex AB ad quadratū ex CD, proportionē dupli

[d] 11. octavus catam lateris AB, ad latus C D; [d] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales sunt. Quare cum rectæ A B, C D, proportionem habeant

habeant, quam numeri E, F, ipſæ commenſurabiles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum. 6. decimi

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris.

[b] Quia igitur eſt vt AB, ad CD, ita quadratũ ex AB, ad rectangulũ BD; Itẽ vt AB, rurſum ad CD, ita rectãgulũ BD, ad quadratũ ex CD, vt ſupra diximus, erũt quadratũ ex AB, rectangulũ BD, & quadratũ ex CD, continue proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineã CD: Sunt autẽ & numeri G, I, H, cõtinue proportionales in rõne numeri E, ad numerũ F, vt ſupra oſtendimus; ponaturq; quadratũ ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratũ numerũ H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc eſt, vt E, ad F; [b] 1. ſexti

ideoq; AB, CD, rectæ, proportionẽ habẽtes quã numeri E, F, cõmenſurabiles ſunt ſõgitudine. Qđ eſt propoſitũ. [c] 6. decimi

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ; erunt A, B, longitudine cõmenſurabiles, vt iã eſt demonſtratũ. Quod eſt abſurd. ſuponũtur enim longitudine incõmenſurabiles. Non ergo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, proportionem habet, quã numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quod eſt propoſitũ.

A
B

QVARTO, a cpoſtremo quadratũ ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Dico eas longitudine eſſe incõmenſurabiles. Si enim longitudine cõmenſurabiles credãtur; habebũt earũ quadrata, vteſt demõſtratũ, proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. qđ eſt abſurdũ. ponuntur. n. non habere. Nõ ergo longitudine cõmenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitũ. Igitur quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia com-

mensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM n. quadrata linearum longitudine commẽsurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hac theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter
[a] *6. decimi* *quam numerus ad numerum;* [a] *ipsa commẽsurabilia*
[b] *3. defin.* *erũt;* [b] *Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare linea longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.*

DEINDE quia linea, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamẽ, quam numerus simpliciter ad numerum, [c] *potẽtia quidem commensurales sunt,* [d] *cũ earum quadrata commẽsurabilia sint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim ea linea potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.*
[c] *3. defin.*
[d] *6. decimi*

RVRSVS quia linea, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitune, at potentia commensurabiles, vt modo diximus; liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse.

esse. solum enim ea linea longitudine incommensurabilest, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [a] *potētia quoque incommensurabiles sunt,* [b] *cum earum quadrata incommensurabilia sint.*

[a] *4. defin.*
[b] *8. decimi*

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quam obrem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

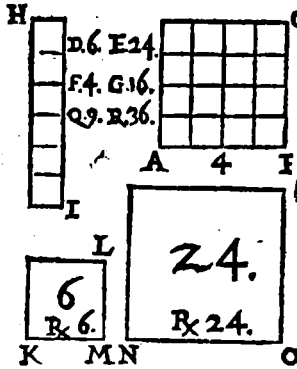
VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter considerāda sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cū linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ: (est enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde e contrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorū lineæ, seu latera, ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras aquales illis, in quas quadratum Rationalis linea resoluitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quā

sunt unitates in numeris illis quadratis, si cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpe numero enim linea data cõmensurabiles inter se sunt longitudine, sed numeris exprimi non possunt, propterea quod Rationali linea proposita sunt longitudine incommensurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate est ostensum, at pauciores quadratas mensuras, vel plures continent, quam sunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perspicua faciemus hac demonstratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expressa numero 4. cuius quadratum AC, continebit mensuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani similes non quadrati, habentes tamen proportionem, [a] *vt in Arithmeticis est demonstratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde sumatur rectangulum HI, constans ex sex quadratis mensuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur;* [b] *atq; ipsi HI, quadratum æquale constituatur KL, cuius latus KM. Postremo per ea, qua in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratum NP, ita se habeat KL, quadratum recta KM, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniã igitur est vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratũ KL, ad quadratum NP, per constructionem; Continet autem quadratum KL, 6. mẽsuras quadratas, qualium 16. continet quadratũ Rationale AC: (constructum enim est quadratum KL, æquale rectangulo HI. constanti ex 6. huiusmodi quadratis mensuris.) continebit quadratum NP, earundem mensurarum quadratarũ 24. ac propterea*

[a] 26. octaui

[b] 14. secũdi



Puras KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erit Linea rationalis. & Rationalis numeris expressis denominetur, ut 6. & sit unus quidem quadratus numerus, ut linea Rationalis AB, ita ut quadratum ipsius AB, rationale existens, secundum quem commensurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadratis proportionem habeat ex, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc constare potest. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeant ex, quam sibi invicem [illegible] lib. 6 documento latera eorum KM, NO, ipsis eandem quadratorum proportionem habebunt, quadruplam, a tempe 1. ad 4. ex quorum secundo subsequi manifestum 1. ad 2. unde eadem ratio manifesta est, ut hic apparet 1. 2. 4. Quare longitudine commensurabilia sunt rectae KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendi sunt ergo hic commensurabiles lineae eadem illa longitudine commensurabiles, qua numeros inter se sunt expressae, si cum linea Rationali comparentur. Et non solum eadem linea KM, NO, [illegible], sed alia quaevis, quae la habeat ratione linea Rationalis AB. numeros proferre est. Cum enim proportionem habeant [illegible] KM. similiter in duas partes aequales dividemus NO, et eius semidimidias partes 4. si illa in 3. secuerimus hae in 6. &c. Atque hae partes nullo modo aequales sunt partibus lineae Rationalis AB, quam illas continuo sunt incommensurabiles secundum longitudinem, ut dictum. *6. decimi

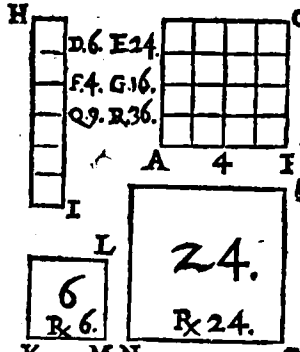
RVRSVS, quia quadratus KL, NP, proportionem habet eam, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, plures quadratos numeros continue aequales inter se, et quam AC, quadratum Rationalis lineae AB, rationale existens, habet ad dictos numeros quadratos F, G; Numerus KL, aequalis est sex huiusmodi numeris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, comprehenditur ex quatuor huiusmodi numeris, & G, ex 16. Et si maiores quadrati in eadem proportione assumantur ac F, plures tales numeri comprehendentur quadrati KL, NP, quam sint unitates in numero quadrato F. ut scilicet ex 9. alter vero ex 36. unitatibus ei [illegible], quae est in hoc theoremate intelligenda quoq; est quadrata proportionem habentia, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sive pauciores quadratos minores, vel plures comprehendat, ita ut unitates in illis quadratis numeris reperiantur, si ea conferantur cum

ſunt unitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpe numero enim lineæ datæ cõmenſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quod Rationali lineæ propoſitæ ſint longitudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratas menſuras, vel plures continent, quam ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expreſſa numero 4. cuius quadratum AC, continebit menſuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, [a] vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur rectangulum HI, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; [b] atq; ipſi HI, quadratum æquale conſtituatur KL, cuius latus KM. Poſtremo per ea, quæ in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratum NP, ita ſe habeat KL, quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniã igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratũ KL, ad quadratum NP, per conſtructionem; Continet autem quadratum KL, 6. mẽſuras quadratas, qualium 16. continet quadratũ Rationale AC: (conſtructum enim eſt quadratum KL, æquale rectangulo HI, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris.) continebit quadratum NP, earundem menſurarum quadratarũ 24. ac propterea

[a] 26. octaui

[b] 14. ſecũdi



ptarea KM, NO, latera quadraterum KL, NP, erũt Rad 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cũ 6. & 24. non ſint numeri quadrati, erumq; linea Rationalis AB, longitudine incommenſurabilia, inter ſe autem commenſurabilia longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt, Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeãt, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. duplicatam laterum KM, NO, ſit autem quadraterum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla uidelicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. Quare longitudine commenſurabiles ſunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligenda ſunt ergo in hoc theoremate linea etiam illa longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi cõſiderentur eadem linea KM, NO, ſimpliciter, & abſolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum. n. proportionem habeant ſubduplam, ſi KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiuſdem magnitudinis partes 4. ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus. *6. decimè

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerũ G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, reſolvitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æqualis eſt ſex huiuſmodi menſuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor unitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadẽ proportione ſumantur Q, R, pauciores tales menſuras complectentur quadrata KL, NP, quam ſint vnitates in numeris quadratis Q, R, cũ alter ex 9. alter vero ex 36. vnitatibus cõſtituatur; manifeſtũ eſt, in hoc theoremate intelligenda quoq; eſſe quadrata proportionẽ habentia, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, quę pauciores quadratas mẽſuras, vel plures cõprehẽdũt, quã vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur

cum

cum quadrato lineæ Rationalis propositæ. Quod si eadē quadrata KL, NP, considerentur absolutè, & simpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali lineâ AB, descripti, resolui poterunt in totidem mensuras quadratas, quot unitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nā si recta KM, dividatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum est, continebit quadratum KL, quatuor mensuras quadratas, & quadratum NP, sexdecim, quot scilicet unitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, si eadem linea secentur in partes tres, & sex, habebunt earum quadrata mensuras quadratas 9. & 36. quot nimirum unitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiusmodi mensura nullo modo æquales sunt quadratis mensuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, resolvitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumq; lateribus, quorum superficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter se, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiusmodi sunt quadrata, quorum superficies sint 12. & 3. habentes proportionem, quā quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum est de lineis lōgitudine commensurabilibus inter se, quamuis interdum Rationali lineæ incommensurabiles sint, vt sis sensus. Quadrata quæ describuntur a rectis lineis longitudine inter se commē surabilibus, licet interdum longitudine sint incommensurabiles lineæ Rationali propositæ, proportionem inter se habent, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipsa quadrata, si cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, sæpe numero numeris quadratis nullo modo possint exprimi: Et quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sive hæc quadrata numeris quadratis possint exprimi, sive non, si comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter se commensurabilia, etiamsi lineæ Rationali sint longitudine incommensurabilia, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine, hac ratione. Quæniam quadratum diametri dupli est quadrati lateris, vt ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus;

Nulla

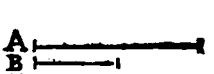
Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, qua quadrati numeri ad quadratum numerum, quod inter numeros duplã proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis; vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera, nempe diameter, & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltima huius lib.

THEOR. 8. PROPOS. 10.

11.
10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, sitque A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam.n. A, & B, inter se commensurabiles sunt,[a] habebit A, ad B, proportionem quã numerus ad numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F.[b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt.



[a] 5. decimi

[b] 6. decimi

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam.n. A, & B, incommensurabiles sunt,[c] non habebit A, ad B, proportionem

[c] 7. decimi

tionem, quam numerus ad numerum: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [a] Quare C, & D, incommensurabiles sunt inter se. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

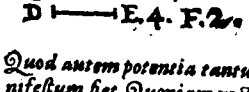
a 8. decimi

SCHOLIVM.

QVOD si quatuor propositæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem secundæ commensurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commensurabilis, vt ex demonstratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo ostendemus posteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in scholio propos. 5. huius lib. diximus, longitudine commensurabiles sunt.

SI autem prima secundæ fuerit commensurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commensurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, cõmensurabilis est potentia ipsi B, [b] *erunt earum quadrata commensurabilia,* [c] *ac propterea proportionem habebunt, quã numerus ad numerum.* [d] *Est autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ proportionales sint, & earum quadrata figuræ similes similiterq; descriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quã numerus ad numerũ.* [e] *Quare commensurabilia erunt; & ac propterea lineæ C, D, potentia commensurabiles.*

b 3. defin.
c 5. decimi
d 22. sexti



e 6. decimi
f 3. defin.

Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita manifestum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum sint commensurabiles potentia tantum, longitudine incommensurabiles sunt; non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt in scholio propos. 7. huius lib. docuimus; ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommensurabiles sunt C, D, ex scholio propos. 8. huius lib. Sunt autem potentia commensurabiles, vt ostendimus: Igitur potentia tantum sunt commensurabiles. Quod est propositũ.

E. A-

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles; erunt ipsarum potentia commensurabiles; ac propterea ipsæ potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles, Ac idcirco longitudine tantum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, qua numeri ad numerum, ex iis, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandē, quam linea, erit quoque illarum proportio, qua numeri ad numerum; atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ lōgitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, qua numeri ad numerum. Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum. [a] 6. decimi [b] 8. decimi

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duæ, lineæ, demōstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensurabilia sint, habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cū ipsis rationē habentes, proportionem habebunt, quā numerus ad numerū; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, nō habebūt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum. [c] 5. decimi

LEMMA

LEMMA.

DVOS numeros planos innenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non similes, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiusmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in scholio propos. 26. lib. 8. demonstrauimus. Quod est propositum.

QVOD si plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. tradidimus, A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter se habent, ex scholio propos. 26 lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non sint plani similes, vt ad finem lib. 8. docuimus. A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13.

SCHOLIVM.

PORRO *inuentionem numerorum planorum non similium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam est Federicus Commandinus. Quod vt ostendamus, adducenda est eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt,*

EX-

EXPONANTVR quatuor numeri A,B,C,D, ita vt non sit sicut A,ad C,ita B, ad D;& fiat ex A,B, numerus E; & ex C,D,numerus F. Perspicuũ igitur est E,F,numeros planos esse, planos autem dissimiles;quoniam latera proportionalia non sunt. quod facere oportebat.

A, 2.		C, 3.
B, 6.		D,16.
E, 12.		F,48.

HÆC est eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non similium. Errãt autem huiusmodi interpretes, quia sæpe numero inuenti numeri secundum eorum doctrinam,plani similes sunt. Nam numeri ex eorum demonstrationis inuenti,12. & 48. sunt plani similes, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4. & 16. Itemq; prior numerus latera habent 3. & 4. proportionalia lateribus posterioris 6. & 8. vt constat; quamuis latera prioris ab illis assumpta 2. & 6. non sint proportionalia lateribus posterioris acceptis. 3. & 16. Satis enim est, vt duo numeri plani sint similes, aliqua duo latera vnius proportionalia esse quibusdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quacunque duo latera vnius proportionalia sint quibuscunq; duobus lateribus alterius; qua de re plura scripsimus in defin. 21. lib. 7. & in scholio propos. 23. lib. 8.

PROBL. 3. PROPOS. 11. 10. 11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta proposita A, cui primum inuenienda sit linea incommensurabilis longitudine tantum. Inueniantur, per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum

dratum numerum: Deinde ex corollario propoſ. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerũ C. Dico D, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine ſint incommenſurabiles, ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non eſt autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; neq; quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quod autem tantum longitudine ſint incommenſurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeãt, quam numerus B, ad numerum C, ipſa commẽſurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commenſurabiles. Quare longitudine tantum incommenſurabiles ſunt.

A B, 10. C, 6. E D

a 9. decimi

b 6. decimi

SIT iam eidem rectæ propoſitæ A, inueniẽda linea incommenſurabilis lõgitudine, & potẽtia. c Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incõmenſurabiles, media proportionalis. Dico E, ipſi A, incommenſurabilẽ eſſe longitudine, & potẽtia. Quoniam. n. eſt quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommenſurabilis eſt longitudine ipſi D, vt iam eſt oſtenſum d erit & quadratum ex A, incommenſurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potẽtia ſunt incõmenſurabiles; ac proinde ex coroll. propoſ. 9. huius lib. & omnino lõgitudine incõmenſurabiles ſunt. Eſt igitur E, ipſi A, incommenſurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propoſitæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 13. ſexti

d 20. deci.

SCHOLIVM.

SI igitur recta A, propoſita ſtatuatur Rationalis, ita vt ab ea menſuræ caterarum ſumantur; eris & recta D, per defin.

fin. 6. Rationalis, quia potentia illi est commensurabilis, licet eidem longitudine incommensurabilis sit. At vero E, Irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommensurabilis sit longitudine, & potentia.

CAETERVM ex demonstratione huius theorematis liquido constat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commensurabiles, vel quod idem est, inter duas longitudine tantum incommensurabiles, esse utrilibet illarum incommensurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, si alterutra illarum statuatur Rationalis. Ex eo enim quod recta A, D, sunt longitudine tantum incommensurabiles, vel commensurabiles potentia tantum, demonstrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, esse ipsi A, incommensurabilem longitudine, & potentia: Eodemque argumento ostendemus eandem longitudine, & potentia ipsi D, esse incommensurabilem. Cum enim recta D, E, A, sint continue proportionales, erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Est autem recta D, recta A, incommensurabilis longitudine. [a] *Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommensurabile erit. Quare recta D, & E, ex defin. incommensurabiles sunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propos. 9. huius lib.*

A 10. B
E
D 6. C

[a] 10. decim.

IN codicibus vulgatis praponitur hac undecima propositio à Theone propositioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum esse puto, cum secunda pars huius ex præcedenti propositione decimæ demõstretur, vt ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12. 12. 8.

QVAE eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, commensurabilis. Dico & A, B, inter se esse commensurabiles. Cum enim A, & C, sint commensurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerũ E. Rursus quia C, B, commensurabiles sunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] sumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; sitque H, ad I, vt D, ad E, hoc est, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G, hoc est, vt C, ad B. Quoniam igitur est A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, [c] inter se commensurabiles sunt. Quæ ergo eidem magnitudini commensurabiles sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

A ——— D. 10. E, 8.
C ——— F, 2. G, 3.
B ——— H, 5. I, 4. K, 6.

a 5. decimi
b 4. octaui
c 6. decimi

SCHOLIVM.

QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, atq; A, & B, ipsi C, longitudine commensurabiles existant, erunt quoq; A, & B, inter se longitudine commensurabiles, vt constat ex demonstratione theorematis, quia eodem modo ostendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commensurabiles erunt, vt ad propos. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipsi C, potentia commensurabiles, licet eidem longitudine sint incommensurabiles, demonstrabuntur eodem modo & A, B, inter se commensurabiles potentia. Cum enim A, & C, sint potentia commensurabiles, [d] *erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. sint commensurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerũ, nimirũ vt F, ad G.* [e] *Sumptis ergo in eisdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps pro-*

d 5. decimi
e 4. octaui

por-

portionalibus; erit rursum ex æque quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, vt numerus H, ad numerum K.[a] Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atque adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ lõgitudine inter se cõmensurabiles, licet vtraq; cuipiam alteri lineæ potentia tantũ sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se cõmensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commẽsurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

[a] 6. decimi

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitq; A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

A ——————
C ——————
B ——————

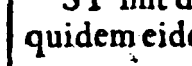
QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantũ sint cõmensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantũ, colligemus quidẽ eodem argumento, reliquã B, eidem C, potentia esse commensurabilẽ; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est cõmensurabilis ex hypothesi. Non autẽ colligere licebit, si A, ipsi C, cõmensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidẽ C, longitudine commensurabilẽ esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine cõmensurabilis est, sed C, quidẽ longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

12. 0.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI sint duæ magnitudines, & altera quidem eidem sit commensurabilis, altera vero incommensurabilis: Incommensurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, sit ipsi C, commensurabilis, & B, eidem C, incommensurabilis. Dico A, & B, inter se incommensurabiles esse. Si enim B, dicatur esse cõmensurabilis ipsi A; cum eidem A, commensurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter se commensurabiles, quod est absurdum. ponitur enim B, ipsi C, incommensurabilis. Non ergo B, ipsi A, commensurabilis est. Quare si sint duæ magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 12. deci.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, quidem ipsi C, longitudine commensurabilis, at B, eidem C, incommensurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommensurabiles. Si enim longitudine commensurabiles essent, [b] *ostenderemus quoque B, C, esse inter se longitudine commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A commensurabilis esset longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, si A, ipsi C, potentia sit commensurabilis, siue tantum, siue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommensurabilis; erunt A, & B, potentia incommensurabiles. Si enim essent commensurabiles potentia, essent quoque B, & C, potentia commensurabiles. (cum hoc posito, vtraque B, C, ipsi A, potentia esset commensurabilis.) Quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsi C, potentia incommensurabilis.*

[b] 12. deci.

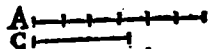
QVONIAM vero hæc propositio 13. apud Theonem lemma

lemma eſt, ſit, vt poſt hac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim dicta opera ordinem hic ſeriem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.

THEOR. 11. PROPOS. 14. 13. 8.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommenſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem. Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cũ & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; [a] erunt & A, C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.



[a] 12. decimi.

SCHOLIVM.

HIC quoque, ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum, ſiue longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommenſurabilis. Si enim B, & C, eſſent longitudine commenſurabiles, [b] eſſent quoque A, & C, commenſurabiles longitudine. (Cum hoc poſito, vtraque A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum, ponitur enim A, ipſi C, longitu-

[b] 12. decimi.

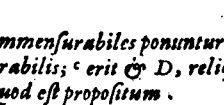
dine incommensurabilis. Quod si A, & B, cōmensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

[a] 12. deci.

COLLIGVNT porrò ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.

QVAE incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommēsurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam enim A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; [b] erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensa ipsi C, incommensurabilis; [c] erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.



[b] 14. deci.

[c] 14. deci.

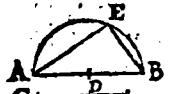
SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incōmensurabiles. Si verò A, & B, incomensurabiles sint potētia, & ipsis potētia tantū cōmensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potētia esse incōmēsurabiles; ut perspicuū ē.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inęqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, osten-

oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex ijs, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteatque inuenire, quo AB, plus poſſit quam C. Diuiſa AE, bifariam in D, deſcribatur ex centro D, & interuallo DA, vel DB, ſemicirculus AEB, [a] *in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ EB.* [b] *Cum enim angulus E, in ſemicirculo rectus ſit;* [c] *erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc eſt, quam C, quadrato rectæ EB. Quod eſt propoſitum. Similiter*



[a] 1. quarti

[b] 31. tertij

[c] 47. primi

DVABVS datis rectis lineis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.

HOC etiam aliter tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ AE, EB, quæ ſi coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, [d] *quippe cum quadratum ex AB, æquale ſit quadratis ex AE, EB.*

[d] 47. primi

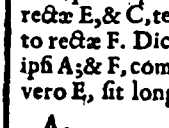
THEOR. 12. PROPOS. 15.

14. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit

quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quã quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tanto plus poſſit quã ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incõmenſurabilis lõgitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, poſitque A, prima plus quam B, ſecunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus poſſit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C: Si vero E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilé eſſe. Quoniam enim eſt vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Eſt autẽ quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypotheſim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadratum ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A, eſt



[a] 22. ſexti

[b] 22. ſexti

est longitudine commensurabilis ipsi E, erit quòque C, ipsi F, longitudine commẽsurabilis: Et si A, longitudine est incommensurabilis ipsi E, erit & C, ipsi F, incommensurabilis longitudine, vt in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

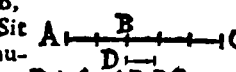
SCHOLIVM.

EODEM argumento ostendemus, si E, potentia tantũ commensurabilis fuerit ipsi A; & F, potentia tantum ipsi C, esse commensurabilem, vt constat ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. scripsimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16. 15. 9.

SI duæ magnitudines commensurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipsarum commensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum commensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt.

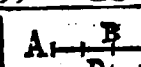
COMPONANTVR duæ magnitudines commensurabiles A B, B C. Dico totam quoque magnitudinem A C, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilem esse. [a] Sit enim ipsarum AB, BC, communis mensura D. Quoniam igitur D, ipsas AB, BC, metitur, [b] metietur quoque D, totam A C, ex ipsis compositam. Cum ergo D, metiatur A C, & A B; erunt A C, A B, commẽsurabiles. Similiter cum D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, commensurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipsarum AB, BC, commensurabilis erit.



[a] 3. decimi

[b] 1. prop.

SED



SED iam tota AC, ex AB, BC, composita commensurabilis sit alteri ipsarum AB, BC, nempe ipsi AB. Dico & AB, BC, inter se commensurabiles esse. Sit enim D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB; metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commensurabiles erunt AB, BC, inter se. Eodé argumento ostendemus AB, BC, esse commensurabiles, si AC, ipsi BC, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines cómensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

a 3. decimi.

b 3. pron.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si AC, ipsi AB, sit commensurabilis, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cum metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt AC, BC. Quod est propositum.

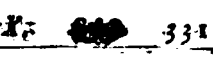
16. 9.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incómensurabiles

rabiles A B, B C. Dico totam quoq; magnitudinem A C, vtrique ipſarum AB, BC, incommenſurabilem eſſe. Si enim non eſt vtrique incommenſurabilis, ſit alteri commenſurabilis, ſi fieri poteſt,



nempe ipſi A B, [a] ſitque D, communis menſura ipſarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam AB; metietur quoque D, reliquam BC; Ac propterea cum D, metiatur vtramque AB, BC, erunt AB, BC, commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim incommenſurabiles. Non ergo commẽſurabilis eſt AC, ipſi AB; Eademque ratione neque ipſi BC, commenſurabilis erit. Quare vtrique ipſarum AB, B C, incommenſurabilis eſt.

[a] 3. decimi

[b] 3. pron.

SED iam tota AC, compoſita ex AB, BC, incommẽſurabilis ſit vni ipſarum componentium, nempe ipſi AB. Dico quoque AB, BC, incommenſurabiles eſſe. Si enim ſint commenſurabiles, [c] erit quoque tota A C, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis Quod eſt abſurdum. Ponitur enim AC, alteri ipſarum, nempe ipſi AB, incommenſurabilis. Non ergo commẽſurabiles ſunt AB, BC. Eodem argumento oſtendemus AB, BC, incommenſurabiles eſſe, ſi A C, ipſi B C, incommenſurabilis fuerit. Quapropter ſi duæ magnitudines incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 16. deci.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tota magnitudo ex duabus compoſita incommenſurabilis ſit alteri ipſarum, eandem & reliqua incommenſurabilem eſſe. Nempe ſi AC, incommenſurabilis ſit ipſi AB, eſſe quoq; eandem AC, reliqua B C, incommenſurabilem. Si enim AC, ipſi B C, foret commenſurabilis, eſſet quoque A C, ex coroll. precedentis propoſ. reliqua AB, commenſurabilis. Quod eſt abſurdum. ponitur enim incommenſurabilis. Non eſt ergo A C, ipſi B C, commenſurabilis, ſed incommenſurabilis. Quod eſt propoſitum.

SCHO-

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur parallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

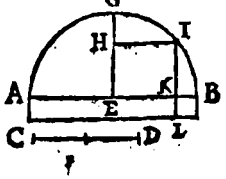
HOC lemma demonstrauimus nos in scholio propos. 28. lib. 6.

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

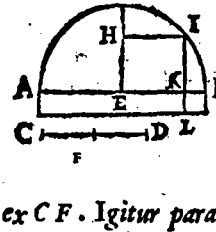
QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, absolui possit ex propos. 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea descripti minor sit rectangulo ad dimidium maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propos. illa 28. lib. 6. hoc est, quadratum ex dimidio minoris lineæ descriptum,

ptum, (quod quidem quarta pars est quadrati ex tota descripti, ex scholio propos. 4. lib. 2.) minus sit quadrato ex dimidiata parte maioris describpto: (quod quidem applicatum est ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, absolui hoc possit per propos. 28. lib 6. libet tamen idipsum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione facilio-ri. Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB, maior sit, oporteatque ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidē parallelogrammum æquale sit quartæ parti quadrati ex rectâ CD, descripti. Sectis rectis AB, CD, bifariam in E, & F, describatur ex centro E, & interuallo EA, vel EB, semicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque AE, dimidia ipsius AB, hoc est EG, ipsi AE, æqualis, maior quam CF, dimidia ipsius CD. Posita igitur EH, æquali ipsi CF, agatur per H, ipsi AB, parallela HI, demittaturque IKL, ad AB, perpendicularis, & sit KL, ipsi KB, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratum BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale esse quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam n. KI, media proportionalis est inter AK, KB, vt in scholio propos. 13 lib. 6. tradidimus; [a] erit rectangulum sub AK, KB, hoc est, rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc est, quadrato ex EH; [b] (est enim KI, ipsi



[a] 17. sexti

[b] 34. primi



KI, ipsi EH, æqualis, ob parallelogrammum EI, hoc est, quadrato ex CF: Est autem quadratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD; quod quadratum ex CD, per scholiū propos. 4. lib. 2. quadruplū sit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensque quadrato BL, æquale est quartæ parti quadrati ex CD, descripti. Quod est. propositum.

SCHOLIVM. II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectāgulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

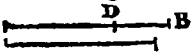
SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius sit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, sit EH, æqualis ipsi CF. Deinde acta HI, parallela ipsi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus AK, KB, æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quam recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duæ rectæ inæquales A B, *& C; & ad maiorem* A B, *applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartæ parti quadrati ex minore* C, *descripti, ita vt* D B, *latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmẽta* AD, DB, *inæqualia esse. Si enim* AD, DB, *segmenta dicantur esse æqualia; cum ex* 1. *lemmate parallelogrammum applicatum ad* A B, *deficiensque figura quadrata ex* D B, *descripta, æquale sit rectangulo sub* AD, DB; *sit autem quod sub æqualibus* AD, D.., *quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex* AD, *dimidio ipsius* AB, *descriptum; atque adeo ex scholio propos.* 4. *lib.* 2. *quadratum ex* AB, *quadruplũ erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex* C, *per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartæ partis quadrati ex* C. *Igitur quadrata rectarum ex* A B, *&* C, *æqualia sunt, atque rectæ* A B, *&* C, *æquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, &* A B, *maior. Inæqualia igitur sunt segmenta* AD, D B. *Quod est propositum.*



HOC *facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per*

sit per constructionem, E H, æqualis dimidiatæ parti ipsius CD, nempe ipsi C F, ductaque H I, parallela ipsi AB, & tandem demissa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione sint A K, K B; manifestum est AK, KB, segmenta esse inæqualia, cum AB, in E, secta sit bifariam. Immo hinc constat, prius segmentum maius esse, & posterius, quod latus est quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

17. 13.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tanto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet.

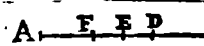
SINT

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, B D, faciatque segmenta AD, DB, longitudine commensurabilia. Dico AB, plus posse quã C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniã. n. per 3. lẽma præcedentis propos. AD, maior est, quam DB; diuidatur AB, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cum totæ EA, EB, æquales sint, & ablatæ quoque EF, ED; erunt & reliquæ AF, BD, æquales. Et quia recta AB, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D; [a] erit rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex EB; Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex EB: Est autem quadruplo rectanguli sub AD, DB, æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub AD, DB, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex ED, cum F D, dupla sit ipsius ED,) & quadruplo quadrati ex EB, æquale est quadratum ex AB. (quod quadratum ex AB, quadruplum sit per scholiũ propo. 4. lib. 2. quadrati ex EB, dimidiata parte ipsius AB.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus potest quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur FD, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles; [b] erit quoq; tota AB, parti DB, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi DB, composita ex DB, AF, longitudine commensurabilis: (quod composita ex DB, AF, dupla sit ipsius D B) Igitur cum vtraque A B, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B; [c] erunt quoque AB, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cum A B, composita ex AF,

[a] 5. secũdi

[b] 16. deci.

[c] 12. deci.



DB, tanquam una, & ex FD, cõmẽsurabilis sit longitudine cõpositæ ex A F, D B; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. commensurabilis lõgitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.

SED iam AB, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammũ applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse, quam C, quadrato rectæ FD. Quare cũ, AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ lõgitudine sibi cõmensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, lõgitudine cõmensurabilis. Igitur cũ tota A B, cõposita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine cõmensurabilis reliquæ compositę ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cũ vtraque AB, DB, longitudine sit cõmensurabilis compositæ ex AF, D B; [a] erunt quoq; AB DB, longitudine inter se commensurabiles: Atque adeo cum tota AB, composita ex AD, DB, commensurabilis sit longitudine ipsi DB; [b] erunt ipsæ AD, DB longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 12. deci.

[b] 16. deci.

18. 14.

THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammũ ad maiorẽ applicetur deficiẽs figura quadrata, & in partes incõmensurabiles lõgitudine ipsam diuidat; maior tanto plus poterit,

quam

quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit, quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.

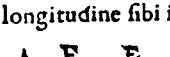
SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB; quartæ autem parti quadrati ex C, minore deſcripti applicetur ad AB, per 2. lemma propoſ. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incõmenſurabiles. Dico AB, plus poſſe quã C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur demonſtrare oportet ipſi A longitudine eſſe incommenſubilem. Quoniam rectæ AD, DB, ponuntur longitudine incommenſurabiles; [a] erit quoque tota AB, parti DB, longitudine incommenſurabilis. Sed DB, longitudine commenſurabilis eſt compoſitæ ex DB, AF, cum hæc illius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commẽſurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF, ipſa DB, longitudine ſit incommenſurabilis rectæ AB: [b] erit quoque reliqua compoſita ex DB, AF, eidem AB, longitudine incommenſurabilis: Ac propterea cum AB, compoſita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, incommenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex AB, DB, erit eadem AB,

[a] 17. deci.

[b] 14. deci.

per coroll.propoſ.17. huius lib.& reliquæ F D,longitudine incommenſurabilis.Ergo A B,plus poteſt quam C, quadrato rectæ F D,longitudine ſibi incommẽſurabilis.

IAM vero A B, plus poſsit quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi incommẽſuraBilis;& quartæ parti quadrati ex C,æquale parallelogrãmum applicetur ad AB, deficiẽs figura quadrata,faciatque in recta AB,partes AD,DB.Dico & rectas AD, DB, eſſe incommenſurabiles longitudine.Iiſdem enim conſtructis, oſtendemus vt prius,rectam AB,plus poſſe quam C,quadrato rectæ FD.Quare cum AB,ponatur plus poſſe,quã C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; erit AB,ipſi FD,incommenſurabilis longitudine.Igitur cum tota AB,compoſita ex FD,& ex AF,DB, tamquam vna,longitudine incommenſurabilis ſit ipſi F D; erit eadem AB,per coroll.propoſ.17.huius lib.& reliquæ compoſitæ ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis: Eſt autem compoſita ex AF,DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis,cum illa huius ſit dupla. Igitur cum duarũ linearum commenſurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur,& DB,ipſa compoſita ex A F,DB,longitudine incommenſurabilis ſit rectæ A B;[a] erit & reliqua DB,eidem AB,longitudine incõmenſurabilis;Ac proinde cum tota AB,compoſita ex AD,DB, incommenſurabilis ſit ipſi DB, longitudine;[b] erunt & ipſę A D, D B, longitudine inter ſe incommenſurabiles. Quam ob rem ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales,quartę autem parti quadrati, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] *14. deci.*

[b] *17. deci.*

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus;nunc ad Rationales & Medias tranſit in ſequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonſtratum eſt, lineas longitudine

dine commensurabiles, omnino & potentia cõmensurabiles esse, potentia vero commensurabiles, nõ omnino & longitudine, sed posse & longitudine commensurabiles esse, & incommensurabiles; manifestum est, si expositæ Rationali aliqua linea cõmensurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipsi commensurabilem non solum longitudine, sed etiam potentia: longitudine enim commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt. Si vero expositæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commensurabilis, si quidem & longitudine, dicetur & sic Rationalis, & commensurabilis ipsi longitudine, & potentia. Quod si expositæ Rationali rursus aliqua linea commensurabilis existens potentia, longitudine fuerit incommensurabilis; dicetur & sic Rationalis, potentia tantum ipsi commensurabilis.

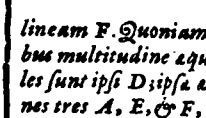
LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expositæ Rationali vel longitudine & potentia commensurabiles sunt, vel potentia solum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expositæ Rationali incommensurabiles sunt, potentia autem solum cõmensurabiles; atque ob id rursus dicuntur Rationales, & commensurabiles inter se, quatenus Rationales; commensurabiles, inquam, inter se vel longitudine & potentia, vel potentia solum: Et si quidem longitudine, dicuntur & ipsæ Rationales longitudine inter se commensurabiles, vt intelligatur, etiã potentia commensurabiles esse; Si vero potentia inter

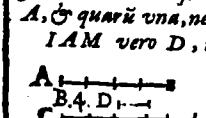
ſe ſolum ſunt commenſurabiles: dicuntur ipſæ quoque Rationales, potentia ſolum inter ſe commenſurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearũ Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe cõmenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique vtraque expoſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia. Hæc autem tria genera inueniemus hoc modo. Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes, quot nimirum vnitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliã E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cum habeant D, communem menſuram. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarũ vna, nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.



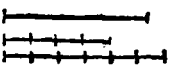
IAM vero D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communem D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cum ergo & inter ſe



ſint

sint longitudine commensurabiles; inuenta erunt duæ Rationales C, E, longitudine commensurabiles & inter se, & expositæ Rationali A, quarum neutra æqualis est Rationali expositæ A.

POSTREMO expositæ Rationali A, [a] inueniatur recta B, longitudine tantum incommensurabilis, quæ secetur in quotcunque partes æquales, & sumatur C, composita ex alijs quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales sint partibus rectæ B. [a] 11. deci.

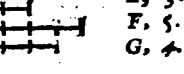


Quo facto, erũt B, & C, longitudine commensurabiles. Dico easdem expositæ Rationali A, potentia solum esse cõmensurabiles. Quoniam.n. A, B, potentia sunt commensurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commensurabile: Est autem eidem quadrato ex B, commensurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine sint commensurabiles, atque adeo & potentia; [b] *Igitur quadrata rectarum A, & C, commensurabilia quoque inter se sunt. Quare C, ipsi A, potentia est commensurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commensurabilium B, est ipsi A, longitudine incommensurabilis;* [c] *erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommensurabilis. Est ergo C, solum potentia ipsi A, commensurabilis. Et quia B, & C, Rationali expositæ A, potentia commensurabiles, Rationales sunt; Inuenta erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter se commensurabiles, potentia vero tantum commensurabiles expositæ Rationali A. Quod est propositum.*

[b] 12. deci.

[c] 14. deci.

QVOD si quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter se commẽsurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mẽsura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipsi A, æqualibus, quot sunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam linea B, C, D, habentes communem mensuram A, longitudine commensurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non solum expositæ Rationali, sed etiam inter se esse commensurabiles, facile hoc modo demonstrabimus. [d] *Quoniã Rationales lineæ*

[d] 6. defin.

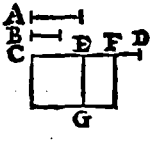
sunt, quæ expositæ Rationali sunt commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] *quæ autem eidem commensurabiles, & inter se commensurabiles sunt; manifestum est, Rationales lineas quascunque inter se commensurabiles esse.*

[a] 12. deci.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad secundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod sub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt secunda ad primam, ita rectangulum sub ipsis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico esse vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum sub A, & B, comprehensum. Ex quantacunque n. linea recta CD, abscindatur CE, ipsi A, æqualis, & EF, ipsi B. Deinde super CE, describatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum sub CE, & EF, hoc est, sub A, & B. [b] *Quoniam igitur est vt CE, ad EF, hoc est, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc est, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, sub A, & B, comprehensum; perspicuum est, si sint duæ rectæ lineæ, esse primam ad secundam, vt quadratum ex prima descriptum, ad rectangulum sub ipsis comprehensum.*



[b] 1. sexti

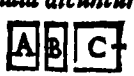
EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod est propositum.

LEMMA

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit nãq; C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia, quod nimirum ab ex poſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur B, Rationale eſt, [a] *erit ipſum Rationali C, commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cum commenſurabilia ſint ipſi B,* [b] *inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripto commenſurabile,* [c] *Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.*



[a] 9. defin.

[b] 12. deci.

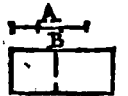
[c] 9. defin.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

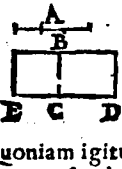
19. 15.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulũ BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus BC, CD, ſecundum aliquem prædictorum modorũ. (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorũ, quos in ſcholio 2. antecedẽtis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarũ



BC,



BC,CD,Rationali expositę A,sit æqualis,vel neutra,sed tamen ei vtraque commensurabilis sit aut longitudine,aut potentia tantum. Dico BD, rectangulum Rationale esse. Describatur. n. ex altera earum,nempe ex BC,quadratum BE. Quoniam igitur BC,Rationalis Rationali expositæ A, commensurabilis est vel longitudine & potentia, vel potentia solum;[a] erit quoque quadratum BE,ex BC,descriptum quadrato ex A, commensurabile: [b] Est autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia uocantur, vel Irrationalia. [c] Igitur & BE, illi commensurabile,Rationale est. Quia vero BC,hoc est, EC,& CD, longitudine commensurabiles sunt;(ponuntur enim BC,CD,Rationales inter se longitudine commensurabiles.)[d] & est vt EC,ad CD,ita EB,ad BD;[e] erunt quoque EB,BD,commensurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedētis propos. BD, Rationali BE,commēsurabile, Rationale est. Quod igitur sub Rationalibus longitudine commensurabilibus rectis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 3. defin.
[b] 8. defin.
[c] 9. defin.
[d] 1. sexti
[e] 10. deci.

20.
16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum est, longitudine commensurabilem.

SIT rursum expositа Rationalis A,& alia Rationalis BC,secundum aliquem modorum, quos in scholio 2. propositionis 19. exposuimus, hoc est, siue BC, æqualis sit Rationali expositæ A, siue non, commensurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potētia tantum. Applicetur autē ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD,Rationalē esse,& ipsi BC,commensurabilē longitudine. Describatur.n. ex BC,quadratū BE; quod similiter,

ter, vt in antecedenti propoſ. oſtendemus Rationale eſſe. Quia igitur B E, B D, Rationalia ſunt, [a] ipſa commenſurabilia erũt quadrato ex linea Rationali expoſita A, deſcripto; [b] Ac propterea & cõmenſurabilia inter ſe erũt: [c] Eſt autẽ vt BE, ad BD, ita EC, hoc eſt, B C, ad CD. Igitur & BC, C D, cõmenſurabiles ſunt longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. docuimus. Eſt ergo CD, ipſi BC, cõmenſurabilis lõgitudine: [d] ſed & Rationalis, quippe quæ Rationali B C, atq; idcirco Rationali expoſitæ A, commenſurabilis ſit, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demõſtrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis eſt, & longitudine commenſurabilis ipſi B C. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinẽ efficit, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. defin.
[b] 12. decim.
[c] 1. ſexti
[d] 16. defin.

LEMMA.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe.

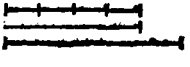
Si enim dicatur Rationalis; erit eius A——— *quadratum* Rationale *quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.*

HOC idẽ conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potẽtes ſpatia Irrationalia, vocãtur Irrationales.

LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tantum inter ſe commenſurabiliũ. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ

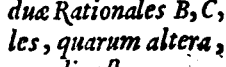


Ra-

Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, [a] *inueniatur C, longitudine tantũ incõmenſurabilis, ſeu (quod idẽ eſt) potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt; (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum commenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.*

[a] 11. deci.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantũ incommenſurabilis [b] *inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quod enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraque B, C, expoſitæ Rationali A, ſit potentia commenſurabilis;* [c] *erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles.*



[b] 11. deci.

[c] 6. defin.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si inuenienda sint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

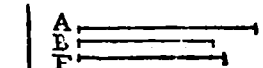
SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur nempe, A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H.

A, 5. E
B, 7. F
C, 3. G
D, 2. H

Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantũ commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G. vt A, ad C; similiterq; quadratũ ex E, ad quadratũ ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D.), erunt ipsa inter se commẽsurabilia, ac propterea & rectæ ipsa potentia saltem commensurabiles. 6. decimi *Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam qnadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.* [b] *Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensa sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.*

[b] 9. decimi

QVOD si propositis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenienda sit adhuc alia, quæ omnibus



C, 10. omnibus illis commenſu
D, 6, rabilis ſit potentia tan-
E, 7. tum, fiet id hoc modo.

Sint propoſita duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autẽ alio numero E, qui ad quemlibet ipſorum C, D primus ſit; (Inuenietur autem huiuſmodi numerus facile, ſi ſumatur primus, qui neutrum ipſorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum linea B, ad quadratum linea F, per coroll. propoſitionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem eſſe, & ipſis A, B, potentia ſolum commenſurabilem. Quod enim Rationalis ſit, ex eo patet, quod commenſurabilis ſit Rationali B, ſaltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, [a] *commenſurabilia ſint. Cum ergo proportio D, ad E, non ſit, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. oſtendimus; (quòd D, & E, qui ambo non ſunt quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus ſit, ſint inter ſe primi, ideoque plani non ſimiles, ac proinde ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. oſtendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)* [b] *erunt recta B, F, longitudine incommenſurabiles. Ergo potentia tantum commenſurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia ſolum commenſurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod oſtendemus perinde, vt idem demonſtrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommenſurabiles, &c.*

[a] 6. decimi

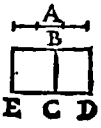
[b] 9. decimi

21. 19. THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale eſt: Et

Et recta linea ipsum potens, Irrationalis est. Vocetur autem Media.

SIT exposita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum sub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propos. diximus. (hoc est, siue altera illarum æqualis sit Rationali expositæ A, siue non.) Dico rectangulum B D, esse Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipsi BD, æquale est, Irrationalem quoque, quæ uocetur Media. Describatur enim ex altera illarum, vt ex B C, quadratum B E, quod erit Rationale, vt in demonstratione propos. 20. diximus. [a] Et quoniam est vt E C, hoc est, B C, ad C D, vt BE, ad BD. Est autem BC, ipsi CD, longitudine incommensurabilis, ex hypothesi; erit ex ijs, quæ in scholio propos. 10. huius lib. tradidimus, B E, ipsi B D, incommensurabile. [b] Quare cum B E, commensurabile sit quadrato ex Rationali exposita A: sit autem B E, ipsi B D, incommensurabile; [c] erit quoque quadratum ex Rationali exposita A, eidem B D, incommensurabile; Ac propterea BD, quadrato Rationalis expositæ incommensurabile existens, [d] Irrationale est. Quamobrem & recta potens ipsum BD, Irrationalis est, ex 1. lemmate propos. antecedentis.



[a] 1. sexti.

[b] 9. defin.

[c] 14. decimi.

[d] 10. defin.

VOCETVR autem hæc linea potens ipsum BD, Media, [e] propterea quod media proportionalis sit inter duas B C, C D, Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, quippe cum eius quadratū æquale sit rectangulo BD, sub ipsis B C, C D, comprehenso. Quod igitur sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus, &c. Quod demonstrandum erat.

[e] 17. sexti

SCHO-

SCHOLIVM.

ITAQVE omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur.[a] *Cum enim eius quadratum aquale sit rectãgulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, qua Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, qua medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel quae potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola haec linea Media hoc loco appellatur.*

[a] 17. sexti

VT autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est, vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmodum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres linea sint cõtinue proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, qua Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22 lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari potest.

HOC autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaq; non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus

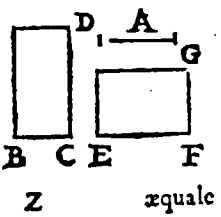
rabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehẽſo æquale eſt, ita vt ipſũ poſſit linea recta, qua Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

THEOR. 20. PROPOS. 23. 22. 20.

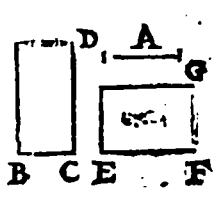
QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] appliceturque ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato



[a] 45. pri.

æquale



æquale eſt, faciatq; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi BC, longitudine incommenſurabilẽ. Quoniam. n. A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum inter ſe commẽſurabilibus contentum; alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, ſub Rationalibus EF, FG, potentia tantum commenſurabilibus contentum. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt
[a] 14. ſexti etiam ipſum BD; æqualia erunt BD, & EG, [a] lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit vt BC, ad EF, ita FG, ad CD; [b] Ac propterea
[b] 22. ſexti quoque vt quadratum ex BC, ad quadratum ex EF, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex CD: Sed quadratũ ex BC, commenſurabile eſt quadrato ex EF. (quod rectæ BC, EF ponantur Rationales; atque adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽtia tantum.) [c] Igitur & quadratum ex FG, commenſu-
[c] 10. deci. rabile erit quadrato ex CD; proptereaque & rectæ FG, CD, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expoſitę Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa non eſt expoſita Rationalis; erit quoque CD, expoſitæ Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo CD, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommenſurabilis ipſi BC. Quoniã. n. EF, FG, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt EF, ad FG, ita quadratum ex EF ad rectangulum EG, ſub EF, FG, contentum, ex
[d] 10. deci. lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. [d] erit quadratum ex EF, incommenſurabile rectangulo EG, atque adeo rectangulo BD, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum ex EF, commenſurabile eſt quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales ſint, atque idcirco ſaltem potentia commenſurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commenſurabile ſit quadrato ex EF; at rectangulum BD, eidem
[e] 13. deci. quadrato ex EF, incommenſurabile; [e] incommenſurabilia

lia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulũ BD, vt recta CD, ad rectam BC. [a] Incommensurabiles ergo sunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo est CD, & Rationali B C, longitudine incommensurabilis. Quamobrem, quod a Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 10. deci.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, aquale, si ipsis B C, & A, [b] sumatur tertia proportionalis pro latere C D. Cum enim BC, A, & CD, proportionales sint; [c] erit rectangulum B D, sub extremis B C, C D, contentum aquale quadrato media proportionalis A. [b] 11. sexti [c] 17. sexti

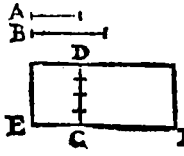
HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum aquale quadrato cuiuspiam linea recta.

PORRO ex hoc theoremate manifestiũ est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, aquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur aquale rectangulum, faciet id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine linea Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio aquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium cõtentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24. 23. 21.

MEDIAE cõmensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis C D, [d] ad quam applicetur rectãgulũ DE, æquale quadrato ex A, Media. [d] 45. primi



Quonſam igitur D E. Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit C E, latitudinem; [a] erit C E, Rationalis ipſi C D, longitudine incõmenſurabilis. Rurſus ad CD, Rationalem [b] applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erũt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, DE, DF, commenſurabilia. [c] Eſt autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. [d] Igitur EC, C F, longitudine ſunt commenſurabiles: Sed EC, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi C D, incommenſurabilis. [e] Igitur & C F, longitudine eidem C D, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ C D, ſit commenſurabilis; (Nam cum E C, C F, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & E C, ipſi C D, commenſurabilis ſaltem potentia, quod Rationalis ſit; erit & CF, eidem C D, commenſurabilis potentia, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus.) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commenſurabiles, [f] Ac proinde recta B, potens rectangulum DF, ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD, CF, Media eſt. Mediæ igitur commenſurabis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.

[a] 23. deci.
[b] 45. primi
[c] 1. ſexti
[d] 10. deci.
[e] 14. deci.
[f] 22. deci.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſſe. Poſtquam n. demonſtratum eſt DF, commenſurabile eſſe Medio DE, oſtenſum ex eo mox fuit D F, eſſe quoque Medium. Eademque ratio eſt in cæteris. Quod tamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

SIT ſpatium D F. ſpatio Medio DE, commenſurabile. Dico & DF, Mediũ eſſe. Poſsit enim A, Media ipſum DE, Mediũ. (Nam cum D E, Medium ſit, poterit ipſum recta, quæ Media dicitur, vt

in ſcholio propoſ. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipſum D F. Quoniam igitur D E, D F, commenſurabilia ſunt, erunt quoque quadrata ex A, B, ipſis æqualia, commenſurabilia. Quare A, B, rectæ potentia ſaltẽ ſunt cõmenſurabiles; Atq; idcirco exiſtente A, Media, erit & B, illi commenſurabilis Media, vt in hoc theoremate oſtenſum eſt. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim ſpatium, quod poteſt Media, Medium appellatur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus.

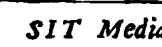
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propoſ. 19. huius lib. de Rationalibus dictum eſt, ita & hic de Medijs dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commenſurabilem, dici Mediam, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed & potentia; Vniuerſe enim quæ longitudine commenſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & potentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media ipſi potentia ſolum commenſurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui ſi inueniantur duæ rectæ commenſurabiles B, C; illa quidem longitudine, hæc vero potentia tantum;



erit vtraque B, C, Mediæ A, commenſurabilis, Media. Cum ergo A, B, ſint longitudine commenſurabiles; & A, C, potentia tantum; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commenſurabiles; & A, C, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quod eſt propoſitum.

a 24. deci.

SCHOLIVM.

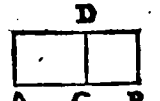
QVAMVIS omnis linea recta Media commenſurabilis, Media ſit; nõ tamen omnis Media cuilibet Mediæ eſt commenſurabilis; cum duæ Media dari poſſint prorſus incommenſurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propoſ. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inuenienda ſint duæ Media longitudine & poteneia incommenſurabiles.

24.
23.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium eſt.

CONTINEATVR rectangulum AD, ſub Medijs AC, CD, longitudine cõmenſurabilibus. Dico AD, Medium eſſe. Deſcribatur ex CD, Media quadratũ BD, quod erit Medium. b Et quoniam eſt vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autẽ AC, CB, hoc eſt, AC, CD, longitudine cõmenſurabiles; c erunt AD, DB, cõmenſurabilia. Quare ſpatium AD, Medio DB, cõmenſurabile, Mediũ eſt, ex coroll. præcedentis propoſ.



b 1. ſexti

c 10. deci.

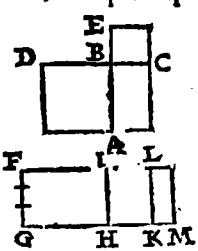
propoſ. Quod ergo ſub Medijs longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 23. PROPOS. 26.

25. 23.

QVOD ſub Medijs potentia tantũ commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehenſum ſub Medijs AB, BC, potentia tantum commẽſurabilibus. Dico AC, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus; cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, [a] ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, deſcripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, deſcripto; eritque totũ FM, vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib. 1. eſt oſtenſum. Quia vero AD, CE, Media ſũt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL, [b] (eſt enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM, [c] erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipſi FG, ſeu KL, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo & ipſis æqualia rectangula FH, LM, commenſurabilia: [d] Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad KM. [e] Igitur GH, KM, longitudine inter ſe commenſurabiles ſunt. Quare GH, KM. Rationales oſtenſæ, ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali vero FG, ſolum commenſurabiles



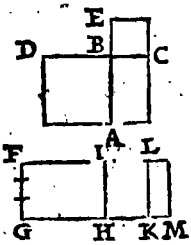
[a] 45. primi

[b] 34. primi

[c] 23. deci.

[d] 1. ſexti

[e] 10. deci.



potentia, cum ei oſtenſæ ſint longitudine incommenſurabiles; Ac propterea rectangulum ſub ipſis G H, KM, Rationale eſt. Et quoniam eſt, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE; (quod DB, BC, ipſis AB, BE, ſint æquales, vtraque vtrique.) & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE; erit quoque vt AD, ad AC, ita AC, ad CE; atque adeo AD, AC, CE, proportionalia ſunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: Habent autem rectæ GH, HK, KM, eaſdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales ſunt; proptereaque rectangulum ſub GH, KM, quadrato ex HK, æquale eſt. Eſt autem rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale. Igitur & quadratum ex HK, Rationale eſt; ideoque & recta HK, Rationalis erit; & ob hoc ipſi FG, Rationali expoſitæ, hoc eſt, ipſi HI, commenſurabilis vel longitudine, & potẽtia, vel ſolũ potẽtia. Et ſi quidẽ HK, ipſi HI, longitudine ſit cõmenſurabilis; rectangulũ HL, ſub Rationalibus HI, HK, lõgitudine cõmenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK, ipſi HI, potentia ſolum commenſurabilis ſit; erit rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, potentia tantum commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, Medium. Eſt ergo AC, rectangulum ſub Medijs AB, BC, potentia tantum commenſurabilibus contentum, vel rationale, vel Medium. Quocirca, quod ſub Medijs potentia tantum commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

a 20. deci.
b 1. ſexti
c 1. ſexti
d 17. ſexti
e 6. defin.
f 20. deci.
g 22. deci.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. propoſ. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipſi AC, æquale, h *ſi tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis ſumatur pro latere HK.* i *Nam rectangulum ſub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo ſub medijs AB, BC.*

h 12. ſexti
i 16. ſexti

HAC

HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Medijs potentia tantum commenſurabilibus eſſe vel Rationale, vel Mediũ; docebit Euclides propoſ. 28. quanam ratione inuenienda ſint duæ Media potentia tantum commenſurabiles, qua Rationale comprehendant: Propoſ. vero 29. duas Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, qua ſpatium Medium contineant.

ITAQVE habemus ex his, [a] *rectangulum contentum ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale;* [b] *Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum rectãgulum eſſe Irrationale, appellariquæ Medium, & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat,* [c] *rectangulum comprehenſum ſub duabus Medijs longitudine commenſurabilibus eſſe Medium;* [d] *Rectangulum autem ſub duabus Medijs potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel Medium.*

[a] 20. deci.
[b] 22. deci.
[c] 25. deci.
[d] 26. deci.

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituere; nempe æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulũ AC, comprehenſum ſub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico AC, neque Rationale eſſe, neq; Mediũ, &c. Conſtructis.n. eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH, KM, Rationales eſſe, & ipſi FG, longitudine incõmenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponũtur incõmenſurabiles longitudine & potentia; erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo ipſis æqualia rectangula FH, LM, incommenſurabilia: [e] *Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad rectam KM.* [f] *Igitur recta GH, KM, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare GH, KM, oſtenſa Rationales, ſunt potentia tantum inter ſe commenſurabiles;* [g] *Ac propterea*

[e] 1. ſexti.
[f] 10. deci.
[g] 11. deci.

ptereа rectangulum ſub ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ
a 17. ſexti dicitur Media. a Poteſt autem rectangulum ſub ipſis GH, KM, recta HK: (Nam, vt prius, oſtẽdemus tres GH, HK, KM, eſſe proportionales) Igitur HK, Irrationalis eſt, & Media. Quare IK, Rationale non eſt: ſi enim Rationale
b 21. deci. eſſet, b faceret ipſum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK, Medium
c 23. deci. eſt; Si enim eſſet Medium, c faceret ipſum applicatum ad Rationalẽ HI, latitudinẽ HK, Rationalẽ, & ipſi HI, longitudine incommenſurabilẽ. quod eſt abſurdũ. oſtenſa eſt. n. HK, Irrationalis, & Media. Itaque cũ IK, neq; Rationale ſit, neq; Medium; neceſſario neq; AC, illi æquale, Rationale erit, neq; Medium, ſed tertium quoddã genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi IK, quod ſub Rationali, & Media, cõtinetur, cũ HI, Rationalis ſit, & HK, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectã quæ poteſt ſpatiũ ſub duabus Medijs lõgitudine & potentia incommenſurabilibus) quales ponuntur AB, BC, cõprehenſum, poſſe quoq; rectangulũ ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentũ. Quod eſt propoſitũ.

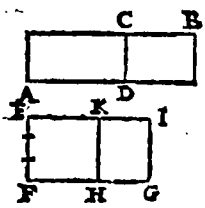
26. 22.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non eſſe Rationale. Sit enim, ſi fieri poteſt, DB, Rationale. Expoſita ergo Rationali linea EF;
d 45. primi d ad ipſam applicetur rectangulũ EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt ſit reliquũ HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Medijs AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationa-
e 23. deci. nalem EF, ſunt applicata; e erunt rectæ FG, FH, Rationales

nales,& ipſi E F, incommenſurabiles longitudine. Rurſus, quia Rationale HI, applicatum eſt ad Rationalem HK; (a eſt enim recta HK, Rationali E F, æqualis) b erit recta HG, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Quare cum HG, EF, longitudine ſint commenſurabiles; & EF, ipſi FH, longitudine incommenſurabilis, vt eſt oſtenſum; c erit & H G, eidem F H, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt F H, ad HG, ita quadratum ex FH, ad rectangulũ ſub F H, H G, ex tertio lemmate propoſ. 19. huius lib. d Igitur quadratum ex F H, incommenſurabile eſt rectangulo ſub F H, HG. Sed quadrato ex F H, commenſurabile eſt quadratũ ex HG; (quod ſint ambo ex lineis Rationalibus F H, H G, deſcripta) e atque adeo & duo quadrata ex F H, HG, ſimul, quadrato ex F H, commenſurabilia ſunt: Et rectangulo ſub F H, H G, commenſurabile eſt id, quod bis continetur ſub FH, HG, (quia hoc illiús eſt duplũ.) Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſtendimus, & duo quadrata ex FH, H G, ſimul incommenſurabilia ſunt rectangulo ſub FH, HG, bis. f Quare & compoſitũ ex quadratis rectarũ FH, HG, & ex rectãgulo bis ſub FH, HG, incõmenſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarũ FH, HG. g At quadratis ex FH, H G, vna cum rectãgulo bis ſub F H, H G, æquale eſt quadratum ex FG. Igitur & quadratũ F G, incommenſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarum F H, H G: Eſt autem compoſitum hoc Rationale, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. quod oſtenſum ſit cõmenſurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cũ huic cõpoſito, quod Rationale eſt, incõmenſurabile ſit quadratũ ex FG, h erit quadratũ ex F G, Irrationale; i ac propterea & recta FG, Irrationalis erit. Quod eſt abſurdũ. oſtenſa enim eſt F G, Rationalis longitudine ipſi EF, incõmenſurabilis. Nõ ergo D B, quo Medium AB, ſuperat Mediũ AC, Rationale eſt. Quã ob rem Mediũ nõ ſuperat Mediũ Rationali. Quod erat oſtẽdendũ.



a 34. pri.
b 21. deci.
c 14. deci.
d 10. deci.
e 16. deci.
f 17. deci.
g 4. ſecũdi
h 10. defin.
i 11. defin.

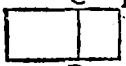
SCHO-

SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonſtrabimus.

RATIONALE ſuperat rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, ſuperet Rationale AC,



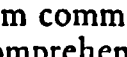
[a] 9. defin. 12. deci. *ſpatio DB. Dico DB, quoque eſſe Rationale. Quoniã. n. AB, AC, Rationalia ſũt;* [a] *erunt AB, AC, commenſurabilia quadrato Rationalis expoſitæ;* [b] *atque adeo & inter ſe commenſurabilia. Quare cum totum AB, compoſitũ ex AC, DB, commenſurabile ſit ipſi AC; erit quoque idem AB, reliquo DB, commenſurabile, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Eſt autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4. propoſ. 19. huius lib. Rationale eſt. Quod eſt propoſitum.*

27. 0. PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2. propoſ. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles [c] inter quas media proportionalis ſumatur C; [d] fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, eſſe Medias

[c] 13. ſexti [d] 12. ſexti



potentia tantum commẽſurabiles, quæ Rationale cõprehendant. Quoniam. n. A, B, Rationales ponũtur potentia tantum commenſurabiles; [e] erit rectangulum ſub ipſis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo [f] cum ipſum poſsit recta C, erit C, Media. Et quoniam eſt vt A, ad B, ita C, ad D; ſuntque A, B, potentia tantũ commenſurabiles; erunt quoque C, D, ſolum commenſurabiles

[e] 22. deci. [f] 17. ſexti

ſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus., Eſt ergo & D, Mediæ C, commenſurabilis, Media. Quare inuentæ ſunt Mediæ C, D, potentia tantũ commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Rationale. Quoniam.n.eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita eſt C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [b] poterit rectangulum ſub ipſis C, D, comprehenſum. Eſt autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub C, D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus C, D, potenta tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

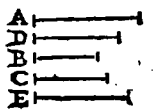
[a] 24. deci.

[b] 17. ſexti

PROBL. 5. PROPOS. 29. 28. o.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant.

EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles; [c] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [d] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe, potentia tantum commẽſurabiles, quæ Medium cõtinent. Quoniam.n. A, B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, atque adeo & quadratum ex D, [e] quod illi æquale eſt, [f] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E; ſunt autem B, C, Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; erũt quoque D, E, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D, Media ſit, [g] erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis,



[c] 13. ſexti

[d] 12. ſexti

[e] 17. ſexti

[f] 22. deci.

[g] 24. deci.

rabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ sunt potentia tantum cõmensurabiles. Dico iam ipsas continere Mediũ. Quoniam.n. est vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [a] Rectangulum igitur sub D, E, æquale est ei, quod sub A, C: Est autẽ quod sub A, C, Rationalibus potentia solum commensurabilibus, [b] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum sub D, E, Medium est. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

[a] 16. sexti

[b] 22. deci.

SCHOLIVM. I.

IN ijs quæ sequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos similes inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem se mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, se multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani similes, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex constructione est manifestum.

A, 6.	C, 12.	
B, 4.	D, 8.	
E, 24.	F, 96.	

QVONIAM autem in lib. 9. [c] ostensum est, si impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem vero, si impar multiplicet imparem; perspicuum est, quonam modo inueniri possint duo plani similes, quorum vterq; par sit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera sumpta, sint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: si autem numeri sint impares, erunt & plani eorum impares. Quod si vnius latera sint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus, impar; horum vero par: Similiter pares erunt plani, si quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

[c] 28. & 29 noni.

LEMMA

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit.

INVENIANTVR per ea, quæ in scholio proximo dicta sunt, duo plani similes AB, & C, quorum vterque vel par sit, vel impar. [a] *Et quoniam, siue a pari par auferatur, siue ab impari impar, reliquus par est; detracto BD, ex AB, qui æqualis sit ipsi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiso bifariã in E; Dico numerum factum ex AB, in BD,* [b] *qui quidem quadratus est, compositum cum quadrato numeri ED, facere quadratũ. Quoniam n. numerus AD, bifariam est diuisus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theo remate eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compositi faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod est propositum.*

A ..... E ..... D ..... B
C .. . .

[a] 24. & 26 noni.

[b] 1. noni

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, quando AB, & C, similes sunt, inuentos esse eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum excessus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus sit.

QVOD si numeri sumãtur AB, & C, nõ similes, vterq; tamẽ par, vel impar; inuenti erunt eodẽ modo duo

duo quadrati numerorum B E, E D, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui fit ex A B, in B D, non eſt
2. noni. quadratus. Si enim quadratus eſſet, numeri A B, B D, hoc eſt, A B, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

SCHOLIVM II.

ITAQVE ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterque par, vel impar ſit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, deſcripti ſunt illi, quos quarimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratū

A ..... E ..... D .....B ex E D, numero.
C . . . . . qui producitur ex A B, in B D, qui etiã quadratus eſt.

SI vero inueniendi ſint duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non ſimiles, quorũ vter-

A ... E ... D ..... B que par ſit, vel impar, &
C . . . . . reliqua peragẽda, vt prius. Nam ſimiliter oſtendemus quadratum ex B E, aquale eſſe quadrato ex D E, vna cum eo qui ex A B, in B D, fit; Quare exceſſus quadratorum ex BE, ED, eſt numerus factus ex A B, in B D, qui cum non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent A B, B D, plani ſimiles. quod non ponitur) conſtat propoſitum.

HOC poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA.

LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

SINT duo numeri plani similes A B, *&* C, *pares, vel impares, vt in lemmate precedenti, fiatque eadem constructio, ita vt rursus quadratus, qui fit ex multiplicatione similium numerorum* A B, D B, *inter se, vna cum quadrato ex* D E, *aequalis sit quadrato ex* B E. *Auferatur deinde ex* D E, *vnitas* E F. *Erit ergo quadratus ex* D F, *minor quadrato ex* D E, *quod & latus* D F, *latere* D E, *minus sit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex* A B, *in* B D, *alter vero ex* D F, *in se fit, compositos non efficere numerum quadratum. Nam si compositus ex ipsis est quadratus, erit is vel maior quadrato ex* B F, *vel aequalis, vel minor: quod fieri non posse, in hunc modum demonstrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex* B F; *ac propterea latus ipsius maius latere* B F. *Erit ergo latus ipsius vel aequale numero* B E, *vel maius.* (*Minus enim non erit, quoniam inter numeros* B E, B F, *sola vnitate inter se distantes nullus medius est numerus, ne vnitas ipsa secetur; Esset autem dictum latus inter ipsos medium, si maius poneretur quam* B F, *minus vero quam* B E.) *Si dicatur aequale, ita vt quadrato ex* B E, *aequalis sit quadratus numerus*

A H . I . E . F . G . . . D . . . . . B
C . . . . . .

compoſitus ex quadrato, qui fit ex A B, in B D, & ex quadrato numeri D F; cũ eidem quadrato ex BE,

A .. H .. I. E. F. G .. D ..... B
C .....

ſit oſtenſus in præcedenti lẽmate æqualis numerus, qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex DE. Ablato ergo communi, eo ſcilicet qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri DE, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex AB, in BD, alter vero ex D F, inſe fit, æquale eſt numero BE. Sed neque maius. Sit enim, ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quam BF, ita vt quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior eſt quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, inſe fit, (cum hic cõpoſitus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex AB, in B D. vna cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex DF, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus DF, latere DE, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ſit ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neque æquale, neque

neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex B F.

SIT iam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus eſt, (diuiſus enim eſt A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex ijs, quę ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F. Sed eidem quadrato ex B F, æqualis ponitur numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato D F: Igitur qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis eſt ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F: & detracto communi quadrato ex D F, relinquetur, qui fit ex H B, in B D, ei qui fit ex A B, in B D, æqualis. Quare cum H B, A B, multiplicantes eundem B D, producant æquales numeros; habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit H B, ipſi A B, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, quadrato ex B F, æqualis. [a] 18. ſepti.

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F, ac propterea & latus eius latere B F, minus, quod ſit B G, ita vt qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ſit quadrato ex B G. Sumatur

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . . B
C . . . . . .

autem ipsius E G, duplus A I. Quoniam igitur totus A D, totius F D, duplus est, & ablatus A I, ablati E G; erit rursus & reliquus I D, reliqui G D, duplus; ac propterea I D, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonstrata sunt, erit numerus qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis quadrato ex B G: ponitur autem eidem quadrato ex B G, æqualis qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Igitur qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis est ei, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Ablatis igitur quadratis ex D G, & D F, quorum qui ex D G, minor est, remanebit qui ex I B, in B D, maior eo, qui ex A B, in B D, pars toto. Quod est absurdum. Non est ergo qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F. Sed neque maior est ostensus, neque æqualis. Non igitur quadratus est, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Quod est propositum.

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma precedens inueniantur duo quadrati, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus; habebit hic compositus non quadratus ad neutrum ipsorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, si quemlibet numerum quadratū in duos non quadrates partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuisus est, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

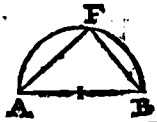
PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

29. 17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

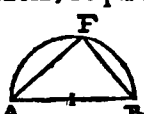
EXPONATVR linea Rationalis A B, & inueniantur ex ijs, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati C D, C E, quorum excessus D E, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt C D, numerus ad numerum D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex A F; accommodeturque A F, in semicirculo A B F, circa diametrum A B, descripto: ac denique connectatur recta F B. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo; [b] erit quadratum ex A B, æquale duobus quadratis ex A F, & F B; hoc est, recta A B, plus poterit quam A F, quadrato rectæ F B. Et quia est quadratum ex A B, ad quadratum ex A F, vt numerus C D, ad numerum D E; [c] erunt quadrata ex A B, A F, commensurabilia; atque adeo cum quadratũ ex A B, sit Rationale, nempe ex linea Rationali A B, descriptum; erit & quadratum ex A F, Rationale, propterea; & recta A F, ipsum describẽs, Rationalis. Rationales ergo sunt A B, A F; atq; adeo cõmensurabiles saltẽ potentia. Quia vero quadratũ ex A B, ad quadratũ ex A F, proportionẽ non habet, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; (cũ neq; quadratus numerus C D, ad non quadratũ D E, proportionem habeat, quã quadratus ad quadratũ; alias & D E, quadratus esset, [d] vt in Arithmeticis est demonstratũ. qđ nõ ponitur) [e] erũt rectæ A B, A F,



[a] 31. tertij
[b] 47. pri.
[c] 6. decimi
[d] 24. deci.
[e] 9. decimi

longitudine incommensurabiles: Sunt autem commensurabiles potentia, vt ostensum est. Igitur A B, A F, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

IAM vero, quoniam est vt CD, ad DE, ita quadratū ex AB, ad quadratum ex A F; erit per conuersionem rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratum numerum CE, ita quadratū ex A B, ad quadratum ex F B. (sicut. n. CD, superat DE, quadrato CE, ita etiā quadratum ex AB, superat quadratum ex AF, quadrato ex FB.). Quare rectæ A B, F B, longitudine commensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tātum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quam minor A F, quadrato lineæ F B, sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendum erat.



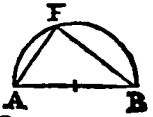
a 9. decimi

30. 18.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inuenianturque per lemma 2. propos. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compositus C D, non sit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, secetur in duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD. ad neutrum ipsorū CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratū, alias secundum priorem modum, esset totus C D, etiam quadratus:



C, 144. E, 16. D C, 160. D

dratus: iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum C E, E D, quadratus quoque, [a] vt in Arithmeticis ostensum est. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll. propos. 6. huius lib. vt C D, ad D E, ita quadratum ex A B, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex A F; accommodeturq; A F, in semicirculo A F B, circa A B, descripto. Denique connectatur recta F B. Poterit igitur, vt in præcedenti, A B, plus quam A F. quadrato rectæ F B; Eruntque A B, A F, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propo. Quoniã vero rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt C D, ad C E, ita quadratum ex A B, ad quadratũ ex F B: Non habet autem C D, ad C E, proportioné quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex A B, ad quadratum ex F B, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. [b] Quare rectæ A B, F B, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales A B, A F, potentia tantum cõmensurabiles, ita vt maior A B, plus possit quam minor A F, quadrato lineæ F B, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

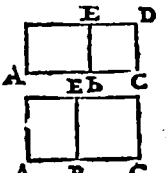
[a] 24. octaui

[b] 9. decimi

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales A B, B C, in rectum constitutæ, quarũ A B, maior sit. Dico esse, vt A B, ad B C, ita rectangulum sub A B, B C, ad quadratum ex B C. Describatur. n. ex B C, quadratũ B D, compleaturq; rectangulũ A D; eritque rectangulum A E, sub A B, B C, contentum; quod B E, ipsi B C, sit æqualis: perspicuum autem est, esse vt A B, ad B C, ita A E, ad B D.



[c] 1. sexti

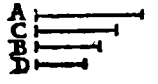
EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua AB, *minor est, quam* BC.

31. 24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

a 30. deci. a REPERTAE sint duæ Rationales A, B, potétia tantum commẽsurabiles, ita vt A, maior plus possit quã B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitq; C, media proportionalis inter A, & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniã igitur A, B, sunt Rationales potentia solum commensurabiles;



b 22. deci. b erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autẽ A, & B, potentia tantũ commensurabiles, erũt quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, vt in

c 24. deci. scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autẽ vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C,

d 17. sexti ad B, ita B, ad D; d Ac propterea rectangulũ sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulũ sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quoniam

niam vero est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; [a] poterit quoque C, plus quã D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendũ erat. [a] 15. decimi.

QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

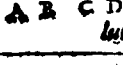
SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facile iudicabunt, qui cum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant; non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, *in vectum constitutæ. Dico esse vt* AB, *ad* CD, *ita rectangulum sub* AB, BC, *ad rectangulum sub* BC, CD. *Describatur enim ex* BC, *quadratũ* BCDE, *perficiaturque rectangu-*



lum

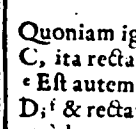
lum AF; *Eritque* A E, *contentum ſub* A B, B C; *&* C F, *ſub* B C, C D; *quod* B E, C D, *ipſi* B C, *æquales*
a 1. *ſexti* *ſint*. a *Perſpicuum autem eſt eſſe* AB, *ad* C D, *vt* A E, *ad* C F. *Quod eſt propoſitum*.

32. 26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

SINT inuentę tres Rationales A, B, C, potentia tãtum commenſurabiles, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. b Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commenſurabilibus, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia ſolum commenſurabilis, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. *huius lib. demõſtrauimus*.) c Et ipſarum A, B, ſumatur media proportionalis D; d fiatque vt D, ad B, ita C, ad E.



b 30. *deci.*
c 13. *ſexti*
d 12. *ſexti*

Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, eſt vt A, ad C, ita rectangulum ſub A, B, ad rectangulum ſub B, C:
e 17. *ſexti* e Eſt autem rectangulo ſub A, B, æquale quadratum ex
f 16. *ſexti* D; f & rectangulo ſub B, C, æquale rectangulũ ſub D, E, quòd proportionales ſint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia ſolum commenſurabiles. Ergo & D, E, potentia ſolũ commenſurabiles ſunt, vt in ſcholio propoſ. 10. huius

lib.

lib. ostendimus. [a] Quia vero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; [b] erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuentæ ergo sunt duę Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, [c] quòd Mediũ est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; [d] poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commẽsurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

[a] 22. decim.
[b] 24. decim.
[c] 22. decim.
[d] 15. decim.

QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt prius, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparere potest ex adducta demonstratione.

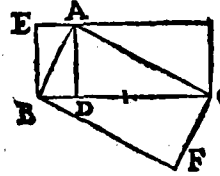
LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, a quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum sub CB, BD, æquale esse quadrato ex AB: contentum autem sub BC, CD, æquale quadrato ex AC: & contentum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum denique sub BC, AD, æquale contento sub AB, AC.

QVO-

[a] 17. sexti

QVONIAM ex coroll. propos. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis est inter CB, BD; erit rectangulum sub CB, BD, quadrato ex AB, æquale.



EADEM ratione erit rectangulũ sub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniã per idem coroll. AC, media proportionalis est inter BC, CD.

RVRSVS quia ex eodẽ coroll. AD, inter BD, DC, media est proportionalis, erit eodem modo rectãgulum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

[b] 8. sexti

POSTREMO, [b] quia triangula ABC, ABD, similia sunt; erit vt BC, ad AC, ita AB, ad AD.

[c] 16. sexti

[c] Quare rectangulum sub BC, AD, æquale est rectangulo sub AB, AC. Quod etiam ita ostendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum sub BC, AD:

[d] 41. primi

Item rectangulũ AF, sub AB, AC, contentũ. [d] Quoniam igitur rectangulum CE, duplum est trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiusdem trianguli est duplum; erunt inter se æqualia rectangula CE, AF. quod est propositum.

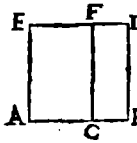
LEMMA II.

SI recta linea secetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum sub tota & maiore parte, ad rectangulum sub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta AB, non bifariam in C, sitque maior pars AC. Dico esse vt AC, ad CB, ita rectangu-

lum

lum sub AB, AC, ad rectangulum sub AB, CB. Describatur enim ipsius AB, quadratum ABDE, ducaturque CF, ipsi AE, parallela; eritq; AF, contentum sub AB, AC, & CD, contentum sub AB, CB; quod AE, CF, ipsi AB, aquales sint. [a] Quoniam igitur est vt AC, ad CB, ita AF, ad CD; constat propositum.



[a] 1. sexti

EADEM ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum sub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum sub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem secetur bifariam; erit rectangulum sub ipsis contentum duplum rectanguli, quod sub maiori linea & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum constituentes ABC, secetur que minor BC, bifariam in D. Dico rectangulum sub AB, BC, duplum esse rectanguli sub AB, BD. Cõpleatur n. rectangulum AC, sub AB, BC; ducaturq; DE, ipsi AB, parallela; eritq; BE, contentum sub AB, & BD, dimidia minoris. [b] Quoniam igitur AC, ipsius BE, duplum est, quod & basis BC, dupla sit basis BD; constat propositum.

[b] 1. sexti

EODEM

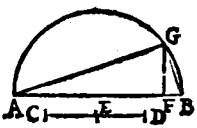
EODEM modo, si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod sub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AB, minore & BD, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

33. 27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

a 31. deci. a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia solum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quã minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; secetur q; CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est, quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud, quod sub AF, FB, continetur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quam CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartę parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, ad rectangulum sub AB, FB; Rectangulum vero sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lemma



b 19. deci.

ma 1. eiusdem antecedentis propositionis; [a] quòd angulus AGB, rectus sit in semicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cum AF, FB, longitudine sint incõmensurabiles, [b] erũt quadrata ex AG, GB, incommensurabilia. [c] Igitur rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles sunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale est, [d] æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compositum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rursus, quia ex 1. lemmate propositionis præcedentis, rectangulum sub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale est factũ, [e] æquale est quadrato ex FG; (propterea quòd angulus AGB, rectus est, & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla existens ipsius CE, dupla etiam erit ipsius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propositionis, rectangulum sub AB, CD, duplum erit rectanguli sub AB, FG. (cum FG, dimidia sit minoris CD,) [f] Sed rectangulum sub AB, CD, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Medium est. Igitur & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, cum sit eius dimidium, Mediũ est, per coroll. propos. 24. huius lib. Atqui rectãgulo sub AB, FG, per 1. lemma propositionis præcedentis, æquale est rectangulum sub AG, GB. Contentũ igitur sub AG, GB, Medium quoque est: Ostensum autem est compositũ ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciũt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum; Medium. Quod faciendum erat.

[a] 31. tertij
[b] 10. deci.
[c] 4. defin.
[d] 47. primi
[e] 17. sexti
[f] 22. deci.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in scholio quodam antique, fieri posse, vt duo spatia Irrationalia componant spatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior sit, non habentes proportionem.

quam

quam quadratus ad quadratum; sintq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem describto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniã igitur est vt C, ad D, ita quadratũ ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet antè C, ad D, proportionẽ quam C, 6. D, 4. quadratus ad quadratũ; erunt latera AB, AE, dictorum quadratorũ proportionẽ non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ac propterea cum AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. [b] Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur cum AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, [c] erunt quadratum ex AB, & rectangulum AF, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemque argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus confici posse Rationale. Quod est propositum.

[a] 9. decimi

[b] 1. sexti

[c] 10. deci.

AT vero si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totũ AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim vtrumque AF, FB, Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. [d] Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB, [e] Rationale quoque est. Quod est propositum.

[d] 16. deci.

[e] 9. defin.

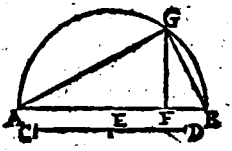
34. 28.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

RE-

[a] REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quã minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensuabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, [b] æquale existens quadratis rectarũ AG, GB, Medium est; erit quoque cõpositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedẽti propositione, ostẽdemus rectangulũ sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. hũius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duæ rectæ AG, GB, quæ ostẽsæ sunt potentia incommensurabiles, faciũt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



[a] 32. deci.

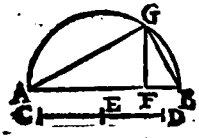
[b] 47. primi

PROBL. 12. PROPOS. 36. 35. 29.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum quadratis

dratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis.

a 33. deci. 1 REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus possit quam minor C D, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; fiantque reliqua, vt in propos. 34. Ostendemus igitur similiter, rectas A G, G B, potentia incommensurabiles esse. Et quia quadratum ex Media A B, Medium est,



b 47. primi b, & quadratis rectarum A G, G B, æquale; erit & compositum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rursus, vt in 34. demonstrabimus, rectangulum sub A B, C D, duplum esse rectanguli sub A B, F G, atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum ex constructione, rectangulum sub A B, C D, Medium sit: erit quoque rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B, quod illi per 1. lemma propos. 33. huius lib. æquale est, Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quoniam vero A B, longitudine incommensurabilis ponitur ipsi C D; Est autem eidem C D, ipsa C E, longi-

c 13. deci. tudine commensurabilis, quod illa huius sit dupla; c erũt A B, C E, longitudine incommensurabiles: Sed vt A B, ad C E, ita est per lemma 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex A B, ad rectangulum sub A B, C E, hoc est, ad rectangulum sub A B, F G, hoc est, sub A G, G B, (sunt enim rectangula sub A B, F G, & sub A G, G B, per

d 10. deci. 1. lemma propos. 33. huius lib. æqualia,) d Igitur quadratum ex A B, incommensurabile est rectangulo sub A G, G B. Inuentæ sunt ergo duæ rectæ lineæ A G, G B, potentia incommensurabiles, quæ faciunt & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis contentum Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Quod faciendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 24. huius lib. nos demonstraturos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositū ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulū Medium, Media, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum sub AG, GB, commensurabilia. quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB, potens compositū ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB; inuentæ erunt duæ Medias & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

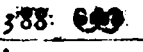
PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. 36. 30.

SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duę Rationales AB, BC, potentia solum commensurabiles, inuentæ per 2. lem-

ma propoſ. 21. huius lib. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quoniã. n. AB, longitudi ne incommenſurabilis eſt ipſi BC; & vt AB, ad B C, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex B C, per lem ma propoſ. 31. huius lib. erit rectangulum ſub AB, BC, quadrato ex B C, incommenſurabile. Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt eius duplum, nempe quod bis ſub A B, B C, continetur; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt quadratum rectæ AB; (omnia enim ſunt Rationalia) atque adeo & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quę in ſcholio propoſ. 14. huius lib. oſtendimus, & quod bis ſub AB, BC, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compoſitũ ex eo, quod bis ſub AB, BC, & ex compoſito quadratorum rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum ex tota AC. (Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vna cũ rectangulo ſub AB, BC, bis) compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile erit: Eſt autem cõpoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, Rationale, quod commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex BC, Rõnali. Igitur quadratũ ex A C, quadrato Rõnali ex BC, incommenſurabile, Irrationale eſt; atq; adeo & recta ipſa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu vt alij loquuntur, Binomiũ, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia ſolum commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.



10. deci. *16. deci.* *4. ſecũdi* *17. deci.* *10. defin.*

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nã recta quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, Irrationalis eſt, quæ Media vocatur. At vero compoſita ex ipſis, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur.

22. deci. *37. deci.*

THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

37.
31.

SI duæ Mediæ potentia tantum cõmensurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] superius inuentę AB, BC, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem esse. Quia enim AB, est ad BC, vt rectangulũ sub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate

propos. 31. huius lib. est ostensum; sunt autem AB, BC, longitudine incommensurabiles; [b] erunt rectangulum sub AB, BC, & quadratum ex BC, incommensurabilia: Sed rectangulo sub AB, BC, commensurabile est, quod sub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia sint commensurabiles, erunt ipsarum quadrata commensurabilia, [c] atque adeo & compositum ex ipsarum quadratis quadrato ex BC, commensurabile erit.) Igitur & rectangulum sub AB, BC, bis, & compositum ex quadratis rectarum AB, BC, incommensurabilia inter se sunt, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. sunt demonstrata. Ergo compositum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, [d] quod huic composito æquale est, [e] incommensurabile quoque est rectangulo sub AB, BC, bis: Est autem eidem rectangulo bis sub AB, BC, cõmensurabile rectangulum semel sub AB, BC, cũ hoc sit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex AC, incommensurabile est rectangulo sub AB, BC: Ponitur autẽ rectangulum sub AB, BC. Rationale. [g] Irrationale ergo est quadratum

[a] 28. deci.
[b] 10. deci.
[c] 16. deci.
[d] 4. secundi
[e] 17. deci.
[f] 13. deci.
[g] 10. defin.

[a] 11. defin. dratum ex A C, [a] & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimediale primum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATVR rectangulum ABCD, sub Rationali A B, & Irrationali B C. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, [b] *faciet ipsum ad Rationalem AB, applicatum latitudinem BC, Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim BC, Irrationalis. Non ergo A C, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*

[b] 21. deci.

38. 32.

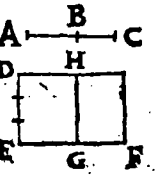
THEOR. 27. PROPOS. 39.

SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secūda.

[c] 29. deci. COMPONANTVR duæ Mediæ [c] superius inuentę A B, B C, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineāt. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, [d] ad quam applicetur rectangulū DF, æquale quadrato A C; & cōposito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eādem DE, applicetur DG. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangu-

[d] 45. primi

ctangulũ DF, [a] æquale est duobus quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis sub A B, B C; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis sub AB, BC, continetur. Quoniã verò, ex hypothesi, rectangulum sub A B, B C, Medium est; erit & rectangulum bis sub AB, BC, ei commensurabile, hoc est H F, Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commensurabilium, commensurabilia sunt; [b] erit & compositum ex ipsis, nimirum rectangulum D G, vtriuis ipsorum commensurabile: Sed vtrumque quadratorũ ex Medijs A B, BC, Medium est. Igitur & DG, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium erit. Quia igitur Media D G, H F, applicantur ad Rationalem D E; (c est enim G H, Rationali DE, æqualis.) [d] erunt eorũ latitudines EG, GF, Rationales ipsi DE, longitudine incommẽsurabiles. Rursus quia AB, BC, longitudine incommensurabiles sunt; & est vt A B, ad B C, ita quadratum ex A B, ad rectangulum sub AB, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommensurabile rectangulo sub AB, BC, vt in scholio propos. 10. huius lib. ostensum est: Atqui quadrato ex AB, ostensum est commensurabile compositum ex quadratis rectarum A B, B C; & rectangulo sub AB, BC, commensurabile est; quod continetur bis sub AB, BC, cum hoc illius sit duplum. Igitur per ea, quæ in scholio propos. 14. huius lib. diximus, erit & compositũ ex quadratis rectarum AB, BC, hoc est, rectangulũ DG, incommensurabile rectangulo bis sub AB, BC, hoc est, rectangulo HF. [e] Cum ergo sit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [f] erit EG, ipsi GF, longitudine incommensurabilis: ostensum autem iam fuit E G, G F, esse Rationales. Rationales igitur sunt EG, GF, potentia tantum commensurabiles, [g] ac propterea, & tota EF, composita, Irrationalis est. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum sub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale est; Ac propterea & quadratum ex AC, ipsi DF, æquale, Irrationale est. Quare & recta AC, Irrationalis est. Vocetur autem



[a] 4. secundi
[b] 16. deci.
[c] 34. primi
[d] 23. deci.
[e] 1. sexti.
[f] 10. deci.
[g] 37. deci.

tem ex binis Medijs secunda, seu vt alijs placet, Bimediale secundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles, &c. Quod erat demonstrandum.

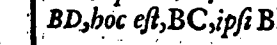
SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propositione lineã Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic vero lineã Irrationalẽ AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commensurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs secundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius est Medio, quod Irrationale est, ex propos. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam secetur, erit cõpositum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum sub partibus bis comprehensum, quadrato eius lineę, qua maior pars minorem superat.

SECETVR recta AD, in B, non bifariam, sitque maior pars AB; in qua sumatur BC, minori parti BD, æqualis, vt sit AC, excessus, quo AB, superat BD, hoc est, BC, ipsi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB, BD, *simul maiora esse rectãgulo bis sub* AB BD, *quadrato rectę* AC. *Quoniã n. quadrata ex* AB, BC, *æqualia sunt rectangulo bis sub* AB, BC. *vna cum quadrato ex* AC; *estq;* BC, *ipsi* BD, *æqualis: erunt quoq; quadrata ex* AB, BD, *æqualia rectangulo bis sub* AB, BD, *vna cũ quadrato*



7. secundi

ex

ex AC. *Quare quadrata ex* AB, BD, *maiora sunt, quã rectangulum bis sub* AB, BD, *quadrato rectæ* AC. *quod est propositum.*

COROLLARIVM.

EX hoc sequitur, quadrata partium inæqualium simpliciter esse maiora rectangulo, quod bis sub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

39.
33.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur; quę faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ [a] superius inuentæ AB, BC, potẽtia incommensurabiles, facientes quidem compositũ ex ipsarum quadratis Rationale; rectangulũ vero sub ipsis contentũ, Mediũ. Dico totã AC, esse Irrationalẽ. Quoniã. n. rectangulũ sub AB, BC, Mediũ ponitur, erit & rectãgulũ bis sub AB, BC, illi cõmensurabile, Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. atq; adeo Irrationale. Ponitur autẽ compositũ ex quadratis rectarũ AB, BC, Rónale. [b] Incõmensurabile ergo est rectangulũ bis sub AB, BC, composito ex quadratis rectarum AB, BC. [c] Igitur & rectangulum bis sub AB, BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc est, quadratum ex AC, incommensurabile est composito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compositum ponatur Rationale; [d] erit quadratum ex AC, illi incommensurabile, Irrationale; [e] Ac propterea recta AC, Irrationalis est. Vocetur autẽ Maior, quia [f] cum possit duo quadrata ex AB, BC,

[a] 34. decim.
[b] 10. defin.
[c] 17. decim.
[d] 10. defin.
[e] 11. defin.
[f] 4. secundi

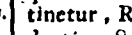
BC, & rectangulum bis ſub AB, BC; compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, per lemma antecedens, maius eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Quare cum compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale ſit, rectangulum vero bis ſub AB, BC, Medium; recte vocabitur AC, Maior, ſiquidem a Rationali, quod maius eſt, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

40. 34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

[a] 35. deci. COMPONANTVR duæ rectæ, ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium; rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam



AC, Irrationalem eſſe. Quoniam.n. compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, Medium eſt; quod uero continetur bis ſub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod ſub AB, BC, ſemel cõtinetur, Rationale ponatur; [b] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC. [c] Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectãgulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo

[b] 10. defin.

[c] 37. deci.

bis

bis sub AB,BC. Cum ergo rectangulum bis sub AB, BC, vt diximus, sit Rationale; [a] erit quadratum ex A C, illi incommensurabile, Irrationale; [b] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia potest Medium, nempe compositum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum scilicet bis contentum sub A B, B C. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommensurabiles, &c. Quod demonstrandum erat.

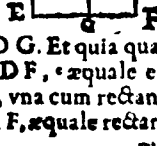
[a] 10. defin.
[b] 11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

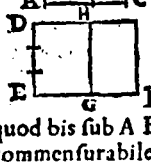
41. 35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommensurabiles componantur, quæ faciãt & compositũ ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [c] superius inuentæ AB, BC, potentia incommensurabiles, facientes compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum Dico totam AC, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis DE, [d] ad quam applicetur rectãgulum DF, æquale quadrato ex A C; Et composito ex quadratis rectarum A B, B C, alterum æquale applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangulum D F, [e] æquale est cõposito ex quadratis rectarũ AB, BC, vna cum rectangulo bis sub AB, BC, erit reliquum H F, æquale rectangulo



[c] 36. decl.
[d] 45. primi
[e] 4. secũdi



gulo bis ſub AB, BC. Quoniam vero tam compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulum DG, quam rectangulum ſub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis ſub AB, BC, nempe ipſum HF, (cum illi ſit commenſurabile) Medium ponitur, [a] facient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB, BC: Eidem autem rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; [b] erunt & DG, HF, incommenſurabilia. Quare [c] cum ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [d] erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles: Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac propterea tota EF, ex ipſis compoſita Irrationalis eſt. Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; [f] ideoque & recta ipſa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 23. deci.
[b] 13. deci.
[c] 1. ſexti.
[d] 10.
[e] 37. deci.
[f] 11. defin.

LEMMA

SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualiũ ſimul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rurſus

ſus inæqualiter in D, ſintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quam poſteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, ſimul maiora eſſe quadratis ex AD, DB, ſimul. Diuiſa enim AB, bifariam in E,

cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, [a] *æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale eſt eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratū ex EC, maius ſit quadrato ex ED; erit reliquū rectangulū ſub AC, CB, minus reliquo rectangulo ſub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis ſub AC, CB, minus erit rectangulo bis ſub AD, DB. Quoniā vero quadratum ex AB* [b] *æquale eſt tā rectangulo bis ſub AC, CB, vna cū quadratis ex AC, CB, quā rectāgulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectāgulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis ſub AC, CB, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.*

[a] *1. ſecūdi*

[b] *4. ſecūdi*

SED cadat iā D, inter A, E. Quoniā igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quā partes AD, DB; erit AD, (quæ minor eſt poſteriorū) maior quam CB; (quæ priorū minor eſt) ac proinde cū AE, EB, æqua-

quales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE.

Itaque quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

* 5. secundi

42. 36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVAE ex binis nominibus, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri.

Dico AB, ad aliud punctũ diuidi nõ posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterũ in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, nõ diuidi bifariã. Nam si bifariã diuideretur, essent AC, CB, lõgitudine cõmensurabiles. quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantũ cõmensurabiles. Eodẽ modo neque ad D. bifariã secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantũ cõmensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quã ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt, quã partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedẽs, quadrata ex AC, CB, vel minora sũt quadratis ex AD, DB, vel maiora, (Ne-

ra,) Neque enim partes A D, D B, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima, quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronũciatio 16. lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis sub A D, D B, [a] quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex A B; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A B, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in scholio propositionis 34. huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cũ Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. [b] Quoniam vero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi cõmensurabile, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. [c] Quare cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostẽdimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Nõ igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnum duntaxat pun-

[a] 4. secundi

[b] 22. deci.

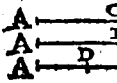
[c] 27. deci.

punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

43. 37. THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propositio 38. huius libri. Dico AB, ad aliud punctũ diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in



alia nomina AD, DB. Igitur vbicũque punctum D, exiſtat, similiter probabimus, vt in præcedenti propositione, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB: Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub AC, CB, ei, quod continetur ſemel ſub AC, CB, commensurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub AD, DB. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus; perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CD, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ ſunt, & potentia commensurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commensurabilia. [a] Quare & compoſitum

[a] 16. decim.

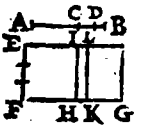
positum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum vtrumque sit Medium, erit & compositum ex *ipsis*, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, DB. [a] Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarū AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

[a] *27. deci.*

THEOR. 33. PROPOS. 45. 44. 38.

QVAE ex binis Medijs secunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

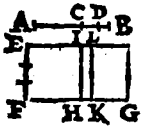
SIT ex binis Medijs secunda AB, diuisa ad punctū C, in sua nomina, ita vt AC, CB, Medię sint potētia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propos. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, existat, similiter ostendemus, vt in propositione 43. quadrata ex AC, CB, vel maiora esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur Rationalis EF, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB; quandoquidem quadratum ex AB, [c] æquale est quadratis ex AC, CB, &



[b] *45. pri.*

[c] *4. secundi.*

rectangulo bis sub AC, CB. Eodem modo si ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale; erit reliquum LG, æquale rectangulo bis sub AD, DB, comprehenso.



Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia sunt quadratis ex AD, DB; erũt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia sunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rursus quia quadrata ex AC, CB, maiora sunt, per lemma propos. 39. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipsius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidiũ ipsius FG. Eadem ratione ostẽdemus FK, maiorẽ esse dimidio ipsius FG. Inæquales ergo sunt partes FH, HG, partibus FK, KG, singulæ singulis. Quoniã verò AC, CB, Mediæ sunt, & potẽtia commẽsurabiles; erũt & earũ quadrata Media, & commensurabilia. [a] Igitur & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Cum ergo vtrũque ipsorũ sit Medium, erit quoque compositũ ex ipsis, hoc est, EH, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK. [b] Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Eodem modo cũ rectangulum sub AC, CB, ponatur Mediũ, erit & quod bis sub AC, CB, hoc est, IG, illi commẽsurabile, Mediũ, ex coroll. propos. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, [c] erit HG, Rationalis ipsi HJ, longitudine incommensurabilis. Non aliter ostendemus LG, Medium esse, & KG, Rationalem ipsi KL, lõgitudine incommensurabilem. Rursus quia AC, CB, longitudine sunt incommensurabiles; & est vt AC, ad CB, ita per lẽma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad [d] rectangulum sub AC, CB, erit quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. Sed quadrato ex AC, cõmensurabile est compositum ex quadratis rectarum AC, CB: (cum enim AC, CB, potentia sint commẽsurabiles, atq; adeo ipsarum quadrata cõmensurabilia;) [e] erit & compositum ex ipsis vtrilibet ipsorum, nimirum quadrato

a 16. deci.
b 23. deci.
c 23. deci.
d 10. deci.
e 36. deci.

quadrato ex A C, commensurabile.) Rectangulo uero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum A C, C B, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholiū propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi IG. Quocirca [a] cū sit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, [b] erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. [c] Igitur FG, tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Eodem modo ostendemus & F G, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, [d] vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur A B, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctū, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.

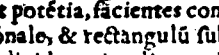
[a] 1. sexti
[b] 10. deci.
[c] 37. deci.
[d] 43. deci.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

45.
39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale; rectangulum vero sub ipsis Mediū, vt vult propos. 40. huius lib. Dico AB, non posse diuidi ad aliud punctū in alia nomina, quæ scilicet lineæ incōmensurabiles quoq; sint potētia, facientes compositum ex ipsarū quadratis Rōnale, & rectangulū sub ipsis Mediū. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D, extiterit, demōstrabimus similiter, vt in propositione 43. excessum cōpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, eum esse, qui rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex



quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatiũ est Rationale: (quia cũ utrũque compositum ex hypothesi sit Rationale, erit quoq; eorum excessus spatium Rationale, vt in scholio propos. 27. huius libri ostendimus.) Igitur & excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium est Rationale. Quoniam vero rectangulum sub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis sub AC, CB, Medium, ex coroll. propos. 24. huius libri, cum ei sit commensurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis sub AD, DB. Igitur cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub AC, CB, spatium Rationale: Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur Maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonstrandum.

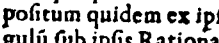
*27. deci.

46. 40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuisa in sua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommensurabiles sint potentia, facientes compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; rectangulum uero sub ipsis Rationale, vt vult propos. 41. huius libri. Dico AB, non posse diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ ni mirum sint lineæ quoque incommensurabiles potentia, facientes cõpositum quidem ex ipsarum quadratis Mediũ, & rectangulũ sub ipsis Rationale. Diuidatur enim, si fieri potest, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, existat, ostendemus non aliter, ac in propos. 43. huius libri, excessum



excessum rectanguli bis sub AC, CB, & rectãguli bis sub AD, DB, eundẽ esse, qui est cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB. Sed excessus rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB, spatium Rationale est; quod ostendemus, vt in propos. 44. Igitur & excessus cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, spatium est Rationale. Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatiũ Rationale. Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum. Non igitur AB, Rationale ac Medium potens, ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

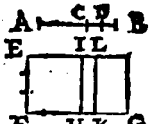
[a] 27. deci.

THEOR. 36. PROPOS. 48.

47. 41.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C, ita vt AC, CB, potentia incommensurabiles sint, facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, Incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42. huius libri. Dico AB, diuisi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ vidĕlicet sint etiã lineæ potentia incõmensurabiles, facientes & compositum ex ipsarũ quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D, ubicunque hoc punctũ D, existat. Constructio autẽ eadem fiat, quæ in propos. 45. ostẽdemusq; vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex



quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale. Medium, ex coroll propoſ. 24. huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media EH, IG, applicata ad Rationalem EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis) faciunt latitudines FH, HG, Rationales, longitudine ipſi EF, incommenſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi EF. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub AC, CB, nempe rectangulo IG, [b] eſtq; vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtendimus: Sed oſtenſæ ſunt Rationales. Rationales ergo ſunt FH, HG, potentia ſolum commenſurabiles. Igitur tota FG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, [c] iam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

a. 23 decimi.

b 1. ſexti

c 43. decimi.

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Ra-

Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expositæ Rationali longitudine sit commensurabile; Vocetur ex binis nominibus secūda.

III.

QVOD si neutrum ipsorum nominum sit longitudine commensurabile expositæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS si maius nomen plus possit, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis;

IIII.

SI quidem maius nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomē; Vocetur quinta.

VI.

QVOD si neutrum ipsorum nominum; Vocetur sexta.

SCHOLIVM.

NVMERVS dictarum sex linearũ, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniã nomina linearum, quæ ex binis nominibus dicitur, sunt lineæ Rõnales potentia tantũ commensurabiles, non poterit vtrumq; nomen expositæ Rationali commensurabilis esse longitudine; (alias enim nomina ipsa essent quoq; lineæ longitudine inter se cõmensurabiles, vt in scholio propos. 2. huius libri docuimus. quod nõ ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera consurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rursus quia nomina maqualia sunt; (alias enim essent lineæ inter se longitudine commensurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis: Et si quidem plus possit quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, constituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, secunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus possit quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis, efficientur vna cum eisdem tribus generibus alia tres diuersæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & sexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perspicuum est. Sunt igitur sex diuersæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

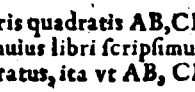
PVLCHRE autem Euclides primus ordine facit tres, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus potest, quam minus, quadrato rectæ lineæ sibi incommensurabilis longitudine; propterea quod commensurabile antecedit incommensurabile, vt manifestum est.

RVR-

RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationalis; & secundum, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile. quoniam maius naturæ antecedit minus, cui minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49. INVENIRE ex binis nominibus primam. 48. 42.

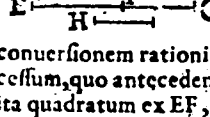
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs, quæ in scholio 2. propo. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem nō habeāt, quam quadratus ad quadratum: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commēsurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll propos. 6. huius libri, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam. n. quadrata æx EF, FG, cū proportionem habeant, quam numeri AB, AC, commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles;



a 6. decimi

b 9. deci.

[a] 37. deci. les; Atq; idcirco tota EG, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam esse. Cum enim sit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autem AB, maior, quam AC; erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propos. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniã igitur est vt AB, numerus ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad excessum, quo antecedens AB, superat consequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad excessum, quo antecedens quadratum ex EF, superat consequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebũt



[b] 9. deci. quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [b] ac proinde rectæ EF, H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estque idem maius nomen EF, expositæ Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

49. 43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus secundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in precedenti propositione, expositaq; Rationali quadã D; sumatur ei longitudine cõmensurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, esse ex binis nominibus secundam

dam. Quoniã. n. quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, A B, commensurabilia sunt; erunt & rectę FG, EF, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis est. Quia vero A C, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, E F, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Incõmensurabiles ergo sunt longitudine rectę F G, EF. Sũt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quę ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cũ enim sit vt numerus AC, ad numerum A B, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex E F: Et conuertendo vt A B, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autẽ AB, maior quam A C; erit & quadratum ex E F, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in precedenti propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilẽ esse. Quoniam igitur maius nomen E F, plus potest, quã minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estq; minus nomen FG, expositę Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

a 6. decimi.

b 9. decimi.

c 37. decimi.

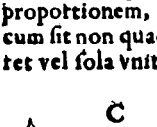
PROBL. 15. PROPOS. 51. 50. 44.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim,

cum

cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum: Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quam A C, differet vel ſola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidé, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt ſi AC, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario. Quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi AC, ſit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5. vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8 lib. 8. oſtendimus, non cadet inter I. & AC, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Expoſita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll propoſ. 6. huius lib vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum



[a] 8. decimi ex EF. [a] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportionē habentia, quam numerus I, ad numerum AB, commenſurabilia; atque adeo & lineæ D, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I. ad AB, hoc eſt, quadratum ex D, ad quadratum ex E F, proportionem non habet,

[b] 9. decimi quam numerus quadratus ad numerum quadratū; [b] erūt D, & EF, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. [c] Erunt ergo quadrata

[c] 6. decimi ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Idcoque & lineæ EF, FG. commenſurabiles, ſaltem potentia. Igitur cum E F, oſtenſa ſit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad AC, hoc eſt, quadratum ex EF, ad quadratū ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum;

[d] 9. decimi [d] erunt E F, F G, longitudine incommenſurabiles Sūt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [e] Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam

[e] 37. deci. eſſe

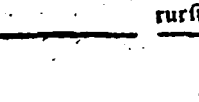
esse. Quoniam. n. est vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, Et vt AB, ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autẽ I, ad AC, proportionem, quã numerus quadratus ad numerum quadratũ. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum;[a] ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommensurabiles sunt. Quoniam autem est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Est autem AB, maior quam AC; erit & quadratũ ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propos. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Ostendemus iam similiter, vt in 49. propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilem esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quam minus FG, quadrato rectæ H, sibi longitudine commẽsurabilis, & neutra ipsarum EF, FG, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D, vt demonstratum est; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum.

[a] 9. decimi

PROBL. 16. PROPOS. 52. 51. 45.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compositus ex ipsis AB, ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in scholio 3. propos. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commensurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rónalis, cũ Rationali D, commensurabilis sit. Quod si reliqua cõstruantur, vt in propos. 49 ostendemus similiter, vt ibi, totã EG, ex binis nominibus esse. Dico & quartam esse. Erit enim



rursus

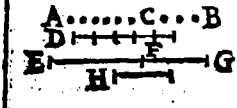
rursus, vt in 49. propos. quadratum ex EF, maius quam quadratũ ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectę H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionem rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratũ ex EF, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerum quadratũ. *9. decī. Longitudine ergo incommensurabiles sunt rectę EF, & H. Itaq; cũ maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen EF, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

52. 46.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in precedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositę Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt AB, ad CB, ita



quadratum ex EF, ad quadratũ ex H. Ostendemus, vt in propo positione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incommensurabiles esse. Quare cum maius nomen plus EF, possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommmensurabilis, & minus nomen FG, longitudine commensurabile expositę Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.

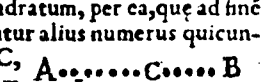
PROBL.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

53. 47.

INVENIRE ex binis nominibus sextam.

REPERTIS duobus numeris AC,CB,planis non similibus,quorum neuter sit quadratus,& compositus ex ipsis AB,non sit quoque quadratus, habeatq; ad neutrũ ipsorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum;(quod quidem fiet,si numerus qui libet nõ quadratus diuidatur in duos numeros inter se primos.[a] Nam hac ratione & totus ad vtrũque ipsorum primus erit;atque idcirco proportionem ad illos non habebit,quam quadratus ad quadratum, per ea,quę ad finẽ lib.8.demonstrauimus.)Sumatur alius numerus quicunque I,qui nec ad AB,nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis est quiuis numerus quadratus.Hic enim ad AB,& AC,nõ quadratos proportionem nõ habebit, quã quadratus ad quadratũ. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I,ad AB,ita fiat quadratũ ex D, ad quadratũ ex EF, per coroll.propos.6.huius lib.& reliqua fiãt,vt in propos.51 ostendemusq; vt ibi, rectas D,& EF, esse longitudine incommẽsurabiles, atq; totã EG, ex binis esse nominibus. Dico & sextã esse.Demonstrabimus.n.similiter,vt in 51. propos.D,& FG,longitudine esse incommensurabiles, esseq; quadratum ex EF,maius,quam quadratum ex FG Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Ostendemus quoque vt in propos.49.per conuersionem rationis, esse vt AB, ad CB,ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB,ad CB,atque adeo quadratum ex EF,ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; erunt rectę EF,& H, longitudine incommensurabiles. Itaque cum maius



[a] 30. sept.

[b] 9. decī.

nomen

nomen EF, plus posit, quam minus F G, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutrum ipsorum nominum EF, F G, longitudine sit commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus sexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus sextam. Quod faciendum erat.

LEMMA.

SI recta linea secta sit vtcunque; erit rectangulum sub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum sub tota, & vna parte, mediũ proportionale inter quadratum totius lineę, & quadratum dictæ partis.

SECTA sit recta AB, vtcunq; in C. *Describatur ex AB, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur* B E: *Ducta autem ex* C, *recta* CF, *ipsi* BD, *parallela, quę diametrum secet in* G, *agatur per* G, *ipsi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propos. 4. lib. 2.* FH, CI, *quadrata partium* AC, CB; *vtrumq; autem rectangulorum* DG, G*A, comprehensum sub eisdem partibus: At vero rectangula* CD, *AI, sub tota AB, & parte* CB, *contenta. Dico* DG, *mediũ proportionale esse inter quadrata* FH, CI: *At* CD, *mediũ esse proportionale inter quadrata* AD, CI. *Quoniã. n.* [a] *vt* HG, *ad* GI, *ita est tam* FH, *ad* DG, *quã* AG; *ad* CI; *erit vt* FH, *ad* DG, *ita* AG, *ad* CI: [b] *Est autem* AG, *ipsi* DG, *æquale. Igitur erit quoque vt* FH, *ad* DG, *ita* DG, *ad* CI; *Atq; adeo* D G, *medium proportionale est inter quadrata* FH, CI.

[a] 1. sexti.

[b] 43. prim.

RVR-

RVRSVS quia est [a] *vt* AB, *ad* CB, *ita tam* AD, *ad* CD, *quam* AI, *ad* CI; *erit vt* AD, *ad* CD, *ita* AI, *ad* CI: *Est autem* AI, *ipsi* CD, *æquale. Igitur erit vt* AD, *ad* CD, *ita quoque* CD, *ad* CI. *Quare* CD, *medium proportionale est inter quadrata* AD, CI. *Eodem modo erit* AF, *medium proportionale inter quadrata* AD, FH.

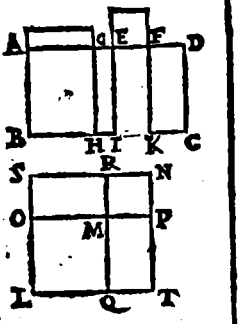
[a] 1. sexti.

THEOR. 37. PROPOS. 55.

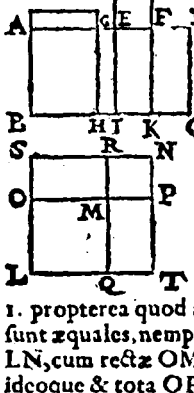
54. 48.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineã, quę potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit. n. ipsius AD, maius nomẽ AE. Erũt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commensurabiles; & A E, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & deniq; AE, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariã in F. Quia igitur AE, plus potest quam ED, quadrato rectæ sibi lõgitudine commẽsurabilis, si quartæ parti quadrati ex E D, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammũ sub AG, GE, cõtentum, per 2. lemma propos. 17. huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; [b] in partes longitudine cõmensurabiles ipsam diuidet. Quare AG, GE, partes inter se



[b] 18. deci.



ter se longitudine commensurabiles sunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipsis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK.[a] Et parallelogrammo A H, æquale quadratum fiat L M: At parallelogrammo G I, æquale fiat quadratum M N; coniungantur q; quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnã rectam lineam constituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnã rectam QR, vt demonstratum est a nobis ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. propterea quod anguli OMQ, PMR, ad verticem M, sunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cum rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales sint, ideoque & tota OP, toti QR;[b] sit autem OP, ipsis S N, LT; & QR, ipsis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum L N; ideoque quadratum.

QVONIAM vero rectangulum sub AG, GE, æquale est, per constructionem, quadrato ex EF;[c] erit vt AG, ad EF, ita EF, ad GE;[d] Ac propterea & vt AH, ad EK, ita E K, ad GI. Quare EK, medium proportionale est inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata L M, MN, medium proportionale est TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur est T M, ipsi E K.[e] Cum ergo ipsi T M, æquale sit M S,[f] & ipsi E K, æquale sit F C; erit & M S, ipsi FC, æquale. Quocirca totum quadratum L N, toti rectangulo A C, æquale est; atq; adeo recta OP, potest spatiũ AC, contentum sub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, esse Irrationalem; quæ ex binis nominibus dicitur.

QVONIAM enim A G, GE, ostensæ sunt longitudine commensurabiles;[g] erit & tota AE, vtrique ipsarum longitudine commensurabilis: Est autem A E, cum sit maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali A B, commensurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex scholio propos. 12. huius lib.

[a] 14. secun.
[b] 34. prim.
[c] 17. sexti
[d] 1. sexti.
[e] 43. primi
[f] 36. primi
[g] 16. deci.

lib. longitudine commensurabiles sunt; Atque adeo cum AB, sit Rationalis, erunt & AG, GE, Rationales. [a] Quare rectangula AH, GI, sub Rationalibus longitudine cómensurabilibuscótenta Rationalia sunt; Ideoque & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Rationália erũt; Ac proinde & rectæ OM, MP, Rónales erũt.

[a] 20 deci.

ET quoniam AE, ipsi ED, longitudine incommensurabilis est; Est autem ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis AG; & ipsi ED, commensurabilis est longitudine EF, eius dimidia; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & AG, EF, inter se longitudine incommensurabiles. Quare & AH, EK, [b] eandem proportionem habentia, quam AG, EF, [c] incommensurabilia sunt, ac proinde & LM, MT, illis æqualia, sunt incommensurabilia. [d] Igitur & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles, [e] cum eandem habeant proportionem, quam LM, MT: Sunt autem & OM, MP, Rationales ostensæ. Igitur OM, MP, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. [f] Quapropter tota OP, potens spatium AC, Irrationalis est, quæ ex binis nominibus dicitur. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonstrandum erat.

[b] 1. sexti
[c] 10. deci.
[d] 10. deci.
[e] 1. sexti.
[f] 37. deci.

THEOR. 38. PROPOS. 56.

55.
49.

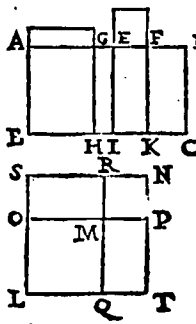
SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR spatiũ AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit. n. ipsius AD, maius nomẽ AE.

Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit quam ED, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commẽsurabilis; Et denique ED, Rationali expositę AB, longitudine cõmensurabilis. Secetur ED, bifariam in F; & reliqua constituantur, vt in antecedenti propositione. Quo facto, demonstrabimus similiter, vt ibi, rectam OP, posse spatium AC, contentum sub Rationali AB, & ex binis nominibus secunda AD. Dico iam OP, Irrationalem esse, quæ ex binis Medijs prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incõmensurabilis est ipsi ED; & ED, minus nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, longitudine commensurabilis est Rationali AB; [a] erunt AE, AB, longitudine incommensurabiles. Et quia AG, GE, ostensæ sunt in antecedenti propositione longitudine cõmensurabiles; [b] erit quoque tota AE, vtrique ipsarum cõmensurabilis. Quare cum AE, maius nomen existens ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea sit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales: quod cum utraque AG, GE, ipsi AE, sit longitudine commensurabilis; at uero AE, Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit utraque AG, GE, eidem AB, incommensurabilis longitudine. Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales sunt potentia solum commensurabiles. [d] Igitur rectangula AH, GI, Media sunt, propterea quæ & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, Media sunt. Ergo & rectæ OM, MP, sunt Mediæ.

QVIA uero AG, GE, longitudine sunt commensurabiles; [e] erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionẽ habentia, commensurabilia, atque idcirco & quadrata LM, MN, ipsis æqualia, commensurabilia sunt. Igitur & rectæ OM, MP, commensurabiles sunt, saltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommensurabiles sunt;



[a] 13. deci.
[b] 16. deci.
[c] 14. deci.
[d] 22. deci.
[e] 10. deci.

sunt; Ipsi vero AE, ostensa est longitudine commensurabilis AG; & ipsi ED, longitudine cómensurabilis est EF, eius dimidia; erunt per scholium propos. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommensurabiles; Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipsis, [a] incommensurabilia sunt. Igitur & LM, MT, ipsis AH, & EK, æqualia, incommensurabilia sunt. [b] Ideoq; & rectæ OM, MP, longitudine sunt incommensurabiles. [c] cum eandem habeant proportionem, quã LM, MT. Cum ergo ostensum sit OM, MP, Medias esse, & commensurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus secundæ, linea est longitudine commensurabilis ipsi AB, hoc est, ipsi EI: Est autem EF, ipsi ED, quoque longitudine commensurabilis; [d] erunt etiam EI, EF, longitudine commensurabiles; Ac propterea cum EI, Rationalis sit, erit & EF, Rationalis. [e] Quare EK, rectangulum, Rationale est: Est autem MT, sub OM, MP, contentum ipsi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale est. Quapropter OM, MP, Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, Rationaleque continentes; [f] atque adeo OP, Irrationalis est, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus secunda, &c. Quod ostendendum erat.

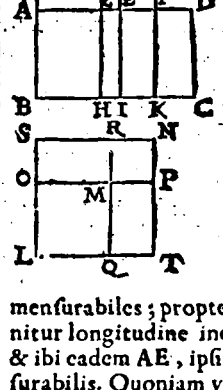
[a] 10. deci.
[b] 10. deci.
[c] 1. sexti.
[d] 12. deci.
[e] 20. deci.
[f] 38. deci.

THEOR. 39. PROPOS. 57. 56. 50.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis Mediis secunda dicitur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam, quæ

quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit. n. ipſius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique neutra ipſarum A E, E D, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propoſ. 55. Similiter ergo, vt ibi, oſtendemus rectam O P, poſſe ſpatium A C: Et vt in antecedenti propoſ. 56. rectas O M, M P, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles; propterea quod A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipſi A B, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam vero E D, E F, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtque E D, ipſi A B, Rationali, hoc eſt, ipſi E I, longitudine incommenſurabilis; [a] erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quod E F, dimidia ſit ipſius E D, Rationalis; & E I, expoſitæ Rationali A B, æqualis. Igitur E F, E I, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; [b] Ac propterea E K, Medium eſt; idcoque & M T, æquale ipſi E K, Medium eſt, quod ſub Mediis O M, M P, continetur. Itaque cum O M, M P, Mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; [c] erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 14. deci.

[b] 22. deci.

[c] 22. deci.

57. 51.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali,

nali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea spatium potẽs Irrationalis est, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quę potest spatium AC, esse Irrationalẽ, quæ Maior vocatur. Sit.n. AE, ipsius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ lineæ longitudine sibi incommensurabilis, & denique AE, ipsi AB, commensurabilis erit longitudine. Secta ED, bifariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propos. 55. [a] Erunt ergo AG, GE, longitudine incommensurabiles. Demonstrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, posse spatium AC. Dico OP, Irrationalem esse, quæ vocatur Maior. Quoniam.n. AG, GE, longitudine incommensurabiles sunt; [b] erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommensurabilia; atque adeo & quadrata LM, MN, ipsis AH, GI, æqualia, incommensurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia sunt incommensurabiles. Quia vero AE, maius nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartæ, linea est longitudine commensurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; [c] & rectangulum AI, sub ipsis contentum, Rationale. Est autem AI, æquale compositio ex quadratis LM, MN: Compositum ergo ex quadratis LM, MN, Rationale est.

[a] 59. decim.

[b] 10. decim.

[c] 20. decim.

ET quoniam ED, minus nomen ipsius AD, ex binis nominibus quartę, linea est longitudine incommensurabilis Rationali AB, erit & EF, ipsius dimidia eidẽ AB, longitudine incõmensurabilis; Et est EF, Rationalis, cũ sit Rationali ED, commensurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales sunt potentia solũ cõmensurabiles. [d] Quare

[d] 22. decim.

EK, Medium eſt, ſub ipſis contentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; ſub OM, MP, Medium eſt. Quocirca cum OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis MT, Medium; [a] Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendum.

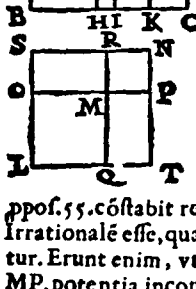
a 40. deci.

58.
52.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Mediũ.



Sit. n. ipſius AD, maius nomẽ AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & AE, plus poteſt, quam ED, quadrato rectæ lõgitudine ſibi incõmenſurabilis; & deniq; ED, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Secta ED, bifariã, fiant reliqua eadẽ, quæ in propoſ. 55. [b] Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incommẽſurabiles. Simili autem modo, vt in ppoſ. 55. cõſtabit rectã OP, poſſe ſpatiũ AC. Dico OP, Irrationalẽ eſſe, quæ potens Rationale & Mediũ appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis

b 19. dati.

tionalis & longitudine incõmensurabilis Rationali AB; erũt AE, AB, Rationales potẽtia tantũ cõmensurabiles.

[a] Quare rectangulum AI, sub ipsis contentum, Medium est. Est autem AI, æquale composito ex quadratis LM, MN. Igitur & compositum hoc, Medium erit. Rursus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commensurabilis Rationali AB, cum sit minus nomẽ ipsius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipsius dimidia, eidem AB, commensurabilis lõgitudine, & Rationalis.

[b] Quare EK, sub Rationalibus EI, EF, lõgitudine commensurabilibus, Rationale est; atque idcirco & MT, sub OM, MP, contentũ Rationale erit, cum ipsi EK, sit æquale. Quamobrẽ cũ rectæ OM, MP, potentia incõmensurabiles sint, faciantque cõpositum quidẽ ex ipsarũ quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, sub ipsis contentum, Rationale; [c] Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demostrandum.

[a] 22. decim.

[b] 20. decim.

[c] 41. decim.

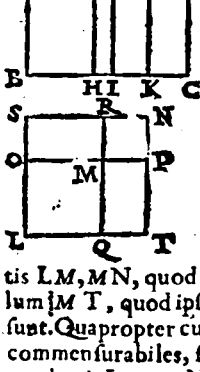
THEOR. 42. PROPOS. 60.

59.
53.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus sexta; Recta linea spatiũ potens Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus sexta AD. Dico rectam, quę spatium AC, potest, Irrationalem esse, quæ dicitur potẽs bina Media. Sit. n. ipsius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commensura-

ſurabiles;& AE,plus poterit,quæ ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis;& denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB,Fiant omnia,quæ in ſuperioribus;eruntque AG,GE,longitudine incommenſurabiles.Iã vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP,poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ.58.rectas O*M*, *M*P,potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis L*M*, *M*N,Medium.Vt autẽ in propoſ.58.erit quoque *M*T,ſub O*M*,*M*P,comprehenſum,Mediũ. Et quia duarum rectarum AE, EF, illa quidem incommẽſurabilis eſt longitudine ipſi ED; hæc vero eidem commẽſurabilis;ᵇ erunt AE', EF, longitudine incommenſurabiles.ᶜ Igitur & AI,EK,incommenſurabilia ſunt.ᵈ cum eandem rationem habeant, quam AE, E F. Quare & compoſitum ex quadratis L*M*,*M*N, quod ipſi A I, æquale, eſt, & rectangulum *M* T, quod ipſi EK,eſt æquale, incommenſurabilia ſunt.Quapropter cum rectæ O*M*,*M* P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarũ quadratis L *M*, *M*N, Medium, & *M*T,ſub ipſis contentum,Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis;ᵉ erit tota OP,Irrationalis, quę bina Media potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali,& ex binis nominibus ſexta,&c. Quod oſtendendum erat.



ª 19. deci.
ᵇ 13. deci.
ᶜ 10. deci.
ᵈ 1. ſexti.
ᵉ 42. deci.

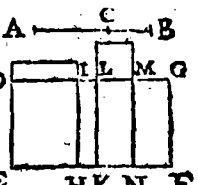
60.
54.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicãtum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT

Sit ex binis nominibus A B, cuius maius nomen A C; [a] & ad Rationalem expositam D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex A B, latitudinem faciens D G. Dico D G, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem D E, rectangulum D H, æquale quadrato ex A C; & ad H I, aliud I K, æquale quadrato ex C B. Erit igitur reliquum L F, æquale ei, quod bis sub A C, C B, continetur, cum quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, [b] æqualia sint quadrato ex A B, quemadmodum & eidem quadrato ex A B, æquale est, per cõstructionem rectangulũ D F. Secetur L G, bifariam in M, puncto, per quod ipsi L K, G F, parallela agatur M N: eritque vtrumque rectangulum L N, M F, æquale ei, quod sub A C, C B, continetur. [c] Et quoniam A C, C B, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota A B, sit ex binis nominibus; erũt quadrata ex A C, C B, Rationalia, & ob id commensurabilia; [d] quorum vtrique cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex A C, C B, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectãgulum D K. Igitur & D K, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad Rationalem D E, [e] faciet latitudinem D L, Rationalem, & ipsi D E, longitudine commensurabilem.

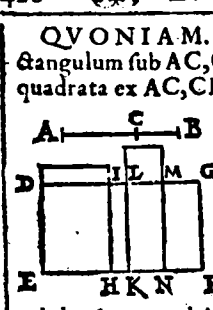


RVRSVS quia A C, C B, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, [f] erit rectangulum sub ipsis, Medium, atq; adeo, & quod bis sub ipsis; cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum L F, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare L F, applicatum ad L K, Rationalem, [g] facit L G, latitudinem Rationalem, & ipsi L K, hoc est, ipsi D E, longitudine incommensurabilem. Est autem D L, ostensa eidem D E, commensurabilis longitudine. Igitur D L, L G, longitudine incõmensurabiles sunt. [h] Sunt ergo D L, L G, Rationales potentia tantum commẽsurabiles; [i] Ac propterea D G, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

[a] 45. primi
[b] 4. secun.
[c] 37. decimi
[d] 16. decimi
[e] 21. decimi
[f] 22. decimi
[g] 23. decimi
[h] 73. decimi
[i] 37. decimi

QVO-

QVONIAM. n. ex lémate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC, CB, medium proportionale eſt inter quadrata ex AC, CB, erit quoque LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo [a] cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeāt, quam DH, LN, IK; erit quoque recta LM, media proportionalis inter DI, IL. [b] Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, cómenſurabilia ſunt, quod AC, CB, ponuntur potentia cómenſurabiles; erunt & DH, IK, ipſis æqualia, commenſurabilia. [c] Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autē DK, maius eſt, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora ſint, per lemma propoſ. 39. huius libri, quam rectangulum bis ſub AC, CB; erit & recta DL, maior quā LG, [d] cum DL, LG, eandem rationem habeant, quā DK, LF. Itaque quoniam DL, maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatur rectangulum ſub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore LG, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quadrato ex LM.) diuiditurq; DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; [e] poterit DL, maior plus quam LG, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum DG, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus poſſe, quam LG, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine cómenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 1. ſexti.
[b] 17. ſexti.
[c] 10. deci.
[d] 1. ſexti.
[e] 18. deci.

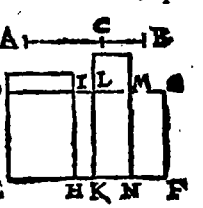
61.
55.

THEOR. 44. PROPOS. 62.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis

binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC;[a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundã. Cõstituantur. n. eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipsorum LN, MF, et quod sub AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes [b] Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erũt quadrata ex AC, CB, atq; adeo rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. DK, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalẽ DE; [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub AC, CB, Rationale est; erit & eius duplum, nempe LF, Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem LK; [e] erit eius latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarũ DL, LG, ipsa LG, sit ipsi DE, cõmẽsurabilis lõgitudine, at DL, longitudine incõmensurabilis, [f] erũt DL, LG, longitudine incõmensurabiles. Quod cũ DL, LG, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potẽtia solum cõmẽsurabiles; [g] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, maius nomen esse, & posse plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius DG, maius nomen DL, plus possit



[a] 45. primi
[b] 38. deci.
[c] 16. deci.
[d] 23. deci.
[e] 21. deci.
[f] 13. deci.
[g] 37. deci.

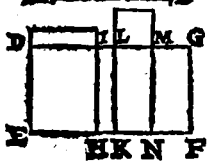
posſit, quam minus nomen LG, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, & minus nomen LG, oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus ſecunda. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis Medijs prima, &c. Quod erat oſtendendum.

62. 56.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs ſecũda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Medijs ſecunda AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciẽs BG. Dico DG, eſſe ex binis nominibus tertiã. Cõſtructis. n. ijſdẽ, quæ in propoſ. 61. qm̃ AC, CB, ex binis Medijs ſecundã AB, componentes, [b] Mediæ ſunt potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium continent; Erũt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectãgula ipſis æqualia DH, IK; commenſurabilia, & Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipſorum DH, IK, ſit commẽſurabile; erit & ex coroll. propoſ. 24. huius libri DK, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem DE; [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incõmenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, CB, Medium eſt; erit & eius duplum LF, Medium; quod cum applicatum ſit ad Rationalem LK; [e] erit latitudo LG, Rationalis ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, ipſi CB, longitudine eſt incom-



[a] 45. primi
[b] 39. deci
[c] 16. deci.
[d] 23. dec
[e] 23. deci

mensurabilis; est q; vt AC, ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, erit quoque quadratum ex AC, rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. [a] Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, CB, quod quadrata ex AC, CB, commensurabilia sint, quippe cum rectę ipsę potentia ponantur commensurabiles; & rectangulo sub AC, CB, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub AC, CB. Igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, rectangulo LF, per ea, quæ in scholio propos. 14. huius libri conscripsimus. Quare rectæ DL, LG, eandem rationem cum DK, LF, habentes [c] longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; [d] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. ostendemus DL, esse maius nomen, possęq; plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cum DL, maius nomen plus possit, quam LG, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, LG, Rationali expositæ DE, sit ostensa longitudine cōmensurabilis; erit ex defin. *DG*, ex *binis nominibus* tertia. Quadratū ergo eius, quę ex binis Medijs secūda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

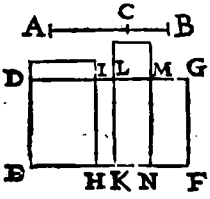
[a] 10. *deci.*
[b] 16. *deci.*
[c] 10. *deci.*
[d] 37. *deci.*

63.
57.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

SIT



SIT Maior AB, cuius maius nomen A C, [a] & adi Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse quartam. Construantur .n. eadē prorsus, quæ in propos. 61. Et quia AC, CB, Maiorem AB, componentes, [b] potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Medium; erit quoque DK, compositō ex quadratis rectarū AC, CB, æquale existens, Rationale; At vero LF, duplū eius, quod sub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale DK, ad Rationalem DE, est applicatum; [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item cum LF, Medium sit applicatum ad Rationalem LK; erit LG. Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, lō gitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipsi DE, commensurabilis sit longitudine; hæc vero eidē DE, longitudine incommensurabilis; [e] incommensurabiles erunt longitudine D L, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LG, Rationales potentia tantum cōmensurabiles; [f] ideoque D G, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub D I, I L, æquale esse quadrato ex L *M*. Quia autem quadrata ex A C, C B, incommensurabilia sunt, quod rectæ A C, C B, potentia incōmensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia D H, I K, incommensurabilia; [g] atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam vero vt in propos. 61. ostendimus, D L, maior est, quam LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DI, IL, quadrato ex L M, hoc est, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam D L, ad I, in partes longitudine incommensurabiles; [l] poterit D L, plus quā L G. quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa DL, (maius nomen ipsius DG,

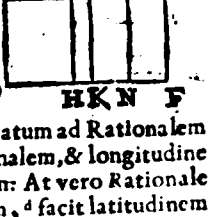
a 45. prim.
b 40. deci.
c 21. deci.
d 23. deci.
e 13. deci.
f 37. deci.
g 10. deci.
l 19. deci.

D G, quæ est ex binis nominibus,) ostensa sit longitudine commensurabilis expositæ Rationali DE; erit ex defi. DG, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 47. PROPOS. 65. 64. 58.

QVADRATVM eius, quę Rationale ac Medium potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam esse. Fiant. n. eadé omnino, quæ in propos. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, potentia incommensurabiles sunt, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Medium, at rectá gulum sub ipsis contentum, Rationale; erit DK, æquale composito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium; & LN, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur, atque adeo ipsius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommensurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipsi LK, hoc est, ipsi DE, commensurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commensurabilis est Rationali DE, illa vero longitudine incommensurabilis;



a 45. primi

b 41. deci.

c 23. deci.

d 21. deci.

[a] 23. deci. [b] 37. deci.

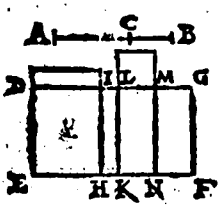
[a] erunt DL, LG, lõgitudine incommenſurabiles. Quare DL, LG, Rationales ſunt potẽtia ſolũ cõmenſurabiles; [b] Ac propterea DG, eſt ex binis nominibus. Iã vero, vt in propoſ. 61. oſtendemus rectangulũ ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex LM; & vt in antecedente propoſ. DL, maius nomen eſſe, atque poſſe plus, quam LG, quadrato rectę ſibi longitudine incommenſurabilis. Quapropter cũ & minus nomẽ LG, oſtẽſum ſit expoſitæ Rationali DE, longitudine commenſurabile; erit ex defin. DG, ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

65. THEOR. 48. PROPOS. 66. 59.

QVADRATVM eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.

[a] 45. primi

SIT bina *Media* potens recta AB, cuius maius nomen AC, [c] & ad Rationalẽ DE, applicetur rectãgulum DF, ęquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, eſſe ex binis nominibus ſextã. Conſtructis enim iiſdem, quæ in propoſ. 61. quoniã rectę AC, CB, componentes ipſam AB, potentẽ bina *Media*, [d] potentia incommẽſurabiles ſunt, faciuntq; & cõpoſitum ex ipſarum quadratis *Medium*, & quod ſub ipſis cõtinetur, *Medium*, & incommenſurabile compoſito ex quadratis ipſarum; erit tam DK, illi compoſito æquale, quam LF, rectangulo bis ſub AC, CB, æquale, *Mediũ*. Et quia *Media* DK, LF, applicata ſunt ad Rationalem DE; [e] erũt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipſi DE, longitudine incommen-



[d] 42. deci.

[e] 23. deci.

commensurabiles. a Quoniam vero compositũ ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem vero rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplum; b Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, c longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum commensurabiles; d Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen; posseq; plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cũ ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum.

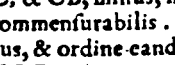
a .42. deci.
b 13. deci.
c 10. deci.
d 37. deci.

THEOR. 49. PROPOS. 67.

66.
60.

EI, quæ est ex binis nominibus, lõgitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

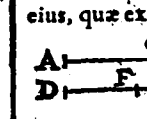
SIT ex binis nominibus quæcunq; AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitque recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoq; esse ex binis nominibus, & ordine eandẽ ipsi AB. e Fiat.n. vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. f Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE.



Et quoniã ipsi AB, longitudine cõmensurabilis ponitur DE; g erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, lõgitudine com-

e 12. sexti.
f 19. quin.
g 10. deci.

mensura bilis : [a] Sunt autem A C, CB, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & D F, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt A C, ad D F, ita CB, ad FE; & permutando vt A C, ad C B, ita D F, ad FE: Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; [b] erunt & DF, FE, potentia solum commensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; [c] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ lineę sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si quidē AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis; [d] poterit & DF, plus quā FE, quadrato rectæ sibi longitudine cōmensurabilis. Quod si AC, cōmensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominibus prima; [e] erit & DF, eidē Rationali lōgitudine commensurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit commēsurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero C B, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositę longitudine commensurabilis. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum A C, C B, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt AB, sit ex binis nominibus tertia; [f] erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & D E, ex defin. est ex binis nominibus tertia.



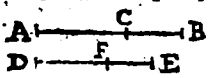
A T si AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; [g] poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse vel quintam, vel sextam, prout & A B, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Si igitur, quę ex binis nominibus, longitudine cōmensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 37. deci.
[b] 10. deci.
[c] 37. deci.
[d] 15. deci.
[e] 12. deci.
[f] 13. deci.
[g] 15. deci.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si recta DE, potentia tantum commensurabilis sit ipsi AB, quæ est ex binis nominibus, ostendemus quidem eodem modo, (si loco: Commensurabilis longitudine: in demonstratione reponamus vbique: commensurabilis potentia tantum:) & DE, esse ex binis nominibus: At eam esse ordine eandem ipsi AB, cui commensurabilis est, nullo modo concludemus. Non enim sequitur, si AC, maius nomen longitudine sit commensurabile expositæ Rationali; & DF, maius nomẽ eidem esse commensurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expositæ Rationali, & DF, eidem AC, longitudine cõmensurabilis est, sed Rationalis quidem commensurabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum, ex hypothesi. Immo vero, si AB, sit ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione potest, vt DE, illi potentia tantũ cõmensurabilis sit ex binis nominibus ordine eadem.



SIT enim AB, ex binis nominibus prima, secunda, quarta, vel quinta, diuisa in sua nomina ad C; sitque ei cõmensurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonstrabimus esse ex binis nominibus, diuisamque esse in sua nomina ad F; & partes AC, CB, partibus DF, FE proportionales esse, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri posse, vt DE, ex binis nominibus sit eadem ordine ipsi AB. Nam si potest fieri, sit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expositæ commensurabilis longitudine. [a] Quare & inter se longitudine commensurabiles erunt. Et quoniam est vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt propterea & AB, DE, longitudine commensurabiles. Quod est absurdum. Ponitur enim DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima est. Eodẽ modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit: sed neq; secũda vel quinta. Esset. n. vtriq; nomen minus GB, FE, ex

[a] 12. deci.

[b] 10. deci.

defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atque adeo & inter se. Igitur & tota AB, DE, longitudine erunt commensurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilem, esse quoque vnam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine commen
a 15. decim. *surabilis. Cum ergo sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; a poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommen-*
b 15. decim. *surabilis; b poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB.*

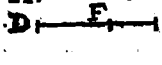
IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

67. 61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorũ AC, maius, & CB, minus, sitque ei recta DE, lõgitudine commẽsurabilis. Dico DE, quoq; ex binis Mediis esse, & ipsi AB, ordine eandem.



b 12. sexti. d 19. quin. Fiat. n. vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. d Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi

ipſi AB, ponitur longitudine commenſurabilis DE; erit & DF, ipſi AC, & FE, ipſi CB, longitudine commenſurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. [b] Igitur & DE, FE, illis commenſurabiles, Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutãdo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: [c] Sunt autem AC, CB, potentia ſolum cõmenſurabiles; [d] erunt & DF, FE, ſolum commenſurabiles potentia. Cũ ergo & oſtenſæ ſint Mediæ, erunt DF, FE, Mediæ potentia tantum commenſurabiles; [e] Atque idcirco DE, erit ex binis mediis. Dico & ipſi AB, eandẽ eſſe ordine. Quoniam.n. eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Eſt autem vt AC, ad CB, ita quadratũ ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratũ ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine. [f] Igitur & rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, ſit ex binis Mediis prima; erit & rectangulum ſub DF, FE, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; [g] atque adeo & DE, ex binis Mediis prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, CB, fuerit Mediũ, ita vt AB, ſit ex binis Mediis ſecunda: erit & rectangulum ſub DF, FE, ei commenſurabile, Medium, ex corollario propoſ. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, erit ex binis Mediis ſecunda. Quare ei, quæ ex binis Mediis longitudine cõmenſurabilis, &c. Quod demonſtrandũ erat.

a 10. deci

b 24. deci.

c 38. deci.

d 10. deci.

e 38. vel 39. deci.

f 10. deci.

g 38. deci.

h 39. deci.

SCHOLIVM.

EODEM prorſus modo demonſtrabimus, rectam lineam DE, ſi potentia tantum fuerit commenſurabilis ipſi AE, quæ eſt ex binis Mediis, ex binis Mediis eſſe, atque ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis

est; si modo loco: commensurabilis longitudine: in demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantũ, &c. vt manifestum est.

68. 62. **THEOR. 51. PROPOS. 69.**

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea *Maior* AB, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. *Dico* & DE, *Maiorem* esse. Fiant enim eadem, quæ superius; *ita* vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE.

Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles sunt vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; erunt quoque tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commẽsurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, *ita* CB, ad FE, & permutando vt AC, ad CB, *ita* DF, ad FE; erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, *ita* quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, FE, ostẽsæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. Igitur & compositũ ex quadratis rectarũ AC, CB, cõmẽsurabile est cõposito ex quadratis rectarum DF, FE, *Est autem compositum illud Rationale,*

a 10. deci. b 22. sexti c 10. deci. d 40. deci.

nale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. Igitur & hoc Rationale est. [a 9. defin.]

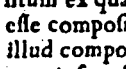
RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutãdo vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. [b 10. decim.] Igitur & rectangulũ sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. [c 40. decim.] Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commẽsurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad CB, ita DE, ad FE; [d 40. decim.] sunt que AC, CB, potentia incommensurabiles, cum componãt Maiorẽ AB; [e 10. decim.] Erũt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles Itaq; cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; [f 40. decim.] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 52. PROPOS. 70. 69. 63.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue lõgitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse potentẽ Rationale ac Medium. Cõstructis. n. ijsdem, quæ

quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, commenſurabile
[a] 41. deci. eſſe compoſito ex quadratis rectarum D F, F E. [a] Eſt autẽ illud compoſitum Medium, cum rectę A C, C B, componant ipſam A B, potentem Rationale ac Medium. Igitur per coroll. propoſ. 24. huius lib.



& hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum ſub A C, C B, [b] quod Rationale
[b] 41. deci. eſt, commenſurabile rectangulo ſub D F, F E; atque adeo & rectangulum ſub D F, F E, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt D F, F E, potentia incommenſurabiles. Quare cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt; [c] erit to-
[c] 41. deci. ta D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

70. 64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

SIT bina Media potens A B, diuiſa in ſua nomina ad C, eique commenſurabilis D E, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum. Dico & D E, eſſe bina Media potentẽ. Conſtructis. n. iiſdem, quę ſupra, oſtẽdemus,

vt in propos. 69. compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, cõpoſito ex quadratis rectarũ D F, F E, commenſurabile eſſe: Nec nõ & rectangulum ſub A C, C B, eſſe commenſurabile rectan-
[d] 42. deci. gulo ſub D F, F E. [d] Cum ergo tam compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quam rectangulum ſub A C, C B, Medium ſit; erit etiam ex coroll. propoſ. 24. huius li-

bri,

bri, tam compositū ex quadratis rectarum DF, FE, quàm rectangulum sub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommensurabiles sunt, vt prius. Postremò, quia compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum sub AC, CB, incommensurabilia sunt, ex hypothesi, propterea quod AB, bina Media potest: Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, CB, commensurabile ostensum compositū ex quadratis rectarū D F, FE; & rectāgulo sub AC, CB, probauimus cōmensurabile rectā gulum sub DF, FE; Erunt quoq; ex scholio propos. 14. huius lib. compositū ex quadratis rectarū DF, FE, & rectangulum sub DF, FE, incommensurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum ex ipsarum quadratis Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium; incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum; [b] erit DE, bina Media potens. Itaque bina Media potenti commensurabilis, & ipsa bina Media potens est. Quod erat ostendendum.

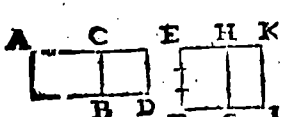
[a] 42. deci.

[b] 42. deci.

THEOR. 54. PROPOS. 72. 71. 65.

SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale spatium A B, cum quo componatur Medium C D. Dico rectam, quæ totum spatium AD, potest, esse vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potētem. Erit enim A B, vel maius quam C D, vel minus: Aequale siquidem non erit; alias cum A B, sit Rationale, esset & illi æquale C D, Rationale: quod non ponitur. Sit primò



maius,

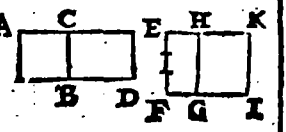
maius, & exposita Rationali EF, [a] applicetur ad eam rectangulũ EG, æquale ipsi AB; & ad HG, aliud HI, æquale ipsi CD, vt totum EI, toti AD, sit æquale. Et quoniã AB, Rationale est, & CD, Medium; erit quoque EG, Rationale, & HI, Medium: quæ cum applicentur ad Rationalem EF; [b] erit EH, Rationalis, & ipsi EF, longitudine commensurabilis; [c] At vero HK, Rationalis, & eidem EF, longitudine incommensurabilis. Rursus qa EG, HI, incommensurabilia sunt, vt constat ex definitionibus; quod EG, Rationale sit, at HI, Irrationale, nempe Medium; [d] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommensurabiles longitudine. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; Ac propterea EK, ex binis nominibus est. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD, hoc est, EG, quam HI; erit quoq; EH, maior quã HK, [f] cum EH, HK, eandẽ rationem habeant, quã EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus posit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen ostensum sit longitudine commensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & spatium AD, compositum ex Rationali AB, & Medio CD, [g] Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

SI uero EH, plus posit quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen ostẽsum sit longitudine cõmensurabile Rationali EF. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & spatium AD, [h] Irrationalis est, quæ vocatur *Maior*.

SIT deinde AB, minus quam CD; & eadem construantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus,

[a] 45. primi
[b] 21. deci.
[c] 23. deci.
[d] 10. deci.
[f] 37. deci.
[g] 1. sexti
[h] 38. deci.

minibus,& EH, ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Et quia AB,minus eſt,quam CD, hoc eſt, EG, quã HI; erit quoq; recta EH,minor quam HK. Poterit igitur rurſus HK, maius nomen ipſius EK,quę eſt ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen,quadrato rectę longitudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſsit HK,quam EH,quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit EK, ex binis nominibus ſecunda,cum EH,minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali EF,vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium EI,contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus ſecunda EK, atque adeo & ſpatium AD, ex Rationali AB,& Medio CD,compoſitum, [a] Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Medijs prima.



[a] 56. deci.

SI verò HK, plus poſsit quam EH, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis;erit EK,ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quintâ EK,atque adeo & ſpatium AD, [b] Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 59. deci.

THEOR. 55. PROPOS. 73. 72. 66.

SI duo Media interſe incommenſurabilia cõponatur, duæ reliquæ Irrationales fiunt,vel ex binis Medijs ſecunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommenſurabilia AB,CD. Dico rectam,quæ poteſt totum ſpatium AD,eſſe vel ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media po-

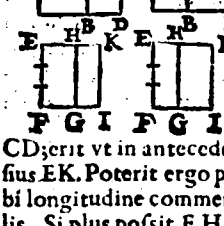
potétem. Erit enim rursus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Aequale siquidem non erit; alias essent AB, CD, commensurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propositione. Et quia spatia AB, CD, ponuntur Media, & incommensurabilia; erunt & spatia EG, HI, Media & incommensurabilia; cum illis sint æqualia. [a] Igitur rectæ EH, HK, eandé cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles sunt; & vtraque (cum EG, HI, Media sint, applicentur; ad Rationalem EF.) [b] Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rationales ergo sunt EH, HK, potentia solum commensurabiles; [c] ac propterea EK, ex binis nominibus est. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedenti propos. EH, maius nomen ipsius EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. Si plus possit EH, quam HK, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK, ostensum sit longitudine incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens spatium EI, contentum sub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & spatium AD, [d] Irrationalis est, quæ ex binis Medijs secunda dicitur.

a 10. deci.

b 23. deci.

c 37. deci.

d 57. deci.



SI vero EH, plus possit quam HK, quadrato rectæ longitudine sibi incommensurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine sit incommensurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus sexta, vt constat ex defin. Recta igitur potens spatium EI, siue spatium AD, [e] Irrationalis est, quæ bina Media potens nominatur.

e 60. deci.

QVOD si AB, minus sit, quam CD; non aliter propositum concludemus, vt ex figura constat. Quapropter si duo Media inter se incommensurabilia componantur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, &c. Quod ostendendum erat.

COROL-

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neq; inter ſe eaſdē eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [a] *latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.* [a 23. deci.]

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [b] *latitudinem efficit ex binis nominibus primam.* [b 61. deci.]

ET quadratum eius, quæ, eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, [c] *latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam.* [c 62. deci.]

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, [d] *latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.* [d 63. deci.]

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [e] *latitudinem facit ex binis nominibus quartam.* [e 64. deci.]

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, [f] *latitudinem facit ex binis nominibus quintam.* [f 65. deci.]

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, [g] *latitudinem facit ex binis nominibus ſextam.* [g 66. deci.]

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe; a latitudine quidē Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differētes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenarijs.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit ortum ſex linearū Irrationalium, nimirū eius, quæ

qua ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs secunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium potest; & denique eius, quæ potest bina Media.

IN secundo, quem continent propos. 43. 44. 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuisionibus, docens singulas in singulis duntaxat punctis diuidi posse.

IN tertio deinde contẽto propos. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta.

IN quarto, quem absoluunt propos. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. ostendit, quo modo hæ sex lineæ Irrationales, quæ in primo senario explicantur, inter se differant, docens, quanam linea Irrationalis sit illa, quæ potest spatium contentum sub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus secunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel sexta.

IN quinto autem, quẽ reperies in propos. 61. 62. 63. 64. 65. & 66. docuit, quasnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo senario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN sexto vero, qui quinque propos. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. absolnitur, demonstrauit lineam quamcunque commensurabilem alicui dictarum sex Irrationalium in primo senario, esse Irrationalem eandem illi, cui commensurabilis est.

IN septimo denique contento duabus propositionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rursus differentiam aliam sex prædictarum Irrationalium.

REPERITVR autem in his sex lineis Irrationalibus, de quibus in primo senario, Analogia seu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem consistit in excessu eodem. Et recta media proportionalis, secundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, est quoque Irrationalis eadẽ illi, inter cuius nomina media existit.

SIT enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomẽ AC; & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel

DB

DB, aqualis sumatur E. Dico E, mediam esse, secundum Analogiam Arithmeticã, inter AC, CB: & E, esse quoq; ex binis nominibus. Quoniã .n. AC, superat dimidiã AD, recta DC; & dimidia DB, superat ipsam CB, eadem recta DC; perspicuum est, dimidiam ipsius AB, nempe E, esse mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, cõmensurabilis est longitudine toti AB, cum hac illius sit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipsi AB, vt in sexto senario est demonstratum.

IDEM ostendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere,

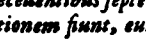
SEQVVNTVR iam septem alij senarij, in quibus eadẽ Euclides demonstrat de sex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generãtur, quæ in precedentibus septem senarijs de Irrationalibus, quæ per compositionem fiunt, eum ostendisse docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR a Rationali AB, Rationalis AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB. Dico reliquã BC, Irrationalẽ esse. Quoniã .n. per lemma 3. propos. 19. huius lib. est vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum sub AB, AC: Et



sunt AB, AC, longitudine incommensurabiles; * erunt

* 19. deci.

incommensurabilia quadratum ex A B, & rectangulum sub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC; (cum enim AB, AC, potentia ponantur commensurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commensurabilia.) Igitur & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A B, (rectangulo vero sub A B, AC, comm ensurabile est rectangulum sub AB, AC, bis. Igitur compositum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum sub AB, AC, bis contentum, incommensurabilia sunt, vt in scholio propos. 14. huius libri demonstrauimus. Est autem compositum ex quadratis rectarũ AB, A C, æquale rectangulo bis sub AB, A C, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile est. Cum ergo compositum ex quadratis rectarum A B, A C, sit Rationale; (propterea quod commensurabile est quadrato Rationali ex AB, linea Rationali descripto;) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Residuum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti; Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostendendum erat.

a 16. deci.

b 7. secun.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propositionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome.

NAM cum A B, A C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles; (erit composita ex ipsis *Irrationalis, quæ ex binis*

c 37. deci.

binis nominibus dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferatur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine A B, ut relinquatur Apotome B C.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

74. 69.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR a Media AB, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi AB. sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam. n. AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia; [a] atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A C. Est autem quadratum ex A C, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC. [b] Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub A B, AC, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile rectangulo bis sub AB, AC. [c] Quare & rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex B C, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur

[a] 16. decim.

[b] 7. secund.

[c] 17. decim.

post detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, vt in scholio sequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propositio proponi hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim AB, AC, sint Media potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima.

38. deci.

75. 70.

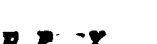
THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

DETRAHATVR a Media AB, Media AC, potentia solum commensurabilis ipsi AB, sitque rectangulum

lum sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, esse Irrationalē. Quoniam enim quadrata ex AB, AC, potentia cōmensurabilibus commensurabilia sunt; a erit & compositum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile: Est autem vtrūque ipsorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compositum ex ipsis, vtrique commensurabile, Mediū est, ex coroll. propos. 24. huius lib. Rursus quia rectangulū sub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis sub AB, AC, ex coroll. propos. 24. huius lib. Mediū. b Cum ergo compositum ex quadratis rectarū AB, AC, æquale sit rectāgulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium est, rectangulum bis sub AB, AC, quod etiam Medium est, quadrato ex BC. c Medium autē non superat Medium Rationali. Non ergo quadratū ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & ipsa recta BC, Irrationalis. Vocetur autē Mediæ Apotome secūda, quoniā relinquitur post detractionem minoris nominis eius, quę ex binis Medij secunda, a maioris nomine, vt ex scholio sequenti apparebit. Si igitur Media Media auferatur, &c. Quod erat ostendendum.

a 16. decī.



b 7. secun.

c 27. decī.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuisset proponi.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs secunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda.

QVONIAM enim AB, AC, Media sunt potentia tantū commensurabiles, continentq; Medium, d *erit compositum ex ipsis Irrationalis, quæ ex binis Medijs secunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome secunda.*

d 39. decī.

76. 71.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidé ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

DETRAHATVR a recta AB, recta AC, potétia ipsi AB, incommensurabilis; Sit autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum vero sub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem esse. Quoniam.n. compositũ ex quadratis rectarũ AB, AC, Rationale est; rectangulum vero sub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propos. 24. huius lib. & ei commẽsurabile, hoc est, rectangulum bis sub AB, AC, Medium, [a] hoc est, Irrationale; erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub [b] AB, AC. [b] Est autem compositum ex quadratis rectarũ AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propos. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommensurabile erit. Ponitur autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. [c] Igitur quadratum ex BC, illi incõmensurabile, Irrationale est, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autẽ Minor, quoniam relinquitur post detractionem minoris nominis lineę Maioris, a maiori nomine, vt in scholio sequẽti dicemus. Si igitur a recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. defin.
[b] 7. secun.
[c] 10. defin.

SCHO-

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale, quod autem sub ipsis continetur, Medium: [a] *erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiusq; maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.* [a] 40. deci.

THEOR. 60. PROPOS. 78. 77. 72.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autē sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; sit autem compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam.n. compositū ex quadratis rectarum AB, AC, Medium est, hoc est, Irrationale; at rectangulum sub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis sub

[a] 10. defin. AB, AC, Rationales; [a] erit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, incommensurabile rectangulo bis sub

[b] 7. secun.

AB, AC, [b] Est autem compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulũ bis sub AB, AC, vna cũ quadrato ex BC, incõmensurabile est rectãgulo

[c] 17. deci. bis sub AB, AC. [c] Sũt ergo & rectãgulũ bis sub AB, AC, & quadratũ ex BC, incõmensurabilia. Cũ ergo rectangulũ bis sub AB, AC, Rationale sit;

[d] 10. defin. [d] erit quadratũ ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autẽ cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratũ additum rectãgulo bis sub AB, AC, quod Rationale est, facit totum compositum ex quadratis rectarũ AB, AC, quod Medium existit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens totĩ, quæ cum tota faciat compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis est, &c. Quod ostẽdendum erat.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuisset proponere.

SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

[e] 41. deci. *CVM enim AB, AC, sint potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; erit composita ex ipsis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen est AB, minus autem AC. Aufertur igitur minus nomen AC, a maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.*

THEOR.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

78. 73.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitque tam compositũ ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. [a] Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC. [b] Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiẽs, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC, quod Medium est, facit totum cõpositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 7. huius.

[b] 37. decimi.

SCHO-

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

QVONIAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; [a] *erit composita ex illis Irrationalis, qua bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.*

[a] 42. decimi.

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secundam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitq; IB, excessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniã. n. IB, excessus est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui

EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem exceſſus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

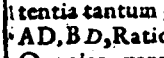
EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 62. PROPOS. 80. 79. 74.

APOTOMAE vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ipſi AB, aliam rationalẽ non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt, cõgruat alia Rationalis BD, ita vt BD ipſi AD, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia BC, Rationalis eſt; erit AC, illi ſolum potentia cõmenſurabilis,

ſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt AC, BC, potentia tantum cõmenſurabiles. Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis ſub AC, BC, qui inter compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis ſub AD, BD; (ſuperat enim compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, rectãgulum bis ſub AC, BC, quadrato ex AB, [a] quòd compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale ſit rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compoſitũ ex quadratis rectarũ AD, BD, ſuperat rectangulum bis ſub AD, BD, quadrato eodẽ ex AB; [b] cum & compoſitum ex quadratis rectarũ AD, BD, æquale ſit rectangulo bis ſub AD, BD, vna cum quadrato ex AB.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectãgulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, DB. Eſt autem exceſſus inter illa cõpoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. quod vtrũq; Rationale ſit. (Nam cum AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum cõmenſurabiles; [c] erũt earum quadrata, Rationalia, & cõmenſurabilia. [c] Igitur & compoſitum ex ipſis vtriq; illorum commenſurabile eſt, atq; adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtẽdemus compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, ſpatium Rationale eſt. [d] Et quia rectangulum ſub AC, BC, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24. huius lib. & eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis ſub AD, BD. [e] Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, Rationale ſpatium non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB,



[a] 7. ſecun.
[b] 7. ſecun.
[c] 61. deci.
[d] 22. deci.
[e] 27. deci.

alia

alia Rationali non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

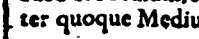
THEOR. 63. PROPOS. 81. 80. 75.

MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat BC, Media toti AC, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Rationale. Et quia BC, Media est potentia solum ipsi AC, commensurabilis; erit & AC, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Quoniã vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrũq; sit Rationale. (cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC, BC, illi commensurabile, Rationale. Atque eadẽ ratione Rationale erit rectangulum bis sub AD, BD.) Igitur & excessus inter compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, Mediæ sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadra-

[2] 24. decimi.

quadrata Media, & commensurabilia. a Igitur & compo
a 16. deci. situm ex ipsis utrique ipsorum commensurabile est, atq; adeo & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Non ali
ter quoque Medium erit compositum ex quadratis rectа
b 37. deci. rum AD, BD. b Medium autem non superat Mediũ Rationali. Igitur ex



cessus inter cõpositum ex quadratis rectarum AC, BC, & compositũ ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale nõ est. Sed & Rationale ostensum est. Quod est absurdum. Ergo ipsi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ to ti sit potenria solum commensurabilis, contineatq; cũ tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tan tum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

81. THEOR. 64. PROPOS. 82.

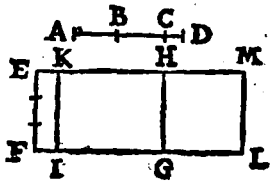
76.

MEDIAE Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome secũda AB, cui congruat Me dia BC, totí AC, potentia tantum commensurabilis, & rectangulũ sub AC, BC, sit medium. Dico ipsi AB, aliam mediam non congruere, quæ toti sit potentia tan tum commensurabilis, contineatque cum tota Mediũ. Si enim fieri potest, cõgruat ipsi alia BD, media toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum
c 45. prim. sub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, c ad quam applicetur rectangulum EG, æquale composito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, a liud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale composito ex quadratis rectarum AD,
d 7. secun. BD. d Quoniam igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna

cum

cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur sub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur sub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ sunt, & potentia commensurabiles; (cum enim BC, Media ponatur, erit & AC, ipsi potentia cómensurabilis, Media) erunt & earũ quadrata Media, & cómensurabilia. [b] Ergo & compositum ex ipsis commensurabile est vtriq; eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propos. 24. huius lib. Igitur & EG, quod illi compositio æquale est, Medium est; quod cum applicetur ad Rationalem EF, [c] erit EH, Rationalis ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit ex coroll. propos. 24. huius lib. & eius duplum, nempe KG, Medium: quod cũ applicetur ad Rationalem KI, [d] erit KH, Rationalis ipsi KI, hoc est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommensurabiles sunt, estque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectángulum sub AC, BC, vt ostendimus lemmate 3. ad propos. 19. huius lib. [e] erit quadratum ex AC, incómensurabile rectángulo sub AC, BC. Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc est, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata commensurabilia [f]. Igitur & compositum ex ipsis commensurabile est vtrique ipsorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo sub AC, BC, commensurabile est eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipsi KG, incommensurabile est, ex ijs, quæ in scholio propos. 14. huius lib. docuimus. [g] Rectæ igitur EH, KH, eádem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommensurabiles sunt: Sed & Rationales sunt ostensæ. Rationales ergo sunt potétia tantum commensurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commen-



[a] 24. deci.

[b] 16. deci.

[c] 23. deci.

[d] 23. deci.

[e] 10. deci.

[f] 16. deci.

[g] 10. deci.

sura-

surabilis ipsi EH. [a] erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potẽtia solum commen surabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere, [b] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 74. deci.

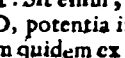
[b] 80. deci.

82. 77.

THEOR. 65. PROPOS. 83.

MINORI vna tantum congruit recta linea potẽtia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT *Minor* AB, & illi congruens BC, toti AC, potẽtia incõmensurabilis, faciẽsq; compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale, & rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non cõgruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulum sub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propos. 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & cõpositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectãgulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrũque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulũ bis sub AD, BD, spatium



est

eſt Rationale. ſed & non Rationale eſt. Cũ enim rectangulum ſub A C, B C, ponatur Medium, erit quoque ex *coroll. propoſ. 24. huius lib.* eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Similiterque *Medium* erit rectangulum bis ſub A D, B D. [a] Quare vnum non non ſuperabit alterum Rationali.) Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergo vna tantũ congruit, &c. Quod erat demonſtrandum. [a] *27. decim.*

THEOR. 66. PROPOS. 84.

83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali *Medium* totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, *Medium*, rectangulum vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam non cõgruere, quę hæc eadem faciat.

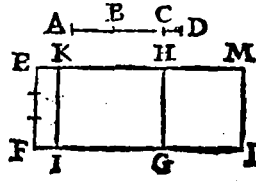
Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, faciensq; compoſitum quidem ex quadratis rectarũ AD, BD, *Medium*, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis

sub AD, BD. Est autē excessus inter hæc rectangula, spatiū Rationale, vt in propos. 81. demonstrauimus. Igitur & excessus inter illa cōpositā, spatiū Rationale est: sed
*67. dec. nō Rationale est; cū vtrumq; sit Mediū. [a] Medium. n. Medium non superat Rationali. Quod est absurdū. Non ergo ipsi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia tota incommensurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

84. 79. **EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum cōgruit recta linea potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciēs & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis continetur Medium, incommensurabileq; cōposito ex ipsarum quadratis.**

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens, ipsi vero congruens BC, toti AC, potentia incommensurabilis, faciensq; & compositum ex quadratis rectarū AC, BC, Medium, & rectangulum sub AC, BC, Mediū, incommensurabileq; compositum ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipsi AB, aliā non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si. n. fieri potest, cōgruat ipsi recta *alia* BD, toti AD, potētia incōmensurabilis, ita vt & compositū ex quadratis rectarū AD, BD, Mediū sit, & rectāgulum sub AD, BD, Medium quoque, ac incommensurabile cōposito ex quadratis rectarum AD, BD. Constructis autem iisdem, quæ in propos. 82. quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium est; erit etiam



EG,

EG, illi æquale, Medium. [a] Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & eius duplum KG, Medium. [b] Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniã KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cum illud huius sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC; [c] erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, [d] longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis ipsi EH; [e] erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostendemus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit, &c. Quod est absurdum. [f] Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 23. deci.
[b] 23. deci.
[c] 14. deci.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 80. deci.

DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

Si vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome secunda.

III.

QVOD si neque tota, neque congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS si tota plus possit, quam cõgruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine incommensurabilis,

IIII.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longiiudine commensurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD si neque tota, neque congruens

gruens expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome sexta.

SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum sex Apotomarũ, ac superius numerus sex linearum ex binis nominibus fuit collectus. Sunt enim sex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur post detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus sex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus est perspicuum.

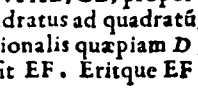
PROBL. 19. PROPOS. 86.

85.

INVENIRE primam Apotomen.

80.

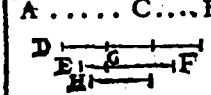
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in scholio 2. propos. 29. huius libri docuimus, quorũ excessus AC, non sit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratũ, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commensurabilis sit EF. Eritque EF, cũ cõmensurabilis sit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propos. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, esse primam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, cõmensurabilia sunt; Erunt & rectæ EF, GF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo EF, ostensa sit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia vero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neq; quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ



[a] 6. deci.

[b] 9. deci.

ctæ EF,GF. Rationales ergo sunt EF,GF, potentia tantum commensurabiles; atque idcirco reliqua EG, Apotome est. Dico & primam esse. Possit enim recta EF, plus quã recta GF, quadrato H. Et quia est, vt numerus AB, ad numerũ AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex GF; erit per conuersionẽ rónis, vt AB, ad CB, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex H. Habent autẽ AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [b] Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commensurabiles sunt. Quoniam igitur tota EF, plus potest, quam cõgruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commẽsurabilis; estque tota eadem EF, expositæ Rationali D, commensurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.



86.
81.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE secundã Apotomẽ.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. præcedenti; expositaq; Rationali D, sumamatur ei longitudine commensurabilis GF; eritque GF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. Dico EG, esse secundam Apotomen.

[c] Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commensurabilia sunt; Erunt & rectæ GF, EF, commensurabiles, saltem potentia. Cum ergo GF, sit ostensa Rationalis; erit quoq; EF, Rationalis. Quia vero numeri BC, AB, atq; adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri

meri quadrati; erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solum commensurabiles; a Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Posit enim recta EF, plus quam GF, quadrato ex H. Qm ergo est vt AC, ad AB, ita quadratū ex GF, ad quadratū ex EF; & conuertēdo, vt AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex GF; Ostendemus iam, vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

a 9. decī.

b 74 decī.

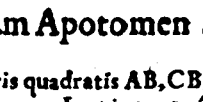
PROBL. 21. PROPOS. 88.

87.

82.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 86. sumatur alius numerus I, vt in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Expositā deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratū ex D, ad quadratū ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. c Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionē habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeo & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; d erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario



c 6. decī.

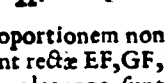
d 9. decī.

propoſ.6. huius lib. Dico EG, eſſe tertiam Apotomen.

[a] 6. deci. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia AB, AC, atq; adeo & quadrata ex EF, GF,

A . . . . . C . . . . B

I . . . . . .



[b] 9. deci. proportionem non habent, quam numeri quadrati; [b] Erunt rectæ EF, GF, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt EF, GF, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi ſolum commenſurabilis; [c] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniã. n. eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratũ ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF: Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quã numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF,

[c] 74. deci.

[d] 9. deci. proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [d] Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H; Oſtendemusque, vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi EF, longitudine commenſurabilem. Quapropter cum tota EF, plus poſsit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis ſit Rationali D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

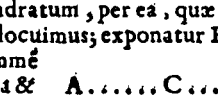
PROBL.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

88.
83.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compositus ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in *scholio* 3. propos. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commẽ



surabilis sit EF; eritq; propterea & EF, Rationalis. Quod si reliqua fiant, quæ in propos. 86. ostendemus, vt ibi, EG, esse Apotomen. Dico & quartam esse. Posit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia est vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuersionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant; quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommensurabiles. Quoniã igitur tota EF, plus potest, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, estque eadem tota EF, commensurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.

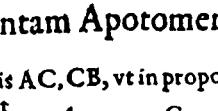
[a] 9. decim.

THEOR. 23. PROPOS. 90.

89.
84.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propos. præcedenti, fiat constructio, vt in propos. 87. hoc est, sumatur GF, longitudine commensurabilis Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 87. EG, esse Apotomen. Dico & secundam



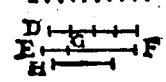
dam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis, esse vt A B, ad C B, ita quadratū E F, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti, rectæ E F, & H, longitudine incommensurabilis; estque congruens G F, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

90. 85.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propos. 54. ita vt A B, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiāt, vt in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & E F, longitudine incommensurabiles esse; & E G, Apotomen esse.



Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi E F. Igitur cum tota E F, plus possit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHO

SCHOLIVM.

SED & expeditius ſex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

SIT inueniendæ exempli gratia, prima Apotome. [a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abſciſſa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis ſit ipſi CB: Dico AD, eſſe primam Apotomen. Quoniã.n. AC, CB, Rationales ſunt potentia tantũ cõmẽſurabiles; erunt etiã AC, DC, Rationales potentia tantum commenſurabiles.* [b] *Eſt ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus poteſt, quam CB, hoc eſt, quam DC, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine cõmenſurabilis: & eſt AC, Rationali expoſitæ longitudine commenſurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, AD, prima Apotome. Eadẽ ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicũtur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex ſecunda ſecundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex ſexta ſextã, ſi minora nomina ex maioribus auferamus.*

[a] 49. dec.

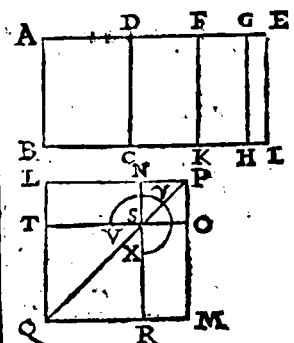
[b] 74. dec.

THEOR. 68. PROPOS. 91.

91.
86.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea ſpatium potens Apotome eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, Apotomen eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia ſolum commẽſurabiles; & tota AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; & denique eadem AE, tota plus poterit, quam



quam congrues DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc est, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulũ æquale sub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propos. 17. huius lib. Et quia AE, plus potest, quã DE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis:

[a] 18. deci. [a] erunt rectæ AG, GE, longitudine commensurabiles;

[b] 16. deci. [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commẽ surabilis erit: Est autem AE, Rationali AB, longitudine cõmensurabilis. [c] Igitur & vtraq; AG, GE, ipsi AB, longitudine est cõmensurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipsi AB, parallelis, quæ ipsi

[c] 12. deci.

[d] 20. deci. BC, productæ occurant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum sub duabus rationalibus longitudine cõmensurabilibus, Rationale. Rursus quia vtraq; DF, FE, longitudine cõmensurabilis est ipsi DE; & DE, longitudine incõmensurabilis est Rationali AB; (Nã si cõmensurabilis esset lõgitudine, cũ & AE, sit eidem AB, longitudine commensurabilis; [e] essent AE, DE, longitudine quoque commensurabiles. Quod est absurdum. pronuntur enim solum potentia commẽsurabiles:)

[e] 12. deci.

[f] 14. deci. erit etiam vtraque ipsarum DF, FE, ipsi AB, longitudine incommensurabilis. Et quoniam vtraq; DF, FE, Rationali DE, commensurabilis, Rationalis est; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare ducta FK, ipsi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, FI, contentum sub Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Medium.

[g] 22. deci.

[h] 14. secun. IAM vero ipsi AH, [h] fiat quadratum æquale LM, & ipsi GI, æquale fiat quadratum NO, communem habens

bens cum LM, angulum LPM. [a] Erunt igitur quadrata LM, NO, circ[illegible]ndem diametrum, quæ sit PQ. Perficiatur autem fig[illegible]vides. Quoniam igitur rectangulum sub AG, GE, pe[illegible]structionem, æquale est quadrato ex FE; [b] erunt t[illegible]AG, FE, GE, proportionales; [c] Ac propterea ct[illegible]H, FI, GI, eandem cum ipsis habeant rationem; erit FI, mediũ proportionale inter AH, GI, hoc est, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Est autem inter eadem LM, NO, per lemma propos. 14. huius lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia sunt: [d] Sed ipsi FI, æquale est DK, & ipsi LO, æquale est MN. Est ergo totum DI, toti gnomini VYX, cum quadrato NO, æquale. Est autem & totum AI, per constructionem, æquale quadratis LM, NO, Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, est æquale; Ac propterea recta TS, potest spatium AC. Dico TS, Apotomen esse.

QVONIAM enim spatia AH, GI, ostensa sunt Rationalia; & eis æqualia sunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia; atq; adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rursus quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommensurabilia ergo sunt LO, & NO, cum vnum sit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [e] eandem rationem habentes cum LO, NO, [f] longitudine incommensurabiles sunt; [g] Atque idcirco reliqua TS, Apotome est. Si spatium ergo contineatur sub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 26. sexti

[b] 17. sexti

[c] 1. sexti

[d] 36. primi

[e] 1. sexti

[f] 10. deci.

[g] 74. deci.

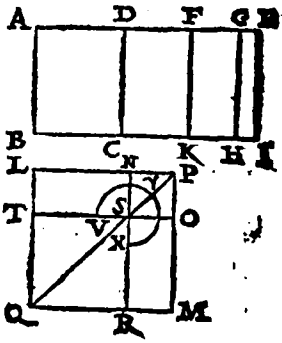
THEOR. 69. PROPOS. 93.

92. 87.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome prima.

CON-

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariã in F, & reliqua omnia conſtruãtur, vt in propoſitione præcedenti. [a] Eruntque rurſus, vt in antecedenti propoſitione, AG, GE, longitudine commenſurabiles; [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cum DE, eidem AB ponatur longitudine commenſurabilis; [c] eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles.) [d] Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidẽ AB. Eſt autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commẽſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia ſolum commeſiſurabiles; [e] Atque idcirco rectangulum vtrumq; AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis; erit quoque, vt in ſcholio propoſitionis 12. huius lib. oſtendimus, eidem AB, Rationali longitudine commẽſurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. [f] Vtrumque ergo rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus longitudine



[a] 18. deci.

[b] 16. deci.

[c] 12. deci.

[d] 14. deci.

[e] 22. deci.

[f] 20. deci.

gitudine commensurabilibus, Rationale est. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus rectam TS, posse *spatium AC*. Dico TS, Mediæ Apotomen esse primã.

QVONIAM enim *AG*, *GE*, longitudine sunt cõmensurabiles, [a] erunt & *AH*, *GI*, eandem cum illis habentia rationem, commensurabilia; atque adeo & *LM*, *NO*, quadrata illis æqualia, commensurabilia erunt. Igitur & latera eorum, nempe rectæ *TO*, *SO*, saltem potentia erunt commensurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata *LM*, *NO*, Mediis *AH*, *GI*, æqualia, (ostensa. n. sunt *AH*, *GI*, Media esse.) Media sint. Et quoniam *FI*, atque adeo sibi æquale *LO*, Rationale est, propterea que Medio *NO*, incommensurabile; [b] erunt rectæ *TO*, *SO*, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incõmensurabiles. Cum ergo & Mediæ sint ostensæ, & commensurabiles; erunt *TO*, *SO*, Mediæ potentia tantum commensurabiles. Cum ergo contineant *LO*, quod Rationale est ostensum; [c] erit *TS*, Mediæ Apotome prima. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma secunda, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

[c] 75. deci.

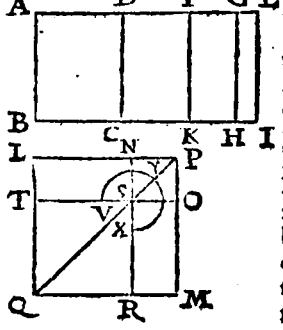
THEOR. 70. PROPOS. 94.

93. 88.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea spatium potens, Mediæ est Apotome secunda.

CONTINEATVR spatium *AC*, sub Rationali *AB*, & Apotoma tertia *AD*. Dico rectam, quæ spatium *AC*, potest, esse Mediæ Apotomen secundam. Sit. n. ipsi *AD*, congrues *DE*. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, *AE*. *DE*, Rationales potentia tantũ cõmensurabiles, & neutra ipsarum *AE*, *DE*, longitudine commensurabilis Rationali *AB*; Et denique *AE*, plus potest, quam *DE*, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis.

surabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propos. 92. eruntque rursus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter se commensurabiles; [a] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commensurabilis erit. Est autem AE, posita incommensurabilis longitudine Rationali AB. [b] Igitur & vtraque AG, GE, eidem AB, longitudine erit incommensurabilis. Cũ ergo vtraque AG, GE, Rationali AE, commensurabilis, Rationalis sit; erunt tam AB, AG, quã AB, GE, Rationales potentia solum commensurabiles; [c] Ac propterea vtrumque rectangulum AH, GI, Medium erit. Rursus quia DE, longitudine ponitur incommensurabilis Rationali AB; erit quoque vtraque DF, FE, ipsi DE, longitudine commensurabilis existens, [d] eidem AB, longitudine incommẽsurabilis. Cum ergo vtraque DF, FE, Rationali DE, cõmensurabilis, sit Rationalis; erunt tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commensurabiles; [e] atque propterea vtrumque rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter iam demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Mediæ Apotomen secundam.



QVONIAM enim AH, GI, Media sunt ostensa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas ostendimus commensurabiles esse, [f] commensurabilia sunt; Erunt & quadrata LM, NO, commensurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commensurabiles, saltem potentia. At vero quia AE, DE, potentia solum sunt commensurabiles, hoc est, longitudine incommensurabiles, estque ipsi AE, longitudine ostensa commensurabilis GE, ipsi vero DE,

[a] 16. deci.
[b] 14. deci.
[c] 22. deci.
[d] 14. deci.
[e] 22. deci.
[f] 19. deci.

DE, commensurabilis est longitudine FE; erunt ex scholio propos. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incommensurabiles; [a] ac propterea G I, F I, eandem rationem habentia, quam GE, FE, hoc est, illis æqualia NO, LO, incommensurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Mediæ, & commensurabiles. Mediæ ergo sunt TO, SO, potentia solum commensurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale sit ipsi FI, vt cóstat ex propos. 92. quod Medium esse ostẽdimus; erit & LO, Medium.) [b] erit TS, Mediæ Apotome secunda. Si ergo spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. decimi.

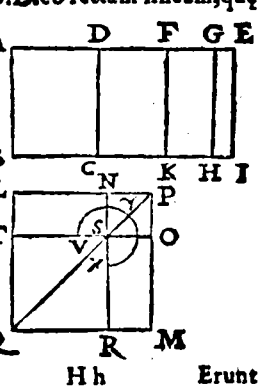
[b] 76. decimi.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

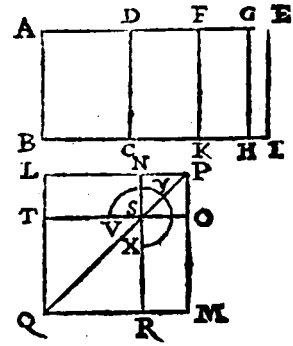
94. 89.

SI spatium continetur sub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea spatium potens Minor est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę potest spatium AC, Minorem esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia solum commensurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commensurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua ofa fiant, vt prius.



[a] Erunt ergo AG, GE, incommensurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus potest, quam DE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; & ad AE, applicatum est rectangulũ sub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficiensque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine commensurabilis; [b] erit rectangulum AI, Rationale. Rursus quia DE, Rationalis est, & Rationali AB, longitudine incommensurabilis; [c] erit DI, atque adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, sint longitudine incommensurabiles; [d] incommensurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero similiter demonstrabimus, vt in propos. 92. rectam TS, posse spatium AC. Dico TS, esse Minorem.



QVONIAM enim ex constructione, rectangulo AI, æquale est compositum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO: Est autem illud ostẽsum Rationale; erit & cõpositum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Itẽ quia FI, Medium est ostensum; erit & LO, cõtentum sub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incommensurabilia sunt demonstrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommensurabilia; Atq; adeo rectæ TO, SO, potentia incommensurabiles. Quapropter cum TO, SO, potentia sint incommensurabiles, sitque compositum ex quadratis ipsarum, Rationale: rectangulum vero sub ipsis, Medium; [e] erit reliqua TS, Minor. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma quarta, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 19. deci.
[b] 20. deci.
[c] 22. deci.
[d] 10. deci.
[e] 77. deci.

95. 90. THEOR. 72. PROPOS. 96.

SI spatium contineatur sub Rationa

li,

li, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quę cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propoſitionis) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB, vt in propoſ. 93. diximus; [a] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; [b] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rurſus erũt, vt in præcedenti propoſ. AH, GI, incommenſurabilia; poteritq;, vt oſtenſum eſt in propoſ. 92. recta TS, ſpatiũ AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

[a] 22. decì.

[b] 20. decì.

QVONIAM enim oſtenſum eſt AI, Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demõſtrauimus FI, Rationale eſſe; erit & LO, rectangulũ ſub TO, SO, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autẽ & TO, SO, potentia incommenſurabiles, vt in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; [c] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

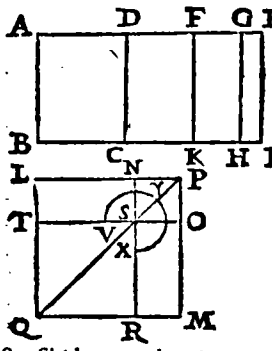
[c] 78. decì.

96. 91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſexta AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totũ efficit. Sit.n. ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarũ AE, DE, Rationali AB, cõmenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ. 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; [a] erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; [b] Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commenſurabilia ſint, [c] erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. Iam uero demõſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.



[a] 33. deci.

[b] 10. deci.

[c] 14. deci

QVO-

QVONIAM enim AI, *Medium* ostendimus; erit & compositum ex quadratis L *M*, N O, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Ité quia FI, Mediũ ostẽsum est; erit & LO, illi æquale, contentumque sub TO, SO, *Medium*. Rursus quoniam FI, ipsi AI, est incommensurabile, vt ostendimus; erit quoque LO, sub TO, SO, contentum, incommensurabile composito ex quadratis rectarũ TO, SO; propterea quod LO, ipsi FI, & compositum ex quadratis rectarum TO, SO, ipsi AI, est æquale. Deniq; TO, SO, potentia incommensurabiles sunt, vt in propos. 95. est demonstratum. Quamobrem cum TO, SO, sint potentia incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub *ipsis* Medium, & adhuc composito ex quadratis ipsarum incommensurabile; [a] erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio *Medium* totum efficit. Si igitur spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma sexta, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 79. *decimi.*

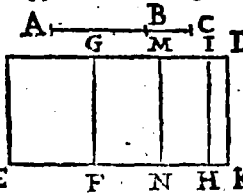
THEOR. 74. PROPOS. 98.

97. 92.

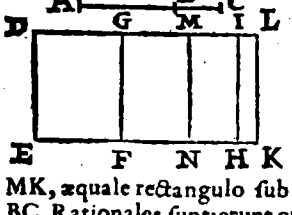
QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome A B, & ipsi congruens B C, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles: [b] & ad *Rationalem* D E, applicetur rectangulum D F, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico D G, esse Apotomen primã. Ad eandem. n. D*E*, applicetur rectangulũ DH, æquale quadrato ex A C; & ad I H, aliud I K, æquale quadrato ex BC; ita vt totũ tũ DK, æquale sit composito ex quadratis rectarũ AC, BC.

[b] 45. *primi*



[a] 7. secun.: BC. [a] Et quoniam compositum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale est rectangulo bis sub AC, BC, vna cũ quadrato ex AB; si auferantur quadratũ ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectãgulo bis sub AC, BC, æquale; atque adeo diuisa GL, bifariam in M, ductaq; MN, ipsi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo sub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales sunt; erunt quoq; quadrata ex AC, BC,



[b] 26. deci. Rationalia; ideoque commensurabilia. [b] Cum ergo & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipsorum sit commẽsurabile; erit & illud compositum, hoc est, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad

[c] 23. deci. Rationalem DE, [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Rursus quia AC, BC, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; erit rectangulũ sub ipsis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod

[d] 23. deci. cum applicetur ad Rationalem GF, [d] erit GL, Rationalis ipsi GF, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Et quoniam DK, Rationale, & GK, Medium, hoc

[e] 20. deci. est, Irrationale, incommensurabilia sunt; [e] erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem, quam DK, GK, longitudine incommensurabiles. Quare cum & Rationales sint demonstratæ; erunt DL, GL, Rationales

[f] 74. deci. potentia tantum commensurabiles; [f] Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam esse.

QVONIAM enim per lemma propos. 54. huius lib. rectangulum sub AC, BC, hoc est, MK, medium est proportionale inter quadrata rectarũ AC, BC, hoc est, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales sunt.

[g] 27. deci. [g] Quare rectangulum sub DI, IL, æquale est quadrato ex ML, hoc est, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc est, illis æqualia DH, IK, com-

[h] 20. deci. mensurabilia sunt, [h] erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis ha-

lis habentes proportionem, longitudine commensurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales sint, & ad maiorem DL, applicatum rectángulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiensq; figura quadrata; atque fit ostensa DI, ipsi IL, longitudine commensurabilis; [a] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi commensurabilis longitudine. Quare cum sit ostensum DG, esse Apotomen, & totam DL, plus posse, quam GL, congruentem, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, atque eandem totam commensurabilem esse longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod ostendendum erat.

[a] 18. deci.

THEOR. 75. PROPOS. 99.

98.
93.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatū latitudinem facit Apotomen secundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles, contineantque Rationale: [b] Et ad Rationalē DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen secūdam esse. Constituantur. n. eadē, quæ in antecedenti propos. ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod sub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod sub AC, BC, continetur semel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ sunt potentia commensurabiles; erunt & earum quadrata, hoc est, illis æqualia, DH, IK, Media, & commensurabilia; [c] ac proinde & totum DK, vtrique illorum commensurabile erit. Igitur & Medium, per coroll. propos. 24. huius lib. Cū ergo DK, applicetur ad Rationalē DE, [d] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incōmensura-

[b] 45. primi

[c] 16. deci.

[d] 23. deci.

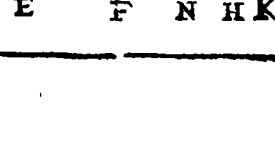
bilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod
a 21. deci. cum applicetur ad Rationalem DE, a erit GL, Rationalis longitudine cõmensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, Medium, id est, Irrationale, & GK, Rationale, incommẽ
b 10. deci. surabilia sunt; b erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Ra-
c 74. deci. tionales potentia tantum commensurabiles; c Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum cõgruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundã. Quod ostendendum erat.

99. 94.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatũ, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secũda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantũ commen-
d 45. primi surabiles, contineantque Medium: d Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostẽdemus iã, vt in propos. præcedenti, DK, Medium esse,
e 23. deci. e atque adeo rectã DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et quia



quia rectangulum ſub AC,BC,Medium eſt,atque ob id, & eius duplum G K ; a erit quoque G L , Rationalis ipſi DE, lógitudine incommenſurabilis. Quia vero AC,BC, *longitudine* ſunt incommenſurabiles, eſtque vt AC, ad BC,ita per lemma 3.propoſ.19.huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum ſub A C, BC; b erit quadratum ex A C, incommenſurabile rectangulo ſub A C, BC . c Eſt autem quadrato ex A C, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum A C , B C ; quod quadrata ex *rectis* A C, B C , potentia commenſurabilibus deſcripta , commenſurabilia ſint ; rectangulo vero ſub A C, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC,hoc eſt,DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, B C, hoc eſt,ipſi GK ; d Atque adeo rectę DL,GL,eandem habétes rationem , quam DK, G K, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſę & Rationales.Rationales ergo ſunt DL,GL, potentia ſolum commenſurabiles; e Ac proinde reliqua D G, Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim.vt in propoſ.98.demonſtrabimus DL. totam plus poſſe , quàm GL, congruentem , quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis . Cum ergo neutra ipſarum DL,GL, Rationali *D*E, longitudine ſit cõmenſurabilis, vt demonſtratũ eſt;erit ex defin DG, Apotome tertia. Quadratũ igitur Mediæ *A*potomæ ſecundę ad Rationalem applicatũ,&c. Quod erat oſtendendum.

[a] *23. decim.*

[b] *10. decim.*

[c] *15. decim.*

[d] *10. decim.*

[e] *74. decim.*

THEOR. 77. PROPOS. 101.

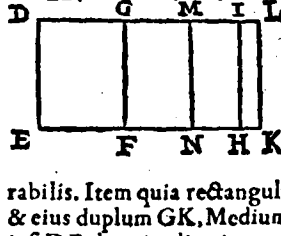
100.

95.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT Minor A B,& ipſi congruens B C, ita vt A C, BC, potentia incommenſurabiles ſint,facientesq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale;

nale; rectangulum vero sub AC, BC, Medium[a] & ad Rationalem DE, applicetur spatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen esse quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniã igitur compositũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc est, illi æquale DK, Rationale est;[b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium est;[c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Mediũ, incommensurabilia sunt;[d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem Rationales. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia tantum commensurabiles;[e] Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & quartam esse. Quoniam enim AC, BC, potentia sunt incommensurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc est, ipsis æqualia, DH, IK, incommensurabilia;[f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommensurabiles. Cum ergo rectangulum sub DI, IL, æquale sit quadrato ex ML, id est, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propos. 98. est demonstratum;[g] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum est rectangulum sub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommensurabiles. Itaque cum tota DL, plus possit, quam congruens GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; sitq; eadẽ tota DL, Rationali DE, longitudine ostensa commensurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratũ igitur Minoris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 45. primi

[b] 21. deci.

[c] 23. deci.

[d] 10. deci.

[e] 74. deci.

[f] 10. deci.

[g] 19. deci.

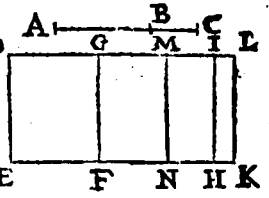
THEOR.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

101. 96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum Rationali Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: [a] Et ad Rationalé DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Constituantur.n.eadé, quæ supra. Qm igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atqueadeo & illi æquale DK, Medium est; [b] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitud ine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; [e] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem.n.modo, vt in antecedéti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG,



[a] 45. primi

[b] 23. decim.

[c] 21. decim.

[d] 10. decim.

[e] 74. decim.

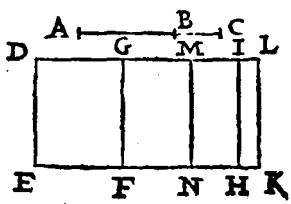
DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.

102. 97.

THEOR. 79. PROPOS. 103.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub iiſdem AC, BC, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarũ:



a 45. primi

a Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, ſpatium æquale DF, latitudinem faciẽs DG. Dico DG, eſſe ſextam Apotomen. Ead. n. fiant, quæ ſupra. Quoniã igitur tã compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, quam rectangulũ ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium eſt; b Erit tam DL, quam GK, Rationalis ipſis DE, longitudine incõmenſurabilis. Et quia rectangulum ſub AC, BC, incõmenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; Et ſunt rectangulum ſub AC, BC, & eius duplum GK, commenſurabilia; c Erit & GK, eidem compoſito, hoc eſt, ipſi DK, incõmenſurabile; d proptereaq; rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum

b 23. deci.

c 14. deci.

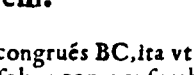
d 10. deci.

lum commensurabiles; [a] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus.n. similiter, vt propos. 101. totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommmensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum DL, GL, commẽsurabilis sit lõgitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, *A*potome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio *M*edium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum. [a] 74. deci.

THEOR. 80. PROPOS. 104. 103. 98.

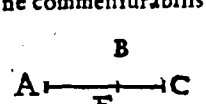
RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

SIT Apotome AB, & ipsi congruẽs BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atq; ordine eandẽ ipsi AB. [b] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [c] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; [d] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles; erunt quoq; ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, [e] reliqua DE, *A*potome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Posit enim primum AC, [f] plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis. Quo posito, [f] poterit & DF, plus quam EF, qua



[b] 12. sexti
[c] 12. quin.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 11. deci.

quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commẽsurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; [a] erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositę, cum tam Rationalis exposita, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis. Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commẽ surabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; [b] erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.



[a] 12. deci.

[b] 14. deci.

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommẽsurabilis. Quo posito, [c] poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 15. deci.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotomis, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & DE; Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eãdem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem lõgitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis exposita, & DF; eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis

rabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit Apotome prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt DE, illi potentia tãtum commenſurabilis, ſit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, ſecũda, quarta, vel quinta, eique conguens BC; & ſit DE, ipſi AB, potentia tantum commenſurabilis, quam quidem, vt in theoremate, oſtendemus Apotomen eſſe, eique congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen eſſe ordine eandem ipſi AB. Nam ſi fieri poteſt, ſit vtraque Apotome prima. Quo poſito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotomæ primæ, Rationali expoſita commenſurabilis longitudine; atque adeo & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt AC, & DF. Quare cum ſit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; erunt quoque AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima eſt. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque ſecunda, vel quinta. Eſſet enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commenſurabilis Rationali expoſita, atque adeo & ipſa inter ſe. Quocirca & AB, DE, inter ſe longitudine forent commenſurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome prima, vel ſecunda, vel tertia, rectã DE, quæ ipſi AB, potentia ſolũ eſt cõmenſurabilis, eſſe quoq; vnã ex illis tribus, licet ordine non eadẽ ſit. Nã hoc poſito, poterit AC, plus q̃ BC, quadrato rectæ ſibi lõgitudine commẽſurabilis. Cũ ergo ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ lõgitudine ſibi cõmenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel ſecũda, vel tertia. Eodẽ modo ſi AB, eſt Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, ita vt AC, plus poſſit, q̃ BC, quadrato rectæ ſibi lõgitudine incõmenſurabilis; erit quoq; DE, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta, quãuis ordine nõ eadẽ ipſi AB: quia rurſus, cũ ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, a poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quarta, vel quinta, vel ſexta.

[a] 12. deci.

[b] 10. deci.

[c] 15. deci.

[d] 15 deci.

IN

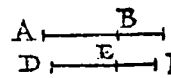
IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, licet potentia solum illi fuerit commensurabilis.

104. 99.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commensurabilis; & ipsa Mediæ Apotome est, atque ordine erit.

SIT Mediæ Apotome quæcunque A B, eique congruens B C, ita vt A C, BC, sint Mediæ potentia solum commensurabiles: Sit autem ipsi AB commensurabilis DE, siue lõgitudine & potẽtia, siue potẽtia tm̃. Dico & DE, Mediæ Apotomẽ esse, & ipsi A B, ordine eandem.



[a] 12. sexti [b] 13. quin. Fiat.n. vt A B, ad D E, ita BC, ad EF. Erit ergo tota A C, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [c] erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodẽ modo commensurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ sunt, [d] erunt quoque DF, EF, illis commensurabiles, Mediæ. Rursus, quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autẽ AC, BC, potentia solum commensurabiles, erunt etiam, ex scholio propos. 10. huius lib. DF, EF, solum potentia commensurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ sint ostensæ; [e] erit reliqua DE, Mediæ Apotome. *Dico* & eandem esse ordine ipsi AB. Quoniã. n. est AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita est quadratum ex A C, ad rectangulum sub AC, BC, ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex A C, ad rectangulum sub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, E F; Et permutando vt quadratum ex AC,

[c] 10. deci. [d] 24. deci. [e] 75. vel 76. decimi.

ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum sub DF, EF. Igitur cum quadratū ex AC, commensurabile sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint cōmensurabiles; [a] erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Medię Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; [b] atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoq; rectangulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium ex coroll. propos. 24. huius lib. [c] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secūda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 10. deci.

[b] 75. deci.

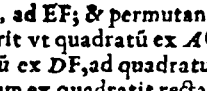
[c] 76. deci.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

105. 116. 100.

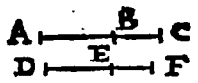
RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

SIT Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommēsurabiles, facientesque compositum quidē ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulū vero sub iisdē AC, BC, Medium. Sit autē DE, ipsi AB, cōmensurabilis siue lōgitudine & potētia, siue potētia tantū. Dico & DE, Minorē esse. Fiant. n. eadem, quæ supra, ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, eandē habeāt rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potētia tantum. Et quoniā est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [d] erit vt quadratū ex AC, ad quadratū ex BC, ita quadratū ex DF, ad quadratum ex EF; & cōponendo vt cōpositum ex quadratis rectarū AC, BC, ad quadratū ex BC, ita compositū ex quadra-



[d] 22. sexti

tis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF; & permutando vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad cõpositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratũ ex BC, commẽsurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. [a] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, composito ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur & cõpositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. defin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, rectãgulo sub DF, EF, esse commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, Medium; Erit quoque rectãgulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, suntq. AC, BC. potentia incommensurabiles; [b] erunt etiam D F, E F, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarũ DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub ijsdem DF, EF, Medium; [c] erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 10. deci.

[b] 10. deci.

[c] 77. deci.

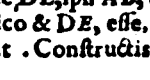
106. 117. 101.

PROBL. 83. PROPOS. 107.

RECTA linea commẽsurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totũ efficiens est.

SIT recta AB, cum Rationali Mediũ totũ efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub

ſub AC, BC, Rationale: Sit autē DE, ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo. Dico & DE, eſſe, quæ cum *Rationali Medium* totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus vt in antecedēti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC, BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF, EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 2. Sunt deniq; eodē modo, vt in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ DF, EF, potētia incōmenſurabiles. Igitur cū DF, EF, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.



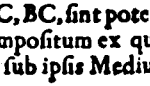
* 78. deci.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

107. 102.

RECTA linea commē ſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB, cum Medio *Medium* totū efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incōmenſurabiles, facientesque compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectāgulum ſub ipſis Medium quoq;, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autē DE, ipſi AB, quomodolibet commenſurabilis. Dico & DE, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, probabimus



similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium po natur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Mediũ.

Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremo quia composito ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulũ sub DF, EF: Sunt autem compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, incommẽsurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; a erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

a 79. deci.

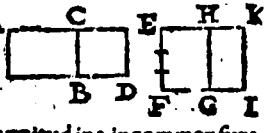
108. 103. THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR a Rationali AD, Medium CD. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum AB, esse vel Apotomen, vel Minorẽ. Exponatur. n. Rationalis EF, b ad quam applicetur rectangulum EG, æquale ipsi AB, &

b 45. primi

AB, & ad GH, aliud HI, æquale ipſi CD, ita vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale eſt; [a] erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia HI, Medio CD, æquale Medium eſt, [b] erit HK, Rationalis, ipſi EF, lõgitudine incõmenſurabilis. Ita que cum EK, quidem ſit longitudine cõmenſurabilis ipſi EF; at HK, eidem EF, longitudine incõmenſurabilis, [c] erunt EK, HK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles: [d] proptereaque reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus põt EK, quam HK quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine, cum tota EK, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma primam EH, hoc eſt, ſpatium AB, ſibi æquale, [e] Apotome eſt. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectę ſibi longitudine incommenſurabilis, cum tota EK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potẽs ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, [f] Minor eſt. Medio ergo a Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 31. deci.
[b] 23. deci.
[c] 13. deci.
[d] 74. deci.
[e] 92. deci.
[f] 95. quin.

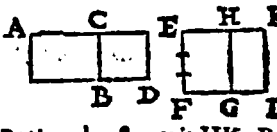
THEOR. 86. PROPOS. 110.

109.
104.

RATIONALI a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium *AB*, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem. n. conſtruatur, quæ ſupra. Et quia E I, *M*edio AD, æquale, Medium eſt; [a] erit E K, Rationalis ipſi E F, longitudine incommenſurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; [b] erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Isque cum H K, quidem ipſi E F, ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis; [c] erunt HK, *EK*, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [d] *A*c proin de reliqua *EH*, Apotome eſt; & ei congruens H K. *A*ut igitur *EK*, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi lõgitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si *EK*, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens HK, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali *EF*; erit ex defin. EH, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali *EF*, & *A*potoma ſecunda EH, hoc eſt, ſpatiũ AB, illi æquale, [e] Mediæ eſt Apotome prima. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens H K, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium *E*G, contẽtum ſub Rationali EF, & *A*potoma quinta E H, hoc eſt ſpatiũ illi æquale AB, [f] eſt ea, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Quam ob rem Rationali a *M*edio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 23. deci.



[b] 21. deci.

[c] 13. deci.

[d] 74. primi

[e] 93. deci.

[f] 110. 105.

THEOR. 87. PROPOS. 111.

MEDIO a Medio detracto, quod incom-

sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel Mediæ Apotomen secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Cõstructis enim iisdẽ, quæ supra; quoniã EI, HI, Mediis AD, CD, æqualia Media sunt; erũt EK, HK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur incommensurabilia; erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantũ cõmensurabiles; Ac propterea reliqua FH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commẽ surabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatiũ EG, contentũ sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc est, spatium AB, illi æquale; d Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus; erit ex defin. EH, Apotome sexta. Quam ob rem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, e est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.

a 23. decimi

b 30. decimi,

c 74. decimi.

d 94. decimi.

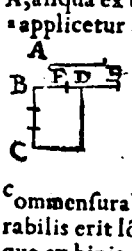
e 97. decimi.

III. 106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT *Apotome A*, quæcunque. *Dico* A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, A, aliqua ex *binis nominibus*. *Expoſita autẽ Rónali BC*, [a] applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniã igitur A, Apotome eſt; [b] erit latitudo BD, *Apotome prima*. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum cõmenſurabiles, poteritq; BE, plus quam DE, quadrato rectę ſibi *longitudine* [c] commenſurabilis, & ipſa BE, Rationali BC, commenſurabilis erit lõgitudine. Rurſus quia A, ponitur eſſe quo que ex binis nominibus; [c] erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipſius nomẽ BF. Erunt *igitur ex defin. eius*, quę ex bi*nis* nominibus prima eſt, BF, FD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine, & ipſa BF, Rationali BC, lõgitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam BE, quam BF, longitudine ſit commenſurabilis eidem BC; [d] erunt quoque *BE*, BF, inter ſe commenſurabiles *longitudine*. Igitur *cum tota* BE, ſit longitudine commẽſurabilis parti BF, erit & eadem BE, reliquę parti FE, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ. 16. huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis ſit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum BE, FE, longitudine commenſurabilium, ipſa BE, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi DE; (quod BE, DE, *Rationales ſint potentia ſolum* commenſurabiles), erit quoque altera FE, eidem DE, incommenſurabilis longitudine. Sed & vtraque FE, DE, Rationalis eſt oſtenſa. *Rationales* ergo ſunt FE, DE, potentia ſolum



[a] 45. primi
[b] 98. deci.
[c] 61. deci.
[d] 12. deci.
[e] 14. deci.

solum commensurabiles. Quare reliqua FD, a Apotome est; Atque adeo Irrationalis. Ostensa est autem & Rationalis. Quod est absurdum. Non ergo A, Apotome existens eadem est, quæ ex binis nominibus. Quod demonstrandum erat. a 74. deci.

COROLLARIVM.

EX demonstratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipsam consequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter se esse easdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, b *latitudinem efficit Rationalem, ipsi Rationali longitudine incommensurabilem.* b 23. deci.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, c *latitudinem efficit Apotomen primam.* c 98. deci.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, d *latitudinem efficit Apotomen secundam.* d 99. deci.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatum. e *latitudinem efficit Apotomen tertiam.* e 100. deci.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, f *latitudinem efficit Apotomen quartam.* f 101. deci.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, g *latitudinem efficit Apotomen quintam.* g 102 deci.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, h *latitudinem efficit Apotomen sextam.* h 103. deci.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter se; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis sit, illæ vero Irrationales; inter

inter se autem, quod ordine non sint eadē Apotomæ. Manifestum est, Apotomen, & reliquas Irrationales ipsam consequentes, & a Media, & inter se se differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonstrauimus, Apotomen eandem non esse, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & ceterarum quinque Irrationalium eam consequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, secundam, tertiam, quartam, quintam, & sextam: At uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarū quinque Irrationaliū, quæ ipsam sequūtur, ad Rationalē applicata, latitudines efficiūt ex binis nominibus primam, secundā, tertiam, quartam, quintā, ac sextam; liquido constat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ post ipsam, easdem non esse latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum post ipsam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem est, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipsam sequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ post ipsam. Quam ob rem tum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam exposita tredecim numero esse lineas Irrationales inter se se differentes, de quibus hactenus disputauimus; Hæ scilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius sex sunt species inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.

4. Ex

4. Ex binis Medijs ſecunda.
5. Maior.
6. Rationale ac Medium potens.
7. Bina Media potens.
8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.
9. Mediæ Apotome prima.
10. Mediæ Apotome ſecunda.
11. Minor.
12. Cum Rationali Medium totum efficiens.
13. Cum Medio Medium totum efficiens.

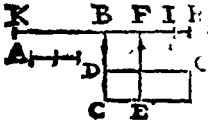
112. 0.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus,

& in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ est ex binis nominibus.

SIT Rationalis *A*, & ex binis nominibus BC, cuius
[a] 45. primi maius nomen B D,[a] & ad B C, applicetur rectangulum B E, æquale quadrato ex *A*, latitudinem faciens BF. Dico BF, esse *A* potomen, cuius nomina, hoc est, tota linea, & ipsi congruens, commensurabilia sunt nominibus BD, DC, ipsius B C, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc *A* potomē BF, esse ordine eandem ipsi BC, ex binis nominibus.[b] Applicetur enim rursus ad D C, minus nomen, rectangulum C G, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; sitque ipsi DG, æqualis B H. Et quoniam æqualia sunt BE, CG; [c] erit vt BC, ad DC, ita DG, hoc est, sibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Est autem BD, maior, quam DC. Igitur & HF, ma ior est, quam FB. Ponatur FI, ipsi FB, æqualis; [d] & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc est, ad sibi æqualē BF, ita FK, ad BK. Ostensum est autem esse vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum sint nomina ipsius BC, ex binis nominibus) Rationales sunt potentia tantum commensurabiles. [e] Igitur & FK, BK, potentia solum commensurabiles sunt.



[b] 45. primi

[c] 14. vel 16 sexti.

[d] 12. sexti.

[e] 10. deci.

[f] 12. quinti RVRSVS quia est vt HF, ad BF, ita FK, ad BK, [f] erūt quoque HF, FK, antecedentes simul, nempe tota HK, ad BF, & BK, consequentes simul, hoc est, ad totam FK, vt FK, ad BK. Ac propterea F K, media proportionalis est inter HK, BK. Quare vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propos. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, secunda. Quia vero CG, cum Rationale sit, (est enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum, [g] facit DG, latitudinem

[g] 21. deci.

dinem Rationalem, ipſi DC, longitudine commenſurabilem; Erit quoque HB, ipſi DG, æqualis, Rationalis & longitudine cómenſurabilis ipſi DC. Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quoque vt BD, ad DC, ita HK, ad FK. Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commenſurabile eſt quadrato ex DC, (quod rectæ BD, DC, ſint Rationales potentia commenſurabiles, cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus:) Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratũ ex FK, ita recta HK, ad BK. Igitur longitudine commenſurabilis eſt HK, ipſi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & BK, ipſi HK, commenſurabilis, Rationalis exiſtit. Cũ ergo oſtenſa ſit FK, ipſi BK, potentia ſolum commenſurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales ſint, & potentia tantum oſtenſæ commenſurabiles, erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod eſt primum.

a 22. ſexti

b 10. deci.

c 10. deci.

d 74. deci.

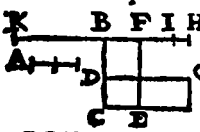
QVONIAM vero oſtenſum eſt eſſe rectam HK, totam parti BK, longitudine commenſurabilem, erunt propterea & BK, BH, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cum ergo BH, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi DC; erit quoque BK, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum eſt eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, oſtenſæ longitudine commenſurabiles; Erunt quoque BD, FK, commenſurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipſi BD, & BK, ipſi DC, longitudine ſit commenſurabilis, erunt ipſius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipſius BC, ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.

e 16. deci.

f 10. deci.

ITEM

ITEM quia demonſtrauimus eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erit idcirco Apotome nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominibus ipſius BC, quæ eſt ex binis nominibus. Quod eſt tertium.



POSTREMO vel BD, plus poteſt, quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incõmenſurabilis. Si plus poteſt BD, quã DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; poterit quoque FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis: Et ſi BD, plus poteſt quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Et ſi quidẽ BD, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commẽſurabilis; erit & FK, quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Si vero DC, ſit Rationali commẽſurabilis lõgitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si denique neutra ipſarum BD, DC, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; erit quoque neutra ipſarum FK, BK, commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome BF, ipſi BC, ex binis nominibus, vt conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertijs. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 15. decim.

b 14. decim.

113. 0.

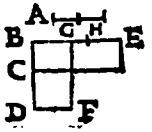
THEOR. 90. PROPOS. 114.

QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadẽ proportione;

&

& adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eũdem habet ordinẽ, quem ipſa Apotome.

SIT Rationalis *A*, & *Apotome* B C, cui congruat C D, [a] & ad B C, applicetur rectangulum C E, æquale quadrato ex *A*, latitudinẽ faciens BE. [a] 45. primi



Dico BE, eſſe ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC, & in eadem proportione; & adhuc ipſam BE, ex binis nominibus, eſſe ipſi BC, Apotomæ ordine eandem. [b] Applicetur enim rurſus ad BD, totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc eſt, ipſi C E, latitudinem faciens BG. Et quoniam B F, C E, æqualia ſunt; [c] erit vt BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conuerſionem rationis, vt BE, ad GE, ita B D, ad C D. Secetur quoque E G, ad H, ſecundum proportionem B E, ad G E, ex ijs, quæ in ſchol. propoſ. 10. lib. 6. conſcripſimus; vt ſit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur eſt vt BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam; erit quoque BH, reliqua ipſius BE; ad HE, reliquã ipſius GE, vt tota BE, ad totam GE; Erat autem vt BE, ad G E; ita EH, ad HG. Erit igitur quoque vt BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis eſt inter BH, GH. Quare erit vt BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, ſecunda, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc eſt, BH, ad HE: & ſunt BD, CD, cum ſint nomina *Apotomæ* BC, Rationales potentia tantum commenſurabiles, [d] Erunt quoque BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commenſurabilia. Igitur rectę BH, GH, eandem habentes rationem cum quadratis ex BH, HE, vt demonſtrauimus, [e] lõgitudine ſunt commenſurabiles; *Ac* propterea tota BH, longitudine commenſurabilis exiſtens parti G H, commenſurabilis quoque longitudine eris parti reliquæ B G, ex coroll. propoſ.

[b] 45. primi

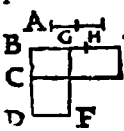
[c] 14. vel 16. ſexti.

[d] 10. deci.

[e] 10. deci.

propoſ. 16. huius lib. At vero cum B D, Rationalis ſit, nempe maius nomen Apotomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; erit latitudo BG, Rationalis commenſurabilis longitudine ipſi BD. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & B H, ei dem BD, Rónali commenſurabilis eſt longitudine, atque adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem BH, BG, longitudine commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero BH, HE, oſtenſe ſunt commenſurabiles potentia tantũ, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; [b] Ac propterea BE, ex binis nominibus eſt. Quod eſt primum.

[a] 21. deci.



[b] 37. deci.

QVONIAM vero oſtendimus eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD; atq; adeo permutãdo BH, ad BD, vt HE, ad CD; Oſtenſa eſt autem BH, ipſi BD, longitudine commenſurabilis; [c] erit quoque HE, ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum.

[c] 10. deci.

IMMO & in eadem proportione, cum demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertiũ.

POSTREMO vel B D, plus poteſt quam C D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, [d] poterit quoque B H, plus quam HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam B H, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem B D, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si vero C D, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine

[d] 15. deci.

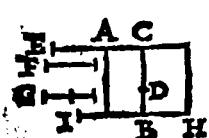
dine Rationali expositæ; a erit quoq; neutra ipsarũ BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertijs definitionibus, ipsa BE, ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. deci.

THEOR. 91. PROPOS. 115. 114.

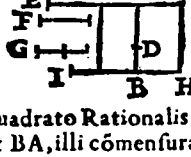
SI spatiũ cõtineatur sub Apotoma, & ea, que ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATVR spatiũ A B, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, cõmensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Posit autem recta F, spatiũ AB. Dico F, esse Rationalem. Expositа enim Rónali G, b applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. c Erit ergo latitudo BH, Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commensurabilia sunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB; atque adeo vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. d Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE: e Commensurabilis autem est longitudine HI, ipsi CE, quod vtraque



b 45. primi
c 113. decimi.
d 19. quin.
e 12. decim

HI, CE, commensurabilis fuerit longitudine ipsi CD.



[a] Igitur & BH, ipsi AC, longitudine est commensurabilis; [b] Atque idcirco & HC, ipsi BA, commensurabile erit, [c] cum sit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale est. Igitur & BA, illi cõmensurabile, Rationale erit, propterea q; & recta F, ipsum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demõstrandum.

[a] 10. deci.
[b] 10. deci.
[c] 1. sexti.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commensurabilia essa longitudine. In prioribus enim duabus, lõgitudine ostensa sunt esse cõmensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

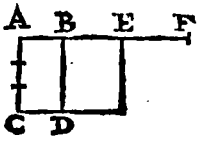
A ME-

THEOR. 92. PROPOS. 116.

115. 107.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, et nulla alicui antecedentium est eadem.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem sit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propos. 112. huius lib. Exposita enim Rationali AC, cõtineatur sub AB, Media, & Rationali AC, spatium AD. Est ergo AD, spatium sub Rationali AC, & Irrationali AB, contentũ, Irrationale, ex lemmate propos. 38. huius lib. Possit ipsum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non esse eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propos. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, latitudinem faciat Rationalem ipsi AC, longitudine incommensurabilem: Et quadrata reliquarũ duodecim Irrationaliũ, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt constat ex propos. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad eandẽ Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perspicuum est, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem faciat differentem a latitudinibus, quas quadrata illarũ tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



a 23. deci.

QVOD si cõpleatur rectãgulum DE; erit & hoc cõtentũ sub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lẽmate propos. 38. Possit ergo ipsum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rursus EF, nõ esse

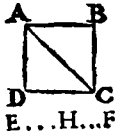
eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipsi BE. Hoc autem manifestum est, cum quadratum ipsius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipsius BE, latitudines faciant, si ad eandem Rationalem applicentur, differentes a BE, vt demonstratum est. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter se, & a dictis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonstrandum erat.

118. 7.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM sit nobis ostendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommensurabilem esse longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommensurabilem esse lateri AB. Si enim non est incommensurabilis, commensurabilis erit longitudine; [a] ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; sintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo est vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, ([b] Cum enim quadrata habeant suorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum sint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum est quadrati ex AB, per ea, quæ in scholio propos. 47. lib. 1. ostendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus



[a] 5. deci.

[b] 20. sexti, & 11. octaui.

merus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariā posſit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe EF, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cum ſe ipſum multiplicans producat ſuum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; [a] eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod eſt abſurdum. oſtenſus eſt enim par.) Quia vero EF, & G, in ſua proportione minimi, [b] inter ſe primi ſunt; & EF, oſtenſus eſt par, erit G, impar. (Si enim par etiam eſſet, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igitur numerus EF, duplus eſt numeri EH; [c] & quadrati habēt proportionē laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus ſit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partiū 4. eſt quadratus ex EF, taliū 2. erit quadratus ex G; & taliū 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt ſupra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus. quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter AC, lateri AB. Igitur incommenſurabilis longitudine.

[a] 29. noni

[b] 24. ſepti.

[c] 11. octaui

ALITER. Sit ſi poteſt fieri, diameter AC, commenſurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum ſit quadrati ex AB; ſit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonſtratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam eſt demonſtratum, quadratus ex EF, duplus eſt quadrati

ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; a ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cũ ergo & G, ſe ipſum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum G: Sed & inter ſe primi ſunt. Quod eſt abſurdum. Non ergo commenſurabilis eſt diameter AC, longitudine lateri AB. Quare oſtendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommẽſurabilem eſſe longitudine. Quod erat demonſtrandum.

a 14. octaui

SCHOLIVM.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonſtrabimus, hoc modo. Quoniam ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1 demonſtrata a nobis ſunt, quadratum diametri duplum eſt quadrati ex latere deſcripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia ſumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. ſolum tertius ab vnitate quadratus eſt, & cæteri omnes vnum intermittentes; quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non ſit; erunt ſolum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus ſit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad 2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (c alias & 2. quadratus eſſet.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. d Incommenſurabilis ergo eſt diameter longitudine ipſi lateri. Quod eſt propoſitum.

b 10. noni

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

c 24. octaui

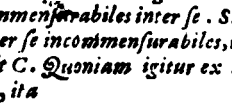
d 9. deci.

HOC etiam theorema aliter demonſtrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. & in ſcholio propoſ. 9. huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Gracis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex ſequentibus Stereometria libris pendet, vt merito omitti poſſet. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commenſurabilitatem omnium magnitudinum, & incommenſurabilitatem pertinent; viſum eſt, eam paucis explicare, aſſignando more noſtro

noſtro ſolito in margine loca Stereometria, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt. Eſt igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & alia quam plurima magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A, B; longitudine inter ſe incommenſurabiles, inter quas media proportionalis ſit C. Quoniam igitur ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita eſt figura rectilinea quauis ſuper A, conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilem, ſimiliterque poſitam ſuper C; & ſunt A, & B, longitudine incommenſurabiles; [a] *erunt rectilineæ illæ figuræ ſuper A, & C, incommenſurabiles.*



[a] 10. deci.

RVRSVS [b] *quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, deſcripta: Quadrata autem hæc, cùm ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque poſitæ, proportionem habent, quam recta A, & B, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6.* [c] *Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam recta A, B: Sed rectæ A, B, incommenſurabiles ſunt longitudine.* [d] *Igitur & circuli diametrorum A, C, incommenſurabiles ſunt.*

[b] 2. duodecimi

[c] 11. quinti

[d] 10. deci.

IAM vero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel priſmata eiuſdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ ſuper A, C, [e] *habebunt pyramides, atque priſmata eandem proportionem, quam baſes, hoc eſt, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ figuræ incommenſurabiles ſint, vt modo eſt demonſtratum;* [f] *incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides, & priſmata.*

[e] 5. 6. vel 7. duo decimi.

[f] 10. deci.

QVOD ſi coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum baſes circuli ſint diametrorum A, C, [g] *habebunt huiuſmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum baſibus, hoc eſt, cum illis circulis. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles,* [h] *Erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta ſunt igitur non ſolum lineæ, & ſuperficies incommenſurabiles, verum etiam & corpora, ſiue ſolida incommenſurabilia. Quod eſt propoſitum.*

[g] 11. duodecimi.

[h] 10. deci.

EADEM autem ratione, ſi rectæ A, & B, longitudine commenſurabiles ſint, [a] oſtendemus earum figuras rectilineas ſimiles, ſimiliterque deſcriptas, necnon & ipſarum circulos, commenſurabiles eſſe, [b] atque adeo & earundem pyramides, & priſmata; ac denique omnes, & cylindros; ſi modo eandem habeant altitudinem, vt perſpicuum eſt.

[a] 10. deci.

[b] 5.6.7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

POSTQVAM *Euclides in prioribus sex libris abunde de ea Geometriæ parte disseruit, quæ circa plana versatur, sibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vsurpauit; In subsequentibus vero tribus diligenter ea de passionibus numerorum docuit, quæ necessaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearũ commensurabilium, atq; incommensurabilium, quas idcirco luculentissime in libro decimo deinde exposuit, vt constructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in postremis tribus libris, nimirum in 13. 14. & 15. subtilissime disseritur, perfectius posset cognosci: Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, siue solida considerat, proprioque vocabulo Stereometria est appellata.*

EX-

EXPLICAT autem prius, more suo, voces ad eam rem pernecessarias, quarum prima est: Solidum, siue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque sortita est crassitudinem, seu profunditatem, ita vt tres dimensiones possideat, vnam quidem secundum longitudinem, aliam vero secundum latitudinem, & tertiam secundum profunditatem, seu crassitudinem, altitudinemve, appellari solidum, siue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantũ habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adiicit, superficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt recte intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hoc enim describit vestigium quoddam longum tantum, hac est, lineam, propterea quod punctum omnis sit magnitudinis expers; vt autem percipiamus superficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in transuersum moueri; hæc enim describet vestigiũ longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in transuersum est factus; carens autem profunditate, quod & linea illius sit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, seu solidum, hoc est, quantitatem trina dimensione præditum, consulunt, vt concipiamus superficiem aliquam æqualiter eleuari, siue in transuersum moueri; hac enim ratione describetur vestigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum, ob superficiem, quæ longa & lata existit; profundum vero seu crassum, propter eleuationem illam, seu motum superficiei. Hæc ergo quantitas, solidum siue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta assumpta a linea, superficie, & corpore reperiri potest, propterea quod triplex tantum dimensio possit assignari, vt perspicue in commentariis, quos in sphæram Ioannis de Sacro Bosco conscripsimus, a nobis fuit demonstratum ex Ptolemæo in libello de Analemmate.

SOLI-

II.

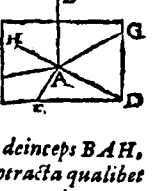
SOLIDI autem extremum, est superficies.

QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, superficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc ait Solidi finiti extremũ esse superficiem. Cum enim solidum, siue corpus efficiatur ex illo motu imaginario superficiei; perspicuum est extremas partes illius esse superficies.

III.

LINEA recta est ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in proposito sunt plano, rectos angulos efficit.

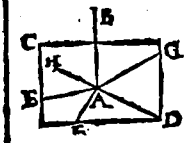
VT linea recta AB, plano CD, insistens, ita vt B, punctum sit in sublimi extra planum CD, at punctum A, in ipso plano, tum demum dicetur recta seu perpẽdicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem existentes plano ipsam tangunt in punctο A. Hac enim ratione fiet, vt AB, aqualiter insistat plano CD, & nõ magis in vnam partem, quam in aliam inclinet.



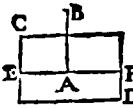
Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH, rectus, ideoq; illi aqualis. Eadẽq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos aquales. Ac propterea aquabiliter ipsi plano insistet. Quod si fieri posset, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, educta

nnn

non efficeret angulum rectum, etiamsi cum aliis omnibus rectum angulum constitueret, non diceretur AB, recta ad planum CD. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planũ recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eodẽ plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos constituere angulos. Et e contrario, vt recte cõcludatur, lineam quampiam esse ad planum datum rectam, demonstrãdum erit prius, eam tum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipsam tangunt, rectos angulos conficere.



VT autem recta quæpiam plano cuicunque insistens rectos constituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipsamque tangentibus, satis est, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, sed se mutuo secantibus, si producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eã cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perspicuum fiet ex propos. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia si duæ lineæ componant vnam rectam lineam, non necessario efficitur, lineam, quæ cum ipsis rectos angulos constituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim AB, insistat plano CD, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis AE, AF, quæ rectam vnam lineã componant. Dico AB, non propterea cum omnibus alsis rectos angulos constituere; atq; idcirco non esse rectã ad planũ CD.



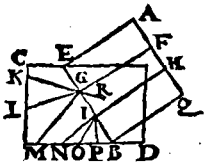
Hoc autem perspicuum est, cum AB, circa EF, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo sit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipsa cum EF, semper eosdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod si eadem AB, cum duabus angulum componentibus, quales sunt AG, AD, in priori figura, rectos constituat angulos, tum demum cũ omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucide demonstrabitur propos. 4. huius lib.

PLA-

IIII.

PLANVM ad planum rectum est, cum rectæ lineæ, quæ communi planorũ sectioni ad rectos angulos in vno planorum ducũtur, alteri plano ad rectos sunt angulos.

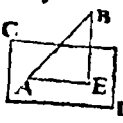
INSISTAT planum AB, plano CD, ita vt linea AQ, sit in sublimi, hoc est, extra planũ subiectum CD, at EB, in ipso eodẽ plano: Sit autẽ horum planorum communis sectio EB, qua, vt demonstrabitur propos. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem sumptis quotcunque punctis G, I; ex ipsis in plano AB, ducãtur GF, IH, perpendiculares ad communem sectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc est, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, a pũctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quam in alteram, sed æquabiliter illi insistet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis. Eadem que ratione, protracta quælibet alia linea in plano CD, fiens vtrobique a lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, insistet. Quotiescunque igitur planum aliquod rectum esse cõceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem deductas, rectas quoque esse ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud esse rectum, ostendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem sectionem ductas, rectas esse ad reliquum planum.



RE-

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planũ deducta fuerit perpendicularis, atque a pũcto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodẽ eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea, & adiuncta comprehenſus.



INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpẽdicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritque neceſſario a 17. prim. *angulus BAE, acutus, cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus linea inſiſtente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur eſſe inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus eſt dictus angulus acutus BAE.*

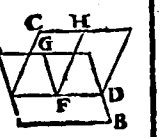
VI.

PLANI ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus,

quæ

quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO nãq; AB, insistat planũ CD, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipso plano AB, sitq; CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex eius pũcto F, duæ perpendiculares ducãtur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometra angulum GFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, sive is acutus sit, sive rectus, obtususve: quamquam proprie solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius aquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus vero recessum quodammodo vnius ab altero. Veruntamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consuevit a plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, sive is rectus sit, sive acutus, sive obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON

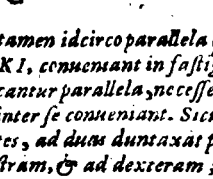
NON obſcura eſt hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo a recto magis receſſerit.

VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur; hoc eſt, ſiue ad dexteram, ſiue ad ſiniſtrã, & ſiue ſurſum, ſiue deorſum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dexteram, nec ad ſiniſtram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad ſiniſtram: Sed tamen quia ſurſum protenſa coeunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcirco non dicentur parallela.

SIT enim tectum quodpiam A B C D E F, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius baſis BCFE; auferaturque faſtigium AGHDKI. Quo facto, perſpicuum eſt, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter ſe, ſi ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cũ producta ad partes GH, KI, conuenant in faſtigio AD. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, vt in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autem linea in eodem plano exiſtẽtes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum, atque deorſum. Itaque duo plana quæcunque, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; linea ve-



ro recta, vel sunt parallela, vel ad alteram partem protracta conueniunt, si nimirum in eodem existant plano, vel tandē nec sunt parallela, neq; vnquam conueniunt, si videlicet in diuersis sint planis, & in transuersum posita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem sint plano: Hic autem simpliciter dicitur: quæ nunquam conueniunt.

IX.

SIMILES solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides similes figuras solidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis similibus definiendis: Satius tamen esse iudicauit, vt breuitati consulens eas ex similibus planis multitudine æqualibus describeret; præsertim quod ex similitudine planorum statim cōsequatur & angulorum solidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cum illes constituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum similitudinem.

X.

AEQVALES, & similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

QVOD si plana similia, quibus corpora similia ex præcedenti definitione circumscribuntur, fuerint æqualia, singula singulis, dicentur eiusmodi figura solida non solum similes,

verum etiam aquales. Nam si animo concipiantur sese pene trave mutuo huiusmodi solida, neutrum alterũ excedet, propter aqualitatem, ac similitudinem planorum. Ex similitudine enim planorum infertur angulorum solidorum aqualitas, vt in pracedenti definitione docuimus; ex eorundem vero aqualitate, laterum proportionalium aqualitas, vt in lemmate propos. 22. lib. 6. demonstrauimus. Quare solida illa omni ex parte sibi mutuo congruent; ac propterea inter sese existent aqualia.

XI.

SOLIDVS angulus est plurium, quam duarum linearum, quæ se mutuo contingant, nec in eadem sint superficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVAE linea in eodem existentes plano, qua non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planũ, vt lib. 1. exposuimus, qualis est angulus BAC, cõtentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano constitutis. Si igitur accedat tertia quadã linea AD, qua non in eodem cum illis plano existat, sed punctum D, sit in sublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus solidus, siue corporeus. Idem contingeret, si quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum solidum constituentes non debere in eadem superficie existere, quoniam videlicet, si tres linea AB, AC, AD, in eadem consisterent superficie, non efficeretur angulus solidus ad punctum A, sed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compositus. Quod si AD, sit in sublimi, hoc est, extra planum, in quo sunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC; immo circa punctum A, tres plani consistent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, so-

lidum

lidum constituunt angulum. Idem dices, si plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus est, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non consistentibus plano, sed ad vnum punctum constitutis, continetur.

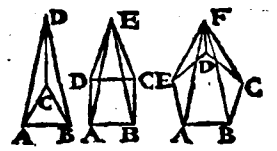
HÆC definitio secunda anguli solidi facilis est, præcedenti recte intellecta. Cum enim saltem tres lineæ in eodem non existentes plano necessariæ sint ad anguli solidi constitutionem, perspicuum est, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus solidus efficiatur, vt ex superiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano est, in quo rectæ AB, AD; & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB; atque ita ex ipsis angulus solidus ad punctum A, constituitur. Quod si tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum consistant, in eodem tamen plano, non constituetur ex ipsis angulus, sed totus quidam angulus planus, vt supra diximus de lineis in eadem superficie existentibus. Neque vero satis sunt duo anguli plani ad constituendum angulum solidum, etiamsi in diuersis sint planis. Hiabit enim semper ex altera parte. Vnde necesse est, vt tertia saltem superficies accedat, in qua tertius angulus planus consistat. Anguli porro solidi exemplum clarissimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, constituitur angulus solidus ex tribus angulis planis. Vbi manifestum est, si vna earum superficierum tollatur, destrui angulum solidum, remanereque tantum duas superficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX *his vero perspicuũ cuiuis erit, illos angulos solidos inter se esse æquales, qui continentur angulis planis & multitu-*

dine, & magnitudine æqualibus. Nam huiusmodi anguli sibi mutuo congruent, si se se penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis solum rectilineum assumpsit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures linea recta quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica superficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus superficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis est, qui fit, si conus per verticem secetur.

XII.

PYRAMIS est figura solida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnũ punctum constituta.



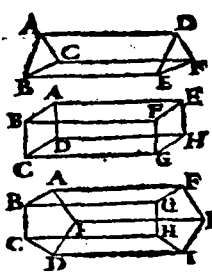
VIDELICET figura solida a planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, constituta appellantur pyramides. Perspicuum autẽ est, omnia plana, quibus pyramis continetur esse triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi est oppositũ. Hoc enim potest esse vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationem sumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrãgula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis qualibet pyramis comprehenditur, quot angulos, seu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiusmodi, basis pyramidis nuncupari solet. Vt pyramidis triangularis, præter basin, triangula sunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

PRI-

XIII.

PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum aduerſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, et parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRÆ ſcilicet ſolidæ, quarum plana aduerſa & æqualia, & ſimilia, et parallela ſunt triãgula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogrãma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur priſmata. Itaque priſma nil aliud eſt, quã columna quædam laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes oppoſitæ



ſunt æquales, ſimiles, & parallelæ, ſiue hæ ſint triangula, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Vnde tot parallelogrãma continebit priſma quodlibet, quot latera, ſiue anguli, in vno quoq; oppoſitorũ planorũ reperiuntur, vt figura indicãt.

EX his manifeſtum eſt, quantum hallucinẽtur ij, inter quos eſt & Campanus, qui priſma intelligunt eſſe eam figuram ſolidam duntaxat, cuius duo plana aduerſa parallela, æqualia, ſimilinque, triangula ſunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram ſolidam Campanus vocat Corpus ſerratile. Cum enim hæc figura ſit ſolum vna ſpecies priſmatis, definitio autem tradita infinita alia genera priſmatis amplectatur, vt cõſtat; præſertim quod plurima demonſtrationes in hoc lib. & 12. ſequenti, ex aquo omnibus priſmatibus conueniunt; perſpicuum eſt eos hallucinari, qui vnum tantum priſmatis genus ex hac defin. colligunt. Sum-

pserit autem fortasse hi auctores occasionē errādi, quod Euclides ēy in propos. vltima huius lib. et in 3. 4. & 5. propos. lib. 12. solum de eo prismate loquatur, quod duo aduersa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, septimam propositionem lib. 12. illis aduersari, in qua Euclides loquens de prismate, mentionem facit duorum triangulorum oppositorum, eo quod tali prismati solum demonstratio illa conuenit. Quod si sola ea figura, vt ipsi voluut, prisma appellaretur ab Euclide, frustra dixisset: Omne prisma trigonam habens basin, &c. cum nullum aliud prisma daretur. Immo in corollario dicta propositionis septimæ infert Theon, Pyramidem esse tertiam partem prismatis eādem cum illa basin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana prismatis aduersa non sint triangula, sed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & similia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita esse prismatum genera secūdum Theonem, atque adeo secundum Euclidē, cum communi omnium sententia demonstrationes Theoni ascriptæ, sint Euclidis. Accedit etiā, quod a Theone in demonstratione propositionis 10. lib. 12. apertissime appellantur prismata omnia solida, quæ habent duo plana aduersa & æqualia & similia, siue ea sint triangula, & quadrata, siue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA est, quando, semicirculi, manente diametro, circumductus semicirculus in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quiescens reuoluta describit circulum; ita & semicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram describit, quam Geometræ sphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum assignatur, extremum

mum videlicet illud quiescens, a quo omnes linea rectæ in peripheriã cadentes sunt æquales; propterea quod omnes æquales existant illi linea circumuoluta : Ita quoque in sphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quiescentis, hoc est, centrum semicirculi circumducti ; a quo omnes rectæ cadentes in peripheriam sunt æquales; eo quod omnes sunt semidiametro dicti semicirculi æquales. Quapropter ad similitudinẽ definitionis circuli, sphæra definiri poterit hoc etiã modo.

SPHAERA est figura solida, vna superficie comprehensa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram sunt posita, cadentes omnes rectæ lineæ inter se sunt æquales.

CICERO in libro de vniuersitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expressit his verbis. Ergo globosus est fabricatus, quod σφαιροειδὲς Graeci vocant, cuius omnis extremitas paribus a medio radiis attingitur.

XV.

AXIS autem sphæræ, est quiescens illa recta linea, circum quam semicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM sphæræ est idem, quod & semicirculi.

XVII.

DIAMETER autem sphæræ, est recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque a sphæræ superficie terminata.

HÆ tres definitiones non egent expositione; dummodo hoc solum notetur, omnẽ diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumducto triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum cõuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum ABC, circa latus quiescens AB, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, describetur solida quædam figura, qua continetur duabus superficiebus, circulari vna, ac plana, quam BC, latus alterum

circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.

QVOD

QVOD si latus quiescens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus descriptus Orthogonius, seu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus est. Cum enim latera AB, BC, ponantur æqualia; [a] erunt & anguli BAC, BCA, æquales; qui cum æquales sint vni recto, eo quod ABC, rectus est; erit angulus BAC, semirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte opposita semirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quiescens latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in secunda figura, vocabitur descriptus conus Amblygonius, seu obtusangulus; quoniam scilicet angulus ad verticem A, obtusus existit. Cum enim BC, latus latere AB, sit maius; [b] erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, semirecto maior. Similiter BAD, maior erit semirecto; atq; adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quiescẽs latus AB, maius fuerit circũducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus descriptus Oxygonius, seu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus est. Cum.n. latus AB, maius sit latere BC, [c] erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquinaleant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, semirecto maior, ideoque reliquus BAC, semirecto minor. Non secus ostendetur angulus BAD, minor esse semirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

[a] 5. primi

[b] 18. primi

[c] 18. primi

XIX.

AXIS autem coni, est quiescens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono superius descripto axis est recta quiescens AB.

BASIS

XX.

BASIS vero coni est circulus, qui a circumducta linea recta describitur.

NIMIRVM circulus, qui describitur ab altero latere circa rectum angulum, quale est B C, in superioribus conis. Itaque huius circuli semidiameter est ipsum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides solum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus est ad basin; Non autem inclinatum, cuius axis ab basin rectus non est; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni descriptionẽ, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12. lib. eadem fere demonstrari possunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono ostendit, vt ibi docebimus. Ita igitur scribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non sit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea descriptam, constantemque ex duabus superficiebus ad verticem inter se se aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam describit, in infinitum producta, voco conicam superficiem.

VERTICEM ipsius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentã circulo,

circulo,& conica ſuperficie,quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

AXEM, rectam lineam, quæ a vertice ad circuli centrum producitur.

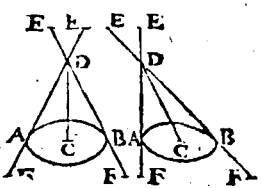
BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem voco,qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS vero,qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.

SIT circulus AB,cuius centrum C,& punctum aliquod ſublime D; iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E,F. Si igitur recta linea DB,feratur eouſque in circuli AB,circumferentia, quouſq; punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, a quo capit moueri: deſcribet ſuperficiem quãdam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctum ſe ſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipſum deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB,& ea ſuperficie, quam DB,ſola deſcribit. Coni verticem,punctum D. Axem DC. Baſim AB, circulum. Quod ſi DC, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.



CYL IN-

XXI.

CYLINDRVS eſt, quando rectã guli parallelogrãmi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogramum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumaſſumpta figura.

VELVTI ſi rectangulum parallelogrammũ ABCD, circa latus quieſcens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, qua quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, deſcribunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.

XXII.

AXIS autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri ſunt circuli a duobus aduerſis lateribus, quę circumaguntur, deſcripti.

QVA-

QVALES sunt circuli a lateribus AD, BC, oppositi descripti.

EVCLIDES porrò solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper inter sese æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte contingens, quousque rursus in eum locum restituatur, a quo moueri cæpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

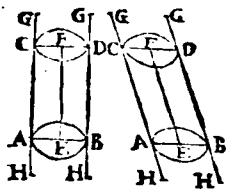
LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylyndri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur,

cantur, qui axem habent ad rectos angulos existentem ipsis basibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos existentem ipsis basibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidistantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidistantes quoque AB, CD: Iunctaque recta AC, in infinitũ ex utraque parte producatur ad puncta G, H. Sitigitur diametri AB, CD, circa cẽtra E, F, in planis circulorũ semper æquidistãtes, una cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum restituantur, unde moueri cæperunt; describetur a linea AC, superficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; qua & augetur in infinitum, cum recta AC, ipsam describens in infinitum producitur. Cylindrum vero appellat figuram AB DC, circulis AB, CD, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta, quam videlicet sola AC, describit, comprehensam. Bases cylindri dicit esse circulos AB, CD. Axem, rectã EF, qua circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod si axis EF, perpendicularis fuerit ad bases, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

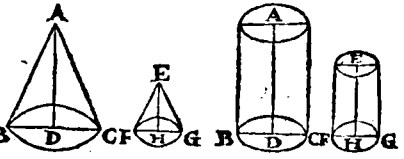


XXIIII.

SIMILES coni & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri proportionales sunt.

RECTE Euclides similitudinem conorum, atque cylindrorũ ab eorum axibus, & basium diametris sumit. Diametri enim basium indicant conos & cylindros secundũ duas dimen-

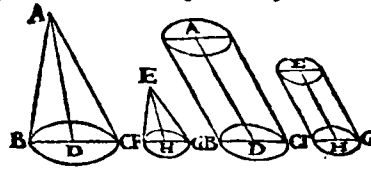
dimensiones esse similes, longitudinem scilicet ac latitudinẽ: Axes vero eosdem secundum profunditatem, seu altitudinẽ similes esse demonstrãt. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis aũt axes AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter basis ad FG, diametrum basis, dicentur tam coni, quam cylindri similes inter se; quia videlicet hac ratione tam secundum longitudinem & latitudinem similes sunt, quam secundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimensiones proportionales sunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione descripti sunt coni, necnon rectangula AB, EF, quorum conuersiones cylindros effecerunt, hac ratione similia inter se erunt. Cum enim sit vt AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem vt BC, ad FG, [a] ita dimidia BD, ad dimidiã FH; erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circũ æquales angulos, nempe rectos, proportionalia sunt; ac propterea & triangula, & rectãgula similia inter se erunt: Triangula quidem, [b] propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula sunt, [c] ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter se similia existunt: Rectangula vero, [d] eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, sunt æqualia, opposita oppositis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



QVOD si coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum similes, quando eorum axes, & diametri basium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi sunt, vt in definitione quinta dictum est. Sint enim coni inclinati, similiter & cylindri

[a] 15. quinti
[b] 6. sexti
[c] 5. sexti.
[d] 34. primi

cylindri ABC, EFG: In conis autem axes sint AD, EH, & basium diametri BC, FG; similiter & in cylindris. Itaque si fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, exiterintq; anguli inclinationū ADB, EHF, tā in conis, quam in cylindris, aequales inter se; dicētur & coni inter se, & cylindri quoque inter se se similes; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimensiones sunt proportionales, vt supra diximus, & rursus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuersiones conos, & cylindros effecerunt, inter se similia sunt, veluti in rectis conis, cylindrisque demonstrauimus. Est enim prorsus eadem demonstratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur aequales, licet non sint recti.



XXV.

CVBVS est figura solida sub sex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDVM est figura solida sub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM est figura solida sub octo triangulis æqualibus, et æquilateris contenta.

DO-

XXVIII.

DODECAEDRVM est figura solida sub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM est figura solida sub viginti triangulis æqualibus, & æqui lateris contenta.

HÆC sunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia sint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus constat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Timæo quinque mundi corpora, quæ simplicia a philosophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hisce corporibus assimilat, vt in sphæra Ioānis a sacro bosco latius explicauimus. Horum omniū constructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propos. 15. Tetraedri vero propos. 13. Octaedri deinde propos. 14. Dodecaedri autē propos. 17. Icosaedri denique propos. 16. Vbi planius perfectiusq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum est, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atq; formā quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodū faciles, quibus ea quilibet secundū eorū soliditatē possit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinq; illa dari potest, vt demōstrabimus ad finē lib. 13.

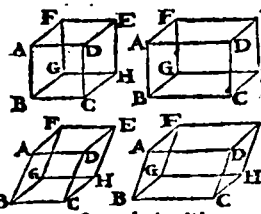
QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. fit mentio Parallelepipedi, & lib. 15. agitur de mutua inscriptione, circumscriptioneque corporum regularium; necessarium esse duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam sit Parallelepipedum,

lepipedum, quidque sit figuram solidam in figura solida inscribi, vel circa eandem describi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM est figura solida sex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerso, parallelę sunt, contenta.

VELVTI solida figura comprehensa sex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppositæ AC, FH; Itẽ



DF, CG; Item AG, DH, sunt parallelæ, nominantur parallelepipeda, quasi parallelis planis comprehẽsa, quæ quidem plana parallela oppositæ, sunt & æqualia, & similia, & parallelogramma, vt demonstrabitur propos. 24. huius lib.

SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim sex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc est, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, respondebitque quadrato in planis figuris: Si autem sex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, sed altera parte lõgiora, quãuis duo sint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod si sex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, sed non omnia rectangula, quamuis duo sint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique sex parallelogramma neque rectãgula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo sint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerso, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Prisma, vt ex definitione prismatis constat.

SOLI-

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidę figurę vicifſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figuræ circumſcriptę tangunt omnes angulos figurę, circum quam deſcribitur.

NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figura conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figura, cum interdum figura exterior plures, interdū pauciores angulos contineat, vel latera, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figura interioris tangant vel aliquot angulos, uel aliquot latera, vel denique aliquot plana exterioris figura; ita ut nullus angulus figura interioris intactus relinquatur uel ab angulis, uel a lateribus, uel denique a planis figura exterioris.

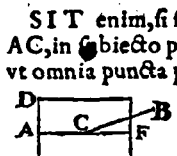
VERVM dua hæ poſtremæ definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibusque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

RECTAE lineæ pars quædā non eſt in ſu-

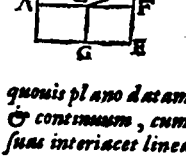
in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidē AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE, exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quamobrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC. quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam uero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HÆC eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nempe vt oſtendatur, recta AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directū, & continuum poſitam. Qui enim concedit, rectā AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectā AC, in plano DE, dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quādoquidem rectam CB, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi AC. Verumtamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, qua ex æquali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, qua recte, & æqualiter ſemper extenditur, vt & linea recta. Quamobrem ſi AC, in plano DE, producatur vſque ad F, erit CF, recta recta AC, in cōtinuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam id ipſum Geometrice, in plano videlicet DE, ipſi AC, dari poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa unam rectam lineam cōſtituat, quamuis quis dicat, AB, eſſe quoque rectam, eiuſque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in ſublimi eſſe poſitam.



ſitam. Ducatur enim in plano DE, ipſi AC, perpẽdicularis CG; & in eodẽ plano ipſi CG, perpendicularis CF. Dico CF, eſſe ipſi AC, poſitam in continuũ & rectũ. Cũ enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos conſtituant ACG, FCG, ex conſtructione; [b] *erunt AC, & FC, in directum & continuum poſita. Quamobrem etiamſi quis contendat, AB, eſſe rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, ſubiecto, pars autem CB, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, qua cum AC, vnam rectam conſtituat lineam; atque adeo duæ rectæ AB, AF, ſegmentum commune habebunt AC. Quod eſt abſurdum.*

HINC ſit omnes partes cuiuſuis rectæ lineæ, hoc eſt, totam rectam lineam, in vno exiſtere plano.

[a] *11. primi*

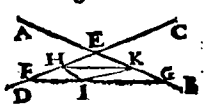
[b] *14. primi*

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duæ rectę lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano.

RECTAE lineæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirũ EHIG, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra; Exiſtent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in ſublimi, vel contra. quod fieri nõ poſſe, [c] iam ſupra demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur eſſe, pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidem FHKG, in vno conceda-



[c] *1. vndec.*

tur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoq; rectarum FE, GE, partes quidē FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel cōtra. Quæ omnia absurda sunt,[a] vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

[a] 1. vndec.

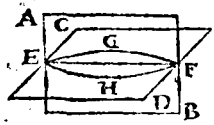
QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG.[b] in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædā in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulū EFG, consistere demōstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

[b] 1. vndec.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD, sitq; communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectā. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.



ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintq; termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectātur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, cōstat propositum: Ipsa enim erit communis sectio:

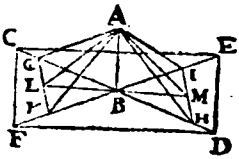
Si

Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cũ eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantũ plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secãtibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiã per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cũ enim se mutuo secent in B; [a] erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. Sumãtur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, IH; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secãs rectas GK, IH, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, triãguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; [b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales: [c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales.



RVRSVS [d] cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erũt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, æqualia,

4.

[a] 2. undec.

[b] 15. primi.

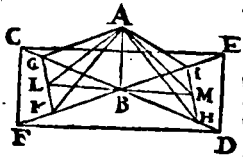
[c] 4. primi.

[d] 15. primi

[a] 26. primi

æqualia, ex constructione. Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

PRAETEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex constructione; & anguli ipsis contenti ABG, ABH, æquales, nempe recti ex hypothesi, erunt & bases AG, AH, æquales. Simili argumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.



[b] 4. primi.

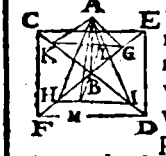
AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli, AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehensi, æquales.

[c] 8. primi.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; erunt quoque bases AL, AM, æquales.

[d] 4. primi.

QVONIAM deniq; latera AB, BL, trianguli ABL, æqualia sunt lateribus AB, BM, trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademq; ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter pũcta G, I, & K, H, ductæ sint, dummodo rectæ GI, KH, iunganturvel certe literę disponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ, & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextrã, vt in priori figura, sed a superiori parte versus inferiorem. Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.



[e] 8. primi.

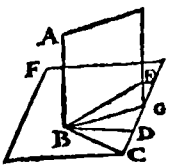
THEO-

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

INSISTAT recta linea A B, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. [a] Cū enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint B C, B D, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. [b] Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B; sint ambæ in plano A E. Et quia plana F C, A E, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. [c] Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, p ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsā in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdū. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano F C, existentibus, nō erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 2. undec.

[b] 2. undec.

[c] 3. undec.

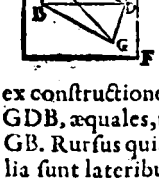
[d] 4. undec.

THEOR.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ A B, CD, eidem plano E F, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectantur deinde rectæ BG. GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; [a] erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Est autem & basis communis AG; [b] Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. [c] Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano: [d] Est autem AB, in isdem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti, [e] erunt rectæ AB, CD, parallelæ. Si duæ itaque rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



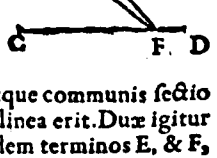
[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 3. undec.
[d] 2. undec.
[e] 28. primi

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineæ, in qua-

quarum vtraque ſumpta ſint quęlibet puncta : Illa linea, quæ ad hęc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

IN parallelis AB,CD, ſumantur vtcunque duo puncta E,& F, quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum, ſunt parallelæ AB, CD. Si enim recta EF, non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra: ſecet iam aliud planum ſuperficiem parallelarum per puncta E,& F, ſitque communis ſectio horum planorum EGF,, quę recta linea erit. Duæ igitur rectæ EF. EGF, cum habeant eoſdem terminos E, & F, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB,CD, erit recta EF. Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrandum.



[a] 7. undec.

SCHOLIVM.

HÆC eadem propoſitio vera eſt, etiãſi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione.

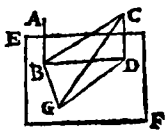
THEOR. 8. PROPOS. 8.

8.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT

SINT parallelæ rectæ *AB*, CD; sitque CD, plano EF, ad angulos rectos. Dico & AB, eidem plano EF, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta BD, in plano *EF*; [a] erit per defin. 3. huius lib. angulus CDB, rectus: Sunt autem duo CDB, ABD, duobus rectis æquales. Igitur & ABD, rectus erit. Iam in plano EF, ducatur BG, perpẽdicularis ad BD; ponanturque æquales BG, CD. Coniungantur deinde rectæ D G, GC, CB. Quoniã igitur latera CD, DB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus GB, BD, trianguli G B D, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, C D B, GBD, æquales, nimirum recti; [b] Erunt bases CB, GD, æquales. Rursus quia latera CD, DG, trianguli CDG, æqualia sunt lateribus GB, B C, trianguli GBC; & basis est communis CG; [c] Erunt anguli CDG, GBC, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem C D G, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & GBC, rectus erit. Quare recta GB, duabus rectis BD, BC, se mutuo secantibus in B, (Si namque producerẽtur DB, CB, secarent sese in B, ob angulum CBD.) ad rectos angulos existit; [d] ac proinde ad rectos angulos erit plano per BD, BC, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta *A* B; [e] propterea quod rectæ *BD*, *BC*, in eodẽ sunt plano, in quo parallelæ *AB*, CD; cum puncta *B*, C, D, existant in parallelis *AB*, CD. Igitur & *GB*, recta rectæ *B* A, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cũ *A*B, recta sit ad rectas BG, BD; [f] erit quoque AB, recta ad planum per *BG*, *BD*, ductum, hoc est, ad planum EF. Si duæ igitur sint parallelæ rectę lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.



[a] 29. primi

[b] 4. primi.

[c] 8. primi.

[d] 4. undec.

[e] 7. undec.

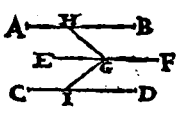
[f] 4. undec.

9. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ,

rallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; eſſe. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipſam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarũ AB, EF; at GI, in plano parallelarũ CD, EF. Quoniam igitur E G, recta eſt ad duas rectas GH, GI, ſe tangẽtes mutuo in G; [a] erit recta quoque ad planum per ipſas GH, GI, ductum. Quamobrem cum ſint parallelæ AB, EF; & EF, ſit recta ad planũ per GH, GI, ductum; [b] erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cum ſint parallelæ CD, EF; ſit autem EF, recta ad planum per GH, HI, ductum; [c] erit etiam CD, recta ad idem planum; [d] Atque proinde rectæ AB, CD, cum rectæ ſint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.



[a] *4. vndec.*
[b] *8. vndec.*
[c] *8. vndec.*
[d] *6. vndec.*

SCHOLIVM.

DATA opera Euclides voluit, duas rectas AB, CD, non eſſe in eodem plano cum recta EF, cui ſunt parallelæ. Nã ſi forent in eodem plano cum ipſa EF; eſſent AB, CD, inter ſe parallelæ, ex 30. propoſ. 1. lib. Supernacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

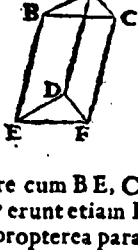
THEOR. 10. PROPOS. 10.

10.

SI duæ rectę lineę ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint

sint parallelę, non autē in eodem plano: Illę angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, se tangentibus in D; non sint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipsis comprehensos esse æquales. Ponātur enim AB, DE, inter se æquales, & AC, DF, inter se; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ sunt & æquales; [a] erūt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erūt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales sint eidem AD; [b] erunt etiam BE, CF, inter se parallelæ, & æquales: [c] Ac propterea parallelæ & æquales erūt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex constructione; & basis BC, basi EF, æqualis, vt modo demonstrauimus; [d] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehēsi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat ostendendum.



a 33. primi

b 9. vndec.
c 33. primi

d 8. primi.

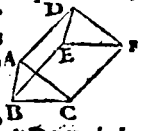
SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam est, quādo priores duæ lineæ in eodē sunt plano cū duabus posteriorib⁹ ribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodē plano, sitq; AB, ipsi DE, & AC, ipsi DF, parallelæ. Dico angulos BAC, EDF, esse æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF; ducanturq; rectæ BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt constitutæ, aut non. Sint prius in vna rectæ BF. Quoniā igitur parallelæ sunt AB, DE; æquales erūt anguli ABC, DEF, interni⁹ & externus. Similiter æquales erūt anguli ACB, DFE; Sūt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC, æqua-

e 29. primi

æquales sunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. [a] *Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt.* [a] 32. primi
Quod est propositum.

NON sint iam BC, EF, in una recta linea constituta. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, sint parallelæ & æquales; [b] *erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidē AD, parallelæ existētes & æquales,* [c] *inter se parallelæ erūt & æquales: ac proinde parallelæ & æquales quoq; erūt BC, EF.* [b] 33. primi

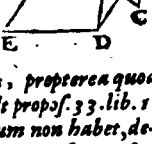


[c] 30. primi
[d] 33. primi

Itaq; cū duo latera AB, AC, triāguli ABC, æqualia sint duobus lateribus DE, DF, triāguli DEF; & basis BC, basi EF, [e] *erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod est propositum.* [e] 8. primi.

CAETERVM vt conclusio huius theorematis recte ex data hypothesi colligatur, necesse est, rectas lineas parallelas ita esse positas, (siue omnes sint in eodē plano, siue non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla rōne se mutuo secent; vt ex prima et vltima figura apparet. Nā alias cōclusio vera nō erit.

SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehēdunt, non sunt æquales, cum ille sit acutus, hic vero obtusus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, se mutuo secant. Vnde quamuis AC, DF, sint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ sunt & æquales, propterea quod eas non coniungūt ad easdem partes, vt vult propos. 33. lib. 1. Quare demonstratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in superioribus figuris seruatur.

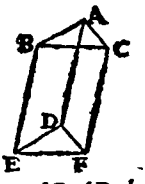


PORRO conuersum quoque huius propos. nimirum: Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ducta sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti: demonstrabimus hoc modo. In planis parallelis sint anguli æquales BAC, EDF, sitque AB, ipsi DE, parallela, & AC, DF, sint ad eas-

dem

dem partes plani AE, per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse. hoc est, planum per AC, AD, ductum trā sire etiam per rectam DF. Si enim non sint parallelæ; [a] si ducatur in plano CD, per AC, AD, ducto recta aliaper D, ipsi AC, parallela, [b] continebit hæc cum DE, angulum angulo EAC, æqualē, ac propterea & angulo EDF: atque ita pars & totū erunt æqualia. quod est absurdū. Recta ergo DF, ipsi AC, parallela est: atq; adeo planū per AC, AD, ductū trāsibit per rectā DF. quod est propositū.

[a] 31. primi
[b] 10. vnde.

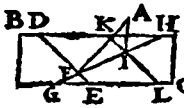


II. PROBL. 1. PROPOS. 11.

A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planū BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunq; DE; [c] ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF: Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH; [d] ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. [f] Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL; cum DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, [g] ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum; [h] erit quoque KI, ad idem planum per FA, FH, ductum recta. [i] Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitq; rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF, [k] Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo pūcto in sublimi, ad subiectū planū perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendū erat.

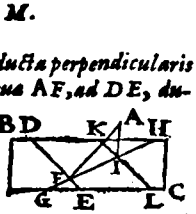
[c] 12. primi
[d] 11. primi
[e] 12. primi
[f] 31. primi.
[g] 4. vnde.
[h] 8. vndec.
[i] 9. vndec.
[k] 4. vndec.



SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis; erit ipsa AF, ab initio ad DE, ducta perpendicularis ad subiectum planum BC, perpẽdicularis, cum perpendicularis sit ad vtramque DE, GH.



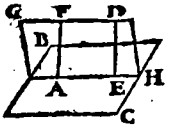
a 4. vnde.

PROBL. 2. PRPOS. 12. 12.

DATO plano a puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC. b Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, c ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datũ BC. Cum enim DE, AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planũ BC, ex constructione; d erit quoq; AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.

b 11. vnde.



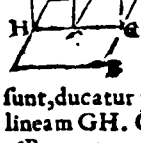
c 31. primi

d 8. vndec.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad re-

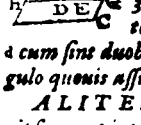
ctos angulos non excitabuntur, ad eas-
dem partes.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C,


ad easdem partes non posse educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim, si potest fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per
[a] 2. vndec. CD, CE, [a] quæ in vno, eodemque plano sunt, ducatur planum FG, secãs planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ sint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod est absurdum. Dato igitur plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabũtur, ad easdẽ partes. Quod erat demonstrandum.

ALITER. Ducantur, si fieri potest, ex C, ad planum AB, duæ perpẽdiculares CD, CE. Cum igitur duæ
[b] 6. vndec. DC, EC, rectæ sint ad idem planum AB; [b] erunt ipsæ inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod est absurdum.

SCHOLIVM.

EODEM modo a puncto in sublimi ad subiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in sublimi ad subiectum planum BC, si fieri potest, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per
[a] 2. vndec. *AD, AE, [a] quæ in vno plano sunt, planum FG, secans planum BC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ sint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti in-*


terni in triangulo ADE. Quod est absurdum;
[d] 17. primi [d] *cum sint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis assumpti.*

ALITER. Si AD, AE, rectæ sunt ad planum BC;
[e] 6. vndec. [e] *ipsæ erunt inter se parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod est absurdum.*

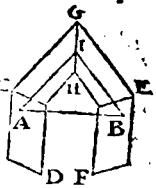
THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta AB, ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; [a] & faciant communem sectionem rectam lineã G H: In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ I A, I B, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli I A B, I B A, recti, in triangulo A B I. [b] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parellela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 3. vndec.

[b] 17. primi

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatq; communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK:

eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare recta EG, FI, ad partes G, I, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; cum tota recta HGL, sit in vno plano, nempe in AB, producto; Item tota recta KIL, in vno quoque plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdū, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodē modo si aliud planum videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas, communes cum ipsis sectiones MO, PN; erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN, [a] *recta quoque erit EF, ad planū CD. per ipsas ductum. Quod est propositum.*

[a] 4. vndec.

15. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quę per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ A B, A C, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, enim deducatur ad planum EF, perpēdicularis AG, occurrēs plano EF, in puncto G. [d] Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; [e] erunt & AB, GH,

[a] 11. vnde.
[d] 31. primi
[e] 9. vndec.

GH, inter se parallelæ; [a] Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Est autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Similiter argumento concludes, angulum CAG, rectum esse. Itaque cum recta GA sit recta duabus AB, AC; [b] recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipsas ductum. Est autem & recta ad planum EF, ex constructione; [c] Igitur parallela sunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, &c. Quod erat demonstrandũ.

[a] 29. primi

[b] 4. undec.

[c] 14. unde.

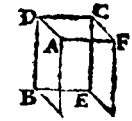
SCHOLIVM.

QVOD si perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipsummet punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non sunt ducenda alia parallela. Vt si lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC, ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpendicularis, cadat in G; ostendemus, vt prius, GA, esse rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductũ, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema subsequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non est, parallelum planum ducere.

DATVM planum sit AB, punctumque extra ipsum sit C, per quod ducendum sit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunq; duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, [d] agatur CE, ipsi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipsi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum esse plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, se tangentes in D, duabus rectis CE, CF, se tangentibus in C, existentibusq; in alio eũ illis plano parallelæ sint; [e] parallelæ erunt plana AB, EF, per ipsas ducta. Quod est propositum.



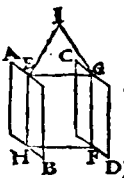
[d] 31. primi

[e] 15. unde.

16. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ, productæ inter se conuenient, cum sint in plano EF, secante. Conueniant igitur in puncto I. Quia ergo tota recta HEI, in vno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in vno quoque est plano, videlicet in CD, producto; conuenient etiam D plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 1. undec.

SCHOLIVM.

HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, vt hic demonstratum est; Nō tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones facta ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantum sunt parallela, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

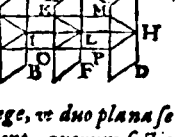
PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

SINT

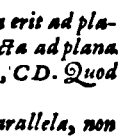
SINT *duo plana* AB, CD, *plano* EF, *parallela. Dico &* AB, GD, *parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano* GH, *sintque communes eorum sectiones rectæ* GI, KL, MH. *Secentur rursus alio plano* NH, *sintque communes eorum sectiones rectæ* NI, OL, PH, *hac tamen lege, ut duo plana secantia* GH, NH, *se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta* HI. *Quia igitur parallela plana* AB, EF, *secantur plano* GH, [a] *erunt communes sectiones* GI, KL, *parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt* MH, KL; [b] *atque adeo parallelæ erunt inter se* GI, MH. *Non aliter ostendemus, parallelas esse* NI, PH. *Itaque cum* IG, IN, *se mutuo tangentes in* I, *parallelæ sint rectis* HM, HP, *se tangentibus in* H, *existentibusque in alio plano;* [c] *erunt plana* AB, CD, *per ipsas ducta, parallela. Quod est propositum.*

[a] 16. undec.
[b] 9. undec.
[c] 15. undec.

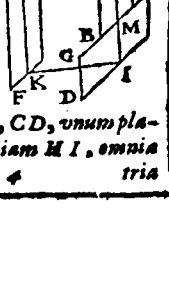


ALITER. *Sumatur in tertio plano* EF, *punctum quodlibet* G, *a quo in utramque partem educatur ad planum* EF, *linea recta perpendicularis, occurrens plano* AB, *in puncto* H, *& plano* CD, *in puncto* I. *Quoniam igitur linea* HG, *recta est ad planum* EF, *recta quoque erit ad planum* AB, *sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione* GI, *recta erit ad planum* CD. *Quamobrem cum recta* HI, *sit recta ad plana* AB, CD; [d] *parallela inter se erunt plana* AB, CD. *Quod est propositum.*

[d] 14. undec.

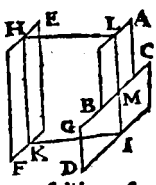


QVOD *si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tamen inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam; veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana* AB, CD, *planis* EF, *parallela, conueniantque productæ secundum rectam* CG. *Dico plana* AB, CD, *vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam* HI, *omnia*



tria plana per lineas rectas HK, LM, MI. Quoniam igitur parallela sunt plana AB, EF; [a] erunt & communes sectiones LM, HK, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IM, HK. Quam ob rem cum rectæ LM, IM, parallelæ sint ipsi HK, existantque in eodem plano secante HI, & conueniant in M; ipsa erunt in rectum & continuum posita, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana AB, CD, vnum planum efficient; [b] propterea quod recta LI, in vno iacent plano. Quod est propositum.

[a] 16. vndec.



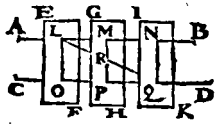
[b] 1. vndec.

ITAQVE duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.

17. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ AB, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue nō, existētes tñ in eodē plano; siue in trāsuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis EF, GH, IK, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earū inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem LM, ad MN, ita esse OP, ad PQ. Ducantur enim rectæ LO, NQ, in planis EF, IK, & coniungatur recta LQ, occurrens plano GH, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur RM, RP, in eodem plano GH.



[c] 3. vndec.

[c] Eritque triangulum LNQ, in vno plano: similiter triangulum LOQ, in vno plano. Quoniam vero pla

na parallela GH, IK, secantur plano trianguli LNQ, [a] erunt communes sectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [b] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 16 vnde.
[b] 2. sexti

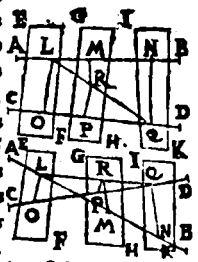
SCHOLIVM.

QVOD si date duæ rectæ AB, CD, sint in vno eodēque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in superiori figura apparet. Nam tunc planū per rectas AB, CD, ductum secabit tria plana parallela in pūctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [c] quæ inter se parallelæ erunt, punctumq; R, in rectā MP, existet, cum sit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano existentia, vt in scholio propos. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum sectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, constituent, nimirum communem sectionē planorum LOQN, GH.

[c] 16. vnde.

SI vero duæ rectæ AB, CD, non sint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hisce duabus figuris apparet: quia [d] cum triangulum LOQ, sit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuersum est, (Si namque duo illa triangula in vno eodemque plano existerent, essent duæ rectæ AB, CD, in eodē illo plano, quod ex ipsis constituitur, quod est cōtra hypothesim.) erunt rectæ RM, RP, in diuersis illis planis triangulorū; ac proinde vnam rectam non constituent: [e] alias in vno essent plano. quod est absurdum.

[d] 2. vndec.



EADEM hac propositio locum habet, si duæ rectæ AB, CD, in eodem plano existentes, nō sint parallelæ, vt in eisdem hisce duabus figuris apparet: sed tunc MRP, semper erit vna linea recta, vt ad initium huius scholij demonstratū est, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonstratio hic adhiberi potest.

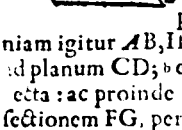
NON

NON secus, si plura plana parallela, quam tria, rectas AB, CD, secent, erunt earum partes proportionales, & communes sectiones mediorum planorum & triangulorũ LOQ, LNQ, rectas lineas constituent, si recta AB, CD, in vno sint plano, non rectas autem, si non sint in vno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum est.

18. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiã ad rectos sit angulos: Et omnia, quæ per ipsam, plana eidem plano ad rectos angulos erũt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, esse recta ad idem planum CD. Ductum enim sit per AB, planũ EF, secans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, [a] vtcunque in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipsi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ sunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipsi AB, ducentur parallelę, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem sectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento ostendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, esse recta. Si igitur recta linea plano cuipiã ad rectos sit angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 31. primi

[b] 18. vnd

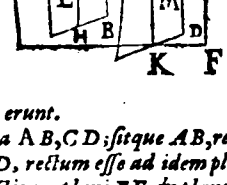
SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonstrare. Videlicet.

DVO

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, paralle la sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnũ cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parallelas. Dico ea parallela esse. In plano. n. EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, qua ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: eademque perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta est, ipsa parallela erunt.



[a] 29. primi

[b] 14. vnde.

SED iam parallela sint plana AB, CD; sitque AB, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, recta GH, IK; [c] quæ parallela erunt. Ducta quoque in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. [d] Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectum. Quod est propositum.

[c] 16. vnde.

[d] 18. primi

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectũ.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius 9. post. oporteat atque per FG, planum ducere, quod ad planũ CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, recta FG, [e] erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planũ ducatur EF. [f] quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.

[e] 12. vnde.

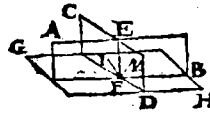
[f] 18. vnde.

THEOR.

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, se mutuo secantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum sectionem EF, rectam quoq; esse ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes sectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta est, aut non. Si recta est EF, ad BF, DF, [a] recta quoque erit ad planum GH, quod per ipsas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alterā rectarum BF, DF, tantum; sit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defi. huius lib. Idem concludes, si EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cū perpendicularis ponatur ad DF, communem sectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, esse credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius sectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniā igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, cōmunem eius sectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadē ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum



[a] 4. vndec.

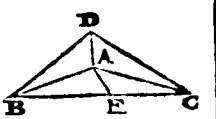
[b] 11. primi

planum GH, duæ perpendiculares sunt excitatæ. Quod fieri non posse supra demonstratum est. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 13. vnde.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI solidus angulus tribus angulis planis cõtineatur: Ex his duo quilibet vtut assumpti tertio sunt maiores.

CONTINEATVR angulus solidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo esse maiores. Si enim omnes tres sint æquales, perspicuũ est, quosuis duos maiores esse reliquo: Si vero duo tantũ sint æquales, & tertius vtrouis minor, constat quoque quoslibet duos reliquo maiores esse. Quod si vnus, uidelicet BAC, sit maximus, reliqui autem siue æquales, siue inæquales, manifestum etiam est, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo esse maiorem. Dico iã hoc angulo maximo BAC, maiores quoque esse angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto [b] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectæ AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, secans rectas AB, AC, in B, & C; coniunganturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipsis contenti, per constructionem, æquales; [c] erunt bases BD, BE, æquales. [d] Quia vero latera DB, DC, maiora sunt latere BC; si demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quam CE. Cum igitur latera AD, AC, triãguli DAC, æqualia sint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & basis CD, maior basi CE;



[b] 23. primi

[c] 4. primi.
[d] 20. primi

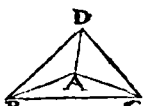
[a] 25. primi

se CE; [a] erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

21. THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB,



erunt cōstituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis cōtinetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB; D, sub CDA, ADB, BDC. [b] Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. [c] Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi, una cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, ([d] sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 20. vnde

[c] 32. primi

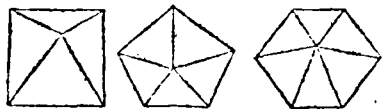
[d] 32. primi

SCHO-

SCHOLIVM.

QVONIAM hac demonſtratio ab interpretibus accommodatur ſoli illi angulo ſolido, quem tres plani anguli cõſtituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos ſolidos extendemus hoc modo.

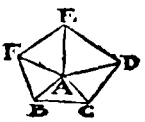
SIT angulus ſolidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos eſſe quatuor rectis quoq; minores. Nam ſi omnibus angulis planis recta ſubtendantur ordine in eodẽ plano exiſtentes; cõſtituetur pyramis, cuius vertex datus angulus ſolidus, tot laterum, angulorumve, ſub quot angulis planis ſolidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorũ, (a cum anguli cuiuslibet trianguli duobus ſint rectis aquales) bis tot rectis erunt aquales, quot angulos continet baſis: Sed omnes anguli baſis aquales ſunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. prope ſ. 1. lib. demonſtrauimus ex Procle. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum ſuperabunt omnes angulos baſis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (propterea, quod prope baſin conſtituantur anguli ſolidi, quorum quilibet tribus planis angulis cõtinetur, b & horũ quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in baſi, ſint maiores) ſuperabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorũdem prope baſin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.



a 32. prim.

b 20. unde.

VERVM vt res melius percipiatur, ſit gratia exempli angulus ſolidus A, contentus quinque angulis planis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, quibus ſubtendantur ordine recta B C, C D, D E, E F, F B,



ita vt

ita vt constituatur pyramis pentagona, habens videlicet basin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulũ solidum A. [a] *Quia vero omnes anguli quinque triangulorum E A C, C A D, D A E, E A F, F A B, æquales sunt decem rectis: Anguli autem quinque basis B C D E F, æquales sunt sex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; superabunt anguli triangulorum angulos basis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope basin maiores sint angulis basis; (Cum enim angulus solidus B, tribus planis angulis A B C, A B F, C B F, contineatur;* [b] *erunt duo C B A, A B F, qui sunt in triangulis, maiores angulo C B F, qui est in basi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope basin, reliquis angulis in basi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta basin, sex rectis. Reliqui igitur quinque angulum solidum A, constituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales sunt decem rectis, vt dictum est. Eadem demonstratio adhibenda est in aliis omnibus angulis solidis.*

[a] 21. primi

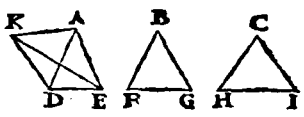
[b] 20. vnde.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet assumpti reliquo sint maiores; comprehendant autem ipsos rectæ lineæ æquales: fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulum constituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus A D, A E, B F, B G, C H, C I, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo sint maiores. Dico ex tribus rectis D E, F G, H I, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum posse constitui; hoc est, trium rectarũ D E, F G,

FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores. Nam hoc posito, [a] ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod.n. duę *DE*, *FG*, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. [b] *Fiat* angulus *DAK*, angulo *B*, æqualis, cadatque primũ AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EA*K*, ex duobus EAD, *DAK*, compositus; quod quidem continget, quãdo duo anguli D A E. & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur *AK*, ipsi *AD*, æqualis, connectanturque rectæ *KD*, *KE*. Quoniam igitur latera A*K*, AD, trianguli *AKD*, æqualia sunt lateribus B*F*, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti *DAK*, & B, æquales; [c] erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli A*KE*, æqualia sunt lateribus C H, C I; & angulus EA*K*, maior angulo C; propterea qđ duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & basis EK, maior basi HI: [e] Sunt autem rectæ ED, D*K*, maiores recta E*K*. Igitur multo maiores erunt E D, D *K*, quam HI. Cum ergo D*K*, ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



[a] *22. primi*

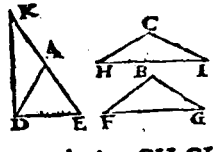
[b] *23. primi*

[c] *4. primi.*

[d] *24. primi*

[e] *20. primi*

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli D*AE*, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturque A*K*, ipsi *AD*, æqualis rursum, & connectatur recta K D. [f] Erit igitur, vt prius, K D, ipsi F G, æqualis. [g] Quoniam vero rectæ ED, *D K*, maiores sunt recta KE; & *KE*, æqualis *est rectis* C H, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, CI: [h] Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt E D, D*K*, quam HI. Cum ergo D*K*, ostensa sit æqualis ipsi F G; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



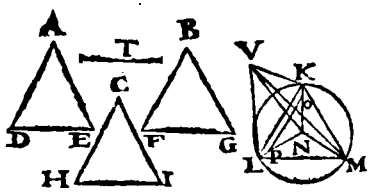
[f] *4. primi.*

[g] *20. primi*

[h] *20. primi*

CADAT postremo AK, ad partes AE, ita vt nec

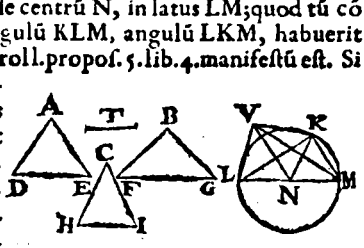
ſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triágulum KLM, ſitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectę FG; & latus
a 5. quarti. KM, rectæ HI, æquale.[a] Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrũ N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritq; quęlibet rectarũ angulos planos cõ prehendẽtium, nępe AD, AE, &c. maior qualibet ductarũ ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrũ N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quãdo triangulũ eſt oxygonium, vt ex coroll. propoſ. 5. lib. 4. cõſtat. Si igitur AD, AE, maiores nõ credãtur, quã NK, NL, erũt vel ęquales, vel minores. Sint ergo æquales. Qm igitur latera AD, AE, trianguli
b 8. primi. ADE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, triãguli NKL; & baſis DE, baſi KL, ęqualis: erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodẽ argumẽto erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cũ igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neque minores. Si. n. minores ſint AD, AE, quã NK, NL, abſcindãtur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniã igitur eſt vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cũ & antecedẽtia inter ſe, & cõſequẽtia ſint inter ſe æqualia; erũt latera NK, NL, triãguli NKL, ſecta proportionaliter; c ac proinde OP,
c 2. ſexti. d 29. primi ipſi KL, parallela erit.[d] Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, ęquales erũt, & triangulũ NOP, triãgulo NKL, æquiangulũ. e Igitur erit vt NK, ad KL, ita
e 4. ſexti. f 14. quinti NO, ad OP. Eſt aũt NK, maior quã NO. f Igitur & KL, hoc eſt, DE, quę ęqualis eſt ipſi KL, maior erit, quã OP. Quocirca cũ latera AD, AE, triãguli ADE, ſint ęqualia lateribus NO, NP, triãguli NOP, & baſis DE, maior baſe OP,



se OP; [a] erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ratione angulus *B*, angulo LNM; & angulus C, angulo MN*K*, maior esse ostēdetur. Cū igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. ppoſ. 15. lib. 1. erūt tres anguli A, B, C, maiores quatuor rectis. Qđ est absurdū. ponūtur. n. quatuor rectis minores. Nō igit minores sūt A*D*, AE, q̄ N*K*, NL; sed neq; æquales. Igit maiores.

[a] 25. primi

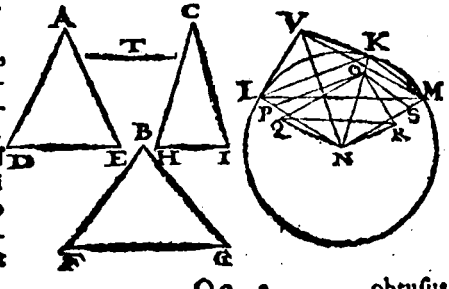
CADAT deinde centrū N, in latus LM; quod tū cō tinget, quādo triangulū KLM, angulū LKM, habuerit rectū, vt ex eodē coroll. propoſ. 5. lib. 4. manifestū est. Si igitur A*D*, A*E*, dicātur esse æquales *ipsis* N*K*, NL; erūt quoq; BF, B*G*, æquales eiſdē NK, NL. Cū ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erūt BF, *BG*, rectæ LM: Posita autē fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, *BG*, æquales quoque sunt rectæ *FG*. [b] Sunt autē & maiores BF, *BG*, quā *FG*. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt A*D*, AE, ipsis NK, NL. Quod ſi A*D*, A*E*, minores credātur, quam NK, NL; erūt quoque BF, B*G*, minores quam N*K*, NL. Cū ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, B*G*, quam recta *LM*: posita autem fuit LM, *ipsi FG*, æqualis. Igitur BF, B*G*, minores quoque sunt recta *FG*. Quod est absurdū, [c] cum sint maiores. Non ergo minores sunt A D, A E, quam N*K*. NL; sed neque æquales: Igitur maiores.



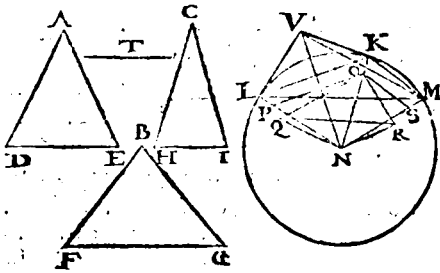
[b] 20. primi

[c] 20. primi

CADAT postremo centrū N, extra triāgulū KL*M*, infra latus LM, qđ demū accidet, quādo angulus LKM, fuerit



obtusus, vt ex coroll. dicto propos. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicãtur *AD*, *AE*, esse æquales ipsis NK, NL; cum &
a *8. primi.* basis DE. basi KL, ponatur æqualis; a erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LMN, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis
8. primi. LM, basi FG, æqualis; b erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiorẽ ostẽdimus esse. Quod est absurdũ. Nõ igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL.



Quod si AD, AE, credant ur esse minores, quã NK, NL; si abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C,
c *23. primi* maior angulo KNM. c Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transeat circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. d Quare cum angulus PON, æqualis
d *29. primi* sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem

autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per constructionem; [a] erit OQ, ipsi DE, hoc est, ipsi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipsi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia sint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt ostendimus: [b] erit basis LM, hoc est, FG, maior basi QR. Quoniam igitur latera BF BG, trianguli BFG, æqualia sũt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & basis FG, maior basi QR; [c] erit angulus B, maior angulo QNR. Rursus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus est æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod est absurdum, cum B, ostensus sit maior angulo QNR. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.

[a] 4. primi.

[b] 24. primi

[c] 25. primi

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores sint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, existat; ponatur recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propos. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale sit quadratis rectarum NK, & T. [d] Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis; connectanturq; rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta est ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM; [e] ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale sit ex constructione, eisdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter se quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rursus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia sunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipsis contenti VNK, VNL, recti; [f] erit basis VK, æqualis basi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales sunt inter se: Ostensa est autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales sunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamob-

[d] 12. vndec.

[e] 47. primi

[f] 4. primi.

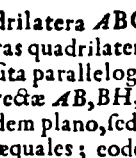
rem, cum latera VK, VL, triãguli VKL, æqualia sint lateribus BD, AE, trianguli ADE; & basis KL, basi DE; [a] erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non secus demõstrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulũ KVM, angulo C, esse æqualem. Quare angulus solidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales sunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

[a] 8. primi.

24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana, parallelogramma sunt, similia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda est propositio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. sex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduersæ quælibet sint parallelæ. Dico quæuis opposita plana esse parallelogramma, similia, & æqualia. Cũ enim parallela plana BG, CF, secentur plano AC; [b] Erunt communes sectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, secentur plano AC; erunt communes sectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum est figura quadrilatera ABCD. Non aliter ostendemus, reliquas figuras quadrilateras esse parallelogramma. Dico iam opposita parallelogramma esse similia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ sint rectis DC, CE, & nõ in eodem plano, sed in oppositis; [c] erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. [d] Quoniam vero AB, ipsi ipsi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipsi CE, in parallelogramo BE, æqualis est; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea



[b] 16. vnde.

[c] 10. vnde.

[d] 34 1 primi

pterea vt BH,ad HG; ita CE,ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum B G, C F, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris A H, D E, [a] cum latera AB,BH,trianguli ABH,æqualia sint lateribus DC,CE, trianguli DCE; [b] & angulus ABH,angulo D C E, æqualis, vt ostensum est; [c] erunt triangula ABH, D C E, æqualia inter se. [d] Quare cum triangula ABH,DCE, dimidia sint parallelogrammorũ BG, CF; erũt parallelogrãma BG,CF,inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogrãma opposita AC,GE;& AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur,aduersa illius plana,parallelogrãma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi
[b] 10. vnde.
[c] 4. primi.
[d] 34. prim.

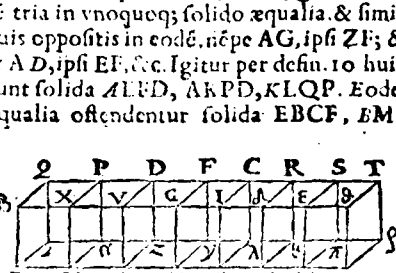
THEOR. 22. PROPOS. 25.

25.

SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD,plano EF, parallelo oppositis planis A D, B C. Dico vt est basis A G, ad basin B G, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum *A*B-C*D*, productũ in vtram que partem quantumlibet, sumanturque in A B, protracta quotcunque rectæ AK,KL, ipsi A E; & quotcunque rectæ B M, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M,N,O,ducantur plana KP, LQ, MR,NS,OT,parallela

lela planis AD, EF, BC, per ſcholiũ ppoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur ſolidum AEFD, cõtinetur planis paralle lis ex hypotheſi; ipſum parallelepipedũ erit, ex *definitio*
a 24. vnde. *ne*, habebitq; plana oppoſita parallelogrãma ſimilia, & æqualia. Eodẽ mõ erũt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, BMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebuntq; plana oppoſita, parallelogrãma ſimilia, & æqualia. Quoniam vero parallelogrãma AG, KV, LX, cũ ſint
b 36. primi ſuper æquales baſes AE, AK, KL, æqualia ſunt; & ſimilia quoq;
c 29. primi cũ anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angu los aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione æqualia, & ſimilia ſunt parallelogrãma AY, KZ, Lα. Cũ igitur æqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogrãma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, ſolidi AEFD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AK-
d 2. vnde. PD; & tribus planis LX, Lα, LQ, ſolidi KLQP: Sũt au tẽ tria in vnoquoq; ſolido æqualia, & ſimilia tribus reli quis oppoſitis in eodẽ, nẽpe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VF; & AD, ipſi EF, &c. Igitur per defin. 10 huius lib. æqualis ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, BMRC, MNSR, NOTS.



Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG (multiplex baſis AG, pri mæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartę magnitudinis,) propterea quod baſibus LG, OG, æqualibus exiſtẽtibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogrã ma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT:

Si

Si autem basis maior est base, solidũ quoq; solido maius est; & si minor, minus; in quacũq; hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 5. lib. 5. vt basis AG, prima magnitudo, ad basin BG, secundam magnitudinẽ, ita solidũ AEFD, tertia magnitudo, ad solidũ BEFC, quartam magnitudinem. Eadẽ ratione demonstrabitur esse solidũ ad solidũ, vt est basis DY, ad basin CY; & vt basis AY, ad basin BY; & vt basis DG, ad basin CG. Si solidũ igitur parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

HAEC propositio accommodari etiã potest omni prismati. Nam si prisma quodcunque plano secetur aduersis planis parallelo; erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. Sit enim primo prisma ABCDEF, cuius plana aduersa sint triangula ABC, DEF; secetur q; plano GHI, aduersis planis parallelo. Dico vt est basis AI, ad basin FI, ita esse solidum ABCIHG, ad solidum FEDIHG. Intelligatur. n. prisma ABCDEF, in vtramq; partem quantumlibet productũ,

& ex AF, protracta vtrinque capiãtur quotcũque recta AK, KL, ipsi AG; & quotcũq; recta FM, MN, NO, ipsi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS; MTV, NXY, OZα, parallela planis ABC, GHI, FED, per scholium propos. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, secantur plano AI; [a] *erunt communes sectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypothesi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum est AI. Rursus quia plana parallela ABC, GHI, secantur plano AH;* [b] *erunt communes sectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum est AH. Eodem modo parallelogrammũ ostẽdetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia sunt lateribus*

[a] 16. vnde.

[b] 16. vnde.

teribus GI, GH, trianguli GHI; [a] cum AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit aequale; [b] & anguli CAB, IGH, sunt quoque aequales, eo quod recta CA, AB, parallela sũt rectis IG, GH, & non in eodẽ plano: [c] Erunt triãgula ABC, GHI, aequalia inter se, & aequiangula. [d] Quare latera circum aequales angulos proportionalia habebunt; Atque idcirco similia erunt. Igitur solidum ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, aequalibus & similibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadẽ arte prismata erunt ABCQPK, KPQSRL; FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO, LRSIHG, OZaIHG. Quoniã vero parallelogramma AI, KC, LQ, aequalia sunt & similia; necnon AH, KB, LP; & CH, QB, SP; erunt omnia plana prismatis ABCIHG, aequalia & similia omnibus planis prismatum ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defin. 10. huius lib. aequalia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione aequalia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYaZO. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZaIHG, prismatis FEDIHG. Quia vero si basis LI, (multiplex basis AI, prima magitudinis) aqualis est basi OI, (multiplici basis FI, secundæ magnitudinis;) aequale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) prismati OZaIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis;) propterea quod basibus LI, OI, existentibus aqualibus, aqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZaIHG: Si autem basis LI, maior est base OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinẽ, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quar-

[a] 34. primi
[b] 10. vnde.
[c] 4. primi.
[d] 4. sexti

tam

tam magnitudinem. Eodem modo ostendetur esse prisma ad prisma, vt est basis AH, ad basin FH: & vt basis CH, ad basin DH. Quod est propositum.

SIT deinde prisma ABCDEFGHIK, cuius opposita plana sint polygona, nempe pentagona, secenturque plano LMNOP. Dico rursus vt est basis CM, ad basin NG, ita esse solidum ABCDELMNOP, ad solidum LMNOPFGHIK. Si enim plana opposita parallela resoluantur in triangula, erit quoq; prisma in totidem prismata, quorum plana opposita sint triangula, resolutum. Quare erit vt basis BP, ad basin MK, ita prisma ABEPML, ad prisma LMPKGF, per ea, quæ demonstrata sunt. Eodem modo erit vt basis CP, ad basin NK, ita prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH; & prisma CDEPNO, ad prisma NOPKHI. [a] Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita est recta EP, ad rectam PK, hoc est, vt CN, ad NH; & vt CN, ad NH, ita est CM, ad NG. Igitur prismata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad prismata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandē inter se. [b] Vt autem vnū ad vnū, ita se habent omnia ad omnia. Igitur erit vt prisma BCEPMN, ad prisma MNPKGH, hoc est, vt basis CM, ad basin NG; ita prisma ABCDELMNOP, ex tribus compositum ad prisma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod est propositum. Eadem prorsus erit demonstratio in quocunque alio prismate.

POTEST tamen hoc idem in omni prismate ostēdi de monstratione, qua vsi sumus in prismate habente plana opposita, triangula similia. Si enim eadem fiat constructio, producto prismate in vtramque partem, erunt omnia plana parallela secantia, inter se æqualia, & similia; [c] propterea quod latera eorum sunt parallela, nempe communes sectiones parallelorum planorū; [d] ac proinde angulos æquales cōprehendūt, &c. Vnde, vt prius, ostendentur prismata ex vna parte inter se æqualia, necnon & prismata ex altera parte, &c.

[a] 1. sexti.

[b] 12. quin.

[c] 16. vnde.

[d] 10. vnde.

COROL-

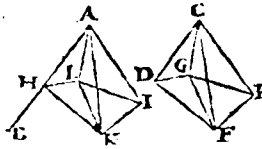
COROLLARIVM.

EX his infertur, si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectionem esse figuram æqualem & similem plani oppositis: Veluti demonstratum est, in priori prismate, triangulum G H I, æquale esse & simile triangulo A B C, atque adeo triangulo D E F. Eadem enim in omnibus est demonstratio. Idem dices de parallelepipedo.

26. PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiusque punctum angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, constituendus angulus solidus æqualis angulo solido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano existentibus. [a] Ducatur ex F, ad planũ per CD, CE, ductum perpedicularis F G; connectanturq; rectæ D F, D G, E F, EG, CG. Deinde abscindatur AH, æqualis ipsi CD, [b] fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rursus in plano per AH, AI, ductũ cõstituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano p CD, CE, ducto existit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. [c] Ex L, vero ad planũ, in quo sũt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LA, quæ ipsi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulũ solidũ A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem esse dato angulo solido C. Connexis. n. rectis HK, HL, IK, IL; cũ latera AH, AL, triãguli AHL,



[a] 11. unde.
[b] 23. primi.
[c] 12. unde.

AHL, æqualia sint lateribus CD, CG, triāguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per constructionem; Erūt bases HL, DG, æquales. Rursus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales sunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia sint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per constructionem; b æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia sunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF, recti, ex defin. 3. huius lib. c erūt & bases HK, DF, æquales. Quare cū & latera AH, AK, triāguli AHK, sint æqualia lateribus CD, CF, triāguli CDF, ex cōstructione. (cū n. AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia sint ex constructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos ex defin. 3. huius lib. d erunt bases AK, CF, æquales.) e Erūnt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, sunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli ILK, EGF, recti. ex defin. 7. huius lib. Erunt bases IK, EF, æquales: Cū igitur & latera AI, AK, triāguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, sint æqualia ex constructione; g Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, solidū angulum A, componētes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum solidum C, componentibus; Atq; proinde solidus angulus A, solido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituimus solido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

a 4. primi.
b 4. primi.
c 4. primi.
d 4. primi.
e 8. primi.
f 4. primi.
g 4. primi.

SCHOLIVM.

QVOD si angulus solidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, subtendenda erunt omnibus angulis planis recta in vno eodemq; existentes plano (in eo scilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum secet) ita vt figuram planam polygonam constituant, pyramisq; quadam multilatera efficiatur. Si enim figura polygona in triangula resoluatur, habebuntur tot pyramides trilatera, quot triangula

triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantursquorum quilibet tribus angulis planis cõtinetur; constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sunt angulis planis rectæ BC, CD, DE. EF, FB, vt fiat pẽtagonum BCDEF, quod in tria triãgula resoluatur BCF. FCD DEF. Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis BAC, CAF, FAB, constituendus solidus angulus æqualis G, cõtentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH Et solido angulo A, contento tribus planis angulis CAF, FAD, DAC, æqualis solidus angulus G, cõtentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis DAE, EAF, FAD, æqualis solidus angulus G, cõtẽtus tribus plants angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.

27. PROBL. 5. PROPOS. 27.

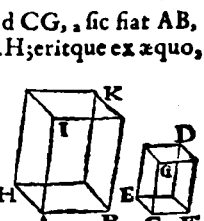
A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT a data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum parallelepipedo CD.

[a] Fiat ad rectam AB, eiusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis ECG, GCF,

[a] 26. vnde.

GCF, FCE. Deinde vt est CF, ad CG, sic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH; eritque ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. [a] 12. sexti.



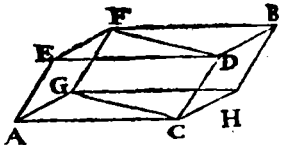
Post hæc, perficiatur parallelepipedum AK, completis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela sint parallelogrāmis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, simile esse similiterq; positum. Cum enim anguli BAH, FCE, sint æquales, & latera circa ipsos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex constructione; erunt parallelogramma HB, EF, similia, similiterq; posita. Eadem ratione similia erunt, similiterq; posita parallelogramma HI, EG; & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, solidi AK, similia sunt, similiterq; posita tribus planis FE, EG, GF, solidi CD. [b] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & similia tribus reliquis oppositis. Quare sex plana solidi AK, similia sunt, similiterq; posita sex planis solidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. similia sunt, similiterq; posita, solida AK, CD. A data ergo recta linea, dato solido parallelepipedo simile, & similiter positum solidum parallelepipedum descripsimus. Quod erat faciendum. [b] 24. vnde.

THEOR. 23. PROPOS. 28. 28.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bifariam secabitur solidum ab ipso plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana opposita sint AH, EB, quorum diagonij, seu diametri, sint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela est, [c] & æqualis ipsi AE, cum sint parallelogramma [c] 34 primi

[a] 9. vndec. CE, GE; [a] erunt & inter se parallelæ, & æquales CD, [b] 33. primi GF. [b] Ac proinde, quæ ipsas coniungunt CG, DF, parallelæ erũt, & æquales, ideoque in vno plano. Dico pla-



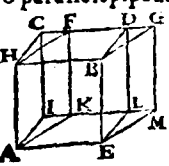
num, quod per CG, DF, ducitur, secare bifariam parallelepipedum AB. [c] 24. vnde. Cum enim plana AH, EB, sint parallelogramma æqualia, & similia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter se: Sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED, [d] 16. sexti. DBF, proportionalia. [d] Igitur similia quoque erunt dicta triangula. [e] 24. vnde. Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale sit & simile parallelogrammo CB; & AD, ipsi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, prismatis ACGFED, æqualia & similia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CB, BG, CF, prismatis HGCDBF; propterea quæ prismata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, sectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

29. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda super eãdem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ in ijsdem collocantur rectis lineis: sunt inter se æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes in ijsdem collocentur lineis,

neis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se equalia.



[a] Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisdem parallelis constituta; erunt, ablato cõmuni trapezio AELK, equalia quoq; triangula AIK, ELM. Quoniam vero omnia latera triãguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; [c] Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. [d] Rursus parallelogrammum AC, æquale est, & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG; [e] Sed & IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint equales. (f Nam cum rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoq; inter se æquales; quare cõmuni dempta KL, equales erunt IK, LM.) Erũt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, equalia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erũt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, equalia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 35. primi

[b] 34. primi

[c] 4. sexti.

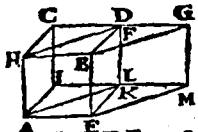
[d] 24. vndo.

[e] 36. primi

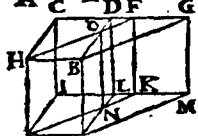
SCHOLIVM.

HAEC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere mediis, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, vt ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eodem modo demonstrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis aqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula AIK,

ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.



IN tertio vero casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, demantur triangulum commune ANE, erũt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB; a quibus si auferatur prisma commune KLNODF; (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO.) remanebit solidum cõprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH; fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.



30. ## THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neq; CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia.

æqualia. Cum enim plana CD, EF, opposita basi AB, sint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ CG, ID, quarum CG, secet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, easdem in punctis P, Q; adiungantur; rectæ AN, KO, HP, BQ. a Quia igitur rectæ PQ, MF, sunt æquales, cum opponátur in parallelogrammo FP; & MF, ipsi HB, est æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammũ HIDB. b Igitur & HP, BQ, parallelæ sunt & æquales, ideoque parallelogrammum est HPQB. Eadem ratione parallelográma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Est autem & pallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum est APQK. c Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale est parallelepipedo APQK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriusque eadem sit basis AB, & insistentes lineæ sint in rectis eisdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter se sunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

a 34. primi

b 33. primi

c 29. vndec.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propositio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia super eandem basin, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine.

NAM si vnũ dicatur altius; si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia

[a] 29. vel 30. undec.

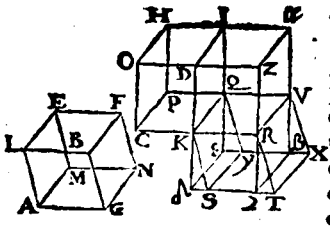
Abſciſſum. & reliquum. a Cum igitur & totũ huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abſciſſum toti. quod eſt abſurdum.

31. 32.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

SVPER æquales baſes AB, CD, in eadẽ altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hęc parallelepipeda eſſe æqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtentes CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD. perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictę perpendiculares inter ſe æquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, ſitque KR, æqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo æqualis angulo BLA, ponaturq; KS, æqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, æqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, æqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, æqualia ſunt lateribus LE, LA, & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectę ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogrâma QS, EA, æqualia & ſimilia. Eodem modo cũ latera KR, KQ, æqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, æqualia & ſimilia. [b] Quare cum tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, æqualia ſint & ſimilia tribus planis LG, EA,



[b] 24. unde.

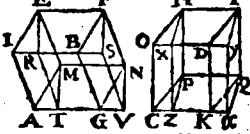
EA, LF, parallelepipedi AEFG; [a] tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia. [a] 24. unde.

CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ; & IQ, XY, in ε, compleaturque parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & QD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qδγ V, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ; QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eisdem rectis δT, εX; [b] ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V. [b] 29. unde.

[c] QVONIAM vero parallelogrãma KT, Kγ, æqualia sunt inter se; & KT, æquale est ipsi LG, erit & Kγ, ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales. [d] Quare erit, vt CD; ad DR, ita Kγ, ad DR: [e] Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KIαR; cũ parallelepipedũ CHαR, secetur plano IK, planis oppositis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita est solidũ Qδγ V, ad solidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, secetur plano KV, oppositis planis Dα, δβ, parallelo. [f] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qδγ V; cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα. Quare cum parallelepipedũ Qδγ V, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum. [c] 35. primi. [d] 7. quin. [e] 25. unde. [f] 9. quinti.

SINT iam neque insistẽtes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; neque CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares: [g] Et a punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares; Item a punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autem omnes hæ perpẽdiculares inter se æquales, cũ sint altitudines dictorum parallelepipedorũ æquales. Ducantur re- [g] 11. unde.

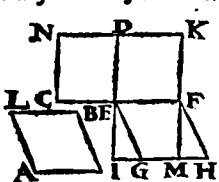
ctæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est.* Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK, cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.



* 29. vel 30 vndec.

SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L; & recta EF, recta LB; & recta EG, recta LA, ponaturque æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur paralle-



parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur ſuper baſes EH, IF, EK, conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper AB, CD, conſtructis; ſintque inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper EH, æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper AB, ex defin. 10. huius lib. cum plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem: [a] Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper EH, IF, cum habeant baſin eandem, cuius infimum latus EF, erectam ſuper planũ IK; Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima GH, IM, in eodem plano, cuius infimum latus IH; atque inſiſtentes lineas EG, FH, EI, FM, &c. in eiſdem rectis lineis IH, &c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper IF, parallelepipedo ſuper AB. [b] Quoniam vero parallelogramma EH, IF, æqualia ſunt; & EH, æquale eſt ipſi CD: æqualia erunt IF, CD. [c] Erit igitur, vt IF, ad EK, ita CD, ad EK: [d] Eſt autem vt IF, ad EK, ita ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper EK, quod ſolidum ſuper IK, ſecetur plano ſuper EF, erecto parallelo planis ſuper DK, IM, erectis. Et eadem ratione, vt CD, ad EK, ita ſolidum ſuper CD, ad ſolidum ſuper EK, cum ſolidum ſuper CK, ſecetur plano ſuper DE, erecto parallelo planis ſuper CN, FK, erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper IF, ad ſolidum ſuper EK, ita ſolidum ſuper CD, ad ſolidum ſuper EK; [e] Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper IF, & CD. Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper IF, æquale parallelepipedo ſuper AB. Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper AB, CD. Quod eſt propoſitum.

[a] 29. vnde.
[b] 35. primi
[c] 7. quinti.
[d] 25. vnde.
[e] 9. quinti.

CONVERTETVR quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin:

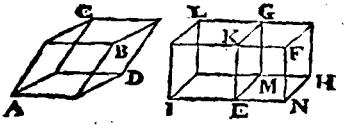
SI enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine,
[a] *31. unde.* *[a] fient aequalia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur aequale alteri; aequale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior basi alterius, si ab ea abscindatur basis aequalis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo, partem toti esse aequalem. Quod est absurdum.

33. THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudines super bases AB, EF. Dico esse solidum
[b] *45. prim.* ad solidum, vt est basis ad basin. [b] Super rectam enim EK, constituatur parallelogrammum IK, aequale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui sit aequalis angulo ENF. Constituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum vnum FI, vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturq; totū vnū parallelepipedū IFLH;
[c] *31. unde.* [c] erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, aequalia, cū habeāt aequales bases, per constructionē AB, IK; & eandē altitudinē, ex hypothesi.
[d] *7. quinti* [d] Quare erit vt solidum IKLM, ad solidū EFGH, ita solidum ABCD, ad
[e] *25. unde.* solidum EFGH: [e] Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, vt basis IK, hoc est, illi aequalis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidū ABCD, erit ad solidū EFGH, vt ba-



vt basis A B, ad basin E F. Solida ergo parallelepipeda sub eadem altitudine inter se sunt, vt bases. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

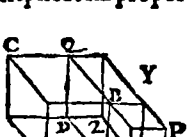
CONVERSO modo, si solida parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. Si enim non eadē credatur altitudo; ex maiori abscindatur minori aequalis, & ducatur planum basi parallelum; [a] *eritq; vt basis ad basin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abscissum: sed sic quoque erat ad totum.* [b] *Abscissum ergo aequale est toti. Quod est absurdum.*

[a] 32. vnde.
[b] 9. quin.

THEOR. 28. PROPOS. 33. 36.

SIMILIA solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

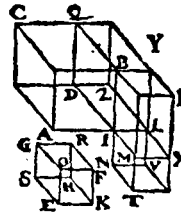
SINT similia parallelepipeda A B C D, E F G H, super bases similes AB, E F, in quibus latera homologa sint AI, EK. *Dico* proportionē parallelepipedi ABC D, ad parallelepipedum E F G H, esse triplicatam proportionis laterum homologorum *AI*, E*K*. Producatur enim AI, ad L, & sit IL, æqualis ipsi EK, vel GR; Item *D* I, ad M, & sit *IM*, æqualis ipsi HK, vel GO; Item BI, ad N, & sit IN, æqualis ipsi *K*F, vel GS. Deinde cōpletis parallelogrammis L *M*, L N, I T, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, I M, æqualia sunt lateribus GR, G O; [c] & anguli cōtenti æquales, cū angulus L IM, sit æqualis angulo AI *D*, qui ob similitudinem parallelepipedorum æqualis



[c] 15. primi

æqualis eſt angulo EKH, ſeu RGO; erunt parallelogrâ ma IX,GF, ſimilia & æqualia. Eadem ratione ſimilia erunt,& æqualia LN,RS; item IT,GE. Quare tria plana IX,LN,IT, parallelepipedi TXIV, ſimilia ſunt & æqua lia tribus planis GF,RS,GE,pa rallelepipedi EFGH: [a] Sunt au tem tria cuiuſq; ſimilia & æqua lia tribus reliquis oppoſitis. Igi tur æqualia ſunt & ſimilia paral lelepipeda TXIV, EFGH, ex

[a] 24.vnde.



defin. 10.huius lib. Rurſus com pletis parallelogrammis MB, BL,LM,perficiatur parallelepi pedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY,DL,IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem paral lelepipedorũ ABCD, EFGH, eſt vt AI, ad EK,hoc eſt, ad IL, ita DI, ad HK,hoc eſt,ad IM; & BI, ad FK, hoc eſt, ad IN. [b] Vt autem AI, ad IL, ita eſt parallelogrammum AD,ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & vt BI, ad IN, ita parallelogrammum BL,ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad LM;& BL, ad LN. [c] Sed vt AD,baſis ad DL, baſin, ita eſt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & vt baſis DL, ad baſin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP;& vt baſis BL, ad baſin LN, ita parallelepipedũ LMBP, ad parallelepipedũ LNTX. Quare erit,vt parallelepipedũ ADCB,ad parallelepipedũ DLYQ, ita parallelepipedũ DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP,& parallelepipedum LMBP,ad parallelepipedũ LNTX. Ac ꝓinde quatuor quantitates ſunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; ꝓportio primæ ADCB, ad quartã LNTX,hoc eſt,ad EFGH, erit triplicata ꝓportionis primę ADCB, ad ſecundam DLYQ, ex defin.10. lib. 5. [d] Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita eſt baſis AD, ad baſin DL; [e] Et vt AD,ad DL, ita eſt recta AI, ad IL, hoc eſt, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB,ad parallelepipedum EFGH, eſt triplicata proportionis homologo-

[b] 1.ſexti.

[c] 32.vnde.

[d] 32.vnde.

[e] 1.ſexti.

mologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter ſimilia ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonſtrandum.

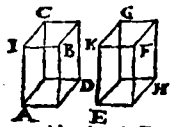
COROLLARIVM.

EX hoc perſpicuum eſt, ſi fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſſe parallelepipedum ſuper primam deſcriptum ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonſtratum eſt, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam proportionis primæ lineæ ad ſecundam, nimirum laterũ homologorum.

THEOR. 29. PROPOS. 34. 34.35.

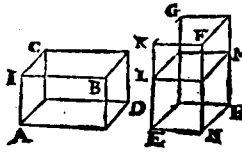
AEQVALIVM ſolidorum parallelepipedorũ baſes, & altitudines reciprocantur; Et quorum ſolidorum parallelepipedorum baſes, & altitudines reciprocantur; Illa ſunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, ſuper baſes AD, EH. Dico baſes AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AD, ad EH, ita altitudinem ſolidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primũ inſiſtentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad baſes AD, EH, ita vt AI, EK, ſint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, ſunt æqua-



æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholiũ propoſ. 15. huius lib.



[a] 7. quinti. Quoniã igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL; Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadẽ ratione, baſis KN, ad baſin LN; cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eãdem habeant altitudinem, ſi nimirũ baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: [c] Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.

[b] 32. vnde.

[c] 1. ſexti.

SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

[d] 31. vnde.

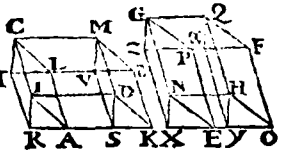
QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelũ baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad baſin

[e] 32. vnde.

basin EH, ita est solidum ADCB, ad solidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; [a] Et vt EK, ad EL, ita est KN, ad LN; [b] Vt autem basis KN, ad basin LN, ita est solidum DHGF, ad solidum EHML, cū solida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, si bases ponantur KN, LN; erūt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; Erit vt solidum ADCB, ad solidum EHML, ita solidum EHGF, ad idem solidum EHML; [c] ideoque æqualia erunt solida ADCB, EHGF.

[a] 1. sexti.
[b] 32. vnde.
[c] 9. quinti.

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum insistētes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non sint perpēdiculares ad bases AB, EF. Demittantur autē a punctis I, D, M, C, ad planū basis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; Ité a pūctis N, H, Q, G, ad planum basis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntq; perpēdiculares RI, XN, parallelepipedorū altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rursus, vt basis AB, ad basin EF, ita esse altitudinē XN, ad altitudinē RI. [d] Cū enim æqualia sint solida ABCD, EFGH, ex hypothesi, sit autem ABCD, æquale solido RVCD, quod habeant eandem basin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadē ratione, æquale solido XαGH: Erunt & parallelepipeda RVCD, XαGH, æqualia. Quare cum habeant insistentes lineas perpendiculares ad bases CD, GH; erit, vt iam demonstratum est, vt basis CD, ad basin GH, hoc est, vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea bases & altitudines sunt reciprocæ.



[d] 29. vel 30. vndec.

SINT iam bases atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda esse æqualia. Constructa enim figura, vt prius; Cum sit vt basis AB, ad basin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; [e] Sit autem AB, ipsi CD, & EF, ipsi GH, æqualis; erit quoque vt basis CD, solidi RVCD, ad basin

[e] 24. vnde.

basin GH, solidi XαGH, ita altitudo XN, ad altitudinē RI. Quare cum XN, RI, sint insistentes lineæ, perpendiculares ad bases C D, G H; erunt, vt iam ostensum est,
[a] 29. vel 30 vndec. æqualia parallelepipeda RVC D, XαG H. [a] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualis. Igitur æqualia quoque erunt parallelelepipeda ABCD, EFGH: Idemque ostendetur si insistentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quam ob rem, Aequalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

OMNIA hac, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædicta hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases exi-
[b] 29. 30. vel 31. vndec. *steneia,* [b] *Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda, ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.*

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adiiciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo
[c] 32. vnde. *parallelepipeda eiusdem altitudinis.* [c] *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin;* [d] *Atque*
[d] 15. quin. *adeo prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin. si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.*

PRAETEREA, si duobus prismatis præfatis similibus addātur alia duo prismata illis æqualia & similia, con-
[e] 33 vnde. *stituentur duo parallelepipeda similia,* [e] *quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.*
[f] 15. quin. [f] *Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant*

habeant proportionem cum parallelepipedis, proportionem habebunt triplicatã proportionis eorundem laterum homologorum, quæ quoque ſunt latera homologa priſmatum.

DENIQVE ſi dictis duobus priſmatis æqualibus adiungantur alia duo priſmata illis æqualia & ſimilia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cum priſmatis. Quare cum baſes, & altitudines parallelepipedorum ſint reciprocæ; & baſes priſmatum eadem ſint, vel certe triangula earum dimidia eandem habentia proportionem; Erunt quoque baſes priſmatum & eorum altitudines reciprocæ.

[a] 34. vnde.

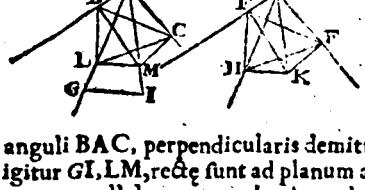
[b] 15. quin.

THEOR. 30. PROPOS. 35. 37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In ſublimibus autẽ lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus conſiſtunt anguli primum poſiti, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ poſitos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum ſublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, inſiſtant extra ipſorum plana, ſublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, ſit æqualis: a ſumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demit

tantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, existunt perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectę IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, esse æquales inter se. Nã si AG, DH, sunt inæquales, auferatur a maiori AG, ipsi DH, æqualis linea AL; & ex L, ad planum



anguli BAC, perpendicularis demittatur LM. Quoniã
[a] 6. vndec. igitur GI, LM, rectę sunt ad planum anguli BAC; [a] ipsæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli AGI. Quare LM, cadet in rectam AI. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF; & connectantur rectę BC, BL, LC, EF, EH, HF. Et quia LM, recta est ad planum anguli BAC, ipsa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin.
[b] 47. primi 3. huius lib. [b] Quare quadratum rectæ AL, æquale erit
[c] 47. primi quadratis rectarum AM, ML: [c] Est autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus sit, ex constructione. Quadratum ergo rectæ AL,
[d] 47. primi æquale est quadratis rectarum AC, CM, ML: [d] At quadratis rectarum CM, ML, æquale est quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus
[e] 48. primi sit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectę AL, æ-
[f] 47. primi quale est quadratis rectarum AC, CL; [e] Ac proinde an-
[g] 47. primi gulus ACL, rectus erit. [f] Rursus quia quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AM, ML: [g] Est autem quadratum rectę AM, æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per constructionem, sit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale est quadratis rectarum AB, BM, ML:
[h] 47. primi [h] At quadratis rectarum BM, ML, æquale est quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, sit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ
[i] 48. primi AL, æquale est quadratis rectarum AB, BL; [i] propterea-que angulus ABL, erit rectus. Non aliter ostendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL,

LAB,

LAB; triāguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; [a] Erūt & reliqua latera AB, BL, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erūt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cū latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales, ex hypotheſi; [b] erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE æquales: Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales, cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; [c] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK, ſunt recti; [d] erunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: [e] Quia vero quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti ſint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarū EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia ſunt, quod rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt, ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, æqualis; [f] erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 26. prim.
[b] 4. primi.
[c] 26. primi
[d] 4. primi.
[e] 47. primi
[f] 8. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtāt, quæ cū lineis primo poſitis angulos contineāt æquales, vtrūque vtrique. Erunt a punctis extremis

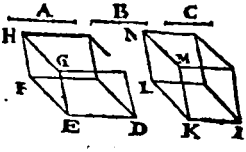
linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE; Item LAC, HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

38. **THEOR. 31. PROPOS. 36.**

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A, B, C. Conſtituaturque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque *DEF*, *DEG*, FEG, ita vt recta *DE*, ipſi A; & EF, ipſi *B*; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, G*D*, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. * Deinde ad rectam I *K*, eiuſque punctum *K*, fiat ſolidus angulus *K*, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis *IK*L, I*K*M, L*K*M, qui æquales ſint tribus D E F, *DEG*, FEG; ita vt rectę *IK*, *K* L, *K* M, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum *I*N; quod contineri dicitur ſub linea *B*, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cum enim ſit vt DE, ad *IK*, ita

* *26. vnde.*



ita KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: Erunt parallelogramma DG, IM, æqualia, propterea quod latera habẽt circa æquales angulos reciproca. Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorũ vertícibus insistunt sublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos cõprehendũt cũ lineis primo positis, ex constructione, vtrũq; vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, inimirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll. propos. præcedentis. [b] Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeãt bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 14. sexti.

[b] 31. unde.

SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum DH, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo IN, descripto a media B. Dico tres A, B, C, esse continue proportionales. Nam veluti prius, ostendentur eorum altitudines ex F, l, demissæ esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases DH, IM, æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. huius lib. demonstrauimus. Quæ bases cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex cõstructione; [c] habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, vt DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cũ DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum.

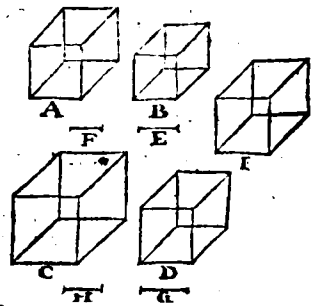
[c] 14. sexti.

PROBL. 32 PROPOS. 37. 39.

SI quatuor rectę lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda,

quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineę proportionales erunt.

SINT quatuor rectę proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D; conſtituanturque ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & B, ſimilia, ſimiliterque deſcripta; item ſuper C, & D, alia duo C, & D, ſimilia ſimiliterque poſita, ſiue hæc ſint illis ſimilia, ſiue non. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportonalia; Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Inueniantur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duę continue proporti onales E, F; Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſunt quatuor lineę A, B, E, F, & quatuor lineę alię C, D, G, H, quę binæ in eadem ratione ſumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B; Et vt C, ad H, ita ſolidũ C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum D, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.



SINT iam e contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoque proportionales. Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, ſuper quam deſcribatur parallelepipedũ ipſi D, vel C, ſimile, ſimiliterque poſitum; Quoniam igitur

a 12. ſexti. b 27. vnde.

tur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit vt solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. [a] Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quę cum sint similia, similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum. [a] 9. quinti.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. [b] Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatę sunt proportionum æqualium, nempe rectę A, ad rectam B, & rectę C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, vt recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [c] Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatę, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum. [b] 33. undec. [c] 33. undec.

SCHOLIVM.

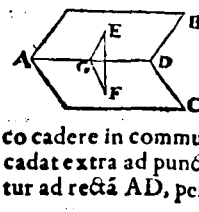
EODEM modo, si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia similiterque descripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiusque solidum sumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor solida proportionalia, vt demonstratum est. Cum igitur solidum secundæ lineæ æquale sit solido tertiæ lineæ; & linea secunda æqualis tertiæ lineæ; perspicuum est, quod proponitur.

TOTA vero hæc propositio conuenit etiam prismatis, quorum duo plana aduersa æqualia, sunt vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis prismatis, quæ singula singulis sint æqualia, exurgent parallelepipeda, quæ vt hic est demonstratum, proportionalia erunt. [a] *Cum igitur prismata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipsis proportionem; perspicuum est, quod proponitur.*

[a] *15. quin.*

13. ## THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno sunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM enim AB, rectum sit ad planum AC, sitque eorum communis sectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpendicularis demittatur: quæ di co cadere in communem sectionem AD. Nam si fieri pôt, cadat extra ad punctum F, [b] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectã AD, perpendicularis FG, connectaturq; recta EG,

[b] *12. primi*

EG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis est ad communem sectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Est autem & EF, recta ad FG, per eandē 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti sunt. quod est absurdum; [a] cum duobus rectis sint minores. Perpendicularis ergo ex E, demissa ad planum AC, non extra communem sectionem AD, cadet. ergo in ipsam cadat, necesse est. Quamobrem, si planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 17. primi

SCHOLIVM.

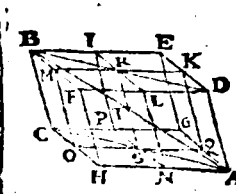
HÆC est demonstratio Theonis. Nos tamen idem demonstrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB, demissa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem sectionem AD, sed in punctum F, extra sectionē; [b] ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ sunt ad ipsum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in scholio propos. 13. huius lib. demonstrauimus.

[b] 12. primi

THEOR. 34. PROPOS. 39. 40.

SI solidi parallelepipedi eorum, quę ex aduerso, planorum latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariam se mutuo secabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana opposita AC, BD, quorum omnia latera bifariam secta sint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quę extēsa sint duo plana IN, KO, quorum



quorum sectio communis sit recta RS: Ducatur item diameter AB. Dico rectam RS, & diametrum AB, se mutuo secare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA, SC; considerentur duo triangula AQS, COS. Quoniam igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia sunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH; [a] & QS, OS, duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum sint parallelogramma AS, HS.) [b] & angulus AQS, æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & bases AS, CS, æquales; & anguli ASQ, CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO, æquales sunt duobus rectis. Igitur & CSO, ASO, duobus sunt rectis æquales. [e] Ac propterea AS, CS, vna recta lineam constituent. Eodem modo ostendentur esse æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam. Rursus quia vtraq; AD, BC, parallela est, & æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, [f] ipsæ quoq; inter se parallelæ erunt, & æquales. [g] Quare & rectæ AC, BD, earum extrema coniungentes, parallelæ sunt & æquales; Ac proinde ipsarum dimidiæ AS, BR, æquales sunt. Quia vero AC, BD, parallelæ sunt; [h] erunt rectæ AB, RS, in eodem cum ipsis plano, ideoque se mutuo secabunt, in puncto videlicet T. [i] Cum autem duo anguli AST, ATS, trianguli AST, æquales sint duobus angulis BRT, BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: [k] Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR, æqualia; Ac propterea AB, RS, se mutuo secant bifariam in T. Si igitur solidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerso, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 34. primi
[b] 29. primi
[c] 4. primi
[d] 13. primi
[e] 14. primi
[f] 9. vndec.
[g] 33. primi
[h] 7. vndec.
[i] 29. & 15. primi.
[k] 26. primi

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes se mutuo bifariam secare in vno puncto. nimirum in puncto T, in quo bifariam dimidiunt, vt hic demonstratum est, rectam RS.

HVIC

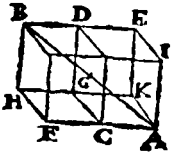
SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi poteſt aliud non diſſimile illi, quod ad propoſ. 34. primi lib. demonſtrauimus, videlicet.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum: bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam: per centrum tranſibit ipſum planum.

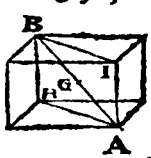
SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc eſt, per punctum medium diametri AB, quod ſit G. Dico parallelepipedum bifariam ſecari. Sit enim primo planũ CD, oppoſitis planis AE, BF, parallelum. [a] *Et quia plana parallela BF, DC, EA, ſecant rectas quaſcunque proportionaliter; ſecatur autem BA, bifariam in G; ſecabuntur quoque latera aduerſorum planorum AH, BI, atque adeo & baſes AH, BI, bifariam.* [b] *Cum igitur ſit vt baſis KC, ad baſim CH; ita ſolidum AD, ad ſolidum CB; erit parallelepipedũ AB, ſectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*

[a] 17. vnde.



[b] 33. vnde.

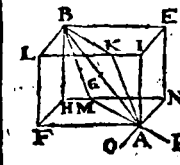
TRANSEAT secundo *planum ſecans AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppoſitorum; quoniam & ſic ſecatur parallelipipedum per centrum G, immo per totam diametrum AB;* [c] *cũ AB, in plano ſit parallelarum AH, BI.* [d] *Demonſtratum autem eſt antea, parallelepipedum ſecari plano per diametros oppoſitorum planorum ducto bifariam.*



[c] 7. vndec.
[d] 28. vnde.

TERTIO planum ſecans AKBM, neque ſit aduerſis planis parallelum, neque per diametros oppoſitorum planorum ductum, ſed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, ſecantur plano AKBM; [e] *erunt communes ſectiones AM, BK,*

[e] 16. vnde.

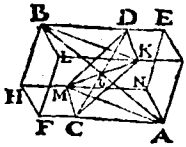


BK, *parallela*. *Similiter parallela erunt* AK, BM, *cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum* AL, BN, *facta a plano* AKBM. *Quare parallelogrammum eſt* AKBM; [a] *ideoq; tam recta* AK, BM, *quã recta* AM, BK, *inter ſe erunt æquales*. *Quia ergo latera* BK, BL, *triãguli* BKL, *æqualia ſunt lateribus* AM, AN, *triãguli* AMN; *& angulus* KBL, *angulo* MAN, *æqualis*. (*Productis enim* NA, MA, *ad* O, P, *erunt* AO, AP, *rectis* BL, BK, *parallelæ*; [b] *ac proinde æquales anguli erunt* OAP, LBK. [c] *Cum igitur* OAP, *æqualis ſit angulo* MAN; *æquales quoque erunt anguli* KBL, MAN.) [d] *Erunt baſes* KL, MN, *inter ſe*, *& anguli* BKL, BLK, *angulis* AMN, ANM, *æquales*; *& triangulum triangulo æquale*. *Quare & ſimilia erunt triangula* BKL, AMN; [e] *cum latera habeant circa æquos angulos proportionalia*. *Quonã vero recta* KL, *rectæ* MN; *& angulus* BKL, *angulo* AMN; *& angulus* KBL, *angulo* MAN, *eſt æqualis, vt oſtendimus; erit & reliqua* IK, *reliquæ* HM; *& reliquus angulus* BKI, *reliquo* AMH; *& reliquus* KBE, *reliquo* MAF, *æqualis*. (*Eſt enim tota* LI, *toti* NH, *æqualis, & tam anguli* BKL, BKI, *quam anguli* AMN, AMH, *duobus rectis æquales; & totus angulus* LBE, *toti angulo* NAF, *æqualis, ob ſimilitudinẽ parallelogrammorum* LE, FN.) *Sunt autem & latera* BE, EI, *lateribus* AF, FH, *æqualia; & anguli* BEI, EIK, *angulis* AFH, FHM, *ob parallelogramma* LE, FN. *Igitur quadrilaterum* BKIE, *& æquilaterum, & æquiangulum eſt quadrilatero* AMHF; *Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula ſingulis conueniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis*. *Eodem modo æqualia erunt & ſimilia triangula* BHM, AIK; *& quadrilatera* AKLF, BMNE; *cum inter ſe ſint & æquilatera & æquiangula*. *Quapropter ſolidum contentum planis* AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LEHF, *æquale erit ſolido contento planis* BMNE, EIKB, RMAK, KIA, AMN, NAIE, *per* 10. *defin. huius libri, cum his planis illa ſint ſimilia & æqualia, vt demonſtratum eſt*. *Parallelepipedum ergo* AB, *ſectum eſt plano* AKBM, *per centrum* G, *biſariam*.

[a] 34. primi
[b] 10. unde.
[c] 15. primi
[d] 4. primi
[e] 4. ſexti

PO-

POSTREMO planum secans CD, neque aduersis planis parallelum sit, neque per diametros planorum oppositorum, neque per vllos angulos eorum ductum, sed vtcunque secet plana opposita AHBI. Ostendemus autem, vt prius, planum secans CD, esse parallelogrammum, & tam rectas CK, DM, quàm rectas CM, DK, esse æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; conectanturq; rectæ AM, BK, quæ parallelæ erunt, cum sint communes sectiones planorum parallelorum AH, BI, facta a plano per rectas AB, KM, ductio. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipsi LI, ob parallelogramma AL, LE, [b] inter se sunt parallelæ; [c] Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea se mutuo secabunt in cẽtro G. In solo enim centro G, recta AB, per hypothesim, secat planum CD, in quo existit recta CD. Simili argumento, cũ AM, BK, sint ostensæ parallelæ; erunt AB, MK, in eodem cum illis plano, seque mutuo secabunt in centro G. Quare diametri CD, KM, per centrum G, transibunt, ibique se mutuo secabunt; atque adeo bifariam, per ea, quæ ad propos. 34. lib. 1. ostẽdimus. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia sunt lateribus AG, GC, trianguli AGC; [d] & angulus BGD, æqualis angulo AGC; [e] Erit & basis BD, æqualis basi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia sint tribus lateribus AC, CM, MA, triãguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propos. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Est autem totus DBL, toti CAN, æqualis, ob similitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniã igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia sunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; [f] Erit & basis KL, basi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum est, & æquiangulum; Ac propterea æquale & simile, cum singula



[a] 16. vnde.

[b] 9. vndec.
[c] 7. vndec

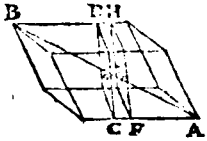
[d] 15. primi
[e] 4. primi

[f] 4. primi

conte-

conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est aqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, aqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterũ DEIK, aquilaterum est quadrilatero CFHM: Sed & aquiangulum; cum anguli DEI, EIK, æquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum EI, AH; & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, BDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DEIK, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia quadrilatera ACKI, BDMH; Item DENM, CFLK, cum & latera lateribus, & anguli angulis conueniant, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. defin. huius lib. æquale est solido contento planis DMNE, EIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur AB, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.

SED secetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, secabitur parallelepipedum AB, bifariã plano FH, vt demonstratum est. Penitur autem & bifariam secari plano CD; Igitur solida CB, FB, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdũ. Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi.



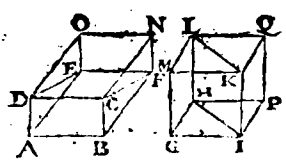
Quod demonstrandum erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40.

41.

SI fuerint duo prismata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat basin, parallelogrammum; illud vero, triãgulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipsa prismata.

SINT duo prismata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud basim habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; sitque parallelogrammum AC, trianguli GHI, duplum. Dico hæc prismata esse æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN. GQ; Quod quidem fiet, si plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, constituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiusdem altitudinis cum prismatis. Nam plana horum solidorum opposita esse parallela, facile colligetur ex propos. 15. huius lib.



[a] Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum est trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiusdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. [b] Quare parallelepipida AN, GQ, eiusdem altitudinis super æquales bases AC, GP, inter se sunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, nimirum prismata ABCDEF, GHIKLM, (Nã parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HI, LK, planorum aduersorum secantur bifariam, in bina scilicet prismata) æqualia quoque sunt inter se. Itaque si fuerint duo prismata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *34. primi*

[b] *31. vnde.*

[c] *32. vnde.*

PER.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; cum imperet parallelepipeda complere; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum A B C D, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe A D E, B C F. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLI-

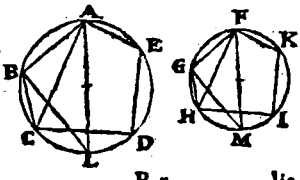
EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

Et Solidorum secundum.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona similia ABCDE, FGHIK, descripta in circulis, quorũ diametri AL, FM. Dico ita esse polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & cõnectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob similitudinem polygonorum est vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [a] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: [b] Est autẽ angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqua-



[a] 6. sexti

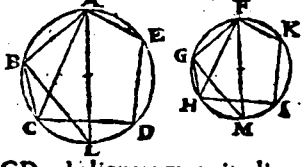
[b] 21. tertij.

lis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cũ ergo
[a] 31. tertij & anguli ABL, FGM, æquales sint, [a] nempe recti in semi
[b] 32. primi circulis existentes; [b] erunt & reliqui BAL, GFM, æqua-
[c] 4. sexti. les. [c] Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permu-
[d] 22. sexti tando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. [d] Igitur est vt quadratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad polygonum FGHIK, super FG; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulũ EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim esset æqualis, [e] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectæ LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per L, recta



[e] 7. quinti.

L, recta T V, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipsi E F. vt ad propos. 27. lib. 3. ostendimus, occurratq; rectis H E, G F, productis in T, & V. [a] Quia ergo triangulum E L F, dimidium est parallelogrammi T E F V; maius erit triangulum E L F, quam dimidium segmenti circuli E L F. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia segmentorum, in quibus sunt. Omnia igitur triangula simul maiora sunt, quam dimidium omnium segmentorum simul. Quod si rursus peripheriæ E L, L F, &c. secentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, constituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt simul, quam dimidium omnium segmentorum simul, in quibus sunt; & sic deinceps. Quoniam vero, si a circulo E F G H, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum E F G H; & a reliquis segmentis plus quam dimidium, nempe triangula E L F, F M G, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio; [b] relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, excessus inter circulum E F G H, & magnitudinem I. Sint iam circuli segmenta relicta E L, L F, F M, &c. simul sumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus E F G H, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, simul; si ex circulo detrahantur dicta segmenta, & ex I, & K, ipsa magnitudo K, quæ maior est præfatis circuli segmentis; erit reliquum polygonum E L F M G N H O, maius reliqua magnitudine I. Inscribatur in circulo A B C D, polygonum A P B Q C R D S, simile polygono E L F M G N H O. Quod quidem facile fiet, si semicirculi A B C, A D C, bifariam secentur in B, & D; & rursus circumferentiæ A B, B C, C D, D A, bifariam in P, Q, R, S; & sic deinceps, donec in tot partes æquales diuisa sit circumferentia A B C D, in quot distributa est circumferentia E F G H. Nam iunctis rectis A P, P B, B Q, &c. erit figura inscripta similis figuræ E L F M G N H O, vt patet. [c] Quoniam igitur est polygonum A P B Q C R D S, ad polygonum E L F M G N H O, vt quadratum diametri A C, ad quadratum diametri E H, hoc est, per hypothesim, vt circulus A B C D, ad I: Est autem polygonum A P B Q C R D S, minus circulo

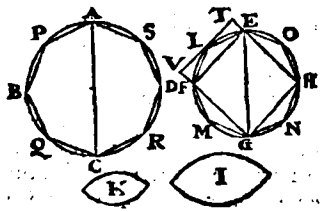
[a] 41. primi

[b] 1. decimi

[c] 1. duodec.

a 14. quin. ABCD. a Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Ostensum autem est & maius. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo I, circulo EFGH.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demóstrabimus, minorem circulum EFGH, non posse ad magnitudinem, quæ minor sit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportioné, quá habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & uniuersè demonstratum sit, nunquam quadratú diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor.



SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cú ergo ponatur circulus ABCD, ad I, esse vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudiné aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, b maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratú diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor est circulo ABCD. Quod est absurdú. Ostensum enim est iam in priori parte generaliter, non posse esse vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Quamuis autē circulus ABCD, maior est, & EFGH, minor; eadem tamen ratione ostendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratú diametri circuli, ABCD, nō posse

b 14. quinti

habere

habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circuli *ABCD*, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circuli EFGH, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratũ diametri *AC*, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; sit autẽ vt circulus ABCD, ad I, ita idẽ circulus ABC*D*, ad circulum EFG*H*, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratũ diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum. a 7. quinti

COROLLARIVM.

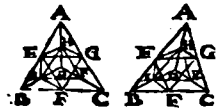
HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptũ. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratũ diametri, veluti demonstratum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, trian-

gulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius baſis triangulum *ABC*, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariã in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, I*K*, KH, *HE*, EI, IF. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum baſes triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec non in duo ſolida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammũ EBFG, & triangula oppoſita E*H*G, BIF; huius uero baſis eſt triangulum CFG, cui opponitur triangulum *K*IH, habentque hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D, in ſublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti; Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera A*D*, BD, trianguli ADB, [a] ſecta ſint bifariam, ac proinde proportionaliter; [a] erunt *H*I, *A*B, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & H*K*, AC; & E*G*, *B*C; & EF, AC; & FG, AB; & E*H*, BD; & EI, AD; & IF, DC; & *HG*, DC. [b] Sunt autẽ & rectæ FG, *H*I, cum parallelæ ſint ipſi AB, inter ſe parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ ſunt GH, FI, cũ ſint parallelæ ipſi DC. Quare parallelogramma ſunt AEI*H*, *H*EBI, ID*H*E, EBFG, GHK*C*, CKIF, FG*H*I. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, ſunt parallelæ; [c] erũt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadẽ rõne æquales erũt anguli HEG, DBC; & HG*E*, DCB. [d] Proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde ſimile eſt trian-



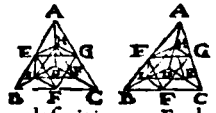
[a] 2. ſexti.
[b] 9. vnde.
[c] 10. vnde.
[d] 4. ſexti.

triangulum *HE*G, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, *A*BC, similia per coroll. propo. 4. lib. 6. Pyramis ergo *A*EGH. pyramidi ABC*D*, similis est, per defin. 9. huius lib. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis A B, AC, sunt parallelæ; [a] erunt anguli IH*K*, B*A*C, æquales. Eadé ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI; AC*B*. [b] Quare latera trianguli HIK, lateribus triãguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum *H*IK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triãgula DHI, DIK, DKH. triangulis DAB, *D*BC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. huius lib. Quoniam autẽ triangula *A*HE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. [c] ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum similia sint ostensa triangulo A D C, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, HIK, cũ similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AF, HI, [d] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum A*E*IH. Non secus æqualia erunt & similia triangula EHG, ID*K*, cum sint ostensa similia triangulo B D C, & habeant rectas HE, DI, [e] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur *A*EGH, HI*K*D, æquales sunt & similes, per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

[a] 10. vnde.
[b] 4. sexti.
[c] 21. sexti.
[d] 34. primi.
[e] 34. primi

RVRSVS, [f] quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propositi. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: [g] Sunt autem & parallela; cum EH, HG, per quas ducitur planum *E*HG, parallelæ sint rectis BI, I F, per quas planum B I F, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentũ duobus triãgulis *E*HG, BIF,

[f] 34. primi.
[g] 15. vnde.



ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, priſma eſt, ex definitione. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum CFGHIK. [a] Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales ſint, & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogramma CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter ſe, ac propterea ſimilia: [b] Sunt autem & parallela, quod rectę CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ ſint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur ſolidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, priſma eſt. Quoniam vero priſmata EBFGHI, CFGHIK, ſunt eiuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, baſis illius, duplum eſt trianguli CFG, baſis huius, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. [c] Ipſa inter ſe æqualia erunt.

[a] 34. primi.

[b] 15. vnde.

[c] 40. vnde.

DENIQVE quia priſma EBFGHI, maius eſt pyramide EBFI, totum parte; Eſt autem pyramis EBFI, æqualis & ſimilis pyramidi AEGH, necnõ pyramidi HIKD, vt perſpicuum eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulorum: Maiora erunt priſmata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero a dimidio eiuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales ſecatur, maior dimidium eius ſuperat, minor vero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraq; diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; &

ti;& in duo prismata æqualia;Ac eodem modo diuisa sit vtraq; pyramidum, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idque semper fiat; erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim,ita et omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia.

SINT duæ pyramides ABCD,EFGH,eiusdem altitudinis, quarum latera bifariam diuidantur in punctis *I*, *K*,L, M,N,O;P,Q,R,S,T,V,connectanturque rectæ IL, L*K*, KN, NO, OM, MN, LM, MI; PR,RQ,QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque secta sit in binas pyramides æquales inter se,& similes toti, nimirũ in AILM, MNO*D*; EPRS,STVH; & in bina prismata æqualia IBKLMN, *C*K*L*M*N*O, PFQRST; GQRSTV; vt vult propositio præcedens: eodemque modo intelligãtur esse diuisæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS,STVH;& sic deinceps. Di co ita esse omnia prismata facta in pyramide ABCD,ad omnia prismata generata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia, vt est basis ABC, ad basin EFG. Cum enim sit vt BG,ad *C*K,ita FG,ad GQ, eo quod vtraq; linea diuisa est bifariam; sint autem triangula *A*BC, L*K*C, similia similiterque posita; Item triangula EF*G*, R*Q*G, ex coroll.propos. 4.lib. 6. Erit quoque vt triangulum *A*BC,ad triangulum LKC, ita triangulũ EFG, ad triangulum R*Q*G. Et permutãdo,vt *A*BC, ad EFG, ita LKC,ad R*Q*G. Vt autem L*K*C,ad R*Q*G,ita est prisma C*K*LMNO,ad prisma G*Q*RSTV, vt mox ostendemus,atque adeo ita prisma IB*K*LMN,ad prisma PF*Q*RST, eum hæc illis sint æqualia:Et vt vnum prisma, videlicet

22.sexti.

a 12. quin. delicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST,[a] ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erũt quoq;, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD,

ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQS, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedẽti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erũt quoq;, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD, ad prismata cuiuslibet pyramidis factę in pyramide EFGH: Ac propterea erunt quoque, vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps, Quare cũ sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, [b] ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

b 12. quin.

LEMMA.

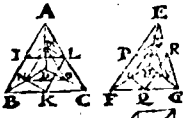
QVOD autem sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostẽdemus. Intelligan

telligantur ex verticibus D, H, ad baſes ABC, EFG, demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela ABC, MNO, ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur a plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus. * 17. vnde.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Si enim nō ita ſit, ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ. 3. huius lib. Rurſus eodē modo factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia,



æqualia, & sic deinceps. Quoniam igitur, si a pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo prismata PFQRST, GQRSTV, quæ maiora sunt dimidio pyramidis EFGH: Item a reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum scilicet prismata, & sic deinceps; relinquetur tandem minor magnitudo quam Y, excessus pyramidis EFGH, supra solidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur solidis X, Y; erunt reliqua prismata in pyramide EFGH, maiora solido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo prismata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina prismata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. Quoniam igitur sunt omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata numero æqualia in pyramide EFGH, vt basis ABC, ad basin EFG, hoc est, vt pyramis ABCD, ad solidum X: Sunt autem omnia prismata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; erunt quoque omnia prismata in pyramide EFGH, minora quam solidum X. Ostensa vero sunt & maiora. Quod est absurdum. Non ergo minus est solidum X, pyramide EFGH.

a 3. duode.

b 1. decī.

c 4. duode.

d 14 quin.

SIT deinde solidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad solidum X, vt basis ABC, ad basin EFG; Erit conuertendo solidum X, ad pyramidem ABCD, vt basis EFG, ad basin ABC. Ponatur, vt solidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad solidum Y. Et quia solidum X, maius ponitur pyramide EFGH; erit & pyramis ABCD, maior solido Y. Quare erit, vt basis EFG, ad basin ABC, ita pyramis EFGH, ad solidum Y, quod minus est pyramide ABCD. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse, vt est basis ad basin, ita pyramidem ad solidum pyramide minus. Non ergo maius est solidum

e 14. quin.

dum X, pyramide EFGH; sed neque minus est ostensum. Igitur æquale est. Quare cum ponatur vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad solidum X; [a] Sit autē pyramis ABCD, ad solidum X, vt ad pyramidē EFGH, solido X, æqualem: Erit quoque vt basis ABC, ad basin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine existentes pyramides, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 7. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abscindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abscissionis ad omnes angulos basis ducantur rectæ lineæ; Eritq; vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidem modo constitutam: Sed sic quoque erat ad totam pyramidem. [b] Pyramis ergo constituta æqualis, erit toti pyramidi, pars toti. Quod est absurdum.

[b] 9. quinti.

COROLLARIVM.

HINC sit, pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares constitutas, esse inter se æquales; propterea quod eandē proportionem habent cum basibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ITEM sequitur, e conuerso pyramides triangulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, bases habere æquales, si non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento ostendemus, quo in conuerso propos. 30. & 31. lib. 11. demonstrando vsi sumus: si tam in altitudine, quam in basi abscissa constituatur alia pyramis, &c.

THE-

6.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarũ baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triãgulares diuiſa.[a] Quia vero eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF:[b] Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidẽ GHIKLM.

[c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cũ quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula videre, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex

ABCDE	ABCDEF.
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL	GHIKLM

æquo

[a] 5. duode.

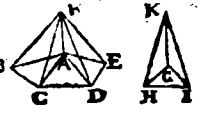
[b] 5. duode.

[c] 5. duode.

æquo, erit vt basis ad ABCDE, basin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, sub eadem altitudine existẽtes pyrámides, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propositionis demonstratio de illis duntaxat pyramidibus eiusdem altitudinis loquatur, secundum interpretes, quorum bases polygona latera habent multitudine aqualia; facile tamen idem etiam demonstrabimus de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vnius basis plura continet latera, quam basis alterius. Sint enim primũ duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius basis sit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuisa. [a] *Quoniam vero est, vt basis ABC, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* [b] *Erit vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo est ostensum:* [c] *& vt basis ADE, quinta quantitas, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ADEF, sexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatẽ;* [d] *Erit etiã basis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad basin GHI, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidẽ GHIK,*



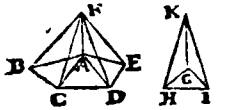
[a] 5. duo le.

[b] 24. quin.

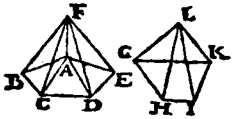
[c] 5. duode.

[d] 24 quin.

GHIK, quartam quantitatem. Quod est propositum. Eodem modo semper procedendum est, si plura fuerint triangula vt basi polygona. Cum autem, vt demonstratum est, sit vt basis polygona ABCDE, ad basin triangularem GHI, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt basis GHI, ad basin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quæ ob rem duæ pyramides quælibet, quarũ vnius basis est polygona, alterius triangularis, suis basibus sunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonstratio incipiat a polygono, eiusque pyramide, vt ex demonstratione constat, tamen conuertendo licebit initium quoque sumere a triangulo, eiusque pyramide, vt dictum est.



SED iam sint duæ pyramides eiusdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum bases sint polygona, sint q; plura latera in vna base, quam in altera. Dico rursus esse pyramidem ad pyramidem, vt est basis ad basin. Resoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuisa pyramides. Quia vero, vt iam est demonstratũ, est vt basis ABC, triangularis prima quantitas, ad basin GHIK, polygonam, secundam quantitatem; ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt basis ACD, quinta quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ACDF, sexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; [a] Erit etiam vt basis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum sexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rursus quia est, vt basis ABCD, prima quantitas, ad basin GHIK, secundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonstratum est; Et est quoque, vt basis ADE, quinta quan-



[a] 24. quin.

titas

titas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt ante eſt oſtenſum; [a] *Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE.* [a] 24. quin.

HANC autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes; eandem habent altitudinem.

QVOD non ſecus offendemus, ac ea, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, oſtenſa ſunt.

COROLLARIVM.

PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandē cōſtitutas, eſſe inter ſe æquales; cum eandē habeant proportionem cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS cōtra fit, pyramides multangulas æquales, & ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem. Hæc autem duo demonſtrabuntur, vt in coroll. propoſ. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

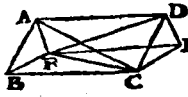
OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æqua-

les inter se, triangulares bases habentes.

SIT prisma ABCDEF, cuius duo triangula opposita, æqualia, ac similia ABF, DCE. Dico ipsum prisma secari in tres pyramides triangulares inter se æquales. Ducantur enim in tribus parallelogrammis tres diametri, nempe AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æqualia sunt; est q; vt basis ABC, ad basin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planum ABCD, demissam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter se æquales. Eadem ratione æquales erunt pyramides ADFC, EFDC, super æquales bases ADF, EFD, constitutę, & sub eadem altitudine, nempe perpendiculari a vertice C, ad planum ADEF, demissa. Est autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe basi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eisdem quatuor planis, nimirum basi ADF, & triangulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, seu CDEF, (quæ eadem est pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum prisma componentes, vt perspicuum est) æquales sunt inter se; Ac propterea prisma ABCDEF; in tres pyramides æquales est diuisum. Quocirca omne prisma triangularem habens basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi

[b] 5. duode.

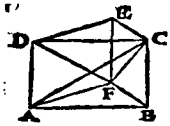


COROLLARIVM I.

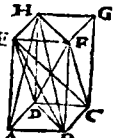
HINC colligitur, quamlibet pyramidem esse tertiam partem prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem: Siue prisma quodlibet triplum esse pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basin, & altitudinem.

SIT

SIT enim primum pyramis ABFC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF: ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem ABF. Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis. Nam ſi ducatur recta DF, erit priſma diuiſum in tres pyramides aquales ABCF, ADCF, CDEF: vt demonſtratum eſt; Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hac illi ſit aqualis, immo eadem, quod eiſdem planis cõ prehẽdatur ABF, FCA, ABC, CBF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABFC, aqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eãdem baſin ABF, conſtitutæ, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. manifeſtum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem, & altitudinem; ac propterea priſma e contrario eſſe pyramidis triplum. a 7. duodec.



SIT deinde pyramis ABCDE, cuius baſis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD, & plano oppoſito EFGH, in triangula numero aqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diuiſum. Ductis ergo rectis AH, BH; DF, CF; erit, vt demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD; Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit, vt pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad priſma CDHGFB; b *Ac propterea vt vna pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, aquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſub ead altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt aquales, ex coroll.* b 12. quin.



propoſ. 5. huius lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides *BCDF, BCDE, ſuper eandem baſim, & ſub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides ADBE. BCDE, componant totam pyramidem ABCDE; erit & pyramis ABCDE, tertia pars priſmatis ABCDEFGH.*

Cum igitur pyramis ABCDE, æqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſim ABCD, conſtitutæ, per coroll. propoſ. 5. huius lib. perſpicuum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partẽ priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.

QVOD ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingula pyramides triangulares horũ priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habẽtis baſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiuſmodi pyramis æqualis eſt pyramidi illi, quæ eãdem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Quam quidem iam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

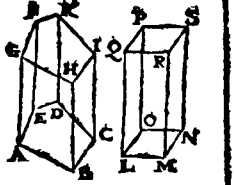
SCHOLIVM. I.

EX dictis facile demonſtrabimus hanc propoſitionem, videlicet.

SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcumque habeant baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

QVAMVIS enim hoc demonſtratum ſit in lib. 11. de priſma-

prismatis, quorum duo plana oppositâ, parallela, & aqualia, sunt triangula, licet verũ bases sint parallelogramma, vertices vero linea recta; necnon de parallelepipedis, quæ nomine prismatum contineri diximus: Nunc tamen id ipsum demonstrabimus vniuersè de omnibus prismatis, quorum duo plana aduersa, siue bases, sunt polygona, quamuis plura latera, seu anguli in vnius basi reperiantur, quam in basi alterius. Sint igitur duo prismata eiusdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum bases sint figurâ multilatera. Dico vt est basis ABCDE, ad basim LMNO, ita esse prisma ad prisma. Si enim ex omnibus angulis vtriusque basis ad vnum punctum superioris plani, quod basi opponitur, lineæ rectæ ducantur, consurgent duæ pyramides sub eadem altitudine cum prismatis habentes easdem bases: Ac proinde per coroll. præcitatum, qualibet pyramis tertia pars erit sui prismatis. [a] *Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita prisma ad prisma: Sed pyramis ad pyramidem est, vt basis ad basim, vt ostensum est propos. 6. eiusque scholio. Igitur erit quoque vt basis ad basim, ita prisma ad prisma. Quod est propositum.* [a] 13. quin.



CONVERSO modo, si prismata quarumcunque basium inter se sint, vt bases, ipsa erunt sub eadem altitudine. Quod quidem eòdem modo ostendemus, quo scholium propos. 5. demonstratum est.

COROLLARIVM. II.

VNDE prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases quascunque, inter se sunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam bases, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

E CONTRARIO, Prismata æqualia super æquales bases, vel eandem, in eadem sunt altitudi-

ne. Et prismata aequalia eiusdem altitudinis, bases habent aequales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos. 31. lib. 11. fuit demonstratum.

SCHOLIVM II.

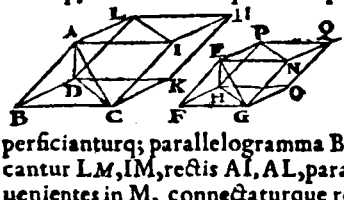
CAETERVM tam ea, quae in primi corollario, quam illa, quae in scholio proximo demonstrata sunt, intelliguntur tantummodo de prismatis, quae in vertice habent plana basi parallela, aequalia, & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, aequalibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia paris ipsius prismatis, vt in corollario 1. demõstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis cõcipiatur vnũ parallelogrãmorum, ita vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed dua tertię partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud aequale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario praedicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialterã. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quae eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiã partem prismatis. Quae cum ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in vertice

vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque ea, quę ostenasmus in scholio, intelligenda sunt de prismatis eiusdem altitudinis, quorũ vertices vel linea recta sunt, & bases parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant basibus parallela, æqualia atque similia. Hac enim ratione, si vertices prismatum fuerint linea recta, erunt pyramides in eisdem basibus, eiusdemque altitudinis, dua tertiæ partes prismatum, vt modo demonstrauimus. Quare eandem habebunt rationẽ, quam prismata, &c.

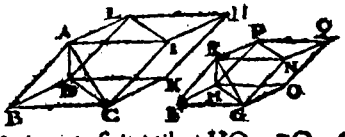
THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides similes triangulares ABCD, EFGH, ita vt bases ABC, EFG, sint similes, & reliqua triangula vnius similia reliquis triãgulis alterius. Dico ꝓportionẽ pyramidũ esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB,



perficianturq; parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ & æquales, cõuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur cõpletũ parallelepipedum BM, eiusdem cum pyramide altitudinis; cũ plana solidi BM, sint parallela, vt facile colligitur ex propos. 15. lib. 11. Rursus eodẽ modo perficiatur parallelepipedũ FQ. Quoniã igitur ob similitudinẽ pyramidũ, anguli plani ABC, EFG, sunt æquales, estq; vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, simlia. Eodẽ modo cũ anguli ABD, EFH, sint æquales, sitq; vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Itẽ anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erũt & parallelogramma BL, BK, parallelogrãmis FP, FO, similia. [a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepi- [a] 24. vnde.

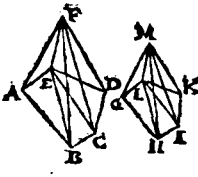


pedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM; quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM, FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, prismata DBCILA, HFGNPE, habêt eandê proportionê, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

a 24. unde.
b 15. quinti
c 11. quint.
d 33. unde.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.



SINT pyramides similes, quarum bases rectilineæ similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos recta EB, EC; LH, LI, e diuisa erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; utpote triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis

e 20. sexti

triangulis GHL, LKI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & anguli FEA, angulo MLG, æquales; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob trigula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH. [a] Quare a- [a 5. sexti]
quiangula, atq; adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, AEB, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. [b] Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorũ AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cũ igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeãt vnã et eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnã eandemq; proportionem, triplicatam scilicet illius; [c] Atque idcirco erit, vt una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, [d] cũ pyramis ABEF, ad pyramidẽ GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

[b 8. duodec.]
[c 12. quinti]
[d 8. duodec.]

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatã proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum propor-

proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Nã si ex angulis A, & L, ducãtur rectæ AC, AD; LN, LO, 2 erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OPL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam uero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt; erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM: Vt autem CB, ad CA, ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO, angulo BCD, & angulus TNM, angulo ICB, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, sint æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erũt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sũt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, LPOVRQ. Quapropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, qua demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterũ homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante vsi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.

* 20. sexti

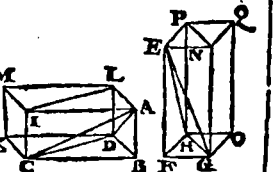
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes diuidi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

AEQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinē pyramidis EFGH, ad altitudinē pyramidis ABCD. Si.n. perficiantur, vt in præcedēti propos. dictū est, parallelepipeda BM, FQ, eorundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. [a] Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinē solidi BM: [b] Vt autē basis BI, ad basim FN, ita est triangulū ABC, ad triāgulū EFG. Igit erit quoq; vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eędem



[a] 34. vnde.

[b] 15. quin.

dem ſint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea baſes, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

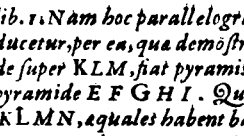
SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt priùs; cũ ſit vt ABC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintque eędem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque baſes parallelepipedorum & altitudines eorundẽ reciprocæ; [b] Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallepipeda BM, FQ. Quare & priſmata DBCILA, HFGNPE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 15. quinti

[b] 34. unde

SCHOLIVM.

EADEM ratione Aequalium pyramidum, quarum baſes nõn ſint triangulares, reciprocantur baſes atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentiũ reciprocãtur baſes & altitudines, illa ſunt aquales. Sint enim primum dua pyramides aquales; quarũ quidem ABCD, baſin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat baſi non triangulari EFGH, aquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propoſ. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum facile ad triangulum reducetur, per ea, qua demõſtrauimus ad propoſ. 42. lib. 1. Deinde ſuper KLM, fiat pyramis KLMN, eiuſdem altitudinis cũ pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, aquales habent baſes, & eandem altitudinem; ipſa erunt aquales, per ea, qua in ſcholio propoſ. 6. huius lib. oſtendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, aqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, aqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, baſes triangulares; [c] *erit vt baſis ABC, ad baſin KLM, hoc eſt, ad huic aqualem baſin EFGH, ita altitudo pyra-*



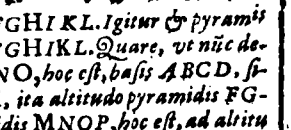
[c] 9. huiusdet.

pyramidis KLMN, hoc eſt, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo; cum baſis KLM, æqualis ſit baſi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI; ponatur autem eſſe vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem; erit quoque vt baſis ABC, ad baſim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. [a] *Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum.*

[a] 9. duode.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum baſes ſint multãgula. Fiat rurſus triangulũ MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritque ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt nũc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt, baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, baſes & altitudines reciprocantur.



SED reciprocentur iam baſes harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſis MNO, æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante oſten

oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGHIKL: Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis ABCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

OMNIA hac facile quoque demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cum ſint eorum tertia partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certe dua tertia, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, vt in ſcholio eiuſdē propoſ. oſtenſum eſt. Quare, vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atq; altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eadem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint tripla, vel certe ſeſquialtera, æqualia quoque ſunt. Quod eſt propoſitum.

9.

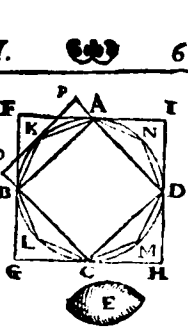
THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus baſin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quã triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratũ ABCD, & circa cũdem, quadratum FGHI; intelligaturque ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda.

Quo-

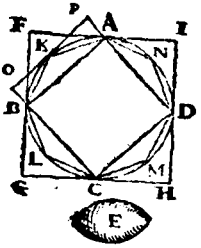
Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidiũ eſt quadrati FGHI, vt ad propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; eſtq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiuſdem altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidiũ parallelepipedi baſis FGHI; Ac proinde parallelepipedum baſis ABCD, maius erit, quam dimidium cylindri, cuius baſis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiunganturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, vt ad propoſ. 27. lib. 3 oſtendimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. [b] Quia ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis ABOP: cum ſit priſma ad priſma, vt baſis ad baſim, quemadmodum ad propoſ. 7. huius lib. demonſtrauimus; Ac propterea priſma baſis AKB, maius erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura cõtenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariã, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodẽ modo priſmata eiuſdẽ altitudinis cũ cono, & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidia omniũ ſegmentorũ cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmẽta, & ſic deinceps. Quoniã uero ſi a cylindro, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis ABCD; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſium AKB, BLC,



[a] 32. vnde.

[b] 41. primi

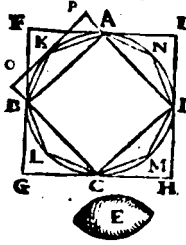
[a] 1. decim. BLC,&c. atq; in hunc modum semper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, excessus cylindri supra triplum coni: Sint iam segmẽta cylindri relicta basium AK,KB,BL, &c. (quę quidem bases sunt circuli segmenta,) simul sumpta, minora quam E. *Cum* igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, simul; Si ex cylindro auferantur segmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipsa magnitudo E, quæ maior est dictis cylindri segmentis, erit reliquum prisma basis multangulę AKBLCMDN, eandem habẽs altitudinem cum cono, & cylindro, maius quam reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars prismatis. Quare cum dicti prismatis sit tertia pars pyramis, cuius eadẽ cum ipso basis & altitudo, ex co roll. propos. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod est absurdum. Non igitur maior est cylindrus triplo coni.



SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. *Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt* conus æqualis sit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, simul. Inscribatur rursus in circulo quadratum *ABCD*, & circa eundem, quadratum FGHI; intelliganturq; super hæc quadrata, pyramides sub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum A B C D, dimidium est quadrati FGH*I*, vt ad propos. 9. lib. 4. demonstra uimus, [b] estque vt basis ad basin, ita pyramis ad pyramidẽ eiusdem altitudinis; Erit quoque pyramis super A*BCD*, dimidium pyramidis super basin FGHI; ac proinde pyramis super basin A*BCD*, maior erit dimidio coni, cuius basis circulus ABCD. Secẽtur peripheriæ AB, BC, CD, DA, bifariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ AK, K B, B L, L C, C M, M D, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta O P, tangens circulum in K, quæ parallela erit

[b] 6. duodec.

erit ipſi AB, vt ad propoſ 27. lib. 3. demonſtrauimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & ſuper AKB, ABOP, intelligãtur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. [a] Quia ergo triangulũ AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis ſuper baſin AKB, dimidium pyramidis ſuper baſin ABOP, [b] cũ pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin AKB, maior erit dimidio ſegmenti coni, cuius baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erũt pyramides, quarum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores, quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul maiores ſunt, quã dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt ſimul, quã dimidia omniũ ſegmentorum coni ſimul, quorũ baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi a cono, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin ABCD, quam maiorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cuius baſis eſt circulus ABCD; & a reliquis ſegmẽtis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [c] relinquitur tãdem minor magnitudo; quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri: Sint iam ſegmenta coni relicta baſium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahãtur ſegmẽta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior



[a] 41. primi.

[b] 6. duode.

[c] 5. decimi

ᶜst, præfatis coni segmentis; erit reliqua pyramis, cuius basis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cũ cono & cylindro, maior quã tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cũ prisma eandẽ habens basim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cũ cono & cylindro, triplum sit ipsius pyramidis, vt supra in corollario propositionis septimæ huius libri a nobis est demonstratum, erit huiuscemodi prisma maius cylindro, pars toto. Quod est absurdum, Non ergo cylindrus minor est triplo coni: Sed neque maior triplo est ostensus. Igitur æqualis est triplo coni, proptereaq; conus tertia pars est cylindri. Omnis igitur conus tertia pars est cylindri, eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS propositio hac solum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos dũtaxat Euclides definierit lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam scalenis conuenit, vt perspicuum est eius demonstrationem diligenter intuenti. Itaque propositio vniuersa ita proponi poterit.

OMNIS conus, siue rectus, siue scalenus, tertia pars est cuiuslibet cylindri siue recti, siue scaleni, eandem cum ipso & basim & altitudinem habentis, licet non sit idem axis coni & cylindri.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SVB eadem altitudine existentes coni & cylindri, inter se sunt. vt bases.

SINT sub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ bases circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico vt est basis ad basim, ita esse conum ad conum, &

num. & cylindrum ad cylindrũ. Si enim hoc non credatur, sit vt basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si nempe esset æqualis, haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionẽ eandẽ; ac propterea esset conus ad conum, vt basis ad basin: quod non cõceditur. Sit ergo primũ N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N, & O, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, eiusdem altitudinis, & a reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedẽtis propositionis ostensum est; [b] relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidẽ bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmẽtis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonũ EPFQGRHS, eiusdẽ altitudinis cũ cono, maior quã N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonũ ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2. huius lib. docuimus, ducanturq; circulorũ diametri BD, FH. Qm igit per coroll. ppos. 2. huius lib. est vt circulus ABCD, ad circulũ EFGH, ita polygonũ ATBVCXDY, ad polygonum

[a] 7. quinti.

[b] 1. decimi

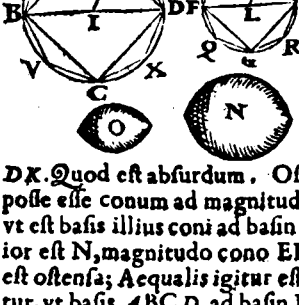
gonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, [a] & vt polygonum, ad polygonum, ita est pyramis ad pyramidem eiusdem altitudinis cum conis; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidē EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto, [b] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quā N: Ostensa autem fuit & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

[a] 6. duodec.

[b] 14. quinti

SIT secundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinē O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; [c] maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit vt circulus EFGH ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor est cono ABCDK. Quod est absurdum. Ostensum enim est iam, non posse esse conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt est basis illius coni ad basin huius coni. Non ergo maior est N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor est ostensa; Aequalis igitur est. Quapropter cum ponatur, vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; [d] Sit autem, vt conus ABCDK, ad N, ita idē conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque vt basis ABCD, ad basin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

[c] 14. quin.



[d] 7. quinti

[e] QVONIAM autem, vt conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita est cylindrus ABCDK, (qui triplus est coni ABCDK;) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus est coni EFGHM) Erit quoque vt basis ABCD, ad basin EFGH,

[e] 15. quin.

EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrū EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo vſi ſumus in conis, ſi locō conorum, & pyramidum, concipiantur cylindri, & priſmata. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, vt eius demonſtratio manifeſte indicat, ita vt propoſitio vniuerſe proponatur in hunc modum.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

CONVERTETVR hæc propoſitio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

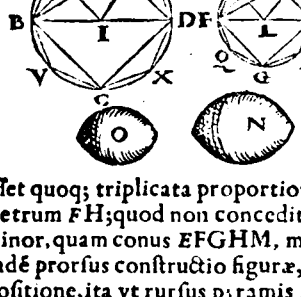
ITEM ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi nō habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni, & cylindri, in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus.

SINT similes coni, & cylindri, quorum bases circuli ABCD, EFGH, axes vero LK, LM, & diametri basium BD, FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatã diametri ad diametrum. Si enim hoc non credatur, habeat conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim esset æqualis, haberet conus ABCDK, ad conũ EFGHM, & ad N, proportionem eãdem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conũ EFGHM, esset quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH; quod non conceditur. Sit ergo primum N, minor, quam conus EFGHM, magnitudine O; Fiatque eadẽ prorsus constructio figuræ, quæ in præcedenti propositione, ita vt rursus pyramis EPFQGRHSM, maior ostendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF, MP, vt habeãtur duo triangula BKT, EMP, pyramidum ATBVCXDYK, EPFQGRHSM; & connectantur rectæ TI, PL. Quoniam igitur coni ABCDK, EFGHM, similes ponuntur, erit, ex 24. defin. lib. 11. vt diameter BD, ad diametrum FH, ac propterea vt semidiameter BI, ad semidiametrum FL, ita axis IK, ad axem LM; Ac permutãdo vt BI, ad IK, ita FL, ad LM. Cum igitur anguli BIK, FLM, recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quod coni recti ponantur, propterea que axes recti ad eorum bases; Erunt triangula BIK, FLM, æquiangula; Ac propterea



a 7. quinti

b 11. quinti

c 6. sexti.
d 4. sexti

rea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autē BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob similitudinē triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, insistentes similibus arcubus BT, FP, sint æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostēsum est; sitq; vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatē tam linearū BI, IT, quam FL, LP, erunt triangula BIT, FLP, similia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rursus qa latera KI, IB, triāguli KIB, æqualia sūt lateribus KI, IT, triāguli KIT, & anguli dictis lateribus cōprehēsi, recti, ex defin. 3. lib. 11. cū axis IK, rectus ponatur ad circulū ABCD, erūt bases KB, KT, æquales. Eodē modo æquales erūt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt, cū vtrobiq; sit proportio æqualitatis. Qm vero vt KB, ad BT, ita KT, ad eandē BT; Itē vt MF, ad FP, ita MP, ad eandē FP: Erat aūt vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit quoque vt KT, ad BT, ita MP, ad FP; Et cōuertēdo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cū sit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF; & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP, Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti ostensum est; habebūt triāgula BKT, FMP, latera pportionalia, adideoq; æquiāgula erūt; Ac proinde similia, ex definitione. Non aliter ostendētur reliqua triangula ambictia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter se similia esse: Quæ cū sint multitudine æqualia, erūt dictæ pyramides similes, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propos. 8. huius lib. Vt autē BT, ad FP, ita est BI, ad FL, ob similitudinē triangulorum BIT, FLP; Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidē habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYK; ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor sit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Ostensa autem est & maior. Quod est absurdum. Non igitur minor est magnitudo N, cono EFGHM.

a 6. sexti.

b 4. primi

c 7. quinti

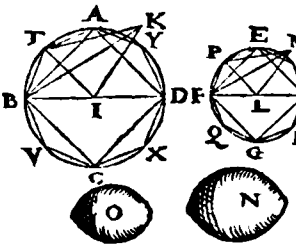
d 6. sexti.

e 15. quinti

f 14. quinti

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD. ad diametrum FH; Habeat autē & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime oſtendimus: Erit vt conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterū PF, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoq; N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatā diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinē O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM,[a] erit quoq; conus ABCDK, maior quā O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinē O, minorem cono ABCDK, proportionē habet triplicatam diametri FH, ad diametrū BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conū ad magnitudinē alio cono minorē, proportionē habere triplicatā eius, quā habent baſiū diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor eſt oſtenſa. Aequalis igitur eſt;[b] ac proinde conus ABCDK, eandē habet proportionē ad conū EFGHM, & ad N. Cū ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorū BD, & FH; erit quoq; conus ABCDK, ad conū EFGHM, in earundē diametrorū, pportione triplicata.

[c] QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, eam-



a 14. quin

b 7. quinti.

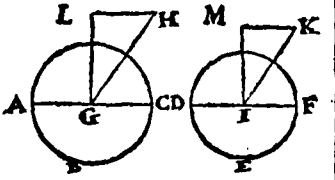
c 15. quin.

ni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoq; cylindrus ad cylindrum proportionē diametrorum in basibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonstrabitur, quo vsi sumus in conis, si modo loco conorum, & pyramidum assumantur cylindri, atque prismata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, quæ in basibus. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOD si maior conus, & cylindrus cum minore conseseratur, perspicuum est, in secunda parte huius propos. Euclidem assumere, demonstratum esse propos. 8, huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterū homologorum triplicatam. Id quod ad defin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri semper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HÆC porro propositio, quamuis etiam extendatur ad similes conos & cylindros scalenos: tamen hic demonstratur in solis rectis conis & cylindris similibus, cum in demonstratione assumantur axes recti ad bases. Quocirca eam hac ratione ostendemus in similibus conis & cylindris scalenis. Sint similes coni, & cylindri scaleni, quorum bases circuli ABC, DEF, axes vero GH, IK, & diametri basiū AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatā. Intelligantur enim super eadem bases duo coni, & cylindri recti earundem cum scalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducāturq; per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana secantia bases lineis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti sunt basibus ABC, DEF; a erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad eadem recta. b Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad bases demissa cadent in AC, DF, communes sectiones; & proinde erunt anguli

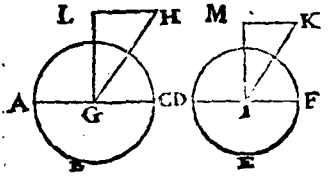


a 18. vnde.
b 38. vnde.

anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cũ coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin.

a 32. primi 3. lib. 11. a Reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoq; erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta HL, per axiũ vertices ducta ipsi AC,

b 29. primi parallela, b ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula sunt; atque idcirco



c 4. sexti. erit vt GL, ad GK, ita IK, ad IM; & permutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axẽ IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponãtur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axẽ erit, vt diameter AC, ad DF, diametrũ; Et proinde coni & cylin

d 12. duod. dri recti ABCL, DEFM, similes erũt, ex definitione. d Quare proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus CEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est æqualis, vt constat ex coroll. propos.

c 7. quint. 11. huius lib. c Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum et cylindrũ DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.

11.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SE-

SECETVR cylindrus *ABCD*, plano GH, paralle lo aduerſis planis AB, CD, quod quidem ſecet axẽ EF, *in I. Dico* vt eſt cylindrus ABHG, ad cylindrũ GHCD, *ita* eſſe axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantumlibet; Sumanturque in axe producto quotcunq; rectæ *EK*, KL, æquales ipſi EI; Itẽ quotcũque rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi FI. Deinde per puncta I, K, L, M, N, O, ducantur rectę IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, deſcribent circulos GH, PR, QS, Tæ, VZ, XY, parallelos & æquales circulis AB, CD, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erũt SP, PA, AH, HD, DT, TZ, ZX, ex definitione, componẽtes totum cylindrum SQXY. Quoniã verò tam cylindri SP, PA, AH, ſuper baſes æquales QS, PR, BA, & ſub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales ſũt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, ſuper æquales baſes XY, VZ, Tæ, CD, & ſub altitudinibus æqualibus NO, MN, FM, IF, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quã multiplex eſt axis IL, ipſius axis IE; Itẽ tã multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex eſt axis IO, ipſius axis IF. Quoniam autem ſi axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi IO, (multiplici axis IF, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) vt ex propoſ. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunq; hoc contingat multiplicatione: Erit, per defi. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axẽ IF, ſecundã magnitudinẽ, vt cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylin

drus

drus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri LS, KR, EA, &c. semper aquidistates circa centra L, K, E, &c. vna cũ recta SY, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, qua scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.

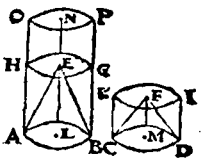
11. ## THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE, MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturq; axis

EN,

E N, æqualis axi *M F*, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, vt fiat cylindrus G H O *P*, eiusdem altitudinis cum cylindro C D I K. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales bases & altitudines, æquales sunt, ex coroll. propos. 11. huius lib. [a] proptereaque cylindrus A G, ad ipsos eandem habet proportionem. [b] Est autem cylindrus *A* G, ad cylindrum H P, vt axis, seu altitudo L E, ad axem, seu altitudinem *E* N, hoc est, ad altitudinem M *F*, sibi æqualem. Igitur & cylindrus A *G*, ad cylindrum C I, erit quoque, vt altitudo L E, ad altitudinem M F.



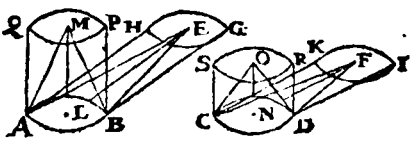
[a] *7. quinti.*
[b] *13. duod.*

[c] QVIA vero coni A B E, C D F, sunt tertiæ partes cylindrorum *A* G, C I; [d] ipsi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus A B E, ad conum C D F, vt altitudo L E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur basibus existentes coni & cylindri, inter se sunt, vt altitudines. Quod ostendendum erat.

[c] *10. duode.*
[d] *15. quin.*

SCHOLIVM.

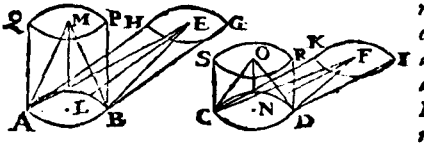
HOC idem conuenire conis scalenis, hoc modo demonstrabimus. Sint super bases æquales A B, C D, coni A B E; C D F, et cylindri A B G H, C D I K, scaleni, quorum altitudines L M, N O. Dico conũ A B E, ad conum C D F, et cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, esse, vt est altitudo L M, ad altitudinem N O. Super basin enim A B, construatur cylindrus rectus A B P Q, sub altitudine L M; Item super basin C D, cylindrus C D R S, sub altitudine N O. [c] *Quoniã igitur est cylindrus rectus A B P Q, ad*



[c] *14. duode.*

ad cylindrum rectũ CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO: Est aũt cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Itẽ cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

[a] 10. duod. [b] 15. quin. QVONIAM autem coni, [a] cum ſint tertia partes cylindrorum, [b] eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABE, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodẽ argumento, quo vſi ſumus in cylindris, confirmari poteſt, vt perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundẽ altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

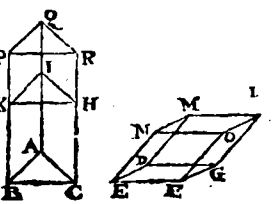


IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit ſcalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus ſcalenus ABGH, æqualis ſit cylindro recto ABPQ; ſit autẽ cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonſtrauit: Erit quoque cylindrus ſcalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

[c] 15. quin. [d] 10. duod. [c] QVONIAM vero coni eandem habent proportionẽ, quam cylindri, [d] cum illi horum ſint tertia partes; Erit etiã conus ſcalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus oſtenderur eadẽ ratione, qua vſi ſumus in cylindris, vt manifeſtum eſt.

EADEM quoque hac propoſitio conuenit priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. Sint enim ſuper baſes æquales ABC, DEFG, priſmata ABCHIK, DEFGKMNO, & pyramides ſub eiſdem altitudinibus. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, priſmatis ABCHIK, ad baſin ABC, per pendi-

perpendiculares, ita vt BK, sit altitudo prismatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, sumantur IQ, HR, KP, aquales altitudini prismatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur prisma HIKPQR, eiusdem altitudinis cum prismate EL. Eruntq; prismata HIKPQR, EL, cum habeant & bases, & altitudines aquales, inter se aqualia, ex coroll. 2. propo. 7. huius lib. [a] Ac propterea prisma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia vero ex scholio propo. 25. lib. 11. prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, est vt planum BI, ad planum KQ; [b] Et vt planum BI, ad planum KQ, ita est recta BK, ad KP; erit prisma ABCHIK, ad prisma HIKPQR, hoc est, ad prisma EL, vt BK, altitudo prismatis ABCHIK, ad KP, altitudinem prismatis HIKPQR, hoc est, prismatis EL. Quod est propositum.



[a] 7. quinti.

[b] 1. sexti.

QVOD si insistētes lineæ AI, CH, BK nō sint perpendiculares ad basin ABC, cōstituēdū erit sup basin ABC, aliud prisma, cuius insistētes sint perpēdiculares ad basin, & aquales altitudini prismatis ABCHIK. Nam cū ex 2. coroll. propos. 7. huius lib. hæc duo prismata eandem habentia altitudinē, et basin, sint aqualia, sitq; prisma constitutū ad prisma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinē; erit vt prisma ABCHIK, ad prisma EL, vt altitudo illius, ad altitudinē huius

[c] QVONIAM vero pyramides eandē habent proportionem cum prismatis, a quod illa sint horū tertia partes: Perspicuum est, ita quoque esse pyramidem ad pyramidem, vt est altitudo ad altitudinem.

[c] 15. quin. 7. duode.

EADEM prorsus est ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine prismatum, vt dictum est; atque ob id eadem illis demonstratio possit accommodari.

HAEC omnia eodem fere modo demonstrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & prismatis eandem habentibus basem.

OMNIA

OMNIA quoq; hac facile conuerti possunt hoc modo.

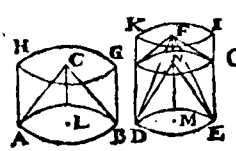
CONI & cylindri tam recti, quam scaleni; Item prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, bases habebunt æquales.

NAM alia pars æqualis foret toti, vt in conuerso propos. 31. lib 11. ostensum est.

12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorũ reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales.

SINT æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum bases AB, DE; axes, altitudinesve LC, MF. Dico bases & altitudines esse reciprocas; hoc est, esse vt AB, ad DE; ita MF, ad LC. In cylindris quidem sic propositum ostendetur. Si altitudines LC, MF, sint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & bases æquales, ex coroll. propos. 11. huius lib. Quare erit vt basis AB, ad basin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde bases atque altitudines *sunt* reciprocæ.



QVOD si altitudines LC, MF, inæquales fuerint, sit MF, maior, ex qua abscindatur MN, ipsi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, basi DE, parallelum,

vt

vt in ſcholio propoſ. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO. O K. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; [a] erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. [b] Eſt autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: [c] Itē vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem M N, hoc eſt, ad huic æqualem L C; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

[a] 7. quinti.
[b] 11. duod.
[c] 14. duod.

IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, [d] cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demóſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF conſtituátur duo coni, vt in figura.

[d] 10. duod.

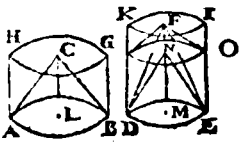
SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidē in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN; [e] Eſt autem vt baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: [f] Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrū DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO;

[e] 11. duod.
[f] 14. duod.

9. quinti. [a] ideoq; cylindrus ABGH, cylindro DEIK, æqualis erit.

AT vero in conis hæc erit demõſtratio. Si conorũ ABC, DEF, baſes & altitudines reciprocẽtur, reciprocabũtur quoq; baſes, & altitudines cylindrorum ABGH, DEIK, cũ eædem ſint baſes, altitudineſque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt oſtenſum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo conos eſſe æquales, quo oſtẽdimus cylindros æquales eſſe. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reiprocã tur baſes & altitudines, &c. Quod erat demonſtrandũ.



SCHOLIVM.

NON difficile erit idẽ oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoque recti eaſdem cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare vt oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eadem ſint baſes, & altitudines rectorum & ſcalenorum. Quare, vt demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. inter ſe quoque erunt æquales.

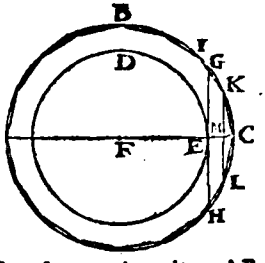
IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus.

13. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum

lygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idē centrū F, oportea tq; in maiori ABC, inſcribere polygonū æquilaterū, cuius latera numero pari cōtinentur, nō tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, ſecās circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib. 3. Quoniā igitur arcus AGC maior eſt arcu GC, ſi ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex reſiduo BC, dimidium BI, & ex reſiduo IC, dimidium IK, & ſic deinceps; relinquetur tandem minor arcus quā CG. Sit igitur iā arcus CK, arcu CG, minor, & ſubtēdatur recta CK. Dico rectā CK, eſſe vnum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrās AB, in totidē partes æquales diuidatur, in quot diuiſus ē quadrans BC; necnō ſemicirculus AHC, in totidē partes, quot cōtinet ſemicirculus ABC; deinde oſibus arcubus rectę lineę ſubtēdātur, quę æquales quidē erunt ipſi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales ſubtendant: Deſcriptū erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidē non tangere circulum minorem DE, ita oſtendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, ſecans ipſam AC, in M. Qm igitur anguli GEM, KME, recti ſūnt; erūt rectę GH, KL parallelæ. Quare cū recta GH, tāgat circulū DE, in ſolo puncto E; recta KL, erit tota extra dictū circulū, nec vnquam ipſum continget, quod nunquā cum recta GH, cōueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abeſt, quam KL, circulum DE, tanget. Ac pro-



a 1. decimi

b 29. tertij.

c 28. primi

propterea neque alia latera polygoni inſcripti, cũ æqua
14. tertij. lia ſint lateri CK; ideoque æqualiter cum Ck, a centro F, diſtent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum exiſtẽtibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC eſt manifeſtum, ſi ab extremitate lateris polygoni inſcripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem poſſe contingere, ſed totam extra ipſum cadere. Huiuſmodi enim eſt linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, oſtenſa eſt non tangere circulum DE.

14. PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphęra ſolidum polyedrum inſcribere, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem.

SINT duæ ſpheræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inſcribere ſolidũ polyedrum, ſeu multilaterum, quod non tangat minorẽ ſphæram EFGH. Secentur ambæ ſphæræ plano aliquo p centrum, ſintq; communes ſectiones factæ in ſphęris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex deſcriptione ſphæræ, habentes idem centrum ſphærarum I. Nam ſemicirculi, ad quorum circumuolutionem ſphæræ deſcribuntur, circumducti congruent ſectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ ſectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes

omnes lineæ rectę cadentes ex I, ad peripherias sectionũ sunt æquales, cum ducãtur ex centro sphærarum ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducãtur in his circulis diametri AC, BD, se se in centro I, secantes ad angulos rectos, vt sint quadrantes AB, BC, CD, DA, &c. Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidẽ vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam vsq; circuli ABCD, quæ circulũ EFGH, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectę Gγ, applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero si arcui Cγ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, latus Cγ, oppositũ maiori angulo, nẽpe recto, maius est latere Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoq; recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maior erit. vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidiũ auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidiũ LK, & sic deinceps; relinquetur tandẽ arcus minor arcu Cδ, seu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritq; recta CK, subtensa minor quam recta Aε, hoc est, quam Gγ, ex scholio propos. 29 lib. 3. Dico igitur, rectã CK, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tãgat circulum EFGH, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet, multo minus recta CK, subtendens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulũ tanget. Rursus ducta diametro KN, erigatur ex centro I, ad plana circulorũ ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientq; cõmunes sectiones, circulos, vt iam dictũ é, quorũ semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. squadrantes erunt OC, OK; atq; adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes CD,

[a] 16. huod.

[b] 1. quarti.

[c] 19. primi.

[d] 1. decimi

[e] 12. vnde.

[f] 18. vnde.

[g] schol. 22. tertij.

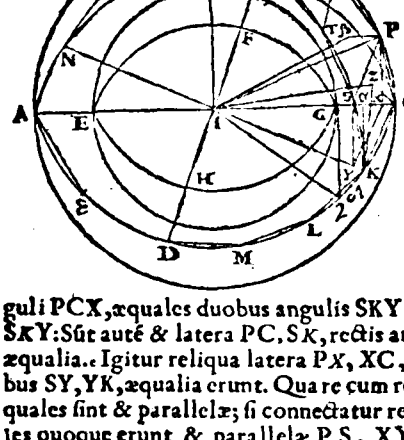
OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales distribuatur, in quot diuisus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus subtensæ, nimirum CK, KL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, quæ in communes sectiones AC, NK, cadent; eruntque inter se parallelæ.

a 29. tertij.

b 38. vndec.

c 6. vndec.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales sint peripheriæ AOP, NOS, quibus insistunt; (Nam si ex semicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoq; erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, triá



d 27. tertij.

guli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY: Sút autẽ & latera PC, SK, rectis angulis oppositæ, æqualia. e Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Qua re cum rectæ PX, SY, æquales sint & parallelæ; si connectatur recta XY; f æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter sese. g At quia & rectæ CK, XY, parallelæ sunt, quod latera IC, IK, proportionaliter secta sint. (Si enim ex semidiametris IC, IK, æqualibus demãtur æquales rectę CX, KY relinquẽtur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK.) h Erũt parallelę quoq; PS, CK, inter se, cum

e 26. primi

f 33. primi

g 2. sexti.

h 9. vndec.

se. cum vtraq; parallela sit ipsi XY;, ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipsis plano existent. Totũ igitur quadrilaterũ CKSP, in vno erit plano. Quod si ex Q, & T, demittantur ad planum circuli ABCD, perpediculares, & cõnectantur rectæ QC, TK, ostẽdemus similiter CK, QT, esse parallelas; atq; adeo ipsas PS, QT, inter se parallelas esse, cũ eidẽ CK, sint parallelę; totũq; quadrilaterũ PSTQ, in vno esse plano. Eadẽ ratione in vno erit plano qnadrilaterũ QTVR. [b] Est autẽ & triangulũ RVO, in vno plano. Si igitur eadẽ constructio exhibeatur super reliqua latera KL, LM, MD, ductis scilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemisphęrio, vt tota sphęra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ similia sint prædictis inter quadrantes OC, OK, super latus CK, cõstructis; inscriptũ erit in sphęra maiori solidũ polyedrũ circunscriptũ dictis quadrilateris, atq; triãgulis. Hoc ergo dico non tangere sphæram minorem EFGH.

a 7. vndec.

b 2. vndec.

DVCATVR. n. ex I, ad planũ CKSP, perpẽdicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Quoniã igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti sunt; [c] erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratũ rectę IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia sint, erunt & quadrata rectarũ IZ, ZC, quadratis rectarũ IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipsę rectę ZC, ZK, æquales. Similiter ostẽdemus rectas, q̃ ex Z, ad PS, ducẽtur, æquales esse & inter se, & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallũ ZC, descriptus p quatuor pũcta C, K, S, P, trãsibit. Eadẽq; rõne circa reliqua quadrilatera PSEQ, QTVR, & triangulũ RVO, circulos describi posse, demõstrabimus. Qm̃ vero, vt postea ostẽdemus, angulus CZK, obtusus est; [d] erit quadratum rectę CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia sint, maius erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectę ZC.

c 47. primi.

d 12. secun.

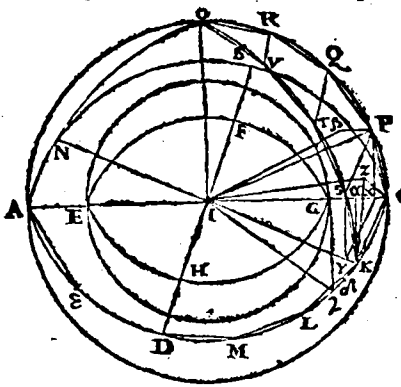
DVCATVR ex K, ad rectã AC, perpendicularis Ke. Cum igitur AC, dupla sit ipsius AI, & Aa, maior sit,

quá AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quá ob rẽ cum ſit, [a] vt AC, ad Aα, ita rectangulũ ſub AC, αC, ad rectangulũ ſub Aα, αC, quod baſes horum rectangulorum ſint AC, Aα, & eadẽ altitudo αC; erit quoq; rectãgulum ſub AC, αC, minus dùplo rectanguli ſub Aα, αC. [b] Eſt autem rectangulũ ſub AC, αC, æquale quadrato rectæ CK; & rectangulũ ſub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quod recta CK, inter AC, αC, ſit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim conneteretur recta AK, fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ ZC; erit quadratũ rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC.

[a] 8. ſexti.

[b] 17. ſexti.

[c] 47. primi



[c] Quoniá vero quadratũ rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarũ IZ, ZC; & quadratũ rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK: Suntque æqualia quadrata rectarũ æqualiũ IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, æqualia quadratis rectarũ Iα, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectę αK; & ex illis minus, videlicet rectę ZC, erit reliquum quadratũ rectę IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta IZ, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tãgat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta Kα, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cũ omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint a ſphæra EFGH,

EFGH, quam punctum Z, vt mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Cγ: [a] Eſt autem CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtuſus ſit, vt mox demonſtrabitur; Multo maior erit Gγ, quam ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [b] Quia vero quadratum rectæ Iγ, æquale eſt quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; ſunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, ſit ſphæræ minoris EFGH, ſemidiameter; exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

[a] 19. primi

[b] 47. primi

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, vt demonſtratum eſt: Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus IβP, rectus ſit, ex 3. defin. lib. 11. [c] erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Iβ, βP. Quia uero & quadratum rectæ IC, (quod æquale eſt quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Eſt aũt quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior ſit, quam linea βP, vt poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoque & linea Iβ, maior quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum β, extra ſphæram EFGH, exiſtet, quam punctum Z; propterea que multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget ſphæram

[c] 47. primi

ram minorem E F G H. Eodem modo demonſtrabimus, quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſsint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

EX iis, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in vna ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; vt conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ a centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium; Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cum ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoque polyedrum vnius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidia-

me-

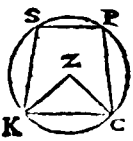
metrorum, atque adeo diametrorum ſphararum, [a] *cum ſemidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.*

[a] 15. quinti

SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonſtranda.

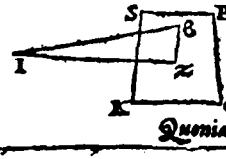
PRIMVM itaque oſtendendum eſt, angulum CZK, in quadrilatero CKSP, eſſe obtuſum. Quod vt commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura ſuperiori, eſt vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, ſimilia ſunt.) Eſt autem IK, maior quam IY; [b] erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis ſit oſtenſæ ipſi SP, erit quoque KC, maior quam SP; Ac propterea arcus CK, maior erit arcu SP, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. [c] Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, ſint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipſi KC, lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque adeo angulus CZK, obtuſus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3.



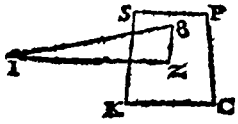
[b] 14 quin.

[c] 28. tertij

SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius a centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ.



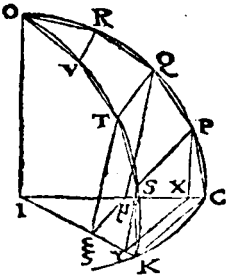
Quoniam



a 19. primi

Quoniã ergo angulus IZθ, rectus est, ex defin. 3. lib. 11. a Erit latus illi oppositum Iθ, maius latere IZ, quod minori angulo IθZ, nimirũ acuto, opponitur; Ac propterea punctum θ, longius a centro I, distat, quam punctum Z. Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.

TERTIO, ac vltimo probandum est, rectam ZC, maiorem esse recta βP. Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam PS, maiorem esse recta QT. Describatur igitur pars superioris figurae, ea videlicet, qua continentur semidiametris IC, IO, & quadrantibus OC, OK, &c. Demittantur deinde ex Q, & T, ad planum circuli ABCD, in quo est triangulum ICK, perpendiculares Qμ, Tξ, b quae in communes sectiones IC, IK, cadent, c eruntque inter se se parallelae. vt de rectis PX, SY, dictum est. Quod si adiungantur rectae μξ, erunt QT, μξ, parallelae & aequales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & aequales PS, XY.



b 3 8. vnde.
c 6. vnde.

d 2. sexti
e 30. primi

d Quia vero μξ, ipsi CK, parallela est; quod latera IC, IK, proportionaliter sint secta in μ, & ξ, veluti diximus de recta XY; e erunt quoque μξ, XY, parallelae. Quare erit, ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt IY, ad YX, ita Iξ, ad ξμ: Est autem IY, maior quam Iξ. Igitur & YX, maior erit quam ξμ; Ac proinde & PS, qua aequalis est ipsi XY, maior erit quam QT, qua aequalis est ipsi ξμ.

HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, circa quadrilatera CKSP, PSTQ, circuli, egredianturque e centris rectae ZC, ZK, ZS, ZP; βP, βS, βT, βQ. Si igitur ZC, non credatur maior, quam βP, erit vel aequalis, vel minor. Sit primum aequalis. Quia ergo latera ZK, ZC, aequalia

lia ponuntur lateribus β S, βP, & baſis K C, *maior eſt baſe PS;* [a] *erit angulus* KZC, *maior anguio* Sβ P: *Eadem ratione maior erit angulus* S Z P, *angulo* T β Q. *At quoniam baſes* K S, C P, *baſibus* S T, P Q, *ſunt æquales;* [b] *erunt anguli* KZS, CZP, *angulis* S β T, P β Q, *æquales. Igitur quatuor anguli ad* Z, *maiores erunt quatuor angulis ad* β: *Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur æqualis eſt recta* ZC, *rectæ* β P.

[a] 25. primi

[b] 8. prim

SIT deinde ZC, *minor, quam* β P. *Et abſcindantur* β π, β ρ, β ω, β φ, *ipſis* Z C, ZK, ZS, ZP, *æquales, connectanturque rectæ* πρ, ρω, ωφ, φπ, [c] *quæ parallelæ erunt rectis* P S, S T, T Q, Q P, *eo quod rectæ ex centris ſectæ ſint proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit ut* β S, *ad* S P, *ita* βρ, *ad* ρπ. *Cum ergo* β S, *maior ſit quam* βρ, [d] *erit & S P, maior quam* ρπ. *Eademque ratione maiores erunt* ST, TQ, QP, *rectis* ρω, ωφ, φπ; *Ac propterea cum* P S, *minor ſit, quam* CK, & ST, PQ, *æquales rectis* KS, CP, & TQ, *minor quam* PS, *erunt rectæ* πρ, ρω, ωφ, φπ, *minores rectis* CK, KS, SP, PC. *Quare cum rectæ* βπ, βρ, βω, βφ, *rectis* ZC, ZK, ZS, ZP, *ſint æquales;* [e] *erunt anguli ad* Z, *maiores angulis ad* β: *Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi ſint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta* ZC, *quam* β P: *Sed neque æqualis eſt oſtenſa; Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.*

[c] 2. ſexti

[d] 14. quin.

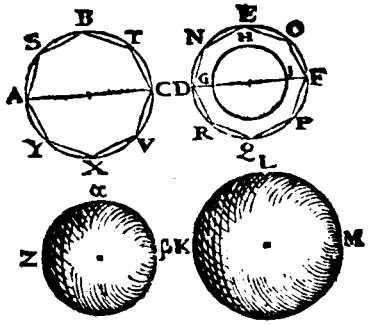
[e] 25. primi

THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

SPHAERAE inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

SINT

SINT duæ ſphæræ A B C, D E F, quarum diametri A C, D F. *Dico* ſphæram A B C, ad ſphæram D E F, habere proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Si enim hoc non concedatur, *habebit* ſphæra A B C, ad aliam ſphæram G H I, minorem, vel K L M, maiorem, quã D E F, triplicatam prõ portionem diametri A C, ad diametrum D F. Habeat primũ ſphera A B C, ad ſphęram G H I, minorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; intelligaturque ſphæra G H I, concentrica ſphærę D E F. [a] *Inſcribatur in ſphæra maiori* D E F, polyedrum D N E O F P Q R, non tangens minorem ſphæram G H I; Atque huic ſimile polyedrum A S B T C V X Y, inſcribatur in ſphæra A B C. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ A B C, ad ſphæram G H I, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F: Eſt autem, per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R. Quare cum ſphæra A B C, maior ſit polyedro A S B T C V X Y, [b] erit & ſphæra G H I, maior polyedro D N E O F P Q R, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, minorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F.



[a] *17. duod.*

[b] *14. quin.*

HA-

HABEAT ſecundo ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Ponatur vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram Zαβ. Habebit igitur & ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, proportionem triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Et quia ſphæra KLM, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, maior, quam ſphæra Zαβ. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram Zαβ, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra ABC, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF, Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphęræ itaq; inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

HINC

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse spharam ad spheram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphera ad spheram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

Et Solidorum tertium.

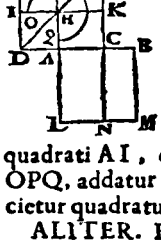
THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

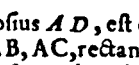
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; maius ſegmentum aſſumẽs dimidiam totius, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia totius deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta *A B*, in *C*, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum *A C*. Producta autem *B A*, ad *D*, ſit *A D*, dimidia totius *A B*. Dico quadratum rectæ *C D*, quintuplum eſſe quadrati rectæ *A D*. Deſcribatur enim ſuper *C D*, quadratum *C E*, in quo ducta diametro *D F*, ducatur *A G*, ipſi *D E*, parallela, ſecans diametrum in *H*, puncto, per quod ducatur *I K*, parallela ipſi *C D*. Producta deinde *G A*, perficiatur quadratum *A M*, protrahaturque *F C*, ad *N*. eruntque

ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulũ CM, ſub AB, CB, æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB; & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: [c] Eſt autẽ vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius AK. [d] Quoniam autem AK, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum ſit quadrati AI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineę AD; erit & gnomon OPQ, eiuſdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, ſi gnomoni OPQ, addatur ipſum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



ALITER. Ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratum rectæ AB, quadruplum eſt quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur, [e] Eſt autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis ſub AB, AC, & ſub AB, BC, comprehenſis; Et rurſus, quod ſub AB, AC, æquale eſt ei, quod ſub AD, AC, bis; (ſicut enim AB, ipſius AD, eſt dupla, ſita quoque erit rectangulum ſub AB, AC, rectanguli ſub AD, AC, duplum, cum vtriuſq; rectanguli eadem ſit altitudo AC. Ac propterea rectangulum ſub AD, AC, bis ſumptum æquale erit rectangulo ſub AB, AC.) [g] Quod vero ſub AB, BC, æquale eſt quadrato rectæ AC, cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiuſdem rectæ AD. [h] Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale ſit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis; Erit & quadratum



rectæ

[a] 3. defin. ſexti.
[b] 17. ſexti.
[c] 1. ſexti
[d] 43. primi
[e] 2. ſecundi
[f] 1. ſexti.
[g] 17. ſexti
[h] 4. ſecun.

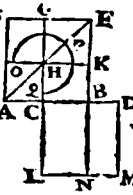
rectæ C D, quadrati rectæ A D, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI recta linea' suijpsius segmenti quintuplum posit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta *AB*, in C, positque quintuplum segmenti AC; sumatur autē ipsius AC, dupla CD, quę, vt post ostēdemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si C D, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse C B, reliquā partem prioris lineę. Describatur. n. I super A B, quadratum B F, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela C G, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi A B. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; *E* B, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 2. lib. F. CI, KG, quadrata rectarum AC, C*B*. Quia igitur quadratum B*F*, quintuplū ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratū *C* I, relinquetur gnomon OPQ, eiusdē quadrati CI, quadruplus: Est autē & quadratum CM, quadruplum quadrati *C* I, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta C D, dupla sit rectæ A C. Igitur gnomon O P Q, quadrato C M, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque L C, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius C H, dupla. [a] Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectāgulum L B, ad rectangulum C *K*; erit quoque illud huius duplum: [b] Est autem C*K*, ipsi HF, æquale. Aequale igitur est LB,



[a] 1. sexti

[b] 43. primi

ipſis C K, HF; Ac proinde & reliquum quadratum K G, reliquo rectangulo B M. Quoniam ergo ſunt tres rectæ C D, C B, B D; eſtque rectangulum BM, ſub C D, BD, comprehenſum æquale ipſi KG, quadrato rectæ C B; [a] Erit vt C D, ad CB, ita C B, ad B D. Quam ob rem, ex definitione, recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum C B. [a] 17. ſexti

ALITER. Quoniam quadratum rectę AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ A C; [b] eſtque quadratum rectæ A B, æquale quadratis rectarum C B, AC, vna cum rectangulo ſub A C, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum C B, AC, una cum rectangulo ſub A C, C B, bis, quintuplum quadrati rectę AC. Dempto igitur quadrato rectę A C, relinquetur quadratum rectæ C B, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectę A C: Eſt autem & quadratum rectę CD, eiuſdem quadrati rectę AC, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequale igitur eſt quadratum rectę C B, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum ſub A C, C B, bis, æquale ſit rectangulo ſub C D, C B; (ſicut enim recta C D, dupla eſt rectæ A C, [c] ita quoque duplum erit rectangulum ſub C D, C B, rectanguli ſub AC, CB; cum vtriuſque rectanguli eadem ſit altitudo C B; Ac propterea rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectangulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: [d] At quadratum rectæ CD, æquale eſt rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD. Igitur quadratū rectæ CB, & rectangulum ſub C D, C B, æquale erit rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectāgulo ſub CD, BD; [e] ideoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſuijpſius ſegmenti quintuplū poſsit, &c. Quod erat demonſtrandum.

[b] 4. ſecundi

[c] 1. ſexti

[d] 2. ſecundi

[e] 17. ſexti

LEM

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario, quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD, [a] *cum æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod eſt propoſitum.*

[a] 4. ſecundi

THEOR. 3. PROPOS. 3.

3.

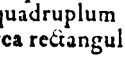
SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum *A* C, bifariam diuidatur in D. Dico quadratũ rectę BD, quintuplũ esse quadrati

rectæ C D. Describatur. n. super A B, quadratum A E, in quo diameter B F. Deinde ex C, D, ducantur ipsis A F, B E, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in I, *K*, punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secẽt rectas CG, DH, in P, Q. Eruntq; ex coroll. propos. 4. lib. 2. LG, PQ, *D*O, quadrata rectarum *AC*, CD, BD. Quoniam igitur recta A C, dupla est rectæ C D, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati P Q. Est autem rectangulum C*E*, æquale quadrato LG. (Nam cum sit vt *A*B, ad AC, ita AC, ad CB, [a] erit rectangulum sub A B, C B, nempe C*E*, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, quadruplũ erit quadrati PQ. Quia vero æqualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earũ latera H *K*, *I*Q, æqualia; [b] ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. [c] Quare rectangula IO, QE, æqualia erunt: [d] Est autem I O, ipsi I *D*, æquale. Ergo & QE, eidem I *D*, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon RST, eiusdem quadrati P Q, quadruplus: *A*c propterea addito quadrato P Q, erit quadratum *D* O, ex recta BD, quintuplum quadrati P Q, ex recta *C* D.

[a] 17. sexti
[b] 34. primi
[c] 36. primi
[d] 43. primi

ALITER. Cum A *C*, diuisa sit bifariam in *D*, & ei addita CB; [e] erit rectangulum sub A B, B C, vna cum quadrato rectę CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectanguium sub A*B*, BC, quadruplum est quadrati rectæ CD; (Nam cum sit, vt AB, ad *A*C, ita AC, ad CB; [f] erit rectangulum sub AB, B*C*, æquale quadrato rectę *A* C: quod cum, ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplũ sit quadrati rectæ CD; erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum eiusdem quadrati rectę *C* D.) *A*c propterea rectangulum sub *A* B, B C, vna cum quadrato rectæ *C* D.



[e] 6. secundi
[f] 17. sexti.

CD, quintuplum quadrati rectę CD. Igitur & quadratū rectę BD, quintuplum erit quadrati rectę CD. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmētum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonſtrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſsit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati; Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB, diuiſa inæqualiter in C, cuius maius ſegmentum AC, bifariam ſectum ſit in D; ſitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuiſam eſſe in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propoſ. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt autem & gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus. (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ, ex rectæ CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus.) Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG: At gnomoni RST, æquale eſt rectangulum CE, vt ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idē rectangulum CE, ſub AB, BC, comprehenſum: [a] *Ac proinde erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, ex definitione, ſecta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.* [a] 17. ſexti

ALITER. Cum AC, diuiſa ſit bifariam in D, & ei

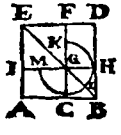
[a] 6. secundi addita CB; [a] erit rectangulum sub AB, BC, una cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex recta linea BD, descriptum quintuplum ponatur quadrati ex rectâ CD, descripti; erit & rectangulum sub rectis lineis AB, BC, descriptum, una cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiusdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD; rectangulum sub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Est autem eiusdem quadrati recta CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex scholio propos. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale est rectangulũ sub AB, BC. [b] Quamobrẽ erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde secta AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.

[b] 17. sexti

5. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea secundnm extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiore segmento describitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitq; segmentũ maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, simul tripla esse quadrati rectæ AC. Describatur enim super AB, quadratũ A D, in quo ducta diametro B E, ducatur ex C, ipsi BD, parallela CF, secans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipsi AB. Eruntq; CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propos. 4. lib. 2. Quoniam igitur est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [c] erit rectangulum sub AB, BC, nempe AH, æquale ipsi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale sit ipsi CD; erit gnomon KLM,



[c] 17. sexti

KLM, vna cum quadrato CH, duplus quadrati IF; [c] proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectę BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atq; adeo rectangulum sub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. [b] Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarũ AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

[a] *17. sexti*

[b] *7. secundi*

[c] *17. sexti*

SCHOLIVM.

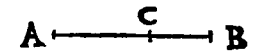
CONVERSVM *etiam huius verum est, videlicet.*

SI recta linea inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inaqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectã AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF; dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF; Ac propterea cum æqualia sint AH, & CD; erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, recta AC; erit vt AB,

vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.

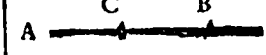
ALITER. Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla
a 7. secun. *sint quadrati rectæ AC;* a *Sint vero quadrata rectarũ AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectãgulo sub AB, BC, bis; erit & quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplũ quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectãgulum sub AB, BC, bis duplum quadrati rectæ AC; Et proinde rectangulum sub*
b 17. sexti. *AB, BC, semel, æquale quadrato rectæ AC.* b *Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.*



EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, tota linea assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod a maiori segmento describitur quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumẽs minus segmentum possit quintuplũ eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media
c 8. secundi *ratione, cui adiatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmẽto.* c *Quoniam enim quadra-*
d 17. sexti. *tum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC:* d *Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continue proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, qua-*



quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum ſub AB, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale oſtenſum eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiuſdem quadrati ex AC, quintuplum erit. quod eſt propoſitum.

SIT deinde recta AB, ſecta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori ſegmento BC, æqualis, ſitque quadratũ ex AD, quadrati ex AC, maiori ſegmento quintuplum. Dico AB, in C, ſectã eſſe extrema ac media ratione. Quoniã. n. quadratum ex AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum ſub AC, BC, quater, vna cũ quadrato ex AC, quintuplũ quadrati ex AC; ac propterea rectangulum ſub AB, BC, quater, quadruplũ quadrati ex AC: hoc eſt, rectangulum ſub AB, BC, æquale quadrato ex AC. [b] *Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, ſecta eſt extrema & media ratione. Quod eſt propoſitum.*

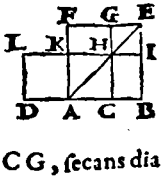
[a] *8. ſecundi*

[b] *17 ſexti.*

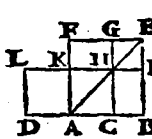
THEOR. 5. PROPOS. 5. 4.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecũdum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quæ a principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori ſegmento AC. Dico rectam BD, ſecari in A, extrema ac media ratione, eſſeque maius ſegmentum AB. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipſi BE, parallela CG, ſecans diametrum



metrum in H, puncto, per quod agatur ipſi *B*D, parallela IK, & ex D, ducatur ipſi AF, parallela *D*L, occurrens ipſi IK, productæ in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. *C K*, I G, quadrata rectarum A C, B*C*. Quoniam igitur eſt vt AB, ad A C, ita A C, ad *C B*; [a] Erit rectangulum IF, contentum ſub AB, BC, æquale quadrato *C* K, rectæ AC. [b] Eſt autem *C* K, ipſi A L, æquale. Igitur IF, æquale erit ipſi A L; additoque communi B K, erit rectangulum BL, contentum ſub BD, DA, æquale quadrato BF, rectæ A B; [c] Ac proinde erit vt BD, ad A*B*, ita AB, ad D*A*. Quare BD, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum AB.

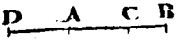


[a] 17. ſexti.

[b] 36. primi

[c] 17. ſexti

ALITER. Quoniam eſt vt A *B*, ad A *C*, hoc eſt, ad A D, ita A C, ad C B; Erit conuertendo vt D A, ad *A B*, ita B*C*, ad C A; & componendo vt DB, ad A B, ita AB ad *C*A, hoc eſt, ad AD. Secta igitur eſt *B*D, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

SIMILITER cum Campano & hoc demonſtrabimus.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmentum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RE-

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmẽtum AD; & ex maiori segmẽto AB, detrahatur recta AC, aqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum AB, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, et maius segmẽtum esse rectam AC, quæ aqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figura constructione, cũ sit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; [a] *erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, aquale quadrato BF, recta AB; & ablato cõmuni BK, erit AL, aquale ipsi IF;* [b] *Est autem AL, ipsi CK, æquale. Æquale igitur est IF, contentum sub AB, CB, quadrato CK, recta AC;* [c] *Ac proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentum maius est AC, minus vero segmentum recta CB. Quod est propositum.*

[a] 17. sexti.
[b] 36. primi
[c] 17. sexti.

ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; [d] *erit quoque ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione.*

[d] 19. quin.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF. Cum enim sit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla; [e] *erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam:*

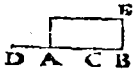
[e] 19. quin.

[a] 15. quin. *tam; Ac proinde & CB, dupla erit ipſius FE. Quoniam, vero eſt, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimidiam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Eſt autem ex defin. linee ſecte extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, ſecta erit in F, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.*

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; Vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione. Dico vtrumque ſegmentum AC, CB, eſſe lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori ſegmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [b] Quoniam igitur quadratum rectę CD, quintuplum eſt quadrati rectę AD; habebit quadratum rectę CD, ad quadratum rectę AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [c] Quare commenſurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea quæ ipſę rectę CD, AD, commenſurabiles quoque exiſtent, ſaltem potentia: Eſt autem AD, Rationalis, cum ſit dimidia lineę Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarũ CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. *Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.*) [d] erunt rectę CD, AD, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ſi ex CD, Rationali detra-



[b] 1. tertij dec.

[c] 6. deci.

[d] 9. decimi

tur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; [a] erit reliqua AC, Irrationalis, quę appellatur Apotome. [a] 74. deci.

RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AB, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum AE, æquale quadrato rectę AC. Quá ob rem quadratum Apotomę AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem AB, [c] facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi æqualem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum. [b] 17. sexti [c] 98. deci.

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano *ostendemus.*

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. [d] Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum; [e] ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8: Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erũt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde

A D C B

[d] 3. tertij dec. [e] 6. deci.

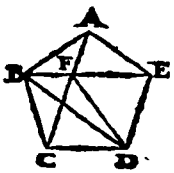
Ratio-

[a] 74. deci. *Rationali detrahatur* CD, *Rationalis potentia tantum commensurabilis;* [a] *erit reliqua* C B, *Irrationalis, quæ vocatur Apotome.*

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui nõ deinceps sint, æquales fuerint: AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD; & ex puncto F, vbi se intersecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD.



[b] 4. primi [c] 5. primi Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; [b] erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [c] Sunt autẽ & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint ostensa latera BE, BD; Toti igitur anguli AED, CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi: [d] 4. primi Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; [e] 6. primi erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera FE, ED, trianguli FED, æqualia sint lateribus FC, CD, triãguli FCD; & basis communis FD; [f] 8. primi erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli AEB,

AEB, BCA, oſtenſi æquales. Æquales igitur ſunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cum angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

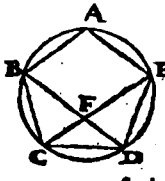
SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, triáguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi; Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [b] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED, CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 4. primi.
[b] 5. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 11.

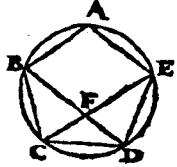
SI pentagoni æquilateri, & æquiángu li duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, ſe mutuo ſecantes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, maioraque earum ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pétagoni. [c] De-



[c] 14. quar.

scripto enim circulo circa pentagonum; erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: Est autem & angulus BCE, eiusdē anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt; Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. Quoniā autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistētes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD: Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari in F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.



a 28 tertij.
b 4. primi
c 32. primi
d 33. sexti.
e 6. primi
f 27. tertij.
g 32. primi
h 4. sexti.

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelā esse opposito lateri: hoc est, BD, parallelam esse lateri AE; et CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum, Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, *duobus rectis æquales sunt:* Sunt autem A, & ABC, *inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales; erunt etiā A, & AEC, duobus rectis æquales:* ac proinde AB, CE, *parallelæ erunt. Quod est propositū.*

i 22. tertij.
k 28. primi

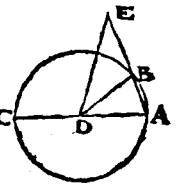
THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, cõponantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectũ addatur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidẽ circulo inscripti. Dico EA, rectã sectam esse in B, extrema ac media ratione, maiusq; segmentũ esse EB, latus hexagoni. Ducatur. n. ex A, per centrũ D, diameter AC, coniungantur q; rectę DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli; continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies; Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. [a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni; (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) erũt & anguli BDE, BED, æquales: [b] quibus cum æqualis sit externus ABD; [c] erit angulus ABD, duplus anguli BED: [d] Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erunt anguli BED. [e] Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC; erit angulus BDC, quadruplus eiusdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint



[a] 33. sexti.
[b] 5. primi
[c] 32. primi
[d] 5. primi
[e] 32. primi

duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD; [a] erũt trianguli *ADE*, ABD, æquiangula. [b] Igitur erit vt *EA*, ad *AD*, hoc est ad EB, ipsi AD, æqualem, ita AD, hoc est, EB, sibi æqualis ad BA; Atq; idcirco recta EA, secta est in B, extroma & media ratione, estque maius segmentum EB, latus hexagoni. Itaque si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, componantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus. Quod erat demonstrandum,

[a] *32. primi.*
[b] *4. sexti.*

SCHOLIVM.

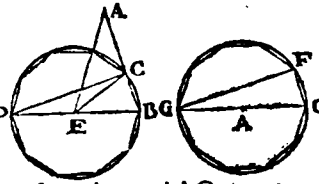
QVIA vero demonstrauimus ad propos. 5. huius lib. si minus segmentum linea diuisa extrema ac media ratione ex maiori segmento detrahatur; maius segmentum secari quoque extrema et media ratione, eiusque segmentum maius esse minus segmentum detractum. Hic autem ostensum est, latus hexagoni compositum cum latere decagoni, secari extrema ac media ratione: Fit, si latus hexagoni secetur extrema & media ratione, maius illius segmentum esse latus decagoni. Nam si hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod est maius segmentum, diuisum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propos. 5. huius lib. ostendimus. Hoc tamen aliter demonstrabimus lib. 14. propos. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile cum Campano demonstrabimus. Videlicet.

SI lineæ diuisæ extrema ac media ratione maius segmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus segmentum latus decagoni eiusdem circuli. Quod si minus segmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; Erit maius segmentum latus hexagoni eiusdem circuli.

SIT enim AB, diuisa in C, extrema & media ratione sitque

sit que primũ AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Dico, minus segmentum* CB, *esse eiusdẽ circuli latus decagoni. Coaptetur enim* BC, *in circulo, ita vt* CA, *extra circulũ cadat. Et ducta ex* B, *per centrum* E, *diametro* BED, *connectantur rectæ* EA, EC. *Quia ergo est, vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB; *& est* AC, *latus hexagoni æquale semidiametro* EB, *ex coroll. propos. 15. lib. 4. Erit quoque vt* AB, *ad* BE, *ita* EB, *ad* BC, [a] *ideoque triangula* ABE, EBC, *æquiangula erunt, cũ habeant latera circa communem angulum* B, *proportionalia; eritque angulus* A, *angulo* BEC, *æqualis. Rursus quia latera* CA, CE, *æqualia sunt, nempe latera hexagoni;* [b] *erunt anguli* CAE, CEA, *æquales;* [c] *quibus cum æqualis sit externus* BCE, *erit* BCE, *duplus anguli* A: [d] *Est autem angulo* BCE, *æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli* A; *Ac proinde duo anguli* BCE, CBE, *simul quadrupli erunt eiusdẽ anguli* A. [e] *Cum ergo angulis* BCE, CBE, *æqualis sit externus* CED; *erit quoque angulus* CED, *eiusdem anguli* A, *& propterea anguli* BEC, *ipsi æqualis ostensus est angulo* A, *quadruplus.* [f] *Quare & arcus* CD, *quadruplus erit arcus* BC; *Ac proinde arcus semicirculi* BCD, *eiusdem arcus* BC, *quintuplus existet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus* BC. *Quapropter recta* BC, *latus est decagoni.*

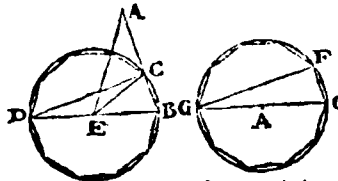


[a] 6. sexti.
[b] 5. primi.
[c] 32. primi.
[d] 5. primi.
[e] 32. primi
[f] 33. sexti.

SIT deinde CB, *minus segmentum, latus decagoni circuli* BCD. *Dico maius segmentum* AC, *esse eiusdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rursus* BC, *in circulo* BCD, *ducaturque diameter* BED. *Deinde interuallo* AC, *describatur circulus* CFG, *cuius diameter* CAG; *eritq; ex coroll. propos. 14. lib. 4.* AC, *latus hexagoni circuli* CF. *Quoniã igitur* AB, *secta est in* C, *extrema ac media ratione, estq; maius segmentum* AC, *latus hexagoni circuli* CFG; *erit, vt iam ostensum est, minus segmentum* CB, *latus decagoni eiusdem circuli* CFG. *Describatur ergo in circulo* CFG, *decagonum æquilaterũ & æquiangulum* CFG; *Item in circulo* BCD,

decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; *eruntque latera* BC, CF, *inter se æqualia. Quoniam vero, si connectantur rectæ* CD, FG, *anguli* CDB, FGC, *sunt æquales, vt in scholio propos. 22. lib. 3. ostendimus, quod insistant arcubus similibus* BC, CF, *nempe decimis partibus peripheriarum; &* [a] *sunt quoque anguli* BCD, CFG, *in semicirculis æquales; ac* [b] *mirum recti: Erunt quoque latera* BD, CG, *inter se æqualia. Quam ob rem cũ iametri* BD, CG, *sint æquales, æquales quoque erunt circuli* BCD, CFG. *Ac proinde, cũ recta* AC, *sit latus hexagoni circuli* CFG, *erit quoque eadem recta* AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Quod est propositum.*

[a] 31. tertij.
[b] 26. primi.



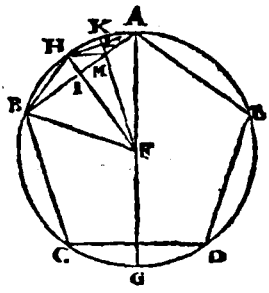
10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterũ describatur; Pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, descriptum sit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale esse quadrato lateris hexagoni, vna cũ quadrato lateris decagoni eiusdem circuli. Ducatur. n. diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiso deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, secans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rursus diuiso arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, secans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Quoniam igitur arcus AH, BH, æquales sunt; [c] erũt & anguli ipsis insistentes AFH, BFH, æquales. Quare cum

[c] 27. tertij.

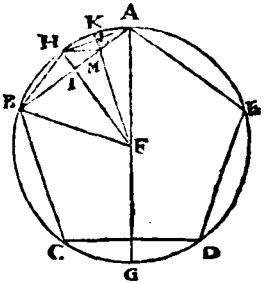
cum latera *AF*, *FI*, trianguli *AFI*, æqualia sint lateribus *BF*, *FI*, trianguli *BFI*, & anguli ipsis contenti æquales quoque; [a] erunt & bases *AI*, *BI*, æquales, & anguli *AIF*, *BIF*, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ *AL*, *HL*, & anguli *ALF*, *HLF*, recti. Deinde si ex semicirculis æqualibus *ABCG*, *AEDG*, demantur æquales arcus *ABC*, *AED*; relinquentur arcus *CG*, *DG*, inter sese æquales, ideoq; erit arcus *CG*, dimidiū arcus *CD*. Est aūt & arcus *AH*, dimidium dimidium arcus *AB*. Igitur cum arcus *AB*, *CD*, æquales sint; erunt quoque eorum dimidij arcus *CG*, *AH*, æquales; Ac proinde cum arcus *AH*, duplus sit arcus *HK*, erit & arcus *CG*, duplus eiusdem arcus *HK*. Eodem modo, quia arcus *AB*, *BC*, æquales sunt, & est arcus *AB*, duplus arcus *BH*, erit etiā arcus *BC*, eiusdem arcus *BH*, duplus. Quare arcus *CG*, *BC*, æquemultiplices sunt, nempe dupli, arcuum *HK*, *BH*; [b] Ac propterea totus arcus *BG*, duplus quoq; erit totius arcus *BK*; [c] & idcirco angulus quoque *BFG*, duplus anguli *BFK*: Sed quia idem angulus *BFG*, ad centrum duplus est quoque anguli *FAB*; erunt idcirco anguli *BFM*, *FAB*, æquales; Ac propterea triangula *ABF*, *FBM*, cum habeant angulos *FAB*, *MFB*, æquales, & angulum *ABF*, communem, æquiangula erunt. [f] Quocirca erit vt *AB*, ad *BF*, ita *BF*, ad *BM*; [g] ideoque rectangulum sub *AB*, *BM*, æquale erit quadrato rectæ *BF*.



RVRSVS quia latera *AL*, *LM*, trianguli *ALM*, æqualia sunt lateribus *HL*, *LM*, triāguli *HLM*, & anguli quoq; ipsis contenti æquales, nēpe recti: [h] erunt & bases *AM*, *HM*, & anguli *LAM*, *LHM*, æquales: [i] Est autē angulus *LAM*, angulo *HBA*, æqualis, quod & latera *HA*, *HB*, æqualia sint. Igitur & angulus *LHM*, eidem angu

[a] 4. primi.
[b] 8. quin.
[c] 33. sexti
[d] 20. tertij.
[e] 32. primi
[f] 4. sexti
[g] 17. sexti
[h] 4. primi.
[i] 5. primi.

lo HBA, æqualis erit; [a] Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erũt. [b] Quam ob rẽ erit vt AB, ad AH, ita AH, ad AM; [c] ideoque rectãgulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostẽsum est autem & rectangulum sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarũ BF, AH: [d] At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 32. primi

[b] 4. sexti.

[c] 17. sexti.

[d] 2. secun.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam. quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pẽtagoni ductam diuidere & arcũ, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtẽdit, & la-

& latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos. Demonſtratum enim eſt, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppoſitum CD, ſubtendit, bifariam. Quare ex prafato coroll. cum tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono equilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterii deſcribitur, eiuſque demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc a nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuiſa ſemidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abſcindatur EF, adiungaturque recta AF. Dico rectam AF, eſſe latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim

CD, ſecta ſit bifariam in E, eique addita DF; [a] *erit rectangulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoque quadrato rectæ EA, quæ ipſi EF, eſt æqualis.* [b] *Eſt autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectangulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadratis rectarum AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum ſub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc eſt, quadrato rectæ CD.* [c] *Quam ob rem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF; propterea que recta CF, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius ſegmentum CD, ſit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmentum DF, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib.* [d] *Rurſus*

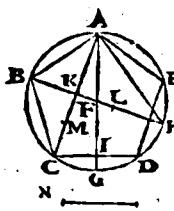
[a] 6. ſecundi
[b] 47. primi
[c] 17. ſexti
[d] 10. tertiædecimi

sus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, *una cum quadrato lateris decagoni* DF, *æquale est quadratum lateris*
[a] 47. primi *pentagoni eiusdem circuli;* [a] *Est autem eisdem quadratis rectarum* AD, DF, *æquale quadratum rectæ* AF; *erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ* AF; *ac propterea recta* AF, *lateri pentagoni æqualis. Quod est propositum.*

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum describatur: Pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem, describatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, esse lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum F, diametri AG, BH, secetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, secet diametrum BH, in K. Abscindatur quoque ex semidiametro FH, quarta eius pars FL; Item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoq; FL, BF, illi commensurabiles, cum sint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota BL, composita,
[b] 16. decimi *cum sit commensurabilis vtrique* FL, BF, *Rationalis erit.*



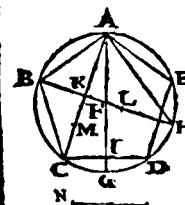
RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta secat AC, bifariam in B; secabit quoque rectam AC, bifariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propos. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, bifariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiusdem propos. Triangula ergo ACI, AFK, cũ habeant angulos AIC,
[c] 32. primi AKF, rectos, & angulum CAI, communẽ, æquiangula inter

inter se erunt. [a] Quam obrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA. [b] Vt autem CA, ad AF, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc est, vt CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad, FL; Atque componendo, vt CD, CK, simul ad CK, ita FK, FL, simul, nimirum recta KL, ad FL; [c] Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratū rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia vero si AC, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD, ([d] maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD;) Erit quadratum rectæ compositę ex CD, maiori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL; ideoque quadratum rectæ KL, commensurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

[a] 4. sexti.
[b] 15. quin.
[c] 22. sexti
[d] 8. tertij decimi.
[e] 1. tertij decimi
[f] 6. decimi

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL; erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. est quadratū rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. & habent enim quadrata proportionē laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. est quadratū rectæ FL, taliū 5. ostensum est quadratū rectæ KL. Qualiū igitur 25. est quadratū rectæ BL, talium 5. est quadratū rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sut patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [h] Erunt rectæ BL, KL, longitudine incōmensurabiles; ideoq;, cū ostensæ sint Rationales, erunt Rōnales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rōnali BL,

[g] 20. sexti
[h] 9. deci.



BL, dematur Rationalis KL, potẽtia tantum commensurabilis; [a] erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congruẽs erit KL.

[a] 74. deci.

IAM vero recta BL, posit plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ BL, æquale est quadratis rectarum KL, & N; Qualiũ autem partiũ 5. fuit quadratũ rectæ BL, taliũ 1. fuit quadratũ rectæ KL; Erit reliquum quadratũ rectę N, talium partium 4. qualium 5. est quadratũ rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ habebunt, quam numerus ad numerum. [b] Quare commẽsurabilia erunt; propterea quæ rectæ ipsæ BL, & N, commensurabiles, saltem potentia: Est autem BL, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia vero quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quę 5. ad 4.) [c] Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis, longitudine sit commẽsurabilis Rationali BH; (Qualium enim partium 8. est BH, talium 5. est BL,) posit que plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est; Erit BK. Apotome quarta, ex definitione.

[b] 6. decimi

[c] 9. decimi

POSTREMO quia recta AB, est media proportionalis inter BH. BK, ex coroll propos. 8. lib. 6.) quod triangulum ABH, [d] habeat angulum BAH, rectum, [e] a quo ducta est AK, ad basin perpendicularis; [f] erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo sub BH, BK. Quocirca cum superficiem cõtentam sub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, posit recta linea AB, [g] Erit AB, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c Quod erat demonstrandum.

[d] 31. tertij.

[e] 17. sexti

[f] 95. deci.

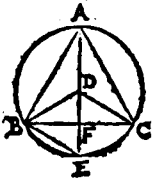
8. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilate-

rum

rum describatur; Trianguli latus, potentia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inscribatur A B C. Dico quadratum lateris AB, triplum esse quadrati ex semidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ secet, ex coroll. 2. propos. 10. huius lib. arcum B C, bifariam in E, & rectam B C, bifariá quoque & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus B C, sit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE, eiusdem peripheriæ sexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis semidiametro circuli, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres sextas partes totius circuli; arcus vero AB, cum sit tertia pars totius circuli, duas sextas comprehendit eiusdem circuli. Igitur arcus BE, sexta pars est eiusdem, ac proinde recta BE, latus est hexagoni, & æqualis semidiametro DE, ex coroll. propos. 15. lib. 4. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale est quadratis rectarum AB, BE, [b] quod angulus A BE, in semicirculo rectus sit; Est autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ BE, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod linea AE, dupla sit lineæ BE; erunt quadrata rectarum AB, BE, simul, quadrupla quoque quadrati eiusdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. sunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ AB, triplum est quadrati rectæ BE, quæ æqualis est semidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum describatur, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 47. primi

[b] 31. tertij.

SE-

COROLLARIVM I.

SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli aequilateri in eo circulo descripti. Nam cum latus AB, ostensum sit potentia triplum semidiametri AD; posito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum est quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propos. 8. lib. 6. ut est AE, ad AB, ita se habet AB, ad AF; erit quoque latus trianguli aequilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad basim demissa potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib. 14. propos. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi potest, semidiametrum DE, bifariam secari in F, a latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectae AB, triplum sit quadrati rectae BE; si ponatur quadratum rectae AB, partium 12. erit quadratum rectae BE, talium partium 4. Est autem quadratum rectae BE, aequale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF, FE. Est autem talium partium 3. quadratum rectae BF, (quod quadratum rectae AB, quadruplum sit quadrati rectae BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectae FE; Ac proinde quadratum rectae BE, hoc est,

[a] 47. primi

quadra-

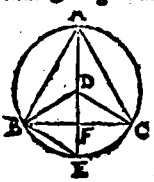
Quadratum rectæ DE, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Cum igitur, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. idem quadratum rectæ DE, quadruplum ſit quadrati dimidiæ lineæ ipſius DE; erit FE, dimidia ipſius DE. Quocirca DE, bifariam ſecatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſsim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito.

IN circulo ABC, *cuius centrum* D, *triangulum aquilaterum inſcribatur* ABC. *Dico rectam* AE, *per centrum* D, *ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum* BAC, *& latus* BC, *necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoque* DE, *ſecari a latere* BC, *bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis* BD, CD, BE; *cũ latera* AB, AD, *aqualia ſint lateribus* AC, AD, *triangũli* CAD; *& baſes* BD, CD, *aquales quoq; : [a] Erunt anguli* BAD, CAD, *æquales. Quod eſt primum.*



[a] 8. primi

DEINDE, *cum latera* AB, AF, *trianguli* BAF, *aqualia ſint lateribus* AC, AF, *trianguli* CAF, *& anguli ipſis contenti aquales oſtenſi: [b] Erunt & baſes* BF, CF, *& anguli ad* F, *æquales, ideoque recti. Quod eſt ſecundum.*

[b] 4. primi

POSTREMO, *cum anguli* BAE, CAE, *demonſtrati ſint eſſe æquales; [c] erunt & arcus* BE, CE, *æquales. Quare cum* BEC, *arcus ſit tertia pars circumferentiæ, erit* BE, *ſexta*

[c] 27. tertij

pars

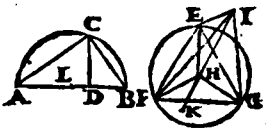
pars eiusdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, aequ
[a] 5. primi semidiametro proinde BD, aequalis, ex coroll. propos. 15. lib.
4. Igitur anguli BDE, BED, aequales erunt. Quoniam ergo
[b] 26. primi anguli BDF, BFD, trianguli DBF, aquales sunt anguli
BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; Erunt
& latera DF, EF, aqualia.

13. PROBL. 1. PROPOS. 13.

PYRAMIDEM constituere; & data sphæra complecti; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit sesquialtera lateris ipsius pyramidis.

SIT datę sphæræ diameter AB, circa quá semicirculus describatur ABC; & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AD, ipsius DB, dupla; at vero AB, eiusdem DB, tripla; & ipsius AD, sesquialtera. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, cũnectantur rectę AC, BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis sit ipsi DC, describatur circulus EFG, cuius centrũ H, in quo trianguli æquilaterum inscribatur EFG, adiũganturq; rectæ HF, HG, quæ singulæ æquales erunt ipsi DC, cum æquales sint ipsi HE, ad cuius interuallum descriptus est circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpendicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico solidum contentum quatuor triangulis FEC, IEF, IFG, IEG, esse Pyramidẽ, siue Tetraedrum. Quoniam.n. latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia sunt lateribus HI, HE, trianguli IHE,
[c] 4. primi & anguli ipsis contenti, recti, ex hypothesi, & 3. defin. lib. 11. erit basis AC, basi IE, æqualis. Non aliter ostendemus eandem rectam AC, æqualem esse rectis IF, IG. Rursus quia tres lineæ AD, DC, DB, proportionales sunt

ſunt ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt AD, ad DB, ita quadratum rectæ *A* D, ad quadratum rectæ D C; & componendo, vt *A*B, ad *D*B, ita quadrata rectarum *A*D, DC, ſimul ad quadratum rectæ DC: Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectę AB. Igitur erit quoque vt AB. ad DB, ita quadratum rectæ A C, ad quadratū rectæ *D*C; *A*c proinde cum AB, ſit ipſius D B, tripla, erit quoque quadratum rectæ AC, triplum quadrati rectæ HE, cum HE, æqualis ſit ipſi DC: Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque eſt eiuſdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ EF, æquale erit; & propterea recta AC, rectæ EF. Quare cum recta AC, oſtenſa quoque ſit æqualis rectis IE, IF, IG; erunt quatuor triangula EFG, EFI, FGI, GEI, æquilatera & æqualia inter ſe. Conſtituta igitur iam eſt pyramis, ſeu Tetraedrum, cuius baſis EFG, vertex vero I. Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter *A* B; & diametrum ſphæræ A B, potentia ſeſquialteram eſſe lateris E*F*, vel AC.



a 47. primi

b 12. tertij dec.

EXTENDATVR perpendicularis IH, vſque ad *K*, vt ſit H*K*, ipſi DB, & tota I*K*, toti *A*B, æqualis. Quia ergo tres rectæ *A*D, DC, *D*B, proportionales ſunt, quibus æquales exiſtunt tres IH, H*E*, HK; erunt quoque I H, *HE*, HK, proportionales. Quare cū HE, ſit ad I*K*, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK, ſemicirculus circa I K, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HE, tranſibit per E, vt mox oſtendetur; Eodemque argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam I*K*, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HF, tranſibit per F, quam ſemicirculus circa eandem I*K*, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HG, per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cū per omnes illius angulos E, F, G, I, incedat. Cum ergo hæc ſphęra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter

meter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehende tur idem Tetraedrum ſphæra data.

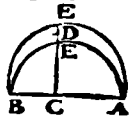
QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, talium 2. ſit AD. Igitur & quadratū rectę AB, ſeſquialterum erit quadrati rectę AC; Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphęrę, & AC, recta lateri pyramidis EF, æqualis; perſpicuū eſt, diametrū ſphęrę potētia ſeſquialterā eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo cōſtituimus, & data ſphęra cōplexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectā deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter ſe æqualia, &*



[a] 17. ſexti

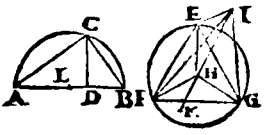
ipſæ

ipſæ rectæ C D, C E, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdũ. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.

HINC manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa I K, in plano rectarum I K, HE, tranſire per E, cum HE, ſit ad IK, perpendicularis, & media proportionalis inter IH, HK.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ AB, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis EF, erit quadratum rectæ EF, talium partium 6. qualiũ 9. eſt quadratum rectæ AB: At qualium partiũ 6. eſt quadratum rectæ EF, taliũ partium 2. eſt quadratum rectæ H E,



quod quadratum rectæ EF, triplum ſit quadrati rectæ H E. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ A B, talium partium 2. erit quadratum rectæ H E; Ac propterea diameter ſphæræ AB, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri H E, cum proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2. [a] 12. tertij decimi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi ACB, eritque L, centrum quoq; ſphæræ. Dico rectã L D, (quæ nimirũ ex centro ſphæræ ad baſin E F G, ducitur perpendicularis; cum AD, æqualis ſit ipſi I H, & ideo punctum D,

idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt, quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiã partẽ ſemidiametri AL. Quoniã. n. AD, dupla eſt ipſius DB; Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nã proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

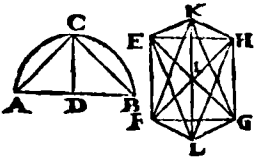
QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundum totã ſoliditatem. Hanc vero praxim, & ſequẽtes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durero non ignobili ſcriptore.

15. ## PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphęra complecti, qua & pyramidem; & demon-

demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

SIT ſphæræ, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro *D*, ad AB, perpendicularis ducatur *DC*, connectanturque rectæ AC, BC, [a] quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratũ EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, ſe mutuo ſecantes in I: eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. lib. demonſtratũ eſt. Deinde ex I, in vtramq; partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipſi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, eſſe octoaedrum, quod quæritur. Quoniã. n. latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt lateribus EI, IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti, rectis; ipſe quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod ſit æqualis angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & baſium EH, GH.) [c] Erit & baſis EK, baſi EH, æqualis; Eodemq; modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula eſſe æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFGH, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis cõſtructa comprehenditur; & diametrum ſphæræ AB, potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.



[a] 4. primi

[b] 8. primi

[c] 4. primi

QVONIAM.n.IE,perpẽdicularis eſt ad KL,ex 3.'defin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL;(quod tres rectę KI, IE, IL, ęquales ſint, ideoque eandem habeãt proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL,IE, deſcriptus tranſibit per punctum E,ex lemmate prȩcedentis propoſ. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KL, IF, incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G,H.Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, deſcribet ſphęram,quę complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hęc ſphæra æqualis ſit datæ ſphæræ, cuius diameter AB;(Nam cum rectæ AC, EF,æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC,duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ EF,quadrati rectę EI;Erunt & rectæ AD, EI,'hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, aquales erunt; ac proinde ſphærę ipſarum æquales exiſtent.) comprehendetur idem octaedrum data ſphęra.

[a] 47.primi

QVIA vero quadratum rectæ AB,[a] æquale eſt quadratis rectarũ AC, BC, quæ æqualia ſunt; erit quadratũ rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cũ AB, ſit diameter ſphærę, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphęræ potentia duplam eſſe lateris octaedri. Itaque octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

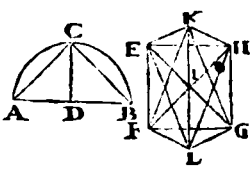
EX dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphęræ: quales ſunt KL, EG, FH, ſecãtes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum KI, recta ſit ad lineas EG, HF;

[b] 4.undec.

recta

cta quoque erit ad planum EFGH, per ipsas ductũ; Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, vt paucis rem complectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, se mutuo ad angulos rectos secabunt; Quæ quidem plana sunt quadrata, cum omnia eorum latera sint ipsius octaedri latera, ac proinde æqualia existant inter se, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri sphæra duplum sit quadrati lateris octaedri, vt ostendimus,) quadratum diametri HF, æquale existit quadratis laterũ octaedri FK, KH.[b] Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus sit. Eademque est ratio de cæteris angulis.

[a] 18. vnde.



[b] 48. primi

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides similes & æquales, quarum basis communis, est quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, semidiametri IK, IL: cuiusmodi sunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius sunt similia & æqualia planis alterius, vt constat, cum sint triangula æquilatera, & æqualia, præter basin communem, quæ est quadratum subduplum quadrati diametri sphæræ, vt est demonstratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadẽ sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertiũ

lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæra diuisum in sex partes. [a] Quoniam igitur diameter sphæra est potẽtia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæra. [b] Rursus quia diameter sphæra est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partiũ 3. qualiũ 6. est quadratũ diametri sphæra. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.

[a] 13. tertij decimi

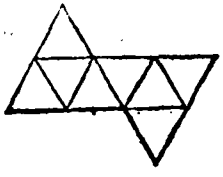
[b] 14. tertij decimi

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: [c] Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

[c] 15. vnde.

SCHOLIVM.



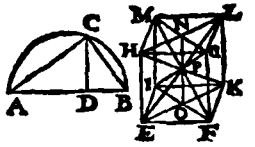
QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totam soliditatem, vt ait Albertus Durerus.

CVBVM

PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

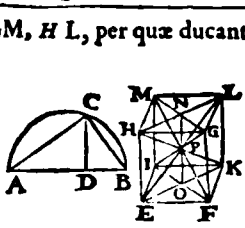
CVBVM constituere; & sphæra cõ plecti, qua & priores figuras; & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quã semicirculus describatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt sit AB, ipsius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, cõnectantur rectæ AC, BC. Super rectã EF, quæ rectæ BC, sit æqualis, quadratum constituatur EFGH, super quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipsi BC, quarum extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planũ EFGH, rectæ sunt; [a] erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis posita sit ipsi BC, hoc est, ipsi EF. [b] Igitur & EF, IK, parallelæ sunt & æquales; & ideo parallelogrammũ est EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales sint ipsi EF, omnes quatuor lineæ æquales existunt; [c] Sũt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales sint oppositis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum est. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, [d] cũ simile sit & æquale quadrato oppositi EFGH. Est enim EL, solidum parallelepipedum, [e] quod eius plana opposita sint parallela, nimirum per lineas parallelas se mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi sphæra diametri AB. Sint enim planorum oppositorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM,



[a] 6. vnde.
[b] 33. primi
[c] 34. primi
[d] 24. vnde.
[e] 25. vnde.

GM, *H* L, per quæ ducantur plana E K L H, F I M G.



[a] *28. vnde.* [a] Quia igitur tam planum E K L H, quam F I M G, cubũ bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi trãſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdẽ propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis planorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana E K L H, F I M G, rectãgula ſunt, (Cũ. n. HE, perpẽdicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata E *M*, E K; [b] perpẽdicularis quoq; erit ad planũ E K, ideoq; & ad rectã E K, ex defi. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt H E K. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano E K L H, necnon & anguli in plano F I M G. Rectangula ergo ſunt plana E K L *H*, F I *M* G,) & æqualia, quod latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 34. lib. 1. Ac proinde & ſemidiametri *P* E, P *L*, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa E L, ex centro P, deſcriptus, & circumductus, fixa manente diametro E *L*, ſphærã deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphæræ diametri A B, ita demonſtrabitur.

[b] *4. vnde.*

[c] *47. primi* [c] CVM quadratũ rectæ E K, æquale ſit quadratis æqualibus rectarũ æqualiũ E F, F K, ac proinde duplũ quadrati rectę E F, hoc eſt, quadrati rectæ *K* L: *E*rũt quadrata rectarum E K, K L, tripla quadrati rectæ K L: [d] Eſt autem quadratis rectarum E K, K L, æquale quadratum rectæ E L, qđ angulus E K L, ſit rectus in rectangulo E K L H. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum erit quadrati rectæ K *L*, hoc eſt, quadrati rectæ B C: At vero eiuſdem quadrati rectæ B C, triplum eſt quadratum rectæ A B. (Nam tres rectæ *A* B, B C, B D, ꝓportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt eſt A B, ad B *D*, ita erit quadratũ rectæ *A* B, ad qua-

[d] *47. primi*

ad quadratum rectæ BC. Cum ergo *A* B, ipſius B D, ſit tripla; erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia ſunt; ac propterea ipſæ rectæ EL, *A* B, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarũ ſphæræ æquales exiſtunt.

QVIA vero oſtenſum eſt quadratum diametri EI, triplum eſſe quadrati lateris cubi KL; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeque mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione oſtendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales ſunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis eſt alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ ſunt, cum ſint communes ſectiones planorũ parallelorum EFKI, GHML; c & angulus OPF, æqualis eſt oppoſito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erũt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.

a 29. primi
b 16. vnde.
c 15. primi

CO-

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. [a] *Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris tetraedri:* [b] *Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrũ ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt AC, cubi vero BC.* [c] *Perſpicuum autem eſt, diametrũ ſphæræ AB, poſſe & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, ſit rectus.*

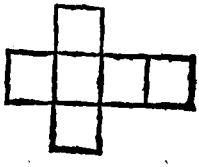
[a] 13. tertij dec.

[b] 15. tertij dec.

[c] 47. primi

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſeræ cuiuſpiam, vt conſtat.



16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras;

guras: & demonstrare, quod Icosaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor.

SIT sphæræ, quæ prædictas figuras cõprehẽdit, diameter AB, circa quã semicirculus describatur ACB: Et ex AB, abscindatur quinta pars BD, vt AB, ipsius BD, sit quintupla: & ipsius AD, sesquiquarta; At vero AD, ipsius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipsi BC, sit æqualis, circulus describatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inscribatur FGHIK. Post hæc diuisis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, cõnectantur rectę FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex cẽtro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quę æquales ponantur semidiametro EF, seu rectæ BC. Eruntq; omnes inter se æquales; [b] sed & parallelæ sunt. Igitur rectæ, quæ illas cõiungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confusionem, non duximus.), binæ inter se æquales erunt: Ac proinde cum æquales sint EL, EM, &c. semidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter se, & semidiametro EF, seu rectę BC. [d] Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum est plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademq; ratione planum p rectas QS, QT, ductum parallelum est plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quę ad propos. 16. lib. 11. ostendimus. Non aliter ostendemus planũ per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineę QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde si ex Q, ad interuallum QR, in eo plano circulus describatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, transibit, eritque

[a] 11. quar.

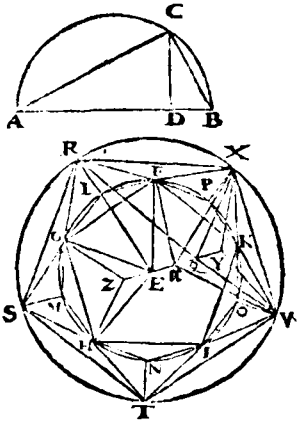
[b] 6. vndec.

[c] 33. primi.

[d] 15. vnde.

æqualis

æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R,S,T, V,X,rectis RS,ST,TV,VX,XR.[a] Quia igitur L R, PX, æquales ſunt,& parallelæ; ſi concipiatur duci recta LP; [b] erunt quoque LP,RX, æquales & parallelæ; [c] Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP,quintam partem circuli FGHIK,nempe duas decimas partes FL,FP. Igitur & RX,quintam partem auferet circuli RSTVX Simili prorſus argumento concludemus, reliquas rectas RS,ST,TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pẽtagonum æquilaterũ eſt RSTVX, omnia latera æqualia habẽs lateribus pẽtagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pẽtagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur ſemidiametro EF, hoc eſt, lateri hexagoni circuli FGHIK; & eſt LF, latus decagoni; [d] erit quadratum lateris pẽtagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: [e] Eſt autem eiſdẽ quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale eſt quadrato lateris pentagoni, ideoque recta FR; lateri pẽtagoni LP, ſeu FG, hoc eſt, ipſi RX, æqualis erit. Eademq; rõne erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriuſq; pentagoni æquales; Ac propterea decem triãgula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia; cum eorum omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni æquilateri



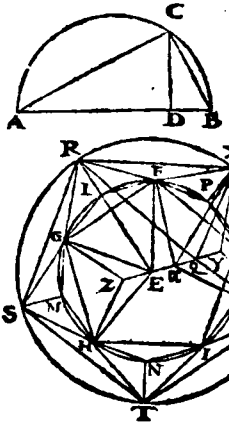
[a] 6. vndec.
[b] 33. primi
[c] 28. tertij.
[d] 10. tertij dec.
[e] 47. primi

lateri. Post hæc, perpendicularis EQ, in vtramq; partē extendatur, sintq; rectæ QY, EZ, æquales singulæ, lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE, GZ, HE, HZ. Qm̄ ergo QX, semidiameter est circuli RSTVX, hoc est, latus hexagoni, & QY, latus est decagoni eiusdem circuli; erit quadratū lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarū QX, QY; Est autē eisdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus sit ex dehn. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK, RSTVX, parallela sint ostensa, sitque EQ, ad illius planum recta, ex constructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex scholio propos. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QX, in eodem plano.) Igitur quadratum rectæ XY, æquale est quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis ostendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum est. Non aliter demonstrabimus, si ducantur rectæ RY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confusionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera esse, & æqualia triangulo VYX, hoc est, prioribus decem, cum omnium latera æqualia sint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, sit latus hexagoni, nempe semidiamer, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confusionem, non duximus,) quę omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob causam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera sint, & æqualia, copulenturque singula singulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; constitutum erit ex ipsis Icosaedrum. Quod dico comprehendi sphæra diametri AB.

[a] 10 tertij dec.
[b] 47. primi.

DIVISA enim recta EQ, bifariā in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia sunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, sint semidiametri circuli RSTVX;

VX: Sunt autem & anguli ∠QV, ∠QX, æquales, nempe re
a 4. primi. cti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & baſes ∠V, ∠X, æquales. Eademque ratione, ſi ducãtur rectæ ex ∠, Q, ad R, S, T, oſtendentur rectæ ∠R, ∠S, ∠T, æquales & inter ſe, & ipſis ∠V, ∠X. Rurſus quia latera ∠Q, QX, trianguli ∠QX, æqualia ſunt lateribus ∠E, EF, trianguli ∠EF, cum QX, EF, ſint ſemidiametri circulorum æqualium. & EQ, diuiſa ſit bifariam in ∠: Sunt autem & anguli ∠QX, ∠EF, æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11.



b 4. primi. b Erunt quoque baſes ∠X, ∠F, æquales: eodemq; modo ſi ex ∠, E, ad G, H, I, K, rectæ ducnatur, oſtendentur ∠G, ∠H, ∠I, ∠K, æquales ipſi ∠X; ∠c proinde decem lineæ ductæ ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiuſdẽ circuli; erit QZ, diuiſa in E, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens E ∠, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt, recta ∠Z, quintuplum poteſt eius, quod ex E∠, deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta ∠F, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ E∠. (Nam cum quadratum rectæ EF, quadruplum ſit quadrati rectæ ∠E, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius E∠; erunt quadrata rectarum EF, E∠, ſemel quinta pla quadrati rectæ E ∠. e Cum ergo quadratis rectarum EF, E∠, æquale ſit quadratum rectæ AF; erit quoq; quadratum

c 9. tertij-dec.

3. tertij-dec.

e 47. primi.

[d] ratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum, αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ, αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY, totæ Zo, Yα, æquales fiant.) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angulos Icosaedri constituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphęrę diametri AB.

[a] CVM.n. sit vt αZ, ad αE, ita YZ, dupla ipsius α Z, ad QE, duplam ipsius αE; [b] Ac propterea vt quadratum rectę αZ, ad quadratum rectę αE, ita quadratũ rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratũ rectæ αZ, ostensum quintuplum quadrati rectæ αE: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectę BC: Est autem & eiusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6. sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existẽte AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt,

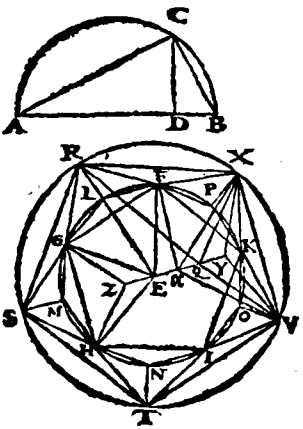
[a] 15. quin.
[b] 22. sexti

QVONIAM denique diameter sphæræ AB, Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendũ est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur.) pótq; quintuplũ quadrati rectæ BC, hoc est, rectę illi æqualis EF; erit quoque semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis. (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. [c] erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG,

[c] 6. decimi.

latus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrum igitur cõſtituimus, & ſphæra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. quod erat facien.

COROLLARIVM I.



EX dictis infertur, ſphæra diametrum eſſe potẽtia quintuplam ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutũ eſt, & quæ quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum. n. eſt quadratum diametri AB, quintuplum eſſe quadrati rectæ BC, hoc eſt, ſemidiametri EF.

COROLLARIVM II.

ITEM manifeſtum eſt, ſphæra diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli: Nam Υ Z, diameter ſphæra componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QΥ, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

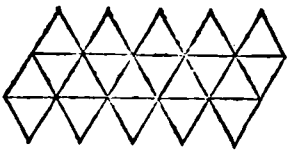
COROL-

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icosaedri oppo sita, qualia sunt RX, HI, esse parallelia. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidē rectæ LP, sit quoq; parallela recta HI, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademque est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hac figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam soliditatem, si rite inter sese aptentur.

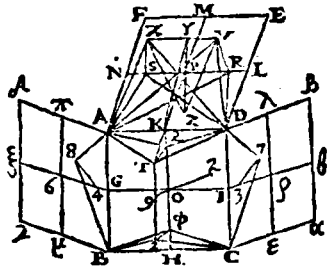


PROBL. 5. PROPOS. 17. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra cōplecti, qua & prędictas figuras; & demōstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratū ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit cōmunis horum sectio recta AD, (Insi

ſtunt enim omnes baſes cubi ſibi mutuo ad angulos rectos. Nam in præcedentibus, vt cubus conſtitueretur, erectæ ſunt ex angulis baſis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipſi baſi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere poteſt ex figura propoſitionis 15. huius lib. [a] Quare & baſes cubi per ipſas ductę, rectæ erunt ad eandem baſin EFGH.) Diuiſis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G, H, I, K, L, M, N, quę rectis cõnectantur ſecãtibus ſeſe in O, P, centris quadratorum, vt cõſtat ex demonſtratione octaui problematis lib. 4. Secentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in pũctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales ſegmẽtis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, eſſe vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri conſtituendi. Quod enim pentagonum ATDVX, ſit in vno plano, ita oſtendetur. Cum RV, SX, ſint ad quadratum ADEF, rectę, [b] ipſę erunt parallelę; Ac proinde, cũ ſint æquales, (quia ſegmenta maiora PR, PS, quibus æquales ſunt poſitæ, æqualia ſunt, cum & lineæ ſectę PL, PN, æquales ſint.) [c] erunt quoque coniungentes rectę RS, VX, æquales & parallelę: [d] Eſt autem & AD, eidem RS, ſiue LN, parallela, eo quod AN, DL, parallelę ſunt & æquales. [e] Igitur & AD, VX, parallelę ſunt; [f] Ac proptereà rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipſis erunt plano; ideoque trapezium ADVX, in vno exiſtet plano: Eſt autem & triangulum ATD, in vno plano. Dico quod & in eodẽ plano cum trapezio ADVX. Ex P. n. ducatur PY, parallela ipſi RV, quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta ſit RV: Et conectantur re-



[a] 18. vnde.
[b] 6. vndec.
[c] 33. primi
[d] 33. primi
[e] 9. vndec.
[f] 7. vndec.
[g] 8. undec.

rectæ K T, K Y. Quũ igitur est vt O K, ad O Q, ita O Q, ad Q K, ob sectionem rectæ O K: Est autem K P, ipsi O K, æqualis; (sunt enim dimidia latera cubi;) & P Y, ipsi O Q, (cum æqualis sit ipsi R V, quæ posita fuit æqualis ipsi O Q, maiori segmento;) Erit quoque vt K P, ad P Y, ita O Q, hoc est, Q T, illi æqualis, ad Q K. Quare cum triangula P K Y, Q T K, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum K, composita,[a] ita vt homologa latera sint parallela, nempe P K, & Q T, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A B C D; & P Y, Q K, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A D E F:[b] Erunt reliqua latera K Y, K T, in rectam lineam collocata;[c] Ac propterea recta T Y, in vno erit plano, ideoque planum A T D, & planum A D V X, vnum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno existit plano.

[a] 6. vndec.
[b] 32. sexti
[c] 1. vndec.

QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera A N, N S, trianguli A N S, æqualia sint lateribus A K, K Q, trianguli A K Q; (Sunt. n. A N, A K, dimidia latera cubi, & N S, K Q, segmenta minora rectarum æqualium sectarũ.) & anguli A N S. A K Q, recti; si ducatur recta A Q,[d] erunt bases A S, A Q, æquales. Rursus cum latera A S, S X, trianguli A S X, sint æqualia lateribus A Q, Q T, trianguli A Q T; (Nã rectæ A S, A Q, ostensæ sunt æquales, & S X, Q T, sunt segmenta maiora rectarum æqualium sectarum) & anguli A S X, A Q T, recti, ex defin. 3. lib. 11.[e] Erunt quoque bases A X, A T, æquales. Quod si ducatur recta D Q, ostendemus eodem argumento, rectam D T, rectæ A T; si verò ducatur recta D R, rectam D V, rectæ D T, esse æqualem. Sunt igitur pentagoni quatuor latera X A, A T, T D, D V; æqualia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum V X, hac ratione.[f] Quadrata rectarum P N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ P S, hoc est, quadrati rectæ S X: Est autem quadrato rectæ P N, æquale quadratum rectæ A N. Igitur & quadrata rectarũ A N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ S X.[g] Cum ergo quadratis rectarũ A N, N S, æquale sit quadratum rectæ A S; erit quoque quadratum

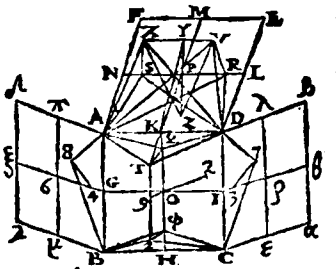
[d] 4. primi.
[e] 4. primi.
[f] 4. tertij decimi.
[g] 47. primi

rectæ AS, triplum quadraxi rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarũ *A*S, SX, simul, quadrupla eiusdẽ quadrati
a 47. primi. rectæ SX. [a] Est autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ *A*X. Quadratũ ergo rectę AX, quadruplum quoque erit quadrati rectę SX, hoc est, quadra
b 34. primi ti rectæ PS, hoc est, quadrati rectę XY; [b] Sunt enim rectæ P S, X Y, æquales. Cum igitur & quadratum rectę VX, quadruplum sit eiusdem quadrati rectę XY, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod VX, dupla sit ipsius XY; Erunt quadrata rectarũ AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipsę æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, ostensæ sint esse æquales; æquilaterum est pẽtagonum ATDVX.

QVOD autem & æquiangulum sit, ita perspicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, secta sit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori
c 3. tertij de. segmento PS; [c] erit quoque N*R*, secta in P, extrema ac
d 4. tertij d. media ratione, maiusque segmentum erit NP. [d] Quadrata igitur rectarum N*R*, R P, simul tripla sunt quadrati rectę NP, hoc est, quadrati rectæ A N: Est autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla sunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quae 47. primi drupla sunt eiusdem quadrati rectæ A N. [e] Sunt autem quadrata rectarum N R, A N, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarũ RV, AR, quadrupla sunt
f 47. primi quadrati rectæ AN. [f] Cum ergo quadratis rectarũ *A*R, RV, æquale sit quadratum rectæ A V; Erit quoque quadratum rectæ *A* V, eiusdem quadrati rectę *A* N, quadruplum. At vero eiusdem quadrati rectæ AN, quadruplum est quadratum rectæ AD, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod A *D*, dupla sit ipsius A N. *A*equalia igitur sunt quadrata rectarum AV, AD, ideoq; & rectę AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis *D*S, DX, ostendemus D X, *D* A, æquales esse; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter se esse æquales. Quoniã igitur latera T*A*, TD, trianguli T A D, æqualia sunt lateribus D V, VX, trianguli D XV; & bases *A*D, DX, æquales quoque:
g 8. primi [g] Erunt & anguli *A*TD, DVX, æquales. Non secus ostendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV, Ac proinde, cum

cũ in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeãtur anguli æquales ATD, DVX, AXV, ipſum erit æqangulũ. a 7. tertij de.

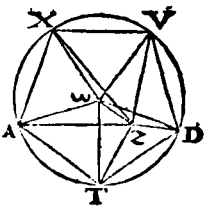
QVOD ſi ſumantur alia duo cubi quadrata Cϱβ D, Bγδ A, recta ad quadratum ABCD, in communibus ſectionibus CD, AB, quorum ſingula latera bifariam ſecentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur ſe mutuo ſecantibus in quadratorũ centris ρ, σ. Secẽtur deinde OH, OK, ρ I. σ G, extrema ac media ratione in punctis φ, Q. 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educãtur ad partes cubi exteriores, perpendiculares φ 2, Q T, 37, 48, æquales ſegmentis maioribus φO, QO, 3 ρ, 46, coniunganturq; rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonſtrabimus eadem ratione, pẽtagona T2C7D, T2B8A, æquilatera eſſe & æquiangula, & æqualia priori A T DV X, ob communia latera TD, TA. Conſtructa igitur iã ſunt tria pentagona tangẽtia cubi tria latera AD, DC, AB, & ſibi mutuo cohærẽtia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem ſimilia pentagona tãgentia reliqua nouem cubi latera; cõſtitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem ſphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ, hac arte demonſtrabimus.



INTELLIGANTVR plana cubi oppoſita ſe cari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam ſecantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppoſitum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppoſitum, planis per rectas GI, HK, ductis, &c. Quoniã igitur plana ſecantia recta ſunt ad dicta plana cubi, qd parallela ſint baſibus cubi, quæ rectæ ſunt ad plana ADEF, ABCD, b Erũt & cõmunes eorũ ſectiones ad eadẽ cubi plana rectæ. Quare cũ YP, recta ſit ad planũ ADEF, ipſa producta verſus Z, erit cõis ſectio b 19. vndec.

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis
[a] 39. vndec. OZ; erit ipsa, communis sectio planorũ, quę per rectas GI, HK, ducuntur. [a] Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant; secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphęræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: Quibus omnibus æquales quoq; esse oēs rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet per-
[b] 6. vnde. spicuũ, lucta recta ZX. [b] Quoniã parallelæ sunt KP, OZ, quod vtraq; recta sit ad planũ ABCD; Itẽ parallelæ sunt OX, ZP, quod vtraq; recta sit ad planũ ADEF; erit PK-
[c] 34. primi OZ, (debent. n. duo puncta Z, intelligi esse cõiuncta) parallelogrãmum; [c] ac ppea PZ, æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autẽ & PY, ipsi PR,
[d] 4. tertij dec. æqualis. Tota ergo ZY, toti NR, æqualis erit. [d] Quare cum quadrata rectarum NR, PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erũt quoq; quadrata rectarum ZY, PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectæ PZ: (Est n. YX, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PY:)
[e] 47. primi Est autẽ quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratũ rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoq; quadratũ semidiametri sphæræ cubũ comprehen-
[f] 15. primi dẽtis. (Nã vt diameter ad latus cubi, ita est semidiame-
[g] 22. sexti. ter ad dimidiũ lateris; [g] Ac proinde vt quadratũ diametri ad quadratũ lateris, ita quadratum semidiametri ad
[h] 13. tertij dec. quadratũ dimidij lateris.) [h] Cũ ergo quadratũ diametri triplũ sit quadrati lateris, erit quoq; quadratũ semidiametri triplũ quadrati dimidij lateris.) Aequale igit est quadratũ rectæ ZX, quadrato semidiametri sphrę, seu cubi; Ac ppea ZX, æqualis semidiametro. Eadẽ rõne erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certe qa cũ latera ZY, YX, triãguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY,

YV, trianguli ZYV, & anguli cõtenti recti. (cũ enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelã VX, perpẽdicularis.) [a] Erunt bases ZX, ZV, æquales: Sunt aũt & ZA, ZD, ad angulos cubi, semidiametro sphæræ æquales, vt dictũ est. Sunt ergo iã quatuor rectæ ductæ ex Z, centro sphærę ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpendicularis demittatur Z ω, connectanturque rectæ ω A, ω T, ω D, ωV, ωX. [b] Quoniam igitur quadratũ rectę Z A, æquale est quadratis rectarum Z ω, ωA; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Zω, ωX: Sunt autem quadrata rectarum ZA, ZX, æqualia, quod rectę ZA, ZX, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarũ Z ω, ωA, quadratis rectarũ Zω, ωX, æqualia; Ac proinde demptõ communi quadrato rectę Zω, æqualia relinquentur quadrata rectarũ ωA, ωX, ideoq; rectę ipsę ωA, ωX, ęquales erunt. Non aliter ostendentur rectę ωV, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ωX, ęquales, quod & rectę ZV, Z D, ęquales sint ostensę rectis ZA, ZX. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectę lineę ęquales, quam duę; [c] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarũ Zω, ωA, æqualia erunt quadratis rectarum Zω, ωT; [d] Cũ ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his vero quadratũ rectæ Z T; Erũt æqualia quadrata rectarũ ZA, ZT; ppęaq; & rectæ ZA, ZT, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



[a] 4. primi.

[b] 47. primi

[c] 9. tertij

[d] 47. primi

POSTREMO cum sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: erit

a 15. quin. erit quoque vt NL, dupla ipsius NP, ad RS, duplam ipsius PS, ita RS, dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR: Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius.) b Igitur maius segmentum SR, hoc est, b 6. tertij. dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphęra complexi sumus, qua & prædictas figuras; & demonstrauimus, quòd Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM. I.

CVM ergo demonstratum sit; recta LN, extrema ac media ratione secta, maius segmentum esse rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadẽ sphæra descripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est linea recta subtendenti angulum pẽtagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis AV, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, c 8. tertij decimi. *facit maius segmentum latus pentagoni;* d 3. tertij de. *ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori segmen-*

segmento, id est, ex latere Dodecaedri, similiter diuiditur, facitque minus segmentum latus Dodecaedri, & maius segmentum latus cubi: Efficitur, si recta linea secetur extrema ac media ratione, cuius minus segmentum sit latus Dodecaedri, maius segmentum esse latus cubi eiusdem sphæræ.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro esse sex latera, quorum bina opposita sunt parallela, bifariamque secantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus sese in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos secantibus. Nam duo ex dictis lateribus sunt VX, T2, quæ videlicet parallela sunt lateribus cubi EF, AB; aliaque quatuor reperiuntur super reliquas quatuor bases cubi, quorum, quæ super bases cubi oppositas existunt, parallela sunt, cum parallela sint cubi lateribus parallelis & oppositis, secanturque, ex demonstratis, bifariã & ad rectos angulos, a lineis rectis, quæ centra basiũ cubi oppositarum coniungunt; quales sunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ vt demonstratum est, se mutuo intersecant in centro Z. Dico se mutuo secare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales sint dimidio lateri cubi; et YP, 9O, æquales maioribus segmentis æqualibus PS, OQ; Erũt totæ YZ, 9Z, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad sectiones oppositorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales sunt, seque bifariam in centro Z, mutuo secant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo KOZP, angulus OZP, rectus est, cum opponatur recto OKP. Non aliter ostendentur reliquæ lineæ rectæ centra basium coniungentes efficere angulos rectos.

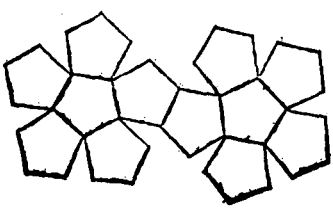
ctos. Omnes enim parallela sunt lateribus cubi parallelis rectos angulos constituentibus, vt perspicuum est.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE constat, si recta diuidens opposita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum est, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Cum enim quadrata rectarum ZY, YP, tripla ostensa sint quadrati rectæ PZ; erit ZY, secta in P, extrema ac media ratione, maiusque segmẽtum erit PZ, ex scholio propos. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZY, ad ZP, ita ZP, ad PY; [a] ideoque vt dupla ipsius ZY, nempe recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipsius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipsius ZP, ad duplam ipsius PY, hoc est, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera opposita Dodecaedri bifariam, secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiusdem sphæra.

[a] 13. quint.

SCHOLIVM.



QVOD si ex aliqua materia conficiantur duodecim pẽtagona æquilatera, & æquiangula, inter se æqualia, disponãturque, vt hac figura indicat, componetur Dodecaedrũ secundum totam solidi-

latem, si rite inter se complicentur.

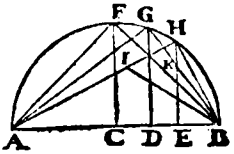
LATE-

PROBL. 6. PROPOS. 18.

18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæræ diameter *A B*, quæ in *C*, secetur bifariam; *In D*, vero ita, vt *BD*, sit ipsius pars tertia; *In E*, denique ita, vt *BE* sit quinta pars eiusdem. Descripto dein de circa *AB*, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex *C*, *D*, *E*, ipsi *AB*, perpendiculares *CF*, *DG*, *EH*; connectanturque rectæ *AF*, *BF*, *AG*, *BG*, *AH*, *BH*. Post hæc ex *HA*, abscindatur *HI*, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est *BH*: connectaturque recta *BI*. Postremo *BG*, secetur extrema ac media ratione in *K*, sitque maius segmentum *BK*.



QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico *AG*, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; *AF*, latus Octaedri; *BG*, latus cubi; *BI*, latus Icosaedri; *BK*, deniq; latus Dodecaedri. Quoniã. n. *AG*, media proportionalis est inter *BA*, *AD*, ex coroll. propos. 8. lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt *BA*, ad *AD*, ita quadratum rectæ *BA*, ad quadratum rectæ *AG*: Est autem *BA*, ipsius *AD*, sesquialtera; cum talium partium 2. sit *AD*, qualium 3. est *BA*. Igitur & quadratum rectæ *BA*, sesquialterum est quadrati rectæ *AG*; Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; erit *AG*, latus Tetraedri. [a] 13. tertij dec.

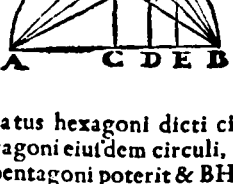
RVRSVS quoniam *AF*, est media proportionalis inter *BA*, *AC*, ex eodem coroll. propos. 8. lib. 6. Ac proinde vt *BA*, ad *AC*, ita quadratum rectæ *BA*, ad quadratũ rectæ *AF*, ex adducto coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem *BA*, ipsius *AC*, dupla: Erit quadratum rectæ *BA*, duplum quadrati rectæ *AF*, [b] Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit *AF*, latus Octaedri. Eodem modo erit *BF*, latus Octaedri. [b] 14. tertij dec.

DEIN-

DEINDE cum BG, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt A B, ad B D, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipsius BD, tripla, ex constructione: Erit quadratum rectæ A B, triplum quadrati rectæ B G. [a] Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi.

[a] 15. tertij dec.

PRAETEREA quia, ex eisdem corollariis, B H, est media proportionalis inter A B, B E, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Est autem, ex cõstructione AB, ipsius BE, quintupla: Erit quadratum rectæ A B, quintuplum quadrati rectæ B H. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex coroll. 1. propos. 16. huius lib. Erit B H, semidiameter, hoc est latus hexagoni dicti circuli: Est autem H I, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. [b] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, simul; Ac proinde [c] cum quadratum rectæ B I, æquale sit quadratis rectarũ B H, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiusdem. [d] Quam rem B I, latus est Icosaedri.



[b] 10. tertij dec.
[c] 47. primi
[d] 16. tertij dec.

DENIQVE, cum BG, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius segmentum, latus Dedecaedri in eadem sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Expositæ ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

QVOD uero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit, diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris Cubi; perspicuum est, qualiũ partium 6. fuerit quadratum diametri, talium 4: esse quadratum lateris Tetraedri; talium uero 3. quadratũ lateris Octaedri,

Diamet. 6.
Tetraed. 4.
Octaed. 3.
Cub. 2.

Octaedri;& denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis, seu Tetraedri, esse potentia sesquitertiũ lateris Octaedri, potẽtia uero duplũ lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterũ lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum, Tetraedri nimirum, Octaedri, & cubi, nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionẽ inter se habent, quam numerus ad numerum,[a] Ac propterea diameter sphæræ, & latera dictarum figurarum lineę sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt constat ex coroll. propos. 24. lib 8. [b] Erũt huiusmodi lineæ, nimirũ diameter sphæræ, latus Tetraedri, latus Octaedri, & latus cubi, lõgitudine incommensurabiles, ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles.

[a] 6. decimi

[b] 9. deci.

AT vero latera Icosaedri, & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales, illud quidem, Minor; hoc verò Apotome, vt demonstratum est, nullo modo, hoc est, nec longitudine, nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis. Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diametro sphæræ commensurabilia; essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia; Ac proinde, existente diametro Rationali, forent quoque ipsa latera Rationalia. Quod est absurdum. ostensum enim est, ipsa esse Irrationalia.

SED neque inter se ullo pacto cõmensurabilia sũt dicta latera Icosaedri, & Dodecaedri. Si namque credãtur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome, [c] erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor, [d] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum, sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo. [e] quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112. lib. 10. Apotome, & Minor

[c] 104. deci.

[d] 106. dec.

[e] 16. tertij dec.

& Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphęræ, ideoque Rationalia exiſtant, duo vero poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſque lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri; Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus denique Icoſaedri maius latere Dodecaedri; Hoc eſt, eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras conſtruximus. Quæ forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri, perſpicuum eſt. Cum enim AG, latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum, quã AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3.

EODEM modo oſtendemus latus Octaedri maius eſſe latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit, quam BG, cubi latus,

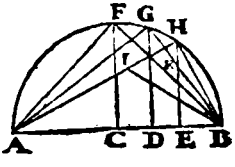
LATVS autem cubi BG, maius eſſe latere Icoſaedri BI, hac arte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę AB, noncuplum quadrati rectę BD, cũ noncupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium 3. eſt quadratum rectæ BG; [b] quod illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1. relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ AB, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. [c] Nam cum 9. ad 2. minorem habeant proportio-

[a] 20. ſexti.

[b] 15. terti-decimi.

tionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [a] erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectę GD, maius est quadrato rectæ BH, ideoq; recta GP, maior quã recta BH. Rursus quia diameter sphęrę AB, cõponitur ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrũ cõstituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI eiusdẽ circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. cõstat latus decagoni HI, minus esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertijs partibus, nẽpe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atque adeo, cum quadratum rectę AB, noncuplum sit ostensum quadrati rectę BD, erit idem quadratum rectæ AB, noncuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdum. quintuplum enim est demõstratum. Non ergo HI, tertia pars est ipsius AB: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectę AB, & proinde dupla ipsius HI, maior quam duę tertiæ, hoc est, quam AD, erit BH, minor quã tertia pars BD. Quare quadratũ rectę AB, maius erit, quam nõcuplum quadrati rectæ BD. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neque æqualis tertię parti, vt ostendimus. Minor ergo est quã tertia pars, hoc est, quam BD. Itaque cum rectę GD, DB, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [b] Est autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectę BI, quadratis rectarũ BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoque erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus scilicet Icosaedri.

[a] 10. quin.



[b] 47. primi.

MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patebit. Cum rectæ BG, diuisæ

extrema ac media ratione, maius segmentum sit B K, & minus G K; erit rectangulum sub B G, B K, maius rectangulo sub BG, GK; atque adeo rectanguia sub BG, BK, & sub BG, GK, simul maiora duplo rectanguli sub BG, GK: [a] Est autem rectangulis sub BG, BK, & sub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis sub B G, G K, æqualia sunt duo quadrata rectæ B K. (Nam cum sit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; [b] erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo sub BG, GK, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis sub BG, GK.) Maius igitur quoque est quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ BG, sex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia sunt quinque quadrata rectæ B H, (Cum enim quadratum rectæ A B, triplum sit quadrati rectæ B G, & quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quam quinque quadrata rectæ B H, æqualia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque æqualia) Igitur & quinq; quadrata rectæ BH, maiora erunt sex quadratis rectæ B K; Ac proinde vnũ quadratum rectæ B H, maius erit uno quadrato rectæ BK. (Si namque æquale esset quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ BH, minora sex quadratis rectæ BK. quod est absurdum, cum illa quinque hisce sex maiora sint demonstrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quam recta BK; Ac propterea cum BI, maior sit quam B H, multo maior erit BI, latus uidelicet Icosaedri, quam BK; latus Dodecaedri. Latera igitur quinq; figurarũ exposuimus, & inter se comparauimus. Quod erat faciendum.

[a] 2. secundi

[b] 17. sexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonstrant, præter dictas quinque figuras, non posse aliam constitui figuram solidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter se æqualibus, hac fere ratione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, solidus angulus constitui non potest, cum saltem tres anguli plani requi-

quirantur ad solidi anguli constitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, constat pyramidis angulus

EX quatuor, Octaedri angulus;

EX quinque, angulus Icosaedri;

EX sex autem huiusmodi trianguli ad idem punctũ coeuntibus fieri non potest angulus solidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes unius recti, ex coroll. 3 propos 32. lib. 1. Erunt eiusmodi anguli sex, undecim tertias partes unius recti, hoc est, quatuor rectis æquales. Quare ex illis nullus angulus solidus constituetur a Nam solidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam sex planis eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. a 20. undo.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus cõficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus solidus constitui potest. Rursus enim recti quatuor erũt. Multo ergo minus ex pluribus, quã quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus cõstabit.

EX tribus denique pentagonis æquilateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cũ enim quinque anguli pentagoni æquales sint sex rectis, vt ostendimus ad propos. 32 lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnũ rectũ, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiusmodi anguli tres rectos, & insuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erũt quatuor rectis, ideoq; ex ipsis angulus solidus cõstituetur. Sed ex quatuor huiusmodi angulis, nullus solidus angulus cõfici potest. Cum enim vnus, vt dictum est, maior sit recto, eo quod continet vnũ rectum, & insuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus solidus ex ipsis constituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quã quatuor eiusmodi angulis, solidus angulus constabit. Nec sane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis cõstitui poterit angulus solidus. Nam cũ sex anguli hexagoni æquales sint octo rectis, vt ad propos. 32. lib. 1. est demonstratum; Ac proinde vnus angulus contineat unum rectũ, ac præterea duas partes sextas vnius recti; continebunt tres anguli eiusmodi tres rectos, & sex sextas partes recti, hoc est, quatuor rectos. Quare ex ipsis nullo modo cõponetur angulus solidus; Atque idcirco multo minus ex pluribus

bus eiuſmodi angulis, quam tribus, angulus ſolidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores ſunt quatuor rectis. Quam ob rem perſpicuum eſt, præter dictas quinque figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe conſtitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramidis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrũ viginti triangulis eiuſmodi contentum.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in vnius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis ſeu Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius trianguli, vt in 3. fiunt 12. quorum dimidium eſt 6. numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4. fiunt 24. quorum dimidiũ eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo trian-

gula

gula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiũt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si deniqua 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quotnam angulos solidos quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda sunt omnes bases in vnius basis angulos, vt habeantur omnium basium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli basium in vnum conueniũt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorũ, qui simul coeunt ad angulũ solidum constituendũ, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3 (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidũ angulum Octaedri.) conficiũt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicẽtur in 3. numerũ angulorũ vnius trianguli, fiũt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituũt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si deniq; 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot. n. anguli conueniunt ad constituendum angulũ solidũ Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & octaedrum reciproca esse, quod ad bases attinet, & ad angulos solidos. Nam quot basis in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet sex bases,

& octo angulos solidos, octaedrum vero octo continet bases, & sex angulos solidos. Sic etiam reciproca sunt Icosaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icosaedrum habet viginti bases, & duodecim solidos angulos, at Dodecaedrum duodecim bases possidet, & viginti angulos solidos. Solum Tetraedrum, (hoc est Pyramis) cum nullo reciprocatur, nisi cum seipso. Habet enim quatuor bases totidēq; solidos angulos.

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et Solidorum quartum,

Vtquidam arbitrantur: vt alij vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſcipling ſocietatem commendatus, longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumque diſſererent aliquando de ſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorũ, *quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non rectè tradidiſſe Apollonium; quæ a ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderũt. Ego autẽ poſtea incidi*

in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonstrationem accurate complectebatur de re proposita, ex eiusque problematis indagatione magnam equidē cæpi voluptatem. Illud certe ab omnibus perspici potest, quod scripsit Apollonius, cum sit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, studio nos postea scripsisse videmur, id monimentis cōsignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus disciplinis, tum vel maxime in Geometria versatus, scite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi sumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ consuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiam, tractationem ipsam libenter audias. Sed iam tempus est, vt prooemio finem imponentes id, quod propositum est, aggrediamur.

TREDECIM libri hactenus expositi ab omnibus Euclidi ascribuntur: Duo vero subsequentes a plerisque Hypsicli Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui solent; in quorū quidem priori inter se comparantur Icosaedrū, & Dodecaedrū, tam secundum superficies, quam soliditates: In posteriori vero exponuntur descriptiones aliquot figurarū regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri sint instar appendicis eiusdam elementorum Euclidis. Verum quia plurima omittuntur ab Hypsicle scitu non iniucunda, quæ spectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inscriptiones vnius in alio; quatuor enim propositionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus absoluitur: Visum est, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo vberius de dictis figuris regularibus in vniuersum disserere, proponendo varia theoremata, atq; problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter se comparantur, & sibi mutuo inscribūtur. Qua in re maximo nobis adiumento fuisse Campanū, & Franciscum Flussatem Candallam, qui diligentem operā, & sedulam

sedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim nō solum insequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; verumetiam integrum isbrū, qui ordine decimus sextus est, adiūxit, in quo proprietates illustres de dictis corporibus proponit. Caterum præcipuum fuisse Hypsiclis institutum, in hoc lib. 14. disputare de comparatione mutua Icosaedri & dodecaedri, facile intelligi potest ex eius proœmio ad Protarchum, quod superius est positum.

QVONIAM vero in hisce duobus libris Hypsicles, & Campanus tam in numero propositionum, quam in earundem ordine, & inter se, & a Francisco Flussate, ideoque a nobis discrepant; annotauimus in margine ordinem vtriusque duobus numeris, quorum superior ordinem Hypsiclis, *inferior vero Campani seriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam esse tunc differentiam inter Campanum & Hypsiclem, significatur; Quod si aliquando loco superioris numeri apponatur hæc nota* O, *intelligendum est, in Hypsicle dictam propositionem desiderari. Idemque in Campano intellige, si forte loco numeri inferioris eadem nota posita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio est, tam apud Hypsiclem, quam apud Campanum, illam propositionem deesse.*

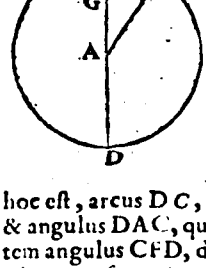
THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

QVAE ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni eidem circulo inscripti latus perpendicularis ducitur, dimidia est vtriusque lineæ simul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inscripti.

EX centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo descripti. Dico AE, dimidium esse lineæ compositæ ex latere hexagoni & decagoni eiusdem circuli. Extensa enim AE, in vtram-

vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi EF; conijciantur rectæ AC, CG, CF, BF. [a] Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & [b] anguli contenti sint æquales, nempe recti; [b] erunt bases CF, BF, æquales; [c] ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde existente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, suntque anguli contenti recti; [d] erunt & bases CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars est semicircumferetiæ DCF, cum sit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 5. arcus CF, qualiũ 4. est arcus DC, hoc est, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. [e] Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: [f] Est autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem sit basis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis ostensus CGF, duplus erit anguli CAF: [g] Atqui angulus CGF, externus, æqualis est internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, sit dimidium anguli CGF, vt ostensum est, erit GCA, reliquum dimidium eiusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA; [h] ac proinde & latera AG, CG, æqualia: Est autem CG, recta ostensa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FC, simul: Ac proinde tres simul AE, EF, FC, hoc est, duæ simul AF, FC, duplæ erunt ipsius AE, atq; Idcirco e contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pẽtagoni latus, dimidia duarũ simul AF, FC, nẽpe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni



[a] 3. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 28. tertij.
[d] 4. primi
[e] 33. sexti
[f] 20. tertij
[g] 32. primi
[h] 6. primi.

goni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductã ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hac linea recta ſubtendit bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

COROLLARIVM II.

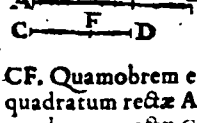
HINC quoque fit, perpendicularẽ ex centro ad latus pẽtagoni ductã, æqualẽ eſſe utriq; lineæ ſimul, et ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam.n. vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul; Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propo. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 4. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

SECEN-

SECENTVR binæ rectæ *A B*, *C D*, extrema ac media ratione in *E*, & F. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe vt *A B*, ad *CD*, ita *AE*, ad *CF*, & *EB*, ad *FD*; Item vt *AE*, ad *EB*, ita *CF*, ad *FD*, &c. Cum enim ſit, vt *AB*, ad *AE*, ita *AE*, ad *EB*; & vt *CD*, ad *CF*, ita *CF*, ad *FD*; [a] erit rectangulũ ſub *AB*, *EB*, æquale quadrato rectæ *AE*; & rectangulum ſub *CD*, *FD*, æquale quadrato rectæ *CF*. Quamobrem erit vt rectangulum ſub *A B*, *E B*, ad quadratum rectæ *A E*, ita rectangulum ſub *CD*, *F D*, ad quadratum rectæ *CF*; (eſt enim vtrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt quadruplum rectãguli ſub *AB*, *EB*, ad quadratum rectæ *AE*, ita quadrumplum rectanguli ſub *CD*, *FD*, ad quadratum rectę *CF*: & componẽdo, vt quadruplũ rectanguli ſub *AB*, *EB*, & quadratum rectę *AE*, ad quadratum rectę *AE*, ita quadruplum rectanguli ſub *CD*, *FD*, & quadratum rectę *CF*, ad quadratum rectę *CF*: [b] Sed quod quater continetur ſub *AB*, *EB*, vna cum quadrato rectę *AE*, æquale eſt quadrato lineę compoſitę ex *A B*, *EB*; Et quod quater continetur ſub *CD*, *FD*, vna cum quadrato rectę *CF*, æquale eſt quadrato lineę compoſitę ex *CD*, *FD*. Igitur erit quoque, vt quadratum lineæ compoſitæ ex *AB*, *EB*, ad quadratum rectæ *AE*, ita quadratum lineæ compoſitæ ex *CD*, *FD*, ad quadratum rectæ *CF*; [c] Ac proinde, vt recta compoſita ex *AB*, *EB*, ad rectam *AE*, ita recta compoſita ex *CD*, *F D*, ad rectam *CF*: Et componendo vt compoſita recta ex *AB*, *EB*, & recta *AE*, hoc eſt, dupla ipſius *A B*, ad rectam *AE*, ita recta compoſita ex *CD*, *FD*, & recta *CF*, id eſt, dupla ipſius *CD*, ad rectam *CF*; Et permutãdo, vt dupla ipſius *AB*, ad duplam ipſius *CD*, ita *AE*, ad *CF*; [d] Vt autem dupla ipſius *AB*, ad duplã ipſius *C D*, ita eſt *A B*, ad *CD*. Erit ergo vt *AB*, ad *CD*, ita *AE*, ad *CF*; Ac propterea, cum ſit vt tota *AB*, ad totam *CD*, ita *AE*, ablata ad *CF*, ablatam; [e] erit quoque reliqua *E B*, ad reliquam *FD*, vt tota ad totam. Quare vt *AE*, ad *CF*, ita erit *EB*, ad *FD*, cum vtraq; proportio eadem ſit proportioni *AB*, ad



a 17. ſexti

b 8. ſecundi

c 22. ſexti

d 15. quin

e 19 quin.

ad CD: Et permutãdo, erit vt AE, ad EB, sic CF, ad FD: & sic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, ostendemus & totas lineas, & earundem partes esse proportionales inter se. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione secentur, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonstrabimus hoc sequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodẽ circulo descriptorum eãdem proportionem habet, quam recta subtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipsius pentagoni.

QVONIAM. n. [a] latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione sectam; & recta subtendens pentagoni angulum sectæ extremæ ac mediæ ratione facit maius segmentum, latus ipsum pentagoni: [b] fit vt eadem sit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris segmenti ad minus, quæ maioris segmenti rectæ angulum pentagoni subtendentis ad minus. Cum ergo sit, vt maius segmẽtum ad minus, ita tota ad maius segmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta subtendens angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod est propositum.

[a] *9. tertiidecimi.*

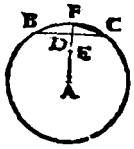
[b] *2. quartidecimi.*

EX hac quoque propositione & præcedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo descripti ducta secetur extrema ac media ratione, maius segmentum æquale est perpẽdiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus

nus vero æquale est dimidio lateris decagoni eidem circulo inscriptorum.

EX centro enim A, *circuli* B C, *ducta perpendicularis* A D, *ad latus* B C, *pentagoni eidem circulo inscripti, secetur in* E, *extrema ac media ratione. Dico maius segmentum* A E, *esse æquale perpendiculari ex* A, *ad latus trianguli æquilateri eiusdem circuli ducta; minus vero segmentum* E D, *æquale esse dimidio lateris decagoni eiusdem circuli.*



Extensa namque recta A D, *ad* F, *& connexa recta* F C; *erit* F C, *latus decagoni, cum ex coroll.* 1. *propos.* 1. *huius lib. arcus* B C, *nempe quinta pars totius circumferentiæ, bifariam secetur in* F; [a] *Ac proinde recta composita ex* A F, *latere hexagoni, &* F C, *latere decagoni, secta erit extrema ac media ratione, cuius maius segmentum* A F, *latus hexagoni, minus vero segmentum* F C, *latus decagoni. Quare vt in hac propos. ostensum est, erit vt tota* A D, *diuisa secundum extremam ac mediam rationem, ad totam compositam ex* A F, F C, *similiter diuisam, ita* A E, *maius segmentum ad* A F, *maius segmentum; &* E D, *minus segmentum ad* F C, *minus segmentum:* [b] *Est autem tota* A D, *dimidium totius compositæ ex* A F, F C. *Igitur &* A E, *ipsius* A F, *semidiametri, &* E D, *ipsius* F C, *lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per corollarium propositionis* 12. *lib.* 13. *perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis sit dimidio semidiametri; perspicuum est, maius segmentum* A E, *æquale esse dictæ perpendiculari, minus vero* E D, *dimidio lateris decagoni.*

[a] 9. tertij decimi.

[b] 1 quarti decimi.

2.
4.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilate-

rum

rum describatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, subtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarũ CD, AC, simul quintupla esse quadrati ex semidiametro circuli descripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. diuidat & arcum CD, & latus CD, bifariam in G, & H; erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoque recta subtensa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla est rectæ FG; erit ex scholio propos. 4. lib. 2. quadratũ rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: [a] Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla sunt quadrati rectæ FG; Atq; adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiusdẽ rectæ FG; [b] Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale sit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirũ semidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum describatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni subtenditur, recta linea, vtraque simul quadrata, quintupla sunt eius, quod ex semidiametro describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

[a] 47. primi

[b] 10. tertiædec.

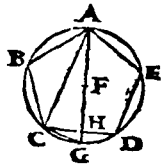
COROL.

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiã sphæra descripti; eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadẽ sphæra descripti. Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintupla esse quadrati semidiametri F G, &c.



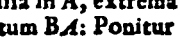
* 3. quarti decimi.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR. n. *AB*, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmẽtũ AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdẽ circuli. Sit. *AD*, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum

rectum ipſi AB ; [a] eritque tota compoſita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuiſa in A, extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum BA: Ponitur autem & AB, ſecta in C, ſimiliter. [b] Igitur erit vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, tota ad maius ſui ſegmentum AC: Sed eſt quoque vt BD, tota ad maius ſui ſegmentum AB, ita AB, maius ſegmentũ ad AD, ſegmentum minus, per definitionem lineæ ſectę extrema ac media ratione. Igitur erit vt AB, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erũt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni eſt AB; erit & AC, eiuſdem circuli latus decagoni.



[a] 9. tertij decimi.

[b] 2. quartidecimi.

ALITER. Adiungatur ipſi AB, in rectũ recta AD, æqualis maiori ſegmento AC ; [c] eritque tota recta BD, diuiſa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, *maius ſegmentum ipſius*, ponatur *latus hexagoni* alicuius circuli, per ea, quę demonſtrauimus ad propoſ. 9. lib. 13. AD, minus ſegmentum eiuſdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipſi AD, latus erit decagoni in eodẽ circulo deſcripti, cuius AB, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat oſtendendum.

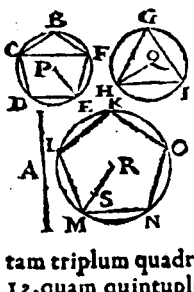
[c] 5. tertij de.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 2. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triãgulum, eidem ſphæræ inſcriptorum.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptũ & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icoſaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundẽ circulũ circumſcribere & pentagonum BCDEF, & triãgulũ GHI, hoc eſt, circulos BCDEF, GHI, ipſa circum

scribentes esse æquales. Circumscribat.n. circulus KLMNO, pentagonum K L M N O, [a] ex quo Icosaedrum sphæræ inscribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni sint latera Icosaedri, ideoque quodlibet ipsorum æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Secenturque RM, extrema ac media ratione in S; [b] eritque maius segmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, est latus hexagoni. Subtendat quoque recta CF, angulum B, pentagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. latus cubi in eadem sphæra descripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiusdem propos. BF, latus Dodecaedri est maius segmentum lateris cubi CF, secti extrema ac media ratione; [c] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius segmentum ad RS, maius segmentum; [d] Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratum rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo, per ea, quæ demonstrata sunt in scholio propos. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Est autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectę RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propos. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati semidiametri RM, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 13. æquale est quadrato ex A, diametro sphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [e] Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale est quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoq; quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia sunt tribus quadratis rectæ CF, (cū hæc ostensa sint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ



[a] 16. tertij dec.

[b] 4. quarti dec.

[c] 2. quarti dec.

[d] 22. sexti.

[e] 10. tertij dec.

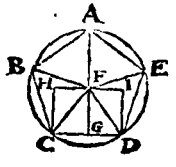
ctæ RS. Sed qm̃, (a cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE; & quinque quadrata rectę MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; (b) sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectę MN, æqualia quindecim quadratis rectę QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectę PE, æqualia quindecim quadratis rectę QH; ac propterea vnum quadratum rectę PE, vni quadrato rectę QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrãdum.

(a) 3. quarti dec.

(b) 12. tertiædecimi.

THEOR. 6. PROPOS. 6. 3. 6.

SI ex centro circuli pentagonũ Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.



EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. Dico rectangulũ sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis.n. rectis ex F, ad oẽs angulos pentagoni, resoluetur pẽtagonũ in quinq; triãgula æqualia, ex coroll. prop. 8. lib. 1. cũ

bina latera vnius æqualia sint binis lateribus aliorum, & basis quoque vnius basibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *F*, recta HI, parallela ipsi CD, occurrés duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex *C*, *D*, ad *CD*, in punctis H, & I. Eritque rectangulum *C* I, contentum sub HC, hoc est, sub F *G*, & C D.

[a] 41. primi.

[a] Quoniam vero rectangulum C I, duplum est trianguli F C D, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipsi *F*CD, æqualium; erit rectangulum *C* I, quinquies sumptum, æquale decem huiusmodi triangulis, hoc est, duobus pẽtagonis Dodecaedri, cum quinque tri angula æqualia sint vni pentagono; *A*tque adeo sextuplum rectanguli *C* I, quinquies sumpti, nimirum rectangulum C I, sumptum trigesies, æquale quoque erit sextuplo duorũ pentagonorum, id est, duodecim pentagonis, hoc est, toti superficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 41. primi

ALITER. Facta eadem figuræ constructione, [b] cũ rectangulum CI, duplum sit trianguli *F* C D, hoc est, æquale triangulo FCD, bis sumpto; Erit rectangulũ CI, trigesies sumptũ æquale triangulo FCD, bis sumpto trigesies, hoc est, sumpto sexagesies; ac proinde toti superficiei *D*odecaedri. Cum enim vnum pentagonum *D*odecaedri constet quinque huiusmodi triangulis, constabũt duodecim pentagona, nempe tota superficies Dodecaedri, sexaginta huiusmodi triãgulis. Atq; idcirco triãgulum FCD, sumptum sexagesies æqualis erit superficiei *D*odecaedri.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

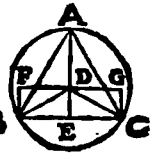
3. 7.

SI ex centro circuli triangulum Icosaedri circũscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit,

quod

quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.

EX centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri *A* B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum ſub D E, & B C, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis nãque rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *D*, recta *FG*, parallela ipſi BC, occurrens in *F*, & G, duabus perpendicularibus *BF*, CG, ex B, C, ductis ad B C; eritque rectangulum B G, contentum ſub *F* B, hoc eſt, ſub *D* E, & BC.[a] Quoniã vero rectangulũ BG, duplum eſt trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: *Erit* rectangulũ BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint vni triãgulo Icoſaedri; *Atq*; adeo idẽ rectangulum trigeſies ſumptũ, nẽpe decuplũ rectãguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triãgulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirũ decuplo duorũ triangulorũ Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triẽgulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendũ.



[a] 41. primi

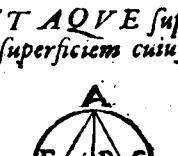
ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ,[b] cũ rectangulum *BG*, duplum ſit trianguli D B C, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectãgulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo D *BC*, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria cõficiunt vnũ.

[b] 41. primi

Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

IT AQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non



describantur amba figura in eadem sphæra, est sicut rectangulum contentum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pentagoni Dodecaedri in latus dictum, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus.

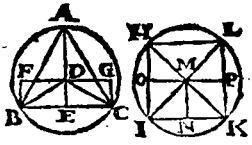
a 6. quarti dec. *b 7. quarti dec.* *c 15. quinti*

a Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto; b Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri. c Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel Octaedri, siue quadratum cubi, circumscribentis perpendicularis ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei Te-

Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies ſumptum, ſuperficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primo triangulũ Tetraedri ABC, circumſcriptũ a circulo, cuius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icoſaedri dictum eſt. Dico rectangulum BG, ſexies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Tetraedri. [a] Quoniam enim rectangulum BG, duplum eſt trianguli DBC, hoc eſt æquale duobus eiuſmodi triangulis; erit ipſum ſexies ſumptum æquale duodecim talibus trianguli. Cum igitur duodecim talia triangula conſtituant totã ſuperficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipſi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, ſexies ſumptum, ſuperficiei Tetraedri, ſeu Pyramidis æquale.



[a] 41. primi

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Octaedri. [b] Cum enim rectangulũ BG, duplum ſit trianguli DBC, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies ſumptum æquale viginti quatuor huiuſmodi triangulis: Sed viginti quatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies ſumptum æquale eſt ſuperficiei Octaedri.

[b] 41. primi

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, deſcribatur, & deducta MN, perpendicularis ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum reſoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipſi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum ſub OI, hoc eſt, ſub MN, & IK, ſumptum duodecies, æquale eſſe ſuperficiei cubi. [c] Quoniam enim rectangulũ IP, duplum eſt trianguli MIK, hoc eſt, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum æquale viginti quatuor eiuſmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula conſtituant ſex

[c] 41. primi

quadrata, id eſt, totam ſuperficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies ſumptum æquale ſuperficiei cubi. Quod eſt propoſitum.

ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (ſunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, ſit dimidium lateris HI, nempe æqualis ipſi MN) conſtituent duodecim talia rectangula ſex quadrata eiuſmodi, hoc eſt, totam ſuperficiem cubi.

4. 8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti; æquale eſt dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres ſint AH: Angulum vero A, ſubtendens recta BE, ſecetur in ſex partes æquales, quarum quinque ſint BI, & vna IE, ita vt BI, ſit quintupla ipſius IE. Dico rectangulũ cõprehenſum ſub AH, BI, æquale eſſe pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, cõtinet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum ſit ſemidiameter; erit AH, ipſius AF, ſeſquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. ppoſ. 10. lib. 13. in puncto K; cõtinebit tã KB, q̃ KE, tres ſextas rectæ BE; atq; adeo cũ BI, cõtineat quinq;, cõtinebit KI, duas; Ac proinde & KB, ipſius

ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrem erit vt A H, ad AF, ita KB, ad K I; [a] atque idcirco rectangulum ſub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo ſub medijs A F, KB. [b] Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin AF, & eãdem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta. Igitur & rectangulum ſub AH; KI, duplum erit eiuſdem trianguli A B F: [c] Eſt autem & rectangulum ſub A H, K I, duplum rectanguli ſub AH, IE; propterea quod & baſis KI, dupla eſt baſis IE, (continet enim KI, duas ſextas partes ipſius B E, & IE, vnam.) eademque ſemper altitudo AH. Igitur æqualia ſunt triangulum ABF, & rectangulum ſub A H, I E; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum eſt triãguli ABF, quod pentagonum in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rectis e centro F, vt propoſ. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum vero ſub AH, BI, quintuplum eſt rectanguli ſub AH, IE; quod & baſis BI, quintupla ſit baſis IE, eademque ſemper altitudo A H. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum ſub AH, BI, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16. ſexti
[b] 41. primi
[c] 1. ſexti
[d] 1. ſexti

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti, (e comprehenſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub A H, & ſub quinque ſextis partibus lateris

[e] 5. quartidecimi.

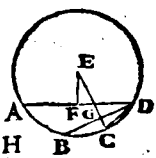
lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.

4. 8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo ABCD, [a] circunscribente & pentagoni Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & triāguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit deniq; H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico ita se vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim latus cubi H, secti extrema ac media ratione maius segmentum est BD, latus Dodecaedri, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, sectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentum est EF, ex coroll propos. 2. huius lib. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; [c] Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF, æquale erit rectangulo sub medijs BD, EG. [d] Quare vero est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cum bases sint H, AD, altitudo vero semper eadem EF; Erit quoque vt H. ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectāgulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare cum, ex coroll. propos 7. huius lib. sit, vt rectāgulum sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri



[a] 5. quarti decimi.

[b] 2. quarti decimi.

[c] 16. sexti

[d] 1. sexti

caedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque, vt *H*, latus cubi, ad *AD*, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

ALITER. [a] Circumſcribat pentagonum Dodecaedri *ABCDE*, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A. per centrum H, recta AI, quę per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, bifariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quę latus erit cubi, ex corol. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextę partes ſint BK. Dico rurſus eſſe, vt BE, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiē Icoſaedri. Quoniam.n. rectāgulum ſub AI, BK, ęquale eſt pentagono ABCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub AI, IF, ęquale eſt triangulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum FG, baſis trianguli dupla ſit ipſius IF, baſis rectanguli: Erit vt rectangulum ſub AI, *BK*, ad rectangulū ſub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: [b] Eſt autem vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita BK, ad IF, cum baſes ſint BK, IF, & altitudo eadem ſemper AI. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum *AFG*, ita BK, ad IF; *Ac* proinde, (ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum ABCDE, & recta BK, ęquemultiplicētur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum AFG; & recta IF, ęquemultiplicentur per numerum 20. [c] erit quoque vt pentagonum *ABCDE*, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigeſies ſumptū, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta BK, duodecies ſūpta ad rectā IF, vigeſies ſumptā: Atqui recta BK, duodecies ſumpta ęquiualet lateri cubi BE, decies ſumpto; (Nam cum BK, contineat quinq; ſextas partes ipſius BE; continebit eadē BK, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdē *BE*, quę efficiūt decē integras

[a] *5 quartidecimi.*

[b] *1. ſexti*

[c] *ſchol. 22. quinti.*

gras rectas BE.) Recta vero *IF*, vigefies ſumpta æqualis eſt lateri *I* coſaedri FG, decies ſumpto; (eo quod FG, ſit ipſius I F, dupla.) Erit igitur ſuperficies *D*odecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi BE, decies ſumptum ad latus *I* coſaedri FG, decies ſumptum; Ac propterea, [a] cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icoſaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icoſaedri; perſpicuum eſt, ita eſſe ſuperficiem *D*odecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, vt latus cubi ad latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum.

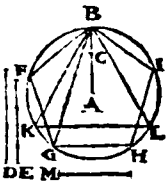
[a] 15. quint.

4. 9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea ſecetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori ſegmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minori ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti.

SECETVR recta *AB*, in *C*, extrema ac media ratione, ſitque maius ſegmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus *I* coſaedri in ſphæra eadem cum cubo deſcripti. Ex *A*, centro, ad interuallum *AB*, circulus deſcribatur, in quo cõſtituatur & pentagonum æquilaterũ BFGHI & triangulum æquilaterum *BKL*. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius ſphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. Quoniam uero AC, maius ſegmentum ſemidiametri *AB*, ſectę extrema ac media rõne, eſt latus Dec-



[b] 4. quartidecimi.

agoni

cagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus eſt Hexagoni; [a] poterit BF, latus pentagoni & totá AB, latus videlicet hexagoni, & maius ſegmentum AC, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſsit iam & recta M, totam AB, & minus ſegmentum BC, per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico ſic eſſe D, latus propoſitum cubi ad E, latus propoſitum Icoſaedri, vt eſt BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC [b]. Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum eſt quadrati ſemidiametri AB: [c] Item quadrata rectarum AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum rectæ M, ipſis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratũ rectæ AC: Eſt autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, ſectæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit BF, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib. 13. eo quod BG, eſt latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ; [d] Erit vt tota AB, ad maius ſegmẽtum AC, ita tota BG, ad maius ſegmentũ BF: Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę AC, ita quadratũ rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratũ rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratũ rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratũ rectę M; [f] Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC. Cum igitur propoſita latera D, E, cubi, & Icoſaedri, eandem habeant proportionem, quam rectę BG, BK, vt mox oſtendemus; perſpicuum eſt, vt ſe habet recta BF, potens totá AB, & maius ſegmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC, ita ſe habere propoſitum

[a] 10. tertij dec.
[b] 12. tertij dec.
[c] 4. tertij d.
[d] 3. quarti decimi.
[e] 22. ſexti
[f] 22. ſexti

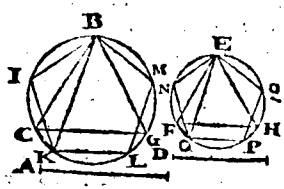
positum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus E. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæra eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK; demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæræ: Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, et circa ipsa describantur in his circa pentagona æquilatera BKLM, ENOPQ, connectanturq; rectæ BK, CK; EO, FO. [a] *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæræ; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti, in qua cubus latera AB. Erit BIKLM, pentagonũ Dodecaedri in eadem cũ ipsis sphæra descripti; Ac propterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæræ, ideoq; ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes sua circunferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione segmẽtorum similium, æquales inter se, quã an-*



[a] 5. quarti dec.

guli BKC, EOF; inter se, cum tam illi, quam hi, in segmentis circulorum similibus existant: Ac proinde, ex coroll. 1. propos. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, aqualis erit, & totum trianguli BCK, toti triangulo EFO, aquiangulū. 3 Quare erit, vt BK, hoc est, recta A, illi aqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icosaedri, ita EO, hoc est, recta D, illi aqualis, latus scilicet alterius cubi, ad EF, latus Icosaedri. Quod est propositum. * 4. sexti.

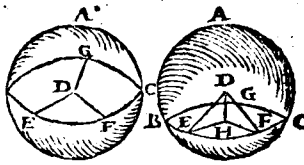
PERSPICVVM est igitur id, quod in demonstratione assumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icosaedri in vna sphara, quam habent BG, BK, latera cubi & Icosaedri in alia sphara.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri non solum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icosaedri in eadem sphara cum ipsis, vt vult propos. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icosaedri in quacunque alia sphera.

LEMMA I.

SI sphæra plano quopiam secetur, communis sectio circulus erit.

SECETVR sphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem sectionem planum BEFCG. Dico BEFCG, esse circulum. Transeat enim primo planum secans per centrum sphæræ, ita vt centrum D, sit in plano, seu communi sectione BEFCG; ducanturque ex D, centro sphæræ ad extremitatem communis sectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG.



DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ ductæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.

TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphæræ: Ducatur autem ex D, centro sphæræ ad planum secans perpendicularis DH; emittaturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectantur rectæ DE, DF.

Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro sphæræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & distis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea cõtenta, circulus erit; eiusq; centrũ, punctũ H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propo-

47. primi

CO-

COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habẽs, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant a centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes a centro sphęræ, æquales sunt.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter a centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. præcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectę EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectę EC, quadratis

[2] 47. primi.

dratis rectarum E G, G C, æquale : Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares E F, E G. Quam ob rem circuli A B, D C, æqualiter distant a centro E.

47. primi

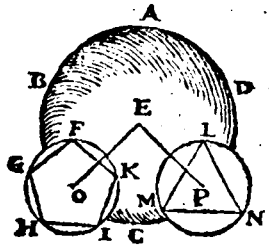
SED iam æqualiter distent circuli A B, D C, a centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarũ EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium E F, E G, cum circuli æqualiter ponantur distare a centro, reliquum quadratum rectæ F B, reliquo quadrato rectæ GC; atque adeo æquales erunt rectæ F B, G C, semidiametri scilicet circulorum A B, DC. Circuli igitur A B, D C, æquales sunt. Quod est propositum.

4. 10. THEOR. 11. PROPOS. 11.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.

IN

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, inscriptum sit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum FGHIK: Item Icosaedrum, cuius vnum triangulum LMN. Dico esse Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri, in una eademque sphæra, siue hæc eadem sit, quæ sphæra ABCD, siue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, superficiem sphæræ tangunt; si per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in sphæra FGHIK, LMN, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli FGHIK, LMN, Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro sphæræ distabūt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales sunt EO, EP, æquales erunt. Non aliter ostendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icosaedri deductæ æquales. Quare si ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, resoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & bases ipsarum æquales sint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter se, ex coroll. propos. 6. lib. 12. Eodemque modo, si ex omnibus angulis Icosaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, resoluetur Icosaedrum in 20. pyramides inter se æquales, quarū altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidū Dodecaedri. [b] Quoniā aūt est, vt basis FGHIK, ad basin IMN,



[a] 6. quarti dec.

[b] 6. duodec.

LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriusque eadem sit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in scholio propos. 22. lib. 5. demõstrauimus, vt duodecim bases Dodecaedri, tota videlicet superficies Dodecaedri, ad basin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc est, totum solidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rursus quia est, vt tota superficies Dodecaedri, ad Icosaedri basin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem scholium, vt tota superficies Dodecaedri ad 20. bases Icosaedri, id est, ad totam superficiem Icosaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icosaedri, nempe ad totum solidum Icosaedri: [a] Atqui ita est Dodecaedri superficies ad Icosaedri superficiem, vt cubi latus ad Icosaedri latus eiusdem cum ipsis sphæræ; atq; adeo, ex scholio propos. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque alterius sphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icosaedrum, vt latus cubi ad latus Icosaedri cuiuscunque sphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icosaedrum, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 9. quartidecimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero ostensum est quoque, [b] *ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in eadem cum ipsis sphæra:* [c] *Item ita esse cubi latus ad latus Icosaedri vnius eiusdemq; sphæræ, vt est linea potens totam diuisam quamcunque extrema ac media ratione, & maius segmentum illius, ad lineam potentem totam diuisam eandem, & minus illius segmentum:* [d] *Item ita esse Dodecaedrũ ad Icosaedrum eiusdem sphæræ, vt latus cubi ad latus Icosaedri in vna eademque sphæra; Perspicuum est, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icosaedri; & superficiei Dodecaedri ad superficiem Icosaedri*

[b] 9. quartidecimi.

[c] 10. quartidec.

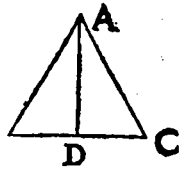
[d] 11. quartidec.

dri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

THEOR. 12. PROPOS. 12. 0. 11.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineę perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

IN triangulo æquilatero *A B C* ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum B C, perpendicularis *A D*. Dico quadratum lateris A B. ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniã. n. ob æqualitatem laterum AB, AC, [a] anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erũt duo anguli B, & *D*, trianguli ADB, æquales duobus angulis C, & D, trianguli ADC; habent autem & latus AD, commune, vel AB, *A*C, æqualia. [b] Igitur & reliqua latera B*D*, CD, æqualia ſunt; ac propterea latus BC, hoc eſt, latus AB, duplum rectæ BD; & idcirco quadratum lateris AB, quadruplum quadrati rectæ BD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cũ igitur quadrato rectæ *A*B, æqualia ſint quadrata rectarum AD, B D; erunt quoque quadrata rectarum AD, BD, quadrupla quadrati rectæ B*D*; Aè proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ AB, vel quadrata rectarum A D, B D, talium 1. erit quadratum rectæ BD, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ *A D*. Quare quadratum rectæ *A*B, partiũ 4. ſeſquitertium eſt quadrati rectæ *A*D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 5. primi.

[b] 26. primi

[c] 47. primi.

COROLLARIVM.

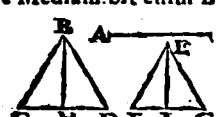
HINC manifestum est, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppositum demissam, secare & angulum & latus bifariam. Demonstratum enim est BD, & CD, rectas æquales esse, hoc est, latus BC, secari bifariam a perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia sint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & basis BD, basi CD, æqualis; Erunt & anguli BAD, CAD, æquales, id est, angulus BAC bifariam secabitur ab eadem perpendiculari AD.

8. primi.

10. 13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI sphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media.

SIT sphærę diameter Rationalis A. Dico tam superficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta sphæra, esse Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius sphęrę, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera opposita CD, FG, perpendiculares BH, EI. b Quoniã igitur quadratũ diametri A, sesquialterum est quadrati lateris Tetraedri BC, c & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, BC, EF, proportionem, quam numeri 6.4.3. d ideoque commensurabilia erunt. Quare lineę ipsæ A, BC, EF, commensurabiles existent, saltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales BC, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.



b 13. tertij decimi.
c 14. tertij dec.
d 6. decimi.

RVR-

RVRSVS, [a] quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectę BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, sesquitertium est; habebunt tã quadrata rectarum BC, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter se, quam numeri 4. 3. [b] ideoque tam illa, quam hæc inter se commensurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipsæ BC, BH, quam lineæ EF, EI, commensurabiles existent. Est autem & tam CH, ipsi BC, quam FI, ipsi EF, dimidia videlicet toti, commensurabilis. [c] Igitur & tam BH, CH, quam EI, FI, commensurabiles inter se erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, ostensæ sint Rationales, erunt quoq; BH, EI, Rationales. [d] Quoniã vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine sunt incommensurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. [e] cum ostensum sit talium partium 1. esse tã CH, quam FI, qualium 3. est tam BH, quam EI,) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commensurabiles. [f] Ac proinde tam rectangulum sub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quam rectangulum sub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus cõtentum, Medium erit: Sunt autem triãgula BCD, EFG, æqualia rectangulis sub CH, BH, & sub FI, EI, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum bases triangulorum CD, FG, duplę sint basium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota superficies Tetraedri triangulo BCD, sit commensurabilis; (est enim triangulum BCD, totius superficiei quarta pars) Item tota superficies Octaedri triangulo EFG, commensurabilis; (Est enim triangulum EFG, totius superficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propos. 24. lib. 10. superficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur sphęrę diameter fuerit Rationalis; Erit tam superficies Tetraedri, quã Octaedri in ea sphæra, Media.

Quod erat ostend.

[a] 12. quarti decimi.
[b] 6. decimi.
[c] 12. dec.
[d] 9. decimi.
[e] 12. quarti decimi.
[f] 22. dec.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub CH, BH, & ſub FI, EI, hoc eſt, triangula BCD, EFG, ipſis æqualia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribãtur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

SIT ſphæræ diameter *A*, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulũ BCD; Octaedri vero baſis triangulũ EFG. *Dico* triangulum BCD, ſeſquitertiũ eſſe trianguli EFG; At vero ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialterã ſuperficiei Tetraedri. [a] Quoniã n. quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri CD; [b] duplũ vero quadrati lateris Octaedri FG; fit, vt quaſi ũ partiũ 6. fuerit quadratũ diametri A, taliũ 4. ſit quadratum

[a] *13. tertij decimi.*
[b] *14. tertij dec.*

dratū lateris CD,& taliū 3.quadratū lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG:Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triágulum BCD, ad triangulum EFG. (*quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter ſe habent laterum CD,FG, duplicatam, cum ſint ſimilia.)Igitur & triangulū BCD,ſeſquitertium eſt trianguli EFG. *20. et 19. ſexti.

RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulum BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli EFG;Ac propterea qualiū partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3.eſſe triangulum EFG; Efficitur, vt triangulum EFG, octies ſumptum,hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri,ſit earūdem partium 24;At triangulum BCD,quater ſumptum,id eſt,tota ſuperficies Tetraedri, earūdem partium 16.Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphęræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

THEOR. 15. PROPOS. 15.

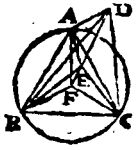
O. 15.

RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad dictam baſim.

SIT Tetraedrum ABCD, cōtentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E, centrum ſphæræ recta DEF, incidens in baſim ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC,& DF,perpendicula

rem

rem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E, & F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex cẽtro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD; CD,



æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. a Igitur anguli AED, CED, æquales erũt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt. b eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquivalent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, triãguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF; & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; c Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoq; æquales erunt FB, FC, si considerentur triãgula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; d erit F, centrũ basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.

a 8. primi.
b 13. primi
c 4. primi.
d 9. tertij.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit; ostenditur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdẽ circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra. quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, diuiditur in duas pyramides æqui-

æquales, & similes æqualium altitudinum; basis vero vtriusque est quadratũ subduplũ quadrati diametri sphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FCB, FBA, FAD, FDC, & in sphæra descriptum, cuius centrum G. Dico ipsum diuidi in duas pyramides æquales & similes æqualium altitudinum, quarum basis communis est quadratum subduplũ quadrati diametri sphæræ. Ductis enim ex G, centro sphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, q̃ æquales sunt, cum sint semidiametri sphærę, ductæ videlicet e cẽtro ad superficiẽ sphęrę: , qm̃ quadratum diametri sphęrę duplum est quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri, AG, ex scholio propos. 4 lib. 2 Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri sphęræ talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratũ rectę AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cũ ergo quadratum rectæ AG, æquale sit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; [b] Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter ostendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGB, recti. Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectũ erunt cõiunctæ; atque adeo rectæ AC, BD, se se secantes in G, in vno existẽt plano; Ac ꝓpterea rectæ earũ extrema cõnectentes AB, BC, CD, DA, in eodẽ plano erunt cũ ipsis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano est situm. Diuisum est ergo Octaedrũ in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum basis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides ęquales sunt & similes ex defin. 10. lib. 11. cũ quælibet constet ex quatuor triãgulis æquilateris octaedri, quæ æqualia sũt & similia, & basi cõmuni ABCD. Dico iam earum altitudines esse ęquales, & basin ABCD, esse quadratũ subduplum

[a] 14. tertiædec.

[b] 48. primi

[c] 14. primi.
[d] 2. vndec.
[e] 7. vndec.

duplũ quadrati diametri ſphæræ. Quoniam.n. oſtenſum eſt, quadratum lateris Octaedri AB, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG, BG; erit quoque quadratum lateris AE, æquale duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG; [a] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis AG, DG, ſe mutuo ſecantibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, [b] ipſa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, DG, ductum, nempe ad baſin pyramidum. Quare E G, altitudo eſt pyramidis ABCDE. Similiter oſtendemus FG, altitudinem eſſe pyramidis ABCDF. Cum ergo EG, FG, ſint ſemidiametri ſphæræ æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia AC, eſt diameter ſphæræ; [c] erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterũ AD, DC. [d] Quare angulus ADC, rectus eſt: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cum ſit deſcriptum ex latere octaedri AB; [e] conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Octaedrum ergo in ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 48. primi

[b] 4. undec.

[c] 14 tertij dec.

[d] 48. primi

[e] 12. tertij dec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propoſitionẽ demonſtrauimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur a Campano, ut habita ratione conſtructionis octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

0. 17. THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum

ſitum ad Octaedrum in eadē ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſcptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri,& ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum ad quadratum diametri ſphæræ.

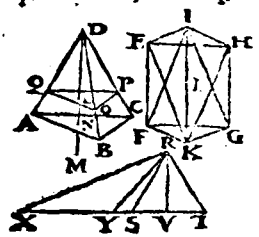
VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad octaedrum in eadē ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quę potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earūdem triū quartarum partium lateris tetraedri contentum,ad quadratum diametri ſphærę.

SIT Tetraedrum ABCD,& octaedrum EFGHIK, in vna eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo D, per centrum L, diameter ſpæræ D M, incidens in baſin A B C, ad punctum N. [a] Erit igitur N, centrum baſis ABC, & DN, perpendicularis ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum ſphæræ & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit DL, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt L N; Ac propterea D N, talium 4. Ducatur deinde, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum

[a] 15. quartidecimi

a 16. vnde. lũ plano ABC; Eruntq; rectæ QO, OP, PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; Ac ppea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, b cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulũ erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC: Sũt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. c Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter; erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN. esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, d cum pyramides simi les habeant proportionem: Iterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hęc enim proportio triplicata est proportionis 4 ad 3. vt cõstat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex ppos. 2. lib. 8. e Rursus, quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.



b 10. vnde.

c 17. vnde.

d 8. duode.

e 20. sexti.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triãgulo DQP; demittaturq; ex R, ad ST, perpendicularis RV. f Eritque latus RT; hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectę DP, talũ 27. erit quadratum rectæ RV: Erat autem earũdem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens vigintisepté sexagesimasquartas partes quadrati lateris tetraedri RVRSVS extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, vt

f 12. quarti dec.

Y, vt ſit TY, talium partium 32. qualium 27. eſt TS, ſeu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3. nempe ſeſquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, eſt 27. (proportio enim 36. ad 27. eſt ſeſquitertia.) Ac propterea qualium partium TY, eſt 32. Quare linea TY, cõtinet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum *ABCD*, ad octaedrũ EFGHIK, vt rectãgulum cõtentum ſub recta RV, (q̃ pót vigintiſeptẽ ſexageſimasquartas partes quadrati lateris DC.) & ſub recta TY, (q̃ cõtinet octo nonas partes eiuſdẽ lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

CVM enim ductis rectis RX, XY, triãgulum RTX, duplum ſit triãguli XTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY; Eſt autem & rectangulum ſub RV, TY, duplum eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo ſub RV, TY. Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idẽ triangulum RST: Eſt autẽ triangulum RTX, ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27 Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale; erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo, vt rectãgulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD: At vero vt triangulũ QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nã cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoq; erit ad planũ QOP, ex ſcholio prop. 14. lib. 11. ideoq; ſphæræ ſemidiameter DL, altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: Octaedrum autẽ EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK. quarũ baſis cõis quadratum EFGH, dimidiũ quadrati diametri ſphęræ; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex ſch. pp. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidẽ EFGHI; Ac propterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratũ diametri

a 2. ſexti

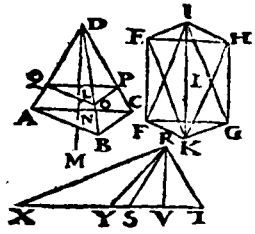
b 41. primi

c 7. quinti

d 1. ſexti

e 16. quarti decimi.

metri ſphæræ DM, ita pyramis QOPD, ad duplum pyramidis EFGHI, hoc eſt, ad Octaedrũ EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt rectangulum ſub RV, potente viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitũ ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

QVONIAM vero DC, talium partium 4. fuit, qualium 3. DP; continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: ac proinde, [a] *cum recta RT, ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV; erit RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, fuit talium partium 32. qualium 27. ST, ſeu DP; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri.) erit TY, ſuperquintupartiens vigeſimas ſeptimas partes ipſius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare cõſtat, eſſe quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum ſub RV, quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, quæ ſuperquintupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

[a] 12. quartidecimi

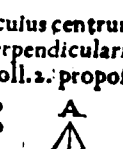
0. 17.

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin oppo

oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro triãguli ad eandem basin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum *ABC*, cuius centrum *D*. Ducatur ex *A*, per *D*, recta *AE*, quæ perpendicularis erit ad *BC*, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propos. 10. lib. 13. Dico AE, triplam esse rectæ DE, quæ scilicet perpendicularis est e centro ad basin ducta. Ductis enim rectis *BD*, *CD*, cum latera *DA*, *DB*, trianguli ADB, æqualia sint lateribus *DB*, *DC*, trianguli *BDC*; (e cẽtro enim ducuntur;) sit autem & basis



AB, basi BC, æqualis: Erunt triangula *ABD*, *BDC*, æqualia ex coroll. propos. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum est trianguli *BDC*. Quoniam vero rectangulum sub AE, EB, triangulo ABC; & rectangulum sub *DE*, *EB*, triangulo *BDC*, æquale est, ex scholio propos. 41. lib. 1. cum basis trianguli BC, dupla sit basis BE, vtriusque rectanguli: Erit quoque rectangulum sub AE, EB, triplum rectanguli sub DE, EB: Est autem vt rectangulum sub AE, EB, ad rectangulum sub DE, EB, eiusdẽ altitudinis EB, ita basis *AE*, ad basin DE. Igitur & AE, tripla est ipsius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat ostendendum.

a 1. sexti

COROLLARIVM.

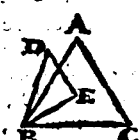
IT A QVE eadem perpendicularis AE, sesquialtera est reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehensæ. Cum enim AE, tripla sit ipsius DE; qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundẽ partiũ 2. continebit: Ac propterea AE, sesquialtera erit ipsius AD.

EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphęrę potentia tripla eius perpendicularis, quę ex centro sphærę in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphera, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro sphęrę D, perpendicularis demittatur DE; ducaturque semidiameter sphæræ DB. Dico semidiametrum DB, potentia triplam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum ABC, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; [a] quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri sphęrę DB, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partiũ 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum semidiametri sphæræ DB, 3. [b] Quia vero quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare [c] cum quadratũ rectæ DB, æquale sit quadratis rectarum BE, DE; sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum sphæræ inscribatur, &c.



[a] 14. tertij dec.

[b] 12. tertij dec.

[c] 47. primi.

THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

0. 18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet sphęrę descripti, æquale est superficiei cubi in illa sphęra collocati: Perpendicularis autem a centro sphæræ in aliquam basin cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in sphæra descriptus, cuius centrum I, ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam basin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri sphæræ æquale esse superficiei cubi; & perpendicularem IK, æqualem esse dimidio lateris cubi. Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, hoc est, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiusdem quadrati ex diametro sphæræ descripti æquale sex quadratis cubi, id est, toti superficiei cubi.

[a] 15. tertij dec.

PRODVCTA autem KI, ad basin oppositam BCHG, vsque in punctum L; cum KL, recta sit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per scholium propos. 14. lib. 11. Rursus, [b] quia AB, KL, parallelæ sunt, quod rectæ sint ad planum AE; ducatur per ipsas planum faciens in planis oppositis parallelis AE, BH, communes sectiones, lineas rectas AK, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter se; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniá vero perperpendicularis KL, e cétro sphęræ I, cadit in bases AE, BH, ad pũcta K, & L, erũt K, & L, cétra circulorũ dictas bases ambientiũ in sphæra, per coroll. lématis 1. prop. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, bifariá secabitur a dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propos. 15. lib. 13. ostendimus; Ac propterea

[b] 6. vndec.

[c] 16. vndec.

cum KL, ostensa sit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiusdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet sphæræ descripti, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, solidum, quod sit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale esse cubo. [a] *Cum enim quadratum diametri sphæræ triplum sit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri sphæræ;* [b] *Perspicuum autem est, solidum, quod fit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse solido, quod fit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiæ parti quadrati diametri sphæræ, eo quod dicta solida habeant & bases, & altitudines æquales. Itaq; cum dicta duo solida compleant totum cubum, manifestum est, id, quod fit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ, æquale esse toti cubo. Quod est propositum.*

[a] 15. 12. Euclidis.

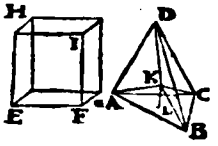
[b] 31. undecimi.

ALITER proponi potest hoc corollarium, vt dicamus, solidum, quod fit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri sphæræ, æquale esse cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod est tertia pars quadrati diametri sphæræ: Vt perspicuum est.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem solidum, quod fit ex perpendiculari e centro cuiuscunque corporis regularis ad aliquam eius basim ducta in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori regulari. Sit .n. corpus regulare quodcunque

cunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, solidum autem EFGH, cõtentum sub EI, tertia parte sui perficiei corporis ABCD, & sub altitudine FG, quæ æqualis sit perpendiculari KL, ducta ex centro K, ad basin ABC. Dico solidũ EFGH, æquale esse dato corpori regulari ABCD. Nã ductis ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, resoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant bases & altitudines. Cum enim circuli dictas bases ambientes, æquales sint; ipsi æqualiter a centro distabunt, per lemma 2. propos. 10. huius lib. Ac propterea perpẽdiculares ex K, centro ad ipsorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero prisma contẽtum sub basi ABC, & altitudine KL, triplũ est pyramidis ABCK, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Atque eadem ratione prismata contenta sub reliquis basibus, & eadem altitudine KL, tripla sunt suarum pyramidum; Erit prisma contentum sub tota superficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compositum ex omnibus illis prismatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem prisma triplum sit prismatis EFGH, quod & illius basis tripla ponatur basis huius, per ea, quæ ad propos. 7. lib. 12. demonstrauimus, erunt solida EFGH, ABCD, æqualia. Quod est propositum.

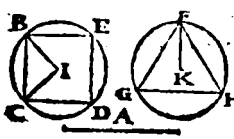


THEOR. 21. PROPOS. 21. 0. 11.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiusdem sphæræ.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eũdem circulum cir-

cumſcribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc eſt, circulos BCDE, FGH, ipſa circumſcribentes, eſſe ęquales. Sint. n. rectæ e cętris IB, KF. [a] Quia igitur quadratum diametri A, triplũ eſt quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI, (Nãducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum ſubtendat quadrantem;) [b] Ac proinde quadratum rectę BC, ęquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum rectarum ęqualium BI, IC, ęqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectę BI.) qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A, talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratũ rectæ BI. Rurſus [c] quia quadratum diametri A, duplũ eſt quadrati lateris octaedri FG; [d] & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectę FK, ex cętro ductę; qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & talium 1. quadratum rectę FK. Cum igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectę BI; ęqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipſę, & circuli ex ipſis deſcripti BCDE, FGH, ęquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 15. tertij decimi.

[b] 47. primi.

[c] 14. tertij dec.

[d] 12. tertij dec.

COROLLARIVM.

HINC ſit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorũ, qui baſes oppoſitas tam cubi, quam octaedri circumſcribunt, ęquales eſſe. Si enim ex cętro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorũ ipſas circũſcribẽtiũ, ex coroll. lẽmatis 1. prop. 10. huius lib. quæ cum ſint ęquales oſtenſi, æquilater diſtabunt a centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde ęquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitorum laterum connectunt. (Nam ſi producantur, perpendiculares

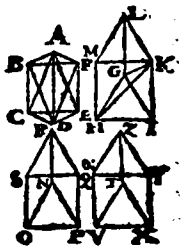
[e] 31. quarti dec.

lares quoque erunt ad oppositas bases, ex scholio propos. 14. lib. 11. propterea quod parallelæ sunt oppositæ bases in octaedro, ex coroll. 4. propos. 14. lib. 13. quemadmodũ & oppositæ bases cubi parallelæ sunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppositarum basium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod est propositum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

SI octaedrum, atque tetraedrum eidem sphærę inscribantur; Erit octaedrũ ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem sphæra inscriptum sit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita esse octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus cómune est ipsa diameter AD, & vertex cómunis A, nẽpe in BCDA, cuius basis BCD; in BDFA, cuius basis BDF; in CDEA, cuius basis CDE; & in DEFA, cuius basis DEF; quæ quidem omnes bases infra quadratum BCEF, existunt cótinentes cum ipso dimidiatam partem octaedri. Quoniá vero quælibet harum pyramidũ constat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipsorũ cõe est AD, diameter, & reliqua latera, ipsius octaedri latera existũt, inter se æqualia sunt; efficitur has quatuor pyramides æquales esse inter se, cum cótineãtur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus Cõstituatur

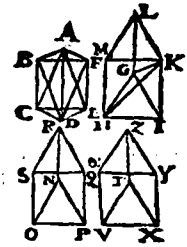


8. primi.

tur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedi triplum erit, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZa, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. Qum igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZa, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex iis, quę ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. prop. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrũ.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZa. Quia vero priſma TVXYZa, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZa, quod octaedro æquale eſt, eadem quę octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrũ ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinẽ tetraedri: Eſt autẽ altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarũ coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpẽdiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atq; vt latus cubi ad altitudinẽ tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nã tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quã quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito. n. quadrato diametri ſphærę 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex prop. 15. lib. 13. & quadratũ altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2. pp. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratũ altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphærę 6. erit quadratum lateris octaedri 3. &

[14. quartidecimi]

[18. tertiædec.]



& quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandū erat.

COROLLARIVM.

EX dictis infertur, *ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæra ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi.* [a] *Nam & quadratum diametri ad quadratū lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.*

[a] *18. tertij dec.*

THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam F G, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptum Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde

de Icoſaedri oppoſita AI, B K, connectantur recta I B, quæ ſubtendet unum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus cõpoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. quod etiam videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia vero AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13. [a] erunt anguli AIB, IBK, æquales

[a] 29. primi.

duobus rectis; Ac proinde, cũ ſint inter ſe æquales, (Ducta enim alia diametro I K; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia ſint lateribus K B, BI; & baſes quoque AB, IK, æquales; Erunt anguli AIB, I B K, æquales) recti erunt;

[b] 8. primi.

[c] ideoque quadratum rectæ propoſitæ A B, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale ex hypotheſi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia ſunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, ſit maius ſegmentum ipſius C D, diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius I B, ſimiliter diuiſæ; (Nam IB, ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt IA, latus Icoſaedri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, [d] maius ſegmentum eſſe æquale lateri eiuſdem pentagoni) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi IA, lateri Icoſaedri. [e] Cum enim ſit vt C D, ad C E, ita IB, ad IA; [f] erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ I A: Oſtenſa ſunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [g] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale eſt quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

[c] 47. primi

[d] 8. tertij dec.

[e] 2. quarti dec.

[f] 22. ſexti.

[g] 14. quinti

RVRSVS latera Dodecaedri oppoſita AN, B O, ſecẽtur bifariã in L, & M, punctis, quæ recta LM, & ipſa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales,

æquales, parallelę ſunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13. erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Eſt autem recta LM, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, b Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale ſit poſitum quadratis rectarum FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, ſit minus ſegmentum ipſius FG, ſectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus ſegmentum ipſius NB, hoc eſt, ipſius LM, ſimiliter diuiſę, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus ſegmentũ ipſi NA, lateri Dodecaedri. Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſupra demonſtrauimus CE, maius ſegmẽtum æquale eſſe ipſi IA, lateri Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris, &c. Quod erat oſtendendum.

a 33. primi

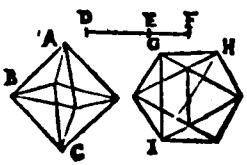
b 47. primi

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphęra deſcripti duplum minoris ſegmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius ſegmentum DE, & minus EF, rectę DF, ſectę extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem ſphęrę inſcriptum Icoſaedrum GHI, cuius latus GH, & ſubtendens angulũ pẽtagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI, & diameter HI. Dico quadra-

quadratum lateris G H, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; [a] erit GH, maius segmentum ipsius G I, diuisæ extrema ac media ratione; [b] Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione, [c] Quia vero quadratũ diametri HI, æquale est quadratis rectarũ GI, GH, quod angulus IGH rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris A B, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris AB, ita quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarũ DE, EF: [d] Est autem quadratum diametri H I, duplum quadrati lateris octaedri A B. Igitur & quadrata rectarum G I, G H, dupla sunt quadratorum rectarũ DE, EF. Atqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratũ rectę GH, ad quadratum rectę EF. (Nã cũ sit vt GI ad GH, ita DE, ad EF. Erit quoq; vt quadratũ rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratũ rectæ DE, ad quadratũ rectę EF; & cõponendo, vt quadrata rectarum GI, GH ad quadratũ rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF. Et permutãdo, vt quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum DE, E F, ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ EF.) Quadratum igitur rectæ G H, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 8. tertij de.
[b] 5. tertij decimi.
[c] 47. primi
[d] 14. tertii decimi.
[e] 2 quarti decimi.
[f] 22 sexti.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subten-

datur:

datur: Erit recta linea, quæ potentia sit subdupla ipsius rectæ subtensæ, latus octaedri eius sphæræ, in qua dictum minus segmentum latus existit Dodecaedri.

LINEA recta AB, secta in C, extrema ac media ratione constituat cum recta AD, quæ æqualis sit minori segmento AC, angulum rectum A, cui recta subtendatur BD, sitq; recta E, potentia subdupla ipsius BD. Dico E. latus esse octaedri illius sphæræ, in qua AD, vel AC, latus est Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propos. 17. lib. 13. maius segmentum BC, latus sit cubi illius sphæræ, cuius minus segmẽtum AC, vel AD, latus est Dodecaedri; erit diameter illius sphęrę potentia tripla maioris segmenti BC, nempe lateris cubi. Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris segmenti, tripla eiusdem quadrati maioris segmenti BC. Quadratum igitur diametri sphęrę, æquale erit quadratis rectarũ AB, AD, hoc est, quadrato rectę BD; Ac proinde recta BD, diameter est sphæræ. Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; Posit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia subdupla ipsius BD; Erit E, latus Octaedri eiusdem sphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuisa, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. tertiidec.

[b] 14. tertiidec.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia sesquialterum est lateris cubi BC, cuius maius segmentum est AD, latus Dodecaedri, vt constat ex iis, quæ ostendimus ad propos. 4. lib. 13. cum BC, sit ma-

[c] 18. tertiidec.

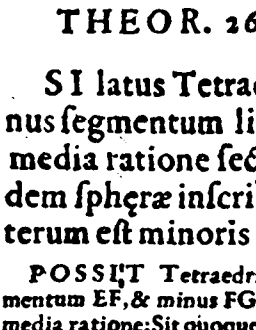
ius

ius segmentum, & AD, minus recta AB, extrema ac media ratione diuisæ: Perspicuum est, si linea quæuis recta (nimirum BC,) secetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum (nimirum AD,) esse latus Dodecaedri eiusdem sphæræ, in qua Octaedrum descriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri possit maius & minus segmentum lineę rectæ extrema ac media ratione sectę: latus Icosaedri eidem sphęræ inscripti potentia sesquialterum est minoris segmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius segmentum EF, & minus FG, rectę EG, diuisæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icosaedri HIK, eiusdem sphęrę. Dico HI rectâ potêtia esse sesquialteram minoris segmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icosaedri lateribus compositi, connectaturque recta IK, diameter.



[a] Quia igitur HI, est maius segmentum rectæ HK, diuisę extrema ac media ratione; [b] Erit quoque composita KHI, diuisa eodem modo in H, maiusque segmentum HK, & minus HI. [c] Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulũ BCL, ita vt BL, recta ipsi EF, & CL, ipsi FG, sit æqualis. [d] Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur posse rectas BL, CL, hoc est, rectas EF, FG: Est autem & angulus IHK, rectus, vt propos. 23. huius lib. ostendimus; Estque

[a] 8. tertij dec.
[b] 5. tertij dec.
[c] 22. primi
[d] 48. primi

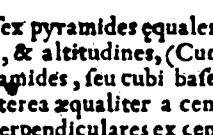
[a] Estque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. [b] Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt, [c] Ac propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CK: [d] Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FG. Si latus itaque Tetraedri posit maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 2. quartidec.
[b] 6. sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 13. tertiidec.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

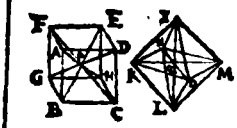
CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphęra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæræ cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eã esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec nõ, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines, (Cum enim circuli descripti circa pyramides, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter a centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. [e] Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triãgulum; æqualiter distabũt bases pyramidũ cubi, & Octae-



[e] 21. quartidecimi

& Octaedri a centro ſphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales erunt altitudines pyramidum cubi, & Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 4. lib. 5. demonſtrauimus, vt ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe, ad pyramidem Octaedri, ita ſextuplum baſis pyramidis cubi, ſuperficies videlicet tota cubi, ad baſim pyramidis Octaedri; Ideoque rurſus, ex eodem ſcholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum, ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur.

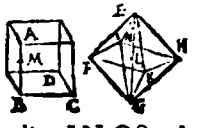


SINT rurſus in eadē ſphæra cubus ABCD, & Octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphæræ, ſeu Octaedri EG, & centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi, tertia pars AM; Item ex ſemidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum, in quas Octaedrū ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. [a] ſeſquialterum eſt quadrati BD, lateris cubi BC: Eſt autem & recta AB, rectæ BM, ſeſquialtera, ex conſtructione; reciprocabuntur baſes IFKH, BD, & altitudines AB, BM: [b] Ac propterea parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, æquale erit parallelepipedo ſuper baſim BD, & ſub altitudine AB, nimirum cubo ABCD. Rurſus quia recta EL, rectæ EN, tripla eſt; erit & parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſim, & ſub altitudine EN, vt in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. oſtendimus: Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL, triplum eſt pyramidis IFKHE, ex corollario 1. propoſ. 7. lib. 12. Igitur pyramis IFKHE, æqualis erit parallelepipedo ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum ſuper

[a] 18. tertij decimi.

[b] 34. vndec.

ſuper eandem baſim, & ſub altitudine L N, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla ſit altitudinis EN



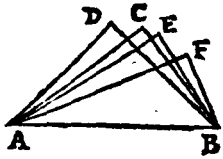
[a] Item Octaedrum EFGHIK, duplũ eſt pyramidis IFKHE. Aequale igitur erit parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, eſt ad parallelepipedũ ſuper eandem baſim, & ſub altitudine L N, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita eſt AB, ad EL. (Cum enim ſit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL; & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL, ita BM, ad L N.) Et parallelepipedum ſuper baſim I F K H, & ſub altitudine B M, æquale eſt oſtenſum cubo ABCD; Et parallelepipedũ ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, æquale eſt Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandũ proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 16. quartidecimi

SCHOLIVM.

QVIA demonſtratum eſt [b], diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialterã potentia lateris Tetraedri, ita vt, ſi quadratũ diametri ponatur 3. partium, earũdem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; per ſpicuũ eſt, ſi ex quadrato diametri data auferatur quadratũ duas tertias illius partes continens, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtẽdimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam, ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodẽ ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem quadratũ lateris

[b] 13. tertiidec.



Tetraedri. Vt si diameter sphæræ ponatur A B, *ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ* AC, *continens duas tertias partes, quadrati diametri* AB; *Vel si constituantur duo quadrata rectarum* AC, BC, *quadrato diametri* AB, *æqualia, ita vt quadratum rectæ* AC, *duplum sit quadrati rectæ* BC; *Erit rectæ* AC, *latus Tetraedri.*

[a] *14. tertij dec.*

RVRSVS [a] *cum ostensum sit, diametrum sphæræ potentia duplam esse lateris Octaedri; Fit, si ex quadrato diametri* AB, *dematur quadratum rectæ* AD, *quod dimidium sit quadrati diametri* AB; *Vel si constituantur duo quadrata rectarum* AD, BD, *quadrato diametri* AB, *æqualia, & inter se proportionem habentia æqualitatis, secundum doctrinam scholij propos. 33. lib. 6. rectam* AD, *latus esse Octaedri.*

[b] *15. tertij decimi.*

DEINDE, [b] *quoniam docuimus, diametrum sphæræ potentia esse triplam lateris cubi; Efficitur, si ex quadrato diametri* AB, *auferatur quadratum rectæ* BC, *quod tertia pars sit quadrati diametri* AB; *Vel si quadrato diametri* AB, *constituantur duo quadrata æqualia rectarum* AC, BC, *ita vt quadratum rectæ* AC, *duplum sit quadrati rectæ* BC, *iuxta doctrinam eiusdem scholij propos. 33. lib. 6. Lineam rectam* BC, *cubi latus existere. Vel certe cum diameter* AB, *possit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propos. 15. lib. 13. manifestum est, si ex quadrato diametri* AB, *auferatur quadratum lateris Tetraedri* AC, *relinqui quadratum lateris cubi* BC: *Quemadmodum e contrario, si ex quadrati diametri* AB, *tollatur quadratum lateris cubi* BC, *remanet quadratum lateris Tetraedri* AC.

[c] *23. quarti decim.*

PRAETEREA, quia si recta aliqua potuerit totam quampiam rectam extrema ac media ratione sectam, & maius ipsius segmentum [c]; *Maius segmentum est latus Icosaedri illius sphæræ, cuius diameter est recta prior linea; Constat, si quadrato diametri* AB, *exhibeantur, iuxta ea, quæ in scholio propos. 33. lib. 6. demonstrata sunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum* AE, BE, *proportionem habentium, quam recta quauis extrema ac media ratione diuisa ad suum*

segmen-

segmentum; Rectam minorem B E, *esse Icosaedri latus.*

POSTREMO, quoniam si recta quapiam potuerit totã aliquam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; [a] *Minus segmentum latus est Dodecaedri eius sphæra, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrate diametri* A B, *constituantur duo quadrata æqualia rectarum* AF, BF, *proportionem habentium, quam quacunq; recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam* B F, *latus esse Dodecaedri.*

HACTENVS ergo Hypsicles, Campanus, & Franciscus Candalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ impositorum scripserunt: Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiiciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

[a] 13. quarti dec.

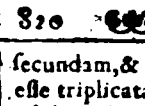
THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineę rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectę A, B, C, D, continue proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt *A*, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertię ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secũdę ad

secundam,& proportionem D,ad G, quartæ ad quartã, esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10.lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B,ad rectam A ; a habeat autem & quadratum

a 20. sexti.



rectæ B,ad quadratum rectæ A,duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B, ad rectam A: Erit vt recta C,ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, vt recta F,ad rectam *A*, ita quadratum rectæ E, ad quadratum rectæ A:Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A , ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectę B, ad quadratum rectæ A, vt recta C,ad rectam *A*; & quadratum rectæ A , ad quadratum rectæ E, vt recta *A* , ad rectam F;

quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

Erit ex æquo quadratum rectæ B , ad quadratum rectæ E, vt recta C,ad rectam F: b Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B , ad rectam E . Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B, ad rectam E. Quod est primum.

b 20.sexti

RVRSVS cum recta D,ad rectam *A*,ex defin.10. lib 5.proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B, ad rectam A; c habeat autem & cubus rectæ *B*, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B,ad rectam A; Erit vt recta *D*, ad rectam *A*, ita cubus rectæ B , ad cubum rectæ A.Eademratione erit vt recta G, ad rectã A, ita cubus rectæ E,ad cubum rectæ A ; Et conuertendo vt recta *A* , ad rectam G , ita cubus rectę A , ad cubum E.Quia ergo est cubus rectæ B,ad cubum rectæ A, vt recta D,ad rectam A;& cubus rectæ *A*, ad cubum rectæ E, vt recta A,ad rectam G; Erit ex æquo,cubus rectæ B, ad cubum rectę E, vt recta D,ad rectam G: d Est autem proportio

c 33.vnde.

Cubus B. Recta D.
Cubus A. Recta A.
Cubus E. Recta G,

d 33. unde.

portio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectę B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineę rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

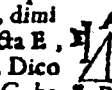
SCHOLIVM.

HOC idē demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositū BC, recta perpendicularis AD, quæ bifariam secabit latus BC, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; Ac propterea B D, dimidium est lateris AB. [a] Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter A D, & B D. Dico quadratum lateris AB, ad triāgulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris AB, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub AD, BD, æquale sit triangulum ABC, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. [b] Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ E; æqualia erunt triangulum ABC, & quadratum rectæ E. [c] Quoniam uero quadratum late-



[a] 13. sexti

[b] 17. sexti

[c] 20. sexti

ris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB, ad rectam E; Conſtat, quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.

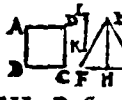
COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppoſitum, quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter AD, DB, æquale eſſe triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpẽdicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiuſuis ABCD, & Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E, ad latus oppoſitum FG, deducta diuidens FG, latus bifariam, ex coroll. propoſ. 12. huius lib. Dico, eſſe quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli EF, ad perpendicularem EH. Poſita enim inter EH, FH, media proportionali IK, 3 cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum ſit quadrati



* 13. tertij.

quadrati lateris cubi *AB*, [a] sit autem & duplum rectangu li sub latere *EF*, & dimidio eius *FH*, eo quod dictũ quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe *EF*: Erit rectangulum sub *EF*, *FH*, æquale quadrato lateris *AB*; [b] Ac propterea *AB*, media proportionalis erit inter *EF*, *FH*, hoc est, tres rectæ *FH*, *AB*, *EF*, cõtinue erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ *FH*, *IK*, *EH*, continue proportionales, ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit *FH*, [c] erit proportio rectæ *EF*, ad rectam *EH*, tertiæ ad tertiã, proportionis rectæ *AB*, ad rectam *IK*, secundæ ad secundam duplicata. Quare cum & quadratum *AC*, rectæ *AB*, ad quadratum rectę *IK*, hoc est, ad triangulum *EFG*, (est enim ex coroll. propos. 29. huius lib. quadratum rectę *IK*, æquale triangulo *EFG*,) [d] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ *AB*, ad rectam *IK*; Erit quadratum cubi *AC*, ad triangulũ Tetraedri *EFG*, vt latus *EF*, ad perpendicularem *EH*. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphęra describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 1. sexti.

[b] 17. sexti.

[c] 28. quarti dec.

FH. AB. IK. EF. EH.

[d] 20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis vero, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

SIT Tetraedri triangulũ *ABC*, & altitudo, seu axis Tetraedri *DE*, latusq; cubi eiusdẽ sphęrę *F*. Dico latus Tetraedri *AB*, esse potẽtia sesquialterũ axis *DE*: *Axem* vero *DE*, potentia sesquitertiũ lateris cubi *F*. Nã circa

[a] 5. quarti.

triangulum, descripto circulo A B C; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis D E, vt constat ex propos. 15. huius lib. ducatur A D, semidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratũ lateris A E, hoc est, lateris A B, [b] æquale est quadratis rectarum A D, D E, [c] & triplum quadrati semidiametri A D; Fit, vt posito quadrato lateris A B, seu A E, partium 6. quadratum rectę A D, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

[b] 47. primi

[c] 12. tertij dec.

[d] 13. tertii decimi.

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, [d] potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris A B; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis D E. Igitur quadratum axis D E, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. [e] *quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem uero partium 4. ostensum est quadratum axis DE; perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde,* [f] *cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. appareat. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.*

[e] 13. tertij decimi.

[f] 20. sexti

COROL-

COROLLARIVM II.

CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinẽ Tetraedri ad latus cubi eidem sphæra inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deducta, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi. [a] 12. quartidec.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidẽ sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus *ABC*, & Tetraedrum *DEFG*. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [b] Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendicularẽ dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata *ABC*, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma

[b] 30. quartidec.

ma DEFGHI, triplum est pyramidis, seu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiusdem tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus est Tetraedri eidem sphęræ inscripti. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM

VNDE prisma eandem habens & basim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale est cubo in eadem sphæra, in qua Tetraedrum, descripto. Ostensum enim est, cubum ABC, æqualem esse prismati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLIDIS

ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

ET SOLIDORVM QVINTVM vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus

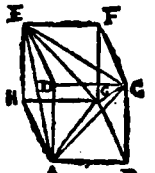
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

1.

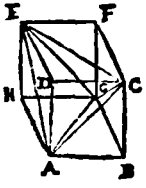
IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato ABCDEFG*H*, oporteat deſcribere pyramidé, ſeu tetraedrũ. *A*b vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri EA, EG, E*C*, ex quarũ extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur AG, G*C*, CA, in reliquis tribus baſibus. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales ſunt, quod potẽtia duplæ ſint



late-

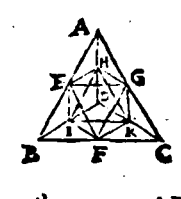
laterum æqualium quadratorum, vt in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus; perspicuum est, quatuor triangula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris composita, æquilatera esse, & inter se æqualia; ac propterea pyramidem, seu tetraedrum constitui ex ipsis. Quia vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifestum est, ipsum in cubo esse inscriptum, ex defin. 31. lib 11. Quare in dato cubo pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.



2. PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data pyramide octaedrum describere.

SIT in pyramide, seu tetraedo ABCD, describendum octaedrum. Diuisis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, cõstituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, supra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI; infra idem planum cõsistunt. Quoniam vero latera AE, AH, trianguli AEH, æqualia sunt lateribus AG, AH, triãguli AGH, quod sint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod sint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: [a] æquales erunt bases EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque octaedrum componunt EIKGHF; quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra



[a] 4. primi.

intra tetraedrum descriptum est; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex constructione. In data igitur pyramide octaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

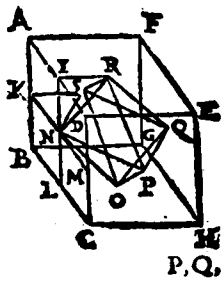
QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata sunt aequalia, sese mutuo ad angulos rectos secãtia, vt in coroll. 1. prop. 14. lib. 13. demonstrauimus; quorum quodlibet pyramidem A B C D, secat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipsam diuidit in pyramidem H I K D, & prisma HIKGAE; necnon in pyramidem EBFI, & prisma E F C G K I; Constat autem pyramidem pyramidi esse aequalem, & prisma prismati: [a] *Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem A B C D.) Manifestum est, si in tetraedro octaedrum inscribatur, tetraedrum bifariam secari, tribus quadratis aequalibus, quae octaedrum bifariam quoque, & sese ad angulos rectos inter se secant.*

[a] 3. duod.

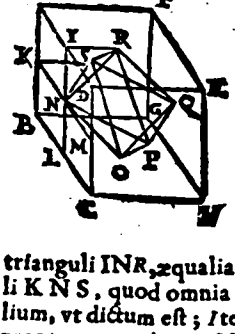
PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

IN dato cubo octaedrum describere.

DESCRIBENDVM sit octaedrum in cubo dato A H. Diuidãtur latera basis A B C D, bifariã in punctis I, K, L, M, quę connectantur rectis I L, K M, secantibus sese in N, pũcto, quod quidem centrum est quadrati A B C D, vt constat ex demonstratione propos. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum basium centra O, P, Q,



P,Q,R,S. Erunt igitur omnes rectæ,ex dictis centris ductæ ad media puncta bahũ,cuiusmodi sunt NI,RI,NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, seu quadratorum, vt perspicuum est ex prædicta demonstratione propos. 8.lib.4. Postremo si præfata centra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, RN, SO, OQ, QS; constituta erunt octo triangula, quorum quidem quatuor NSR, RSQ, QSO, OSN, supra planũ NOQR; quatuor autẽ OPQ, QPR, RPN, NPO, infra idem planum consistunt. Quoniam vero latera IN, IR, trianguli INR, æqualia sunt lateribus KN, KS, trianguli KNS, quod omnia sint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum est; Item & anguli contenti, æquales propterea quod, cum NI, IR, parallelæ sint rectis BA, AF; [a] angulus NIR, æqualis sit recto angulo KAF, in quadrato AG, eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt bases NR, NS, æquales. Non aliter ostendemus, reliquas lineas omnes & inter se, & his duabus æquales esse; si nimirum e centris secantur rectæ ad dimidia laterum, hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune est duobus cubi quadratis, quorum duo illa puncta, e quibus videlicet rectæ egrediuntur, centra existunt. Ita enim vides duas rectas NI, RI, ductas esse ad I, dimidium lateris AD, quod commune est quadratis AC, AE, quorum centra sunt puncta N, & R: Ita quoque duæ rectæ NK, SK, ductæ sunt ad K, dimidium lateris AB, quod commune est quadratis AC, AG, quorum centra existunt puncta N, & S, &c. Quam ob rem constituta octo triangula & æquilatera sunt, & æqualia inter se; ideoque Octaedrum constituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin. 31. lib. 11. intra cubum est descriptum, cum omnes eius sex anguli tangant cubi omnes sex bases in earum centris.



[a] 10. vndc.

[b] 4. primi.

centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inſcriplimus. Quod faciendum erat.

ALITER. [a] In cubo dato inſcribatur pyramis; [b] In hac deinde pyramide Octaedrũ figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib. anguli Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonſtratione propoſ. 1. huius lib. exiſtant in planis baſium cubi, cum ſint harum baſium diametri; perſpicuum eſt, angulos Octaedri tangere quoque baſes cubi; atque adeo Octaedrum cubo eſſe inſcriptum.

[a] 1. quintidecimi.

[b] 2. quintidecimi

COROLLARIVM.

QVIA vero diametri Octaedri in cubo deſcripti NQ, RO, ſi ducerentur, ſe mutuo ſecant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propoſ. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra baſium cubi oppoſitarũ: Manifeſtum eſt, rectas lineas centra baſium cubi oppoſitarum connectentes non ſolum ſe ſe mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. ſed etiam ad angulos rectos, vt hic oſtendimus, diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

IN dato octaedro cubum inſcribere.

DATVM octaedrum ſit *A*BCDEF, in quo oporteat deſcribere cubum. Quoniam in octaedro ſex pyramides quadrangulę continentur, quarum videlicet vertices ſunt ſex anguli octaedri, & quęlibet duę octaedrum conſtituunt; ſit vna earum pyramis A BCDE, cuius baſis *A*BC*D*, quadratum, triãgula vero æquilatera ABE, EBC, C*E*D, DEA, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, *K*, per quę ducantur

recte

rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO. OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habeant communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, cómune triangulis EMN, NEO; & denique EO, cómunę triágulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triágulú LME, triangulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostẽdemus. Quocirca & quatuor rectę LM, MN, NO, OL, inter se æquales sũt.

[a] 18. quarti decc. Quia vero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP; [b] EP autem vt EP, ad KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, tripla erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductum, [d] parallelum est plano ABCD; ipsa quoque inter se parallela erunt, atq; adeo, cum conueniant in punctis M. & O, vnum planum efficient, ex scholio propos 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E, per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per coroll. propos.

[b] 2. sexti.

[c] 10. vnde.

[d] 15. vnde.

12. lib.

12.lib.13. [a] Erunt & baſes KL, KO, æquales, hoc eſt, recta LO, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam ſecabuntur in G, H, I. Ac propterea rectæ GL, GM, HM, HN, IN, IO, KO, KL, cum ſint laterũ quadrati LN, dimidia, æquales inter ſe erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [b] æquales erunt & rectæ GH, HI, IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; ([c] cum enim anguli LKG, GKI, IKO, duobus ſint rectis æquales; Sint autem LKG, IKO, per corollarium 2. propoſ 32. lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus GKI; Eademq; ratione recti erũt anguli KGH, GHI, HIK.) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi

[b] 4. primi

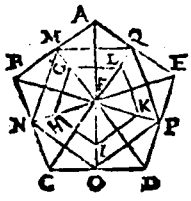
[c] 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

5.
6.

IN dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum videlicet baſes ſunt pẽtagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices vero, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius baſis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF,



CDF, DEF, EAF, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectá tur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rursus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex scholio propos. 12. lib. 13. bifariá secabũt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales sint, quę cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni,[a] æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes [b] Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia sint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum, æqualium ad bases oppositas demissæ. Cum enim latera FB, BM, trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, æqualia sint, contineantque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; [c] erunt bases FM, FN, æquales; & sic de reliquis. Quoniam vero & rectę FG, FH, FI, FK, FL, nimirum semidiametri circulorum æqualium triangula æquilatera æqualia circũscribentiũ, æquales sunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonstratum est; [d] Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. [e] Rursus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quã anguli BNM, MNO, ONC, æquales sunt duobus rectis. [f] Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter se, & hisce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, existens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter secentur in G, H, I, K, L, quod & FG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales sint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplę sunt ipsarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll propos. 18. lib. 14. parallelæ erunt

[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 13. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. sexti.

læ erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipſis MN, NO, OP, PQ, QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter ſe æquales erunt. [b] Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela ſunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ducto, conueniuntque in recta HI; ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG, GH, ducta idem planum conſtituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 10. vnde.

[b] 15. vnde.

COROLLARIVM.

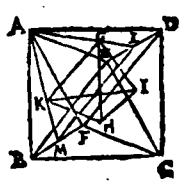
ITAQVE cum omes rectæ e centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentium, atque adeo eorundem diſtantiæ exiſtant a centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemm. 2. eiuſdem propoſ. 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

0.
5.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro *ABCDEF*. In pyramide octaedri superiori ABCDE, sumantur *G*, & *H*, centra triangulorum ex aduerso sibi respondentium AED, BEC; *I*tem in pyramide inferiori *ABCDF*, capiantur *I*, & *K*, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AF*B*: quæ quidem centra coniũgantur sex rectis *GH*, *GI*, *GK*, *HI*, *HK*, *IK*, vt fiat pyramis *HIKG*. Deinde ex *A*, demittantur per centra *G*, *K*, rectæ AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE, BF, bifariam in *L*, & M, per scholium propos. 12. lib. 13. coniungaturq; recta *L* M, [a] quæ ipsi *BE*, vel *FD*, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, F*M*, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterũ DE, BF, oppositorũ in quadrato *EF*.



[a] 33. primi

Quoniam vero rectæ *A* L, A M, sectæ sunt proportionaliter in *G*, & *K*, punctis, quod AG, A*K*, dupla sint ipsarum GL, K*M*, ex coroll. propos. 18. lib. 14. [b] Erunt G*K*, LM, parallelæ; [c] Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triãgula ALM, AGK, similia. Quare erit vt *A*L, ad LM, ita *A*G, ad GK; & permutando, vt AL, ad *A*G, ita LM, ad GK. Est autẽ AL, ipsius AG, sesquialtera; quod GL, sit tertia pars ipsius *A*L, ideoque AG, eiusdem *A*L, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostẽdemus, & reliquarum linearum centra *G*, *H*, *I*, *K*, coniungentiũ sesquialtera esse latera octaedri; Ac proin de rectis pyramidem HI*K*G, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis

[b] 2. sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 18. quarti decimi.

conflci,

confici, ideoque Tetraedrum cõstitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit, ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem describimus. Quod erat faciendum.

ALITER. [a] In octaedro dato inscribatur cubus, [b] & in cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; & in angulis cubi collocẽtur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

[a] 4. quintidecimi.
[b] 1. quintidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA vero ostensum est, vtramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM; [c] *ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse; Atque eadem ratione KH, ipsis FC, EA, parallelam esse;* [d] *Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singula videlicet binis oppositis.*

[c] 9. vndec.
[d] 15. vnde.

COROLLARIVM II.

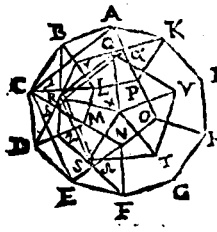
PRAETEREA, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetraedrum in cubo descriptũ, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituantur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphera circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, vt

constat ex 4. propos. huius lib. Sit autem diameter sphæræ sesquialtera axis tetraedri in ea sphæra descripti: per coroll. 1. propos. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propos. 13. lib. 13. Manifestum est, si in octaedro tetraedrum inscribatur, rectam, quæ centra basium octaedri oppositarum coniungit, sesquialteram esse axis tetraedri, hoc est, perpendicularis ab angulo tetraedri ad basin oppositam deducta.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

IN dato dodecaedro Icosaedrum describere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo describendum est Icosaedrum, contentum sex pentagonis ABLPK, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VX, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K, D, quos subtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propos. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppositum BL, & ad angulos rectos, ideoq; in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD, rectas AP, CM, bifariam, & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiusdem propositionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona descriptorum bifariam diuidant, (constat enim rectas AK, PK; Item CD, MD, arcus subtendere æquales.) Igitur Aα, Cβ, parallelæ sunt rectæ BY; atque adeo & inter se parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM; quæ æquales sunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM,



a 28. tertij.
b 28. primi
c 9. vndec.
d 4. primi.

DM, æqualia sint, angulosque contineant æquales. Rectæ ergo ipsas connectentes AC, αβ, æquales erunt, & parallelę. Non aliter ostendemus, si ex angulis B, F, quos subtendant rectę CL, EN, per centra R, S, rectę ducatur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γδ, æquales esse ipsas CE, γδ: [b] Sunt autem AC, CE, inter se æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehensos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt constat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt versus X, vt figura monstrare videtur, sed extrorsum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αβ, γδ, æquales erunt. Quapropter cum & rectę Xα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales sint, (nam Y♌, YR, ZR, ZS, perpendiculares, distantiæ sunt æqualium rectarum BL, DM, a centris Q, R, S, circulorum æqualiū, qui nimirum pentagona æqualia circumscribunt, [c] atque adeo æquales. Item Q♌, Rβ, Rγ, Sδ, distantię sunt rectarum æqualium A P, CM, CL, EN, a centris eorundem circulorum æqualium, [d] ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt,) [e] Erunt quoque anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales sint; [f] æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorsus arte æquales demonstrabuntur omnes rectæ centra pentagonorū copulantes. Quare triągula QXR, RXS, SXT, TXV, VX♌, sub quinque angulis solidis Dodecaedri LMNOP, constituta, æquilatera erūt, & æqualia. Quod si simili modo sub reliquis quindecim angulis solidis Dodecaedri, similia triangula construantur: (Habet enim dodecaedrū viginti angulos solidos.) quæ quidem latera habent communia, descriptum erit Icosaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli solidi Icosaedri consistant in centris duodecim basium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icosaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

[a] 33. primi.
[b] 4. primi
[c] 14. tertij.
[d] 14. tertij.
[e] 8. primi.
[f] 4. primi.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubum describere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inscribendus sit cubus, *ABCDE*. *EFGHA*, *AHIKB*, *BKLMC*, conuenientia ad latus AB; duo quidem *ABCDE*, *ABKIH*, secundum latus idem commune AB; alia autem duo *AEFGH*, *BCMLK*, secundum angulos *EAH*, *CBK*. In his vero pentagonis subtendantur angulis A, B, D, *I*, rectę EH, *CK*, *CE*, *HK*, quadrilaterum efficientes EHKC. [a] Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferũt ex circulo pentagonum ABCDE, circumscribente arcus æquales; *Erunt* ex scholio prop. 27. lib. 3. rectę AB, *CE*, parallelæ. Eademque ratione parallelę erunt AB, HK. [b] Quare & EC, HK, inter se parallelæ erunt; [c] Ac propterea rectæ EH, *CK*, quæ ipsas connectunt, parallelæ erunt, [d] in eodemque cum ipsis plano; ideoque parallelogrammum erit EH*KC*; quod dico esse æquilaterum. Cum enim omnia latera AE, AH, *DE*, *DC*, BC, BK, IH, IK, æqualia sint, angulosque contineãt æquales, ex hypothesi; [e] æquales erũt bases EH, HK, KC, CE. Quia vero planũ ECKH, productum communem sectionem in sphæra facit circulum, per lemma 1. propos. 10. lib. 14. circa quadrilaterum *EK*, descriptum; [f] Erunt tam anguli oppositi E, K, quam C, H, duobus rectis æquales; [g] Ac propterea cum oppositi E, & K, sint æquales, necnon & oppositi C, & H; erunt omnes quatuor anguli *E*, *C*, K, H, recti. Quare *EK*, quadratum erit, collocans suos angulos in quatuor angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pẽtagonis similiter octo angulis octo alię rectæ subtendan-

[a] 28. tertij.
[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 7. vndec.
[e] 4. primi.
[f] 22. tertij.
[g] 34. primi.

dantur eodem ordine; cõstitutum erit solidum ex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt; cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis rcident. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum. *a 4 primi.*

COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, CE, ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9.

0.
9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum AB, CD, EF, GH, IK, LM, quæ bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. *b* Quo circa duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN.

b 4. primi.

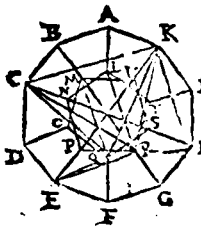
[a] 4. primi

QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, æquales erũt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineãtur; Ac proin de octo triãgula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentq; octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur *D*odecaedro octaedrũ descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 10, PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pẽtagona *A*BCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum *L*, componentia; in quibus tres anguli C, R, *K*, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, cõmuni pentagonis CAL, ALI; At vero *K*, lateri LT, communi pentagonis KLT, *L*TP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, *L*NB,) rectis connectantur C*K*, CR, KR; & ex pũctis C, *K*, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis constructa C*K*RQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KE, RM, & connexis rectis *K*H, RH, RE, QE, QM, QH; [b] quoniam Dodecaedrũ in sphæra describitur; si planũ trianguli CH*K*, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib. 14. Ac propterea angulus CA*K*, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus osten-



[b] 17. tertiidecimi

[c] 31. tertij

ostendemus rectos esse angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. [a] Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppositi æquale sit quadratis laterum circa rectum angulum; sint autē quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarū CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH, (Hæ enim rectæ cum subtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehensos, [b] æquales sunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipsæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera sunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri inscriptum erit intra Dodecaedrum.

[a] 47. primi

[b] 4. primi

ALITER. [c] In proposito Dodecaedro cubus describatur; [d] & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri resideant; perspicuum est, angulos pyramidis sedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro descripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem descripsimus. Quod faciendum erat.

[c] 8. quinti decc.

[d] 1. quinti decimi

PROBL. 11. PROPOS. 11.

Q. 11.

IN dato Icosaedro cubum describere.

[e] DESCRIBATVR in dato Icosaedro Dodecaedrū; [f] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cū.n. anguli cubi resideāt in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedri in cētris basiū Icosaedri collocētur; tangēt anguli cubi eadē cētra basiū Icosaedri: Ac propterea cubus in Icosaedro descriptus erit. Quam ob rē in dato Icosaedro cubū descripsimus. Qd faciēdum erat.

[e] 5. quinti dec.

[f] 8. quinti decimi

PROBL.

0. 12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icosaedro Pyramidem describere.

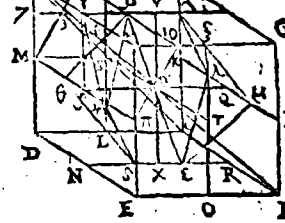
IN dato Icosaedro [a] cubus describatur, [b] & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. [c] Cum enim anguli cubi tangant centra basium Icosaedri; [d] & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifestum est, angulos pyramidis attingere centra earundem basium Icosaedri; Ac proinde pyramidem in Icosaedro esse descriptam. In dato igitur Icosaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

[a] 11. quintidecimi
[b] 1. quintidec.
[c] 11. quintidec.
[d] 1. quintidec.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum describere.

SIT in cubo proposito AF, describendum Dodecaedrum. Secentur singula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, π, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mπ, KP, NR, nusquá inter se coëuntibus, ita vt ductæ in basibus oppositis sint inter se parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, sed vna duntaxat, quæ rursus bifariam secentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ se mutuo in centro α, bifariam secant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propos. 3. huius lib. docuimus, suntque lateribus cubi, sicut & priores sex, æquales. Iam dimidia recta-



rectarum Y Z, M π, secentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt sint maiora segmenta, Yβ, Zγ, Mϑ, πκ, ductis rectis Yρ, Yκ. βϑ, βκ. Quoniam ergo Yρ. YV, dimidio lateris cubi sunt æquales; & ρκ, βV, segmenta minora rectarum æqualium YV, ρπ, æqualia quoque: [a] Sunt autem quadrata rectarum YV, βV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, ρκ, tripla eiusdem quadrati rectæ Yβ. Quare, [b] cum quadratis rectarum Yρ, ρκ, æquale sit quadratũ rectæ Yκ, [c] quod angulus Yρκ, rectus sit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rursus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, [d] recta est ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum, rectus erit angulus βYκ, ex defin. 3. lib. 11. Ac propterea quadratũ rectæ βκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yβ, existens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ. (quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ, quadrupla etiam sunt quadrati rectæ Yβ. cum quadratum rectæ Yκ, triplum sit ostẽsum quadrati rectæ Yβ.) Ideoque cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta βκ, rectę Yβ. Quadrupla enim proportio duplicata est duplę proportionis, vt in his numeris 1. 2. 4. apparet: Est autem & θκ, dupla ipsius ρκ, quod minora segmenta θρ, κρ, rectarum æqualium Mρ, πρ, æqualia sint. [g] Erit igitur vt Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipsius Yβ, ad θκ, duplam ipsius ρκ: Est autem Yβ, maius segmentum ad ρκ, rectam minori segmento βV, æqualem, vt tota ad maius segmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit vt tota ad maius segmentum; Ac proinde θκ, erit maius segmentum rectę βκ, sectę extrema ac media ratione Eadem ratione ostendemus ϑκ, maius esse segmentum rectę βθ, extrema ac media ratione sectę, si nimirum ducatur recta Yϑ. Quare æquales erũt ββθ, βκ, constituentes triangulum Isosceles βϑκ, simile illi, quod ab Euclide constructum est propos. 10. lib. 4. vt postea demonstrabimus; Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βϑκ, circumscribente describi pti, vt perspicuum est ex 11. propos. lib. 4.

INTELLIGATVR iam planum trianguli βϑκ, extendi, (ducta per β, recta βφ, ipsi Mπ, parallela,) per parallelas Mπ, φ 10. vt sit planum extensum φπ, occur-

[a] 4. tertii decimi.
[b] 47. primi
[c] 29. primi.
[d] 4. vndec.
[e] 47. primi
[f] 20. sexti
[g] 15. quinti

rens

rens diametro AC, quadrati A B C D, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aφ, parallela, connectaturque MS, quæ parallela est vtrique Aφ. 73. Quoniam igitur, per coroll. prop. 4. lib. 6. triangulum A 73. simile est triangulo AMS; ac proinde vt A M, ad M S, ita est A 7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erit quoque A 7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad Aφ, ita M 7. ad 73. Est autem Aφ, maius segmentum rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione. (quod æquales sint Aφ, Yβ. necnõ & MA, YV, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7 A, maius segmentũ erit rectę M 7. extrema ac media ratione sectæ 5. Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M 7. Atqui vt M 7. ad 7 A. ita est S 3 ad 3. A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusque segmentũ est S 3. Quia vero Sα T, parallela est ipsi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per Sα T, planũ ducatur parallelũ plano φπ, ducto per M π, secabũtur rectæ AS. Aα, in eadẽ rõnes, in punctis 3. & 4. Atque idcirco, cũ AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aα, semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmẽtum erit α4.

a 33. primi
b 4 sexti
c 34. primi
d 5. tertij d.
e 3. sexti
f 33. primi
g 17. vnde.

IISDEM argumentis ostẽdemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. puncto extrema ac media rationea plano φπ, vt perspicuũ est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt. n. lineaméta omnino similia lineamẽtis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratũ AC, locũ quadrati HF; & quadratũ HF, locũ quadrati AC, obtineat in hac secũda figura. Qd tñ in prima figura, sine hac inuersione probabitur ẽt hoc modo. Ducta diametro cubi H C, in eã figu-

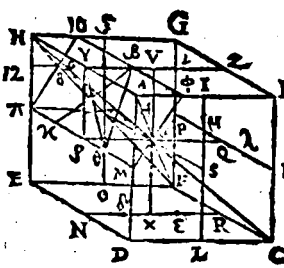
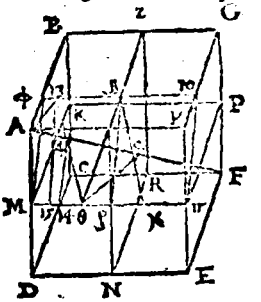


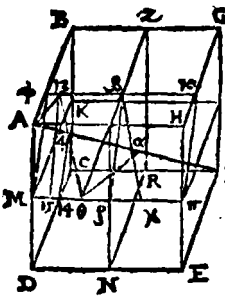
figura. (Hęc deeſt in figura, quá tñ quilibet ducere poterit) quá planũ φπ, ſecet in 9. ppe pũctũ A; intelligaturq; per rectam AH, planũ plano φϖ, parallelũ. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniũt, ſecanturq; planis parallelis in punctis A, H, & 4, 9; erit vt α 4, ad 4 A, ita α 9, ad 9 H. Cum ergo α A, ſecta ſit in 4, extrema & media ratione, erit quoque α H, ſimiliter ſecta, quæ quidem demõſtratio locum etiã habet in hac cubi inuerſione in ſecunda figura. Oſtendamus nunc, ſi rectæ iungantur θ 4. β 4, β 9. κ 9. rectilineum β 4 κ θ 9. in plano φπ, exiſtens, pentagonum eſſe æquilaterum, & æquiangulũ.

INVERTATVR rurſum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirũ continẽt triangulũ β θ κ, ſiue planũ φϖ. hũc ſitũ habeãt, quẽ mõſtrat tertia hęc figura. Deinde in plano φπ, recta cõiuncta θ 4. extendaſ vſque ad rectã φ 10. in punctum 13. Quoniã igitur ducta recta K P, & iũctis rectis M K, ϖ P, [b] planũ M P. parallelum eſt plano A G, (quod & rectæ P K, K M, parallelę ſint rectis GB, BA,) [c] ſecatq; cubũ bifariã; ideoq; per cẽtrũ α, trãſit, per ea, quæ in ſchol. prop. 39. lib. 11. oſtenſa ſunt; ſi per rectas α 4 A, & 4. 13. planũ extẽdatur, [d] fient α 9, A 13. cões ſectiones planorũ MP, AG, parallelæ, Ac proinde triãgula α θ 4. α 13 4. æquiãgula erũt; Eritq; vt α 4. ad 4. A, ita β 4. ad 4. 13. Quare cũ α A, in 4. ſecta ſit extrema ac media ratione, vt oſtẽdimus; eodẽ modo erit ſecta θ 13. in 4. Rurſus plano NZ, per centrũ α, tranſeũti, parallelũ ducatur planũ per punctũ 4. ex ſchol. propoſ. 15. lib. 11. ſecãs planũ φπ, recta 4. 14. [f] Eſt autẽ eidẽ plano NZ, parallelũ planũ DB. [g] Rectę igitur α A, ρ M, in eaſdẽ rõnes ſecabuntur in pũctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. ſecta erit extrema ac media rõne minuſq; erit ſegmentũ 14. M, ideoq; æquale minori ρ 3, ipſius Mρ. Quare cũ ex ρ 14. maiori ſegmento ipſius



[a] 17. vnde.
[b] 15. vnde.
[c] 32. vnde.
[d] 16. vnde.
[e] 4. ſexti
[f] 15. vnde.
[g] 17. vnde.

sius ρM, auferatur ρϑ, minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. ℓ 14. diuisa in ϑ, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit ρϑ. Postremo acta per 13. recta 11. 15. rectæ 4. 14. parallelas



[a] secabũtur rectę ϑ13 ϑ15. proportionaliter; Ac proinde & ϑ15. secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ϑ14. [b] Quapropter erit vt ρϑ, maius segmenti ad ϑ14. minus, ita ϑ14. maius ad 14.15. minus: Vt autem ϑ14. ad 14.15. ita est tota ϑ15. ad ϑ14. maius segmentum. Igitur erit vt ρϑ, ad ϑ14. ita ϑ15. ad eandem ϑ14 Ac propterea rectę ρϑ, vel ρκ. & ϑ15. æquales erũt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelũ per 4.14. ductum, secantur plano ϛϖ, erunt communes sectiones βρ, 4.14 parallelę, ideoque & 13 15. βρ, parallelę erunt, [c] angulusque externus βρκ. interno 13.15 ϑ, æqualis. Cum igitur & latera βρ, ρκ, lateribus 13.15. 15 ϑ, sint æqualia, [d] æquales erunt quoque rectę βκ, 13 ϑ; Ac proinde & earum segmenta maiora ϑκ, ϑ4 (Ostensum enim est ϑκ, esse maius segmentum ipsius βκ,) æqualia erunt Eadem arte & β4 ipsi βγ, in prima figura ostenditur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basim βγ, cuius vertex consistat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem ϑκ, βγ. æquales erunt κϑ. βϑ. Aequilaterum ergo est pentagonum β4ϑκϑ; quandoquidem βγ, hκ, rectę æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt YV, ZV, πρ, Mρ. Sed & æquiangulum, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triãgula, nimirum ad singulas rectas Mϖ, YZ, NR, IL, ξO, KP; bina ipsi βϑκ, similia, & æqualia construantur (Ita enim ad Mϖ, duo huiusmodi triangula vides

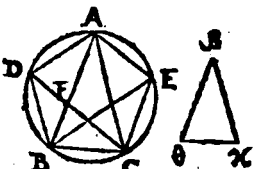
βϑ

[a] 2. sexti
[b] 9. quarti dec.
[c] 16. vnde.
[d] 29. primi
[e] 4. primi.

ββκ, βθκ) & ipsorũ officio duodecim pentagona ipsi β 4. ξ κ 9. similia & æqualia fabricentur, constituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in sex rectis lineis Mϖ, YZ, NR, IL, ξO, KP, bini nimirũ in singulis, octo uero reliqui in octo semidiametris cubi consistunt, nempe in punctis, quę ipsas extrema ac media ratione diuidunt. qualia sunt puncta 4. & 9. in semidiametris Aα, & Hα, secundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inscriptũ esse dicetur cubo huiusmodi Dodecaedrũ, quãuis nõ proprie, cũ non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi cõstituantur, sed duodecim quidem in sex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo semidiametros cubi extrema ac media ratione secant, resideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum describimus. Quod erat faciendum.

LEMMA

QVOD autem triangulum ββκ. cuius basis βκ. maius segmentum existit vtriusque lateris ββ, βκ, extrema ac media ratione diuisi simile sit illi, quod Euclides construxit propos. 10. lib. 4. ita demonstrabimus.



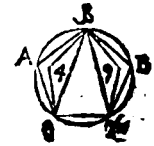
Describatur circa triangulum Isosceles ABC, quale Euclides construere docet propos. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuisisque angulis A BC, A C B, bifariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum equilaterum & aquiangulum ADBCE, vt propos. 11. lib. 4. tradimus, secentque se mutuo recta AB, CD, in F. [a] *Quoniam ergo A B, in F, secatur extrema ac media ratione, maiusque eius segmentum est A F, æquale lateri BC:* [b] *Erit vt AB, tota ad maius suum segmentum*

[a] 8. tertii decimi.

[b] 3. quarti doc.

tum BC, ita β ϑ, tota ad maius suum segmentum ϑκ; Eodemque modo, vt tota A C, ad maius segmentum CB, ita βϑ, tota ad maius segmentum κβ: Est autem quoque vt A B, ad A C, ita β θ, ad β κ, vtrobique enim est proportio aequalitatis. Triangula igitur βϑκ, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesque erunt anguli θ, B; Item κ, C, & β, A; propterea que vterque angulorum θ, κ, duplus erit anguli β; & triangula βθκ, ABC, similia.

PENTAGONVM vero β 4 ϑ κ 9, æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum βϑκ, circulus β A ϑ κ B; qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex ijs, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum β A ϑ κ B. Quoniam igitur tam rectæ A ϑ, A β, quam rectæ 4 ϑ, 4 β, æquales sunt rectæ ϑκ, cum & β 4 ϑ κ 9, & β A ϑ κ B, pentagonum sit æquilaterū; Erunt tā duæ rectæ ϑ A, ϑ 4, quam duæ β A, β 4, æquales. quod fieri non posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo βθκ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum β 4 θ κ 9, æquiangulum est.



SCHOLIVM.

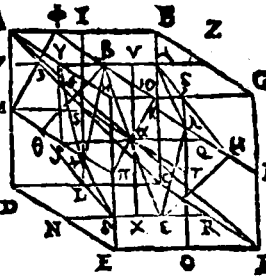
EX his colligere licebit sequentes propositiones.

DIA-

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri βε, intelligaturq; coniuncta recta γε, [a] *aequalis existens & parallela lateri cubi VX, quod & Vγ, Xε, aequales sint, & parallela. Quoniam igitur angulus β V X, rectus est;* [b] *rectus quoque erit angulus βγε, ad γ, constitutus,* [c] *Ac proinde quadratum diametri βε, aequale erit quadratis laterum βγ, γε, nempe Dodecaedri, & cubi.*



[a] 33. primi

[b] 29. primi

[c] 47. primi

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

IN eadem enim prima figura, [d] *cum sit vt YV, ad βV, ita Y Z, dupla ipsius Y V, ad βγ, duplam ipsius βV; Sit autem βV, minus segmentum ipsius Y V, secta extrema ac media ratione: Erit & βγ, minus segmentum lateris cubi YZ, secti extrema ac media ratione; composita vero ex Y β, γ Z, hoc est, recta β κ, (quae dupla sunt ostensa ipsius Y β, ideoque composita ex Y β. γ Z, aequalis) maius segmentum. Constat autem ex constructione βγ, esse latus Dodecaedri,* [e] *& Cκ, seu βϑ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendat angulum pentagoni β ϑ κ, vel β 4 ϑ.*

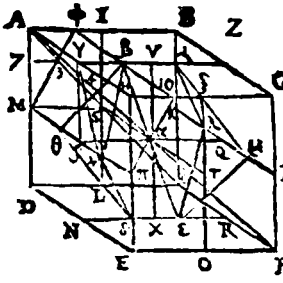
[d] 11. quinti

[e] 8. quinti dec.

III.

LATVS cubi æquale est duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipso descripti, & Dodecaedri circa eundem cubum descripti.

NAM in prima rursus figura, latus cubi Y Z, *componitur ex latere Dodecaedri* β γ, *in ipso descripti, & ex recta composita ex* Y β. γ Z; *quæ constat esse latus Dodecaedri eidem cubo circumscripti. Cum enim* Y Z, *cubi latus subtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum descripti, vt perspicuum est ex 8. propos. huius lib. Sit autem latus illius pentagoni maius segmentum lateris* Y Z, *secti extrema ac media ratione: Erit* βϑ, *existens quoque maius segmentum eiusdem lateris* Y Z, *vt iam demonstrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris* Y Z, *circumscripti.*



a 8. tertij dec.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppositos connectens est æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inscribitur.

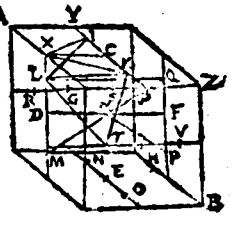
IN prima enim figura, recta connectens puncta β, δ, *in quibus constituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri* ϑπ, *oppositi,* [b] *æqualis est rectæ* V X, *(quod & β V, δ X, æquales sint, & parallelæ) hoc est, lateri cubi, in quo Dodecaedrum describitur.*

b 33. primi

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrũ describere:

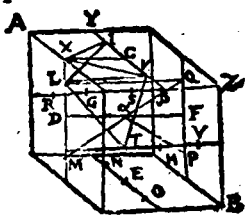
CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium cẽtra C, D, E F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquã inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K; L, M; N, O; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: K, cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, RSI, RSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Cõnectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; & anguli contenti, recti, quod XC, parallela sit ipsi AY; [b] Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK; Ac propterea cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, triãguli LXK, & anguli contenti, rectis; [c] æquales erunt bases LI, LK. Rursus [d] quoniam quadratũ rectæ LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX quadrato rectæ IY; quadratum uero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI, est æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera sint diuidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale est tribus quadratis



[a] 29. primi.
[b] 4. primi
[c] 4. primi.
[d] 47. primi

dratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ CI. (a Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, maioris segmenti; addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdē quadrati rectę CI.) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoq; quadrati rectæ CI; Ac propterea, cū eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectę KI, ex scholio propos. 4. lib. 2. Aequalia erunt quadrata rectarū LI, IK, ideoq; & rectæ ipsæ æquales. Aequilaterū igitur est triangulū IKL, lateri cubi AG, subſtratū.

a 4. tertij de cimi



NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triāgula, vndecim reliquis lateribus cubi supposita, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triāgulorum, octo angulis cubi suppositorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, commune est triangulo IKL; & latus KT, triangulo TVK; & latus TL, triangulo LMT; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hoc propositione sequentes.

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DV-

DVCTA enim recta LQ, [a] qualateri cubi DF, parallela est, & aequalis, quod & DL, FQ, parallelae sint, & aequales; [b] manifestum est, quadratum diametri QM, aequale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrū descriptum est, [c] cum angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, rectus sit. [a] 33. primi [b] 47. primi [c] 29. primi.

II.

BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis aequalibus, se se in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineae nimirum DF, CE, GH, cū coniungant centra basium cubi oppositarum, aequales sunt lateribus cubi, sesoque per coroll. propos. 3. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, dimidiunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF, FP, FQ. triāguli αFQ, aqualia sunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, [d] aequales erunt rectae αQ, αP. Eademque ratione aequales erunt omnes rectae ex α, ad angulos Icosaedri prodeuntes. Igitur α, centrum est Icosaedri. [d] 4. primi

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim CI, sit maius segmētum rectae CY; [e] sitque tota CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad βY, duplam ipsius CY; [f] erit quoque KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi βY. [e] 19. quinti [f] 2. quartidec.

IIII.

ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

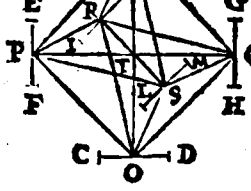
SI enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter ſe æqualia, angulóſque alternos habentia æquales, ex 4. propoſ. lib 1. qua quidem in centro cõmunicant. Quare quælibet latera oppoſita parallela erunt; [a] *Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela.*

a 15. vnde.

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

EXPÒNANTVR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita, *AB. CD, EF, GH, IK, LM*, quorum bifarias ſectiones N. O, P, Q, R, S. iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſe ſe in centro I. bifariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ ſcholio propoſ. precedentis oſtenſa ſunt; ducanturq; rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS, OQ; PR, PS; & QS, conſtituẽtes octo triãgula SNP, SPO, SOQ, SQN, RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum ſint rectarum æqualiũ dimidia) angulóſque continent rectos, vt dictum eſt; b Æquales erunt baſes NS, NP: Eodemq; modo reliquę omnes lineæ æquales erunt & biſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia; Ideoq; Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum eius anguli reſideant in bifariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaq; Icoſaedro Octaedrũ deſcripſimus. Quod faciẽdum erat.



b 4. primi

CO-

COROLLARIVM

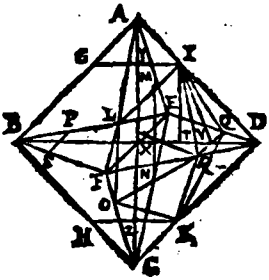
SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam scilicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoque est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.

DATVM Octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit ABC*DEF*. Cũ a quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur a singulis bina non proxima, sed sibi e regione respondentia, hoc est, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt B*A*, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, *A*E; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Ná a quolibet angulo sumẽda sunt tm̃ duo latera; at vero latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdẽ angulos A, C, iã sumpta fuere,) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati *EBFD*; (Ná latera E*A*, EC; FC, FA, quadrati *A*ECF, iuxta eosdẽ angulos, E, F, iam accepta sunt,) q̃ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK. Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam linea-

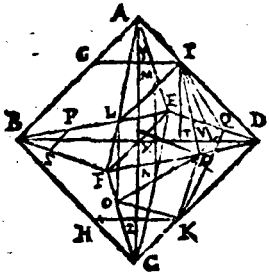
linearum confusionē. Quæ autem sint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt.n. tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum est, pyramidē constituunt; alia aūt duo sunt in duobus lateribus duorū triangulorum octaedri, quæ habent cōe illud latus, in quo punctū acceptū est. Vt qa punctū acceptū est *R*, in latere *DF*, qđ cū tribus *DE*, *DA*, *DC*, pyramidē cōstituit in vertice D, & est cōe triāgulis octaedri *DFA*, *DFC*; ppea ex R, ad quinque pūcta horū quinque laterum ductæ sunt lineę rectę. & sic de cæteris. Post hęc, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, se se in cētro X, secantibus bifariā, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. prop. 14. lib. 13. quarū AC, *BD*, secāt rectas GL, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipsi YX. Qm̄ ergo latera DQ, DI, triāguli DQI æqualia sunt lateribus DR, DI; (Sunt.n. DQ, *DR*, minora segmenta rectarum æqualium DE, DF,) & angulos cōprehendunt æquales, nēpe triangulorū Octaedri ADE, ADF; [a] Erunt bases IQ, IR, æquales. Deinde cū sit, [b] vt BG, ad GA, ita *DI*, ad IA; [c] erit GI, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR, ipsi *EF*, parallela; [d] Ac proinde vt *DI*, ad *IA*, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, secta erit in Y; extrema ac media ratione. Rursus quia est vt AX, ad XD, ita *AY*, ad *YI*, (quod triangulum AYI, simile sit triangulo AXD, per coroll. propos. 4. lib. 6.) Est autem AX, ipsi XD, æqualis; Erit & *AY*, ipsi YI, æqualis. Quare YI, minus segmentum est rectæ XA. Non aliter ostendemus AY, ipsi YG, esse æqualē; ideoq; GI, rectam, bifariā in Y; similiterq; QR, in V, secari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia sint lateribus DQ, DR, triāguli DQR, (nimirum minora segmenta minoribus segmentis æqualium rectarum) angulosq; cōprehendant rectos,



[a] 4. primi.
[b] 2. quarti dec.
[c] 2. sexti
[d] 4. sexti

ctos, nępe quadratorum ABCD, DEBF.[a] Aequales erũt baſes GI, QR. Eadem ratione his æquales oſtendẽtur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtẽdunt reliquos quadratorum ABCD, DEBF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, cõplectunturq; duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, maius eſt ſegmẽtum maioris ſegmenti XY, diuiſi extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad prop. 5. lib. 13. Eſt autẽ XY, rectę XV, æqualis. (cum ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD,)[b] & YI, rectæ XT; erit XT, maius ſegmẽtum ipſius XV, & idcirco TV, ſegmẽtum minus eiuſdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc eſt, ipſius IT,[c] (cum & recta IT, æqualis ſit ipſi XY) & TV, minoris ſegmẽti,[d] tripla ſunt quadrati rectę XT, maioris ſegmenti; Atq; adeo quadratum rectæ IV,[e] æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, triplum eſt eiuſdẽ quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, quæ æqualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cum RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarũ IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: At quadratis rectarũ IV, VR, æquale eſt quadratum rectæ IR,[f] qđ anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & ſubtẽſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoq; recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR; Ac propterea cum eiuſdem quadrati rectę VR, quadruplum quoq; ſit per ſcholium prop. 4. lib. 2. quadratum rectę QR; Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triãgula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN; atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium ſint æqualia inter ſe. quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis

[a] 4. primi.
[b] 34. primi
[c] 34. primi
[d] 4. tertij de.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 8. primi.



mentis minoribus laterum octaedri; duo vero reliqua subtendãt duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum cõtentos singulos duobus segmentis laterũ Octaedri, *maiore* & minore: Erunt latera vnius triãguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipsa triangula æqualia, per corollarium propositionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera IQ, GI, subtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehensos minoribus segmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia sunt. Eodem modo latera IQ, IL, æqualia erunt, cum subtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorũ ille continetur segmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; *hic vero segmentis* AL, AI, maiore & minore quoque. Non secus latera IR, GL, æqualia erũt. Aequalia igitur sunt triangula IQR, GIL, per corollarium propos. 8. lib. 1. Atqui IQR, ostensum est esse æquilaterum; ergo & GIL, æquilaterum est. Eademque est ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula supponuntur sex angulis Octaedri, bina videlicet singulis. Ex his consequitur reliqua octo triangula octo basibus Octaedri imposita, videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ in AED; GLS, in AFB; HOS in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque esse, & prædictis æqualia cum horũ latera cum illorum lateribus communia sint. Viginti ergo hæc triãgula quorum quina in singulis sectionibus laterũ octaedri conueniunt ad constitutionem anguli solidi, (vt vides in quinque RQI, RIL, RLO, ROK, RKQ, solidum angulum R, componentibus.) Icosaedrum componunt Octaedro inscriptum, cum Icosaedri duodecim anguli, duodecim sectiones laterum Octaedri possideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

Co-

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo lateratriangulí æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones duplum poſſe minoris ſegmẽti. Cum. n. in triãgulo æquilatero ADE, maius ſegmentum lateris AD, ſit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, oſtenſa æqualis rectæ GI, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti AI, cum quadratum rectæ GI, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perſpicuum eſt, & rectam IQ, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris AI. * 47. primi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS ſit, cum octo Icoſaedri baſes collocatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. Suſcipiatur namq; Octaedri ſuperioris triangulum AED, in quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri IMQ, ſitq; C, centrum trianguli AED, ex quo rectæ educãtur CA, CE, CD; CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia ſunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ, (quod hæc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) angulosque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. oſtẽdimus; Erũt baſes CM, CQ, æquales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, CQ. Quare C, centrum erit trianguli IMQ.

CO-

COROLLARIVM III.

NON difficile est denique ex dictis colligere, idē centrum esse Octaedri, atque sibi inscripti Icosaedri. Ductis enim ex X, cētro Octaedri, duabus rectis ad quoscunque duos angulos Icosaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cum latera XA, AG, trianguli XAG, aequalia sint lateribus TF, FO, trianguli XFO, (Nā XA, XF, semidiametri sunt Octaedri, & AG, FO, segmenta minora laterū aequalium Octaedri sectorū extrema ac media ratione) angulosque complectantur aequales, semirectos videlicet; (cū AC, EF, diametri sint quadratorū ABCD, EAFC; ac proinde, per demonstrata in scholio propos. 34. lib. 1. angulos quadratorum bifariam secent.) Aequales erunt & bases XG, XO. Eodemque argumēto ostendentur omnes aliae rectae ex X, ductae ad angulos Icosaedri aequales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque est Icosaedri.

[a] 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum describere.

[b] 16. quintidecimi. [c] 5. quintidec.

[b] INSCRIBATVR dato Octaedro Icosaedrū; & in hoc Icosaedro Dodecaedrum, factumq; erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli constituantur in centris basium Icosaedri, quarum octo concētricæ sunt basibus Octaedri, ex coroll. 2. propos. 16. huius lib. Manifestum est, Dodecaedri octo angulos in eisdem cētris octo basium Octaedri, reliquos autē duodecim in centris duodecim basium Icosaedri, quarum binæ singulis ex angulis Octaedri supponuntur, residere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inscriptum esse dicetur,

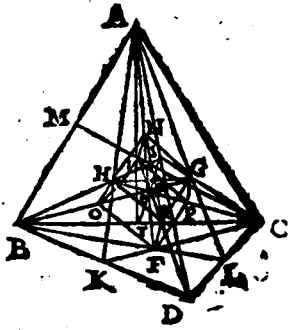
quare

quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere poteſt. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

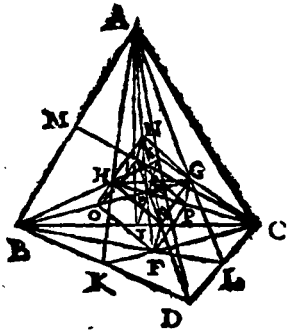
IN data Pyramide cubū deſcribere.

DETVR pyramis *ABCD*, in qua cubus iubetur deſcribi, ſitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur AEF, BEG, CEH, DEI, quæ cadent in centra baſium oppoſitarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad eaſdē baſes BCD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, ſecantes baſes oppoſitas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectæ ex ſolidis angulis p centrum E, demiſſę AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis, quorum quodlibet cum tribus proximis centris baſium (centris, inquam, baſium ipſam lineam, in qua punctum eſt, circumſtantium, ita vt relinquatur centrum illius baſis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis cōiungātur, vt N, cū G, H, I; O, cū F, H, I; P, cū F, G, I; & Q, cū F, G, H. Dico ſolidū NF, contētum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubū eſſe. Cū. n. latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia ſint lateribus AF, FL, triāguli AFL, (qđ FK, FL, cū ppendiculares ſint ad BD, CD, ex cētro F, ductæ oſtēdāt æquales diſtātias rectarū æqualium



11. quarti dec.

æqualium BD, CD, a centro F,) angulosque continent rectos, ex 3. defin. lib. 11. [a] Æquales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, triãguli ANG, (sunt enim AH, AG, semidiametri trium gulorum æquilaterorum æqualiũ ABD, ACD) angulos item comprehendunt æquales, vt demonstrauimus; [b] Æquales erunt bases NH, NG. Haud secus ostendentur æquales rectæ QG, QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendent æquales angulos æqualibus lateribus comprehensos; vt perspicuum est. Si. n. recta ducatur FT, cũ latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK. (Sunt namque FT, FK, distantiæ rectarum æqualium BC, BD, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Æquales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri trium triangulorum æquilaterorum æqualiũ ABC, ABD;) angulosque contineant æquales: [c] Æquales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.



ASSVMATVR quadrilaterum NQ, *ductis rectis* GH, NQ. Quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter octaedri in pyramide descripti, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum

[a] 4. primi.
[b] 4. primi.
[c] 4. primi.

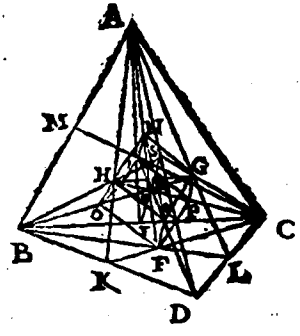
F, cum & in illa sint latera opposita, siue non cocuntia BC, AD. Quocirca cum idem sit centrum pyramidis & Octaedri in ipsa descripti, vt mox demonstrabimus, transibit ST, per E, centrum pyramidis, æqualesque erunt ES, ET, nempe semidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares sunt ad AD, per scholium propos. 12. lib. 13. [a] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, triãguli BSC, proportionaliter secantur, [b] atque idcirco HG, parallela est lateri BC, secatq; latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars est trianguli BSC.) proportionaliter; ideoque & SR, tertia pars est ipsius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rursus [c] quia DI, perpendicularis est ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars semidiametri DE, ex coroll. 2. propos. 13. lib. 13. hoc est, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundẽ partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1, atque idcirco EQ, tertia pars erit ipsius DE. Eadẽ ratione EN, tertia pars erit ipsius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter secentur, [d] recta NQ, parallela erit lateri AD, secabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars est triãguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, sit tertia pars ipsius DE; tertia pars erit ER, ipsius SE; Ac proinde SR, duæ tertię partes eiusdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abstulit, in eodem puncto R; secabitur SE, a rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipsæ HG, NQ, in eodem se se puncto intersecabunt. [e] Quare in eodem sunt plano, propterea que & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipsis plano. Planum igitur est quadrilaterum NQ. Eademque est ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum sit, nunc demonstremus.

CVM ostensa sit HG, ipsi BC, parallela, atque adeo triangulum SHG, simile triangulo SBC, ex coroll. propos. 4. lib. 6. [f] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC: Est autem SH, tertia pars ipsius SB: igitur & HG, tertia pars erit late-

[a] 18. quarti decimi.
[b] 2. sexti.
[c] 15. quarti decimi.
[d] 2. sexti
[e] 2. vndec.
[f] 2. sexti

ris BC. Haud secus ostendemus NQ, tertiam esse partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, sint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum subtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; [a] æquales erũt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cũ ipsi sint quatuor rectis æquales, vt ostendimus ad ppos. 32. lib. 1. recti erunt; ideoq; quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum constituent: qui ideo pyramidi dicetur inscriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, a centris quatuor basium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in bifariis sectionibus perpendicularium ab angulis pyramidis ad eius bases ductarum resideant, vt constat.

[a] 8. primi.



ALITER. In data pyramide describatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod habetur. Quoniam enim octo anguli cubi statuuntur in centris octo basium octaedri, quarum quatuor sunt in quatuor basibus pyramidis, vt constat ex prop. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipsis, vt mox ostendemus; fit, vt quatuor anguli cubi resideant in centris quatuor basium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demonstratione dictum est. Rursus quia reliquæ quatuor bases octaedri parallelæ sunt basibus pyramidis, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. [b] cum enim rectæ EG, EH, parallelæ sint rectis BC, BD; [c] erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter se parallela, & sic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in bases oppositas demissæ, sint quoque ad illas qua-

[b] 2. sexti.
[c] 15. vnde.

quatuor reliquas baſes octaedri perpẽdiculares, ex ſcholio prop. 14. lib. 11. Quare cũ prædictæ baſes abſcindant ex pyramide pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt. [a] Et quia dictæ quatuor baſes octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc eſt, bifariã; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 17. vnde.

COROLLARIVM I.

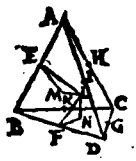
CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum per E, centrum pyramidis tranſeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorũ laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamq; eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis GNHQ, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat; Recta RS, dupla ipſius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, oſtenſa ſit tertia pars ipſius ST; perſpicuum eſt, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis AD, BC, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi RS.

LEMMA.

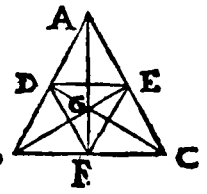
IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primum pyramis ABCD, cuius omnia sex latera bifariã secẽtur in E, F, G, H, I, K; & ex L, cẽtro Pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN, quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex corollario lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniã latera LM, ME, trianguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi a centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantia rectarum æqualium AB, BD, a centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3 lib. 11.



a 4. primi. *a Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hisce æquales erunt, & inter se rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat; Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cũ igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea descripti.*

SIT deinde in base pyramidis ABC, basis octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet ex

ex propos. 2. huius lib. sit autem G, centrum trianguli ABC, a quo ad angulos vtriusque basis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, BF, æqualia sunt, angulosq; continẽt æquales, nimirũ semisses angulorum æqualium trianguli æquilateri [a] *erunt & bases GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum est trianguli DEF. quod est propositum.*



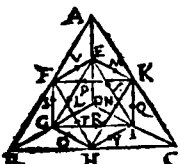
[a] 4. primi

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icosaedrum describere.

DATAE Pyramidi ABCD, [b] inscribatur octaedrũ EFGHIK, cuius omnia duodecim latera secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina sumãtur ex singulis angulis sibi respõdentia, hoc est, in angulos oppositos quadratorum octaedri cadentia, vt in propos. 16. huius lib. diximus, qualia sunt EG, EK; *HK*, *HG*; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in punctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam si quodlibet horum punctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. descriptum erit Icosaedrũ in dicto octaedro, vt cõstat ex prop. 16. huius lib. habẽs oẽs duodecim angulos in duodecim pũctis sectionibus duodecim laterũ octaedri. Cũ ergo hæc ipsa latera octaedri in planis basiũ Pyramidis sint ducta; manifestũ

[b] 2. quintidec.



est, duodecim angulos Icosaedri in planis basiũ pyramidis cõstitui, ternos scilicet in singulis, quod & terna latera octaedri in singulis basibus pyramidis ducta sint. Nã in basi ABC, existunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icosaedrum in pyramide descriptum erit, per defin. 31. lib. 11. cuius quidem quatuor bases MXQ, ROY, LSV, NPT, in quatuor basibus Pyramidis existunt, vt cõstat. In data igitur Pyramide Icosaedrũ descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum describere.

a 19. quintidec.
b 5. quintidec.

PYRAMIDI datæ[a] inscribatur Icosaedrum, [b] & in hoc Dodecaedrũ habens viginti suos angulos in centris viginti basium Icosaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cum enim quatuor bases Icosaedri existant in quatuor basibus pyramidis, vt in præcedenti propos. diximus; cõsistẽt quatuor anguli Dodecaedri dicto icosaedro inscripti in quatuor basibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt. n. dictæ quatuor bases Icosaedri quatuor basibus Pyramidis concentricæ, vt constat ex 2. coroll. propos. 16. huius lib. Deinde, quia cubus Dodecaedro inscriptus octo suos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inscriptus, [d] quatuor angulos in centris basium pyramidis, de quibus iam dictũ est, quatuor autem reliquos in bifariis sectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in bases demissarum constituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eisdem bifariis sectionibus perpendicularium dictarum: supersunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini singulis lateribus Pyramidis supponentur; Atque adeo dictũ Dodecaedrũ descriptũ esse dicetur in pyramide proposita, etiam si non proprie. Quam ob rẽ in data Pyrami-

c 8. quintidec.
d 18. quintidecimi.

de

de Dodecaedrum descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 21. PROPOS. 21. 13.

IN dato solido regulari sphæram describere.

EX centro sphæræ datum solidum cõplectentis ad singulas bases perpendiculares demittantur, quæ ex corol. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum bases circumscribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum sint, æqualiter a centro distent, ex lemmate 2. eiusdem propos. Quapropter sphæra, cuius semidiametri sunt præfatæ perpendiculares æquales, in solido descripta erit, cum eius superficies contingat singulas bases in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque solidorum regularium in quatuor reliquis inscribatur, vt sint in vniuersum viginti inscriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie describitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perspicuum est ex propos. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide describitur, vt ex propos. 18. huius lib. est manifestum. Nam, vt propria solidum aliquod in solido dicatur describi, necesse est, omnes angulos solidi inscripti cõstitui vel in angulis, vel in latcribus, vel denique in planis, siue basibus solidi, cui inscribitur, vt defin. 31. lib. 11. exposuimus: qua quidem conditio Dodecaedro, si describatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, si describatur in Pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque solida regularia, vnum octaedrum reliqua quatuor mutuo sibi inuicem suscipit inscripta. a In octaedro enim describitur Icosaedrum constituens duodecim suos angulos in duodecim pũctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione secãtur. Deinde b Icosaedro imponitur Dodecaedrũ, q eidẽ octaedro in-

a 16. quinti decimi
b 5. quinti decimi

scriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro describitur. Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

a 8. quinti-decimi
b 1. quinti-decimi

NEQVE vero prætereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat, sphæram Dodecaedro circumscriptam contingere quoq; cubum atque pyramidem, cum sphæra illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

c 1. quinti-decimi.
d 8. quinti-dec.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: In centris quidem, basium Icosaedri, propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesve quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absolximus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20: In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMEN-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM,

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, a Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

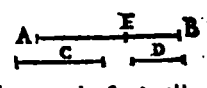
QVEMADMODVM *libro 14. tradita ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur,

tur,& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectę lineę diuiſę extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac media ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quâ habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus. Ci enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubuſq; in illo deſcriptus, eadem comprehendetur ſphæra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadē ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri Dodecaedri in eadē ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demōſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit EB, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circūſcripti ad D, latus Dodecaedri eidē cubo inſcripti, vt AE, maius ſegmentū ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatā lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedro cubus inſcribatur, &c. Quod erat demōſtrandū.



THE-

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquiangulí in latus oppositum demissa, secatur a recta illum angulum subtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono equilatero, & equiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppositum CD, perpendicularis demittatur AF. *Dico* AF, a recta BE, subtẽdente angulum A, secari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta *AD*, que secet BE, in H; quoniam BE, recta lateri *C D*, ex scholio propos. 8. lib. 13. est parallela, [a] secabuntur rectæ A F, A D, proportionaliter: [b] Atqui *AD*, in H, secta est extrema ae media ratione, estque maius segmentũ *DH*. Igitur & *AF*, in G, similiter erit secta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] *2. sexti*

[b] *18. tertij decimi.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectę oppositа latera secantes extrema ac media ratione, ita vt ꝑpe quẽuis angulũ sit maius segmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ sectionibus suis in medio producent basin Icosaedri in dicta pyramide descripti, inscriptam

quidem

quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis secant extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur ab angulis basis Icosaedri.

TRIANGVLVM pyramidis sit *A B C*, cuius latera secentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rursum sectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, cõstituentes GHI, triangulum Icosaedri in dicta pyramide descripti, vt constat ex propos. 13. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis *B K*, CL, AM. Dico has rectas suis sectionibus producere triãgulũ Icosaedri GHI, hoc est, rectam *B K*, transire per rectam G, I; & rectam CL, per pũctum *H*, *I*; & rectam *A M*, per punctum G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipsi B C, parallela; erit triangulum FHO, triangulo FEC, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. ideoque & æquilaterum, cum sit FEC, æquilaterum sit, quippe quod simile sit triangulo *A B C*, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis est rectæ FH, maiori segmento rectæ *F E*, seu DF, ipsi æqualis (Est enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera subtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidiis scilicet æqualiũ laterum eiusdem trianguli comprehensos; [a] ideoque æqualia sint.) [b] Est autem & N H, æqualis toti D F, in parallelogrammo DH, [c] propterea quod FH, *DF*, parallelæ sunt rectis AB, BC, seu NO. Igitur recta NO, composita ex NH, tota, & HO, maiori segmento, [d] secta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ *BC*, NO, DF, similiter sint sectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonstrauimus

[a] 4. primi.
[b] 34. primi.
[c] 2. sexti.
[d] 5. tertij. def.

ulmus ad propoſ. 4. lib. 6. ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat, ipſam AM, tranſire per puncta G, H. Haud ſecus oſtendemus BK, per puncta G, I; & CL, per puncta H, I, tranſire, ſi per G, & I, rectæ ducantur parallelæ lateribus AC, AB; Atque idcirco rectæ BK, CL, AM, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri GHI.

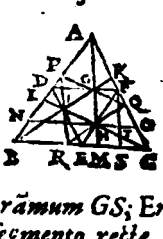
AGATVR iam per G, recta PQ, rectæ CL, parallela. Quoniam igitur AF, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectæ FE, cuius maius ſegmentum fuit FH, hoc eſt, FO, illi æqualis; Erit quoque FO, maius ſegmentum rectæ AF; ac proinde tota AO, ſecta in F, extrema ac media ratione: [a] Eſt autẽ vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO; & vt AG, ad GH, ita AQ, ad QC, & AP, ad PL, ob triangula AHC, AHL. Igitur & rectæ AH, HC, AL, ſecantur in G, Q, P, extrema ac media ratione, atque maiora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo QA L, ſegmẽta maiora rectarum æqualium AC, AB, quales erunt. Quia uero eſt [c] vt AQ, maius ſegmẽtum, ad QC, minus, ita AL, tota ad AP, maius ſegmentum; erit AQ, recta rectæ AL, æqualis: Erit & QC, recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus ſegmentum latens AB, maiusq; reliqua BP; ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I, ducitur parallela rectæ AM, ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet. Non aliter recta RQ, per H, ducta parallela rectæ BK, latera AC, CB, ſecabit extrema ac media ratione, atq; adeo in puncta R, Q, cadet. Quoniam vero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos, [d] æqualia inter ſe ſunt; erit triangulum PQR, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI: (Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela ſit lateri CL; ſecabuntur PQ, LC, in eaſdem rationes, ex ijs, quæ ad propoſ. 4. lib. 6. demonſtrauimus: Diuiditur autem CL, bifariam in H, ob triangulũ ACL, in quo FH, parallela eſt lateri AL, [e] ſecans proportio-

[a] 5. tertij decimi. [b] 2. ſexti. [c] 2. quarti dec. [d] 4. primi [e] 3. ſexti.

portionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ bifariam secatur in G. Eademque est ratio de reliquis QR, RP. Ac propterea triangulum Icosaedri GHI, inscriptum est triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera basis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipsa bifariam secantur in G, H, I, ab angulis basis Icosaedri GHI. Quapropter, si ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi potest, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius esse segmentum rectæ diuisæ extrema ac media rõne, quæ ab vno angulo basis octaedri ducta secat latus oppositum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt constat ex propos. 14. lib. 15. GHI, triangulum sit Icosaedri in octaedro, cuius basis DEF, descripti; ducatur ex angulo F trianguli FEC, quod trianguli DEF, est æquale, recta FS, parallela rectæ AM, secans MC, HO, in S, & T. Cum sit MC, bifariam secetur in S, triangulum AMC; sitque MC ipsi GF, æqualis, ob parallelogrãmum GS; Erit & SC, æqualis eidem GF, maiori segmento rectæ DF; Ac propterea cum tota DF, EC, æquales sint; erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori segmento æqualis: Ideoque EC, in S secta erit extrema ac media ratione. Deinde quia FE, FS, similiter secantur; secatur autem FE extrema ac media ratione; secabitur & FS, in T extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit FT, recta æqualis existens lateri Icosaedri GH, vel parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icosaedri octaedro inscripti, maius est segmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demissa. Quod est propositum.



a 2. sexti.

b 34. primi

c 2. sexti.

d 34. primi.

THE-

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS segmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione sécti, duplum est potentia lateris Icosaedri in ea pyramide descripti.

BASIS Pyramidis sit ABC, cuius latera extrema ac media ratione secentur in *K*, *L*, *M*, & ductis rectis B*K*, CL, *A*M, producentibus GHI, basim Icosaedri in illa pyramide descripti, inscriptam triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli A*B*C, secent extrema ac media ratione in P, Q, *R*, & ipsa latera PQ, QR, *R*P, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in prop. præcedenti demonstratum est. Dico AP, minus segmentum lateris Pyramidis duplum esse potentia lateris Icosaedri HI. Cum enim PQ, dupla sit potentia minoris segmenti AP, ex coroll. 1. propos. 16. lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla sit rectæ PG, hoc est, sibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2 & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectę HI. Minus ergo segmentum lateris, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icosaedri in pyramide descripti, esse Apotomen. [a] *Cum enim diameter sphæræ potentia sesquialtera sit lateris Pyramidis; si diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale,* [b] *cũ diametro potentia sit cõmensurabile.* [c] *Quare minus segmentũ lateris Pyramidis extrema ac media rõne sécti Apotome erit; Atq; adeo* [d] *cũ minori*

[a] 13. tertiidec.
[b] 6. dec.
[c] 6. tertiidecimi.
[d] 6. decimi

minori segmento lateris Pyramidis latus Icosaedri potentia sit commensurabile; (ostendimus enim minus segmentum potentia esse duplum lateris Icosaedri.) Erit & latus Icosaedri, ex scholio propos. 104. lib. 10. Apotome.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis in eo descriptæ: Latus vero Pyramidis duplum est longitudine lateris octaedri sibi inscripti: latus denique cubi duplum est potentia lateris sibi inscripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo descriptę diameter sit basis cubi, vt constat ex propos. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum basis cubi, hoc est, quadrati lateris cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. Manifestum est, latus cubi dimidium esse potentia lateris Pyramidis in cubo illo descriptę.

RVRSVS, quia rectę coniungentes bifarias sectiones laterum Pyramidis constituunt octaedrum in pyramide descriptum, vt liquet ex propos. 2. lib. 15. Est autem latus trianguli equilateri duplum rectę coniungentis bifarias eius sectiones, cum ea recta æqualis sit dimidio lateris trianguli, vt constat ex coroll. propos. 4. lib. 6. Nam cum sit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perspicuum est latus pyramidis duplum esse longitudine lateris octaedri sibi inscripti.

a 2. sexti

DENIQVE b quia diameter sphęræ, seu octaedri potentia est dupla lateris octaedri; Est autem latus cubi æquale diametro Octaedri sibi inscripti, cum diameter octaedri coniungat centra basium cubi oppositarum, vt in coroll. propos. 3. lib. 15. diximus: patet, latus

b 14. tertij dec.

tus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; [a] existat denique latus cubi dimidium potētia lateris Pyramidis sibi inscriptæ: Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

[a] 5. sextidec.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrū, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus deniq; Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum.n. ex ijs, quę in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, minus

A
B
C

nus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum sit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplũ est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demonstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti; (ostensum. n. est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiã esse partem lateris Pyramidis BC,). Et quadrata proportionem habeãt laterum duplicatam: Erit quadratũ lateris Pyramidis nõcuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cũ nonecupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. 27. paret. Quare, cũ quadratũ diametri basis cubi duplũ sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratũ lateris cubi 1. quadratũ eiusdẽ basis diametri sit 2. & quadratũ lateris pyramidis 18. Quamobrẽ latus Pyramidis potẽtia octodecupli est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

*20. sexti

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentũ latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro describatur, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrũ inscribitur, vt docuimus in scholio prop. vlt. lib. 15. [b] Erit latus Pyramidis potẽtia octodecuplũ lateris cubi sibi. & Dode-

[b] 8. sextidc.

caedro

caedro inſcripti: *Huius autē lateris cubi extremæ ac me dia ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. ppoſ. 17. lib. 13.* latus Dodecaedri *in* pyramide deſcripti, *in quo nimirum* cubus eſt deſcriptus. Igitur latus Pyramidis po tentia octodecuplum eſt rectę extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcriba tur: Erit latus Icoſaedri potentia duplū minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi.

VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum an gulum continentiū prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi recta GI, ſubtēdens angulum rectum GAI, *minoribus ſegmentis* AG, AI, comprehenſum;) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare, cum hoc ipſum latus Ico ſaedri poſsit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo *Ico ſaedrum deſcribatur*, &c. Quod erat demonſtrandum. *47. primi.*

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ip ſo deſcripti.

SIT vna ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius ba ſis quadratū ABCD, triangula vero ad E, verticē, *ABE, EBC, CED, DEA*, ſintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelę. Quod ſi coniungantur rectę

FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Qm autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: Atqui vt EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partiũ 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ae proptera quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum KLMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quę in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati GI, descriptum; cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi eo descripti. Quod erat demonstrandum.

a 2. sexti.

b 33. primi

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentũ latus Dodecaedri, cui inscribitur, per corol. 2. prop. 13. lib. 15. Inscribiturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, ei octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltima lib. 15. Perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est enim eiusmodi rectæ latus cubi eidem octaedro inscripti, cuius quadruplũ sesquialterum potentia esse ostẽdimus latus octaedri.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera oppoſita in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt conſtat ex propoſ. 14. lib. 15. eiuſque ſcholio. Et in bifariis ſectionibus dictorum ſex laterum Icoſaedri reſident ſex anguli octaedri in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ. 15. eiuſdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare, cum per ea, quæ ad propoſ. 14. lib. 15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoque idem latus Icoſaedri maius ſegmentum diametri octaedri in illo Icoſaedro deſcripti. [a] Atqui diameter ſphæræ, ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.

[a] *14. tertij dec.*

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionē habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmē tum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extre-

ma ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipso descripti proportionem habet, quam minus segmentum ad maius eiusdem rectæ lineæ.

OSTENSVM est in scholio propos. 13. lib. 15. Minus segmẽtũ lateris cubi extrema ac media ratione sectæ esse latus Dodecaedri in cubo illo descripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum proportionẽ habeat duplicatá proportionis totius lineę ad maius segmentũ, vel maioris segmẽti ad minus, (quod tota linea, maius segmentũ, atque minus, sint tres rectæ continue proportionales:) liquido constat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipso descripti esse quoque proportionis maioris segmenti ad minus duplicatam.

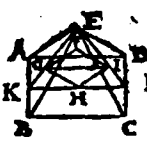
PRAETEREA, cum cõstet ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. maius segmentũ lateris cubi extrema ac media ratione diuisi latus esse Dodecaedri, cui cubus inscribitur; manifestũ est esse vt latus Dodecaedri, hoc est, maius segmẽtum, ad latus cubi in ipso descripti, hoc est, ad totam lineam extrema ac media ratione sectam, ita minus segmentum ad maius. Cum enim sit, vt tota linea ad maius segmentum, ita maius segmentum ad minus; Erit quoq; conuertendo, vt maius segmentum ad totam lineam, ita segmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri sesquialterum est lateris sibi inscriptæ Pyramidis.

SIT vna sex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius basis quadratũ ABCD, triangula autẽ ad verticẽ E, sint ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorũ cẽtra F, G, H, I, quæ rectis iungãtur FG, GH, HI, IF, quadratum

dratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniã vero Pyramis in cubo descripta, describitur quoq; in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. expositum; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt cõstat ex ppos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, sesquialterũ esse lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque EK, EL. sesquialterę erunt rectarum EG, EI, per coroll. prop. 18. lib. 14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL. auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulũ EGI, simile triangulo EKL. Quare erit, vt EK, ad KL, ita EG, ad GI; & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI; ideoque cũ EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. [b] Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris Pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.



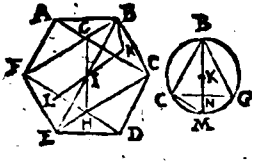
[a] 8. sexti.

[b] 33. primi

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplũ quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrũ I; triangula vero opposita & parallela, per coroll. 4 propos. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex cẽtro I, ad planũ BCG, perpẽdicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in



centrum K. Producta igitur KI, perpendicularis quoque erit ad planum EFH, parallelum plano BCG, per scholium propos. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in Icosaedro descriptus statuat suos angulos in centris basium Icosaedri, vt constat ex propos. 11. lib. 15. atque adeo angulos oppositos in centris basium oppositarum; Erit KL, diameter cubi in Icosaedro descripti, transiens per I, centrum Icosaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum I, transeant, erit I, quoque centrum cubi inscripti; ideoque IK, IL, semidiametri æquales: Cognita autem KB, semidiametro circuli triangulum BCG, circumscribentis, erit angulus BKI, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [a] Ac proinde quadratum rectæ BI, æquale quadratis rectarum BK, KI. Igitur & quadratum diametri BE, quadruplum existens quadrati semidiametri BI, (in scholio propos. 4. lib. 2. ostendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis, & KL. Sunt enim hæc quadrata, per idem scholium, quadrupla quadratorum ex semidiametris BK. KI, descriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, ([b] quod triplum est quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri Icosaedri BE; remanet quadratum diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis. Hoc igitur dico sesquitertium esse quadrati lateris Icosaedri BC. Describatur enim ex centro K, circa triangulum æquilaterum BCG, circulus, extensaq; BK, vsque ad M, quæ secet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur BN, per centrum K, ducta perpendicularis est ad CG, per ea, quæ ostendimus in schol. propos. 12. lib. 13. [c] erit recta BC, potentia sesquitertia rectæ BN: Vt autem BC, ad BN, ita est B M, ad BC, quod BC, sit media proportionalis inter BM, & BN, ex coroll. propos. 8. lib. 6. [d] cum angulus BCM, rectus sit in semicirculo existēs. Recta igitur BM, potentia quoq; sesquitertia est recte

[a] 47. primi

[b] 15. tertiædec.

[c] 12. quartidec.

[d] 31. tertij.

rectæ BC; Ac propterea quadratũ diametri BM, sesquitertiũ est quadrati lateris BC. Quapropter si ex quadrato diametri Icosaedri, &c. Quod erat demonstrandum.

COROLLARIVM.

HINC fit, diametrũ Icosaedri binas rectas posse, diametrum scilicet cubi in ipso descripti, & diametrum circuli triangulum Icosaedri ambientis. Ostensum siquidem est, quadratum diametri Icosaedri BE, æquale esse quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumscribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus segmẽtum est rectę lineę extrema ac media ratione diuisæ, quæ duplum potest lateris Octaedri in eo descripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro descripti, duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias sectiones laterum oppositorum Dodecaedri, vt manifestum est ex prop. 9. lib. 15. Est autem rectæ dictas sectiones cõiungentis diuisę extrema ac media ratione minus segmentũ latus Dodecaedri, ex coroll. 4. prop. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus segmentum esse eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, quę duplum potest lateris octaedri in eo descripti, cum huiusmodi recta coniũgat bifarias sectiones laterum Dodecaedri oppositorum, cuius quidem minus segmentum est latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. / taque latus Dodecaedri minus segmentum est rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. tertiædecimi

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icosaedri potest & sui ipsius lateris sesquitertium, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo descripta, in eodē Icosaedro describātur, vt docuimus in scholio prop. vltimę lib. 15. eademque sphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter sphæræ pyramidē circundantis: [a] potest autem diameter sphæræ sesquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icosaedro descripti, in quo & Pyramis describitur, sesquialterum poterit lateris pyramidis in ipso cubo, & Icosaedro descriptæ: Atqui diameter circuli basim Icosaedri circumscribentis sesquitertium potest lateris Icosaedri, vt in demonstratione propos. 15. huius lib. demonstrauimus. Igitur diameter Icosaedri potens & diametrum cubi in ipso descripti, & diametrum circuli basin Icosaedri circundantis, ex coroll. propos. 15. huius lib. potest & sui ipsius lateris sesquitertium, nimirum diametrum circuli circa basim Icosaedri descripti, & lateris Pyramidis in eo descriptæ sesquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonstrandum.

[a] 13. tertiædecimi

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus se habet, vt minus segmentū lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppositū ductæ, atque extrema ac media ratione di-

uisæ,

uiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pẽtagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

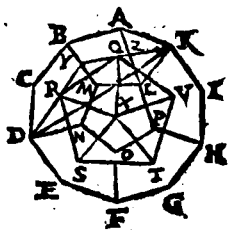
SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABMLK, LXIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in cõmunem baſim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY,

quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. conuenient in pũcto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſecabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita eſſe latus Dodecaedri IM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt KZ, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta DK, quæ, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius DK, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodẽ ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q, (ſunt enim RD, QK, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [b] parallela erit QR, ipſi DK; Ideoque triangulũ YRQ, triangulo YDK, ſimile per coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. [d] Vt autem

[a] 2. ſexti. de.

[b] 2. ſexti. [c] 4. ſexti. [d] 2. quarti. de.

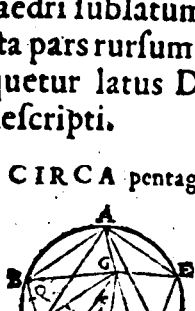
autem DK, tota ad totam KY, ita est LM, minus segmentum ad minus KZ. Vt igitur LM, ad KZ, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icosaedri sibi inscripti, ita KZ, minus segmentum perpendicularis KY, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpositam. Latus ergo Dodecaedri ad sibi inscripti Icosaedri latus, &c. Quod erat demonstrandum.



THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, minusq; eius segmentum a toto latere Icosaedri sublatum; a reliqua quoquerecta pars rursum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icosaedri compositum circulus describatur, cuius centrum F; & super quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur constituentur angulum solidum Icosaedri G, ex iis, quæ in propos. 16. lib. 13 sunt demonstrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterum inscribatur AHI. Quoniã igitur arcus ABC, AED, æquales sunt, cũ quilibet duas quintas partes totius circumfe-



cũferentiæ cõtineat, necnon & duo arcus *ABH*, *AEI*, cũ sint tertiæ partes eiusdẽ circũferentiæ; erunt reliqui arcus *HC*, *ID*, æquales; ppeaque rectæ *HI*, *CD*, parallelæ, per scholium propos. 27. lib. 3. *Ad* quas ex cẽtro *F*, perpendicularis deducatur *FKL*, a secans rectas *HI*, *CD*, bifariam in *K*, & *L*; coniunganturque rectæ *FC*, *FD*. Suscipiantur insuper triangulorum æquilaterorum *GBC*, *GCD*, centra *N*, & *O*, per quæ rectæ ducantur *GNP*, *GOL*, diuidentes, per scholium propos. 12. lib. 13. latera opposita *BC*, *CD*, bifariam, & ad angulos rectos. Itaq; recta *GO*, in punctum *L*, in quo diuisa est *CD*, bifariam, cadet. Iungantur autem centra *N*, *O*, recta *NO*, quæ, vt constat ex demonstratis in propos. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in *I*cosaedro descripti. *D*enique *BP*, dimidium lateris *I*cosaedri secetur in *Q*, extrema ac media ratione; & ablato minori segmento *BQ*, ex toto latere *BC*, reliquæ *CQ*, tertia pars detrahatur *CR*. Dico reliquã *QR*, æqualẽ esse lateri Dodecaedri *NO*. Cum enim *FL*, perpendicularis a latere trianguli æquilateri *HI*, secetur in *K*, extrema ac media ratione; (quod *FL*, hac ratione secta faciat maius segmentum æquale perpendiculari *FK*, per corollarium propositionis 2. lib. 14.) sit autem maiori segmento *FK*, æqualis recta *KM*, per coroll. propos. 12. lib. 13. Erit ex iis, quæ demõstrauimus ad propos. 5. lib. 13. maius segmentum *KM*, sectum quoque in *L*, a minori segmento *KL*, extrema ac media ratione; Ac proinde recta *FM*, excedit rectam *FL*, minore dimidiæ sulipsius segmento *LM*. Quoniam vero iuncta *PL*, est latus pentagoni æquilateri, & æquianguli in pentagono *ABCDE*, descripti, idemque centrum *F*, habentis, ex scholio vltimo lib. 4. ideoque similis illi; erunt triãgula *FCD*, *FPL*. (si recta duceretur *FP*,) similia, per scholiũ propos. 20. lib. 6. [b] Quare vt *FC*, ad *CD*, ita erit *FL*, ad *LP*; & permutando, vt *FC*, ad *FL*, ita *CD*, ad *LP*: Atqui *FC*, hoc est, sibi æqualis *FM*, excedit rectã *FL*, minore segmento dimidij ipsius *FM*, nempe minore segmẽto rectæ *KM*, vt ostendimus. Recta igitur *CD*, vel sibi æqualis *BC*, excedet quoque rectam *LP*, minore segmento dimidij ipsius *BC*, nimirum minore segmento rectæ

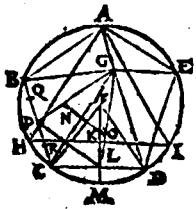
[a] *3. tertij.*

[b] *4. sexti*

BP,

BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æ qualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14.) [2] parallelę erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18. lib. 14. Quare & PL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum CQ, sesquialtera quoq; sit rectæ QR. (Nam qualium partiũ 3. est CQ, talium 2. est CR, per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR,) æqualis erit QR, ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

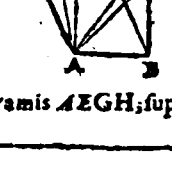
[2] 2. sexti.



THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilaterã circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus nõ resident quatuor anguli pyramidis æquilaterę inscriptę: (Nã super basin ACE, fundatur pyramis ACED; super basin AEG, pyramis AEGH; super basin CEG, pyramis CEGF; & super



per basin *ACG*, pyramis *ACGB*: quæ quidem quatuor pyramides æquales sunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis similibus æqualibusq; & multitudine & magnitudine. Quælibet. n. cõstat tribus æqualibus & similibus triangulis, dimidiis scilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inscriptę. Sit autẽ cubus cuiuslibet harum pyramidum sextuplus; (Nã exempli causa, pyramis *ABCG*, basim habens *ABC*, dimidium basis cubi *BD*, altitudinẽ vero eandem, quã cubus, rectã videlicet *BG*, tertia pars est, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. prismatis eandem basin, & altitudinẽ habentis.) Cum igitur cubus duplus sit eiusmodi prismatis, quod & basis cubi dupla sit basis prismatis; manifestũ est pyramidem *ABCG*, sextã partem esse cubi, propterea q; cubum pyramidis illius esse sextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumstantes, quatuor esse sextas partes, id est, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquã pyramidẽ æquilaterã *ACEG*, cubo inscriptã eiusdem cubi tertiam esse partẽ. Cubus igitur sibi inscriptæ pyramidis triplus est. Quod erat demonstrandum. [a] 32. vnde.

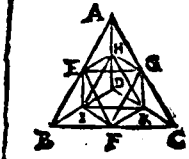
ALITER. Cum cubus, & in eo descripta pyramis eadem sphæra comprehendantur, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. Cubus vero triplus sit pyramidis in eadem sphæra descriptæ, vt demonstratum est; perspicue colligitur, cubũ triplũ esse sibi inscriptæ pyramidis, quippe quidem hæc in eadẽ sphęra, in qua cubus, continetur. [b] 32. quartidec.

THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS sibi inscripti octaedri dupla est.

IN pyramide *ABCD*, descriptũ sit octaedrum *EIKGHF*. Dico pyramidẽ octaedri esse duplam. Cum enim octaedrũ circumstent quatuor pyramides pyramidi *ABCD*, similes, vt prop. 3. lib. 12. demonstratum est, fundatæ super quatuor bases octaedri *EGH*, *EFI*, *FGK*, *HIK*; quales sunt pyramides *EGHA*, *EFIB*, *FGKC*, *HIKD*: (quæ

(quæ quidem æquales inter se sunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis similibus, æqualibusq; numero & magnitudine, quippe quæ similia sint basibus pyramidis æquilateræ ABCD, per coroll. propos. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiusdem pyramidis ABCD, ex constructione propos. 2. lib. 15.) [a] Habeant autem pyramides similes proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpositarum. (cum octupla proportio, sit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidū, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perspicue apparet) hoc est, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis ABCD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id est, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIHF, reliqua erit dimidiata pars eiusdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur sibi inscripti octaedri dupla est. Quod erat demonstrandum.



[a] 8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS sibi inscripti octaedri sextuplus est.

QVONIAM si pyramis in cubo describatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inscriptum est, vt constat ex secunda demonstratione propos. 3. lib. 15. [b] Est autem cubus pyramidis in eo descriptæ triplus, [c] & pyramis octaedri sibi inscripti dupla; Fit, ex qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. sit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octae-

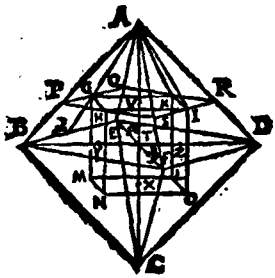
[b] 20. sextidec.
[c] 21. sextidec.

octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basiũ octaedri. Dico octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterũ. Assumpta.n. pyramide octaedri BEDF*A*, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum constituẽtes PQRS, vt in *p*pos. 4. lib. 15. est demonstratum; [a] quod quidẽ parallelum erit quadrato BE*D*F. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BE*D*F, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. *A*c proinde perpendicularis ad bases cubi GI, *M*O, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati PQRS: [b] cum.n. plana BE*D*F, PQRS, parallela secẽt rectas æquales AB, *A*E, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, *A*S, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [c] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP, VQ,

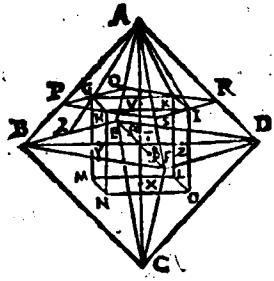


[a] 15. vnde.

[b] 17. vnde.

[c] 47. primi

VQ, propterea q; & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib. 4. Secantur. n. latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demõſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento cõcludemus X, centrũ eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros dictas BD, EF, per Y, Z,



α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. Cum ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX; nec non VT, XT. Recta igitur VX, communis centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecans in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. rectæ centra baſium cubi oppoſitarum cõnectentes ſe ſe bifariã ſecẽt in cẽtro. Iã vero, qm̃ VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla aũt fuit & AV, eiuſdẽ VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nẽpe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. prop. 7. lib. 12. cum vtriuſq; eadẽ ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX:

a 17. vnde.

b 6. dvnde.

b Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK, illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 12. (cum trianguli huius

huius similia sint, ex coroll. propos. 4. lib. 6. triangulis illius.) proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Est autem latus AB, lateris AP, sesquialterũ, quod & recta Aγ, [b] proportionaliter secta ipsi AB, sesquialtera sit ipsius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidẽ PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata est proportionis sesquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27. constat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum existens pyramidis BEDFA, proportionẽ habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, taliũ 12. esse cubum GO, iam demonstratum est. (Nam nume 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc est, in minimis numeris, per 35. propos. lib. 7. repertis; quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla sesquialtera est. Octaedrum itaque sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. Quod erat ostendendum.

[a] 8. duodec.

[b] 2. sexti

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum est octaedri, atq; cubi sibi inscripti. ostendimus enim T, vtriusque esse centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad sibi inscriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent.

[c] *Nam quadrata ipsorum laterum proportionem habent quadruplam sesquialteram, qualem videlicet demonstrauimus habere octaedrum ad sibi inscriptum cubum.*

[c] 11. sexti-dec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM sibi inscriptæ Pyramidis tredecuplum sesquialterum est.

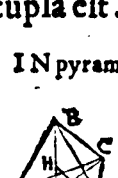
QVONIAM vt ostendimus ad finē lib 15. cubus, sibique inscripta pyramis in eodem octaedro describuntur; [a] Est autem octaedrum cubi in eo descripti quadruplum sesquialterum; & cubus sibi, ac proinde octaedro, inscriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 1. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplā sesquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad sibi inscriptam pyramidem proportionem habet, quā 27. ad 2. hoc est. tredecuplam sesquialteram. Ac propterea octaedrum sibi inscriptæ | pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 23. sextidec.
[b] 20. sextidec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS sibi inscripti cubi nōcupla est.

IN pyramide A B D C, cubus intelligatur descriptus.



Dico pyramidem cubi esse nōcuplam. Assumantur enim G, H, cētra duarum basium A C D, A B D, commune latus A D. habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppositum A D, rectæ ducantur CGS, BHS, dividentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per scholium propos. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Cōnexa vero recta GH; cum BH, CG, duplæ sint rectarum HS, GS, ex coroll. propos. 18.

18.lib.14.ac proinde proportionaliter secentur BS, CS, parallelæ erunt BC, HG, & per coroll.propos.4.lib.6. triangulum HGS, triangulo BCS, simile. [b] Erit ergo vt BC, ad CS, ita HG, ad GS; & permutãdo, vt BC, ad HG, ita CS, ad GS: [c] Est autem CS, ipsius GS, tripla. Igitur & BC, tripla erit ipsius HG. Quoniam autem latus pyramidis descriptæ in cubo diameter est basis cubi, vt in propos.1.lib.15. demonstratum est; Recta vero connectens duo centra basium pyramidis commune latus habentiũ diameter est basis cubi in pyramide descripti, vt perspicuum est ex demonstratis in propos.18.lib.15. (Ibi enim recta GH, iungens centra G, H, basium ACD, ABD, cõmune latus AD, habẽtium diameter fuit basis GNHQ, cubi descripti in pyramide.) Erit latus pyramidis BC, diameter basis cubi pyramidem ABDC, circumscribentis; GH, vero diameter basis cubi in eadẽ pyramide descripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum, quam latera; (Est enim vt diameter vnius quadrati ad suum latus, ita diameter alterius quadrati ad suum latus, quod proportio vtraque sit potentia dupla: Permutãdo ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus) habeat autem BC, diameter basis cubi circumscripti ad GH, diametrum basis cubi inscripti proportionem triplam, vt ostendimus; habebit quoque latus cubi circumscripti ad latus cubi inscripti proportionem triplam. At vero cubi, cum sint parallelepipeda similia, [d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumscriptus ad cubum inscriptum pyramidi ABDC, proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata est triplæ proportionis, vt hic 1.3.9.27. videre licet. Quam ob rem, [e] cum cubus ad pyramidem inscriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum sibi inscriptum proportionem, quam 9. ad 1. nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. Quod erat demonstrandum.

[a] 2.sexti
[b] 4.sexti.
[c] 18.quarti dec.
[d] 33.vnde.
[e] 20.sextidec.

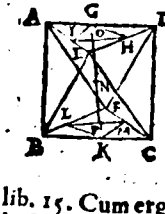
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, proportionē habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonstratum est ex propos. 33. lib. 11. in demonstratione huius propositionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad sibi inscriptū Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

IN octaedro ABCDEF, concipiatur descriptū Icosaedrum. *Dico* octaedrum esse ad Icosaedrum, vt sint duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Cū enim vt ex demonstratis in propos. 16. lib. 15. liquet, octo bases Icosaedri in octo basibus octaedri reponantur; sint duæ bases Icosaedri GHI, KLM, in duabus basibus oppositis octaedri ADE, BCF; atque ex N, cētro octaedri, nec non & Icosaedri (idem enim vtriusque est centrum. per coroll. 3. propos. 16. lib. 15.) ad basim ADE, perpendicularis ducatur NO, cadens in centrum O, triāguli ADE, seu circuli ipsum ambientis, ex coroll. lemm. 1. prop. 10. lib. 14. quod quidē O, centrum quoque est trianguli GHI, per coroll. 2. propos. 16. lib. 15. Cum ergo plana oppositā ADE, BCF, parallela sint, ex corollario 4. propositionis 14. lib. 13. Recta ON, producta perpendicularis quoque erit, per schō-



lium

lium propositionis 14. lib. 11. ad planum BCF, in eiusque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo est & octaedri & Icosaedri sibi inscripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo est N O, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; Icosaedrum in 20. pyramides æquales eiusdem altitudinis N O: Est autem prisma triplum pyramidis eandem cum ipso & basim, & altitudinem habentis, per coroll. 1. propos. 7. lib. 12. Erit prisma, cuius basis ADE, & altitudo ON, æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero prisma, cuius eadem basis ADE, altitudo autem O P, dupla altitudinis ON, duplum est prismatis, cuius basis eadem ADE, altitudo vero ON, per ea, quæ in scholio propos. 14. lib. 12. ostendimus. Prisma igitur, cuius basis ADE, & altitudo OP, æquale est sex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus, quæ tertiam partem illarum sex constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basim ADE, & sub altitudine OP, constituti; prisma videlicet, cuius basis tertia pars est trianguli ADE, altitudo vero eadem O P. Hoc enim prisma tertia pars est prismatis super basem A D E, & sub altitudine O P; cũ per ea, quæ docuimus ad prop. 7. lib. 12. prismata eiusdem altitudinis inter se sint, vt bases. Quare duo prismata, quorum vnius basis ADE, & altitudo OP, alterius autem basis tertia pars basis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia sunt octaedro A B C D E F. Non secus demonstrabimus prisma, cuius basis G H I, altitudo vero OP, æquale esse sex pyramidibus Icosaedri: propterea que triplum huius prismatis, nempe prisma, cuius basis tripla sit basis G H I, altitudo autem eadem OP, æquales esse 18. pyramidibus Icosaedri. Reliquis igitur duabus Icosaedri pyramidibus, quæ tertiã partem sex pyramidum eiusdem Icosaedri constituunt, æqualis erit tertia pars prismatis super basem G H I, & sub altitudine OP, constituti; prisma scilicet, cuius basis tertia pars est trianguli GHI, altitudo vero eadem OP; Atq; idcirco duo prismata, quorum vnius basis tripla sit

trianguli GHI. altitudo autem O P, alterius vero basis tertia pars basis GH*I*, & altitudo eadem OP, æqualia erunt *I*cosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, *I*cosaedro æqualia, sint, per ea, quæ ostēdimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli *A*DE, continentes, (cum vnius basis sit A D E, nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius ADE,) ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes; (cum vnius basis tripla sit triāguli GHI, nimirum nouē tertias partes ipsius GH*I*, cōtinens, alterius vero basis tertia pars ipsius GHI,) Sint autē, vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decē partes tertias trianguli G H *I*; [a] ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nēpe dimidium quatuor tertiarū, ad quinque tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius G H I, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE, (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, continentes sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius G H I; (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur,) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrū, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet *I*cosaedrum, vt duę bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum, proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

Quod erat demonstrandum.

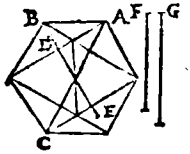
[a] 15. quinti

THE-

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphęra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum *ABC*, in quo recta *DE*, coniungat cẽtra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit *AC*; & *F*, ſit latus Icoſaedri, & *G*, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem *I*coſaedri *ABC*, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione *F*, lateris Icoſaedri ad *G*, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri *AC*, ad rectã *DE*. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrũ in *I*coſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſiũ oppoſitarum; Erit *DE*, diameter dodecaedri in *I*coſaedro *ABC*, deſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in *D*, & *E*, centris baſium *I*coſaedri oppoſitarum reſidẽtes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet *ABC*; Dodecaedro diametri *AC*, hoc eſt, in eadẽ ſphæra, in qua Icoſaedrum *ABC*, deſcripto, cum vtriuſque eadem ſit diameter; & Dodecaedro diametri *DE*, intra *I*coſaedrum videlicet, *ABC*, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icoſaedri *ABC*, ad tertiã, videlicet ad Dodecaedrum diametri *DE*, ſibi inſcriptũ, compo-



componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri *ABC*, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadē ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri A C, ad Dodecaedrum diametri *D E*, in Icoſaedro ABC, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem ſphæra comprehēſum, ſit vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi: (a Nā Dodecaedrum diametri AC, ad Icoſaedrū ABC, eiuſdē diametri eſt, vt G, latus cubi ad *F*, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum A B C, ad Dodecaedrū diametri AC, vt *F*, latus Icoſaedri ad G, latus cubi.) *At* vero Dodecaedrum eiuſdē diametri AC, ad Dodecaedrū diametri *DE*, in Icoſaedro videlicet ABC, deſcriptū, proportionē habeat triplicatā diametri AC, ad diametrū DE, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarū coniungentem, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionē Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptū Dodecaedrū diametri DE, cōponi quoq; ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad *G*, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri *AC*, ad rectā *DE*. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionē habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

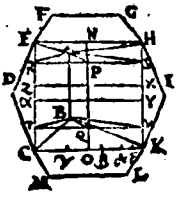
a 11. quarti dec.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis a quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

QVO-

QVONIAM ex demonſtratis prop.8.lib.15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendũt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientiũ; ſint huiuſmodi pẽtagona ABCDE, EFGH*A*, *A*HIKB, BKLMC, conuenientia ad latus *A*B; duo quidem ABCDE, AHIK*B*, ſecundum latus ſidem commune A*B*, alia autẽ duo AEFGH, *B*CMLK, ſecundum angulos EA*H*, CBK. His vero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi EC*K H*, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribẽtis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinque planis CB*K*, E*A*H, ABCE, AB*K H*, ECKH; quorum duo CB*K*, EAH, [a] triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni *A*E, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum E*A*H, CB*K*. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pẽtagona *A*BCDE, *A*B*K*IH, per hypoteſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HI*K*, [b] æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia *A*BCE, AB*K*H;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, p 10.defin.lib.11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit a CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi C*K*, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Sectis.n. lateribus EH, C*K*, bifariam in N, O, iunctaq; recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quã cadunt perpendiculares *A*P, B*Q*, demiſſæ in planum E*K*, vt conſtat ex demonſtratis propoſ.17. lib.13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN,



[a] *4. primi.*

[b] *4. primi.*

VX,

VX, VR, XS, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius ſegmentũ lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadẽ propoſ. 17. lib. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoq; RT, SV, maiora ſegmenta laterum EC, HK; atque adeo ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cũ & earũ baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum AB TVSR. [a] Quoniam autẽ AS, ipſi BV, & AR, ipſi BT, æqualis eſt, & parallela, cum cõiungant æquales rectas, & parallelas AR, SV, & T, [b] parallela erunt plana triangulorũ ARS, BTV, atque adeo inter ſe æqualia, ex coroll. prop. 8. lib. 11. cum latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum AB TVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrãmis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione.

[a] 33. primi

[b] 15. vnde.

IAM vero, cum oſtenſum ſit rectas HS, KV, maiorẽ ſegmentum eſſe lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes cõtineat VY, tertia vero pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; [c] vtriuſque vero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, conſtituta, [d] quod & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH; Aequalis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadẽ QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, vt demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 12. Item eiuſdem

[c] 6. duode.

[d] 1. ſexti.

dem prismatis, cuius basis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VX, duas tertias partes cõtinet prisma, cuius basis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, ex scholio propos. 25. lib. 11. quod & basis TY, duas partes tertias cõplectatur basis TX. Igitur & prisma, cuius basis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipsi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc prisma appositum prismati ABTVSR, efficiet prisma æquale solido CBKHAE, habens basin rectangulum cõtentum sub latere cubi TV, & sub recta composita ex VY, duas tertias partes minoris segmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore segmento, ideoq; a base cubi deficientem rectangulo α X, contento sub latere cubi α Y, & sub XY, tertia parte minoris segmenti VX. Non dissimili ratione inuestigabimus alia similia quinque prismata æqualia & proxime dicto prismati, & reliquis quinque solidis super reliquas quinque cubi bases constitutis. Sex igitur huiusmodi prismata æqualia erunt sex illis solidis, excessui nimirum Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum. Quia autem duo qualibet prismata illiusmodi inter se aptata componunt parallelepipedum eiusdem altitudinis; construentur ex sex illis prismatis tria parallelepipeda sub eadẽ altitudine QB, quæ æqualis est dimidio lateris pentagoni AB, seu maioris segmenti lateris cubi, & super bases a base cubi deficientes singulas rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter se compositis exurget parallelepipedum excessui eidem Dodecaedri supra cubum sibi inscriptum æquale, cuius basis a base cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, & sub tertia parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo vero æqualis est tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc est, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris segmẽti lateris cubi, ter sumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, seu latere cubi deficere minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. Diuidatur

[4] 1. *sexti.*

nidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: Itemque C β, maius segmentum, & β K, minus bifariã in γ, ſ; atque ex β K, abſcindatur βε, æqualis ipſi β ſ, ſeu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars maioris ſegmenti C β, æqualis ſit ipſi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Poteſt autem ex minori ſegmento β K, abſcindi recta æqualis ipſi Cγ, dimidio maioris ſegmenti; quia β K, maior eſt, quam dimidium maioris ſegmenti Cβ. Cũ enim ſit, vt CK, ad Cβ, ita Cβ, ad βK; ſit autẽ CK, minor, quam dupla ipſius Cβ, quod Cβ, ſit ipſius maius ſegmẽtum; erit quoque Cβ, minor, quã dupla ipſius β K, hoc eſt, erit β K, maior, quam dimidium ipſius Cβ. Quoniã igitur eſt, vt tota CK, ad maius ſegmentum Cβ, ita maius ſegmentum Cβ, ad minus β K; erit quoque vt CO, dimidia ipſius CK, ad Cγ, vel βε, dimidiã ipſius Cβ, ita Cγ, vel βε, ad βſ, dimidiã ipſius β K; Ac proinde ſi CO, ſecetur extrema ac media ratione, erit maius ipſius ſegmentum Cγ, vel βε, & minus βſ. Quare & βſ. minus ſegmentum ſecabit βε, maius ſegmẽtum extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad prop. 5. lib. 13. erit maius ſegmentum βſ, minus autẽ ſε; Ac propterea maius ſegmẽtum ſε, minus ſegmẽtum ſecabit rectã ſK, maiori ſegmento βſ, æqualẽ, extrema ac media ratione, minuſq; ſegmentum erit εK. Deficit igitur Cε, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, ſeu latere cubi CK, minore ſegmento εK, rectæ ſK, vel ſibi æqualis rectæ βſ, quæ dimidiati lateris cubi fuit ſegmẽtũ minus oſtenſa. Conſtat ergo hanc eſſe parallelepipedi, quo dodecaedrũ excedit ſibi inſcriptum cubum a baſe cubi deficere rectãgulo cõtento ſub latere cubi, tertiaq; parte minoris ſegmẽti eiuſdẽ lateris cubi; altitudinẽ vero ab altitudine cubi deficere minore ſegmẽto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Quocirca Dodecaedrũ excedit cubum ſibi inſcriptũ parallelepipedo, &c. Quod erat demõſtrãdum.

a 13. quinti

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficere duobus parallelepipedis, quorum

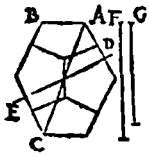
vnius

vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentũ exiſtit; Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubũ a Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto iam parallelepipedo adiungatur poſterius paralellepipedum, compoſitum erit parallelepipedum prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonſtratum eſt.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata

cata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.



IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta coniungens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad Icosaedrum inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, lateris Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, eique adeo anguli oppositi in cẽtris basium oppositarum erit recta DE, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem sphæra cum Icosaedro intra Dodecaedrũ ABC, collocato describitur, cum eandem habeãt diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icosaedro eiusdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, descripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demonstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, descripti secundę magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro ABC, descriptum, tertiam magnitudinem. Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll propos. 17. lib. 12. Dodecaedrum vero

[a] 11. huius.

vero diametri *DE*, ad Icosaedrum eiusdē diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro A*B*C, describitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus *I*cosaedri; liquido constat proportionem Dodecaedri A*B*C, ad *I*cosaedrum sibi inscriptum, cuius scilicet diameter *DE*, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri *A* C, ad diametrum D E, rectam videlicet centra oppositarum Dedecaedri copulantem, & ex proportione *F*, lateris cubi, ad G, latus *I*cosaedri, in eadem sphæra cum cubo descripti. Dodecaedrum itaque ad sibi inscriptum *I*cosaedrum proportionem habet compositam, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes cō tinēt, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, latitudo vero tertiæ parti minoris segmēti lateris eiusdem cubi, altitudo denique a latere eiusdem cubi deficit minore segmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem minus segmentum existit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti est æqualis, altitudo vero minus segmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiusdem segmentum minus existit, ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri eiusdem cubi sint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadē pyramide est descriptus, vt ad finē lib. 15. tradidimus; Cubus autē pyramidis, in qua describitur, nona pars est, cū pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla. Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

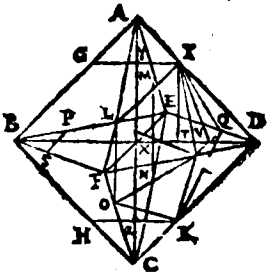
a 35. sexti dec.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

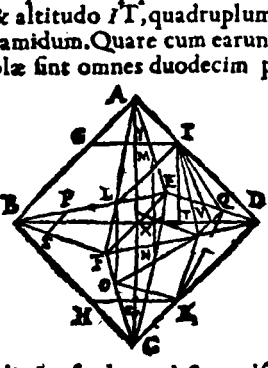
OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrū, sit *ABCDEF*, repetita figura prop. 16. lib. 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrū inscriptū cōponentia esse IQR, *K*QR, GIL, G*I*M, GPS, HPS, NH*K*, OH*K*, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, *K*N*I*, *I*MQ, GLS, HOS, *K*OR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, secantia videlicet omnia

omnia eius latera extrema ac media ratione; Ité rectam IT, perpendicularé ad BD, æqualé esse maiori segméto XY, semidiametri *AX*. Dico octaedrũ ABCD*EF*, superare Icosaedrũ sibi inscriptũ parallelepipedo, cuius basis est quadratũ lateris Icosaedri *QR*, altitudo vero IT, ma ius segmentũ semidiametri *AX*. Cũ.n. in quatuor basib⁹ octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulũ solidũ octaedri *D*, constituẽtibus positæ sint quatuor bases Icosaedri *IMQ*, *ILR*, KNQ, *KOR*; remanebũt iuxta angulũ solidũ *D*, in eisdẽ quatuor basibus octaedri quatuor triãgula IQD, IRD, KQD, KR*D*, quibus si accedant duo triãgula Icosaedri, QI*R*, *K*QR, & cõe triangulũ DQR, constituentur duæ pyramidẽs super cõem basem DQR, nempe *ID*QR, *K*DQR, inter se æquales, per coroll. prop. 5. lib. 12. cum earũ altitudo sit recta eadẽ IT, maius videlicet segmẽtũ semidiametri octaedri. (Ná quemadmodum AX, secta est a recta GI, in Y, extrema ac media rõne, ita quoq; secta est CX, a recta H*K*, in Z. Quare si ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis *K*DQR; a erit ea æqualis rectę ZX, maiori segmẽto semidiametri CX, hoc est, ipsi IT.) Quæ quidẽ pyramides extra Icosaedrum in octaedro descriptũ cõsistũt. Simili modo prope singulos reliquos quinq; angulos octaedri constituentur binæ pyramides & inter se & dictis duabus æquales, extra Icosaedrum prædictum: Ita vt octaedrum superet Icosaedrum sibi inscriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidiũ est quadrati lateris DQ; (Cum DQ. *D*R, rectæ æquales sint, minora scilicet segmenta laterum octaedri, angulumq; contineant rectum.) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipsius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli DQR. Prisma igitur, siue parallelepipedum, cuius basis quadra



a 34. primi

tum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prismatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR. & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR, æquale est tribus pyramidibus earũ duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarũ pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidũ quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; Æquale quoq; erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptũ; proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.



COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplũ Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratũ lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demõstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidẽ Pyramidi esse inscriptum; [a] *octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum*

[a] 31. sexti. dec.

tum lateris Icosaedri, nempe recta QR, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri, recta videlicet IT, seu TX: Fit, vt octaedrum bis sumptum, nempe pyramis, cui inscribitur, (quod Pyramis dupla sit sibi inscripti octaedri) superet idem Icosaedrũ in octaedro, ideoque & in Pyramide descriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius basis idem quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta TZ, coniungens bifarias sectiones laterum Icosaedri oppositorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum est, per demonstrata a nobis in scholio propos. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius basis quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifarias sectiones oppositorum laterum Icosaedri copulans, Pyramis duplum Icosaedri sibi inscripti excedit. 2. 21. sexti. dec.

DE QVINQVE CORPORVM Regularium descriptione in data sphæra, ex Pappo Alexandrino.

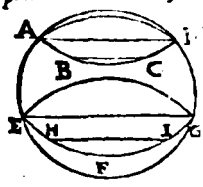
QVONIAM Euclides libro 13. quinq; corpora Regularia seorsum extra sphæram construxit, deinde vero eadem a sphæra comprehendi, noua demonstratione confirmauit; nõ erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data sphæra describat: præsertim cũ eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam cõstructio illa ab Euclide præscripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda sunt, quorum aliqua etsi per elementa sphærica Theodosij demonstrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere censeri possumus; quippe cum propositiones sphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex solis 19. prioribus propositionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium constructionem percipi possint. In eis autem

autem Theodosii propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumemus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataq; in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli paralleli ABCD, EFG; sitq; primũ in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda sit diameter parallela. Ducatur, vt a 5 holio prop. 18. lib. 11. docuimus, per diametrũ AD, planũ rectũ ad circulum ABCD, [a] faciens in sphæra superficiem circulũ AEGD. Quoniã igitur circulus AEGD, circulũ ABCD, bifariam & ad angulos rectos secat, erit circulus AEGD, maximus, [b] præsibit q; per polos circuli ABCD, ex schol. 9 pos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde [b] per polos circuli EFG, [b] cum paralleli eosdem polos habeant, [c] ideoq; eũ bifariã secabit. Communis ergo sectio EG, existens diameter erit: [d] qua cum sit ipsi AD, parallela, patet propos.



DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, non existente diameter, cui ducẽda sit diameter parallela in circulo EFG. [e] Ducatur ipsi BC, per centrũ circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime ostendimus. Quoniam igitur vtraq; BC, EG, [19] eidem AD, parallela est, ex constructione, & ipsæ quoq; BC, EG, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.

EADEM ratione recta BC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, a diametro EG, diuersa, quæ ipsi BC, æqualis sit, si modo BC, maior non sit diametro EF. Nam si in circulo EFG, ducatur ipsi BC, parallela HI, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

LEMMA II.

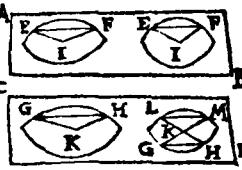
SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindãt arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema

vnius

[a] 1. 1. Theodosii.
[b] 1. 2. Theodosii.
[c] 15. 1. Theodosii.
[d] 16. vnde.
[e] 31. primi
[19] vndec.

vnius rectæ cum cẽtro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectę cũ cẽtro cõiungunt.

IN planis parallelis AB, CD, descripti sint duo circuli, in quibus rectæ EF, GH, *primum parallelæ sint, ad easdẽ partes centrorum* I, K; *auferantq; arcus similes* EF, GH, *ac tandẽ iungãtur ad cẽtra rectæ* EI, FI, GK, HK. *Dico tã* EI, GK, *quam* FI, HK, *parallelas esse. Quoniam.n. arcus* EF, GH, *similes sunt, erunt anguli* I, K, *æquales, ex scholio prop. 33. lib. 3.* [a] *Igitur reliqui anguli* E, F, *reliquis angulis* G, H, *æquales erunt.* [b] *Cum ergo tã illi, quã hi, sint inter se æquales; erit tam angulus* E, *angulo* G, *quã angulus* F, *angulo* H, *æqualis. Quoniã igitur in planis parallelis rectæ* EF, GH, *parallelæ sunt, & rectæ* EI, GK, *ad easdẽ partes planiper* EF, GH, *ductæ efficiunt cũ ipsis æquales angulos* E, G; *erunt ex ijs, quæ in scholio propos. 10. lib. 11. demonstrauimus,* EI, GK, *parallelæ: Eademque ratione* FI, HK, *parallelæ erunt.*



[a] 32. primi

[b] 5. primi.

DEINDE *sint* EF, GH, *parallelæ, non ad easdẽ partes cẽtrorũ* I, K. *Dico tam* EI, HK, *quam* FI, GK, *esse parallelas. Productis enim* GK, HK, *iungatur recta* LM. *Et quia latera* GK, HK, *lateribus* LK, MK, *sunt æqualia,* [c] *angulosque ad verticẽ* K, *æquales cõtinent;* [d] *erũt & baſes* GH, LM, *& anguli* H, L, *æquales, & anguli* G, M. [e] *Igitur arcus* GH, LM, *æquales sunt,* [f] *& rectæ* GH, LM, *inter se parallelæ: Ac pinde cũ vtraq;* EF, LM, *ipsi* GH, *sit parallela,* [g] *erunt & EF, LM, parallelæ inter se. Quæ igitur* EF, LM, *parallelæ sunt abscindentes ad easdem partes centrorum arcus similes* EF, LM; *(Nam cum arcus* GH, *sit arcui* EF, *similis, erit quoque arcus* LM, *qui arcui* GH, *æqualis est, eidem arcui* EF, *similis.) erunt tam* EI, LK, *hoc est,* EI, HK, *quam* FI, MK, *hoc est,* FI, GK, *parallelæ. Quod est propositum.*

[c] 15. primi.

[d] 4. primi.

[e] 28. tertij.

[f] 27. primi.

[g] 9. vndec.

LEMMA III.

SI in sphæra sint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ sint duæ rectæ parallelæ &

æquales, ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelę ſunt, & ad plana circulorũ perpendiculares.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *in quibus ſint duæ rectæ æquales & parallelæ* AB, CD, *ad eaſdem partes centrorũ, quarum extremæ iungantur ad eaſdem partes rectis* AC, BD. *Dico rectas* AC, BD, *æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares.*

[a] 4. vndec.

[b] 33. primi

Quoniam enim AB, CD, *parallelæ ſunt;* [a] *erunt* AC, BD. *in eodem cum ipſis plano. Quare cũ* AB, CD, *ſint etiã æquales; æquales quoque erunt ac parallelæ* AC, BD, *quod eſt primum.*

EX cẽtris deinde E, F, *ductis rectis* EA, EB; FC, FD, *iunctaq; recta* EF; *erunt tam* AE, CF, *quam* BE, DF, *parallelæ, ex* 2. *lemmate: Sunt autẽ & æquales ob circulorum æqualitatẽ:* [c] *Igitur & AC, EF, & BD, EF, parallelæ erunt, & æquales.* [d] *Quoniam vero circuli* AB, CD, *paralleli circa eoſdẽ polos ſunt,* [e] *recta per eorũ polos ducta tranſibit per eorundẽ centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana eorũdem recta erit. Quare circa rectam* EF, *eorum cẽtra coniungens, per eorũ polos, & centrum ſphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum rectæ* EF, *& rectæ per eorum polos extiſſe, quod eſt abſurdũ. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum cõmune* EF. [f] *Igitur* EF, *ad plana circulorum* AB, CD, *recta eſt:* [g] *Ac propterea & vtraque* AC, BD, *ipſi* EF, *parallela, ad eadem plana erit recta. Quod eſt ſecundum.*

[c] 33. primi.
[d] 1. 2. Theo.
[e] 10. 1. Theodoſii.
[f] 10. 1. Theodoſii.
[g] 8. vndec.

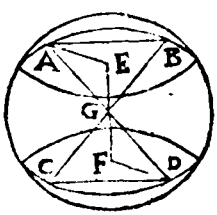
HÆC demonſtratio locũ etiam habet, quando parallelæ AB, CD, *ſunt circulorum diametri, ſed tunc* EA, EB, FC, FD, *erunt partes diametrorum, vt patet.*

LEMMA IIII.

SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductę ſint duę rectę parallelę & æqua-

& æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema pũcta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: Rectæ vero earundẽ parallelarum extrema pũcta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

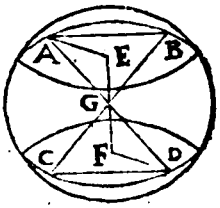
IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *& in iis duæ rectæ parallelæ & æquales* AB, CD, *non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad eaſdem partes iungantur rectis* AD, BC. *Dico rectas* AD, BC, *in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoque diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales. Quoniam enim* AB, CD, *parallelæ ſunt;* [a] *Erunt* AD, BC, *in eodem cum ipſis plano; ac proinde ſe mutuo interſecabunt, vt in puncto* G: *quod dico eſſe cẽtrum ſphæræ. Connectantur. n. circulorum centra* E, F, *rectis* EA, EG; FD, FG. [b] *Et quia anguli* AGE, CGD, *ad verticem æquales ſunt:* [c] *Istẽ tam alterni anguli* BAD, CDA, *quã alterni* ABC, DCB; *æquiangula erũt triangula* ABG, CDG. [d] *Igitur erit vt* AB, *ad* BG, *ita* DC, *ad* CG: *Item vt* AB, *ad* AG, *ita* DC, *ad* DG. *Cum ergo* AB, CD, *ponantur æquales,* [e] *erunt quoque tam* BG, CG, *quam* AG, DG, *inter ſe æquales. Rurſus quia* AE, DF, *ſemidiametri circulorum æqualium æquales ſunt; ſunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* [f] *ideoque anguli alterni* EAD, FDA, *æquales; erunt duo latera* EA, AG, *duobus lateribus* FD, DG, *æqualia, angulosque comprehendent æquales.* [g] *Igitur & baſes* EG, FG, *& anguli* AGE, DGF, *æquales ſunt. Et quia*



[a] 7. vndec.
[b] 15. primi.
[c] 29. primi.
[d] 4. ſexti.
[e] 14. quinti
[f] 29. primi.
[g] 4. primi

[a] 7. vndec. [b] 2. vndec.

[a] Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallela AE, DF; [b] & EG, FG, in eodē plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum constituta, propter æquales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus.



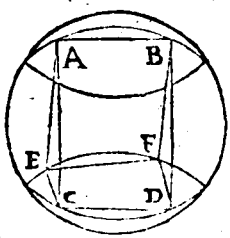
[c] 10. 1. Theodosii.

Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ trāsibit, vt in præcedenti lemmate demonstrauimus, [c] perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales sint ostensæ, erit G, centri sphæræ, [d] propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter a centro sphæræ absunt; inæqualiter vero abessent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctū quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales quod est primum.

[d] 6. 1. Theodosii.

SED iam puncta extrema parallelorum æqualium AB, CD, ad easdem partes iungantur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallelæ & æquales, [e] manifestum est, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem singuli AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpēdiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex

[e] 33. primi.



scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, semicirculi erunt, [f] & anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æquales sunt, [g] ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11.

[f] 31. tertij. [g] 9. vndec.

lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramq; EC, EA, & ad vtramq; FD, FB, vt ostendimus, [a] *perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti:* [b] *ac propterea & CD, AB, ipsi EF, parallela, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod est secundum.*

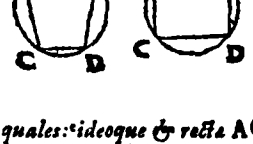
[a] 4. vndec.

[b] 8. vndec.

LEMMA V.

SI in sphæra sint duæ rectæ parallelę, rectæ earum puncta extrema ad easdem partes coniungentes, æquales inter se erunt.: Et si parallelæ fuerint æquales, coniungentes non solum æquales, sed & parallelæ erunt, rectosque cum ipsis angulos conficient.

SINT in sphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad easdem partes connectantur rectis AC, BD, Dico AC, BD, æquales esse. Quia enim parallelæ sunt AB, CD; [c] *erit AC, BD, in eodem cum ipsis plano. Ducto igitur per ipsas plano,* [d] *fiat in sphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ sint AB, CD; erunt ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales:* [e] *ideoque & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod si parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeat duo opposita latera AB, CD, parallela, & æqualia; erit ex scholio propos. 31. lib. 3. ABDC, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod est propositum.*



[c] 7. vndec.

[d] 1. 1. Theodosii.

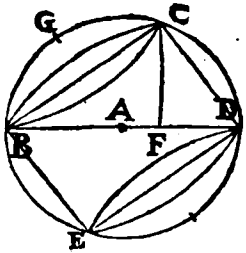
[e] 29. tertij.

LEMMA

LEMMA VI.

IN data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera.

SIT sphæra centrum A, per quod planum ductum faciat circulum maximũ BCDE, cuius diameter BD, ex coroll. 1. prop. 1. lib. 1. Theod. Secta aũt BD, in F, vt BF, ipsis FD, dupla sit; erit BD, taliũ partium 3, qualium 2. est BF; ac proinde BD, ipsius BF, sesquialtera est. Ducta quoq; FC, ad BD, perpẽdiculari, iungãtur rectæ BC, DC, ductaq; DE, ipsi BC, parallelæ, connectatur recta BE. [a] *Et quoniam tam anguli BCD, EDC, quam duo BED, CBE, duobus rectis æquales sunt.* [b] *est; tot BCD, quam BED, rectos existere quoq; & EDC, & CBE rectus. Igitur ex scholio 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum BCDE, parallelogrammum est; ideoque rectæ BC, DE, æquales sunt. Diuiso iam arcu BC, bifariam in G, erit quoque arcus EGD, huius bifariã in G, quod ex scholio propos. 27. lib. 3. arcus quoque BE, CD, æquales sint. Polo igitur G, & interuallis GB, GE, circuli in superficie sphæræ describantur transeuntes per C, D, ob æqualitatẽ tam arcuum GB, GC, quam GE, GD;* [d] *qui paralleli erunt, cum eosdem habeant polos.* [e] *Et quia circulus maximus BCDE, per polos secat circulos BC, ED, bifariam; erũt BC, ED, diametri ipsorum, quæ cum æquales sint ostensa, erunt & circuli BC, ED, æquales. Dico diametrum sphæræ BD, ad vtramque diametrum BC, ED, proportionem habere potentiæ sesquialteram. Quoniam enim ex coroll. propos. 8. lib. 6. tres rectæ DB, BC, BF, continue proportionales sunt; erit ex coroll. propos. 20. lib. 6. vt BD, ad BF, ita quadratum*



[a] 29. primi

[b] 31. tertij.

[c] 34. primi.

[d] 2. 2. Theodosii.

[e] 15. 1. Theodosii.

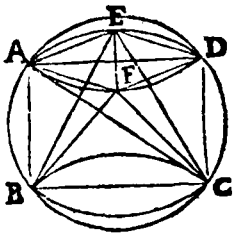
dratum ex BD, *ad quadratum ex* BC: *Est autē* BD, *ipsius* BF, *sesquialtera, vt ostensum est. Igitur & quadratum ex* BD, *quadrati ex* BC, *atque adeo & quadrati ex* DE, *sesquialterum est: atque idcirco diameter sphæræ* BD, *vtriusque diametri* BC, DE, *potentia sesquialtera est. quod est propositum.*

His demonstratis, hoc modo in sphæra data describemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data sphæra Pyramidem describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, *æquales, & paralleli, quorum diametrorū potentia sit sesquialtera diameter sphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur* ABCD, [a] *qui eos ad angulos rectos, ac bifariam secabit, ac proinde cum eis cōmunes sectiones faciet diametros* AD, BC. *Ducatur in circulo* AD, *alia diameter* EF, *secans* AD, *ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur* EB, EC, FB, FC. *Dico* EBCF, *esse pyramidē, hoc est, quatuor triāgula* EBC, BCF, CFE, EFB, *esse æquilatera & æqualia. Iūctis.n. rectis* AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; *erit* AC, *diameter sphæræ, ex lemmate 4. &* AB, DC, *æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique* AEDF, *quadratum erit in circulo* AD, *descriptum, vt constat ex prop. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex constructione quadratum ex diametro sphæræ* AC, *sesquialterum est quadrati ex* AD, *diametro circuli; si ponatur quadratū ex* AC, 3. *erit quadratum ex* AD, 2. *Cum ergo quadratum ex* AC, [b] *æquale sit quadratis ex* AD, DC, *quod angulus* ADC, *rectus sit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex* DC, 1. *ac proinde*

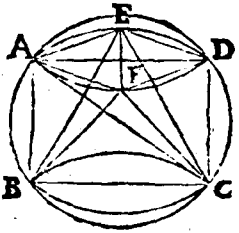


[a] 15. 1. Theodosii.

[b] 47. primi.

de quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio prop. 47. lib. 1. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DF,
a 47. primi. quibus cum æquale sit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; erit quadratū ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propter eaq; quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, rectæ AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoque BCF, triangulum est æquilaterum.

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum; est autem, ex scholio propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: quibus cum æquale
b 47. primi



quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; duplum quoque est quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo quadrata ex CE, AD, propterea quæ recta CE, rectæ AD, hoc est, rectis BC, EF, æqualis est, atq; adeo & recta CE, ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est, & ipsi BCF, æquale, ob latera æqualia. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FCE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale: quatuor cum latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphæra descripta, cum eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant. quod est propositum.

COROLLARIVM.

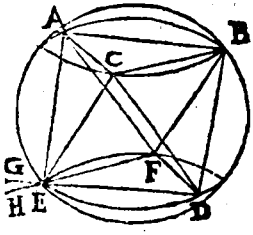
HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex constructione diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, *ita vt ſphæræ diameter diametri cuiuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera.* [a] *Deſcripto autem triangulo æquilatero* ABC, *in circulo* ABC, *ducatur per primum lemma, recta* AB, *in circulo* DEF, *parallela & æqualis* DE, *ad diuerſas partes centrorum: quæ latus etiam erit triãguli æquilateri in circulo* DEF, *deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Compleato ergo triangulo æquilatero* DEF, *erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus triãguli* ABC, *æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum* AB, DE, *æqualitatem; parallela vero, ex ſchol. propoſ.* 10. *lib.* 11. *Cum enim parallelæ ſint* AB, DE, *& anguli* ABC, DEF, *æquales; productis rectis* DE, FE, *ad* G, H, *erunt quoque anguli* ABC, GEH, *æquales. Cum ergo parallelæ ſint* AB, GE, *& BC,* EH, *ad eaſdẽ partes plani per* AB, GE, *ductæ; erunt quoque* BC, HE, *hoc eſt,* BC, EF, *parallelæ ex illo ſcholio propoſ.* 1 *e. lib.* 11. *Eadem ratione parallela erit* DF, *ipſi* AC. *Connectantur denique* AE, EC, CD, DB, BF, FA, *vt in figura. Dico* AD, *octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula* ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, *æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, rectæ* AB, DE, *æquales ſunt & parallelæ ad diuerſas partes centrorũ, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ* AD, BE, *(quas tamẽ confuſionis vitãdæ gratia nõ duximus) diametri ſphæræ, & rectæ* AE, BD, *æquales etiã erũt, ac perpendiculares ad ipſas* AB, DE. [b] *Quadratum igitur ex* BE, *duobus quadratis ex* BD, DE, *æquale erit: Poſito autem*

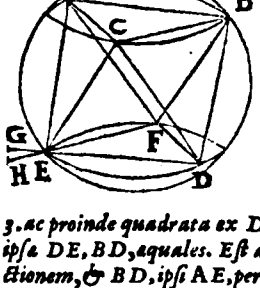


[a] 2. quarti.

[b] 47. primi

quadrato

quadrato ex diametro sphæræ BE, *6. quadratum ex* DE, *est 3.* (*Nam cum per constructionem diameter sphæræ potentia sit sesquialtera diametri circuli* DEF: *posito quadrato ex* BE, *6. erit quadratum diametri circuli* DEF, *4. At posito quadrato diametri circuli* DEF, *4. quadratum lateris trianguli æquilateri* DE, *est 3. quod ex coroll. 1. prop. 12. lib. 13. diameter circuli potentia sit sesquitertia lateris trianguli æquilateri.*) *Igitur & quadratum ex* BD, *est 3. ac proinde quadrata ex* DE, BD, *æqualia sunt, & rectæ ipsa* DE, BD, *æquales. Est autem* DE, *ipsi* AB, *per constructionem, &* BD, *ipsi* AE, *per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ* AB, BD, DE, EA, *æquales erunt, constituentes quadratum* ABDE, *cum anguli ad* A, B, D, E, *recti sint eadem 4. lemmate.*



RVRSVS quia BC, EF, *parallela sunt & æquales diuersas partes centrorum; erūt quoque iunctæ rectæ* BE, CF, *non ad easdem partes, diametri sphæræ, ex 4. lemmate. Rectæ* BF, CE, *æquales inter se, atque ad* BC, EF, *perpendiculares, eritque rursus, vt prius, quadratum* BCEF. *Nunc ostendemus,* ACDF, *quadratum esse; cum iunctæ rectæ* AD, CF, *sint quoque sphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata* AD, BE, CF, *constructa sint super latera æqualia* AB, BC, CA, *nimirum super latera trianguli æquilateri, cui* AB, *latus sit quadrati* AD; & BC, *quadrati* BE, & CA, *quadrati* CF; *erūt omnia triāgula octo* ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, *æquilatera, & inter se æqualia. Octaedrum ergo est* AD, *ex defin. 27. lib. 11. Cui in data sphæra descriptum, cum eius anguli solidi, A, B, D, E, C, F, sphæra superficiem attingant. quod est propositum.*

COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, sphæra diametrum potentia duplam esse lateris octaedri in ea sphæra descripti. Demon-

stratum

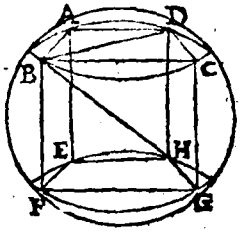
ſtratum enim eſt, quadratũ ex BE, *diametro ſphæræ duplum eſſe quadrati ex* DE, *latere octaedri.*

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data ſphæra cubum deſcribere.

DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales ac parallelι ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diametri ſphæræ. [a] *Deſcripto autem quadrato* AB-CD, *in circulo* ABCD, *ducatur per 1. lẽma recta* AD, *in circulo* EFGH, *parallela* EH, *& æqualis ex eadẽ parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo* EFGH, *deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato* EFGH, *erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus quadrati* ABCD, *æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob lateruũ* AD, EH, *æqualitatem; parallela vero ex ſcholio propoſ. 10. lib. 11. Nã quia parallelæ ſunt* AD, EH, *ſuntq; anguli æquales* ADC, EHG, *nimirum recti; erunt quoque* DC, HG, *parallelæ, cum ſint ad eaſdem partes plani per* AD, EH, *ducti, & ſic de cæteris. Iungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ* AE, BF, CG, DH, *quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter ſe parallelæ. Dico* AG, *eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera* ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, *eſſe quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis* BH, BD, *erit ex lemmate 4.* BH, *diameter ſphæræ; at* BD, *diameter circuli* ABCD, *quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur per conſtructionem, quadratum ex* BH, *ſeſquialterum eſt quadrati ex* BD; *quadratum autem ex* BD, *quadrati ex* BC, *duplum, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſi ſtatuatur quadratum ex* BH, 3, *erit quadratum*

[a] 6. quarti.



dratum ex BD, 2. & quadratum ex DC, 1. atq; adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC, triplum erit. Rursus quia quadratum ex BH, 3. & quadratum ex BD, 2. [a] est que quadratum ex BH, æquale quadratis ex BD, DH, quod angulus BDH, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex DH, 1. Quadratum igitur ex BH, tripliū est quadrati ex DH. Fuit autem idem quadrati ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DH, ac proinde recta DC, DH, æquales. [b] Cum ergo oppositis lateribus GH, CG, æquales sint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti sint ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata ostendentur: Sed & AC, EG, quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur est AG, ex defin. 25. lib. 11. & in data sphæra descriptus, cum eius anguli solidi A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.

[a] 47. primi.

COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ BH, triplum esse quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque est, eundē circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descripti: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ æqualis est circulo ABC, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propositio. 21.

PRO-

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data sphæra Icosaedrum describere.

REPERIATVR[a] recta linea, ad quam sic se habeat diameter sphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cũ pẽtagono descripti: Fiatq; ex coroll. prop. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiusdã linea, ad cuius interuallum, veluti semidiametrum, circulus in data sphæra describatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Descripto maximo circulo in sphæra data,[b] accommodetur in eo recta, quæ inuentæ semidiametri sit dupla, cum hæc recta minor sit diametro sphæræ, siue illius circuli maximi, vt infrà probabitur. Nam si per eam rectã planum ducatur rectũ ad circulum illũ maximum,[c] faciet id circulũ ABC, in sphæra, cuius semidiameter, ex constructione, potentia subtripla est rectæ initio inuentæ. Deinde[d] inueniatur rursus recta linea, ad quam ita se habeat data sphæræ diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono descripti; Fiatq; vt 3. ad 1. ita per coroll. prop. 6. lib. 10. quadratũ rectæ inuentæ ad quadratum alterius linea, ad cuius interuallum alter circulus in sphæra describatur priori circulo ABC, parallelus: quod fiet, si in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ semidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad prop. 1. lib. 4. demõstrauimus, & per eam rectã planum extendatur priori circulo parallelum, hoc est, ad dictum circulum maximum rectũ, ex scholio propos. 18. lib. 11. Nam per idem scholium, planum hoc erit circulo ABC, parallelũ,[e] faciet q; in sphæra circulũ, cuius semidiameter semidiametro inuentæ æqualis est. His duobus circulis ex altera parte centri sphæræ alij duo æquales ac paralleli describantur GHI, KLM: quod facile fiet, si illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c.[f] Descripto autem in circulo DEF, triangulo æquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis sit vni lateri trianguli æquilateri in

[a] 12. sexti

[b] 1. quarti.

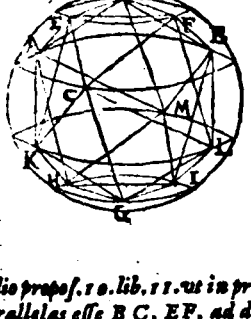
[c] 1. 11. Theodosii.

[d] 12. sexti

[e] 1. 11. Theodosii.

[f] 2. quarti.

circulo ABC, descripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipsi EF, hoc est, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, descripti. Completis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt singula latera singulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipsi DF; at BC, MK, GI, ipsi DE: quod probabitur ex scholio propos. 10. lib. 11. vt in problemate secundo ostendimus parallelas esse BC, EF, ad diuersas partes centrorum ductas. In figura non descripsimus ea triangula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confusionem pareret, sed tantum laterum extrema puncta notauimus. Postremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF: ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto quinque rectas lineas emissas esse cernis. Dico DG, esse Icosaedrum, hoc est, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. esse æquilatera, & æqualia. Quod vt demonstretur, ostendendum prius est, Icosaedrum in sphæra descriptum (posse autem in sphæra data describi Icosaedrum, Euclides docuit propos. 16. lib. 13.) suos 12. angulos constituere in quatuor circulis parallelis, quos descripsimus, nimirum ternos angulos in singulis circulis, atque eo situ, quo eadem puncta notauimus.



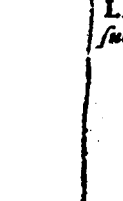
SIT igitur in sphæra descriptæ Icosaedrum DG, duodecim angulos statuens in punctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinque rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales sunt, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium, si ex polo D, per E, in sphæra circulus describatur, transibit is per reliqua puncta A, M, B, F: ac propterea pentagonum EAMBF, in

vno

vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eius latera sint æqualia, vtpote latera Icosaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonstrata sunt a nobis. Eadem ratione pentagonum aquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icosaedri inter se æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinq; latera Icosaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinq; Icosaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK. Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL. Et DECLB, ob rectas quinque æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinq; latera Icosaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: Ac tandem GLFEK, ob quinque Icosaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK; ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaque inter se æqualia constituantur. Quoniam vero recta subtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli opposito lateri æquidistat, vt in scholio propos. 8. lib. 13. demonstrauimus; erit iuncta recta AB, ipsi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipsi DF, parallela in pentagono AKCFD: Et BC, iuncta parallela ipsi DE, in pentagono DECLB. [a] Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela sunt, [b] faciuntque circulos parallelos in sphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipsi HI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipsi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipsi GH, in pentagono LBMHG: Ac propterea circuli in sphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipsi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipsi EF, in pentagono GLFEK, [c] Igitur EF, HI, cum sint eidem iuncta AB, vel KL, parallela, inter se parallelæ sunt. Eademque ratione DE, GI, cum sint eidem iuncta BC, vel KM, parallela, inter se parallelæ erunt; propterea quæ plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ducta parallela erunt. Omnes ergo quatuor circuli in sphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter se

[a] 15. vnde.
[b] 1. 1. Theodosii.
[c] 8. duodec.

sunt; & tam circuli DEF, GHI, inter se æquales, ob trian-
gula æquilatera in illis descripta æqualia, q̃ circuli ABC,
KLM, inter se etiam æquales, ob triangula æquilatera
æqualia in ipsis, quæ ex iunctis AB, BC, CA; & KL,
LM, MK, constituuntur: quippe cum latera hæc sint æ-
qualium subtendentes angulos pentagonorum æqualium.



QVIA vero iuncta recta KB, quæ connectit non ad easdem partes extrema K, B parallelarum KL, AB, in parallelis circulis non ad easdem partes centrorum ductarum, sphæræ diameter est, & angulus BAK, rectus, ex 4. lemmate, quod KA, connectat ad easdem partes extrema K, A, earundem parallelarum; a *a 47. primi.*

quadratum diametri KB, æquale duobus quadratis ex AB, AK. Rursus quia in pentagono EAMBF, recta iungens AB, angulum AMB, subtendit: Vt autem recta angulum pentagoni subtendens ad latus pentagoni, ita est hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo descripti, ex scholio propositionis 2. lib. 14. erit AB, iuncta ad EI, vel AK, ipsi EF, æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco b cum latus pentagoni possit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo descriptorum; erit diameter sphæræ KB, (qua ambas AB, AK, potest, vt ostendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo AB, latus hexagoni, & AK, vel EF, latus decagoni. Quare sphæræ diameter KB, ad iunctã AB, proportionẽ habet, quã pẽtagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad EF, eã, quã latus pẽtagoni habet ad latus decagoni: c Ac proinde cũ tã AB, latus triãguli æquilateri in circulo ABC, quã EF, latus trianguli æquilateri in circulo DEF, potentia triplum sit semidiametri ſui circuli; erũt circuli DEF, ABC, ac proinde & GHI, KLM, qui illis æquales sunt, illi, quos in principio propositionis descripsimus. Ex quo patet, rectam, qua dupla est semidiame-

b 10. tertij dec.

c 12. tertij dec.

tri

vt initio iuuenta, minorem esse diametro sphæræ, vt supra diximus.

HIS demonstratis, facili negotio concludemus, solidam figuram a nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadent in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruunt.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæra diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphæræ KB, ad EF, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: [a] ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, idcoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni. [a] 20. primi.

COROLLARIVM II.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad iunctam AB, ex constructione; erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctam AB: [b] Est autem latus hexagoni in circulo ABC, hoc est, semidiameter potentia subtriplum rectæ iunctæ AB, [b] 12. tertij dec.

AB, quod AB, sit latus trianguli aequilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo ABC, potentia subtriplum est diametri sphaerae, hoc est, diameter sphaerae potentia tripla est lateris pentagoni in circulo ABC, descripti.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data sphæra Dodecaedrum describere.

DESCRIBANTVR in data sphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propos. ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, ita vt semidiametri circulorum ABCDE, QRSTV, sint potentia subtripli duarum rectarum, ad quas diameter ita se habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni; semidiametri vero circulorum FGHIK, LMNOP, potentia sint subtripla earum rectarum, ad quas diameter sphaerae sic se habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Describatur autem in circulo ABCDE, pentagonum ABCDE, aequilaterum, & aequiangulum, ducanturque eius lateri CD, ad easdem partes centrorum parallela HI, in circulo FGHIK, & aequilaterum pentagoni eiusdem circuli, ex 1. lemmate: Rectae autem HI, ad diuersas partes centrorum agatur eodem modo parallela LP, in circulo LMNOP: Huic tandem LP, ad easdem centrorum partes ducatur parallela QV, in circulo QRSTV. Completis autem pentagonis in hisce tribus circulis, (quorum tamen latera, vt confusionem vitaremus, non duximus, sed eorum tantum extrema puncta notauimus.) erunt singula latera eorum singulis lateribus pentagoni ABCDE, parallela, eo ordine, quo latera CD, parallela ducta sunt: quod de-

monstra-

monſtrabitur, vt in probl. 2. oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, nimirum HG, PO, TV, latera iuncta, parallela erũt ipſi BC, &c. Poſtremo ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico AS, Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona ABCDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera eſſe, æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrãdum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſ. 17. lib. 13.) ſuos 20. angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atque in eo ſitu, quo eadem 20. puncta notauimus.

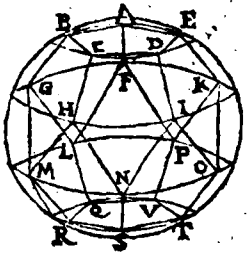
SIT ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos ſtatuẽs in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta ſubtẽdens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipſi AE, in pentagono AEKPF, & FG, ipſi AB, in pentagono ABGLF; & ſic de cæteris. Quia igitur recta AB, AE, rectis FG, FG, parallelæ ſunt; [a] erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelũ erit planum per FG, GH, ductum; quod ha rectæ rectis AB, BC, ſint parallelæ. Igitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter ſe parallela ſunt, cum eidẽ plano pentagoni ABCDE, ſint parallela; atque adeo, ex eodem ſcholio, cum conueniant in rectæ FG, vnum planum efficient. Non aliter oſtendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in ſphæra [b] efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos

[a] 15. vnde.

[b] 1. 1. Theodoſii.

parallelas efficient QRSTV, LMNOP. Erunt q; tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & ob rectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL.

[a] 4. primi. [a] quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.



[b] 9. vndec. DEINDE quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ iunctis ND, MB, lateri CH, parallelæ sunt in pentagonis CHNID, BGMHC; [b] erunt quoque iunctæ ND, MB parallelæ. Sint autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant.

[c] 33. primi [c] Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quod vtraq; lateri DI, sit parallela.

[d] 15. vnde. [d] Circulus describitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus est, cum ducatur per rectas NM, NO, his vero per rectas BD, CE, quibus illa parallela sunt ostensa. Non secus ostendentur parallelis circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli parralleli sunt.

RVRSVS quoniam iuncta recta EF, OV, cum scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TLKO, æquidistent, [e] parallela sunt; nec non & inter se æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant; [f] erunt & rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano est, [g] cum EF, OV, in eadem sint plano cum parallelis EO, FV. Est autem & in circulo, [h] propterea quod planum, in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur ex ijs, quæ ad propos. 31. lib. 3. demonstrantur, cum in eo quadrilatero oppositæ latera æqualia sint, quadrilaterum rectangulum est EFVO; ac proinde cum omnes latera æqualia sint, subtendētia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum poterit lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, recta iuncta FG, quod æquales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagon-

[e] 9. vndec.
[f] 33. primi
[g] 7. vndec.
[h] 1. 1. Theodosii.

tagonorum æqualium: ideoque qualium partium 1. statuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata simul eorundem partium 3. Quibus [a] cum æquale sit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter sphæræ est; (Nam cū æquales sint iunctæ FG, ON, subtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter se parallelæ, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ sint, ex scholio propos. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iunctæ rectæ OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter sphæræ.) erit quoque quadratum diametri sphæræ 3. qualium 1. est quadratum rectæ FG, hoc est, quadratum diametri sphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit. [b] Est autem & quadratum trianguli æquilateri tripluum quadrati semidiametri, hoc est, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri sphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris triāguli ad quadratum lateris hexagoni; [c] atque adeo vt diameter sphæræ ad rectā FG, ita latus triāguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem rectæ FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita est latus pentagoni eiusdem circuli ad latus trianguli, quod FG, sit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appositā formulā apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoque vt diameter sphæræ ad latus trianguli, hoc est, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

Diam. sphæræ.	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

[a] 47. primi

[b] 12. tertii dec.

[c] 22. sexti

PRÆTEREA quia ex scholio propos. 2. lib. 14. est, vt iuncta recta FG, subtendens angulum pētagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pētagoni in circulo ABCDE, ita latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE; erit quoq; vt latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni ī eodē circulo

cum

cum hexagono descripti. Vt autem diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo F G H I K, *ita est latus pentagoni ad latus hexagoni in eodē circulo cū pentagono descripti, vt proxime demōstratū est. Igitur ex æquo erit, vt diameter sphæræ ad latus trianguli in circulo* A B C D E, *ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodē circulo cū pentagono descripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propos. sit quoque, vt diameter sphæræ ad* E F, *latus trianguli in circulo* D E F, *ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterq; circulus* D E F, G H I, *figuræ antecedentis propos. vtrique circulo* A B C D E, Q R S T V, *huius figuræ æqualis. Quare circuli* A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, *sunt illi, quos in propos. antecedenti, & in hac describimus.*

Diam. sphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

QVIBVS demonstratis, nullo negotio probabimus solidam figuram A S, *a nobis descriptam esse Dodecaedrum quippe cum Dodecaedro in sphæra descripto, cuius basis pentagonum* A B C D E, *omnes eius anguli solidi cadant a quinq; puncta aliorum trium circulorum parallelorum, quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Dodecaedri congruant.*

COROLLARIVM.

PERSPICVE colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icosaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus D E F, *figura antecedentis propos. æqualis est circulo* A B C D E, *figuræ huius propos. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propos. 5.*

MANIFESTVM quoque est, eosdem prorsus circulos sustinere & angulos solidos Icosaedri, & angulos solidos Dodecaedri.

SCHO-

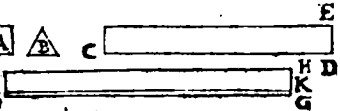
SCHOLIVM.

EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facile etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademque ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, eũ poſt Tetraedrum ſtatim octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ira enim ſemper a minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti trianguli ſimul maiora, quam octo quadrata ſimul.

HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum CE, cuius vnum latus CD, octuplum ſit lateris quadrati A, & latus DE, lateri eiuſdem quadrati æquale: Eritque rectangulũ CE, octuplum quadrati A, cum ſit, vt CD, ad latus quadrati A, ita [a] *rectãgulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. Sit quoque rectangulum FH, cuius vnum latus FG, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſa, hoc eſt, altitudini triangu-*

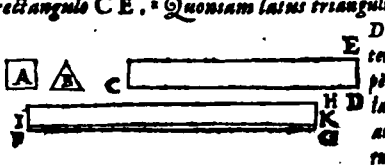


li B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplũ alteris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi GH, hoc eſt, altitudini trianguli B, [b] *vigecuplum eſt trianguli B; Ei autẽ triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum*

[a] 1. ſexti

[b] 1. ſexti

ctangulum FH, quippe cum basis FG, dimidium sit basis illius trianguli; erit quoque rectangulum FH, vigecuplũ trianguli B. Probandum igitur est, rectangulum FH, maius esse rectangulo CE. [a] Quoniam latus trianguli B, hoc est, latus DE, potentia sesquitertiũ est eius per quod dicimur, hoc est, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potẽtia proportionẽ habet, quam 25. ad 16. quod FG, sit 10. & CD, 8. hoc est, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Est enim maior proportio 25. ad 16. superbipartiens sextasdecimas, quam 4. ad 3. sesquitertia, quæ maior sit fractio $\frac{9}{16}$. quam $\frac{1}{3}$. [b] Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK; erit que maior quoque proportio DE, ad HK, quam ad GH; [c] ac proinde maior erit GH, quam HK. Recta ergo KI, ipsi FG, parallela, erit vt IK, ipsi FG, æqualis, ad CD, ita DE, ad HK. [d] Igitur erit IH, rectangulũ rectangulo CE, æquale: ideo & FH, maius, quam CE. Quod propositum.



[a] 12. quarti dec.

[b] 12. sexti

[c] 10. quinti

[d] 14. vel 16. sexti.

II.

OCTO quadrata ex semidiametro sphæræ descripta æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti.

[e] QVONIAM duo quadrata ex diametro sphæræ descripta superficiem cubi in ea sphæra descripti æqualia sunt: Duo vero eadem quadrata æqualia sunt octo quadratis ex semidiametro sphæræ descriptis, quod quadratum diametri quadruplum sit quadrati semidiametri, ex scholio propos. 4. lib. 3. efficitur, octo quadrata semidiametri sphæræ æqualia quoque esse superficiei cubi eiusdem sphæræ. Quod est propositum.

[e] 20. quarti dec.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, erit perpendicularis e centro

tro sphæræ ad vnam basim Icosaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro sphæræ ad vnam basim octaedri, & cubi ducta.

NAM quia latus octaedri maius est latere Icosaedri in eadem sphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icosaedri. Quare si vtrumq; solidum ita intra sphæram constituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius sit parallelum, longius a centro aberit Icosaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis superficiem sphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis e centro sphæræ ad basim Icosaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad basim Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis sit perpendiculari cubi; quod basis cubi, & basis octaedri eodem circulo circumscribantur, ideoque æqualiter a centro distent; erit quoq; perpendicularis Icosaedri perpendiculari cubi maior. Quod est propositum.

a 15. tertii dec.

b 21. quarti dec.

IIII.

SI Cubus & Icosaedrum in eadem sphæra describantur, superficies Icosaedri superficie cubi maior est.

QVONIAM viginti triangula æquilatera super semidiametro sphæræ maiora sunt octo quadratis ex eadē sphæræ semidiametro descriptis, vt theoremate 1. demōstrauimus: Sunt autem viginti triangula Icosaedri maiora viginti triangulis æquilateris super semidiametro sphæræ constructis, quod latus Icosaedri semidiametro sphæræ maius sit, ex coroll. 1. problematis 4. superioris. Igitur & viginti triangula Icosaedri multo maiora sunt octo quadratis ex sphæræ semidiametro descriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icosaedri totam superficiem Icosaedri conficiant, at octo quadrata ex semidiametro sphæræ descripta, superficiei cubi æqualia sint, ex theoremate 2. paulo ante demonstrato; erit quoque Icosaedri superficies maior superficie cubi. Quod est propositum.

DE

DE COMPARATIONE Soliditatum quinque corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum.

HIS præmissis, demonstremus iam, Dodecaedrum maius esse Icosaedro: Icosaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icosaedro maius est.

QVONIAM est, [a] *vt cubi latus ad latus Icosaedri, ita Dodecaedrum ad Icosaedrum:* [b] *est autem latus cubi latus Icosaedri maius; maius quoque erit Dodecaedrum Icosaedro. Quod est propositum.*

[a] *11. quarti dec.*
[b] *18. tertiædecimi*

II.

ICOSAEDRVM cubo maius est.

QVONIAM perpendicularis ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadens, maior est perpendiculari ex eodem centro in vnam basim cubi demissa, vt in 3. theoremate præmisso ostensum est: Item ex 4. theoremate, superficies Icosaedri superficie cubi maior quoque est; Erit solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Icosaedri cadente, & tertia parte superficiei Icosaedri contentum maius solido, quod sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basim cubi cadente, & tertia parte superficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in scholio propos. 20. lib. 14. demonstrauimus, illud solidum Icosaedro sit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icosaedrum, quam cubus. Quod est propositum.

CV.

III.

CVBVS Octaedro maior est.

QVONIAM est, [a] vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius. (Nam [b] cum latus cubi maius sit latere Icosaedri; & latus Icosaedri, ex coroll. 1. problematis 4. superioris, maius semidiametro sphæræ; erit latus cubi multo maius semidiametro sphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod est propositum.

[a] 27. quartidec.
[b] 18. tertiidec.

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius est.

QVONIAM basis octaedri minor est basi Tetraedri, [c] quod basis Tetraedri ad basem octaedri proportionem habeat sesquitertiam; erit perpendicularis ex centro sphæræ ad vnam basim octaedri demissa, maior perpendiculari ex eodem sphæræ centro ad vnam basim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam supra theoremate 3. ostendimus, perpendicularem in Icosaedro maiorem esse perpendiculari in octaedro, & cubo. Est autem & superficies octaedri superficie Tetraedri maior, [d] cum illa huius sit sesquialtera. Igitur solidum contentum sub perpendiculari ex centro sphæræ in vnam basim Octaedri cadēte, & tertia parte superficiei octaedri, maius est solido contento sub perpendiculari ex eodem centro sphæræ in vnam basim Tetraedri deducta, & tertia parte superficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex scholio propos. 20. lib. 14. illud solidum octaedro sit æquale, hoc vero Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

[c] 14. quartidec.
[d] 14. quartidec.

ALITER. Quoniam est, [e] vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita est triplum Te-

[e] 22. quartidec.

traedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedri. Igitur ex aequalitate erit quoque, ut latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam quia quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem tripla; ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

a 18. tertij dec.

b 10. quin.

c 17. quartidec.

ALITER. Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectangulum sub linea potente $\frac{27}{64}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphaerae; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphaerae, quod eius latera minora sint sphaera diametro; quippe qua singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, id est, Octaedrum Tetraedro erit maius. Quod est propositum.

d 32. quartidec.

e 27. quartidec.

ALITER. Quoniam cubus triplus est Tetraedri minor vera quam triplus Octaedri: (Nam cubus Octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphaerae, & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphaerae, quod & totam diametrum, qua cubi latera maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplum.) Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod erat propositum.

EODEM prorsus ordine se mutuo superant conuexae superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri. Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

f 9. quartidec.

g 18. tertij dec.

QVONIAM enim f est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri: Est autem cubi latus latere Icosaedri maius, & vt supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior.

SVPERFICIEM vero Icosaedri maiorem esse superficie

perficie Cubi, demonstratum est paulo ante theoremate quarto ante comparationem soliditatum quinque corporum Regularium.

DEINDE [a] quoniam est superficies cubi ad octaedri superficiem, vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ: Est autem latus cubi semidiametro sphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo ostendimus, cubum Octaedro maiorem esse, demonstratum est; Erit quoq; superficies cubi superficie Octaedri maior. [a] 27. quartidec.

DENIQVE [b] quia superficies Octaedri sesquialtera est superficiei Tetraedri; perspicuum est, Octaedri superficiem maiorem esse Tetraedri superficie. [b] 14. quartidec.

VIDES igitur superficies & soliditates corporum Regularium contrario ordine respondere eorundem latéribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam superficiem, at eo minus latus. Nam [c] vt supra demonstratum est, Tetraedri latus est omnium maximum, eius vero superficies atque soliditas, vt hic demonstrauimus, omnium minima est: Item Dodecaedri latus omnium est minimum, eius vero conuexa superficies & soliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, si Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icosaedrum, & Dodecaedrum in eadē sphæra descripta sint, latera eorum, eo ordine, quo proposita sunt, atque ab Euclide descripta, se mutuo superant, [d] vt supra ostensum est; ita contrario ordine eorundem superficies connexæ, atque soliditates se mutuo superant, vt hoc loco demonstrauimus. [c] 18. tertiodec. [d] 18. tertiodec.

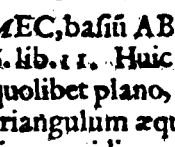
CÆTERVM prætereundum non est hoc loco id, quod a Pappo demonstratum est lib. 5. Mathematicarum collectionum; soliditates videlicet quinque corporum Regularium, si isoperimetra sint, atque idcirco, non in eadem sphæra constructa, longe aliter se habere, quam a nobis demonstratum est. Nam corpus, quod plures habet bases, maius semper est corpore pauciorum basium: Ita vt Icosaedrum superet Dodecaedrum, Dodecaedrū maius sit Octaedro, Octaedrum superet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius sit.

INVENTIO ANGVLI inclinationis duarum baſium cuiuſcunque ſolidi regularis, vnius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis A B C D, cuius latere B D bifariam ſecto in E, ex angulis A, & C, lateri B D, oppoſitis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares ſint ad B D, communem ſectionem planorum A B D, C B D, in quibus exiſtunt. (*Sunt.n.in triangulis A E B, A E D, anguli ad E, æquales,&c.) angulũ inclinationis A EC, baſiũ A B D, C B D, continebunt, ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur F G H, triangulum æquilaterum ſuper rectam F G, lateri pyramidis æqualem conſtructum, atque idcirco triangulo cuicunque pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum A B D, æquale, in quo ducta H I, perpendiculari ad F G, conſtituatur ſuper F G, triangulum F G K, habens vtrumque latus F K, G K,



*. primi.

GK, æquale perpendiculari HI, hoc est, vtrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, sint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem esse angulo inclinationis AEC, basium ABD, CBD. Cum enim latera KF, KG, æqualia sint lateribus EA, EC; & basis FG, basi AC; æquales erunt anguli FKG, AEC. Dicò insuper angulum inclinationis AEC, acutum esse. [b] Cum enim latus AD, vel illi æquale AC, sesquitertium sit potentia vtriusque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, talium 3. erit quadratum vtriusque rectæ AE, CE; ideoque earundem partiũ 6. erunt ambo simul quadrata rectarum AE, CE. Quare cũ in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus sit quadratis simul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in scholio propos. 13. lib. 2. demonstrauimus.

[a] 8. primi.

[b] 12. quartidec.

COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes basium pyramidis æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, cuiusmodi sunt AE, CE, subtendanturque a lateribus pyramidis, quale fiuit AC; omnes enim inter se æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æqua-

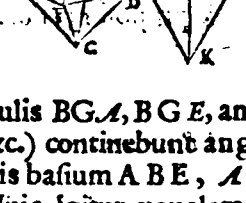
[c] 8. primi.

les sint, nec non & latera pyramidis eosdem subtendentia.

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri basium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR *Octaedrum ABCDEF*, cuius diameter BD. Ex angulis B; & D, ad latus AE, triangulis ABE, ADE, commune, bifariamq; sectum in G, rectæ ducãtur BG, DG; quę cũ perpẽdiculares sint ad AE, communẽ sectionem planorum ABE, ADE, in quibus existũt, (quod in triãgulis BGA, BGE, anguli ad G, æquales sint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis basium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum super rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propositi, triangulo scilicet ABE, æquale, in quo ducta KL, perpendicularis ad HI, constituatur super recta MN, quæ æqualis sit diametro octaedri BD, hoc est, diametro



8. primi.

metro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri descripti, triangulum OMN, habens vtrũque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtrique perpendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales sint. Dico angulum MON, æqualem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GD; & basis MN, basi BD;[a] Aequales erunt anguli MON, BGD. Dico præterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum. Cũ enim diameter octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB;[b] latus vero AB, potentia sesquitertium rectæ BG: qualium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. quadratum rectæ BG; ideoque ambo simul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea angulus BGD, obtusus erit, vt in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.

[a] 8. primi.

[b] 14. tertiædecimi

[c] 12. quartidec.

COROLLARIVM.

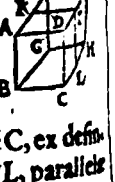
HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales

sint BG, DG, subtendanturque ab octaedri diametris,
a 8. primi. *cuiusmodi est BD; omnes inter se aequales erunt, quod & omnes illa perpendiculares, quae ipsos continent, aequales sint, necnon & diametri octaedri easdem subtendentes.*

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi basium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus ABCDEFGH, in quo secetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi opposita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectae
b 33. primi. ducantur IK, IL; b quae cum aequales, ac parallelae sint lateribus EF, EH, (quod & KF, IE, inter se, nec non & IE, LH, inter se aequales existant, & parallelae) ideoque angulos rectos ad latus DE, efficiant, cõtinebunt KIL, angulum inclinationis basium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectae IK, IL, parallelae existentes rectis EF, EH. & non in eodem cum
c 10. vnde. illis plano, angulum KIL, aequalem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis basium cubi. Quare vt angulo inclinationis basium cubi aequalis in aliquo plano exhibeatur, cõstituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonstrauimus, aequalis erit angulo inclinationis basium cubi.



CO-

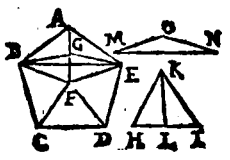
COROLLARIVM I.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum; perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

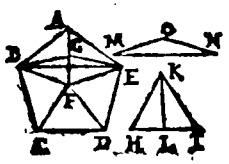
IIII.

ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis ABCDEF, una ex 12. pyramidibus Icoſaedri, cuius baſis pentagonum ABCDE, ex quinque Icoſaedri lateribus compoſi ſitum, vertex autem F. Diuiſo itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus AF, commune habentium, angulis B, & E, lateri AF, oppoſitis rectæ BG, EG, quæ cum ex demonſtratis in problemate 2. huius ſcholij, perpendiculares ſint ad AF, communem ſectionem planorum ABF, AEF, in quibus ducuntur, comprehendent BGE,



BGE, angulum inclinationis basium ABF, AEF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triãgulum æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatũ, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendiculari, constituatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens vtrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtrique perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, BG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, AEF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; [a] Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGB; [b] erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemque modum AE, maior erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si itaque recta BE, super rectam sibi æqualem MN, intelli-



[a] 8. primi.

[b] 19. primi.

intelligatur poni; cadet angulus *A*, extra trian gulum *MON*, ita vt rectæ *AB*, *AE*, rectas *OM*, *ON*, prorsus includant.[a] Angulus ergo *O*, maior erit angulo *BAE*: At hic obtusus est. (cum enim quinque anguli pentagoni sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintam. obtusus ergo erit, cum recto sit maior), Multo igitur magis obtusus erit angulus *MON*, hoc est, sibi æqualis *BGE*.

[a] 21. primi

COROLLARIVM.

NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt BG, EG, subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE:[b] *omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos,*[c] *æquales erunt.*

[b] 8. primi.

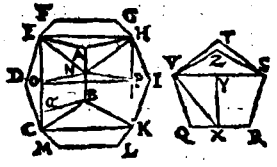
[c] 4. primi.

V.

ANGVLVM inclinationis duarū basium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM

CVM per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia;



duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum idem latus cõmune AB; alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His porro pẽtagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cum rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta

recta ſubtendatur V S, æqualis exiſtens rectæ E C, cum & latera T V, T S, lateribus D C, D E, æqualia ſint, angulóſque contineant æquales. Diuiſa deinde recta Q R, bifariam in X, ducatur a puncto X, ad Q R, perpendicularis X Y; propterea que perpendicularis ad V S, cum V S, ſit parallela ipſi Q R, ex ſcholio propoſit. 8. libri 13. Ac poſtremo ſuper recta V S, triangulum fabricetur V Z S, habens vtrumque latus Z V, Z S, perpendiculari X Y, æquale. Dico angulum V Z S, æqualem eſſe angulo inclinationis O N P. Ductis enim rectis N E, N H, V X; cum latera E A, A N, æqualia ſint lateribus H A, A N: Item lateribus V Q, Q X, angulosque comprehendant æquales; [a] Aequales erunt & baſes N E, N H, V X, & anguli A N E, A N H, Q X V; ideoque & reſidui ex rectis, anguli videlicet E N O, H N P, V X Y, æquales erũt. Quoniã igitur anguli E N O, E O N, trianguli E N O, æquales ſunt angulis H N P, H P N, trianguli H N P; nec nõ & angulis V X Y, V Y X, triãguli V X Y; (ſunt. n. E O N, H P N, V Y X oſtenſi recti.) Et latus N E, lateribus N H, V X, æquale demonſtratum; [c] Aequalia erunt reliqua latera N O, O E, reliquis lateribus N P, P H; Item lateribus X Y, Y V. Quare rectæ Z V, Z S, æquales exiſtentes ipſi X Y, rectis N O, N P, æquales erunt. Iam vero, quia O E, P H, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoque recta coniuncta O P, æqualis & parallela ipſi E H, ideoque æqualis ipſi E C, hoc eſt, rectæ V S,

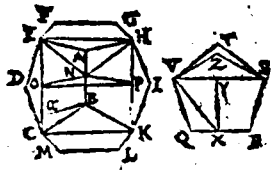
[a] 4. primi.

[b] 4. primi

[c] 26. primi.

[d] 33. primi

VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia sint; basis item VS, basi
[a] 8. primi. OP; [a] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, esse obtusum. Nã ducta recta Bα ipsi NO, parallela; cũ sit quoq; NB, ipsi Oα, parallela, ex scholio prop. 8. lib. 13. Parallelogrãmum erit NOαB, ideoq; recta Bα ipsi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppositum angu-



[b] 34. primi

lo CαB. qui rectus est, (æqualis nimirum interno CON,) maius est latere Bα, hoc est, recta NO, vel vtraque ZV, ZS, quæ ipsi NO, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum L intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, rectas ZV, ZS, includant omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior est angulo pentagoni T: Hic vero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. Multo igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

[c] 29. primi

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri æquales esse inter se. Cum enim singuli

guli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri *ad duo latera cubi in* Dodecaedro *descripti ductis; quales sunt* NO, NP, *subtendanturque a rectis, quæ cubi inscripti lateribus sunt æquales, vel certe, quæ rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est recta* OP, *lateri cubi inscripti* EH, *quod angulum pentagoni* EAH, *subtendit, æqualis;* [a] *Erunt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.*

[a] 8. primi.

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

INDEX PROBLEMATVM,

QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR.

QVORVM EA, QVAE EVCLIDIS sunt, eodem charactere sunt expressa, quo in propositionum demonstrationibus vsi sumus: quæ vero adiecta a nobis, charactere, quo scholia notauimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, secundum significat. Vt autem facilius quisque inueniat problemata, quæ cupit, digessimus ea secundum materias, de quibus proponuntur.

ACVTANGVLVM trian gulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquila tera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquian gula figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangu lum. vide. Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Angulum datum rectilineum bi fariam secare. pag. 97. A

Angulum datum rectilineum in quotuis partes æquales diuidere. pag. 59. & 902. A

Angulum rectum datū in tres angulos æquales partiri. 176. A

Angulum rectum ad pũctum in data recta linea datum constituere. 103 A

Angulum rectum ad extremũ punctum linea rectæ constituere. pag. 104. & 168. A

Angulum rectum in data recta per lineam ex puncto extra rectam dato ductam constituere. 105. & 106. A

Angulum rectũ in data recta constituere per lineam ductam ex puncto extra rectam dato, quando punctum vicinum est datæ rectæ, vel prope extremum plani cuiusliam, vel quando recta data prope extremum plani est, vel denique quando & datum punctum est vicinum extremo plani, et recta data est prope aliud extremum plani. 107. & 168. A

Angulus propositus, rectus ne sit, an obtusus, acutusve, cognoscere. pag. 40. & 41. A

Angulum dato angulo rectilineo æqualem ad datã rectam lineam, datumque in ea punctũ constituere. 131. & 132. A

Angulos rectilineos, & arcus circulorum reperire incommensurabiles. 918. A

Ex tribus angulis planis, quorũ duo quomodocũque assumpti reliquo sunt maiores, solidũ angulum cõstituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse. pagina 579. B

Ad datam rectam lineam, eiusq; punctum angulum solidũ constituere solido angulo dato æqualem. 590. B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

Circuli dati centrum reperire. pag. 327. A

Per datum punctum in circumferentia rectam, quæ circulũ tangat, ducere. 353. A

A dato puncto rectam lineam deducere, quæ datum circulũ tangat. 388. & 431. A

Circulis duobus datis, quorum unus alterum includat; rectam lineam ducere, quæ utrumque circulum tangat. 385. A

Circulum per datum punctum describere, qui alium datum circulum tangat. 391. A

Linea recta, quæ circulum secet, lineam parallelã ducere, quæ eundem circulum tangat. 394. A

Circuli segmento dato describere circulum, cuius est segmentum. 410. A

Circulum per tria puncta non existentia in linea recta, describere. 412. & 465. A

Arcum datum secare bifariam. pag. 425. A

Circuli segmẽtum super datam rectam describere, in quo angulus existens sit æqualis dato angulo rectilineo. 436. A

A dato circulo segmentum abscindere

scindere capiens angulum angulo dato rectilineo æqualem pag. 437.A

Circulis duobus datis, quorũ vnus non sit totus intra alium; circulum, qui vtrumque tangat, describere. 449.A

In circulo dato rectam accommodare datæ rectæ, quæ diametro maior nõ sit, æqualem. pag. 456.A

In circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ, quæ circuli diametrò maior non sit, & alteri rectæ parallelam. 457.A

Dato circulo, & duobus punctis, siue extra circulum, siue intra, dummodo neutrũ sit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnũ punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiã secant, parallela sit rectæ datæ duo puncta connectenti. 890.A

Datum arcum circuli in datã proportionem diuidere. 900.A

Datum arcum, vel angulum recti lineum in quotuis partes æquales partiri 902.A

Dato arcui circuli, ex cuius quadrante quadratrix descripta est, rectam lineam inuenire æqualem. 905.A

Dato circulo quadratum æquale constituere. 908.A

Dato quadrato, circulũ æqualem describere. 911.A

Circulum cuicũque rectilineo æqualem describere: Et circulo figurã rectilineam æqualem constituere, quæ cuicunque alteri similis sit. 912.A

Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli æqualem reperire. 912.A

Datis duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum; ex altero arcum æqualem abscindere. 913.A

Arcus circulorum, & angulos rectilineos inuenire incommensurabiles. 918.A

CIRCVMFERENTIA. vide. Circulus.

COMMENSVRABILES, & incommensurabiles magnitudines.

An dua quæcunque magnitudines propositæ sint commensurabiles, nec ne, explorare. 293.B

Duabus magnitudinibus commẽsurabilibus datis, maximã earum communem mensuram inuenire. 294.B

An quotlibet magnitudines propositæ sint commensurabiles nec ne, considerare. 295.B

Tribus magnitudinibus commẽ surabilibus datis, maximã earum mẽsuram communem inuenire. 297.B

Propositis duabus magnitudinibus commensurabilibus, quam proportionem habeant in numeris, inuenire. 301.B

Rectam inuenire, ad quam ita se habeat

habeat quęuis alia data recta, vt numerus ad numerũ. 303. B
Rectam inuenire, ad cuius quadratum ita se habeat quadratum alterius datæ rectę, vt numerus ad numerum. 303. B
Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia. 319. B

COMPOSITI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide. Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide. Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide. Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide. Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, sphæram, atque aliam figuram.

In circulo dato triangulum describere dato triãgulo æquiangulum. 458. A
Circa datum circulum triangulum describere dato triangulo æquiangulum. 459. A
In dato triangulo circulum describere. 460. A
Trianguli lateribus cognitis, inuenire puncta, in quibus circulus inscriptus ipsa latera tangere debet. 462. A
Circulum circa datum triangulum describere. 463. A
In dato circulo quadratum describere. 464. A
Circa datum circulum quadratum describere. 465. A
In dato quadrato circulum describere. 466. A
Circa datum quadratum circulum describere. 467. A
In dato circulo pentagonum laterum & æquianguli describere. 468. A
Super datam rectam pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 471. A
Circa datum circulum, pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 473. A
Circa circulum describere quamcunque figuram regularem, quę circulo inscribi potest. 474. A
In dato pentagono æquilatero & æquiangulo circulum inscribere. 475. A
In quamcunque figuram regularem circulum describere. 476. A
Circa pentagonum æquilaterum & aquian-

æquiangulum circulum describere. 477.A
Circa quamcunque figuram regularem circulū describere. 477.A
In circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere. 478.A
In circulo quintidecagonū æquilaterum, & æquiangulum describere. 480.A
Figura quacunque regulari circulo inscripta, describere similem circa circulum, & in ea circulum inscribere, & circa eandem circulum describere. 492.A
Figura quacunque regulari circulo inscripta, inscribere aliam duplo plurium laterum. 492.A
Figuras regulares imparium laterum circulo inscribere beneficio Isoscelium, quorum anguli ad basim angulorum ad verticem multiplices sunt. 492.A
Figuras regulares parium laterum circulo inscribere beneficio Isoscelium, quorum anguli ad basim angulorum ad verticem multiplices sesquialteri sunt. 493.A
Figuram quamcunque regularem absque beneficio Isoscelium circulo practice inscribere. 494.A
Figuram quamcunque regularem super data recta practice describere. 495.A
Latus pentagoni, & decagoni in eodem circulo, ex Ptolemæo inuenire. 497.A. & 713.B
Quadratricem lineam intra quadrantem, & quadratum describere. 895.A
Duobus circulis circa idem centrum existentibus, in maiori circulo polygonum æquilaterum & parium laterum inscribere, quod non tangat minorem circulum. 675.B
Ex quo fit, perpendicularem ad diametrum ductam ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, totam extra minorem circulum cadere. 676.B
Duabus sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphæra solidum polyedrū inscribere, quod non tangat minoris sphærę superficiē. 676.B
Ex quo fit, si in quauis alia sphæra describatur solidum polyedrum simile prædicto polyedro, proportionem polyedri in vna sphæra ad polyedrum in altera sphæra esse triplicatam eius, quam habent sphærarum diametri. 682.B
Pyramidem constituere, & data sphæra complecti. 720. & 925.B
Octaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & pyramidem. 725. & 927.B
Cubum constituere, & sphęra cōplecti, qua priores figuras. pag. 729. & 929.B
Icosaedrum constituere, & sphæra complecti, qua & ante dictas figuras. 733. & 931.B
Dodecaedrū constituere, & sphę

ra complecti, qua & prædictas figuras. 739.& 936.B
Latera quinque corporum Regularium exponere, & inter se comparare. 749.B
Numerum laterum, & angulorum solidorum cuiusq; corporis Regularis expedite cognoscere. 756.B
In dato cubo pyramidem describere. 827.B
In data pyramide octaedrũ describere. 828.B
In dato cubo octaedrum describere. 829.B
In dato octaedro cubum inscribere. 831.B
In dato Icosaedro Dodecaedrũ inscribere. 833.B
In dato octaedro pyramidem describere. 836.B
In dato Dodecaedro Icosaedrum describere. 838.B
In dato Dodecaedro cubum describere. 840.B
In dato Dodecaedro octaedrum describere. 841.B
In dato Dodecaedro Pyramidem describere. 842.B
In dato Icosaedro cubum describere. 843.B
In dato Icosaedro Pyramidem describere. 844.B
In dato cubo Dodecaedrum describere. 844.B
In dato cubo Icosaedrum describere. 853.B
In dato Icosaedro octaedrum describere. 856.B
In dato octaedro Icosaedrum describere. 857.B
In dato octaedro Dodecaedrum inscribere. 862.B
In data pyramide cubum describere. 863.B
In data pyramide Icosaedrum describere. 869.B
In data pyramide Dodecaedrum describere. 870.B
In dato solido Regulari sphæram describere. 871.B
Datis duobus circulis in sphæra parallelis, datamque in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam: vel etiam aliam rectam, quæ data recta sit æqualis & parallela, dũmodo recta data maior nõ sit diametro posteriorum circuli. 911.B
In data sphæra duos circulos inæquales, ac parallelos describere, ut diameter sphæræ sit summa diametri potentia sesquialtera. pag. 914.B
Angulum inclinationis duarum basium cuiusque corporis Regularis inuenire. 941.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

A data recta linea imperatã partem auferre. 768.A
Datam rectam lineã similiter secare, vt data altera recta secta fuerit. 769.A
Datã rectam in quotuis partes æquales secare. 210.& 770.A
Datã rectã secare in duas partes datam

datam proportionem habentes. pag. 773. A
Datam rectam in quotuis partes Arithmetice proportionales secare. 776. A
Datis duabus rectis, tertiã proportionalem inuenire. 777. A
Quotuis rectas in data proportione continue proportionales reperire. pag. 778. A
Datis tribus rectis, quartã proportionalem inuenire. 780. A
Datis duabus rectis, alias duas in eadem cum illis proportione reperire. 781. A
Datis tribus rectis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam. 781. A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem inuenire. 782. A
Data recta, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius. 783. A
Secta recta in duas partes vtrunq; alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continue proportionales. 789. A
Datis duabus rectis, mediam proportionalẽ in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792. A
Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792. A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire. 793. A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire. 793. A
Datis duabus rectis, minorẽ extremitatẽ in Geometrica proportionalitate inuenire. 794. A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 794. A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire. 795. A
Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Harmonica medietate inuenire. 796. A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 797. A
A data recta dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere. 810. A
Dato rectilineo simile, similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere. pag. 839. A
Ad datam rectam, dato rectilineo, quod maius non sit parallelogrammo ad dimidiam applicato, æquale parallelogrãmum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ simili sit alteri parallelogrammo dato. 846. A
Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammũ applicare, excedens figura parallelogramma, quę similis sit parallelogrammo alteri dato. pag. 849. A

Datâ rectâ terminatâ extrema, ac media rõne secare. 850.A
A dato rectilineo imperatam partem auferre, ita tamen, vt & ablatũ, & id, quod relinquitur, simile sit cuiuis rectilineo dato, similiterque positum. 869.A
Datis duobus rectilineis, tertium proportionale inuenire. 870.A
Datis tribus rectilineis, quartũ proportionale inuenire. 870.A
Datis duobus rectilineis, medium proportionale inuenire. 871.A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia constituere, quæ similia sint similiterque descripta cuicunque rectilineo, habeantq; datam proportionem inter se. 872.A
Dato rectilineo, duo rectilinea æqualia exhibere, quę cuiuis rectilineo similia sint, similiterq; descripta, lateraque eorum homologa habeant inter se datam proportionem. 873.A
Datis duobus rectilineis, æquale rectilineum constituere, quod simile sit, similiterque positum dato rectilineo. 874.A
A dato puncto in latere trianguli rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo segmenta secundum datam proportionem. pag. 879.A
Dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere, maius vel minus, secundum datam proportionem. 881.A
In dato quadrato aliud quadratum describere in data proportione, quæ dupla maior non sit. pag. 885.A
Datum arcum circuli in data proportionem diuidere. 901.A
Isosceles triangulum constituere, cuius vterque angulorum æqualium ad reliquum habeat proportionem datam. 901.A

FIGVRAE planę quadrilaterę. vide. Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ: vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.

Proportionem ex duabus, vel pluribus proportionibus componere. pag. 831.A

Proportionem minorem ex maiore auferre. 831.A

MINVTIAE numerorum.

Duas minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere. 249.B

Integrum numerum quemcunque ad dati denominatoris minutiã reducere. 249.B

Datam minutiam duplare, ac dimidiare. 250.B

Minutiam minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere. 253.B

Datis duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent, per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductæ productos. 254.B

Datam minutiam ad minimos terminos reducere. 257.B

Datam minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare. 257.B

Minutias plures in vnam summam colligere. 259.B

Minutiam minorem ex maiore detrahere. 261.B

Minutiam per minutiam multiplicare. 263.B

Minutiam per minutiam diuidere. 264.B

Minutiam in minutiam inferere. pag. 267.B

NVMERI proportionales in communi.

Ex datis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri. 800.A

Datis duobus numeris, mediũ Harmonice proportionalem inuenire. pag. 802.A

Datis duobus numeris, minorẽ extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 803.A

Datis duobus numeris, maiorẽ extremitatem in proportionalitate Harmo-

Harmonica inuenire. 803.A
Datis duobus numeris, maiorem extremitatē in Harmonica proportionalitate inuenire. 805.A
Datis numeris quotcunque, reperire minimos omniū eandem rationem habentium cum ipsis. 95.B
Duos minimos numeros reperire in proportione quotuis numerorum continue proportionalium.. pag. 96.B
Numeros reperire deinceps proportionales minimos quotcūque quis iusserit in data ratione. 110.B
Numeros quotcunque integros, & minimos continue proportionales aliter reperire, in proportione data non multiplici. 114.B
Datis quotcunque rationibus in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus 117.A
Duobus numeris datis. considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri. pagina 210.A
Tribus numeris datis, considerare, an ipsis quartus proportionalis possit inueniri. 211.B
Datis quotlibet numeris, considerare, an ipsis possit alius proportionalis adiungi. 213.B
Summam quotcunque numerorum continue proportionalium inuenire. 230.B
Inuenire quotcūq; numeros continue proportionales in data proportione, quorum summa aequalis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibusuis duobus, qui ab extremis aequaliter distant. 235.B
Item quorum summa sit numerus quadratus, cuius radix sit medius terminus. 239.B
Duos numeros in data proportione inuenire, quorum summa aequalis sit numero producto ex vno in alium. 239.B

NVMERVS fractus. vide. Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Dati duo numeri an sint primi inter se, necne, considerare. 34.B
Datis duobus numeris non primis inter se; maximum eorum communem mensuram reperire. 35.B
Dati quotuis numeri sint ne primi inter se, an non, considerare. pag. 36.B
Datis tribus numeris nō primis inter se, maximā eorū communem mensuram reperire. 37.B
Datis duobus numeris, minimū numerum ab eis numeratum reperire. 97.B
Tribus numeris datis, reperire minimum ab eis numeratum. pag. 100.B

Datis quotuis numeris, inuenire minimum ab eis numeratum. pag. 102. B

Numerũ reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes. pag. 103. B

Numerum reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes, hac lege, vt qualibet pars contineat partem subsequentem. 106. B

Primis numeris datis quotcunque, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum. 216. B

Omnes pariter pares tantum reperire. 226. B

Omnes pariter impares tantum inuenire. 227. B

Omnes pariter pares, & pariter impares inuenire. 229. B

Omnes numeros perfectos inuenire. pag. 233. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, similes plani, ac solidi numeri.

Quadratum numerum inuenire, cũ quo datus quiuis numerus quadratum quoque numerum constituat: Et a quo idem datus numerus subtractus relinquat quadratũ. 265. 268. 272. & 278. A

Planos numeros, vel solidos duos nõ similes reperire. 171. B

Planos, vel solidos numeros quotcunque non similes inuenire. pag. 318. B

Duos numeros planos similes inuenire, pares, vel impares, vel vnũ parem, & alterũ imparem. pag. 366. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus etiam sit. pagina 367. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt excessus eorum quadratus etiam sit. 368. B

Duos numeros quadratos inuenire, quorum excessus non sit quadratus. 368. B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis non sit quadratus. 369. B

Duos numeros inuenire, ita vt compositus ex ipsis ad neutrum ipsorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. pag. 372. B

OBTVSANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & plana parallela.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo nõ est, parallelum planum ducere. 565. B

A data recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere. pagina 592. B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammum constituere, cuius vnus angulorum æqualis sit dato angulo rectilineo, lateraque circa illum angulum datis duabus rectis æqualia. 165. A

Parallelogrammum secare bifariã per rectam per quoduis punctum ductam, quod non sit in diametro, nisi quando diametrum secat bifariam. 183. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale constituere in dato angulo rectilineo. 218. A

Parallelogrãmo dato æquale triãgulum constituere in dato angulo rectilineo. 218. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale cõstituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221. A

Parallelogrãmo dato æquale triangulum constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223. A

Parallelogrammum dato rectilineo æquale constitũere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 224. A

Parallelogrammum datis quotcunque rectilineis æquale constituere super datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 225. A

Rectilineis duobus inæqualibus datis, excessum maioris supra minus inquirere. 226. A

Quadratum supra datam rectam constituere. 226. A

Quadratis duobus inæqualibus datis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia inter se sint, & simul sumpta æqualia duobus datis simul sumptis. 236. A

Quadratis quotlibet datis, siue æqualibus, siue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 238. A

Quadratis duobus datis, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato sit æqualis, ita ut tota figura composita sit etiã quadrata. 238. A

Quadratum dato rectilineo æquale constituere. 315. A

Dato excessu diametri alicuius quadrati supra latus eius, Inuenire latus ipsius quadrati. pag. 317. A

Dato circulo quadratũ æquale constituere. 318. A

Dato quadrato, circulum æqualem describere. 318. A

PAR, & impar numerus. vide numerus par, &c,

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri similes. vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarũ, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide. Numeri Proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Duas Rationales longitudine & inter se, & exposita Rationali commen-

mensurabiles inuenire, quarum una Rationali expositæ sit æqualis. 342. B

Duas Rationales longitudine & inter se, & expositæ Rationali commensurabiles inuenire, quarum neutra Rationali expositæ æqualis sit. 342. B

Duas Rationales longitudine quidem inter se, potentia vero tantũ expositæ Rationali commensurabiles inuenire. 343. B

Rationales quotcũque longitudine inter se commensurabiles inuenire. 343 B

Duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire, quarum altera expositæ Rationali sit æqualis. 348. B

Duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles inuenire, quarũ neutra sit expositæ Rationali æqualis. 348. B

Rationales quotcunque potentia tantum inter se commensurabiles reperire. 349. B

Datis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inuenire aliam Rationalem illis omnibus potentia tantum commensurabilem. 350. B

Duas Medias rectas longitudine commensurabiles: ítẽ duas potentia tantum commensurabiles inuenire. 357. B

Medias inuenire potentia tantũ commensurabiles, quę Rationale comprehendant. pagina 364. B

Medias inuenire potentia tantũ commensurabiles, quę Medũ contineant. 365. B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quã minor, plus possit quadrato rectæ longitudine sibi commensurabilis. pag. 373. B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quã minor plus possit quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. pag. 374. B

Duas Medias inuenire potentia tantum commẽsurabiles, quę Rationale contineant, ita vt maior plus possit, quã minor, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis, vel incommensurabilis. 376. B

Duas Medias inuenire potentia solum commensurabiles, quæ Medium cõtineant, ita vt maior plus possit, quam minor, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, vel incommensurabilis. 378. B

Duas rectas inuenire potẽtia incommensurabiles, quæ faciãt compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale, rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium. pagina 382. B

Duas rectas inuenire potẽtia incommensurabiles, quæ faciãt compositum quidem ex ipsarum

rum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. 384.B

Duas rectas inuenire potétia incommenſurabiles, quæ faciãt & compoſitum ex ipſarũ quadratis Mediũ, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis. pag. 386.B

Duas Medias inuenire longitudine, & potentia incommenſurabiles. 387.B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur, inuenire. 409.B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur, inuenire. 469.B

RECTA LINEA.

Rectæ datæ lineæ æqualem rectam lineam ad datum punctũ ponere. 80.A

Rectam lineam æqualẽ datæ minori ex maiore detrahere. pag. 81.A

Rectam lineam datam finitã bifariam ſecare. 101.A

Rectam perpendicularem ad rectam lineam ex puncto in eà dato educere. 102.A

Rectam perpendicularem ad rectã in puncto extremo erigere. pag. 104. & 106 A

Rectam perpendicularem ad rectam ducere ex puncto extra eam dato. 105.& 106.A

Rectam perpendicularem ad rectã ducere ex puncto extra eam dato, quando punctum datum eſt vicinum datæ rectæ, vel prope extremũ plani cuiuſpiã, vel quãdo recta data prope extremum plani eſt, vel denique quãdo & datum punctum eſt vicinum extremo plani, & recta data eſt prope aliud extremum plani. pagina 107. & 168.A

Rectæ datæ parallelam rectam a dato puncto ducere. 164.A

Rectam lineam a puncto extra datam rectam lineã propoſito ducere, quæ cũ data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. 165.A

Rectam lineam datæ rectæ parallelam ducere per punctum datum rectæ vicinum. 167.A

Inter duas rectas infinitas angulũ facientes lineã rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum vtralibet earũ faciat angulum dato angulo æqualem, dummodo datus angulus, & angulus cõprehenſus datis rectis minores ſint duobus rectis. 184.A

Rectam datam lineam finitam, in quotlibet partes æquales ſecare. pag. 210 & 770.A

Rectis duabus inæqualibus datis, inuenire id, quo plus poteſt maior, quam minor. 237.A. & pag. 326.B.

Datis duab. rectis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectã,

qua illas pōt. 236. A. & 327. B

Rectam lineam datam secare, vt rectangulum sub tota,& altero segmēto æquale sit quadrato reliqui segmenti. 286. A

Datis duabus rectis, alterutri earū rectam adiungere, vt rectangulum sub tota composita,& adiuncta, æquale sit quadrato alterius. 446. A

Rectam lineam cuilibet arcui circuli, ex cuius quadrate Quadratrix linea describitur, æqualem inuenire. 905. A

Duabus datis rectis inæqualibus quartam partem quadrati ex minore descripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata. 332. B

Datam rectam lineam ita secare, vt rectangulū sub segmentis contentū æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum. 334. B

A dato pūcto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam ducere. 560. B

Dato plano, a puncto, quod in illo datum est, perpendicularē rectam excitare. 561. B

Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectum. 571. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide. Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac solidi numeri. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra sphæram, atq; aliam figuram. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri similes. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. numerus planus, &c.

SPHAERA. vide. Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide. Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangulum æquilaterum ſuper data recta linea terminata cõſtituere. 75.A

Iſoſceles ſuper data recta conſtituere. 77.A

Scalenum ſuper data recta conſtituere. 78.A

Triangulum ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, conſtituere. 129.A

Triangulum alteri dato triangulo æquilaterum, & æquiangulum conſtituere. 130.A

In ſcaleno, & Iſoſcele, cuius baſis minor nõ ſit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarũ vtraque ſimul vtrique lateri ſimul ſit æqualis. 185.A

In æquilatero, vel Iſoſcele, cuius baſis vtrouis latere minor ſit, quælibet duæ linea intra triangulum ductæ ſunt ſimul minores duobus lateribus ſimul. 187.A

In Scaleno, & Iſoſcele, cuius baſis minor non ſit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraque vtrique lateri ſit, æqualis, vel maior. pag. 188.A

Triãgulum bifariam ſecare per lineam a quouis puncto in vno latere dato ductam. 199.A

Triangulo dato æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. 218.A

Triangulum dato parallelogrammo æquale conſtituere in dato angulo rectilineo. 218.A

Triangulo dato parallelogrammum æquale cõſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221.A

Triangulum dato parallelogrammo conſtituere æquale ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223.A

Trianguli rectanguli cognitis duobus lateribus, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 239.A

Amblygonium triangulum cõſtituere, in quo propoſ. 12. lib. 2. numeris poſſit accommodari. 293.A

Oxygonium triangulum conſtruere, in quo prop. 13. lib. 2. numeris poſſit accommodari. 303.A

Trianguli cuiuſuis aream cognoſcere. 312.A

Iſoſceles conſtruere, quod habeat vtrumque angulorum ad baſim reliqui duplum. 468.A

Iſoſceles oxygonium conſtruere, cuius tertium latus vtrouis æqualium ſit maius. 479.A

In dato triangulo quocunque quadratum deſcribere. 884.A

FINIS.

INDEX THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR:.

QVORVM EA, QVAE AB EVCLIDE demonſtrantur, eodem charactere ſunt notata, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ vero a nobis adiecta, charactere, quo ſcholia excuſimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem facilius quiſque inueniat theoremata, quæ cupit, digeſsimus ea ſecundum materias, de quibus demonſtrantur.

ACVTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquilatera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquiangula figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangulum. vide, Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Anguli recti omnes ſunt inter ſe æquales. 66.A

Anguli oppoſiti ad verticē duarum rectarum ſe interſecantium ſunt æquales. 111.A

Anguli quatuor a duabus rectis ſe interſecantibus facti, ſunt quatuor rectis æquales. 112.A

Anguli quotcunq; circa idem punctum quatuor rectis ſunt æquales. 112.A

Angulus externus trianguli maior eſt vtrouis interno oppoſito. 114.A

Angulus externus figuræ quadrilateræ maior eſſe poteſt quouis interno oppoſito. 115.A

Anguli duo trianguli quomodocunque ſumpti duobus rectis ſunt minores. 117.A

Anguli duo trianguli orthogonij, & amblygonij ſunt acuti. 118.A

Anguli omnes trianguli æquilateri, & duo Iſoſcelis ſupra baſem, acuti ſunt. 119.A

Anguli tres cuiuſcunque trianguli æquales ſunt duobus rectis: Et externus æqualis eſt duobus internis

ternis oppositis simul. 169.A
Anguli omnes interni cuiuscunque figura rectilineæ quot rectis angulis æquiualeãt. 171.& 172.A
Anguli omnes externi cuiuscunq; figura rectilineæ, productis singulis lateribus ordinatim versus eandem partem, quatuor rectis sunt æquales. 173.A
Anguli quinque, q fiunt ex cõcursu binorũ laterũ pẽtagoni ꝓductorũ æquales sũt duobus rectis. 174.A
Angulus cõtactus vere angulus est, contra Peletarium, vbi eius sophismata dissoluuntur. 354. vsque ad 387.A
Angulo quouis contactus dari potest alius minor, & hoc alius minor vsq; in infinitũ: Item maior, & hoc alius maior ĩ infinitũ. 361.A
Anguli constatus, quo modo inter se sint æquales, & qui æquales sint. pag. 363.A
Anguli cõtactus, quotquot sint, efficiunt aggregatũ omni rectilineo acuto angulo minus. 365.A
Anguli contactus Apologia aduersus Peletariũ. 366. vsq; ad 387.A
Angulus quispiam potest in infinitum augeri, & alius in infinitũ minui; & tamẽ augmẽtũ illius, quantũcunq; sit, minus semper erit decremento huius. 387.A
A minori angulo trãsitur ad maiorẽ, et per oẽs intermedios, nũquã tamẽ ꝑ æqualẽ. 387.& 430.A
Anguli oppositi in quadrilatero intra circulũ descripto æquales sũt duobus rectis. 401.A
Angulus extetnus quadrilateri in circulo, æqualis est ei, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A
Angulus rectus in cẽtro insistit quadrãti; acutus uero arcui quadrãte minori; & obtusus maiori. Et cõtra, angulus in cẽtro quadrãti insistẽs, rectus est; insistẽs uero arcui quadrãte minori, acutus; & maiori, obtusus. 417.A
Angulus curuilineus angulo rectilineo æqualis esse potest. 634. A
Si duæ rectæ se mutuo tãgẽtes, ad duas rectas se mutuo tãgẽtes sint parallelę, non autẽ in eodẽ plano; illę angulos æquales cõprehendent. 558.B
Idem eueniet, si omnes illa rectæ sint in uno plano. 558.B
Si solidus angulus tribus angulis planis contineatur; Ex his duo quilibet vtut assũpti tertio sunt maiores. 573.B
Omnis solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis cõtinet. 574.B
Si fuerint tres anguli plani, quorũ duo vtlibet assumpti reliquo sint maiores, cõphendãt aũt ipsos rectę lineę æquales; fieri potest, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulũ cõstituatur. 576.B
Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumq, vtrique; in sublimibus aũt lineis quælibet sumptã fuerint puncta, & ab his

ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent. 609.B

Si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ æquales cum lineis primum positis angulos continentes æquales, vtrumque vtrique: Erunt a punctis extremis linearum sublimiū ad plana angulorum primum positorum demissę perpendiculares, inter se æquales. 611.B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

Circulus a diametro bifariam diuiditur. 45.A

Circulus a recta, quæ diameter non sit, diuiditur non bifariā. 46.A

Si in circulo recta aliqua linea rectam quampiam bifariam secet, & ad angulos rectos; in secante centrum erit circuli, pag. 328.A

Si in circuli peripheria duo puncta coniungantur linea recta; cadet hæc recta intra circulum. 328.A

Recta circulum in vno tantum puncto tangit, si ita tangat, vt eum non secet. 329.A

Si in circulo recta linea per centrum ducta secet aliā non per centrum ductam bifariam; & ad angulos rectos ipsam secabit. Et si ad angulos rectos eā secet; bifariam quoque eam secabit. 330.

Duobus circulis ex eodē centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentia exterioris recta ducatur interiorem circumferentiā secans: erunt eius segmenta inter vtramq. circumferētiam æqualia. 331.A

In circulo duæ rectæ non per centrum extensę, se mutuo bifariam non secant. 332.A

Duo circuli se mutuo secantes non habent idem centrum. pag. 333.A

Duo circuli se mutuo interius tangentes non habent idem centrum. 333.A

Si in diametro circuli a puncto, quod centrum non sit, plurimæ rectæ cadāt: maxima omnium erit, in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum autē propinquior ei, quæ per centrum, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad vtrasque partes minimæ vel maximæ. 334.A

Si intra circulum punctum sumatur, ab eoque in circulum rectarum cadentium vna quidem sit maxi-

maxima, vna vero minima, & reliquarum alia sint inaquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum transibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidē erunt maxima propinquiores, æquales autem a minima vel maxima æqualiter distabunt. 336.A

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ vero vt libet: In cauam peripheriā cadentiū rectarum, maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autē propinquior ei, quæ per centrū transit, remotiore semper maior est, &c. 338.A

Ex puncto extra circulum sumpto, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ rectæ æquales cadunt ad vtrasque partes maximæ lineæ. 340.A

Si ex puncto extra circulum ducatur recta tangens circulum, erit ea minor omnibus ex eodem puncto in concauam peripheriam cadentibus, maior vero omnibus in conuexam peripheriā cadentibus. 340.A

Punctū in circulo, a quo plures quam duæ rectæ æquales ad peripheriam ducuntur, centrum circuli est. 341.A

Circulus circulum in pluribus punctis, quam duobus, non secat. 342.A

Recta per centra duorum circulorum se interius tāgentium ducta, cadit in circulorū contactum. 343.A

Recta per centra duorum circulorum se exterius tangentiū ducta, transit per circulorum contactum. 344.A

Circulus circulum non tangit in pluribus pūctis, quam vno. pag. 345.A

Si in semidiametro circuli producta punctum vltra centrum sumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum semidiametri punctum descriptus, tanget priorem circulum in eo puncto extremo, totusq. extra eundem cadet. 347.A

In circulo æquales rectæ æqualiter a centro distant. Et quæ æqualiter a centro distant, sunt æquales. 348.A

In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior. 349.A

Ex puncto circumferentiæ in concauam peripheriam duæ tātum rectæ æquales cadunt ad vtrasq; partes diametri. 351.A

Quæ ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locū inter ipsam rectam, & peripheriā comprehensum, altera re-

ćta non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo angulo maior eſt, reliquus autem minor. 351.A

Recta ad extremū diametri ppē dicularis circulū tāgit. 353.A

Si circulū recta tangat; recta ad cōtactū ducta, perpēdicularis eſt ad tāgentē lineam. 394.A

Circulis duobus ex eodē centro deſcriptis; recta interiorē tāgentes, & uſq; ad exteriorē extēſa, inter ſe æquales ſunt, bifariāq; in punctis cōtactuum ſecantur. 395.A

Si circulū tetigerit recta; ppēdicularis ad tāgentem in puncto cōtactus, p cētrū trāſit. 395.A

In circulo, angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, ſi fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 396.A

In circulo ſpatium ad cētrū, duplū eſt anguli ad peripheriā, cū fuerit eadem peripheria baſis ſpatij, & anguli. 399.A

In circulo, qui in eodē ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales. 399.A

Si a duobus punctis quatuor recta ducantur, ex ſingulis bina, quæ in concurſu contineāt duos angulos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorū deſcriptus, per alterū quoq; angulum trāſibit. 401.A

In circulo quadrilaterū quodcū que habet angulos oppoſitos duobus rectis æquales. 401.A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſū deſcribi pōt. 402.A

Si ex ſemicirculis, aut circulis ſimilia ſegmēta detrahātur; reliqua ſegmēta ſimilia etiā ſūt. 403.A

Arcus, quibus anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtunt, ſimiles ſunt: Et anguli arcubus ſimilibus inſiſtentes ſiue ad centra, ſiue ad peripherias, æquales ſunt. 404.A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Recta ex centro ducta abſcindunt arcus ſimiles. pag. 405.& 862.A

Si duo aut plures circuli ſe mutuo tangant interius; Recta a puncto contactus ducta abſcindunt arcus ſimiles. 406.A

Si unum latus quadrilateri in circulo producatur; angulus externus æqualis eſt angulo, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A

Segmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ſuper eadem recta linea. 407.A

Segmēta ſimilia ſuper æqualibus rectis, ſunt æqualia. 408.A

Segmenta ſimilia, & æqualia, ſunt conſtituta ſuper æquales rectas, vel ſuper eandem rectā. 409.A

In circulis æqualibus, vel eodē anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias. 413.A

In circulis æqualibus, uel eodē maior angulus, maiori peripheria inſiſtet. 414.A

In circulis æqualibus, vel eodē anguli æqualibus peripherijs inſiſtētes, ſūt æquales. 415.A

In circulis æqualibus, vel eodem angulus maiori peripheria insistēs maior est. 415.A

In circulo, duæ rectæ se nō intersecātes, et intercipientes arcus æquales, parallelæ sūt: Et parallelæ intercipiūt arcus æquales. 416.A

Recta, quę ex medio pūcto arcus alicuius ducti tāgēs circulū, parallela est chordę illius arcus. 416.A

Angulus rectus in centro insistit quadrati; acutus vero, arcui minori quadrante; & obtusus, maiori. Et contra, angulus in centro insistens quadrati, rectus est; insistēs vero arcui quadrante minori, acutus; et maiori obtusus. 417.A

Recta e centro secans rectam aliā bifariam, secat quoq; arcum bifariam. Et secans arcum bifariam, secat quoque chordā bifariam. 418.A & 712.763.B

In circulis æqualibus, vel eodem rectæ æquales, auferunt arcus æquales. 419.A

In circulis æqualib. vel eodē, maior linea maiorē arcū auferet, si de arcubus semicirculo minoribus sermo fiat: minorē vero, si de segmētis maioribus agatur. 420.A

In circulis æqualibus, vel eodē, si arcus sint æquales, erunt & rectæ æquales. 420.A

In circulis æqualibus, vel eodē maior arcus habet chordā maiorē, si de arcubus semicirculo minoribus loquamur: minorem vero, si de maioribus. 421.A

Circuli, e qb. æquales rectas auferūt similes arcus, æquales sūt. 422.A

Ex circulis inæqualibus rectæ æquales auferūt arcus dissimiles. 422.A

Ex circulis inæqualibus linea rectę auferentes arcus similes, inæquales sunt. 422.A

Rectæ lineæ auferētes arcus similes inæquales ex quibuslibet circulis, inæquales sunt. 423.A

Si in diametro circuli præter cētrū sumaī pūctū, ab eoq; in peripheriā duæ rectæ nō in eadē partes cadētes efficiāt ad diametrū angulos æquales; rectæ illæ æquales erūt, et arcus abscindēt æquales. Et si lineæ sint æquales, cōstituēt ad diametrū angulos æquales, abscindēt arcus æquales. Si denicq; abscindāt arcus æquales, erūt rectæ illæ æquales, angulosq; ad diametrū æquales cōstituēt. 423.A

Si in diametro circuli præter cētrū sumatur pūctū, a quo ad eadē partes duo anguli æquales constituantur, insistens hi anguli arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui a minori portione diametri remotior est. 425.A

In semicirculo angulus rectus est: In maiore segmēto acutus: Et in minore obtusus. Angulus item maioris segmenti recto maior: minoris vero segmenti recto minor. 426.A

Segmētū circuli, in quo angulus rectus ē, est semicirculus, in quo vero acutus, segmētū maius est: & à quo obtusus, segmētū minus. Et segmētū, cuius angulus est recto maior, ē maius; cuius vero angulus ē recto minor, ē minus. 431.A

Circulus ex puncto medio lateris recto angulo oppositi in triangulo rectangulo descriptus per vnũ angulũ trãsit quoq; p reliquos. 431. A

Si per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtrinsq; centrum recta ejiciatur: a puncto vero, vbi hac recta posteriorẽ circulũ secat, ducatur recta vtcunq;, secabitur eius portio intra priorẽ circulum bifariã. 432. A

Si circulum tangat recta, & a cõtactu ducatur linea vtcunque secans: anguli ad contingentem æquales sunt angulis in alternis segmentis. 434. A

Si recta ducta ad extremitatem recta circulum secantis faciat cũ ea angulos æquales angulis in alternis segmentis; recta illa ducta circulum tangit. 435. A

Si in circulo duæ rectæ se secẽt: rectãgulũ sub segmẽtis vnius æquale est rectangulo sub segmentis alterius. 438. A

Si duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub segmentis vnius æquale sit rectãgulo sub segmentis alterius: describi poterit per quatuor earum puncta extrema circulus. 439. A

Si extra circulum sumatur punctum, a quo ducatur recta tangens, & altera secãs: erit quadratũ tangẽtis æquale rectãgulo sub tota secante, & eius segmento exteriore. 440. A

Si a puncto extra circulũ ducãtur plures rectæ secantes; rectangula sub totis secantibus, & segmẽtis exterioribus æqualia sũt. 442. A

Duæ rectæ tãgẽtes circulũ ab eodẽ pũcto ductæ, sũt æquales. 442. A

Ab eodẽ puncto duæ tantũ rectæ circulũ tangẽtes duci possũt. 443. A

Si duæ rectæ æquales ducantur ab eodem puncto ad circulum, vna autem earum sit tangens, erit & altera tangens. 443. A

Si a puncto duæ rectæ egrediẽtes ita secentur in binas partes singulæ, vt rectãgula sub totis, & segmẽtis prope punctũ, æqualia sint: describi poterit circulus per extrema reliquorũ segmẽterũ. 445. A

Si extra circulum pũctum sumatur, a quo ducatur recta secãs, & altera incidẽs, vsq; ad circumferentiã conuexã; sit aũt quadratum incidẽtis æquale rectãgulo sub tota secante, & eius segmẽto exteriore: Incidẽs circulum tanget. 447. A

Si a puncto duæ tangentes ad circulum ducantur, aut duæ secantes æquales: Recta ab eodem puncto per centrũ ducta dimidit angulũ ab eis cõprehensum, bifariam. Et contra, Recta secãs angulum bifariam, per centrum circuli transit. 448. A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferũt arcus inæquales, maiorque est arcus minoris circuli, quam vt similis sit arcui circuli maioris. 863. A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus simpliciter inæquales

inaquales, maiorq; est arcus circuli minoris simpliciter, & non solum maior, quam vt similis sit arcui circuli maioris. 864. A

Si in circulo, ductis duabus diametris sese ad angulos rectos secãtibus, altera earũ producatur, eiq; ex vna parte quotquot parallelæ ãguntur dimidentes vtrumque quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremũ punctum proximæ parallela recta ducatur cõueniens cũ diametro producta: Erit tota recta inter punctũ concursus, & cõcauã peripheriã circuli, cõibus parallelis, vna cum diametro, quæ producta est, simul sumptis, æqualis. 865. A

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum idemq; punctum duæ aliæ rectæ circulum secantes ducantur, occurrentes duabus perpẽdicularibus; erit rectãgulũ sub vtralibet secãtiũ, & eius segmẽto interiore cõprehensum quadrato diametri æquale. 887. A

Si in circulo duæ diametri sese ad rectos angulos secẽt, & ab vnius extremo recta ducatur vtcunque secans circumferentiam, & alterã diametrũ siue productam, siue intra circulum: erit rectangulum sub duobus segmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremũ prioris diametri, & secundam diametrum, alterum vero inter idem punctũ extremum, & circumferẽtiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum descripto. 888. A

Circumferentia circuli ad eius diametrum quã proportionem plus minus, habeat. 907. A

CIRCVMFERENTIA.

vide. Circulus.

COMMENSVRABILES & incommensurabiles magnitudines.

Duabus magnitudinibus inæqualibus ꝓpositis, si a maiore auferatur maius quã dimidium; & ab eo quod reliquũ est, rursus detrahatur maius quam dimidiũ: & hoc semper fiat: relinquetur tandẽ quędã magnitudo, quæ minor erit proposita minore magnitudine. *289. B*

Idem eueniet, si dimidium auferatur, &c. 290. B

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedẽtẽ metiatur: incommensurabiles erũt ipsę magnitudines. 291. B

Si duabus magnitudinibus incõmẽsurabilibus propositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã reliqua præcedentẽ metietur. 293. B

Si duabus magnitudinibus commensurabilibus propositis, detrahatur

semper

ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã reliqua præcedentẽ metietur. 293. B

Si duabus magnitudinibus commẽ menſurabilibus propoſitis, detrahatur ſæpe minor de maiore, alterna quadã detractione metietur quadã reliqua præcedentẽ. 293. B

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earũ mẽſurã communẽ. 295. B

Magnitudõ mẽtiẽs tres aut quotcũque magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem. 298. B

Si ſint quotcunque magnitudines, & totidẽ numeri, qui bini in eadem ratione ſumãtur, in quibus magnitudines: ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 298. B

Commẽſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quã numerus ad numerum. 300. B

Commẽſurabiles magnitudines proportionem habent eãdem, quam numeri, per quos earum menſura communis maxima ipſas metitur. 301. B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles erunt magnitudines. 302. B

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem nõ habent, quam numerus ad numerum. 304. B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: incommenſurabiles erunt magnitudines. 305. B

Si ſint tres quãtitates continuæ proportionales, & aliæ tres continuæ quotq; proportionales, ſitq; vt prima illarum ad tertiam, ita prima harũ ad tertiã; erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam. 306 B

Idem ſequitur ſi plures quantitates ſint, quam tres, &c. 306. B

Quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus ſũt quadrata, inter ſe proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter ſe proportionẽ habẽtia, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; & latera habebũt lõgitudine cõmenſurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incõmenſurabilibus ſũt quadrata; inter ſe proportionẽ non habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratũ numerũ; neq; latera habebũt lõgitudine cõmẽſurabilia. 307. B

Rectæ longitudine commẽſurabiles, omnino & potẽtia ſunt cõmenſurabiles; quæ vero potentia cõmenſurabiles ſunt, non omnino & lõgitudine cõmẽſurabiles ſunt. Et q̃ lõgitudi

dine sunt incómensurabiles, nõ oino & potentia incómensurabiles sunt, quæ vero potẽtia incómensurabiles sunt, omnino & lõgitudine incommensurabiles sunt. 310.B

Si quatuor magnitudines sint ꝓportionales, prima vero secũdæ sit cõmẽsurabilis; & tertia quartæ cõmensurabilis erit. Et si prima secundæ sit incommensurabilis, & tertia quartæ incommẽsurabilis erit. 315. B

Recta media proportionalis inter duas rectas potẽtia tantũ cõmensurabiles, utrilibet illarũ incommensurabilis est lõgitudine et potẽtia ac proinde appellabitur Irratiõnalis, si alterutra illarũ statuatur Rationalis. 321. B

Quæ eidẽ magnitudini sunt cõmensurabiles, & inter se sunt commensurabiles. 321.B

Si sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni earũ cõmẽsurabilis; erit & reliqua eidẽ cõmensurabilis. 323. B

Si sint duæ magnitudines, & altera quidẽ eidẽ sit cómensurabilis, altera vero incómensurabilis; incommensurabiles erũt magnitudines. 324.B

Si sint duæ magnitudines cómensurabiles, alterà autem ipsarũ magnitudini cuꝑiã incómensurabilis fuerit; Et reliqua eidẽ incõmẽsurabilis erit. 325. B

Quæ incommensurabilibus sunt cõmensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt. 326. B

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima vero tãto plus possit, q̃ secũda, quantũ est quadratũ rectæ sibi cõmensurabilis lõgitudine; Et tertia tanto plus poterit q̃ quarta, quantũ est quadratũ rectæ sibi lõgitudine cómẽsurabilis. Qd̃ si prima tãto plus possit q̃ secũda q̃tũ est quadratũ rectę sibi incõmẽsurabilis lõgitudine; Et tertia tãto plus poterit q̃ quarta q̃tũ est quadratũ rectę sibi lõgitudine incõmẽsurab. 328.B

Si duæ magnitudines cõmensurabiles cõponantur; & tota magnitudo vtriq; ipsarũ cõmensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarũ cõmẽsurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines commensurabiles erunt. 329.B

Si tota magnitudo ex duabus cõposita, cõmensurabilis sit alteri ipsarum; eadem & reliquæ commensurabilis est. 330.B

Si duæ magnitudines incõmẽsurabiles cõponant; & tota magnitudo vtriq; ipsarũ incõmẽsurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarũ incõmensurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines incommensurabiles erunt. 330.B

Si tota magnitudo ex duabus cõposita incõmensurabilis sit alteri ipsarũ; eadem & reliquæ incommensurabilis est. 331.B

Si sint duæ rectę inæquales, quartæ aũt parti quadrati; qd̃ sit a mino-

minore, æquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur, deficiẽs figura quadrata, & in partes longitudine commensurabiles ipsam diuidat; Maior tã to plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quod si maior tãto plus possit quam minor, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine commensurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; In partes longitudine commensurabiles ipsam diuidet. 336.B

Si sint duæ rectæ inæquales, quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommensurabiles longitudine ipsam diuidat; Maior tanto plus poterit quam minor, quantum est quadratum rectę sibi longitudine incommensurabilis. Quod si maior tanto plus possit, quantum est quadratum rectæ sibi longitudine incommensurabilis, quartę autẽ parti quadrati quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiẽs figura quadrata; In partes longitudine incommensurabiles ipsam diuidet. 338.B

Diameter quadrati longitudine incommensurabilis est lateri. pag. 656.A. & 130.B. & 516.B

Inuentis rectis lineis lõgitudine incommensurabilibus, inuenientur & alia quam plurima magnitudines, plana scilicet, atque solida incommensurabiles inter se. pag. 519.B

COMPOSITI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide. Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide. Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

GYLINDRVS, & Conus. vide. Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide. Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, sphæram, atque aliam figuram.

Quadrilaterũ in circulo habet oppositos angulos duobus rectis æquales. 401.A

Si in quadrilatero anguli oppositi sint duobus rectis æquales; circulus circa ipsum describi potest. pag. 402. A

Quadrilateri in circulo angulus externus æqualis est ei, qui opponitur ei deinceps. 407. A

Quadrilaterũ in circulo, cuius duo latera opposita sunt parallela, & æqualia, parallelogrammum est rectangulum. 433. A

In omni triangulo, cui circulus inscribitur, duo quauis latera superant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum est rectanguli comprehensi sub recta ab angulo illis lateribus comprehenso in cauam peripherium ducta, & sub segmento eius exterior. Quod si angulus cõprehensus sit rectus, superabunt duo illa latera latus recto angulo oppositũ diametro circuli triangulo inscripti. Vel duo quauis latera superant reliquum duabus rectis tangentibus inter angulum illorum laterum, & circulum interpositis. 462. A

Si centrum circuli triangulo circũscripti cadit intra triangulum, omnes eius anguli acuti sunt: Si in vnum latus, angulus oppositus rectus est: Si denique extra vnũ latus, angulus oppositus obtusus est. 464. A

In triangulo acutangulo centrum circuli circumscripti cadit intra: In rectangulo, in latus recto angulo oppositum: In obtusangulo denique extra latus angulo obtuso oppositum. 464. A

Quadratũ circulo circumscriptum duplum est quadrati eidem circulo inscripti. 468. A

Pentagoni circulo inscripti, hoc est, æquilateri, & æquianguli, angulus quilibet continet tres quintas duorum rectorum, vel sex quintas vnius recti. 471. A

Si in circulo figura quauis æquilatera & æquiangula describatur, & ad extrema semidiametrorum excitentur perpendiculares, constituent hę perpendiculares similem figuram circulo circumscriptam. 474. A

Hexagoni circulo inscripti latus, æquale est semidiametro circuli. 479. A

Si in circulo ab eodem puncto inscribantur latera duarũ figurarum regularium; continebit arcus inter illa inclusus tot latera alterius figuræ inscribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter se differunt denominatores eorundem laterum: Figura autem inscribenda continebit tot latera, quot vnitates sunt in numero ex multiplicatione denominatorum producto. 482. A

Omnis figura æquilatera circulo inscripta, est quoque æquiangula: at non omnis figura æquilatera circulo circũscripta, æquiangula quoque est, nisi quando numerus angulorum ipsius est impar, &c. 485. A

Omnis

Omnis figura æqui angula circulo circũſcripta, eſt quoq; æquilatera: at non omnis figura æquiãgula circulo inſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus laterum &c. 488. A

Si bifariã ſectiones laterũ regularis figuræ rectis coniũgantur, inſcripta erit ſimilis figuræ, idem centrum habens. 497. A

Solum triangulum æquilaterum, quadratum, & Hexagonum æquilaterum atque æquiangulũ, ex omnibus figuris regularibus, locum replent. 499. A

In figura æquilatera, & æquiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contra, recta linea diuidens angulũ bifariam, ſecat quoque latus oppoſitum bifariam. Si vero numerus angulorum eſt par, recta linea ex quouis angulo ad oppoſitum angulũ ducta ſecat vtrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea ſecans quemuis angulum bifariam, cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam etiam diuidit. 866. A

Si baſis quadratricis intra quadratem & quadratum deſcripta ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli; eius latus, ſiue ſemidiameter quadrantis æquabitur quadranti illius circuli, &c. pagina 906. A

Quæ in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata. 625. B

Si pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint; æquiangulum erit ipſum pentagonum. 704. B

Si pentagoni æquilateri, & æqui anguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant lineæ rectæ; hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri. pag. 705. B

Recta ſubtendens vnum angulum pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela eſt oppoſito latere. pag. 706. & 841. B

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum componantur; tota recta linea extrema atque media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. 707. B

Si latus hexagoni ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum eſt latus decagoni. pag. 708. B

Si linea diuiſa extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; erit minus ſegmẽtum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius ſegmentum latus hexago

ni eiusdem circuli. 708. B

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur; pentagoni latus potest & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo descriptorum. pag. 710. B

Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni, vel alterius figuræ æquilateræ imparium laterum, diuidit & latus oppositum bifariã, & ad angulos rectos, & arcum, quem illud latus subtendit. pag. 712. B

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; Trianguli latus potẽtia triplum est eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur. 717. B

Diameter circuli potentia est sesquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo descripti. 718. B

Si in circulo triangulum æquilaterum describatur; diameter ex uno angulo ducta dimidit & angulum bifariam, & latus oppositum, ac insuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque uicissim bifariam, & ad angulos rectos secabitur a latere opposito. pag. 719. B

Sphæræ diameter potentia est sesquialtera lateris pyramidis in ea descriptæ. pag. 720. & 926. B

Diameter sphæræ potentia est quadrupla sesquialtera semidiametri circuli circa basem pyramidis in ea sphæra existentis descripti. 723. B

Perpendicularis ex cẽtro sphæræ ad basim pyramidis in ea sphæra existentis demissa, sexta pars est diametri sphæræ, & tertia pars semidiametri. 723. B

Altitudo pyramidis intra sphæram continet duas tertias partes diametri. Et diameter potentia est dupla sesquiquarta altitudinis pyramidis. 724. B

Sphęræ diameter potẽtia est dupla lateris octaedri in ea descripti. 725. & 928. B

In octaedro tres diametri se mutuo ad angulos rectos secant. pagina 726. B

Octaedrum dimiditur in duas pyramides similes & æquales; quarum basis communis quadratum lateris octaedri, altitudo vero semidiameter sphæræ vel octaedri pag. 727. & 795. B

Si tetraedrum, & octaedrũ in eadem sphæra describantur, erit tetraedri latus potentia sesquitertium lateris octaedri. pag. 728. & 749. B

Octaedri bases oppositæ sunt inter se parallelæ. 728. & 927. B

Sphæræ diameter potẽtia est tripla lateris cubi in ea descripti. 729. & 930. B

Omnes diametri cubi æquales sunt, seseq; bifariam secant in centro sphæræ. Itẽ rectæ coniungentes cẽtra basiũ oppositarũ se mutuo bifariã secat in eodẽ cẽtro 731. B

Poten-

Potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul. 732.B

Si diameter ſphæræ ſit Rationalis linea; latus Icoſaedri in ea eſt Irrationalis linea, quæ vocatur Minor. 733.B

Sphæra diameter potentia eſt quintupla ſemidiametri circuli quinque laterã Icoſaedri ambientis. pagina 738.B

Diameter ſphæræ compoſita eſt ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli. pagina 738.B

Icoſaedri latera oppoſita ſunt parallela. 739. & 931.B

Si diameter circuli ſit Rationalis linea; latus Dodecaedri in ea deſcripti eſt Irrationalis linea, q̃ vocãt Apotome. 739.B

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmẽtum eſt latus Dodecaedri eiuſdẽ ſphæræ. 746.B

Latus cubi æquale eſt rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 746.B

Si recta ſecetur extrema ac media rõne, minuſq; ſegmentũ ſit latus Dodecaedri; maius ſegmẽtũ erit latus cubi eiuſdẽ ſphæræ. 747.B

In Dodecaedro ſunt ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariã quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. 747.B

Si recta diuidẽs oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, ſecetur extrema ac media ratione; maius ſegmẽtum eſt latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 748.B

Plura corpora Regularia, quam quinque, conſtitui non poſſunt. pag. 754.B

Cubus & octaedrum: Item Icoſaedrum & Dodecaedrum, reciprocantur, quod ad numerũ baſium & angulorum attinet. Solum tetraedrum tot baſes habet, quot angulos ſolidos. 757.B

Quæ ex cẽtro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti. 761.B

Perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis eſt vtriq; rectæ ſimul, & ei, quæ ex cẽtro ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. 763.B

Latus hexagoni ad latus decagoni eiuſdem circuli eandem proportionem habet, quã recta ſubtendens angulum pentagoni, ad latus ipſius pentagoni. 765.B

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodẽ centro

tro ad latus trianguli aquilateri ducta, minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli. 766. B

Si in circulo pentagonum æqui laterum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. 767. B

Si in ſphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inſcribantur; quadratū lateris cubi, et quadratū lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pētagonū dodecaedri circūſcribentis. 768. B

Si latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media rōne; maius illius ſegmentū erit latus decagoni eiuſdē circuli. 768. B

Idem circulus comprehendit & Dodecardri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphærę inſcriptorum. pagina 769. & 940. B

Si ex centro circuli pētagonum Dodecaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehēditur, rectangulū trigeſies ſumptum Dodecaedri ſuperficiei æquale. 771. B

Si ex cētro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehēditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale. 773. B

Superficies cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri cuiuſcunque, etiamſi non deſcribantur amba figura in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ex centro pentagoni Dodecaedri in latus illud ducta contentum ad rectangulum contentū ſub latere Icoſaedri, & perpēdiculari ducta ex cētro triāguli Icoſaedri in illud latus. 774. B

Si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel octaedri, ſiue quadratum cubi, circumſcribentis perpēdicularis ducatur ad vnū latus; Erit quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei Tetraedri: In octaedro vero & cubo, duodecies ſumptum ſuperficiei octaedri, & cubi æquale. 774. B

Rectangulum contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineę ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti, æquale eſt dicto pentagono. 776. B

Rectangulum contentum ſub perpendiculari ex angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti, æquale eſt pentagono Dodecaedri eiuſdem ſphæra. 777. B

Superficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadē ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri. pag. 778. B

Si recta linea ſecetur extrema ac media rōne; erit vt recta potens id, quod a tota, & id, qđ a maiori ſegmēto, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minore ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti. 780. B

Quam proportionem habent latera cubi & Icoſaedri eiuſdem ſphæra, eandem habent latera cubi & icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum. 782. B

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit. pag. 783. B

Si planum ſecans tranſit per centrum ſphæra, fit circulus idem centrum habens cum ſphæra: Si vero non tranſit per centrum, fit circulus, cuius centrum punctū eſt, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæra ad circulum ducta. 785. B

Circuli in ſphæra æquales æqualiter diſtant a centro ſphæra: Et circuli æqualiter diſtantes a centro ſphæra, æquales ſunt. 785. B

Dodecaedrum ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum eſt, vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eadēque ſphæra. 786. B

Eadem proportio eſt lateris cubi ad latus Icoſaedri, quæ ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, & linea potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & eius ſegmentum minus; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ. pag. 788. B

Baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt baſis octaedri eiuſdem ſphæra: Superficies autem octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. 792. B

Recta ex angulo Tetraedri per cētrum ſphæra ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad baſim. 793. B

Tetraedrum ad octaedrum eiuſdem ſphæra ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente viginti ſeptē ſexageſimas quartas partes lateris Tetraedri, & ſub linea cōtinente octo nonas partes eiuſdem lateris comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæra. 797. B

Sphæra ſemidiameter potentia tripla

pla est eius perpendicularis, qua ex centro sphæra in basim octaedri eiusdē sphæra cadit. 802. B

Duplū quadrati ex diametro sphæra descripti, æquale est superficiei cubi eiusdem sphæra: perpendicularis autem a centro sphæræ in basim cubi demissa, æqualis est dimidio lateris cubi. 803. B

Solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri sphæræ dictū cubum comprehendentis, æquale est cubo. Item quod fit ex latere cubi in tertiā partem eius quadrati. 804. B

Solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscunque corporis Regularis in basim demissa, in tertiam partem superficiei ipsius corporis, æquale est proposito corpori Regulari. 804. B

Idem circulus cōprehendit & cubi quadratū, & octaedri triangulū eiusdē sphæra. 805. et 930. B

Recta coniungentes centra basium oppositarum tam in cubo, quam in octaedro, æquales sunt. 806. B

Octaedrum ad triplum Tetraedri eiusdē sphæra est, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. 807. B

Altitudo Octaedri ad altitudinē Tetraedri eiusdem sphæra est, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri: Item diameter sphæra ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. 809. B

Si recta propositia potuerit totam aliquam rectam extrema ac media ratione sectam, et maius eius segmentum: Item totam aliam similiter sectam, & minus eius segmentum; Erit maius segmentum prioris lineæ latus Icosaedri; minus autem segmentum posterioris linea latus dodecaedri eius sphæra, cuius recta oppositia diameter est. 809. B

Si latus Octaedri potuerit maius & minus segmentum recta extrema ac media ratione secta; poterit latus Icosaedri eiusdem sphæra duplum minoris segmenti. 811. B

Si recta diuisa extrema ac media ratione, cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subtendatur; erit recta, qua potentia sit subdupla eius recta subtensa, latus Octaedri eius sphæra, in qua dictum minus segmentum latus est Dodecaedri. 813. B

Si recta secetur extrema ac media ratione, & alia recta potentia huius sesquialtera sit latus Octaedri, maius segmentum erit latus Dodecaedri eiusdem cum Octaedro sphæra. 814. B

Cubus ad Octaedrum eiusdē sphæra est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrū sphæra. 815. B

Alia inuentio laterum quinq; corporum Regularium in eadem sphæra descriptorum. 817. B

Quadratum cubi ad triangulum

Tetraedri eiuſdem ſphæra eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularē ex vno angulo, trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum ductam. 822.B

Latus Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, uel altitudinis ipſius: Axis vero Tetraedri potentia ſeſquitertius eſt lateris cubi eiuſdem ſphæræ. 823.B

Diameter ſphæræ ſeſquialtera eſt axis Tetraedri illius ſphæræ. pag. 824.B

Axis Tetraedri ad latus cubi eiuſdem ſphæra eſt, vt latus Tetraedri ad perpēdicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. 825.B

Cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. 825.B

Priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo eiuſdem ſphæræ. pag. 826.B

Si in Tetraedro Octaedrum inſcribatur; Tetraedrum bifariam ſecatur tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. 829.B

Rectæ connectentes centra baſium cubi oppoſitarum ſe mutuo ſecāt & bifariam, & ad angulos rectos. 831.B

Idē eſt centrum Icoſaedri, atq; ſibi inſcripti Dodecaedri. 835.B

Si Tetraedrum Octaedro inſcribatur; erunt quatuor baſes Tetraedri octo baſibus Octaedri parallelæ, ſingulæ binis. 837.B

Item rectæ centra baſium oct aedri oppoſitarum coniungentes, ſeſquialtera eſt axis Tetraedri. 838.B

Diameter Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrū inſcribitur. 851.B

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione; minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti: Maius vero ſegmētum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti. 851.B

Latus cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, et Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti. pagina. 852.B

Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur. 852.B

Diameter Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri & cubi Icoſaedri ambientis. 854.B

Bifaria ſectiones ſex oppoſitarū laterum Icoſaedri coniungunt tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus. pag. 855.B

Si latus cubi extrema ac media ratione ſecetur; maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in eo cubo deſcripti. 855.B

Icoſaedri tam latera, q̄ triangula oppoſita ſunt parallela. 855.B

Idem

Idem eſt centrũ Icoſaedri, & octaedri in eo deſcripti. 857. B

Idem eſt centrum baſis octaedri, & baſis Icoſaedri in eo deſcripti. quod intelligendum eſt de octo baſibus Icoſaedri in octo baſibus octaedri collocatis. 861. B

Idem eſt centrum octaedri, & Icoſaedri in eo deſcripti. 862. B

Idem eſt centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. 867. B

Recta coniungens biſarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, eſtque tripla lateris cubi in pyramide deſcripti. 867. B

Idem eſt centrum pramidis, & octaedri in ea deſcripti. 868. B

Idem eſt centrum baſis pyramidis, & baſis octaedri in ea deſcripti. quod intelligendum eſt de quatuor baſibus octaedri in quatuor baſibus pyramidis iacentibus. pag. 868. B

Qua ſolida Regularia, in quibus proprie deſcribantur, & qua nõ: Et alia de hac inſcriptione mutua. 871. B

Si in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum; erit propertio Dodecaedri exterioris ad interius Dodecaedrum triplicata proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus recta linea extrema ac media ratione diuiſa. 874. B

Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur recta ſecantes oppoſita latera extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſim Icoſaedri in ea pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo aquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa biſariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri productæ. pag. 876. B

Latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius ſegmentum eſt recta diuiſa extrema ac media ratione, qua ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. 878. B

Minus ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti, potentia duplum eſt lateris Icoſaedri in ea deſcripti. pag. 879. B

Latus cubi potentia dimidium eſt lateris pyramidis in eo deſcripti: Latus vero pyramidis duplum eſt lõgitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri. 880. B

Latus Dodecaedri maius ſegmentum eſt recta, qua potentia dimidium poteſt lateris pyramidis ſibi inſcripta. 881. B

Si in cubo deſcribaẽ & Icoſaedrũ, & Dodecaedrũ; Latus Icoſaedri mediũ proportionale erit inter

latus cubi, & latus Dodecaedri pag. 881. B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. 882. B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. pagina 882. B

Si in octaedro Icoſaedrum deſcribatur; erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi. 883. B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti. 883. B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterũ recta extrema ac media ratione ſecta, cuius maius ſegmẽtum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti. pag. 884. B

Latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. 885. B

Latus cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus recta extrema ac media ratione ſecta. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ linea. 885. B

Latus octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcripta pyramidis. pag. 886. B

Si ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertiũ quadrati lateris Icoſaedri. pag. 887. B

Diameter Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in eo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. 889. B

Latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt recta extrema ac media ratione ſecta, quæ duplum poteſt lateris Icoſaedri in eo deſcripti. 889. B

Diameter Icoſaedri poteſt & ſuæ ſius lateris ſeſquitertium, & lateris pyramidis in eo deſcripta ſeſquialterum. 890. B

Latus Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extrema ac media ratione ſectæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſita. 891. B

Si dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſecetur, minusque eius ſegmentum, a toto latere Icoſaedri detrahatur; a reliqua quoq; recta pars rurſum tertia dematur; relinquetur

quetur latus Dodecaedri in Icosaedro descripti. 892.B
Cubus sibi inscriptæ pyramidis triplus est. 894.B
Pyramis sibi inscripti octaedri dupla est. 895.B
Cubus sibi inscripti octaedri sextupla est. 896.B
Octaedrum sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est. pag. 897.B
Idem est centrum Octaedri, atque cubi in eo descripti. 899.B
Octaedrum ad sibi inscriptum cubum est, vt quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi in eo descripti. 899.B
Octaedrum sibi inscriptæ pyramidis tredecuplum sesquialterum est. 900.B
Pyramis sibi inscripti cubi noncupla est. 900.B
Cubus ad cubum descriptum in pyramide, quæ in priori cubo describitur, est vt 27. ad 1. pag. 902.B
Octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet, quam duæ bases Octaedri ad quinque bases Icosaedri. 902.B
Icosaedrum ad sibi inscriptum Dodecaedrum proportionem habet compositam ex proportione lateris Icosaedri ad latus cubi in eadem cum Icosaedro sphæra descripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icosaedri ad rectam centra basium Icosaedri oppositarũ coniungentem. 905.B
Dodecaedrum excedit cubum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius quidem basis a quadrato cubi deficit rectangulo contento sub latere cubi, tertiaque parte minoris segmenti eiusdem lateris cubi: at vero altitudo ab altitudine, siue latere cubi, minore segmento eius linea, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit. 906.B
Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi est æqualis, latitudo autem tertia parti minoris segmenti eiusdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore segmento eius linea, quæ dimidiati lateris cubi minus segmentum existit: alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis est, altitudo autem minus segmentum eius linea, quæ dimidiati lateris cubi segmentum minus existit; ita vt amborum altitudines simul altitudini, siue lateri cubi sint æquales. 911.B
Dodecaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum proportionem habet compositam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum

cubo deſcripti. 912.B
Dodecaedrum pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti aequalis eſt, latitudo vero tertia parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique a latere eiuſdē cubi deſcit minore ſegmento eius linea, qua dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit: alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi praedicti eſt aequalis, altitudo vero minus ſegmentū eius linea, qua dimidiati lateris cubi eiuſde ſegmentū minus exiſtit, ita vt amborū altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdē cubi ſint aequales. 913. B
Octaedrum excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrū parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratū lateris Icoſaedri, altitudo vero maius ſegmētū ſemidiametri octaedri extrema ac media rōne ſecta. 914. B
Pyramis excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratū lateris Icoſaedri, altitudo vero recta bifarias ſectiones oppoſitorum laterū Icoſaedri coniungens. 916. B
Si in ſphaera ſint duo circuli paralleli, & aequales, in quibus ducta ſint duo recta parallela & aequales, ad eaſdem partes cētrorum; recta harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, aequales quoque & parallela ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares. 920. B
Si in ſphaera ſint duo circuli paralleli & aequales, in quibus ducte ſint duae rectae parallelae & aequales, non ad eaſdem partes centrorum; rectae harum parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphaerae ſe interſecant, ac pronde diametri ſphaerae erunt, & inter ſe aequales: rectae vero earundem parallelarum extrema pūcta ad eaſdem partes connectentes, & aequales ac parallelę inter ſe ſūt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt. 921. B
Si in ſphaera ſint duae rectae parallelae; rectę earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, aequales inter ſe erunt. Et ſi parallelae fuerint aequales, coniungentes non ſolum aequales, ſed & parallelae erūt, rectoſque cum ipſis angulos conficient. 923. B
Sphęrę diameter ad latus Icoſaedri in ea deſcripti eſt, vt latus pentagoni ad latus decagoni eiuſdē circuli cuiuslibet. 935. B
Latus Icoſaedri maius eſt ſemidiametro ſphaerae, in qua deſcribitur. 935. B
Sphaerae diameter potentia eſt tripla lateris pentagoni deſcripti in circulo, qui per tres angulos Icoſaedri eius ſphaeram incedit, parallelusque eſt vni triangulo Icoſaedri. 935. B

Idem circuli sphæra sustinent & angulos Icosaedri, & angulos Dodecaedri in ea sphæra adscriptorum. 940.B

Si quadratum, & triangulũ æqualterum æqualia habeant latera; erũt viginti triangula simul maiora, quam octo quadrata simul. 941.B

Octo quadrata ex semidiametro sphæra descripta, æqualia sunt superficiei cubi in ea sphæra descripti. 942.B

Si octaedrũ, cubus, & Icosaedrum in eadem sphæra describantur; erit perpẽdicularis ex cẽtro sphæra ad vnam basim Icosaedri ducta maior perpendiculari ex eodem centro sphæra ad vnam basim octaedri, & cubi ducta. pagina. 943.B

Icosaedri superficies maior est superficie cubi in eadem sphæra descripti. 943.B

Dodecaedrum Icosaedro maius est. pag. 944.B

Icosaedrum cubo maius est. pagina. 944.B

Cubus Octaedro maior est. 945.B

Octaedrum Tetraedro maius est. pag. 945.B

Superficies Dodecaedri superficiem Icosaedri superat, & hæc superficiem cubi, & hæc superficiem Octaedri, atque hęc denique superficiem Tetraedri. 946.B

Latus Tetraedri maius est latere Octaedri, & hoc maius latere cubi, & hoc maius latere Icosaedri, atque hoc denique maius latere Dodecaedri. 749.B

Si corpora regularia sint Isoperimetra; illud, quod plures habet bases, maius est: Vt Icosaedrũ maius Dodecaedro, & hoc maius Octaedro, & hoc maius Cubo, atque hoc denique maius Tetraedro. 947.B

Omnes inclinationes diuarum basium cuiusque corporis Regularis æquales sunt. 948.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem est altitudo, ita se habent inter se, vt bases. 752.A

Triangula & parallelogramma, qua ita se habent inter se, vt bases, æquales habent altitudines, vel eandem. 754.A

Triangula & parallelogramma, quorum æquales sunt bases, vel eadem, ita se habent inter se, vt altitudines. 754.A

Triangula & parallelogramma, qua ita se habent inter se, vt altitudines, æquales habent bases, si vnam & eandem non habeant. 755.A

Si ad vnũ triãguli latus parallela ducta sit, hęc secabit duo latera reliqua ꝓportionaliter. Et si duo latera secta sint ꝓportionaliter; recta linea sectiones iungens,

iungẽs, parallela erit reliquo lateri. 756.A
Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secãs autem angulum recta linea secet & basim: basis segmenta ita se habebunt inter se, vt reliqua duo latera. Et si basis segmenta ita se habeant, vt reliqua duo latera: recta a vertice ad sectionẽ ducta, bifariam secabit angulum trianguli. 758.A
Aequiangulorum triangulorum proportionalia sũt latera circa æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur. pag. 759.A
Recta linea vni lateri trianguli parallela aufert triangulum toti triangulo simile. 760.A
Si ex duobus punctis rectę, quorum alterum sit extremum, alterum vero intra lineã, duæ parallelæ inter se educantur ad easdem partes, ita vt habeant eandem proportionem, quam recta inter ipsas, & alterum punctum extremum inclusæ: Recta coniungẽs extremum vnius earum, cum extremo prioris lineæ transibit per extremum alterius lineæ. 761.A
Si in triangulo parallela vni lateri agatur, recta ex angulo opposito ducta secat parallelam, & latus illud in easdem rationes. pag. 762.A
Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, & æquales habebũt eos angulos, sub quibus homologa latera subtẽduntur. 763.A
Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, æqualesque habebunt angulos, sub quibus latera homologa subtenduntur. pag. 764.A
Si duo triãgula vnum angulum vni angulo æqualem, circa autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero simul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia sunt latera. 765.A
Si in triangulo rectãgulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit: quę adperpẽdicularem triangula tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt. 767.A
Item tam perpẽdicularis est media proportionalis inter duo basis segmenta, quam vtrumlibet laterum circa rectum angulum inter totam basim, & segmẽtum basis ei lateri adiacens. 768.A
Si duæ rectæ secentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermedia sectiones in eadem proportione cum quibuslibet

bet segmentis duobus. 774.A

Si recta in quotcunque partes Arithmetice proportionales secta sit, & alia recta secetur in totidem partes, quæ easdem inter se, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoq; partes huius lineæ Arithmetice proportionales. 775.A

Si dua recta inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoq; excessus priorum ad excessum posteriorum, vt priorum vna ad vnam posteriorum. 776.A

Recta a quouis puncto diametri ducta perpendicularis vsq; ad circumferentiam semicirculi, media proportionalis est inter diametri segmenta. 782.A

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera circa æquales angulos. Et quorum reciproca sunt latera circum æquales angulos, illa sunt æqualia. 784.A

Æqualium & vnum vni æqualē habentium angulum, triangulorum, reciproca sunt latera circum æquales angulos. Et quorum reciproca sunt latera circa æquales angulos, illa sunt æqualia. *785.A*

Si quatuor rectę proportionales sint; rectangulū sub extremis æquale est rectangulo sub medijs. Et si rectangulum sub extremis æquale sit rectangulo sub medijs, illę quatuor rectæ proportionales sunt. 786.A

Idem eueniet, si parallelogramma non sint rectangula, sed tantum æquiangula. 787.A

Si tres rectæ sint proportionales; rectāgulum sub extremis quadrato mediæ æquale est. Et si rectangulū sub extremis quadrato mediæ sit æquale; illæ tres proportionales sunt. pag. 788.A

Recta, cuius quadratum æquale est rectangulo sub duabus rectis quibuscunque, media proportionalis est inter eas duas rectas. pag. 788.A

Idem eueniet, si parallelogramma non sint rectangula, æquiangula tamen. 789.A

Triangula similia inter se sunt in duplicata ratione homologorum laterum. 814.A

Si tres rectæ sint proportionales; vt est prima ad tertiā, ita est triangulum super primam ad triangulum super secundā simile, similiterque descriptū pag. 815.A

Similia polygona in similia triāgula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habēt rationem homologorum laterum. 817.A

Si tres rectæ sint proportionales; vt est prima ad tertiam,

ita

ita eſt polygonum ſuper primam, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum. 819.A

Similia polygona æquilatera, & æquiangula, diuiduntur in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis rectis a centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos. 821.A

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. pag. 823.A

Si quatuor rectæ ſint proportionales: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia ſunt. Et ſi a rectis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia ſint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt. 823.A

Æqualia rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, ſunt ſuper æquales rectas. 825.A

Si tres rectæ ſint proportionales; erũt quoque rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta ab eis proportionalia, &c. 826.A

Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent ex lateribus compoſitam. 837.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia proportionem habẽt ex lateribus circa æqualẽ angulũ cõpoſitã. 830.A

Triangula vnũ angulũ vni angulo æqualẽ habentia, eandẽ proportionem habent, quam rectangula ſub lateribus circa angulũ æqualem contenta. 832.A

Parallelogramma æquiangula eandem rationem habent, quam rectangula ſub lateribus circa angulũ æqualem contenta. 833.A

Triangula & parallelogramma inter ſe rationem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. pagina. 833.A

In parallelogrammo parallelogramma circa diametrum, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia. pag. 835.A

Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare. 837.A

Si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit ſimile toti, & ſimiliter poſitum, cõmunem cum eo habens angulum; hoc circa eandem cum toto diametrum conſiſtit. pag. 840.A

Idem eueniet, ſi angulũ habeant non communem. 842.A

Parallelogrammorum ſecundũ eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis ei, qđ a dimidia deſcribitur; maximum id eſt, quod ad dimidiũ applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui. pag. 844.A

In rectangulis triangulis, figura quæuis

quæuis a latere rectum angulum ſubtendẽte deſcripta æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ a lateribus rectum angulũ cõtinẽtibus deſcribũtur. 852.A

Si figura, q̃ ab vno latere triãguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ a reliquis duobus lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis: angulus ſub reliquis his lateribus comprehenſus, rectus eſt. 854.A

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulũ compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint parallela; tũ reliqua latera in rectam lineam collocata reperientur. 855.A

In circulis æqualibus, anguli eãdem habent rationem cũ peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſup vero & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt. 856.A

In circulis æqualibus, eſt ſector ad ſectorẽ, vt angulus ad angulum in centro. 859.A

Vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad totã circunferentiã. Et cõtra. 859.A

Similia circulorum ſegmenta eandem habent proportionem ad totas circumferentias. 861.A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Recta ex centro ducta abſcindunt arcus ſimiles. pag. 405. & 862.A

Si in circulo duæ rectæ ſe mutuo ſecent: erunt ſegmenta vnius ſegmẽtis alterius reciproca. 875.A

Si extra circulum ſumatur pũctũ aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ circulum ſecantes; erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto recta ducatur circulum tangens; erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecet, et eius ſegmẽtũ exterius. 875.A

Si duæ rectæ ſe mutuo ſecent, & a duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarũ vna inter vnum terminorum, & ſectionem, altera vero inter ſectionẽ, & prioris lineæ aſſumptã perpendicularẽ interijcitur, alijs duabus eodem modo incluſis reciprocæ. 876.A

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelę ſe mutuo ſecantes, diuidũt parallelogrammum in quatuor parallelogrãma proportionalia. 877.A

Omne quadrilaterũ a duab. diametris diuiditur in quatuor triãgula proportionalia. 877.A

In triãgulo rectãgulo, in quo perpẽdicularis ab angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione; tria latera ſunt continue proportionalia. Et ſi tria latera

Latera trianguli rectanguli sint continue proportionalia; perpendicularis ad basim ex angulo recto demissa, secat basim extrema ac media ratione. 878.A

Si ex centro per quauis puncta linea Quadratricis ducantur recta vsque ad peripheriam quadrantis ex eodem centro descripti, & ex eisdem punctis ad basim demittantur perpendiculares, & alia recta eidem basi parallela: Erunt arcus quadrantis inter semidiametros interiecti, perpendicularibus, vel segmẽtis semidiametri intra parallelas positis, proportionales. 898.A

Si quadrãtis & Quadratricis idẽ centrum sit; erunt arcus quadrantis, semidiameter, & basis Quadratricis, continue proportionales. 904.A

Circumferentia circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, quæ sit. 907.A

Si sint duæ rectæ, erit vt prima ad secundam, ita quadratum primæ ad rectangulum sub illis duabus contentum. Et vt secunda ad primam, ita rectãgulum sub ipsis ad quadratum primæ. 344.B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad secundam, ita rectangulum sub ipsis ad quadratum secundæ. 375.B

Si sint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur. 377.B

Si recta linea secetur in partes duas inæquales; erit vt altera pars ad alteram, ita rectãgulum sub tota & priore parte assumpta, ad rectangulum sub tota, & altera parte contentum. 380.B

Si recta sit secta vtcunque; erit rectangulum sub partibus cõtentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum sub tota, & vna parte contẽtum, medio proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratũ dictæ partis. 416.B

Si duæ rectæ parallelis planis secentur; In easdẽ rationes secabuntur. 568.B

Si solidum parallelepipedũ plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum. 585.B

Idem conuenit in omne prisma. pag. 587.B

Si prisma quodcunque secetur plano oppositis planis æquidistante, sectio est figura æqualis, & similis planis oppositis. 590.B

Solida parallelepipeda sub eadẽ altitudine; inter se sunt, vt bases. 602.B

Si parallelepipeda inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 603.B

Similia solida parallelepipeda, inter

inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterũ. pag. 603.B

Si sint quatuor rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita est parallelepipedum super primá descriptum, ad parallelepipedum similé, similiterque descriptum super secundam. 605.B

Aequalium solidorum parallelepipedorum bases & altitudines reciprocãtur. Et quorum solidorum parallelepipedorũ bases & altitudines reciprocantur; illa sunt æqualia. pag. 605.B

Hæc quinque, quæ proxime de parallelepipedis dicta sunt, conueniunt etiam prismatis, in quibus duo plana opposita sunt triãgula. 608.B

Si tres rectæ sint proportionales; quod ex illis fit solidum parallelepipedum, æquale est descripto a media linea solido parallelepipedo, qđ æquilaterum quidem sit, æquiangulum vero prædicto. 612.B

Si *parallelepipedum ex tribus rectis descriptum, æquale sit parallelepipedo sibi æquiangulo a media recta descripto; erunt tres rectæ continue proportionales. pag. 613.B*

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis & similia, & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelepipeda, quę & similia, & similiter describuntur, fuerint proportionalia; & ipsæ rectæ lineę proportionales erunt. 614.B

Eodem modo si fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda similia, similiterque descripta ex eis, proportionalia, etc. pag. 616.B

Idem quoque quadrat in prismatis triangularium planorum oppositorum ex quatuor rectis, vel tribus, continue proportionalibus descriptis, si similia, similiterque posita sint. 616.B

Circuli inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. 626.B

Circulus ad circulum est, vt polygonum in illo descriptũ ad polygonum simile in hoc descriptum. 629.B

Sub eadem altitudine existẽtes pyramides, & triangulares habentes bases; inter se sunt, vt bases. 635.B

Si pyramides triangulares inter se sint, vt bases; ipsæ erunt sub eadem altitudine. 637.B

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & polygonas habentes bases, inter se sunt, vt bases. 638.B

Idem verum est de pyramidibus eiusdem altitudinis, quarum vna basim habet plurium angulorum, quam altera. 639.B

Pyra-

Pyramides quarumlibet basium, quæ inter se sunt, vt bases; eandem habent altitudinẽ. 641. B
Pyramis quælibet tertiæ pars est prismatis, quod eandem cum illa habet & basim, & altitudinem. Siue prisma quod libet triplum est pyramidis, quæ eandem cum ipso habet & basim & altitudinẽ. 642. B
Eodem modo pyramis tertia pars est prismatis habentis basem basi, & altitudinem altitudini æqualem. 644. B
Prismata eiusdem altitudinis super quascunque bases, inter se sunt, vt bases. 644. B
Si prismata quarumcũque basium inter se sint, vt bases; ipsa erunt sub eadem altitudine. 645. B
Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de ijs, quę habent plana opposita basibus æqualia, & similia. 645. B
Similes pyramides, quæ triangulares habent bases, in triplicata sunt homologorũ laterum ratione. 647. B
Similes pyramides, quarum bases plura latera, quã tria continent, habent proportionem homologorum laterũ triplicatam. 648. B
Similia prismata triplicatam proportionem habent laterum homologorum. 649. B
Pyramides multangulæ similes diuiduntur in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. 651. B
Prismata multangula similia diuiduntur in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. pag. 651. B
Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habẽtium reciprocantur bases, & altitudines; illæ sũt æquales. 651. B
Æqualium pyramidum, quarum bases non sunt triangulares, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases non habentium reciprocantur bases & altitudines, illa sunt æquales. 652. B
Idẽ conuenit prismatibus. 654. B
Sub eadẽ altitudine existẽtes coni & cylindri, inter se sunt, vt bases. 658. B
Atque hoc verum est, siue coni & cylindri recti sint, siue scaleni. pag. 661. B
Si coni & cylindri quicunque inter se sint, vt bases, ipsi sub eadem altitudine erunt. 661. B
Coni & cylindri similes, in triplicata ratione sunt diametrorũ, quæ in basibus. 662. B
Idem hoc locum habet in conis & cylindris scalenis. 665. B
Si cylindrus plano secetur aduersus planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 667. B

Idem intelligatur de cyclindro scaleno. 668.B
Super æqualibus basibus existentes coni, & cylindri, inter se sunt vt altitudines. 668.B
Idem conuenit conis & cylindris scalenis. 669.B
Item prismatis, parallelepipedis, & pyramidibus super æquales bases constitutis. 670.B
Coni *et cylindri tã recti, q̃ scaleni: Itẽ prismata, parallelepipeda, & pyramides, proportionẽ habẽtes eãdem, quam altitudines, bases habebunt æquales.* 672.B
Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines. Et quorum conorum & cylindrorũ reciprocantur bases & altitudines, illi sunt æquales. 672.B
Idem conuenit conis & cylindris scalenis. 674.B
Sphęræ inter se sũt in triplicata rõne suarũ diametrorũ. 685.B
Ex quo fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum, ad polyedrum simile in hac descriptũ. 688.B
Si recta linea secũdũ extremã & mediam rationẽ secetur; maius segmẽtũ assumẽs dimidiã totius, quintuplũ potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati. 689.B
Si recta linea suijpsius segmenti quintuplũ possit; Duplæ prædictũ segmẽti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ. 691.B
Si recta linea secũdum extremã & mediam rationem secetur; minus segmẽtum assumens dimidiã maioris segmenti, quintuplum potest eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati. 693.B
Si recta inæqualiter secetur, & minus segmentũ assumens dimidiũ maioris segmẽti quintuplũ possit eius, quod a dimidia maioris segmenti describitur, quadrati: Recta illa linea secta erit extrema & media ratione. 695.B
Si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sũt eius, quod a maiore segmento describitur, quadrati. 696.B
Si recta inæqualiter secetur, sitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti: Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur. 697.B
Si recta secũdũ extremã et mediã rationem secetur, tota linea assumens minus segmentũ, quintuplũ põt eius, q̃d a maiori segmẽto describitur, quadrati. Et si recta inæqualiter secetur, totaq; assumens minus segmentum possit quintuplum eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati; Recta illa secundũ extremã & mediã rationẽ secta est. 698.B

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturq; ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quę a principio, recta linea. 699.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmẽtum minus; erit maius ſegmentum ſectĩ extrema ac media ratione, et maius ſegmẽtum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat. 700.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti; erit quoq; dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ. 701.B

Si ad rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectã deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 722.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione ſecẽtur; ipſę ſimiliter ſecabuntur, in eaſdẽ ſcilicet proportiones. 763.B

Si ſint quatuor rectæ continue proportionales, necnon & aliæ quatuor, ita vt eadem ſit antecedẽs omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata. 819.B

Si duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmẽtum, alterius vero minus ſit propè angulum ab ipſis comprehenſum; recta connectens puncta ſectionum duplum poteſt minoris ſegmenti. 861.B

Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur a recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione. 875.B

FIGVRAE planę quadrilateræ. vide, Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

IRRA-

IRRATIONALES magnitudines. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Trian gulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES com mensurabiles, & incommensu rabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES pro portionales in communi.

Si sint tres recta Arithmetice proportionales: rectangulum sub extremis, una cum quadrato excessus, æquale erit quadrato lineæ mediæ. 271. A

Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmeticæ, Geometricæ, atque Harmonicæ, siue Musicæ, proprietates variæ. a 505. *vsque ad* 632.

Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum aque multiplicia definierit. 643. A

Si sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinũ æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tã multiplices erunt & omnes omnium. 675. A

Si prima secũdę æque fuerit multiplex, atq; tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ: erit & composita prima cum quinta, secũdæ æque multiplex, atque tertia cum sexta quartæ. 676. A

Idem sequitur, si prima & tertia, æquales sint secundæ & quartę; at quinta & sexta, æque multiplices secundæ & quartę: Vel prima et tertia, æque multiplices secundę & quartę; at quinta & sexta, æquales secundæ ac quartæ: Vel denique si tam prima & tertia, quam quinta ac sexta, æquales sint secundæ ac quartæ. pag. 677. A

Si sit prima secũdæ æque multiplex, atq; tertia quartæ: sumãtur autẽ æque multiplices primæ ac tertiæ: Erit & ex æquo, sumptarum vtraque vtriusq; æque multiplex, altera quidę

secundæ, altera autem quartæ. 678.A
Si prima ad secundã habeat eandẽ rationem, quam tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices secundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebũt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint. pag. 679.A
Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales sunt. 681.A
Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 683.A
Si duæ magnitudines duarũ magnitudinum sint æque multiplices, & detractæ quædã sint earundem æque multiplices: Et reliquæ eisdem aut æquales sunt, aut æque ipsarũ multiplices. 685.A
Æquales ad eãdem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. 687.A
Eodem modo, æquales ad æquales eandẽ habent rationem. 688.A
Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorẽ rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorẽ. 688.A
Quæ ad eandem, eandẽ habent rationem, æquales sunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoque sunt. 691.A
Ad eandem magnitudinẽ rationẽ habentiũ, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est. 692.A
Quæ eidẽ sunt eẽdẽ rationes, & inter se sunt eædem. 693.A
Quæ eisdem sunt eadẽ rationes, & inter se sunt eadem. 694.A
Si sint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnã consequẽtiũ, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes cõsequentes. 695.A
Si prima ad secundam, eandẽ habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam, tertia vero ad quartam maiorem rationẽ habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, maiorem rationem habebit, quã quinta ad sextam. 696.A
Si prima ad secundã, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, minorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoque ad secundam, minorẽ rationem habebit quam quinta ad sextã. 697.A
Si prima ad secundam, maiorẽ habuerit rationem, quã tertia ad quar-

quartam, tertia itē ad quartā, maiorē habuerit, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, maiorem habebit, quā quinta ad sextam. Quod si prima ad secundam, minorem habuerit rationem, quā tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorē, quam quinta ad sextam: Prima quoq; ad secundam, minorem rationē habebit, quā quinta ad sextam. 697.A

Si prima ad secundā sit, vt tertia ad quartam; sit autem prima maior, quam tertia: erit & secūda maior quam quarta. Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 698.A

Eodē modo, si secūda maior fuerit quā quarta; erit et prima maior quā tertia: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 699.A

Partes cū pariter multiplicibus in eadē sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ita sumantur. 700.A

Magnitudines quatuor proportionales, vicissim quoq; proportionales sunt. 701.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales, sit aūt prima maior q̄ secunda: erit quoq; tertia maior q̄ quarta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 702.A

Si compositæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoque diuisæ proportionales erunt. 703.A

Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoq; cōpositę proportionales erunt. 705.A

Si sit, vt totum ad totū, ita ablatum ad ablatum: erit quoque reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 708.A

Si sint quatuor magnitudines proportionales; hæ quoque per conuersionem rationis proportionales erunt. 709.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadē ratione sumantur; sit autem ex æquo prima maior, quam tertia; erit & quarta maior quā sexta; Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 710.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadem ratione sumantur, fueritq; perturbata earum proportio: ex æquo aūt prima maior fuerit q̄ tertia: Erit & quarta maior quā sexta: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. 711.A

Si sint quotcūq; magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, q̄ binæ in eadē rōne sumātur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 713.A

Si sit prima ad secundā, vt tertia ad quartā: habebūt aquemultiplices primę ac tertię ad secūdā & quartam, eādem rationem: Itē aquemultiplices secunda & quarta ad primā ac tertiā. Et contra, eandem rationem habebūt secunda & quarta ad aquemultiplices prima ac tertię: Itē

prima ac tertia, ad æque multiplices ſecunda & quartę. 715. A

Si ſint tres magnitudines, alięq; ipſis æquales numero, quę binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 716. A

Si ſit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam; Item quinta ad ſecũdam, vt ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta ad ſecũdam erit, vt compoſita tertia cum ſexta ad quartam. 717. A

Si duæ magnitudines ad duas eandem habeant rationem, & detracta ex prioribus ad eaſdẽ poſteriores eandem quoque habeãt rationem: Et reliqua ad eaſdem poſteriores eandem rationem habebunt. 718. A

Si quatuor magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 719. A

Si tres magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima maiores erũt, quam dupla reliqua. pag. 720. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationẽ, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecũda ad primam, minorem rationẽ, quã quarta ad tertiam. pag. 721. A

Si prima ad ſecundã habeat minorẽ proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecũda ad primã, maiorẽ rẽm, quã quarta ad tertiam. 721. A

Si prima ad ſecundã habeat maiorem rationẽ, quã tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiã, maiorẽ rationem, quã ſecunda ad quartã. 722. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, minorem rationem, quam ſecunda ad quartam. 722. A

Si prima ad ſecundã habeat maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem rationem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 723. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam minorem rationem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 724. A

Si compoſita prima cum ſecũda ad ſecundam, maiorem habeat rationem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam. pag. 724. A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam minorem rationẽ habeat, quam tertia cũ quarta ad quartam

tam: habebit quoque dividendo prima ad secũdam minorem rationem, quam tertia ad quartam. 725.A

Si compositæ prima cum secũda ad secundam habeat maiorẽ rationem, quam compositæ tertiæ cũ quarta ad quartã: habebit per conuersionem rationis, prima cũ secunda ad primam, minorem rationem, quam tertia cũ quarta ad tertiam. 726.A

Si prima cum secunda ad secundam, minorem habeat rationẽ, quam tertia cũ quarta ad quartam: habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, maiorem rationem, quam tertia & quarta ad tertiam. 726.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam secunda posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam. pag. 727.A

Idem eueniet; si proportio prima ad secundam eadem fuerit, quæ prima ad secundam; at secunda ad tertiam maior, quam secunda ad tertiam: Vel contra, si proportio prima ad secundam fuerit maior, quam prima ad secundam; at secunda ad tertiã eadem, quæ secũda ad tertiam. pag. 728.A

Quod si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint: erit quoque ex æqualitate minor proportio prima ad tertiam, quam prima ad tertiam. 729.A

Idem eueniet, si proportio prima ad secundam fuerit eadem, quæ prima ad secundam; at secunda ad tertiam minor, quam secunda ad tertiam: Vel contra, si proportio prima ad secundam fuerit minor, quam prima ad secundam; at proportio secundæ ad tertiam eadem, quæ secunda ad tertiam. 729.A

Quod si plures sint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; siue vna tantum maior, quam vna, vel duæ, &c. Erit maior vel minor proportio prima ad vltimam in vno ordine, quam prima ad vltimam in alio ordine. 729.A

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam; Item secunda priorum ad tertiam maior, quam prima posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate; maior proportio prima priorum ad tertiam, quã

prima posteriorum ad tertiam. pag. 730. A

Idem eueniet, si proportio prima priorum ad secundam sit, quæ secũda posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam maior, quam prima priorum ad secundam: Vel contra, ratio primæ priorum ad secundam maior, quam secunda posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam eadem, quæ prima posteriorum ad secundã. pag. 731. A

Quod si in primis magnitudinibus aliqua proportiones, vel omnes sint minores; erit minor proportio prima ad tertiam, quam prima ad tertiam. 831. A

Quod si plures sint magnitudines quam tres in quolibet ordine: erit quoque maior vel minor proportio prima ad vltimam, quam prima ad vltimam. pag. 731. A

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quam totius ad totum. 731. A

Si fuerit minor ratio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quam totius ad totum. 732. A

Si sint quotcunque magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque maior ratio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum. 733. A

Propositis quotcunque magnitudinibus, proportio prima ad vltimã cõponitur ex omnibus proportionibus intermedijs, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 742. A

Si quatuor magnitudines sint Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; hæ vicissim quoque erũt Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. pagina 458. B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut compositus

positus ex integro & fracto, in se multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. pag. 658.A

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 240.B

Numerator cuiuslibet minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia. pag. 241.B

Minutia qualibet, pars est numeratoris a denominatore denominata. 242.B

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores. pag. 243.B

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem posterioris, & posterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad posteriorem, vt prior numerus productus ad posteriorem. pag. 244.B

Integrum ad summam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad summam duorũ productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in posterioris denominatorem, alter vero ex numeratore posterioris in denominatorem prioris gignitur. 245.B

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad posteriorem, ita posterioris denominator ad denominatorem prioris. 246.B

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionẽ, æquales sunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eãdem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior est: Et quæ maior est, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. pag. 247.B

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorẽ proportionem habet, quam denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionẽ quam denominator. 248.B

Minutia minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur. 251.B

Duæ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: & maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. pag. 255.B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia; cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens. 258.B

NVMERI proportionales in communi.

Propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiã multiplicationem: si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. pag. 650.A

Propositis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; si sumantur æque multiplices primi ac tertij, item æque multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 651.A

Propositis quatuor numeris, sumptisque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationẽ; si multiplex primi existat maior, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoque sit necesse est, quam multiplex quarti; Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor: Erit eadem proportio primi ad secundum, quæ tertij ad quartum. 654.A

Propositis quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus, item secundi & quarti æque multiplicibus; si quando contingat, multiplicẽ primi maiorẽ esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij nõ maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. 655.A

Datis tribus terminis Geometrice proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo et tertio semel; ac tertius semel, sunt etiã

Geome-

Geometrice proportionales. pagina 806. A

Datis tribus terminis siue aqualibus, siue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa ex primo, secundo, & tertio semel conflata; ac denique tertius semel, sunt Arithmetice proportionales. 808. A

Datis tribus terminis siue aqualibus, siue inaqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex secundo ter, & tertio semel; ac summa conflata ex secundo bis, & tertio semel; & denique summa ex secundo semel, & tertio semel coaceruata, Harmonice proportionales sunt. 809. A

Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita se habet ad alterutrũ multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem. 12. B

Numerus ex diuisione duorum numerorum procreatus ita se habet ad vnitatem, vt diuisus numerus ad diuidentem. 13. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et simul vterque vtriusq; simul eadẽ pars erit, quæ vnus vnius. 40. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 41. B

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et simul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus simul, vtriusque numeri simul eadem pars erit, quæ vnitas numeri. 41. B

Si sint quotcunque numeri quotcũque numerorum aqualium numero, singuli singulorum, eadem pars: Et omnes omniũ simul eadẽ pars erunt, quæ vnus vnius. pag. 42. B

Idẽ numeris fractis cõuenit. 42. B

Si sint quotcũque numeri quotcunque numerorum aqualium numero, singuli singulorum, aque multiplices: quam multiplex est vnius vnus numerus, tam multiplices erũt & omnes omnium. pag. 43. B

Idem verum est de numeris fractis. 44. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et simul vterq; vtriusque simul eædem partes erit, quæ vnus vnius. 44. B

Idem locum habet in numeris fractis. 45. B

Si sint quotcũque numeri quotcunque numerorum, singuli singulorum, eadẽ partes: Et omnes omnium simul eadem partes erũt, quæ vnus vnius. 45. B

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit qualis totus totius. 45. B

Idem locum habet in numeris fractis. 46. B

Si numerus numeri æque fuerit

multi-

multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 46.B
Idem verum est de numeris fractis pag. 46.B
Si numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. pag. 47.B
Idem in fractis numeris verum est. 48.B
Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti. 49. B
In fractis numeris idem cõcludes. pag. 50.B
Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars. 50.B
Numeris fractis hoc idem conuenit. 51.B
Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 51.B
Idem in fractis numeris verum est. 52.B
Si primus secundũ, & tertius quartum, æqualiter contineat, eandemque insuper partem, aut partes; erit secundus primi, & quartus tertij eadem partes. Et si secundus primi, & quartus tertij eadem partes sit; continebit primus secundum, & tertius quartum æqualiter, eandemque insuper partẽ, aut partes. 53.B
Idẽ verum est in numeris fractis. pag. 63.B
Si sint quotcunque numeri proportionales; erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedẽtes ad omnes cõsequentes. 56. B
Verum quoque hoc est in numeris fractis. 58.B
Si quatuor numeri proportionales sint; Et vicissim proportionales erunt. 58.B
In fractis idem cernitur. 60.B
Si sint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini sumãtur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erũt. pag. 61.B
Idem in numeris fractis verum est. 62.B
Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem sunt; inter se quoque sunt eadem. pag. 62.B
Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum. 63.B
Si numerus duos numeros multipli-

tiplicans fecerit aliquos: geniti ex ipſis eãdem rationem habebunt, quam multiplicati. 66. B

In fractis numeris idem verum eſt. 67. B

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis eandem rationẽ habebunt, quam multiplicantes. 67. B

In fractis idem habet locũ. 67. B

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri eaſdem rationes, quas numeri multiplicantes. 68. B

Si quatuor numeri ſint proportionales; qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis eſt ei, qui ex ſecundo & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis ſit ei, qui ex ſcdo & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erũt. 68. B

Verum eſt idem in numeris fractis pag. 69. B

Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem horum; geniti ex ipſis æquales erunt. 69. B

Idẽ cõtinuit numeris fractis. 69. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecundũ quam tertij ad quartũ; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior eſt eo, qui ex ſecũdo & tertio fit, numero: Et contra; tã in fractis numeris, quã integris. 70. B

Si tres numeri ſint proportionales; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, q a medio efficitur: Et ſi qui ſub extremis cõtinetur, æqualis ſit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt. 71. B

In fractis idem verum eſt. 72. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecũdũ, quã ſecũdi ad tertiũ; maior fiet numerus ex primo in tertiũ, q ex ſcdo in ſe: Et contra, tã in numeris fractis q integris. 72. B

Minimi numeri omniũ eandem cũ eis rationẽ habentiũ, metiuntur æque numeros eandẽ cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem. 73. B

Si tres numeri ſint continue proportionales, & primi duo dicantur in ſua proportione minimi; metietur primus ſecundum, & ſecundus tertium. 74. B

Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarũ proportionũ, ſiue eadẽ ſint, ſiue diuerſa proportiones, metiuntur æque totidẽ alios numeros, q eaſdẽ cũ eis proportiones hẽnt, primus primũ, ſecũdus ſcdm, et tertius tertiũ. etc. 74. B

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini

ni ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio: etiã ex æqualitate in eadem ratione erunt. 76.B

Idem verum eſt in numeris fractis pag. 77.B

Si quatuor numeri tam integri, q̃ fracti, proportionales ſint; & conuertendo proportionales erunt. pag. 78.B

Si compoſiti numeri ſiue integri, ſiue fracti, proportionales ſint; & diuiſi proportionales erũt. 78.B

Si diuiſi numeri proportionales ſint ſiue integri, ſiue fracti; & diuiſi proportionales erunt. 79.B

Si compoſiti numeri tam fracti, q̃ integri, proportionales ſint; & per conuerſionem rationis proportionales erunt. 79.B

Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum: habeat autem & quintus ad ſecundum eandem rationem quam ſextus ad quartum, tam in fractis numeris, quam integris: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eãdem habebit rationem, quam tertius cũ ſexto ad quartum. 80.B

Si duo numeri ad duos numeros eãdem habeant rationem; & detracti: quidã habeant ad eoſdem eandem, tam in numeris fractis, quam integris: Et reliqui ad eoſdem eandẽ rationem habebunt. 81.B

Si primus ad ſecundum eãdem habeat rationem, quã tertius ad quartum; habeat autem & primus ad quintum eãdem, quam tertius ad ſextum, tam in integris quam fractis numeris: Etiã primus ad compoſitũ ſecundum cum quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cum ſexto. 81.A

Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quẽdam alium eundem, tam in fractis, quam integris numeris: habebunt quoque omnes illi ſimul ad eundem, proportionem, quam hi alij omnes ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcũque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionẽ, quã idem alius numerus ad hos omnes ſimul. 82.B

Vltima nouem propoſ. lib. 5. a Campano adiecta, qua ratione eodẽ modo demonſtrentur in numeris improportionalibus. 83.B

Maxima menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros minimos eãdem cũ ipſis proportionem habẽtes. pag. 96.B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor

nor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 98. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorũ primi inter se sint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 109. B

Si sint quotuis numeri non continuo proportionales, extremi vero ipsorum sint inter se primi; ipsi minimi sunt in continuatione suarum proportionum. 110. B

Si tres numeri sint minimi continue proportionales; extremi quadrati sunt: Si autem quatuor cubi, &c. 112. B

Extremi numeri continue proportionalium quotcũque minimorum primi sunt inter se. pag. 114. & 116. B

Duo numeri minimi in sua proportione metiũtur omnes medios quotcũque minimorum in eadem ratione. 114. B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam vllum metietur. 123. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex; neque alius quisquã vllius multiplex erit. 124. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus vero secũdum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur: Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunq; alius cuiuslibet sequentiũ multiplex erit. 125. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur, neq; primus secundum metietur. Et si primus vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit. 126. B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur; is etiam metietur secundum. pag. 126. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit. 127. B

Si inter duos numeros medij cõnua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 127. B

Inter duos numeros dupla, tripla, aut quintupla proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis non potest cadere medius

dius numerus proportionalis. pag. 129. & 130. B
Item neque inter duos numeros ſola vnitate, aut binario differentes. 129. B
Ex quo ſit, neque Diapaſon, neq; Tonum in Muſicis diuidi poſſe bifariam. 130. B
Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ inter vtrumque eorum, & vnitatẽ medij continua proportione cadẽt. pag. 133. B
Si numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquem, & rurſum multiplicet productũ, &c. omnes producti ſunt continue proportionales ab vnitate. 132. B
Si inter duos numeros & vnitatem cõtinue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrumque ipſorum. & unitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 133. B
Si quotquot numeri ſint ab vnitate continue proportionales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & ſic deinceps. 135. B
Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine aqualiũ; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quã habent ſecũdi ab vnitate, quarti vero eiuſdem triplicatam, & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius. 135. B
Si ſint ab aliquo numero eodẽ ordines numerorum cõtinue proportionalium, & multitudine aqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam, &c. 137. B
Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, cõtinue proportionales ceciderint numeri; quot inter utrumque ipſorum, et aſſumptũ deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 141. B
Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primũ poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos; ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 143. B
Primi autẽ numeri producti ſunt in duplicata rõne proportionis datorũ numerorum: & ſecũdo loco geniti in triplicata. &c. 145. B

Si ab

Si ab vnitate quotcunque numeri sint deinceps proportionales; minor quicunque maiorē quēlibet metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris. 186.B

In numeris ab vnitate cōtinue proportionalibus, quantū abest maior quilibet a minore quouis eū metiente, tantum ab vnitate distat numerus, per quem minor maiorem metitur. Item quilibet numerus seipsum multiplicans, producit numerum tantū ab eo distantem, quantum ipse ab vnitate abest: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantum a maiore distans, quantum minor ab vnitate. 187.B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales sint; quicunque primorum numerorum ultimum metiūtur, iidem & cum, qui vnitati proximus est, metientur. 188. B

Itaque neque vllus numerus primus, qui maior sit eo, qui proximus est vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metietur, metiri potest vltimū. 190.B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales sint, qui vero post unitatem, primus sit; Maximum nullus alius metietur, prēter eos, qui sunt in numeris proportionalibus. 191.B.

Si quotcunq; numeri continue proportionales, sint minimi omniū eādem rationem habentiū cum ipsis; Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorū, qui in eadem rōne sunt minimi; vel cert ad alterū erit cōpositus. 194.B

Si tres numeri sint deinceps proportionales, & minimi omnium eādem cum ipsis rationem habētium; Duo quilibet simul, ad reliquū primi erunt pag. 205. A

Si quotcūque numeri deinceps proportionales, sint minimi omniū eandem cum illis rationem habentium; ad quemlibet eorum reliqui omnes simul collecti, erunt primi. 207. B

Si duo numeri, primi inter se fuerint; non erit ut primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam. 209. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipsorum primi inter se sint; non erit ut primus ad secūdum, ita ultimus ad alium quempiam. 209.B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, detrahātur, aūt a secundo, & ultimo æquales ipsi primo; Erit ut se cūdi excessus ad primum, ita ultimi excessus ad omnes ipsum antecedentes. 229.B

Quelibet numero per duos quosuis numeros diuiso, erunt duo hi numeri Quotientibus.

conuerſo ordine proportionales. pag. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri dividentes binis Quotiētibus reſpondentibus cōuerſo ordine proportionales. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt Quotientes conuerſo ordine in eadem proportione continue proportionales. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus ; erit vt ſumma priorū ad quemlibet eorū, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdē prorſus Quotientes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa facit. 236. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eaſdem ſecundos Quotientes, & ſic deinceps in infinitum; procreabuntur alterius ſemper iidē primi Quotientes ordine conuerſo. 237. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omnium quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi quotientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. pag. 238. B

Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quotientium eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens. pag. 238. B

Proportionum compoſitio, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. non eſt vere adeo proportionum, vt plerique falſo exiſtimant. 273. E

Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant. 275. B

NVMERVS fractus, vide Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Numeros, quotquot inſſerit ex qui inter ſe multiplicati dant numerū gignāt, reperire. 74

Numero per numerum diuiſo, cuius numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuiſorem inuenti in numerum diuidendum. 15. B

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadã detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, qnoad assumpta sit vnitas : qui principio dati sunt numeri, primi inter se erunt. pag. 32. B

Si duobus numeris inter se primis datis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione: nũquam reliquus metietur precedentem, quoad assumpta sit vnitas. 33. B

Si datis duobus numeris inter se cõpositis, detrahatur semper minor de maiore, alterna quadam detractione : detractio ad unitatẽ vsque non perueniet, sed ad numerum, qui precedentem detractum metiatur. 34. B

Numerus duos numeros metiens : metitur quoque maximam eorundem mensuram. pag. 36. B

Numerus tres numeros metiẽs, uel plures ; metitur etiam maximam eorũ mensuram communem. 38. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars est, aut partes. 39. B

Si duo numeri mutuo se multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipsis æquales inter se erunt. 64. B

Idem in fractis numeris concludes pag. 65. B

Si duo numeri se mutuo multiplicauerint ; procreabitur vnus, idemque numerus. 65. B

Verum hoc etiam est in numeris fractis. 66. B

Primi inter se numeri, minimi sunt omnium eãdem cum eis rationem habentium. 84. B

Minimi numeri omnium eandem eum eis rationem habentium, primi inter se sunt. pag. 84. B

Quotcunque numeri inter se primi, minimi sunt in continuatione suarum proportionũ. Et quotcunque numeri in continuatione suarum proportionum minimi, sunt inter se primi. 85. B

Si duo numeri primi inter se fuerint ; qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit. 86. B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint ; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. pag. 87. B

Si duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 88. B

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint : Et qui ex eis gignẽtur primi inter se erũt. pag. 88. B

Si duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans uterque se ipsum fecerit aliquẽ ; Et geniti ex ipsis primi inter

se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicãtes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semp circa extremos hoc eueniet. 89.B

Si duo numeri primi inter se fuerint; etiam vterque simul ad quemlibet illorũ primus erit. Et si vterque simul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt. 90.B

Numerus, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primus erit. 91.B

Omnis primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. pagina 91.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autẽ ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 92.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel cẽrte ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit. pag. 93.B

Omnem compositum numerũ, aliquis primus numerus metitur. 93.B

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 94.B

Si duo numeri numerum quẽpiam metiantur: Etiam minimus, quẽ illi metiuntur, eundem metietur. 99.B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eũdem metietur. 101.B

Idem eueniet in pluribus numeris. pag. 102.B

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam. 102.B

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus. pag. 103.B

Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiũtur; minimus est habens partes a numeris metientibus denominatas. 104.B

Datis quotlibet numeris, idem semper numerus procreabitur ex eorũ mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter se permutent. 155.B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur. 193.B

Demonstratio priorum 10. propositionum lib. 2. in numeris. pagina 196.B

Nullus numerus ita dimidi potest, vt productus ex toto in vnam

par

partem, sit æqualis quadrato alterius partis. 204. & pag. 222. B
Primi numeri plures sunt, omni proposita multitudine primorum numerorum. 215. B
Si pares numeri quotcũq; componantur; totus par erit. pag. 216. B
Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorũ sit par, totus par erit. 217. B
Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipsorum sit impar, & totus impar erit. 217. B
Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus additus, facit imparem. 218. B
Si a pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. pagina 218. B
Si a pari numero impar detrahatur; & reliquus impar erit. pag. 219. B
Si ab impari numero impar detrahatur; reliquus par erit. pag. 219. B
Si ab impari numero par detrahatur; reliquus impar erit. pag. 220. B
Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 220. B
Si par numerus parem multiplicãs fecerit aliquem; factus par erit pag. 220. B
Par in se multiplicatus facit parem. 221. B
Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; factus impar erit. pag. 221. B
Impar numerus in se multiplicatus gignit imparem. 221. B
Numerus impar numerum parem metiens, per numerũ parem eum metitur. 222. B
Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 222. B
Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur. 223. B
Si impar numerus ad aliquẽ numerum primus sit; & ad illius duplum primus erit. 224. B
Immo & ad quadruplum, octuplũ, sedecuplum, & sic deinceps in proportione dupla. 229. B
Numerorum a binario duplorũ vnusquisque pariter par est tantum. 225. B
Si numerus dimidiũ habeat imparem; pariter impar est tantum. 226. B
Si par numerus neque a binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem; pariter par est, & pariter impar. 228. B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. pag. 231. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

Nullus numerus compoſitus ex integro & fracto, vel numerus fractus in ſe multiplicatus procreat numerum quadratū integrum. pag. 638.A

Plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. 121. B

Duorum quadratorum numerorum unus medius eſt proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatā habet lateris ad latus rationem. 140.B

Medio proportionali cadente inter duos quadratos; erit is ad vtrumuis quadratorum compoſitus. 141.B

Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 141.B

Duobus mediis proportionalibus cadentibus inter duos cubos; erunt ij, & vterlibet cuborum inter ſe compoſiti. 142.B

Si quadratus numerus quadratū numerū metiatur; & latus unius metietur latus alteri'. Et ſi vnius quadrati latus metiat latus alterius; & quadratus quadratū metietur, 146.B

Si cubus numerus cubū numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubū metietur. 147.B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius quadrati non metiatur latus alterius; neq; quadratus quadratum metietur. 148.B

Si cubus numerus cubum numerum non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi unius latus alterius nō metiat; neq; cubus cubum metietur 149.B

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris multiplex erit. Et ſi latus lateris nō ſit multiplex; neq; quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex. 149.B

Duorum ſimilium planorum numerorum unus medius proportionalis eſt numerus: Et planus ad planū duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. pag. 150.B

Medius numerus proportionalis inter

ter duos planos ſimiles, ad vtrũlibet compoſitus eſt. 151.B

Duorum ſimilium ſolidorũ numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationẽ habet lateris homologi ad latus homologum. pag. 152.B

Duo numeri medij proportionales inter duos ſolidos ſimiles, et uterius ſolidorum, ſunt compoſiti inter ſe. 153.B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; ſimiles plani erunt illi numeri. 158.B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; ſimiles ſolidi ſunt illi numeri. 159 B

Si tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit. 161.B

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autẽ ſit cubus; Et quartus cubus erit. 161. B

Si duo numeri rationem habeãt inter ſe, quam quadratus ad quadratum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit. 165.B

Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non poteſt in duobus numeris quadratis. pag. 165.B

Duo numeri in quintupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratũ. pag. 166.B

Si duo numeri rationem inter ſe habeant, quã cubus ad cubum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit. 166.B

Proportio cubi ad non cubum, reperiri non poteſt in duobus numeris cubis. 167.B

Similes plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus ad quadratum. 167.B

Numeri proportionem habentes, quam quadratus ad quadratũ, ſimiles plani ſunt. 168.B

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus ad cubum. 168.B

Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, ſimiles ſolidi ſunt. 169. B

Nulli numeri habentes duplã proportionem, vel ſuperparticularẽ, vel ſuperbipartientem: vel duo numeri primi, vel primi inter ſe, quãuis neuter primus ſit, dummodo quadrati nõ ſint, aut cubi; ſimiles plani ſunt, aut ſolidi. 169.B

Si ſint duo numeri plani, aut ſolidi ſimiles, ſitque minor primus; metietur minor maiorem. 170.B

Duo numeri inter ſe primi, quorum minor primus ſit, nõ poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. pag. 171.B

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant

quendam; productus quadratus erit. 173.B
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciãt quadratum; similes plani erunt. 174.B.
Duo numeri quadrati se mutuo multiplicantes producunt quadratum. 174.B
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit. 175.B
Si duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus, reliquus nõ quadratus erit. 175.B
Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum. 175.B
Si cubus numerus seipsum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 176.B
Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. pag. 177.B
Si cubus numerus numerũ quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 177.B
Cubus non cubum multiplicans facit non cubum. 178.B
Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. pag. 178.B
Si numerus seipsum multiplicans faciat cubum; Et ipse cubus erit. 178.B
Si compositus numerus numerũ aliquem multiplicans quempiam faciat; Factus solidus pag. 179.B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales sint; tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes; quartus autem est cubus, & duos intermittentes omnes; septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes. 179.B
Si sint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes positi in locis imparibus, numerum in tertio, quinto, septimo, &c. sunt quadrati. Omnes autem, qui sequuntur proxime positos in locis, tertio, sexto, nono, & alijs, qua ternarius metitur, cuiusmodi sunt numeri, quartus, septimus, decimus, &c. sunt cubi. Omnes vero, qui proxime sequuntur positos in locis, sexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, quos metitur senarius, quales sunt, septimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. sunt cubi simul & quadrati. 181.B
Si ab vnitate quotcunque numeri sint deinceps proportionales, qui vero post vnitatem, sit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At si qui post vnitatem, sit cubus; & reliqui omnes cubi erunt. pag.

pag. 181.B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps sint proportionales, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. pag. 184.B

Quando in numeris ab vnitate proportionalibus continue, qui post vnitatem, non est cubus simul & quadratus; non necesse est, nullum alium esse quadratum simul & cubum, præter septimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes: quia aliquando etiam quartus, est quadratus simul ac cubus, non existente primo ab vnitate quadrato ac cubo simul. 185.B

OBTVSANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ solidæ non Regulares, ac plana parallela.

Si in planis parallelis duo anguli sint æquales, & linea vna vnius, linea vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, si modo ductæ sint ex eadem parte plani per priores parallelas ducti. pag. 559.B

Ad quę plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela. 563.B.

Si sint duo plana parallela; recta linea, quæ ad vnum eorum recta est, ad reliquum quoque recta erit. 563.B

Si duæ rectæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano; Parallela sunt, quæ per illa ducuntur, plana. 564.B

Si duo plana parallela plano quopiam secentur; communes illorum sectiones sunt parallelæ. 566.B

Quæ eidem plano parallela, & inter se sunt parallela; vel si conueniunt, vnum planum efficiēt. pag. 567.B

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorū parallelorum, si vnum cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum. 571.B

Si solidum parallelis planis contineatur; aduersa illius plana parallelogramma sunt similia, & æqualia. 584.B

Si solidum parallelepipedū plano secetur per diagonios aduersō-

uersorum planorum; bifariã secabitur solidum ab ipso plano. 593.B

Solida parallelepipeda super eãdem basim constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineę in ijsdem collocãtur rectis lineis, sunt inter se æqualia. 594.B

Solida parallelepipeda super eãdem basim constituta, & in eadem altitudine, quorũ insistentes lineæ non in ijsdẽ collocantur rectis lineis, inter se sunt æqualia. 596.B

Solida parallelepipeda æqualia super eandem basim, siue insistentes lineæ in eisdem collocentur rectis, siue non; in eadem sunt altitudine. 597.B

Solida parallelepipeda super æquales bases cõstituta, & in eadẽ altitudine; æqualia sunt inter se. 598.B

Solida parallelepipeda æqualia super æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, super æquales sunt bases, si non habuerint eandem basim. 601.B

Hæc quinque, quæ proxime dicta sunt de parallelepipedis, conueniunt etiam in prismata, in quibus duo plana opposita sunt triãgula. 608.B

Si solidi parallelepipedi eorum, quę ex aduerso, planorũ latera bifariam secta sint; per sectiones autem plana sint extensa: Communis sectio planorum, & solidi parallelepipedi diameter, bifariã se mutuo secabunt. 617.B

In omni prallelepipedo diametri se mutuo bifariã diuidunt in vno puncto. 618.B

Si solidum parallelepipedum plano secetur per centrum; bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam; per centrum transibit ipsum planum. pag. 619.B

Si fuerint duo prismata planorum triangularium oppositorum æqualis altitudinis, quorum hoc quidẽ basim habeat, triangulum, illud vero, parallelogrammum, duplum autẽ fuerit parallelogrãmũ trianguli; Æqualia erunt ipsa prismata. 623.

Omnis pyramis triangularem habẽs basim diuiditur in duas pyramides æquales & similes inter se, triangulares habentes bases, & similes toti; Et in duo prismata æqualia, quæ duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis. pagina 630.B

Si fuerint duę pyramides eiusdẽ altitudinis, triangulares habentes bases; sit autem illarũ vtraque diuisa & in duas pyramidas æquales inter se, & similes toti; & in duo prismata æqualia; Ac eodem modo diuisa

diuisa sit vtraque pyramidū, quæ ex superiore diuisione natæ sunt, idq; semper fiat: Erit vt vnius pyramidis basis ad alterius pyramidis basim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, prismata ad omnia, quæ in altera pyramide, prismata multitudine æqualia. 633.B

Pyramides eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases triangulares, sunt inter se æquales. 637.B

Pyramides triāgulares æquales super eandem, vel æquales bases, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiusdē & altitudinis, habent bases æquales, vel eandē. 637.B

Pyramides eiusdem altitudinis super æquales bases quascunque, vel eandem, sunt inter se æquales. 641.B

Pyramides multangulæ æquales, et super æquales bases, vel super eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemque habentes altitudinem; bases habent æquales, vel eandem. 641.B

Omne prisma triāgulare habēs basim, diuiditur in tres pyramides æquales inter se, triangulares bases habētes. 642.B

Prismata eiusdē altitudinis super eandē, vel æquales bases quascunq;, inter se sunt æqualia. Et prismata æqualia super æquales bases, vel eandē, in eadem sunt altitudine. Et prismata æqualia eiusdē altitudinis, bases habent æquales, vel eandem. 645.B

Quæ de prismatis dicta sunt, intelligi debent de ijs, quæ habent plana opposita basibus æqualia & similia. 646.B

Omnis conus tertia pars est cylindri eādem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem. 654.B

Atque hoc verum est, siue coni & cylindri sint recti, siue scaleni, licet non sit idem axis conorū, & cylindrorum. 658.B

Coni & cylindri eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases cōstituti, siue ambo sint recti, vel scaleni, siue vnus rectus, & alter scalenus, inter se sunt æquales. 661.B

Coni & cylindri æquales super eandem vel æquales bases, in eadem sunt altitudine. Et coni ac cylindri æquales in eadem altitudine, super æquales bases sunt, vel eandem. 661.B

Si in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindāt arcus similes; erūt duæ rectæ coniugētes extrema vnius rectæ cū centro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cū centro coniungūt. 919.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiusq; æqua-

lia

lia ſunt & latera oppoſita, & anguli oppoſiti, atque ipſum diameter ſecat bifariã. 177.A

Quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, parallelogrammum eſt. 178.A

Quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, parallelogrammum eſt. 179.A

Rhombus, & Rhomboides, parallelogramma ſunt. 179.A

Quadratũ, & altera parte lõgius, parallelogramma ſunt. 179.A

Quadrilaterum diuiſum bifariã ab vna diametro, non ſemper eſt parallelogrammum. 179.A

Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. 180.A

Quadrati, & Rhombi angulos ſecat diameter qualibet bifariã. pag. 180.A

Rhomboidis, & altera parte longioris angulos ſecat diameter non bifariam. 181.A

Quadrati, & altera parte longioris diametri ſũt æquales. 181.A

Rhombi, & Rhomboidis diametri non ſunt æquales. 181.A

Parallelogrammi cuiuſque diametri ſe mutuo ſecant bifariam. pag. 182.A

Quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuo bifariam ſecant, parallelogramum eſt. 182.A

Parallelogrammum bifariam diuiditur a recta, quę diametrum bifariam ſecat: Et recta diuidens parallelogrammum bifariam, ſecat diametrum quoque bifariam. 183.A

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdẽ parallelis conſtituta ſunt æqualia. 190.A

Parallelogramma æqualia ſuper eandem baſim, ad eaſdemque partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas. 192.A

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt æqualia. 193.A

Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdẽ partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eiſdem parallelis, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 193.A

Parallelogrammorum inter eaſdẽ parallelas, quod maiorem baſim habet, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 194.A

Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro dimidiatur bifariam, parallelogrammum eſt. 201.A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes ſunt æquales, ſunt æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadẽ baſi, habent baſes oppoſitas æquales. 204.A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quod maiorem habet baſim oppoſitam, ma-

ius est: Et quod maius est, habet basim oppositam maiorē. 205. A

Trapezia in eisdem parallelis, & super aqualibus basibus, quorū oppositæ bases sint aquales, aqualia sunt. Et trapezia aqualia in eisdem parallelis, & super aqualibus basibus, habent bases oppositas aquales. 205. A

Trapeziorum in eisdem parallelis, et super aqualibus basibus, quod maiorem habet oppositā basim, maius est: Et quod maius est, maiorem habet basim oppositā. pag. 206. A

Parallelogrammum duplum est trianguli eandem cum eo basim habentis, & in eisdem parallelis constituti. 213. A

Parallelogrammū aquale est triāgulo duplam habenti basim, & in eisdem parallelis constitutū. pag. 214. A

Parallelogrammū duplum est triāguli aqualem cum eo basim habentis, & in eisdem parallelis constituti. 214. A

Si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, eandemque habuerint basim, vel aquales, & ad easdem partes constituta; in eisdem erunt parallelis: Et si paralleloGrammum duplū fuerit triāguli, in eisdemque parallelis; erunt bases æquales, si non sit eadem. 215. A

Si trapezium & triangulum super eadē basi, & in eisdem fuerint parallelis, maior autem linea parallelæ trapezij, sit basis triāguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij basis sit trianguli; erit trapezīū maius duplo trianguli. 216. A

Trapezium habens duo latera oppositæ parallela, duplum est triāguli, quod basim habet unum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio pūcto lateris oppositi. 217. A

In parallelogrammo, complementa circa diametrum æquala sunt. 219. A

Si parallelogrammo diuiso in quatuor parallelogramma, duo aduersa sint aqualia, cōsistent reliqua duo circa diametrū. 220. A

Quadrata linearum aqualiū sunt aqualia: Et quadratorum æqualium aquales sunt lineæ. 227. A

Quadratum ex diametro quadrati descriptum, duplum est ipsius quadrati. 235. A

Quadratum diametri figuræ alterā parte lōgioris, aquale est duobus quadratis laterum inæqualium. 235. A

Parallelogrammū, cuius vnus tantum angulus detur rectus, habet omnes angulos rectos. 250. A

Rectangulū quodcunq; aquale est alteri rectangulo sub duabus rectis contento, quæ duobus lateribus illius sint aquales. 251. A

Parallelogramma circa diametrum quadrati, sunt quadrata. pag. 263. A

Quadratum cuiusque rectæ quadruplum est quadrati rectæ, cuius illa dupla est. Et si quadratum quadrati sit quadruplum, latus lateris duplum est. 264. & 821. A

Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiens quadrato, æquale est rectangulo sub segmentis per applicationem factis comprehenso. 848. A

PAR, & impar numerus, vide. Numerus par, &c,

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par, &c,

PERFECTVS numerus, vide. Numerus par, &c,

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea,

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum, &c,

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela, vide. Parallelepipedum, &c,

PLANI numeri similes, vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus, vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter se numeri. vide. Numerus par, &c.

PRIMVS numerus, vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum, &c,

PROPORTIO Figurarū, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales,

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi,

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide, Magnitudines proportionales in communi,

PROPORTIONALES numeri in communi. vide. Numeri Proportionales in cōmuni,

PRO-

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum,&c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Omnes Rationales lineæ non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe ſunt commenſurabiles. pag. 343.B

Spatium Rationali ſpatio commenſurabile,& ipſum Rationale eſt. 345.B

Quod ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis(quomodocunque cõmenſurabiles ſint expoſitę Rationali)cõtinetur rectangulum; Rationale eſt. 345.B

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalẽ,& ei, ad quam applicatum eſt, longitudine cõmenſurabilem. 346.B

Quod ſub Rationalibus potentia ſolum commẽſurabilibus rectis continetur rectangulũ, Irrationale eſt: Et recta ipſum potens, Irrationalis. Vocetur autem Media. 351.B

Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantũ commenſurabiles, Irrationalis eſt, qua vocatur Media. 352.B

Rectangulum ſub duabus Rõnalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium dici poteſt. 352.B

Non omne rectangulum Medium continetur ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus. 352.B

Quod a media fit, ad Rationalẽ applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quã applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem. 353.B

Omne ſpatium Medium æquale eſt rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. 353. & 355.B

Medię commenſurabilis, Media eſt. 355.B

Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt. 356.B

Non omnis Media recta cuilibet Mediæ eſt cõmẽſurabilis. 358.B

Quod ſub Medijs longitudine commenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Mediũ eſt. 358.B

Quod

Quod ſub Medijs potẽtia tantũ cõmenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulũ; vel Rationale eſt, vel Medium. 359.A

Quod ſub Medijs longitudine & potentia incõmenſurabilibus continetur, nec Rationale eſt, nec Medium, ſed Irrationale aliud, quod æquale eſt rectangulo ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento. 361.B

Medium non ſuperat Medium Rationali. 362.B

Rationale ſuperat Rationale Rationali. 364.

Duo ſpatia Irrationalia componere poſſunt ſpatium Rationale. 383.B

Duo ſpatia Rationalia componunt ſemper ſpatium Rationale. pag. 384.B

Si duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 387.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quę Rationale cõtineãt; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima. 389.B

Quod ſub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum. Irrationale eſt. 390.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium cõtineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs, ſecunda. 390.B

Si duæ rectæ potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis cõtinetur, Medium; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 393.B

Si duæ rectæ potentia incommẽſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis *Mediũ*, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Mediũ potens. 394.B

Si duæ rectę potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis cõtinetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 395.B

Sex lineæ Irrationales compoſitæ, vt ea, quæ ex binis nominibus, quæ ex binis Medijs prima, quæ ex binis Medijs ſecunda, Maior, Rationale ac Mediũ potens, & *bina* Media potens, a dvnum dumtaxat punctum diuidantur in nomina, ſingulæ. 398.B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 406.B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & ex binis nominibus prima, secunda, tertia, quarta, quinta, ac sexta; Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine; ex binis Medijs prima, ex binis Medijs secunda, Maior, Rationale ac Medium potens, & bina Media potens. 417.B

Quadrata sex harum linearum Irrationalium; eius quæ ex binis nominibus, ex binis Medijs primæ, ex binis Medijs secundæ, Maioris, Rationale ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex lineas ex binis nominibus. pag. 426.B

Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, sunt quoque eiusdem ordinis, & nominis Irrationales. 435.B

Idem eueniet, si potentia tantum sint commensurabiles, præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur. 437.B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens. 443.B

Si duo Media inter se incommensurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales fiunt; vel ex Medijs secunda, vel bina Media potens. 445.B

Ea, quæ ex binis nominibus, & alię quinq; Irrationales eam sequentes, & inter se, & a Media differunt. 447.B

Recta linea media proportionalis secundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiusuis lineæ Irrationalis, per compositionem facta, est quoque Irrationalis eiusdem ordinis. pag. 448.B

Si a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti: *(Vel si a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur)* Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Apotome. 449.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; *(Vel si a maiori nomine eius, quæ ex binis medijs prima, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. pag. 451.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Medium contineat; *(Vel*

si a maiori nomine eius, quæ ex binis Mediis secunda, minus nomen auferatur) Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome secunda. pag. 452.B

Si a recta linea auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum quidé ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur Medium; *(Vel si a maioris nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Minor. 454.B

Si a recta auferatur recta potentia incõmensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat cõpositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale; *(Vel si a maioris nomine eius, quæ Rationale ac Medium potest, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens. pag. 455.B

Si a recta auferatur recta potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommẽsurabileque composito ex quadratis ipsarum; *(Vel si a maioris nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens. pag. 457.B

Apotomę vna tantum congruit recta Rationalis, potentia solum commensurabilis existẽs toti. 459.B

Mediæ Apotomæ primæ vna tãtum congruit recta Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens. pag. 461.B

Mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit recta Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Medium continens. pag. 462.B

Minori vna tantum congruit recta, potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium. pag. 464.B

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta potentia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciẽs compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; quod autem sub ipsis continetur, Rationale. pag. 465.B

Ei,

Ei, quæ cum *Medio Medium* totum facit, vna tantũ cõgruit recta, potentiâ incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens & compositũ ex ipsarum quadratis *Medium*, & quod sub ipsis continetur, *Medium*, incommensurabileque composito ex ipsarũ quadratis. 466.B

Sex genera linearum Irrationaliũ, quæ Apotomæ dicuntur. pag. 467.B

Si sex spatia contineantur sub Rationali, & Apotoma prima, secunda, tertia, quarta, quinta, & sexta; Rectæ ea potentes Irrationales sunt hæ ordine; Apotome, *Mediæ* Apotome prima, *Mediæ* Apotome secunda, *Minor*, ea quæ cum Rationali *Medium* totum efficit, & ea quæ cũ *Medio Medium* totum efficit. pag. 475.B

Quadrata harum sex linearum Irrationalium, Apotomæ, *Mediæ* Apotomæ primæ, *Mediæ* Apotomæ secundæ, *Minoris*, eius quæ cum Rationali *Medium* totum efficit, & eius, quæ cum *Medio Medium* totum efficit; ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine sex Apotomas. 485.B

Rectæ longitudine commensurabiles sex lineis Irrationalibus prædictis, quę per detractionem fiunt, sunt quoque Irrationales eiusdem ordinis, & nominis. 493.B

Idem eueniet, si potentia tantũ eis sine commensurabiles, præterquam in Apotoma. 494.B

Medio a Rationali detracto; Recta, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor. 500.B

Rationali a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali *Medium* totum efficiens. 501.B

Medio a *Medio* detracto, quod sit incommensurabile toti; reliquæ duę Irrationales fiunt, vel *Mediæ* Apotome secũda, vel cum *Medio* Medium totum efficiens. 503.B

Apotome non est eadem, quæ ex binis nominibus. 504.B

Apotome, & aliæ quinque Irrationales eam sequentes, & inter se, & a *Media* differunt. pag. 505.B

Tredecim lineæ Irrationales inter se diuersæ. 506.B

Quadratum Rationalis ad eã, quæ ex binis nominibus, applicatũ, latitudinẽ facit Apotomen, cuius nomina nõmen surabilia sũt nominibus eius, quæ est ex binis nominibus, & in eadem proportione; & adhuc Apotome quę fit, eundem habet ordinem, quem

ea, quæ est ex binis nominibus. 508.B
Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quê ipsa Apotome. 511.B
Si spatium cõtineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commẽsurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta spatium potens, est Rationalis. 513.B
Rationale spatium cõtineri potest sub duabus rectis Irrationalibus. 514.B
A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium est eadem. 515.B
Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome. 702.B
Si recta secundum extremam & mediam rationem secetur, sit q; maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum Apotome. 703.B.
Si in circulo Rationalem habẽte diametrum, pentagonum equilaterum describatur; pentagoni latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Minor. pag. 714.B
Si sphæra diameter fuerit Rationalis; erit ea superficies Tetraedri, quam Octaedri in ea sphæra, Media. 790.B
Triangulum aquialterum, cuius latus est Rationale, superficies Media est. 792.B
Latus Icosaedri in pyramide descripti est Apotome. 879.B

RECTA LINEA.

Rectæ duæ lineæ non habent vnum, & idem segmentum commune. pag. 64.A
Rectæ duæ in vno puncto concurrentes, si producantur ambæ, necessario se mutuo in eo puncto intersecabunt. 65.A
Rectæ duæ lineæ spatium non comprehendunt. 68.A
Rectæ duæ lineæ duabus eisdem rectis lineis super eadem recta linea æquales, vtraque vtrique, non constituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad easdem partes, eosdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. pag. 91.A
Recta linea alteri insistens facit cum ea aut duos rectos angulos, aut duobus rectis æquales. 108.A
Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo

lo puncto educta cum illis facit duos angulos non ad easdem partes, duobus rectis æquales. 109.A

Recta duæ ad vnum punctum coniuncta non faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cũ illis facit duos angulos ad easdem partes duobus rectis æquales. 110.A

Rectæ duæ se interfecantes faciunt angulos ad verticẽ oppositos æquales. 111.A

Recta duæ se interfecantes faciunt quatuor angulos quatuor rectis æquales. 112.A

Rectæ quotcunq; ad vnum punctũ conuenientes faciunt omnes angulos quatuor rectis æquales. 112.A

Recta duæ facientes cum alia recta in eodem puncto, non ad easdem partes, angulos ad verticem æquales, in directum sunt coniuncta. 113.A

Recta quatuor in eodem puncto facientes binos oppositos angulos æquales, constituunt duas rectas lineas. 113.A

Recta linea inter se æquales ex vno puncto ad rectam lineam plures quam duæ, duci non possunt. pag. 116.A

Recta linea ad eandem rectã perpendiculares, plures quam vna, duci non possunt. 117.A

Recta linea faciente cum alia angulos inæquales, perpendicularis ex vno illius puncto ad hanc demissa cadit ad partes anguli acuti. 118.A

Rectarum omnium ex vno puncto ad aliam rectam demissarum, minima est perpendicularis. pag. 121.A

Rectæ duæ lineæ ab extremitatibus vnius lateris trianguli interius constitutæ, reliquis triãguli duobus lateribus minores quidem sunt, maiorem vero angulum continent. pag. 126.A

Recta duæ linea intra triangulum, quarum vna ab extremo vnius lateris, altera vero non ab extremo ducitur, maiores esse possunt reliquis trianguli duobus lateribus, minoremque angulum comprehendere. pag. 127.A

Rectę duæ lineę parallelæ sunt, si recta in eas incidens faciat alternos angulos æquales. pag. 142.A

Rectæ duę lineæ parallelę sunt, si recta in eas incidens faciat externum angulum interno ad easdem partes opposito æqualem; aut internos ad easdem partes duobus rectis æquales. 143.A

Rectas duas lineas concurrere productas, si recta in eas incidens faciat duos internos angulos ad easdem partes duobus rectis minores: quo modo à Proclo demonstretur. 147.A

Rectas easdem duas concurrere,

quæ ratione a nobis demonſtrentur. 159.A
Rectarum linearum angulum conſtituentium diſtantia, ſi in infinitum producantur, omnem finitam magnitudinẽ excedet. pag. 145.& 149.A
Recta linea ſecans unam duarum parallelarum, producta ſecat & alteram. 146.A
Linea, cuius omnia puncta a recta linea, quæ in eodem cum ea plano exiſtit, æqualiter diſtant, recta eſt. 150.A
Recta linea ſuper aliam rectam in tranſuerſum mota, conſtituunt que in ſuo extremo cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet altero ſuo extremo lineam quoque rectam. 152.A
Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectæ ad priorem rectam demiſſa, utrilibet priorum perpendicularium æqualis. 154.A
Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; efficiet has rectæ cum utraque perpendiculari angulum rectum. 155.A
Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum una earum angulum internum rectũ, & cum altera ex eadem parte acutum; duæ illæ rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera vero parte ſemper inter ſe magis diſtabunt. pagina 156.A
Recta incidens in duas parallelas facit & angulos alternos æquales, & externum interno ad eaſdem partes æqualem, & internos duos ad eaſdẽ partes duobus rectis æquales. 162.A
Rectæ lineæ, eidem parallelę, & inter ſe ſunt parallelæ. pag. 163.A
Rectæ linea, eidem parallelæ, ſi inter ſe coeunt, conſtituunt vnã lineam rectam. 164.A
Rectæ lineæ, quæ parallelas ad eaſdem partes connectunt, æquales ſunt, & parallelæ. pag. 176.A
In figura æquilatera, & æquiangula parium laterũ, oppoſita quælibet duo latera ſunt parallela. pag. 189.A
Recta ſecans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri eſt parallela. 201.A
Si fuerint duæ rectæ, ſeceturq; ipſarum altera in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorũ comprehenduntur rectangulis. 254.A

Si

Si fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque amba in quotuis segmenta: Rectangulum comprehensum sub illis duabus rectis, aquale est eis, quæ sub singulis segmentis vnius, & quolibet segmentorum alterius continentur, rectanlis. 255. A

Si sint duæ rectæ lineæ, secenturque amba vtcunque: Rectangulum comprehensum sub illis duabus lineis, vna cum rectangulo sub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehensa, æquale est eis, quæ sub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo sub reliquis partibus comprehenso. 256. A

Si recta linea secta sit vtcunque, vel etiam in plura segmenta: Rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt ei, quod a tota fit quadrato. 257. A

Si linea recta secetur in quotuis segmenta: quadratum, quod a tota fit, æquale est eis, quæ sub singulis segmentis, & quolibet segmento comprehenduntur, rectangulis. 259. A

Si recta linea secta sit vtcunque: Rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prædicto segmento describitur, quadrato. pag. 260. A

Si recta linea secta sit vtcunque: Quadratum totius æquale est quadratis segmentorum, & rectangulo comprehenso bis sub segmentis. pag. 261. A

Si recta linea secetur bifariam, & non bifariam: rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato intermediæ sectionũ, æquale est quadrato ex dimidia descripto. pag. 266. A

Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato dimidiæ, æquale est quadrato rectæ compositæ ex dimidia, & adiecta. pag. 269. A

Si recta linea secetur vtcunque: Quadratum totius, & quadratum vnius segmenti, simul æqualia sunt rectangulo sub tota & illo segmento bis contento vna cum quadrato alterius segmenti. 273. A

Si recta linea inæqualiter secetur: Erunt quadrata segmentorum æqualia rectangulo bis sub segmentis comprehenso, vna cum quadrato excessus, quo maius segmentum superat minus. pag. 274. A

Si recta linea secetur vtcunque; rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum, cum quadrato reliqui segmenti, æquale est quadrato rectæ compositę ex tota, & priore segmento. pag. 275. A

V E L.

Si linea recta secetur vtcunque; eique in rectum adijciatur alia recta vni segmentorum æqualis: Quadratum totius linex compositę æquale est rectangulo quater comprehenso sub data linea, & adiecta siue dicto segmento, vna cum quadrato alterius segmenti. pag. 277. A

V E L.

Si linea recta secetur bifariam, eique in rectum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compositæ linex æquale est rectangulo quater comprehenso sub linea composita ex dimidia, & adiecta, & dimidia, vna cum quadrato adiectæ. pagina. 278. A

Si recta linea secetur bifariam; & nô bifariam: quadrata segmentorum inęqualium, simul dupla sunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex intermedia sectionum. 279. A

Si recta linea secetur bifariam, adijciat aût ei in rectum quępiam recta linea: Quod a tota cum adiecta, & quod ab adiecta, vtraque simul quadrata dupla sunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex composita ex dimidia & adiecta. pag. 283. A

Perpendicularis linex ex puncto aliquo ad rectam quampiæ cadens, est omnium ex eodem puncto ad eandem rectam cadentium brevissima. 321. A

Si recta secetur extrema ac media ratione; Isosceles, cuius basis maiori segmento sit æqualis, vtrumuis vero laterum æqualium secta linea, habet vtrumque angulorum ad basim duplũ reliqui. 470. A

Si sint duæ rectæ inæquales; & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, qua ex applicatione fiunt, æqualia. pag. 331. B

Si sint duæ rectæ inæquales, erit rectangulum sub ipsis contentum, duplum rectanguli sub alterutra earum, & dimidio alterius contenti. pagina. 381. B

Si recta linea non bifariam secetur; erit compositum ex quadratis partium maius, quam rectangulum sub partibus bis comprehẽsum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minorem

rem superat. 392. B
Si recta non bifariam secetur, & rursus nó bifariam in alio puncto; erunt quadrata partium magis inæqualium simul maiora quadratis partiũ minus inæqualium simul. 396. B
Rectę lineæ pars quædam non est in subiecto plano, quædã vero in sublimi. 548. B
Si duæ rectę se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano pag. 549. B
Si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. 550. B
Si recta linea rectis duabus se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiam per ipsas plano ad angulos rectos erit. 551. B
Si recta linea rectis tribus se mutuo secantibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano. 553. B
Si duæ rectæ eidem plano ad rectos sint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. pag. 554. B
Si duæ sint parallelæ rectæ, in quarum vtraque sumpta sint quælibet pũcta: Illa recta, quę ad hæc puncta adiungitur, in eodem est cum parallelis plano. 555. B
Idem euenit, si recta non sint parallelæ, in eodem tamen existãt plano. 555. A
Si duæ sint parallelæ rectæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 555. B
Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, sed non in eodem cũ illa plano; hæ quoq; sunt inter se parallelæ. 557. B
Dato plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eadem partes. 561. B
Item neque a puncto in sublimi ad subiectum planum duæ perpendiculares demittentur. 562. B
Si recta plano cuipiam ad rectos sit angulos; & omnia, quæ per ipsum, plana eidem plano ad rectos angulos erunt. pag. 570. B
Si duo plana se mutuo secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit. pag. 572. B
Si planum ad planum rectũ fuerit; & ab aliquo puncto eorũ, quæ in vno sunt, planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit; In communem sectionem cadet planorum ducta perpendicularis pag. 616. B

RE-

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide. Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac solidi numeri. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra sphæram, atq; aliam figuram. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri similes. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

SPHAERA. vide. Figura intra & extra circulum, sphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide. Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triãgula duo habẽt & bases, & angulos æquales, ipsaq; æquilia sunt, si duo latera vnius æqualia sint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, angulosq; contentos habeant æquales. 81.A

Isosceles triangulorum anguli tam supra basem, quam infra, æquales sunt. 85.A

Æquilaterum triangulum habet tres angulos æquales. 87.A

Triangulum, cuius duo anguli supra basem æquales sunt, habet duo latera angulis illis opposita æqualia. 88.A

Triangulum, cuius omnes anguli æquales sunt, æquilaterum est. pag. 89.A

Triangulum, cuius duo anguli infra basem æquales sunt, Isosceles est. 90.A

Triangula duo habent vnũ angulum vni angulo æqualem, si duo latera vnum ambientia æqualia sint duobus lateribus alterum ambientibus, & basis basi. 94.A

Triangula duo æqualia sunt, & inter se æquiangula, si duo latera vnius sint æqualia duobus lateribus

teribus alterius, & basis basi, pag. 96.A

Trianguli externus angulus maior est vtrouis interno opposito. 114.A

Trianguli duo quilibet anguli duobus rectis minores sunt. pag. 117.A

Trianguli orthogonij, vel amblygonij duo reliqui anguli sunt acuti. 118.A

Trianguli aquilateri omnes anguli, & Isoscelis duo supra basem, acuti sunt. 119.A

Triãguli maius latus maiorem angulum subtendit. 119.A

Scalenum habet omnes tres angulos inaquales. 119.A

Trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur. 120.A

Trianguli angulo bifariam secto, si recta secans partiatur basem inaqualiter; latera circa illius angulum inaqualia sunt, maiusque est illud, quod maiori segmento basis adiacet. 121.A

Trianguli angulo inaqualibus lãteribus comprehenso bifariam secto, recta secans diuidit basim inaqualiter, maiusque segmentũ maiori lateri adiacet. 123.A

Trianguli angulo bifariam secto, si recta secans diuidat basem bifariam, latera circa eum angulum aqualia sunt: Et si aqualia sint, recta secans angulum bifariam, secat & basim bifariam. 124.A

Trianguli duo latera quomodocunq; sumpta, reliquo sunt maiora. 125.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualiã, vtrumque vtrique, angulum vero comprehensum angulo maiorem, habent & basem basi maiorem. 132.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, basem vero basi maiorem, habent & angulum comprehensum angulo maiorem. 135.A

Triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, vnumque latus uni lateri æquale, siue quod æqualibus adiacet angulis, siue quod uni æqualiũ angulorum subtenditur; habent & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulũ reliquo angulo æqualem. pagina 138.A

Triangula habentia eadem conditiones, de quibus proxime dictũ est, sunt inter se aqualia. 139.A

In triangulo aquilatero, vel Isoscele, recta linea ab angulo duobus lateribus aqualibus comprehenso ducta, diuidensque vel angulum, vel basem bifariã, perpendicularis est ad basem; & siquidem angulum bifariã diuidat, secabit quoq; basem bifariam. Si vero basem secet bifariã, diuidet quoq; angulum bifariam.

Et contra, linea perpẽdicularis ad baſem ducta diuidit & baſem, & angulum bifariam. pag. 140. A

Triangulum, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad baſem perpendicularis diuidit vel baſin, vel angulum bifariam, habet duo latera circa illum angulum æqualia: Et ſi quidem baſis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam ſecabitur: ſi vero angulus bifariam ſecetur baſis quoque diuidetur bifariã. pag. 141. A

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod tamen neque æqualibus adiacet angulis, neque vni æqualium angulorum opponitur; nihil colligi poteſt. 166. A

Triãguli externus angulus duobus internis oppoſitis eſt æqualis: Et omnes tres anguli duobus rectis æquales ſunt. pag. 169. B

Trianguli cuiuslibet omnes tres anguli ſimul æquales ſunt tribus angulis ſimul cuiuſcunque alterius trianguli. 174. A

Iſoſcelis duo anguli ſupra baſim ſemirecti ſunt, quando reliquus angulus rectus eſt. 175. A

Æquilateri trianguli quilibet angulus continet duas tertias partes vnius recti, vel vnã tertiam partem duorum rectorũ. 175. A

Æquilaterum triangulum a perpendiculari ex angulo ad baſim ducta diuiditur in duo ſcalena orthogonia, &c. 177. A

Triangula ſuper eadem baſi cõſtituta, & in eiſdẽ parallelis, ſunt æqualia. 195. A

Triangula, quorum duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique angulum vero contentum angulo maiorem, quo pacto poſſint æqualia eſſe, & inæqualia. pagina 196. A

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 198. A

Triangulum a recta ex angulo ad medium punctum lateris oppoſiti ducta ſecatur bifariam. pag. 199. A

Triangula æqualia ſuper eadẽ baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 200. A

Triangula æqualia ſuper eqùalibus baſibus, & ad caſdẽ partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 202. A

Triangula æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 203. A

Triangulorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem habet baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. pag. 203. A

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur; Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq; alterutrã parallelarum bifariam, diuidit quoq; alterã bifariam. 207. A

In rectangulis triangulis, quadratum lateris angulo recto oppoſiti, æquale eſt duobus quadratis ſimul reliquorum duorum laterum. 229. A

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint aqualia; erunt duo quadrata, reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. 236. A

Si ex angulo a duobus lateribus inaqualibus trianguli cuiuſuis comprehenſo ad baſim perpendicularis ducatur cadens intra triangulum; ſecabitur baſis inaqualiter, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, ſi baſis a perpendiculari ſecetur inaqualiter, erunt duo latera inaqualia, maiusque eris prope maiorem partem baſis. 240. A

In omni triangulo, parallelogramma quacunque duorũ laterum aqualia ſunt parallelogrammo reliqui lateris, cuius alterum latus aquale ſit, & parallelum recta ducta ab angulo, quem duo illa latera cõtinent, ad punctũ, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius producantur. 241. A

Si quadratũ vnius lateris trianguli æquale ſit duobus quadratis reliquorũ duorum laterum; angulus ſub his comprehenſus, rectus erit. 242. B

Triangulorum comparationes varie, & quo modo fiant. 243. A

In amblygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti quanto maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum, 288. A

In amblygoniis triangulis perpendicularis ex alterutro angulorũ acutorum ad latus oppoſitũ demiſſa, cadit extra triangulum ad partes anguli obtuſi. 289. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis aliorum duorum laterum: angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit. pag. 290. A

Si *in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: demiſſa hac linea ad latus productũ perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus.* 290. A

In oxygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo acuto oppoſiti, quanto minus ſit quadra-

dratis aliorum duorum laterum, 296. A

In quolibet triangulo perpendicularis in latus ductus acutis angulis adiacens ex opposito angulo demissa, cadit intra triangulum. 298. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum; angulus illi lateri oppositus, est acutus, 300. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterũ, rectangulo bis comprehenso sub alterutro horum laterum, & sub recta linea inter angulum prioris lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus, 301. A

Si in triangulo a quouis angulo recta linea ducatur secans latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum circa illum angulum, simul dupla duorum quadratorum, quorũ vnum ex linea ducta, alterũ vero ex dimidiato latere describitur. 310. A

Triãguli angulus, qui reliquis duobus est æqualis, rectus est. 430. A

Isosceles trianguli, cuius vterq; angulorum ad basim duplus est reliqui, angulus reliquus continet quintam partem duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti; vterque vero ad basim continet duas quintas duorum rectorum, vel quatuor quintas vnius recti. 463. A

Si recta secetur extrema ac media ratione; Isosceles, cuius basis maiori segmento sit æqualis, vtrumuis vero laterum æqualium data linea secta, habet vtrumque angulorum ad basim dupli reliqui. 470. A

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto demittatur perpendicularis ad basim; erit rectangulum sub base, & alterutro basis segmento, æquale quadrato lateris illi segmento adiacentis; Rectangulum vero sub basis segmẽtis æquale quadrato perpendicularis; Rectangulum denique sub base, & perpendiculari æquale rectangulo sub lateribus circa angulum rectum. 380. B

Triangulum omne in vno est plano, 549. B

Latus trianguli æquilateri potentia sesquitertium est perpẽdicularis ex vno angulo ad basim demissæ, 718 & 789. B

Perpendicularis ex angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro triãguli ad eandem basim deducitur: sesquialtera vero semidiametri circuli triangulum circũscribentis. 891. B

Qua-

Quadratum lateris trianguli æqui lateri ad ipsum triangulum habet proportionẽ duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab uno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris. 821.B

Quadratũ rectæ mediæ proportionalis inter dimidiũ latus trianguli æquilateri, & eius perpendicularem, æquale est ipsi triangulo. 822.B

FINIS.

ERRATORVM POSTERIORVM DECEM Lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata.	Correctiones.
50	4	D, $\frac{7}{22}$.	D, $\frac{14}{22}$.
64	19	a 15 defin.	a 13. septimi,
68	penult.	C, tertium.	in C, tertium.
80	7. a fine	ad F H,	ad E H.
145	12. a fine	D, F, I, M;	C, F, I, M.
147	3. a fine	G, ad D.	C, ad D.
163	11. a fine	I, & C	L, & C.
183	11. a fine	propos. 10. lib. A.	propos. 10. lib. 8. A.
208	7	medios B, G;	medios E, C;
212	10. a fine	64 per 1.	64. per 3.
219	3	A C, ad D E, ita C B,	AC. ad C B, ita D E,
219	4. a fine	C a B;	C B;
327	20	deleatur yox (aliter)	
768	9. a fine	PROBL. 4.	THEOR. 4.
806	5. a fine	æquilater	æqualiter

Emendentur quoque numeri paginarum in folijs I. X. Vu. Iii.

Præterea pro figura paginæ 626. describatur figura paginæ 628.

REGESTVM.

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii KK Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii KKK LLl Mmm Nnn Ooo.

a b c d e f.

Omnia ſunt integra folia.

ROMAE,
Apud Sanctium, & Soc.
M. D. LXXXIX.