

Notes du mont Royal

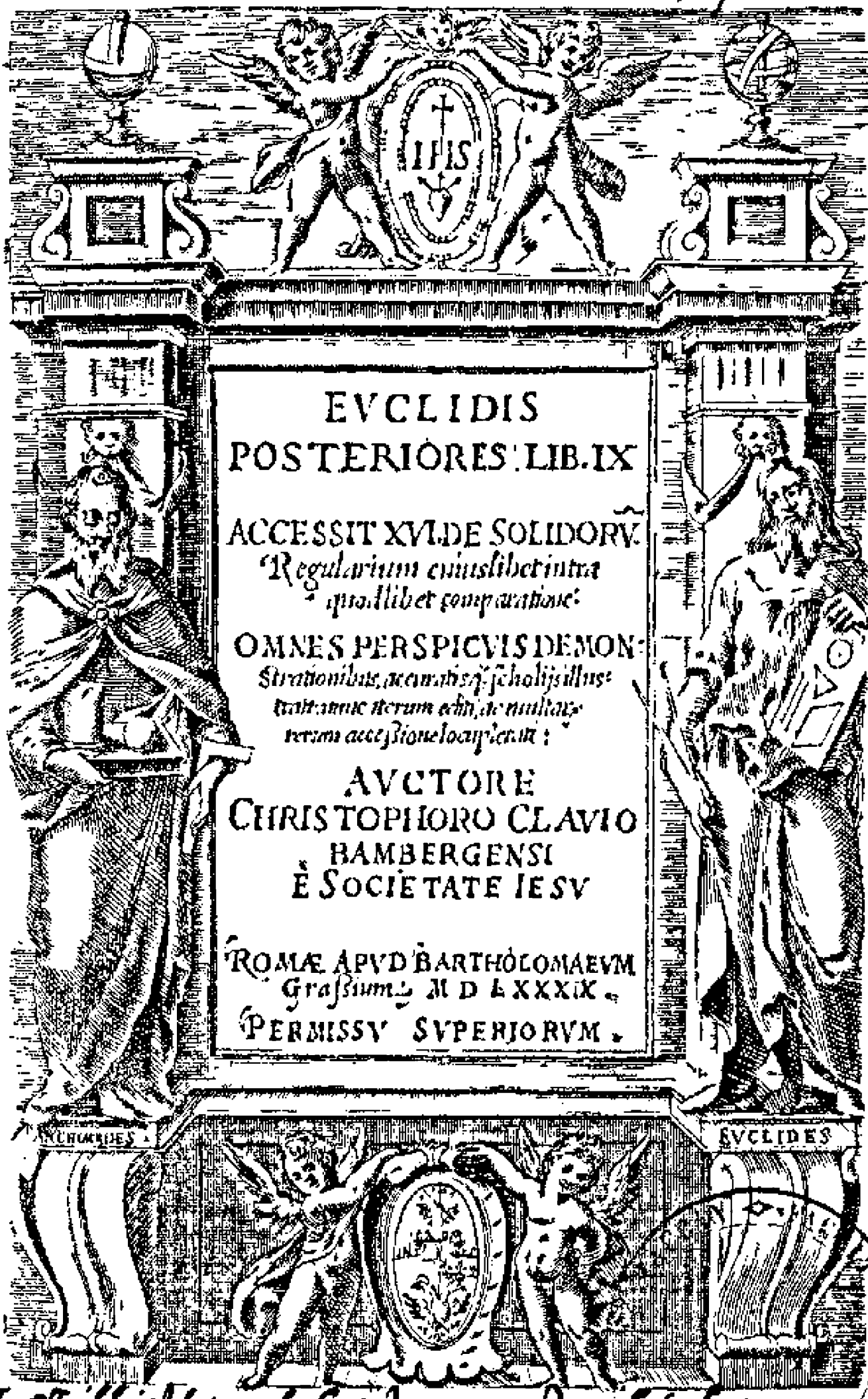
WWW.NOTESDUMONTROYAL.COM

Cette œuvre est hébergée sur «*Notes du mont Royal*» dans le cadre d'un exposé gratuit sur la littérature.

SOURCE DES IMAGES

Tolosana, bibliothèque numérique patrimoniale des universités toulousaines

Rés Vc 1094.



EVCLIDIS POSTERIORES LIB. IX

ACCESSIT XVI. DE SOLIDORV. Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione:

OMNES PERSPICVIS DEMONstrationibus, accuratisq; scholijs illustrati: nunc iterum editi, ac multis locis ad veram accessionem loci restituti:

AVCTORE CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI È SOCIETATE IESV

ROMÆ APVD BARTHOLOMAEVM Grassium. M D LXXXIX.
PERMISSV SVPERIORVM.

EVCLIDES

EVCLIDES

Ex Bibliotheca Collegij Parisiensis Societ. Jesu.
P. Bernard

EVCLIDIS ELEMENTVM SEPTIMVM.

DEFINITIONES.

I.

VNITAS eſt, ſecundū quam vnumquodq; eorum, quæ ſunt, vnum dicitur.

HACTENVS egit Euclides de priori Geometriæ parte, ea ſcilicet, quæ circa plana verſatur; reſtabat altera ſolidorum. Verum ante ei neceſſe fuit de lineis commenſurabilibus, & incommenſurabilibus diſſerere, quod ad proprietates corporum plurimorum, eorumque maxime, quæ regularia nominantur, demonſtrandas, atque vt oportet, explicandas, harum cognitio linearum requiratur, idque adeo, vt abſque eis ſolidorum tractatio imperfecta ſit, neque ſuis numeris abſoluta. Huc accedit, quod abſque eiſdem lineis plurima latera tam planorum, quam ſolidorum, ſi Geometriæ Theoria in opus conferatur, atq; vſum, neq; exprimi queãt, neq; intelligi. Nam non raro pleraque laterum ſunt illæ lineæ, quæ a Græcis ἄλογοι, a Latinis Irrationales appellantur: Vel, ſi non ſunt Irrationales, longitudine certè inter ſe ſunt incommenſurabiles, atque adeo ſub menſuram numerorum non cadunt. Et quia earundem linearum explicatio,

atque intelligentia cum numeris eſt implicata, & coniuncta, vt abſque his nullo modo cognoſcantur; oportuit etiam numerorum explanationem, vt doctrinæ ſuus ordo, ratioq; conſtaret, lineis illis anteponi. Quare hoc libro ſeptimo, & duobus inſequentibus, circa numerorum proprietates, affectioneſque, quantum ea rei Geometricæ inſeruiunt, occupatur, vt in decimo deinde facilius, ac plenius demonſtrationes linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium exequatur.

INCIPIENS igitur more ſuo a principijs, definit initio vnitatem, docetque eam eſſe, ſecundum quam vnumquodque eorum, quæ ſunt, vnum eſſe dicitur. Nam ſecundum vnitatem vnum lapidem, vnum animal, vnum corpus, &c. dicere ſolemus. Caterum vnitas in numeris nullam ſuſcipit diuiſionem, quemadmodum nec punctum in magnitudinibus, vt in primo lib. docuimus.

II.

NVMERVS autem, ex vnitatibus compoſita multitudo.

CVM numerus ſit multitudo quædam ex vnitatibus cõpoſita, manifeſtum eſt, numerum quemlibet tot habere partes, quot ſunt vnitates eum conſtituentes: Ita vt vnitas ſit pars cuiuſuis numeri denominata ab ipſo numero, cuius eſt pars. Vt numerus 8. compoſitus ex octo vnitatibus, diuiditur in totidẽ partes, nimirum in 8. vnitates, quarum qualibet octaua pars dicitur octonarij. Sic quoque numerus 100. ex centum vnitatibus compoſitus, in totidem diſtribuitur, quarum qualibet centeſima ipſius pars eſt, &c.

EX his ſequitur, omnes numeros, quotcunque ſint, inter ſe commenſurabiles eſſe, cum eos vna eademque menſura, nimirum vnitas, vt dictum eſt, metiatur: Id quod omnibus magnitudinibus nulla poteſt ratione conuenire, cum plurimæ earum menſuram communem non habeant, ſed prorſus ſint incommenſurabiles, vt clariſſime lib. 10. oſtendetur.

III.

PARS eſt numerus numeri, minor maioris, cum minor metitur maiorem.

NON eſt diſſimilis hæc definitio illi, qua Euclides lib. 5. partem quantitatis continuæ expoſuit. Sicut enim ibi, ita & hic partem duntaxat aliquotam definit, cum hæc ſolum proprie dicatur metiri totum, vt ibidem latius explicauimus. Itaque numerus 6. dicetur pars omnium horum numerorum 12.18.24.30.60 630. &c. quia ille ſingulos hos metitur. Similiter huius numeri 576. partes erunt omnes hi numeri 3.4.6.8. cum illum ſinguli hi metiantur, vt perſpicuum eſt.

OMNIS autem pars ab eo numero nomen ſibi ſumit, per quem ipſa numerum, cuius pars eſt, metitur; vt 6. pars huius numeri 42. nomen trahit a 7. cum 6. metiatur 42. per 7. Itaq; 6. erit ſeptima pars numeri 42. & in reliquis eodem modo.

IIII.

PARTES autem, cum non metitur.

VVLT Euclides, numerum minorem maioris numeri, quem non metitur, non partem, ſed partes appellari: cuiuſmodi eſt numerus 5. ſi conferatur cum hoc numero 18. Quamuis enim, cum eum non metiatur, niſi per ſuas vnitates, pars ipſius dici non debeat; apte tamen congruenterque partes poterit appellari, quod quinque contineat vnitates, quarum quælibet decimaoctaua pars eſt numeri 18. Vnde numerum 5. dicemus quinque partes decimasoctauas numeri 18. Ex quibus liquido conſtat, Euclidem nomine partis intellexiſſe partem aliquotam tantum, non autem & aliquantam, vt volunt nonnulli; alioquin ſuperuacanea eſſet hæc definitio quarta, quæ partem aliquantam comprehendit.

CÆTERVM partes quæcunque nomen accipiunt a duobus illis numeris, per quos communis duorum numerorum menſura vtrumque eorum metitur, & eum ſcilicet, qui partes

dicitur, & eum, cuius ille partes appellatur: Ita vt ſi communis duorum numerorum menſura metiatur minorem per 3. & maiorem per 5. dicatur minor maioris tres quintæ. Tales partes ſunt 6. huius numeri 10. Nam communis eorum menſura 2. metitur 6. per 3. & 10. per 5. Eadem ratione eundem numerum 6. dicemus ſex decimas eiuſdem numeri 10. cum vnitas, eorum communis menſura, illum metiatur per 6. hunc vero per 10. Idem iudicium habeto & de reliquis.

QVOD ſi roges, cur Euclides hoc loco non ſolum eum numerum minorem definiat, qui maioris pars eſt, verum etiã illum, qui partes: non autem idipſum quinto lib. in magnitudinibus præſtiterit; Neque enim magnitudinem illam minorem, quæ maiorem non metitur, partes appellauit; ſed tantũ eam, quæ maiorem metitur, partem. Reſpondemus, huius rei cauſam eſſe, quod omnis numerus minor cuiuslibet maioris aut pars eſt, aut partes, vt propoſ. 4. huius lib. oſtendetur; partẽ quidem, cum ipſum metitur, partes vero, cum non metitur. At in magnitudinibus longe aliter ſe res habet. Non enim, propoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus, neceſſario minor aut pars, aut partes eſt maioris, cum ea perſæpe ſint incommenſurabiles, vt aperte liber decimus demonſtrabit, atque adeo minor nullo modo contineat plures partes maioris. Nam ſolum in magnitudinibus commenſurabilibus, minor maioris partes plures comprehendit, ſi illum non metiatur. Recte igitur Euclides quinto lib. partem duntaxat in magnitudinibus, hic autem in numeris & partem, & partes explicauit.

V.

MVLTIPLEX vero maior minoris, cum maiorem metitur minor.

QVEMADMODVM ille ſolum numerus minor, maioris pars dicitur, qui maiorem metitur, ita quoq; ille tantummodo numerus maior, minoris appellatur multiplex, qui minor metitur; adeo vt numerus maior, cuius minor eſt pars, ſit viciſſim minoris multiplex. Vt numerus 6. pars eſt numeri 30. & hic illius multiplex eſt, &c. Si vero maiorem minor

non

non metiatur, nullo modo erit maior minoris multiplex. Si enim maior minoris multiplex esset, metiretur minor maiorem, per hanc definitionem. Et vicissim, si maior minoris non fuerit multiplex, minor maiorem non metietur. Nam si metiretur minor maiorem, esset per hanc defin. maior minoris multiplex.

VI.

PAR numerus est, qui bifariam diuiditur.

Vt omnes hi numeri 4. 10. 40. 100. 1000. pares vocantur, quoniam diuiduntur bifariam, siue in duas partes æquales, cum eorum dimidia sint 2. 5. 20. 50. 500.

VII.

IMPAR vero, qui bifariam non diuiditur. Vel, qui vnitate differt a pari.

OMNES hi numeri 3. 11. 15. 37. 101. 1001. impares nominantur, quia bifariam diuidi nequeunt. Vel certe, quia vnitate differunt ab his paribus 4. 10 14. 36. 100. 1000. vel etiam ab his 6. 12. 16. 38. 102. 1002. Ex hoc autem loco perspicue colligi potest, vnitatem in numeris prorsus esse indiuiduam. Si enim diuideretur, omnis numerus impar haberet dimidium; atque adeo bifariam diuidi posset. Nam huius imparis 11. dimidia pars essent quinque vnitates & semis: cuius contrarium Euclides hac definitione docuit.

VIII.

PARITER par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parē.

QVIA numerus par eſt, qui bifariam diuiditur, ſic vt quemlibet parem aliquis numerus par, ſaltem binarius, metiatur. Numerus igitur ille par, quem par numerus metitur per numerum parem, pariter par nominatur. Cuiuſmodi eſt numerus hic par 32. Metitur enim ipſum par numerus 8. per numerum parem 4. Ita quoque par numerus 24. pariter par nuncupabitur, cum eum par numerus 4. metiatur per numerum parem 6. &c.

IX.

PARITER autem impar eſt, quem par numerus metitur per numerum imparem.

QVOD ſi numerum parem metiatur numerus par per imparem numerum, vocabitur is pariter impar. Qualis eſt par numerus 30. Metitur enim eum numerus par 2 per imparem numerum 15. Sic quoq; par numerus 6. metitur eundem per numerum imparem 5. &c.

CÆTERVM ſi rectè duæ proximæ definitiones expendantur, perſpicuum erit, fieri poſſe, vt vnus idemque numerus par, ſit & pariter par, & pariter impar. Nam par numerus 24. cum eum metiatur par numerus 6. per numerum parem 4. pariter par erit. Rurſus quia eundem numerus par 8. metitur per numerum imparem 3. pariter quoque impar vocabitur. Vnde interpretes nonnulli, exiſtimantes hoc eſſe abſurdū, vt excluderent numeros eiuſmodi pares, qui & pariter pares, & pariter impares videntur eſſe, addiderunt vtrique definitioni particulam, tantum, ita vt numerus pariter par, ſecundum eos, ſit, quem par numerus metitur per numerum parem tantum; Pariter autem impar, quem par numerus metitur per numerum imparem tantum. Ita enim fit, vt propoſitus numerus par 24. neq; pariter par ſit, cum eum non tantum metiatur par 6. per parem 4. ſed etiam par 8. per imparē 3. Neq; pariter impar, quod eum metiatur non tantum, vt dictum eſt, par 8. per imparem 3. verum etiam par 6. per parem 4. Sed

apte

apte vocari poterit pariter par, & pariter impar. Participat enim quodammodo naturam vtriusque, vt constat. Itaque tria constituentur genera numeri paris inter se maxime diuersa: Pariter par; pariter impar; pariter par & pariter impar, qui a quibusdam, pariter par & impariter appellatur. Verumtamen hæc omnia vera quidem sunt, & ex sententia Pythagoreorum, Nicomachi, Boetij, & aliorum rectè explicata, sed aliena prorsus ab Euclidis instituto, vt perspicuum est & ex definitionibus traditis, in quibus non reperitur dictio ista, tantum, quam illi apponunt, & ex propos. 32. 33. 34. lib. 9. vbi manifestè omnem numerum parem, quem aliquis par per parem metitur, pariter parem appellat; illum vero, quem aliquis par metitur per imparem, pariter imparem; eum denique, quem par numerus metitur & per parem numerum, & per imparem, vocat pariter parem, & pariter imparem; demonstratque omnes numeros a binario duplos, quales sunt 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. esse pariter pares tantum, hoc est, pares numeros eos metiri per pares numeros tantum; Numeros vero, qui dimidios impares habent, esse pariter impares tantum, id est, pares numeros eos metiri per numeros impares duntaxat, cuiusmodi sunt 6. 10. 14. 18. 22. &c. Numeros denique, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidios habent impares, pariter pares esse, & pariter impares, ut sunt 12. 20. 24. 28. 36. &c. Itaque vult Euclides in demonstrationibus illarũ propositionum, hos postremos numeros, alioſque similes, vere esse, secundum traditas definitiones, pariter pares; rursus eosdem dici rectè pariter impares, quanquam nec tantum pariter pares, nec tantum pariter impares illi sint. Sed hæc planius ex lib. 9. intelligentur.

X.

IMPARITER vero impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

VT hic numerus impar 15. impariter impar dicitur, quoniam numerus impar 3. eum metitur per 5 numerum imparem. Sic quoq; hi numeri impares 9. 21. 25. 27. 33. 35. 39. 135. 2025. & alij infiniti, impariter impares nominantur.

PRIMVS

XI.

PRIMVS numerus eſt, quem vnitas ſola metitur.

QVOD ſi numerum quempiam nullus numerus, ſed ſola vnitas metiatur, ita vt neque pariter par, neque pariter impar, neque impariter impar poſſit dici, appellabitur numerus Primus; quales ſunt omnes iſti 2.3.5.7.11.13.17.19.23.29.31. &c. Nam eos ſola vnitas metitur.

XII.

PRIMI inter ſe numeri ſunt, quos ſola vnitas, communis menſura, metitur.

SICVT numerus ille, quem ſola vnitas metitur; Primus dicitur; ita quoque duo, tres, quatuor, vel etiam plures numeri, quos præter vnitatẽ, nullus numerus, tanquam menſura communis metitur, quamuis ſinguli illorum habeant numeros, qui eos, præter vnitatem metiantur, appellantur inter ſe primi. Vt 15.8. ſunt numeri inter ſe primi, quia ſola vnitas, menſura communis illos metitur: quamuis enim priorem metiantur hi numeri 3. & 5. poſteriorem vero iſti 2. 4. tamen nullus iſtorum vtrumque metitur, ſed ſola vnitas vtriuſque eſt communis menſura. Sic etiam hi numeri 7.10.15. primi inter ſe dicentur, quod præter vnitatem, nullum habeant numerum, menſuram communem, quamquam ſi ſtremi duo habeant communem menſuram hunc numerum 5. Denique vnitas, & quinis numerus, dici poſſunt, licet improprie, numeri inter ſe primi: quia ſola vnitas vnitatem, & numerũ quemuis metitur, tanquam menſura communis.

XIIII.

COMPOSITVS numerus eſt, quẽ numerus quiſpiam metitur.

NVME-

NVMERVM, quem prater vnitatem aliquis alius numerus metitur, appellant Geometra compoſitum, eiuſmodi eſt hic 15. Nam eum vterque horum numerorum 3. 5. metitur. Perſpicuum autem eſt, omnes numeros pares, dempto binario, eſſe compoſitos, cum eos omnes binarius metiatur. Ex quo fit, omnes numeros primos, prater binarium, eſſe impares, quandoquidem ex paribus, ſolus binarius primus eſt, vt diximus.

XIIII.

COMPOSITI autem inter ſe numeri ſunt, quos numerus aliquis, communis menſura, metitur.

DVO numeri, vel plures, quos prater vnitatem, aliquis alius numerus, tanquam menſura communis, metitur, dicuntur inter ſe compoſiti, inter non quilibet ſit compoſitus numerus; quemadmodum & numerus ille, quem prater vnitatem, numerus quiſpiam metitur, compoſitus nominatur. Vt hi numeri 15. 24. compoſiti inter ſe ſunt, quia eos hic numerus 3. tanquam communis menſura, metitur. Ita etiam inter ſe compoſiti erunt hi numeri 7. 21. 35. Nam primus eorum & ſe ipſum, & reliquos duos metitur, licet per ſe ſumptus, Primus vocetur.

XV.

NVMERVS numerum multiplicare dicitur, cum toties compoſitus fuerit is, qui multiplicatur, quot ſunt in ipſo multiplicãte vnitatès, & procreatus fuerit aliquis.

VT numerus 8. multiplicare dicetur numerum 3. quando numerus

numerus 8. ſexie fuerit compoſitus, toties nimirum, quot ſunt in multiplicante 6. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 48. Ita quoque viciſſim numerus 8. multiplicare dicetur numerum 6 ſi numerum 6. octies ſumpſerimus, toties ſcilicet, quot vnitates in multiplicante 8. continentur, procreauerimuſque eundem numerum 48. Eadem denique ratione hi numeri 100. 1000. 20. &c. dicentur multiplicare numerum 456. cum hic ſumptus fuerit centies, millies, aut vicies, &c. genitique fuerint hi numeri 45600. 456000. 9120. &c. Itaque numerus aliquis dicetur produci, gigni, procreariue ex duobus numeris, quando altero alterum multiplicante, productus fuerit. Vt numerus 63. gigni dicitur ex his numeris 7. 9. quia procreatur ex multiplicatione numeri 7. in numerum 9. vel e contrario. Et ſic de reliquis.

SEQVITVR ex his, productum ex multiplicatione numerum eandem habere proportionem ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium habet ad vnitatem. Cum enim ex definitione Euclidis, alteruter multiplicantium toties componendus ſit, vt faciat productum, quoties in altero multiplicantium eſt vnitas; continebit numerus productus toties alterutrum multiplicantium, quoties alter multiplicantium vnitatem continet: ac proinde eandem habebit proportionem numerus productus ad alterutrum multiplicantium, quam alter multiplicantium ad vnitatem habet. Itaque Multiplicatio ſiue ductus vnius numeri in alium ita quoque deſcribi poterit.

MVLTIPLICATIO numeri in numerum, eſt inuẽtio numeri, quĩ ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quã alter multiplicantium ad unitatem.

SIC vides, ex multiplicatione, ſiue ductu 6. in 8. gigni numerum 48. qui ita ſe habet ad 6. vt 8. ad 1. Vel ita ad 8. vt 6. ad 1.

HVIC definitioni addenda eſt hæc alia docens, quid ſit numerum diuidere numerum: quippe quæ neceſſaria omnino ſit ad ea, quæ nos in ijs, quæ ſequuntur, ſumus demonſtraturi.

NVME-

NVMERVS numerũ diuidere dicitur,cũ numerus acceptus fuerit,qui ſuis unitatibus indicat,quoties diuidẽs numer⁹ in diuiſo cõtinetur.

VT numerus 6. diuidere dicetur numerum 48. cum ſumptus fuerit numerus 8.qui octo ſuis unitatibus indicat, diuidentem numerum 6.in diuiſo 48. contineri octies. Ita quoque viciſſim numerus 8.diuidere dicetur eundem numerum 48. ſi acceptus fuerit numerus 6.qui ſex ſuis unitatibus indicat, diuidentem numerum 8.in diuiſo 48.contineri ſexies.

HINC fit, numerum ex diuiſione procreatum eandem habere proportionem ad unitatem, quam numerus diuiſus habet ad diuidentem. Cum enim, vt in definitione diximus, procreatus numerus ſuis unitatibus indicare debeat, quoties diuidens numerus in diuiſo contineatur; continebit numerus productus unitatem toties, quoties numerus diuiſus diuidentem continet: ac proinde eandem proportionem habebit numerus ex diuiſione genitus ad unitatem, quam diuiſus numerus ad diuidentem. Itaque Diuiſio unius numeri per alium ita quoque poterit deſcribi.

DIVISIO numeri per numerum, eſt inuentio numeri,qui ad unitatem habet eandem proportionẽ, quam numerus diuiſus ad diuidentẽ.

ITA vides ex diuiſione numeri 48. per 6.procreari numerum 8.qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 6. Item ex diuiſione eiuſdem numeri 48.per 8.produci numerum 6. qui ita ſe habet ad 1. vt 48. ad 8.

EX his quoque efficitur, diuiſo numero per numerum, diuiſum numerum gigni ex multiplicatione numeri per diuiſionem inuenti in numerum diuidentem. Diuiſo enim numero A, per B, procreetur numerus C.

A,48. B,8. C,6. D,1.

Dico numerum A, gigni ex ductu numeri C, in numerum B. Quoniam enim ex defin. multiplicationis, numerus ex C, in B, procreatus ita ſe habet ad B, vt C, ad unitatẽ D: Ex definitione autẽ diuiſionis, ita quoq; ſe habet A, ad B, vt C, ad unitatẽ D: perſpicuũ eſt, numerum ex C, in B, genitum eſſe numerum A; cum tam ille genitus, q̃ A, eandẽ proportionẽ habeat ad B, quã C, ad D, unitatẽ.

HÆC

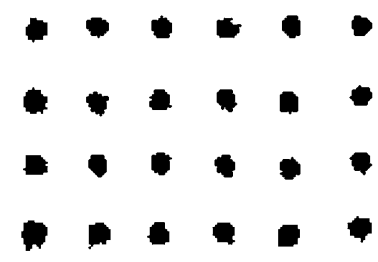
HÆC eminà conueniunt quoque numeris fractis, & integris cum fractis: Id est, Numerus fractus numerum fractū, vel integer fractum, vel fractus integrum (siue fracti adhæreant integri, siue non) multiplicare dicitur, cum toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis: Diuidere autem, cum numerus acceptus fuerit, qui indicet, quoties diuidens in diuiso continetur: Ita vt in multiplicatione inueniatur quoque numerus, qui ad alterutrum multiplicantium eandem proportionem habet, quam alter multiplicantium ad vnitatem: In diuisione autem procreetur numerus, qui ad vnitatem eandem proportionem habet, quam numerus diuisus ad diuidentem, Vt numerus $\frac{1}{2}$. multiplicare dicitur numerum 20. quando numerus 20. toties fuerit compositus, quot sunt in $\frac{1}{2}$. vnitates, procreatusq; fuerit numerus 10. Quia enim vnitas per sui semissem duntaxat est in $\frac{1}{2}$. sumendus est numerus 20. per semissem quoq; sui, quæ est 10. Ita quoque vicissim numerus 20. multiplicare dicetur numerum $\frac{1}{2}$. si $\frac{1}{2}$ sumptus fuerit vicies, toties scilicet, quoties vnitas est in 20. productusq; fuerit idem numerus 10. Vbi vides eandem esse proportionem procreati numeri 10 ad $\frac{1}{2}$. quam habet alter numerus multiplicans 20. ad 1. Vel ita esse 10. ad 20. vt $\frac{1}{2}$. ad 1. Sic etiam $\frac{1}{2}$. & $\frac{1}{3}$. se mutuò multiplicare dicentur, quando $\frac{1}{2}$. sumptus fuerit per tertiam sui partem, quemadmodum $\frac{1}{3}$. tertiam partem vnitatis tantum continet: Vel quando $\frac{1}{3}$. sumptus fuerit per sui semissem, quia & $\frac{1}{2}$. semissem tantum continet vnitatis. Vtroque autem modo procreabitur $\frac{1}{6}$. qui numerus tertia pars est numeri $\frac{1}{2}$. siue $\frac{3}{6}$. & semissis numeri $\frac{1}{3}$. siue $\frac{2}{6}$. Quo pacto autem multiplicatio in numeris fractis facienda sit, in Arithmetica docuimus, demonstrabimusq; ad finem lib. 9.

RVRSVS numerus $\frac{1}{2}$. diuidere dicetur numerum 10. cum sumptus fuerit numerus 20. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. vicies contineri in diuiso numero 10. ita vt eadem proportio sit procreati numeri 20. ad 1, quæ numeri diuisi 10. ad diuidentem $\frac{1}{2}$. Sic quoque $\frac{1}{2}$ diuidere dicetur $\frac{1}{6}$. quando sumptus fuerit numerus $\frac{1}{3}$. indicans, diuidentem numerum $\frac{1}{2}$. non totum contineri in diuiso $\frac{1}{6}$ sed tertiam eius partem. Quam cum numerus $\frac{1}{2}$. idem sit qui $\frac{3}{6}$. liquido constat tertiam

tertiam huius partem, nimirum $\frac{1}{6}$. *contineri in* $\frac{1}{6}$. *Caterum quo pacto fiat diuiſio in numeris fractis, tradidimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonſtrabimus, vbi omnia hæc, quæ de multiplicatione, diuiſioneq; fractorum diximus, planiora fient.*

XVI.

CVM autem duo numeri mutùo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui factus erit, planus appellabitur. Qui vero numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.



OMNIS numerus procreatus ex multiplicatione mutua duorum numerorum, planus appellatur, quia ſecundum ſuas vnitates in longum, & latum diſpoſitas parallelogrammum rectangulum refert, cuius latera ſunt duo numeri multiplicantes, qui idcirco latera numeri procreati uocantur, q ipſum cõtinent, non ſecus, ac recta linea angulum rectũ ambientes, parallelogrammum rectangulum continere dicuntur, vt latius lib. 2. explicauimus. Vt numerus 24 productus ex multiplicatione mutua numerorum 4. & 6. planus appellatur, lateraque eius ſunt 4. & 6. quia eius vnitates in longum, & latum diſpoſitæ, prout latera exigunt, referunt parallelogrammum rectangulum, cuius vnum latus ſex vnitates, alterum vero 4. complectitur. Eodem modo numerus 64. genitus ex mutua multiplicatione numerorum 8. & 8. planus dicitur, eiuſque latera 8. & 8.

CÆTERVM cum infinita ſint genera numerorum planorum apud Arithmeticos, quemadmodum & figura plane apud Geometras: Euclides ſolum definit planũ quadrangularem rectangulum, qui videlicet ſub duobus numeris, ex

quorum

quorum mutua multiplicatione gignitur, continetur; quoniam de hoc ſolo in hiſce libris numerorum diſputat, quòd omni ex parte quadrato Geometrico, & figura altera parte longiori, ſimiles ſint, & æquales, ſiue ambitũ, ſiue aream, capacitatemue ſpectes. Nihil autem dicit de numeris triangularibus, pentagonis, hexagonis, &c. quia hi, licet conueniant triangulo Geometrico, pentagono, hexagono, &c. qđ ad ambitũ ſpectat: tamẽ ſi aream, ſeu capacitatem conſideres, ab ijſdem multum diſcrepant. Id quod perſpicuum eſt cuilibet, qui diligenter hos Euclidis libros, & Arithmeticam Iordani perlegerit.

POTEST autem vnus, idemque numerus planus plura habere latera, cum ex pluribus multiplicationibus procreari poſſit, vt numerus 24. non ſolum latera habet 4. & 6. verum etiam 3. & 8. nec non 2. & 12. quia tam ex multiplicatione 3. in 8. quam 2 in 12. producitur, quemadmodum & idem ex multiplicatione 4. in 6. eſt genitus. Ita quoque numerus planus 100. latera habet 5. & 20: 4. & 25: 2. & 50: 10. & 10. quod ex his omnibus numeris, ſi bini inter ſe multiplicentur, gignatur.

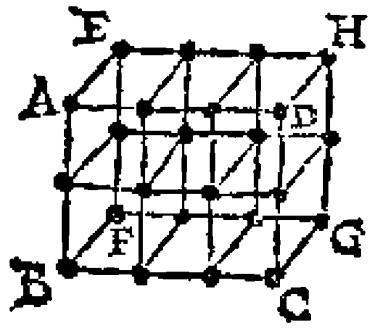
QVIA vero omnem numerum planum metiuntur duo numeri multiplicantes ſe mutuo, quòd quilibet eorum toties ſumptus, quot ſunt in altero vnitates, ipſum procreet, liquido conſtat, omnem planum numerum eſſe compoſitum: Quod etiam de numero ſolido, qui iamiam definietur, dici poteſt. Verum eſt, vnitatem aliquando dici poſſe numerum planum, quamuis improprie; quia eius latera ſunt duæ vnitates, quæ multiplicatæ mutuo ipſam vnitatem producunt.

XVII.

CVM vero tres numeri mutuo ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus erit, ſolidus appellabitur: Qui autem numeri mutuo ſe ſe multiplicarint, latera illius dicentur.

VT quia tres hi numeri 2. 3. 4. mutuo ſeſe multiplicantes, producunt

producunt 24. Nam ex 2. in 3. procreatur numerus 6. & ex 6. in 4. fit 24. Vel ex 2. in 4. gignitur numerus 8. & ex 8. in 3. efficitur 24. Vel denique ex 3. in 4. producitur numerus 12. & ex 12. in 2. generatur 24. appellabitur numerus 24. ſolidus, numeri vero 2, 3, 4. dicentur latera illius, quia eius vnitates in longum, latum atque profundum diſpoſita referunt figuram quandam ſolidam, quæ Parallelepipedum nuncupatur, vt lib. 11. explicabimus, cuius omnes tres dimenſiones exprimunt tres numeri ſe mutuo multiplicates; vnus quidem longitudinem, alius vero latitudinem, & altitudinem reliquus. Nam ſi primũ multiplicetur numerus 2. in 4. efficietur numerus 8. baſis ſolidi numeri longa quatuor unitates, & lata duas: Et ſi hæc baſis in 3. multiplicetur, hoc eſt, ſi accipiatur ter, exurget totus numerus ſolidus 24. altitudinem habens trium vnitatum. At ſi numerus 2. in 3. multiplicetur, habebitur baſis 6. vnitatum, quæ multiplicata in 4. facit totum ſolidum numerum 24. in altitudine habens 4. vnitates. Si denique numerus 3. multiplicetur in 4. procreabitur numerus 12. pro baſe, quæ bis ſumpta faciet numerum eundem ſolidum 24. cuius altitudo continet duas vnitates. Quæ omnia perſpicua ſunt in figura propoſita. Si enim baſis ſit B C G F, octo vnitatum, cuius longitudo B C, quatuor vnitates, & B F, latitudo, duas complectitur; ſuperponentur ei duæ aliæ baſes ſimiles, & æquales, vt totus numerus ſolidus contineat 24. vnitates, eiuſque altitudo B A, vnitates tres. Similiter, ſi baſis ſit A B F E, ſex vnitatum, cuius longitudo A B, tres, & latitudo B F, duas continet vnitates; ſuperponentur ei aliæ tres baſes ſimiles, & æquales, fietque totus ſolidus numerus rurſum 24. altitudinem B C, habens quatuor vnitatum. Si deniq; baſis ſit A B C D, 12. vnitatũ, cuius longitudo B C, quatuor continet, & latitudo A B, tres, ſuperponetur illi alia baſis ſimilis, & æqualis E F G H, conſtabitq; totus numerus ſolidus vnitatibus 24. quarum duæ altitudinẽ dabũt A E, vel B F. Idem hic numerus ſolidus 24. habet hæc latera 6. 2. 2. cum ex his mutuo multiplicatis producatur. Eodemq; modo de aliis numeris ſolidis iudicandũ erit.



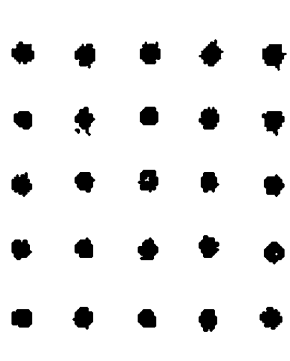
DENIQVE & vnitas interdum ſolidus appellabitur numerus, etſi non proprie, quia eius latera ſunt tres vnitates, ipſam vnitatem ex mutua earum multiplicatione procreãtes.

DEFINIT autem & hic Euclides tantum numerum ſolidum rectangulum, cuius baſes oppoſitæ ſunt parallelæ, & qui continetur ſub tribus numeris, omiſſis infinitis aliis, de quibus Iordanus, ob cauſam in præcedente definitione datam; quia ſcilicet hi prorſus æquales ſunt, & ſimiles cubis, & parallelepipedis Geometricis.

XVIII.

QVADRATVS numerus eſt, qui æqualiter æqualis. Vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

PLANVM illum numerum, qui æqualiter æqualis eſt, hoc eſt, qui ſecundum vnitates ſuas in longum & latum diſpoſitas, refert parallelogrammum rectangulum, cuius longitudo latitudini eſt æqualis, ita vt omnia latera ſint æqualia, vel qui ex multiplicatione mutua duorum numerorum æqualium procreatur, atque adeo ſub illis continetur, vocat quadratum.



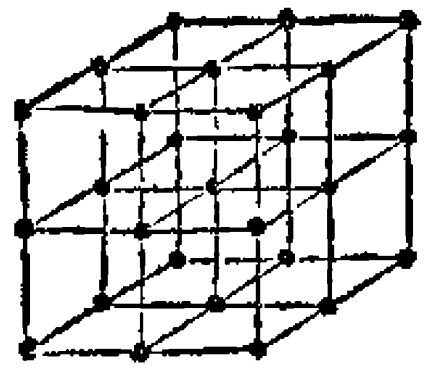
Huiuſmodi eſt numerus 25, contentus ſub numeris æqualibus 5. & 5. hoc eſt, ex eorum mutua multiplicatione genitus. Nam ſi eius vnitates in formam planam redigantur, referet perfectum quadratum Geometricum, in quolibet latere habens quinque vnitates, ideóq; æqualiter æqualis erit.

ALTERVTER autem numerorum æqualium, ſub quibus quadratus numerus continetur, vel ex quorum multiplicatione producitur, latus quadrati à Geometris, radix vero ab Arithmeticis, iterſque appellatur.

CVBVS

XIX.

CVBVS vero, qui æqualiter æqualis æquàliter. Vel, qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.



SOLIDVM quoque illum numerũ vocat cubum, qui eſt æqualiter æqualis æqualiter, id eſt, cuius unitates in longum, latum, atque profundum diſpoſitæ cubum Geometricum referunt, ita vt omnes eius dimenſiones, nimirum longitudo, latitudo, & altitudo, ſiue profunditas, æquales ſint; Vel qui ex multiplicatione mutua trium æqualium numerorum inter ſe producitur. Qualis eſt numerus 27. contentus ſub numeris æqualibus 3. 3. 3. ſiue ex eorum multiplicatione mutua procreatus, cum ex 3. in 3. fiat numerus 9. & ex 9. in 3. gignatur numerus cubus 27. Omnes enim illius unitates in formam ſolidam redactæ referunt perfectum cubum Geometricum, exiſtuntque tam in longitudine, & latitudine, quam in profunditate, tres unitates. Quare ipſe numerus 27. eſt æqualiter æqualis æqualiter.

QVILIBET vero trium numerorum æqualium, ſub quibus cubus continetur, vel ex quorum mutua multiplicatione procreatur, Geometris latus cubi, pleriſque autem Arithmeticis radix dicitur.

XX.

NVMERI proportionales ſunt, cũ primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eędem

partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq; inſuper illius partem, vel eaſdem partes.

VT numeros proportionales in omni genere proportionis rationalis inæqualitatis (cuiuſmodi ſunt omnes numeri inæquales inter ſe collati) complecteremur, addidimus huic definitioni illa verba; vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes. *Definitio enim vulgata Euclidis, quam puto eſſe corruptam, cum manca ſit, atq; imperfecta, complectitur ſolum proportionales numeros in proportione multiplici, ſubmultiplicique, & in proportionibus reliquis minoris inæqualitatis. Nam in proportione multiplici ſunt quatuor quilibet numeri proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; in ſubmultiplici vero, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt; & in reliquis proportionibus minoris inæqualitatis, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem partes fuerit, vt vult definitio Euclidis. At vero ex ea nequaquam deprehendere poſſumus, quinam numeri proportionales ſint in proportione ſuperparticulari, ſuperpartiente, multiplici ſuperparticulari, & multiplici ſuperpartiente. In his enim omnibus, primus numerus ſecundi, & tertius quarti, neq; æque multiplex eſt, neque eadem pars, neque eadem partes; ſed primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, puta vel ſemel, vel aliquoties, & eandem inſuper illius partem, eaſdemue partes; vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ docuimus ad defin. 4. lib. 5. vbi omnes proportiones rationales copioſe explicauimus. Itaque hi numeri 12. 4. 9. 3. proportionales ſunt, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex ſit, nimirũ triplus. Item hi 4. 12. 3. 9. eſt enim primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars, nimirum tertia. Rurſus proportionales ſunt hi numeri 6. 8. 9. 12. quod primus ſecundi, & tertius quarti eadem partes ſint, videlicet tres partes quartæ. Denique & 7. 6. 14. 12. & 7. 4. 14. 8. & 15. 5. 22. 10. & 12. 8. 24. 10. ſunt numeri proportionales.*

Nam

Nam in primo exemplo primus numerus ſecundum, & tertius quartum, ſemel, & inſuper eãdem partem, videlicet ſextam; In ſecundo autem ſemel, & eaſdem partes, nimirum tres quartas; In tertio deinde bis, & adhuc partem eandem, videlicet quintam, continet; In vltimo deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, bis, & præterea eaſdem partes complectitur, puta duas partes quintas. Quod ſi primus numerus ſecundi, & tertius quarti, non ſit æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes, vel deniq; primus ſecundum, & tertius quartum, non æqualiter contineat, eandemque inſuper illius partem, vel eaſdem partes, nullo pacto dicendi erunt numeri propoſiti proportionales.

QVOTIESCVNQVE igitur quatuor numeri proportionales eſſe ponuntur, concedendum neceſſario erit, ſi quidem maiores cum minoribus conferantur, quòd primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex ſit; Vel certe, q primus ſecundum, & tertius quartum, contineat æqualiter, & inſuper eandem partem, vel eaſdem partes: Et contra, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex concedatur: Vel certe primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter dicatur continere, & eandem adhuc partem, vel eaſdem partes, colligetur numeros eſſe proportionales. Quod ſi minores ad maiores referantur, dicanturq; eandem habere proportionem, fatendum erit, primum ſecundi, & tertium quarti, eſſe partem eandem, vel partes eaſdem: Et e contrario, ſi primus ſecundi, & tertius quarti, eadem concedatur pars, vel eadem partes, concludetur numeros ipſos eandem habere proportionem.

DEFINIT autem Euclides eos duntaxat numeros proportionales, qui proportionem eandem inæqualitatis habẽt. Nam ſi de proportione æqualitatis loquamur, perſpicuum eſt, primum ſecundo, & tertium quarto æqualem debere eſſe, vt proportionales numeri dicantur.

EX hac autem definitione aperte colligitur, æquales numeros ad eundem habere eandem proportionem: Et contra eundẽ ad æquales eandem quoque habere proportionem. Item numeros ad eundem habentes eandem proportionẽ, vel ad quos idẽ eandem habet proportionẽ, æquales eſſe. Cũ enim æquales numeri ſint eiuſdem, vel æque multiplices, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe eundẽ æqualiter cõtineant, eandemq;

insuper illius partem, vel partes: Item cum idem numerus æqualium sit vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe illos æqualiter contineat, eandemque insuper eorum partem, uel partes; perspicuum est, æquales numeros ad eundem, vel eundem numerum ad æquales, eandem habere proportionem, iuxta hanc definitionem.

RVRSVS quia numeri ad eundem habentes eandem proportionem, sunt illius vel æquemultiplices, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illum æqualiter continent, eandemq; insuper eius partem, vel partes: Item quia idem numerus habens eandem proportionem ad aliquos, est illorum vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; Vel certe illos æqualiter continet, eandemque insuper illorum partem, vel partes, secundum hanc eandem definitionem; manifestũ est, numeros, qui ad eundem eandem habent proportionem, vel ad quos idem eandem proportionem habet, æquales esse.

PARI ratione infertur, maioris numeri ad eundem, maiorem proportionem esse, quam minoris. Et contra, eiusdem ad minorem, maiorem esse proportionem, quam ad maiorem. Item numerorum illum, qui ad eundem habet maiorem proportionem, maiorem esse: Ad quem autem idem habet maiorem proportionem, minorem esse. Quæ omnia perspicua sunt, si recte hæc definitio intelligatur.

HÆC definitio conuenit etiam numeris fractis, siue integri numeri simul adsint, siue non. Nam quatuor hi numeri sunt proportionales; $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. quia primus secundi, & tertius quarti, æque multiplex est, nimirum duplus, vt patet, si priores duo ad eandem denominationem reuocentur, vt ad $\frac{6}{8}$. $\frac{3}{8}$. & posteriores quoque ad eandem denominationem, vt ad $\frac{2}{4}$. $\frac{1}{4}$. Quo pacto autem fracti numeri ad eandem denominationem reducantur, docuimus in Arithmetica, & ad finem lib. 9. demonstrabimus. Eadem ratione quatuor hi numeri proportionales sunt $2\frac{3}{8}$. $4\frac{9}{12}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{5}{10}$. cum primus secundi, & tertius quarti sit eadem pars, nimirum semissis, vt constat, si priores duo ad hos eiusdem denominationis reuocentur, $\frac{19}{8}$. $\frac{12}{8}$. & posteriores duo ad hos $\frac{5}{4}$. $\frac{10}{4}$. atque ita de cæteris.

SIMI-

XXI.

SIMILES plani, & ſolidi ſunt, qui proportionalia habent latera.

VT planus numerus plano numero ſit ſimilis, non neceſſe eſt, qualibet duo illius latera quibuſuis duobus lateribus huius eſſe proportionalia; ſed ſatis eſt, illum habere aliqua duo latera, quæ ſint proportionalia quibuſdam duobus lateribus huius. Nam hac ratione erunt eorum latitudines longitudinibus proportionales, ſi ſecundum ſuas vnitates in formam planam redigantur, prout latera aſſumpta exigunt. Vt numeri plani 24. & 6. ſimiles ſunt, quoniam illius latera 6. 4. proportionalia ſunt lateribus huius 3. 2. quamuis his eiſdem non ſint proportionalia alia illius latera, nempe 8. 3. vel 12. 2.

EODEM modo, vt duo numeri ſolidi ſimiles ſint, non requiritur, vt quatuor tria vnius latera proportionalia ſint tribus quibuslibet lateribus alterius; ſed ſufficit, vt tria vnius reperiantur tribus alterius proportionalia, quia hac ratione, ſi ſecundum vnitates in formam ſolidam reducantur, erunt eorum latitudines longitudinibus, & longitudines altitudinibus proportionales. Vt numeri ſolid 192. & 24. ſunt ſimiles, quia latera illius 8. 6. 4. lateribus huius 4. 3. 2. ſunt proportionalia, licet his eiſdem nequaquam proportionalia ſint alia latera illius, nimirum 12. 8. 2. vel 16. 4. 3.

ITAQVE poſſunt duo numeri plani, vel ſolidi, eſſe ſimiles, licet lateribus aliquibus vnius acceptis nullo modo reperire queant latera alterius proportionalia. Sunt enim hi numeri plani 24. 6. ſimiles, vt dictum eſt; & tamen ſi latera prioris ſumantur 3. & 8. nulla reperientur in poſteriori illis proportionalia. Sic etiam ſolidi ſimiles ſunt 192. 24. cum tamen lateribus prioris aſſumptis 3. 4. 16. nulla repertantur proportionalia in poſteriori.

HÆC porro ſimilitudo planorum, & ſolidorum reperitur quoque in fractis numeris, ſiue in integris cum fractis. Nam ſi ſumantur quatuor numeri non integri proportionales, & tã duo priores, quàm duo poſteriores inter ſe multiplicentur, procreabuntur plerunque duo plani non integri ſimiles, &c.

Dixi, plerunq;, quia fieri poteſt, vt interdum integri numeri gignantur. Nam ſi duo latera ſint $\frac{2}{3}$*. 6. & alia duo* $1\frac{1}{3}$*. 12. quæ eandem proportionem habent nonuplam, producent priora duo numerum planum 4. poſteriora vero numerum 16.*

XXII.

PERFECTVS numerus eſt, qui ſuis ipſius partibus eſt æqualis.

NVMERVS ille, cui omnes ſuæ partes ſimul ſumptæ (loquimur autem de partibus aliquotis, iuxta defin. 3. huius lib.) æquales ſunt, Perfectus a Mathematicis nuncupatur. Cuiuſmodi ſunt hi numeri 6. 28. 496. Nam primus continet has partes aliquotas duntaxat 1. 2. 3. quæ ſimul ſumptæ conficiũt numerum 6. Secundi autem numeri partes omnes aliquotæ ſunt hæ 1. 2. 4. 7. 14. quarum ſumma conſtituit ipſum numerum 28. Tertius demum numerus has partes habet aliquotas 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. quas omnes in vnam ſummam collectas componere numerum 496. perſpicuum eſt. Qui autem numeri perfecti ſint, & qua via, ac ratione procreentur, (ſunt enim præter tres dictos innumerabiles alij) demonſtrabitur ab Euclide propoſ. vltima lib. 9.

QVOD ſi partes omnes aliquotæ alicuius numeri ſimul acceptæ maiores ſint ipſo numero, dici ſolet numerus ille, Abundans: ſi vero minores, Diminutus.

LVCE autem clarius ex hoc loco colligitur, partem ab Euclide ſumi tantum pro parte aliquota. Nam alioquin omnis numerus eſſet perfectus, cum ſuis ipſius partibus ſit æqualis, ſi quilibet numerus minor numeri maioris pars dici poteſt, ſiue eum metiatur, ſiue non metiatur.

HIS definitionibus ab Euclide propoſitis adiungenda mihi videntur ex Campano, aliſq; ſcriptoribus nonnulla alia, quibus proxime ſuccedent poſtulata, & communes animi notiones, præſertim ea, quibus in demonſtrandis numerorum proprietatibus & Euclides, & eius interpretes vti videntur.

NVME-

XXIII.

NVMERVS numerum metiri dicitur per illum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit.

VT numerus 4. metiri dicitur numerum 12. per 3. quia multiplicatus per 3. producit 12. Eademque ratione numerus 3. eundem numerum 12. metietur per 4. cum ex multiplicatione 4. in 3. numerus 12. producatur. Hoc autem ita esse, hac ratione fiet perspicuum. Cum numerus 4. metiatur 12. per 3. faciet 4. ipsum 12. toties compositus, quoties est vnitas in 3. Quare per defin. 15. numerus 3. multiplicans numerum 4. producet 12. Quia vero vt propos. 16 huius lib. ostendimus, idem numerus producitur ex multiplicatione 4. in 3. qui ex 3 in 4. manifestum relinquitur, eundem numerum 12. pr creari, si numerus 4. multiplicet numerum 3.

HÆC quoque definitio quadrat in numeros non integros. Nam numerus $2\frac{1}{3}$. metiri dicitur numerũ $13\frac{5}{12}$. per $5\frac{3}{4}$. quia multiplicatus per $5\frac{3}{4}$. gignit $13\frac{5}{12}$.

XXIIII.

PROPORTIO numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alterũ, secundum quod illius est multiplex, vel pars, partesve; vel certe illum continet semel, aut aliquoties, & aliquam insuper illius partem, vel partes.

SI numerus 20. cum numero 4. conferatur ea ratione, qua illius multiplex est, nimirũ quintuplus, dicitur haec coparatio, habitudone, Proportio. Sic etiam proportio erit ea habitudo, qua idem numerus 20. cum numero 60. confertur, secundum quod illius tertia pars est, & sic de reliquis.

QVÆ

QVÆ cum ita ſint, perſpicuum eſt, tum demum quatuor numeros dici proportionales, cum primus ſecundi, & tertius quarti, æque multiplex eſt; vel eadem pars, vel eadem partes: Vel certe, cum primus ſecundum, & tertius quartum, æqualiter continet, eandemq́ inſuper illius partem, vel eaſdem partes, vt ſupra defin. 20. docuimus.

XXV.

TERMINI, ſiue radices proportionis dicuntur duo numeri, quibus in eadẽ proportione minores ſumi nequeunt.

XXVI.

CVM tres numeri proportionales fuerint; Primus ad tertium, duplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint; Primus ad quartum, triplicatam rationem habere dicitur eius, quam habet ad ſecundum: Et ſemper deinceps vno amplius, quamdiu proportio extiterit.

HÆC definitio, vt ad magnitudines pertinet, copioſe explicata eſt defin. 10. lib. 5. Vnde cum omnia, quæ ibi ſcripſimus, ad numeros huc transferri facile poſſint, non eſt, quod iterum ea hic repetamus.

XXVII.

QVOTLIBET numeris ordine poſitis, proportio primi ad vltimum com-

ponī

poni dicitur ex propottionibus primi ad ſecundum, & ſecundi ad tertium, & tertij ad quartum, & ita deinceps, donec extiterit proportio.

HOC ita ſe habere, pluribus verbis à nobis demonſtratum eſt ad defin. 5. lib. 6.

POSSVNT etiam huc referri definitiones illæ in quinto libro traditæ de alterna ratione, inuerſaque; de compoſitione, diuiſione, & conuerſione rationis; de ratione ex æqualitate; & de proportione ordinata, ac perturbata. Omnes enim hi modi argumentationum, quæ circa proportiones verſantur, demonſtrabuntur quoque hoc ſeptimo libro proportionibus numerorum conuenire.

POSTVLATA, SIVE PETITIONES

I.

POSTVLETVR, cuilibet numero quotlibet poſſe ſumi æquales, vel multiplices.

II.

QVOLIBET numero ſumi poſſe maiorem.

QVAMVIS enim numerus infinite diminui nequeat, ſed neceſſario ad vnitatem indiuiduam diminutio deueniat; tamen augeri poteſt infinite per additionem continuam vnitatis. Quare quolibet numero propoſito maior exhiberi poteſt, ille videlicet, qui ex vnius vnitatis, vel etiam plurium additione conſurgit.

AXIO-

AXIOMATA, SIVE PRONVNTIATA.

I.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem æque multiplices ſunt, inter ſe ſunt æquales.

II.

QVORVM idē numerus æque multiplex eſt, vel æque multiplices ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt.

III.

QVI numeri æqualium numerorum, vel eiuſdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

IIII.

QVORVM idem numerus, vel æquales, eadem pars, vel eædem partes fuerint, æquales inter ſe ſunt.

V.

VNITAS omnem numerum per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum metitur.

NAM vnitas ſumpta toties, quot ſunt in numero propoſito vnitates, ipſum conſtituit. Quamobrem ipſum metitur per vnitates, quæ in ipſo ſunt, hoc eſt, per ipſummet numerum ex ſuis vnitatibus conſtitutum.

VI.

OMNIS numerus ſe ipſum metitur per vnitatem.

CVM quilibet numerus ſemel ſumptus ſibi ipſi ſit æqualis, manifeſtum eſt, omnem numerum ſeipſum metiri per vnitatem.

VII.

SI numerus numerum multiplicans, aliquẽ produxerit, metietur multiplicãs productum per multiplicatũ, multiplicatus autem eundem per multiplicantẽ.

NVMERVS enim A, numerum B, multiplicans producat numerum C. Dico A, metiri ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Cum enim ex defin. 15. numerus B, toties compoſitus conſtituat ipſum C, quot ſunt in A, vnitates; perſpicuum eſt B, metiri ipſum C, per A, & eadem ratione A, ipſum eundem C, metiri per B, cum etiam B, ipſum A, multiplicans procreet numerum C, vt demonſtrabitur propoſ. 16. huius lib.

A .... B . . .
C .....

VIII.

SI numerus numerum metiatur, & ille, per quem metitur, eundem metietur per eas, quæ in metiente ſunt, vnitates, hoc eſt, per ipſum numerum metientem.

VT

VT quia numerus 6. metitur numerum 18. per 3. metietur & numerus 3. eundem numerum 18. per 6. hoc eſt, per vnitates, quæ in metiente numero 6. reperiuntur. Hoc autem ita eſſe, ad hunc modum confirmabimus. Quoniam numerus 6. metitur 18. per 3. fiet numerus 18. ex multiplicatione 6. in 3. vel 3. in 6. per defin. 23. Quare per axioma præcedens numerus 3. numerum 18. metietur per 6.

IX.

SI numerus numerum metiens, multiplicet eum, per quem metitur, vel ab eo multiplicetur, illum quem metitur, producet.

METIATVR enim numerus A, numerum C. per B. Dico A, multiplicantem ipſum B, vel multiplicatum a B, producere ipſum C. Nam numerus A, numerum C, metiri dicitur per eum numerum, quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, ipſum C, producit, per defin. 23. Cum ergo A, metiri ponatur ipſum C, per B; perſpicuum eſt, numerum A, multiplicantem ipſum B, vel ab eo multiplicatum producere ipſum C.

A .... B ...
C .....

X.

NVMERVS quotcunque numeros metiens, compoſitum quoque ex ipſis metitur.

METIATVR numerus A, numeros B C, C D. Dico eundem A, metiri quoq; ex ipſis compoſitum B D. Cum enim A, metiatur ipſos B C, C D; erit tam B C, quam C D, ipſius A, multiplex. Diuiſo ergo B C, in partes B E, E C, ipſi A, æquales,

æquales, & ipſo C D, in partes C F, F G, G D, eidem A, æquales; erit numerus B D, compoſitus ex omnibus partibus B E, E C, C F, F G, G D, ipſi A, æqualibus, multiplex ipſius A. Quare A, ipſum B D, metitur. Quod eſt propoſitum.



XI.

NVMERVS quemcunq; numerum metiens, metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur.

METIATVR numerus A, numerum B; & B, numerum C D. Dico eundem A, metiri quoque numerum C D, quem B, metitur. Cum enim B, metiatur ipſum C D; erit C D, ipſius B, multiplex. Diuiſo ergo C D, in partes C E, E D, ipſi B, æquales; metietur A, ipſos numeros C E, E D; quandoquidem numerum B, tam numero C E, quam E D, æqualem, metiri ponitur. Igitur idem A, per pron. 10. metietur quoque numerum C D, ex C E, E D, compoſitum. Quod eſt propoſitum.

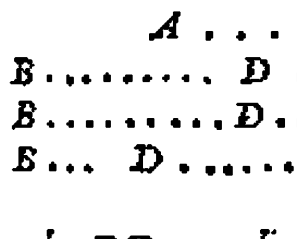


XII.

NVMERVS metiens totum & ablatum, metitur & reliquum.

METIATVR numerus A, totum B C, & ablatum B D. Dico eundem A, metiri quoque reliquum D C. Cum enim A, metiatur & E C, & B D; erit tam B C, quam B D, ipſius A, multiplex, aut certè E D, ipſi A, æqualis erit.

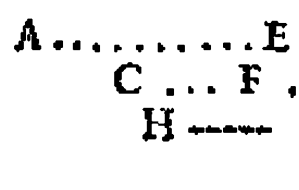
Diuiſo



Diuiſo ergo tam BC, quam BD, in partes ipſi A, æquales; Erit reliquus numerus DC, vel vna pars numeri BC, ipſi A, æqualis, vel plures, atque adeo DC, æqualis erit ipſi A, vel eius multiplex. Metitur igitur A, ipſum DC. Quod eſt propoſitum.

1. THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI duobus numeris inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentẽ, quoad aſſumpta ſit vnitas; qui principio ꝓpoſiti ſunt numeri, primi inter ſe erũt.



SINT duo numeri propoſiti inæquales AB, CD, quorum CD, minor ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur: & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB. Et in hac alterna detractione nunquam numerus reliquus præcedentem, a quo fuit detractus, metiatur, donec ad vnitatem GB, quæ quidem præcedentem numerum FD, metitur, detractio perueniat. Dico numeros AB, CD, eſſe inter ſe primos, hoc eſt, ſolam vnitatem communi menſura eos metiri. Si enim non dicantur inter ſe primi, metietur eos aliquis numerus, qui ſit H, communi menſura, præter vnitatem. Quia ergo H, metitur numerum CD; & CD, numerum AE, (quod CD, vel pars ſit ipſius AE, vel certe ei æqualis, cum detractus ex AB, reliquerit numerum EB,) [a] metietur quoque H, ipſum AE. At H, metitur quoque totum AB. [b] Igitur & reliquum

[a] 11. *pron.*
[b] 12. *pron.*

quum EB, metietur. Metitur autem EB, ipſum CF.[a] Igitur & H ipſum CF, metietur; Ac propterea, cum & totum CD, metiatur,[b] metietur quoq; reliquum FD. Cum ergo FD, metiatur ipſum EG;[c] metietur etiam H, ipſum EG: Metiebatur autem & H, totum EB.[d] Reliquam igitur vnitatem quoque GB, numerus H, metietur, partem totum. Quod eſt abſurdum. Non igitur numerus aliquis, præter vnitatem, numeros AB, CD, metitur: Ac proinde primi inter ſe ſunt. Quamobrem, ſi duobus numeris inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 11. pron.
[b] 12. pron.
[c] 11. pron.
[d] 12. pron.

SCHOLIVM.

CONVERTEMVS cum Campano hanc propoſitionem, hoc modo.

SI duobus numeris inter ſe primis propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; nunquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas.

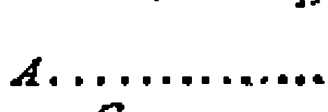
SINT duo numeri inter ſe primi AB, CD, quorum minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, detrahatur; & reliquus EB, ex CD, quoties etiam poteſt; & reliquus FD, ex EB, relinquens GB. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquum metiri præcedentem, quoad vnitas aſſumatur. Metiatur enim, antequã ad vnitatẽ detractio perueniat, ſi fieri poteſt, reliquus numerus GB, præcedentem FD, ex EB, ablatum. Quia igitur numerus GB, numerum FD, metitur; & FD, ipſum EG,[e] metietur quoque GB, ipſum EG. Cum ergo GB, & ſe ipſum metiatur,[f] metietur quoque numerum EB, ex EG, GB, compoſitum: Metitur autem EB, ipſum CF.[g] Igitur & GB, eundem CF, metietur: Atque adeo cum & ipſum FD, poſitus ſit metiri;

A ..... E .. G -- B
C ..... F .. D

[e] 11. pron.
[f] 10. pron.
[g] 11. pron.

a 10. pron. b 11. pron. c 10. pron.

a metietur quoque ipſum CD, ex CF, FD, compoſitum. At vero CD, metitur ipſum AE. b Igitur & eundem AE, numerus GB, metietur: Ac proinde, cum & ipſum EB, metiatur, vt oſtenſum eſt; c metietur & ipſum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Quare cum numerus GB, metiatur numeros AB, CD, ipſi erunt inter ſe compoſiti. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe primi. Nunquam ergo numerus aliquis reliquus precedentem metietur, donec aſſumpta ſit vnitas. Quod eſt propoſitum.



EODEM modo & hoc verum eſt.

SI propoſitis duobus numeris inter ſe compoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione; detractio ad vnitatem uſque non perueniet, ſed ad numerum, qui precedentem detractum metiatur.

d 2. ſeptimi. e 3. ſeptimi.

NAM ſi detractio huiuſmodi ad vnitatem vſque perueniret, eſſent propoſiti numeri inter ſe primi, d vt Euclides demonſtrauit. Quod eſt abſurdum, cum ponantur inter ſe compoſiti.

EX his facile dignoſcemus, an duo quicunque numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Nam detractio ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione; ſi nunquam reliquus precedentem metiatur, quoad aſſumpta ſit vnitas; ipſi erunt inter ſe primi, e vt Euclides demonſtrauit: Si verò reliquus aliquis numerus precedentem metiatur, ipſi erunt inter ſe compoſiti, cum ille idem reliquus numerus vtrumque numerum propoſitum metiatur, vt perſpicuum eſt ex demonſtratione ſuperioris huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliquus numerus GB, metiri dicebatur precedentem numerum FD, oſtenſum fuit, eundem reliquum GB, vtrumque AB, & CD, metiri.

∴

PROBL.

PROBL. 1. PROPOS. 2.

2.

DVOBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR duo numeri AB, CD, non primi inter ſe, quorum maximam communem menſuram oporteat reperire. Detrahatur minor CD, ex maiore AB, quoties poteſt, relinquatque EB, numerum, qui ex CD, ſubtractus relinquat FD, & ſic deinceps ſemper minor de maiore ſubtrahatur alterna quadam detractione; in qua quidē peruenietur ad numerum, qui præcedentem metiatur. Nam ſi ad vnitatem deueniretur, [a] numeri AB, CD, eſſent inter ſe primi; quod eſt contra hypotheſim. Peruentum ergo iam ſit ad reliquum numerum FD, qui detractus ex EB, nihil relinquat, ſed eum metiatur. Dico FD, eſſe maximam menſuram communem numerorum AB, CD. Quod enim vtrumque metiatur, ita oſtendemus. Quia FD, metitur ipſum EB; & EB, ipſum CF; [b] metietur quoque FD, ipſum CF; atq; adeo eum & ſeipſum metiatur, [c] metietur & totum CD, ex CF, FD, compoſitum. At CD, ipſum AE, metitur. [d] Igitur & FD, eundem AE, metietur. Ac propterea cum FD, metiatur quoque ipſum EB, [e] metietur etiam totum AB, ex vtroque AE, EB, compoſitum. Metitur igitur FD, vtrumque numerum AB, CD.

A ..... E ..... B
C ..... F .. D
G ——

[a] 1. ſeptimi.

[b] 11. pron.
[c] 10. pron.
[d] 12. pron.
[e] 10. pron.

QVOD autem FD, ſit maxima menſura communis illorum, ita probabimus. Si enim fieri poteſt, detur maior menſura communis G, quam FD. Quoniam ergo G, metitur vtrumque AB, CD; Et CD, metitur ipſum AE, [f] metietur quoque G, ipſum AE. [g] Igitur & reſiduum EB: At vero EB, metitur CF. [h] Metietur ergo & G, eundem CF. [i] Igitur & reſiduum FD; maior minorem.

[f] 11. pron.
[g] 12. pron.
[h] 11. pron.
[i] 12. pron.

Quod eſt abſurdum. Non ergo maior numerus, quam FD, numeros AB, CD, metitur; Ac proinde FD, maxima eſt menſura numerorum AB, CD.

QVOD ſi minor numerus CD, metiatur maiorem AB, ita vt detractus ex AB, nihil relinquat, erit ipſe maxima amborum menſura communis, cum & ſe ipſum metiatur, vt in hac figura apparet. Duobus igitur numeris datis non primis inter ſe, &c. Quod erat faciendum.

A ..... B
C ..... D

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, numerum metientem duos numeros, metiri quoque maximam eorundem communem menſuram.

HOC elicitur ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum fuit FD, eſſe maximam menſuram ipſorum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, numerum G, ſi metiatur numeros AB, CD, metiri quoque numerum FD, maximam eorum menſuram communem. Eademque ratio eſt de cæteris.

SCHOLIVM.

EX ijs quæ dicta ſunt, facile cum Campano experiemur, an quotlibet numeri propoſiti ſint inter ſe primi, nec ne. Sint enim tres numeri A, B, C. Primum ergo experior, per ea, quæ ad propoſ. 1. docuimus, an duo A, & B, ſint inter ſe primi. Qui ſi fuerint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, quod nullam poſſint habere menſuram communem, præter vnitatem, propter numeros A, & B, inter ſe primos.

A .....
B .....
C .....

*SI vero A, & B, fuerint inter ſe compoſiti, * ſit eorum maxima menſura communis numerus D; quæ ſi metiatur & numerum C, perſpicuum eſt, tres numeros A, B, C, eſſe inter ſe compoſitos, cum habeant numerum D, communem menſuram.*

* 2. ſeptimi.

QVOD

QVOD ſi D, maxima menſura numerorum A, & B, non metiatur numerum C; erunt C, & D, vel inter ſe primi, vel non: Si ſint inter ſe primi, non erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti, ſed inter ſe primi. Si enim dicantur eſſe inter ſe compoſiti, ita vt habeant numerum communem menſuram, metietur eiuſmodi communis menſura numerum D, maximam menſuram numerorum A, & B, per coroll. huius propoſ. Quare cum eadem illa menſura metiatur quoque numerum C, non erunt inter ſe primi numeri C, & D. Quod eſt contra hypotheſim. Si autem C, & D, non ſint inter ſe primi, erunt tres numeri A, B, C, inter ſe compoſiti. [a] Inuenta enim numerorũ C, & D, maxima menſura communi E; cum E, metiatur ipſum D; D, autem ipſos A, & B; [b] metietur quoque E, eoſdem A, & B. Quare cum idem E, metiatur quoque ipſum C; metietur E, tres numeros A, B, C; Ac propterea ipſi inter ſe erunt compoſiti. Quod eſt propoſitum.

A .....
B .....
C .....
D ...
A .....
B .....
C .....
D .... E ..

[a] 2. ſeptimi.

[b] 33. prop.

SIMILI arte explorabimus, an plures numeri, quam tres, ſint inter ſe primi, an potius inter ſe compoſiti. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, experiendum id erit primum in tribus; ſi quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficienda, vt de tribus numeris datis diximus.

PROBL. 2. PROPOS. 3. 3.

TRIBVS numeris datis non primis inter ſe, maximam eorum communem menſuram reperire.

DENTVR tres numeri A, B, C, non primi inter ſe, quorum maximam menſuram communem oporteat reperire. [c] Sit D, maxima menſura numerorum A, & B; Si ergo D, metiatur quoque ipſum C, perſpicuum eſt D,

esse maximam mensuram numerorum datorum A, B, C. Nam si maior numerus dicatur metiri numeros A, B, C, metietur idem; per coroll. propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B, maior numerus minorem. Quod est absurdum. Si vero D, non metiatur ipsum C; erunt saltem D, & C, inter se compositi. Cum enim sint A, B C, inter se compositi metietur quæcunque illorum mensura communis, per coroll propos. 2. huius lib. numerum D, maximam mensuram numerorum A, & B; Cum ergo eadem illa mensura metiatur etiam ipsum C; erunt D, & C, inter se compositi. [a] Sit eorum maxima mensura E. Dico E, esse maximam mensuram communem datorum numerorum A, B, C. Quod enim sit eorum mensura communis, hac ratione demonstrabitur: Quoniam E, metitur numeros C, & D; at D, ipsos A, & B; [b] metietur quoque E, ipsos A, & B; Ac proinde tres numeros A, B, C, metietur.

[a] 2. septimi.

[b] 11. pron.

A .....
B .... D ....
C .... E .. F ——

QVOD autem E, sit maxima eorum communis mensura, perspicuum est. Si enim fieri potest, sit F, maior quam E, eorum mensura communis. Quia igitur F, metitur numeros A, & B; metietur quoque, per coroll propos 2 huius lib. numerum D; maximam eorum mensuram communé. Metitur autem & C. Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque E, eorum mensuram maximam, ex eodem coroll. numerus maior minorem: quod est absurdum. Non ergo maior numerus, quã E, numeros A, B, C, metitur; Atque adeo E, maxima mensura est ipsorum: Quamobrem tribus numeris datis non primis inter se, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

HINC perspicuum est, numerum metientem tres numeros, metiri quoque maximam eorum communem mensuram.

HOC

HOC etiam colligitur ex vltima parte demonſtrationis. Oſtenſum enim eſt ibi, numerum F, ſi metiatur numeros A, B, C, metiri quoque numerum E, maximam illorum menſuram communem: Eademque in cæteris eſt ratio.

PARI ratione, pluribus numeris datis, quam tribus, non primis inter ſe, maximè eorum communis menſura inuenietur, locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima menſura communis trium numerorum: ſi quinque, quatuor numerorum accipienda erit primum maxima communis menſura, &c. Reliqua uero omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

THEOR. 2. PROPOS. 4. 4.

OMNIS numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes.

SINT duo numeri A, minor, & B, maior. Dico A, eſſe aut partem, aut partes ipſius B.

Sint enim primum A, & B, inter ſe primi. Quia igitur quælibet vnitas numeri A, pars eſt numeri B, perſpicuum eſt, numerum A, eſſe partes numeri B, tot nimirum, quot ſunt in A, vnitates.

A .....
B .....

SINT deinde A, & B, non primi inter ſe, ſed inter ſe compoſiti, & metiatur A, ipſum B. Quo poſito, manifeſtum eſt A, partem eſſe numeri B, ex defin. 3. huius lib.

A .....
B .....

SED iam A, non metiatur ipſum B, [a] inuenta autem maxima eorum menſura communis ſit C; diuidaturque numerus A, in partes AD, DE, EF, quarum ſingulæ ipſi C, ſint æquales. [b] Quia igitur C, pars eſt ipſius B, cum ipſum metiatur; erit quoque AD, pars eiuſdem B, ſimiliter & DE, & EF; Ac propterea totus numerus A, eſt partes numeri B, tot videlicet,

A..D..E..F
B.....
C..

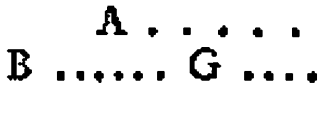
[a] 2. ſeptimi.
[b] 3. defin.

videlicet, quoties C, in A F, continetur. Omnis igitur numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. Quod demonſtrandum erat.

5. THEOR. 3. PROPOS. 5.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eadem pars erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus A, eadem pars numeri B C, quæ eſt numerus D, numeri E F. Dico vtrumque numerum A, & D, ſimul vtriuſq; numeri B C, & E F, ſimul eandem eſſe partem, quæ eſt vel A, ipſius BC, vel D ipſius E F.



Diuiſis enim numeris B C, E F, in partes BG, GC; EH, HF ipſis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF propterea quod eadem pars eſt A, ipſius BC, quæ D, ipſius E F Quia igitur A, & B G, æquales ſunt; ſi illis addantur æquales D, & E H; erunt A, & D, ſimul æquales ipſis B G, & E H, ſimul: Eodem argumento erunt A, & D, ſimul ipſis G C, & H F, ſimul æquales: Et ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in B C, E F; aggregatum numerorum A, & D, tot aggregatis partium numerorum B C, & E F, æquale erit, quoties A, in BC, vel D, in EF, continetur: Ac propterea eadem pars erit vterque A, & D, ſimul vtriuſque B C, & EF, ſimul, quæ eſt A, ipſius BC, vel D, ipſius E F. Si numerus ergo numeri pars fuerit &c. Quod erat oſtendendum.

SCHO-

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt in numeris fractis, eademq; prorſus demonſtratio adhibebitur: ut in hoc exẽplo apparet, vbi numerus A, numeri BC, & numerus D, numeri EF, eadem pars eſt; ac proinde vterq; ſimul A, D, vtriuſque BC, EF, ſimul eadem pars oſtendetur, quæ A, ipſius BC: ſi nimirum BC, EF, diuidantur in partes BG, GC; EH, HF, ipſis A, D, æquales, &c.

A, $\frac{2}{9}$ D, $\frac{3}{7}$
B, $\frac{2}{9}$ G, $\frac{2}{9}$ C E, $\frac{4}{7}$ H, $\frac{3}{7}$ F

QVOD ſi quando contingat, numerum fractum diuidi non poſſe in partes æquales propoſitas, propterea quòd numerator in eas partes ſecari nequeat, multiplicandus erit tam numerator, quàm denominator per numerum partium. Proueniet enim hac ratione alia fractio priori æquiualens, & cuius numerator in propoſitas partes diuidi poteſt. Vt ſi fractio $\frac{5}{9}$. ſecanda ſit in duas partes æquales, ducendus erit vterq; eius numerus in 2. ſi in tres, in 3. ſi in quatuor, in 4. &c. vt prodeant fractiones $\frac{10}{18}$. $\frac{15}{27}$. $\frac{20}{36}$. quarum prima ſecabitur in has duas partes æquales $\frac{5}{18}$. $\frac{5}{18}$ ſecũda in has tres $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. $\frac{5}{27}$. tertia vero in has quatuor, $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$. $\frac{5}{36}$.

RVRSVS quando adſunt integra, reuocanda prius erũt vna cum fractione ad vnam fractionem, deinde eodem modo tam numerator, quàm denominator multiplicandus per numerum partium, &c. Vt ſi numerus $4\frac{3}{7}$. ſecandus ſit in tres partes, reducemus eum prius ad hanc vnicam fractionem, $\frac{31}{7}$. deinde vtrumque eius numerum per 3. multiplicabimus, vt fiat fractio $\frac{93}{21}$. cuius tres partes æquales ſunt $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. $\frac{31}{21}$. Atque hæc in ſequentibus quoque propoſitionibus obſeruanda ſunt, quando fractionibus accommodantur: Et ſuper nomine fractionum intelligendi quoque ſunt numeri integri cum fractis: Item quando aliqui fracti ſunt, & alij integri.

EODEM modo demonſtrabimus & hoc, quod ſequitur.

SI vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, uel numerus alterius numeri eadem pars; Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus

ſimul

ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri.

HOC autem perſpicue in his appoſitis exemplis apparet. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.

A.	D.	A.	D...
B. G. C	E. H. F	B. G. C	E... H... F

POSSVMVS etiam hanc propoſitionem ad quotcunque numeros transferre, hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorũ, eadem pars; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius.

SINT numeri A, B, C, numerorum DE, FG, HI, ſinguli ſingulorum eadem pars. Dico omnes numeros A, B, C, ſimul omnium numerorum DE, FG, HI, ſimul eandem eſſe partẽ, quæ eſt A, ipſius DE.

A....	B...	C..
D.... K.... E	F... L... G	H.. M.. I

Diuiſis enim numeris DE, FG, HI, in partes ipſis A, B, C, æquales; erit multitudo partium numeri DE, æqualis multitudini partium tã numeri FG, quam numeri HI. Quia igitur A, & DK, æquales ſunt, ſi illis addantur æquales B, & FL, erunt A, B, ſimul æquales ipſis DK, FL, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales C, & HM; erunt quoque A, B, C, ſimul æquales ipſis DK, FL, HM, ſimul. Simili ratione erunt A, B, C, ſimul æquales ipſis KE, LG, MI, ſimul; & ſic deinceps, ſi plures partes fuerint in DE, FG, HI, aggregatum numerorum A, B, C, tot aggregatis partium numerorum DE, FG, HI; æquale erit, quoties A, in DE, continetur. Quamobrem eadem pars erunt A, B, C, ſimul ipſorum DE, FG, HI, ſimul, quæ A, ipſius DE.

IDEM ſequitur, ſi loco vnius numerorum A, B, C, ſumatur

ſumatur unitas, vel loco plurium, vel etiam omnium, plures unitates, vt de duobus dictum eſt. Id quod ſequentes figuræ indicant.

A.	B.	C...	A.	B.	C.
D.K.E.	F..L..G	H...M...I	D.K.E	F.L.G	H.M.I

HÆC etiam fractis numeris conueniunt. Nam ſi quotcunque fracti numeri, quotcunque fractorum numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars fuerint; Et omnes omnium ſimul eadem pars erunt, quæ vnus vnius. Quod eodem modo demonſtrabitur: etiamſi aliqui numerorum ſint integri, vel vnitates; vt hic videre licet.

A, 1.		B, $\frac{1}{2}$.		C, $\frac{3}{4}$.	
D, 1 K, 1 E		F, $\frac{1}{2}$ L, $\frac{1}{2}$ G		H, $\frac{3}{4}$ M, $\frac{3}{4}$ I	

THEOREMATI quoque primo quinti lib. ſimile proponemus, in hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri quotcunq; numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, æque multiplices: quam multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erunt & omnes omnium.

DEMONSTRATIO eadem hic eſt, quæ in lib. 5. Quod tamen aliter ita etiam demonſtrabimus. Sint A, B, C, numeri numerorum D, E, F, æque multiplices, ſinguli ſingulorum. Dico & omnes A, B, C, ſimul omnium D, E, F, ſimul tam multiplices eſſe, quam eſt A, multiplex ipſius D. Cum enim tam ſit multiplex A, ipſius D, quã eſt B, ipſius E, & C, ipſius F; erit e contrario D, eadem pars ipſius A, quæ E, ipſius B, & F, ipſius C. Per ea igitur, quæ nuper a nobis demonſtrata ſunt, erunt D, E, F, ſimul eadem pars

A. B. C...
D... E... F..

ipſorum

ipſorum A, B, C, ſimul, quæ D, ipſius A; Ac propterea e contrario tam multiplices erunt omnes A, E, C, ſimul, omnium D, E, F, ſimul, quam eſt multiplex A, ipſius D.

SI numeri A, B, C, fracti ſint, & ipſorum D, E, F, fractorum æquemultiplices: quàm multiplex eſt vnius vnus, tam multiplices erunt & omnes omnium. Vt ex demonſtratione liquet.

QVOD ſi loco vnius numerorum D, E, F, aſſumatur vnitas, vel etiam loco plurium, vel omnium, plures vnitates, theorema eodem modo demonſtrabitur, vt ex ſequentibus figuris apparet.

A .. B .... C	A .. E .. C ..
D . E .. F ...	D . E . F .

6. ## THEOR. 4. PROPOS. 6.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterque vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Dico vtrumque numerum AB, & DE, ſimul vtriuſque numeri C, & F, ſimul eaſdem partes eſſe, quæ eſt AB, ipſius C, vel DE, ipſius F; Diuiſis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB; DH, HE numerorũ C, & F; erit multitudo partium in numero AB, æqualis multitudini partium in numero DE; propterea quod eædem partes eſt numerus AB, numeri C, quæ numerus DE, numeri F. Quia igitur, quæ pars eſt AG, numeri C, eadem eſt DH, numeri F; erit vterque AG, DH, ſimul eadem pars vtriuſque C, F, ſimul, quæ AG ipſius C, vel DH, ipſius F. Eadem ratione erit vterque GB, HE, ſimul eadem pars vtriuſq; C, F,

A ... G ... B | D ... H .... E
C ..... | F .....

7. ſ p m.

C,F, ſimul, quæ GB, ipſius C, vel HE, ipſius F: Et ſic de inceps, ſi plures partes fuerint in AB, DE, erunt tot aggregata partium in numeris AB, DE, contenta, quorum quodlibet eadem pars eſt numerorum C, F, ſimul, quæ pars eſt AG, ipſius C; quot partes eædem eſt numerus AB, ipſius C, vel DE, ipſius F: Ac proinde eædem partes erit vterque numerus AB, DE, ſimul, vtriuſque numeri C,F, ſimul, quæ AB, ipſius C, vel DE, ipſius F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EADEM hæc propoſitio locum habet in numeris fractis, vnà cum demonſtratione: vt hoc exemplum demonſtrat.

$A, \frac{1}{9}\ G, \frac{1}{9}\ B$ $\quad$ $C, \frac{3}{9}$ $\qquad$ $D, \frac{2}{7}\ H, \frac{2}{7}\ E$ $\quad$ $F, \frac{6}{7}$

SED & hanc propoſitionem ad quotcunque numeros ſiue integros, ſiue fractos extendentes, hoc modo ampliſicabimus.

SI ſint quotcunque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eædem partes; Et omnes omnium ſimul eædem partes erunt, quæ vnus vnius.

EADEM enim eſt demonſtratio, ſi modo pro quinta propoſ. aſſumatur id, quod ſecundo loco demonſtrauimus in ſcholio præcedenti; vt inſpectum eſt.

A.. K..B	C... L...D	E....M....F
G.....	H.....	I.....

THEOR. 5. PROPOS. 7. 7.

SI numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadē pars erit, qualis totus totius.

SIT numerus AB, eadem pars numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eandem esse partem reliqui FD, quæ est totus AB, totius CD.

A . . . E . . B
G . . . . C . . . . . F . . . . D

Ponatur enim EB, numeri GC, eadem pars, quæ est AE, ipsius CF, vel totus AB, totius CD. Quia igitur AE, eadem est pars ipsius CF, quæ EB, ipsius GC; 5. *septim.* erit vterque AE, EB, simul eadem pars vtriusque simul CF, GC, quæ AE, ipsius CF, hoc est, quæ totus AB, totius CD; Ac propterea cum AB, eadem sit pars vtriusque numeri FG, CD; erunt ipsi numeri FG, CD, inter se æquales. Dempto ergo communi CF, æquales remanebunt GC, FD. Eadem igitur pars erit EB, ipsius FD, quæ ipsius GC, hoc est, quæ totus AB, totius CD. Si igitur numerus numeri pars fuerit, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

A, $\frac{1}{3}$ E, $\frac{2}{5}$ B
G, $\frac{4}{5}$ C, $\frac{6}{8}$ F, $\frac{2}{5}$ D

LOCVM etiam habet hac propositio, vnà cum eius demonstratione in numeris fractis, vt hic apparet.

IDEM hoc theorema verum est, tam in numeris integris, quàm in fractis, etiamsi ablata sit vnitas AE, vel reliqua fuerit vnitas EB; vel denique in integris & ablata, & reliqua sit vnitas, vt ex his exemplis apparet.

A . E . . . B	A . . . E . B	A . E . B
G . . . . . C . . F . . . . . D	G . . C . . . . . F . . D	G . . C . . F . . D

CÆTERVM & ex his theorematis quinto lib. 5. simile hoc demonstrabimus, tã in numeris integris, quam in fractis.

SI numerus numeri æque fuerit multiplex, atque ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius.

QVOD

QVOD quidem non aliter oſtendemus, ac theorema illud quinti lib. Verum idem ex demonſtratis ita confirmabimus. Sit totus AB, totius CD, æque multiplex, atque ablatus AE, ablati CF. Dico & reliquum EB, reliqui FD, ita eſſe multiplicem, vt eſt totus AB, totius CD. Cum enim AB, ipſius CD, ſit æque multiplex,
atque AE, ipſius CF; erit e contrario A.....E....B
totus CD, totius AB, eadem pars, C...F..D
quæ ablatus CF, ablati AE. [a] Quare & reliquus FD, reliqui EB, eadem pars erit, quæ totus CD, totius AB; Ac proinde e contrario EB, ita multiplex erit ipſius FD, vt AB, ipſius CD, eſt multiplex. 7. ſ. primi

QVOD ſi ex CD, ablata fuerit vnitas CF; vel reliqua ſit vnitas FD: vel denique in integris & ablata ſit vnitas CF, & alia reliqua FD; idem demonſtrabitur, vt hæc exempla commonſtrant.

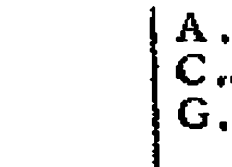
A...E.....B	A...E..B	A...E....B
C.F..D	C..F.D	C.E.D

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI numerus numeri partes fuerit, quales ablatus ablati: Et reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius.

SIT numerus AB, partes eædem numeri CD, quæ ablatus AE, ablati CF. Dico reliquum EB, eaſdem eſſe partes reliqui FD, quæ totus
AB, eſt totius CD. Sumpto A ..... K .....E .... B
enim numero GH, æquali C..... F..... D
ipſi AB; erit GH, eædem G..... L.. I..... M..H
partes ipſius CD, quæ AB,
eiuſdem CD, hoc eſt, quæ AE, ipſius CF. Diuiſo ergo GH, in partes GI, IH numeri CD; & AE, in partes AK, KE, numeri CF; erit multitudo partium GI, IH, multitudini partium AK, KE, æqualis, eademque pars tam

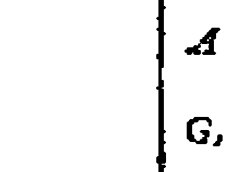
GI,



GI, quam IH, ipſius CD, quæ tam AK, quam KE, ipſius CF. Cum ergo CD, numerus maior ſit numero CF, erit & tam GI, quam IH, pars ipſius CD, maior tam numero AK, quam KE parte ipſius CF. Sumptis igitur numeris GL, IM, æqualibus ipſis AK, KE; erit GL, eadem pars ipſius CF, quæ AK, eiuſdem CF, hoc eſt, quæ GI, ipſius CD; Ac proinde cum totus GI, totius CD, ſit eadē pars, quæ ablatus GL, ablati CF, [a] erit & reliquus LI, reliqui FD, eadem pars, quæ totus GI, totius CD. Eodemque argumento oſtendemus MH, eandem eſſe partē ipſius FD, quæ eſt totus GI, vel IH, totius CD. Quoniam ergo tam GI, quam IH, eadem eſt pars ipſius CD, quæ eſt tam LI, quam MH, ipſius FD; erit vterque GI, IH, ſimul eędem partes ipſius CD, quę vterque LI, MH, ipſius FD. Eſt autem GH, eædem partes ipſius CD, quæ AB, eiuſdem CD, propter æqualitatem numerorum AB, GH. Igitur & vterque LI, MH, ſimul eædem partes erit ipſius FD, quæ AB, ipſius CD. Quia vero ſi ab æqualibus AB, GH, æquales auferantur AK, KE, & GL, IM, reliqui EB, & LI, MH, ſimul æquales ſunt: Erit quoque EB, reliquus eædem partes reliqui FD, quæ AB, totus totius CD, nimirum eædem, quæ vterque LI, MH, ſimul erat eiuſdem FD. Si numerus ergo numeri partes fuerit, &c. Quod erat oſtendendum.

7. ſeptimi.

SCHOLIVM.



IN numeris fractis eadem hæc propoſitio eodem prorſus modo demonſtrabitur, vt hic manifeſtum eſt.

NON demonſtrauit Euclides hanc propoſitionem, quemadmodum præcedentem, quod nonnulli interpretes faciunt, quia non conſtabat hic, reliquum numerum EB, alicuius numeri eaſdem eſſe partes, quæ eſt numerus AE, numeri CF, ibi vero perſpicuum erat, reliquum EB, alicuius numeri eandem eſſe partem, cuæ eſt AE, ipſius CF. Licet enim ipſius EB, duplum

duplum assumere, triplum, quadruplum, &c. donec EB, sit ita submultiplex numeri assumpti GC, vt AE, est submultiplex ipsius CF.

THEOR. 7. PROPOS. 9.

9.

SI numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & secundus quarti.

SIT numerus A, numeri BC, eadem pars, quæ numerus D, numeri EF, sintque A, BC, minores ipsis D, EF, singuli singulis. De his enim propositio intelligenda est. Dico & vicissim eandem partem esse, aut easdem partes A, ipsius D, qualis est, aut quales BC, ipsius EF. Diuisis enim numeris BC, EF, in partes BG, GC, & EH, HF, ipsis A, & D, æquales; erit multitudo partium numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF. Quia vero BG, GC, inter se sunt æquales, & minores quam EH, HF, quæ inter se etiam æquales sunt, quod & totus BC, toto EF, minor ponatur; Erit BG, ipsius EH, eadem pars, aut partes, quæ GC, ipsius HF; [1] ac propterea & vterque BG, GC, simul, nimirum BC, secundus vtriusque EH, HF, simul, nimirum EF, quarti, eadem pars, vel partes, quæ BG, ipsius EH, hoc est, quæ A, primus ipsius D, tertii. Si numerus igitur numeri pars fuerit, &c. Quod demonstrandum erat.

A ....
B .... G C
D ....
E ..... H ..... F

[1] 5. vel 6. *septimi.*

SCHOLIVM.

A, $\frac{3}{11}$
B, $\frac{3}{11}$ G, $\frac{3}{11}$ C
D, $\frac{7}{22}$
E, $\frac{14}{22}$ H, $\frac{14}{22}$ F

IN numeris fractis propositio hæc, vnà cum eius demonstratione locum etiam habet, vt hic perspicuum est.

QVOD si loco primi numeri vnitas accipiatur, quæ numeri alicuius pars sit, quæ alter numerus alterius: Erit vicissim vnitas tertij numeri eadem pars, quæ secundus numerus quarti; id quod eodem argumento confirmabitur, si loco partium assumamus partem in demonstratione, vt ex hoc exemplo appareret.

A
B . G . C
D .....
E ..... H ..... F

10. ## THEOR. 8. PROPOS. 10.

SI numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et vicissim, quæ partes est primus tertij, aut pars, eædem partes erit & secundus quarti, aut pars.

SIT numerus AB, eædem partes numeri C, quæ numerus DE, numeri F, sintque AB, C, ipsis DE, F, minores, singuli singulis. De his enim etiã intelligenda est hæc propositio, sicut & antecedens. Dico & vicissim, numerum AB, easdem partes esse, aut partem numeri DE, quæ numerus C, est numeri F. Diuisis enim numeris AB, DE, in partes AG, GB, & DH, HE, numerorum C, & F; erit multitudo partium in AB, æqualis multitudini partium in DE, & tam AG, quam GB, eadem pars ipsius C, quæ tam DH, quam HE, ipsius F. [a] Vicissim ergo eadem pars erit, aut partes AG, ipsius

A..G..B
C.....
D.....H.....E
F.....

[a] 5. septimi.

ipſius DH,& GB,ipſius HE,quæ C, ipſius F; Ac propterea eadem pars erit, vel partes AG,ipſius DH,quæ GB, ipſius HE. [a] Igitur & vterque AG, GB, ſimul, nimirum primus AB,eadem pars erit,aut partes vtriuſque DH, HE, ſimul,nimirum DE,tertij,quæ AG,ipſius DH,hoc eſt,quæ C, ſecundus quarti F. Si numerus ergo numeri partes fuerit, & alter alterius, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 5. vel 6. ſeptimi.

SCHOLIVM.

NVMERIS fractis conuenit etiam huius propoſ. demonſtratio, vt in hoc exemplo apparet.

A, $\frac{2}{15}$ G, $\frac{2}{15}$ B
C, $\frac{6}{15}$
D, $\frac{3}{10}$ H, $\frac{3}{10}$ E
F, $\frac{6}{10}$

THEOR. 9. PROPOS. 11. 12.

SI fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIT vt totus numerus AB,ad totum CD, ita ablatus AE,ad ablatum CF.
Dico & reliquum EB,ad reliquum FD, eſſe, vt eſt totus AB,ad totum CD.

A.....E.....B
C.....F...D

Cum enim ſit, vt AB,ad CD, ita AE,ad CF; [b] erit AB, ipſius CD,& AE, ipſius CF, vel æque multiplex, vel eadem pars, vel eædem partes: vel certe AB,ipſum CD, & AE,ipſum CF,æqualiter continebit,eandemque inſuper illius partem,vel eaſdem partes. Sit primum AB, ipſius CD,& AE,ipſius CF,æque multiplex. Quo poſito, erit e contrario CD,totus totius AB, eadem pars, quæ ablatus CF,ablati AE, propter AB, AE, æque multiplices ipſorum CD,CF. [c] Igitur & reliquus FD,reliqui EB, eadem pars erit,quæ totus CD,totius AB; Ac propterea

[b] 20. deſin.

[c] 7. ſeptimi.

e contrario AB, ipſius CD, & EB, ipſius FD, æque multiplex erit. [a] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

a 20. defin.

SIT deinde AB, ipſius CD, & AE, ipſius CF, eadem pars, vel eædem partes. Quo poſito, [b] erit & reliquus EB, reliqui FD, eadem pars, vel partes, quæ totus AB, totius CD; [c] Ac proinde, erit vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

A . . . E . . B
C . . . . . F . . . . D

b 7. vel 8. ſeptim.

A . . . . E . . B
C . . . . . F . . . D

c 20. defin.

CONTINEAT tertio AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quo poſito, erit e contrario CD, totus totius AB, eædem partes, quæ ablatus CF, ablati AE, vt mox demonſtrabimus. [d] Reliquus igitur FD, reliqui EB, eæ-

d 8. ſeptim.

A . . . . . E . . . B | A . . . . . E . . . . . B
C . . . . F . . D | C . . . . . F . . . . . D

dem quoque partes erit, quæ totus CD, totius AB: Ac propterea, e contrario AB, ipſum CD, & EB, ipſum FD, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes, vt mox oſtendemus. [e] Quare erit, vt totus AB, ad totum CD, ita EB, reliquus ad reliquum FD.

e 20. defin.

QVOD ſi AB, totus toti CD, æqualis fuerit, & ablatus AE, ablato CF; perſpicuum eſt reliquum EB, quoque eſſe æqualem reliquo FD. Nam ſi ab æqualibus æqualia demantur; quæ remanent, ſunt æqualia. Itaque ſi fuerit, vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

A . . . . . E . . . B
C . . . . . F . . . D

SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur hoc in fractis numeris. Id quod liquidò conſtat in his exemplis, quæ exemplis tertij caſus demonſtrationis reſpondent.

$A, \frac{6}{9} E \frac{8}{15} B$ | $A, \frac{14}{21} E \frac{28}{29} B$
$C, \frac{4}{9} F \frac{8}{15} D$ | $C, \frac{2}{21} F \frac{20}{29} D$

LEMMA.

LEMMA.

QVOD autem, ſi AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter contineat, eandemque inſuper partem illius vel partes; e contrario CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, ſit eædem partes: Et ſi CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, ſit eædem partes; e contrario AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter contineat, eandemque illius partem vel partes, tam in numeris fractis, quàm in integris; hoc modo demonſtrabimus. Contineat primum AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter, nimirum ſemel, vel bis, vel ter, &c. eandemque inſuper partem; GB, quidem ipſius CD, & HE, ipſius CF; ita vt numeri reliqui AG, AH, ſint vel æquales ipſis CD, CF, vel eorum æque multiplices. Diuiſis igitur numeris CD, CF, in partes CI, IK, KD; & CL, LM, MF, ipſis GB, HE, æquales; erit multitudo partium numeri CD, multitudini partium numeri CF, æqualis, quòd GB, ipſius CD, ſit eadem pars, quæ HE, ipſius CF. Similiter diuiſis numeris AG, AH, in partes AN, NO, OG; & AP, PQ, QH, eiſdem GB, HE, æquales; erit quoque multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis. Cum enim AG, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorum æque multiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF; vel

A..N..O..G..B
C..I..K..D
A...P...Q...H...E
C...L...M...F

certe numerus partium numeri CD, toties continebitur in AG, quoties numerus partium numeri CF, in AH; propterea que multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit. Si igitur ipsis addantur partes GB, HE, erit & multitudo partium numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis: Atque adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, est numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis sit multitudini partium numeri CF; erit CD, eædem partes numeri AB, quæ CF, ipsius AE.

CONTINEAT deinde AB, ipsum CD, & AE, ipsum CF, æqualiter, videlicet semel, bis, ter quaterue, &c. easdemque insuper partes illius; numerus quidem AB, partes GB, numeri CD, & numerus AE, partes HE, numeri CF: ita vt reliqui numeri AG, AH, sint rursum vel æquales ipsis CD, CF, vel eorum æquemultiplices. Diuisis igitur numeris GB, HE, in partes GI, IB, & HK, KE, numerorum CD, CF, erit multitudo partium ipsius GB, multitudini partium ipsius HE, æqualis. Simili modo, diuisis numeris CD, CF, in partes CL, LM, MD, & CN, NO, OF, partibus GI, IB, & HK, KE, æquales, erit quoque multitudo partium ipsius CD, multitudini partium ipsius CF, æqualis, propterea quòd quælibet partium numeri GB; eadem pars est numeri CD, quæ vnaquæque partium

A . P . Q . G . I . B
C . L . M . D
A . R . S . H . K . E
C . N . O . F

partium numeri H E, eſt numeri C F. Denique diuiſis numeris AG, AH, in partes AP, PQ, QG, & AR, RS, SH, eiſdem partibus GL, IB, & HK, KE, æquales, erit & multitudo partium numeri AG, æqualis multitudini partium numeri AH. Cum enim AG, AH, vel æquales ſint ipſis CD, CF, vel eorum æquemultiplices; erunt vel tot partes in AG, AH, quot in CD, CF, vel certe numerus partium ipſius CD, toties cõtinebitur in AG, quoties numerus partium ipſius CF, in AH; propterea q; multitudo partium numeri AG, multitudini partium numeri AH, æqualis erit: Quibus ſi addantur æquales multitudines partiũ numerorum GB, HE, erit quoq; multitudo partiũ numeri AB, multitudini partium numeri AE, æqualis; Atq; adeo vna pars numeri CD, eadem pars erit numeri AB, quæ vna pars numeri CF, eſt numeri AE. Quare cum multitudo partium numeri CD, æqualis ſit multitudini partium numeri CF; erit CD, eadem partes numeri AB, quæ CF, ipſius AE. Quod eſt primo propoſitum.

IAM vero ſit CD, ipſius AB, & CF, ipſius AE, eædem partes. Dico e contrario AB, ipſum CD, & AE, ipſum CF, æqualiter continere, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Diuiſis enim numeris CD, CF, in partes numerorum AB, AE, erunt eæ multitudine inter ſe æquales. Item diuiſis numeris AB, AE, in partes partibus numerorum CD, CF, æquales, erunt & hæ multitudine inter ſe æquales. Quare toties continebuntur omnes partes numeri CD, in AB, ſupereritque eadem pars, vel partes ipſius CD, quoties omnes partes numeri CF,

continentur in A E, & quæ pars, aut partes ipſius C F, ſuperſunt, propter æquales multitudines partium numerorum C D, C F, & A B, A E. Ita enim fit, vt multitudines æquales partium numerorum A B, A E, contineant æqualiter æquales multitudines partium numerorum C D, C F, & inſuper in duobus illis numeris ſuperſint partes numerorum C D, C F, multitudine æquales. Quam ob rem A B, ipſum C D, & A E, ipſum C F, æqualiter continebit, eandemque inſuper illius partem, vel partes. Quod ſecundo eſt propoſitum.

13. THEOR. 10. PROPOS. 12.

SI ſint quotcunque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedentes ad omnes conſequentes.

SINT quotcunq; numeri proportionales A, B; C, D; E, F; hoc eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, & E, ad F. Dico eſſe quoq; omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, vt eſt A, ad B.

A .... C .. E ...
B ..... D .... F .....

Sint enim primum A, C, E, minores quam B, D, F. Quoniam igitur, propter eandem proportionem, [a] eadem pars eſt, aut partes A, ipſius B, quæ C, ipſius D, & E, ipſius F; [b] erit quoque vterque A, C, ſimul vtriuſq; B, D, ſimul eadem pars, aut partes, quæ A, ipſius B, vel E, ipſius F. Rurſus quia vterque

[a] *20. defin.*
[b] *5. vel 6. ſeptimi.*

vterque A,C,ſimul,tanquam vnus,vtriuſq; B, D, ſimul, tanquam vnius, eadem pars eſt,aut partes, quæ E,ipſius F; [a] erunt & ambo A, C, tanquam vnus, & E, ſimul, amborum B,D, tanquam vnius,& F, ſimul eadem pars, vel partes,quæ A,ipſius B [b] Quare eadem proportio eſt omnium A,C,E,ſimul ad omnes B,D, F, ſimul, quæ ipſius A,ad B.

[a] 5.ſeptim.

[b] 20.defin.

SINT deinde A,C,E,maiores, & æque multiplices numerorum B,D,F.Quo poſito, erit e contrario B, ipſius A,eadem pars,quę D,ipſius C, & F,ipſius E; Atq; adeo vt prius, [c] erunt omnes B, D, F, ſimul,omnium A, C, E, ſimul, eadem pars, quæ B,ipſius A; ideoque & è contrario omnes A, C, E, ſimul omnium B, D, F, ſimul, & A, ipſius B, æque multiplices. [d] Quare eadem eſt proportio omnium A,C,E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ eſt A, ad B.Hoc idem verum eſt, etiamſi aliquæ proportiones multiplices, vel etiam omnes, ſint numerorum ad vnitatem.Eſt enim eadem ſemper demonſtratio, vt hic apparet,adiuuante tamen ſcholio propoſ.5.huius lib.

A,.. C..... E..... B. D.. F...

A... C... E..... D. D. F..

A...C...E... B. D. F.

[c] 5.ſeptim.

[d] 20.defin.

SINT tertio A,C,E,maiores quam B,D,F, at non multiplices. [e] Quia igitur, propter eandem proportionem, A,ipſum B,& C,ipſum D,& E, ipſum F, æqualiter continet, eandemque inſuper partem,vel partes; Erit per lemma precedentis propoſ. B, ipſius A, & D, ipſius C, & F, ipſius E, eædem partes. Igitur vt prius, [f] erunt omnes B,D, F, ſimul omniũ A,C,E, ſimul eædem partes,quæ B,ipſius A; Atque adeo per idem lemma,e contrario cõtinebunt omnes numeri A,C,E,

A.....C.... E..... B..... D... F .....

[e] 20.defin.

[f] 6.ſeptim.

A, C, E, ſimul, omnes numeros B, D, F, ſimul, & A, ipſum B, æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes.
[a] 20. defin. [a] Quare eadem proportio eſt omnium A, C, E, ſimul, ad omnes B, D, F, ſimul, quæ ipſius A, ad B.

SINT quarto & vltimo A, C, E, ipſis B, D, F, æquales. Quoniam igitur, ſi æqualibus A, & B, æquales addantur C, & D, fiũt A, C, ſimul æqua-

A....C...E.....
B....D...F.....

les ipſis B, D, ſimul: quibus ſi rurſum addantur æquales E, & F, fiunt & omnes A, C, E, ſimul, omnibus B, D, F, ſimul æquales; Erunt, vt A, ad B, ita omnes A, C, E, ſimul ad omnes B, D, F, ſimul, cum vtrobique ſit proportio æqualitatis. Si ſint igitur quotcunque numeri proportionales, erit, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

IN numeris quoque fractis propoſitio hæc vera eſſe eodem modo conuincetur, vt patet, ſi pro numeris integris fracti aſſumantur.

14. THEOR. 11. PROPOS. 13.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et viciſſim proportionales erunt.

SIT enim A, ad B, vt C, ad D. Dico viciſsim eſſe A, ad C, vt B, ad D. Nã ſint primum A, & C, minores quã B, & D; & A, quoq; minor, quam C.

A...C.....
B....D.....

Quo poſito, erit, propter eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, eadem pars, vel partes.
[b] 9. vel 10. ſeptimi. [b] Viciſsim ergo & A, ipſius C, & B, ipſius D, eadem pars erit, vel partes: [c] Ac proinde erit vt A, ad C, ita B, ad D.
[c] 20. defin. SINT deinde A, & C, minores quam B, & D; at A, maior quam C. Quo poſito, erit, ob eandem proportionem, C, ipſius D, & A, ipſius B, eadem pars, vel partes.
[d] 9. vel 10. ſeptimi. [d] Viciſsim ergo & C, ipſius A, & D, ipſius B, eadem pars erit,

erit, vel partes: Atque adeo e contrario, vel A, ipſius C, & B, ipſius D, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. A, ipſum C, & B, ipſum D, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes. [a] Quare erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A.....C...
B.....D....

[a] 20. d. fin.

SINT tertio A, & C, maiores quam B, & D; at A, minor quam C Quo poſito, erit ob eãdem proportionem, vel A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex; vel certe A, ipſum B, & C, ipſum D, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo e contrario erit B, ipſius A, & D, ipſius C, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [b] Viciſsim ergo & B, ipſius D, & A, ipſius C, eadem pars erit, vel partes, [c] Ac proinde eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A....C.....
B...D.....

[b] 9. vel 10. ſeptimi
[c] 20. deſin.

SINT quarto A, & C, maiores quam B, & D; & A, quoque maior quam C. Quo poſito, erit C, ipſius D, & A, ipſius B, ob eandem proportionem, vel æque multiplex, vel certe C, ipſum D, & A, ipſum B, æqualiter continebit, eandemque inſuper partem, vel partes; Atque adeo, e contrario, erit D, ipſius C, & B, ipſius A, vel eadem pars, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. eædem partes. [d] Viciſsim ergo & D, ipſius B, & C, ipſius A, eadem pars erit, vel partes; Ac propterea e contrario vel B, ipſius D, & A, ipſius C, æque multiplex erit, vel certe, per lemma propoſ. 11. huius lib. B, ipſum D, & A, ipſum C, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel partes. [e] Quare eadem proportio erit B, ad D, quæ A, ad C, hoc eſt, erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A....C....
B...D...

[d] 10. vel 10. ſeptimi.
[e] 20. deſin.

SINT quinto A, & C, ipſi B, & D, æquales, & A, minor quam C. Quoniam igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C, & D, vel eadem pars, vel eædem partes ſunt; [f] Erit vt A, ad C, ita B, ad D.

A...C...
B...D....

[f] 20. deſin.

SINT

SINT ſexto A,& C,ipſis B,& D,æquales,at A, maior quam C. Quia igitur æquales numeri A, & B, æqualium numerorum C,& D,vel æque multiplices ſunt, vel certe illi hos æqualiter continent,eandemque inſuper partem, vel partes;[a] erit vt A,ad C,ita B,ad D.

A .... C ...
B .... D ...

[a] 20. defin.

SINT ſeptimo ac vltimo A,& C, inter ſe æquales, ſiue ij maiores ſint quam B,& D,ſiue minores,ſiue æquales.[b] Quoniam igitur,ob eandem proportionem, A, ipſius B, & C, ipſius D, æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eædem partes;vel certe A,ipſum B,& C,ipſum D,æqualiter continet,eandemque inſuper partem, vel partes; ſuntque A, & C, æquales; æquales quoque erunt B, & D; Atque adeo erit, vt A,ad æqualem C,ita B,ad æqualem D. Quocirca, ſi quatuor numeri proportionales ſint, & vicißim proportionales erunt. Quod erat demonſtrandum.

A ..... C .....
B ... D ...

[b] 20. defin.

SCHOLIVM.

QVOD ſi pro numeris integris fractos numeros ſubſtituas,demonſtrabis eodem modo propoſitionem hanc veram eſſe in numeris fractis.

MANIFESTVM quoque eſt, propoſitionem hanc non variari,etiamſi aliquis numerorum ponatur vnitas.

COACTI verò ſumus in hac propoſitione, & duabus præcedentibus tot caſus recenſere,eoſque demonſtrationibus certiſſimis confirmare,vna cum lemmate propoſ. 1. vt earũ veritas in omni genere proportionis rationalis appareret. Theon enim,& nonnulli alij interpretes,illas duntaxat oſtendunt in proportionibus rationalibus minoris inæqualitatis, in quibus nimirum antecedentes numeri partes ſunt conſequentium,vt perſpicue ex eorundem auctorum demonſtrationibus apparet; niſi maiorem numerum minoris numeri partes eſſe dicamus,vt nonnulli concedunt, inter quos etiam eſt (quod miror) Federicus Commandinus præſtans Geometra: quod eſt abſurdum,& ab Euclidis inſtituto alienum,cum partes appellarit

larit numerum numeri, minorem maioris, cum minor non metitur maiorem. Quod etiam ex defin. 20. Solis luce clarius conſtat, vbi numeros proportionales docuit eſſe, cum primus ſecundi, & tertius quarti æque multiplex eſt, vel eadem pars, vel eadem partes, &c. Nam ſi exiſtimaret, maiorem numerum minoris partes eſſe, ſatis fuiſſet dicere, cum primus ſecundi, & tertius quarti, eadem pars eſt, vel eadem partes. Ita enim numeros proportionales in omni genere proportionis comprehendiſſet, vt manifeſtum eſt: quare reliqua omnia verba definitionis ſuperuacanea eſſent.

THEOR. 12. PROPOS. 14. 15.

SI ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumantur, & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT quotcunque numeri A, B, C, & alij totidem D, E, F, ſitque vt A, ad B, ita D, ad E; & vt B, ad C, ita E, ad F. Dico ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Quoniã .n. eſt, vt A, ad B, ita D, ad E; [a] erit viciſſim, vt A, ad D, ita B, ad E. Similiterque, eãdem ob cauſam, cum ſit, vt B, ad C, ita E, ad F; erit viciſſim, vt B, ad E, ita C, ad F. Igitur erit vt A, ad D, ita C, ad F; (Cũ enim vtraque proportio A, ad D, & C, ad F, eadem ſit proportioni B, ad E, vt demonſtratum eſt; & ipſæ inter ſe eædem erunt, vt mox oſtendetur.) [b] Ac proinde viciſſim, vt A, ad C, ita D, ad F.

A ..... D .....
B ..... E .....
C .... F ...
G ..... H .....

[a] 13. ſeptimi.

[b] 13. ſeptimi.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiã quemadmodũ C, ad G, ita F, ad H; Dico adhuc eſſe, vt A, ad G, ita D, ad H. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C,

vt C, ad G, ita F, ad H; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres D, F, H, qui bini in eadem ratione ſumuntur. Exæqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, rurſus erit vt A, ad G, ita D, ad H. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor; ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt, hanc propoſitionem eodem modo demonſtrari poſſe in numeris fractis, ſi pro numeris integris aſſumantur fracti numeri.

IDEM verum eſt, ſi loco vnius numeri vnitas aſſumatur, vel etiam loco plurium plures vnitates, vt in hoc exemplo perſpicuum eſt.

A. D...
B.. E.....
C... F.....
G. H...

LEMMA.

QVOD autem duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eædem ſunt, inter ſe quoque ſint

A ..... B ..... C ....
D ..... E ..... F ...

eædem, quales ſunt in demonſtratione proportiones A, ad D, & C, ad F, quæ eædem oſtenſæ ſunt proportioni B, ad E, ſiue numeri ſint integri, ſiue fracti; ita demonſtrabitur. Propter eandem proportionem, erit B, ipſius E, & tam A, ipſius D, quam C, ipſius F, æque multiplex, vel eadem pars, vel eadem partes; vel certe B, ipſum E, & tam A, ipſum D, quam C, ipſum F, continebit æqualiter, eandemque inſuper partem, vel

partes

partes. [a] *Quare numeri* A, D, C, F, *proportionales sunt, vt quidem* A, *ad* D, *ita* C, *ad* F. *Quod est propositum.* [a 20. d. fin.]

HOC idem demonstratum fuit ab Euclide lib. 5. *de proportionibus magnitudinum, propos.* 11.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 16.

SI vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur: Et vicissim æque vnitas tertium numerum metietur, & secundus quartum.

METIATVR vnitas A, numerum BC, & numerus D, numerum EF, æque. Dico vicissim vnitatem A, numerum D, & numerum BC, numerum EF, æque metiri. Diuiso enim numero BC, in vnitates BG, GH, HC, & numero EF, in partes EI, IK, KF, ipsi D, æquales; erit multitudo vnitatum numeri BC, æqualis multitudini partium numeri EF, metieturq; æque vnitas A, numerum D, & vnitas BG, ipsum EI, atque vnitas GH, ipsum IK, & vnitas HC, ipsum KF: atque idcirco eadem pars erit vnitas A, numeri D, & vnitas BG, numeri EI, quæ vnitas GH, numeri IK, & vnitas HC, numeri KF. Quare per ea, quæ ad propos. 5. huius lib. ostendimus, eadem pars erunt vnitates BG, GH, HC, simul numerorum EI, IK, KF, simul, quæ vnitas BG, numeri EI, hoc est, quæ vnitas A, numeri D; Ac proinde vnitas A, numerum D, & numerus BC, ex vnitatibus BG, GH, HC, compositus, numerum EF, ex numeris EI, IK, KF, compositum æque metietur. Si

A.	D.
B. G. H. C	E. I. K. F

vnitas

vnitas igitur numerum quempiam metiatur, &c. Quòd erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

ILLVD idem, quod Euclides demonſtrauit de numeris, propoſ. 13. oſtendit hoc loco ſeparatim de vnitate, & tribus numeris, propterea quod vnitas non eſt numerus. Quod quidem breuius ita nos demonſtrabimus. Quia vnitas A, numerum BC, æque metitur, atque numerus D, numerum EF; erit vnitas A, eadem pars numeri BC, quæ numerus D, numeri EF. Per ea igitur, quæ ad propoſ. 9. demonſtrauimus, erit viciſſim vnitas A, eadem pars numeri D, quæ numerus BC, numeri EF; Ac propterea vnitas A, numerum D, & numerus BC, numerum EF, æque metietur.

HÆC propoſitio fractis numeris conuenire non poteſt. Nã ſi vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus fractus alterum quendam numerum fractum metiatur: non metietur viciſſim æque vnitas tertium numerum, qui fractus ponitur, & ſecundus integer quartum fractum; [a] *ſed ſolum eandem habebit rationem vnitas ad numerum tertium, quam ſecundus ad quartum.* a 15. d. fin.

17. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo numeri mutuo ſeſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt.



DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciant numeros C, & D, ita vt A, multiplicans ipſum B, faciat C, at B, ipſum A, multiplicans faciat D. Dico numeros C, & D, inter ſe æquales eſſe. Sumpta enim vnitate E; cum A, ipſum B, multiplicans faciat C; [b] erit C, ex B, toties compoſitus, quot ſunt in A, vnitates; atque adeo vnitas b 15. d. fin.

vnitas E, numerum A, & numerus B, numerum C, æque metietur. [a] Vicissim ergo & vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum C, metietur æque. Rursus eodem modo, quia B, multiplicans ipsum A, facit D; [b] erit D, ex A, toties compositus, quot sunt in B, vnitates; atq; adeo vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum D, æque metietur: Metiebatur autem & eadem vnitas E, eundem numerum B, & numerus idem A, numerũ C, æque. Aeque igitur numerus A, vtrumq; numerum C, & D, metietur; Ac proinde C, & D, inter se æquales erunt. Si duo igitur numeri mutuo se se multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 15. septimi.
[b] 15. defin.

SCHOLIVM.

IN numeris fractis haec propositio ita demonstranda est. Quoniam A, multiplicans B, facit C, erit C, ad B, vt A, ad E, vnitatem, ex defin. multiplicationis. Ergo permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. Sed ex eadem defin. vt B, ad E, vnitatem, ita quoque est D, ad A, quòd B, multiplicans A, facit D. Igitur erit, vt C, ad A, ita D, ad eundem A, ex lemmate propos. 14. ac proinde aequales inter se erunt C, & D. Quod erat ostendendum.

E.
A, $\frac{2}{3}$. B, $4\frac{1}{2}$.
D, $3\frac{1}{2}$. C, $3\frac{1}{2}$.

POTEST haec eadem propositio cum Campano in hunc modum proponi.

SI duo numeri se mutuo multiplicauerint, procreabitur vnus idemque numerus.

MVLTIPLICET enim A, ipsum B, faciatque C. Dico eundem C, gigni, si B, ipsum A, multiplices. Nam vt prius, cum A, multiplicans ipsum B, faciat C, ostendemus vnitatem E, numerum B, & numerum A, numerum C, aque metiri. At vero, si numerus B, ipsum A, multiplicet, [c] etiam vnitas E, numerum B, & numerus A, numerum factum aque metitur.

E.
A ... B ....
C .....

[c] 15. defin.

Idem ergo numerus C, gignitur ex multiplicatione B, in A, quandoquidem ipſum numerus A, æque metitur, atque vnitas E, ipſum B.

QVOD ſi numeri A, & B, ſint fracti ambo, vel vnus eorum, demonſtrabimus idem hoc modo.

E .
A ... B ....
C .....

Quoniam A, multiplicans B, facit C; erit ex defin. 15. vt C, ad B, ita A, ad E, vnitatem: Et permutando, vt C, ad A, ita B, ad E, vnitatem. At ſi B, multiplicet A, erit ex eadem defin. 15. B, ad E, vnitatem, vt factus numerus ad A. Erit igitur C, ad A, vt numerus hic factus ad eundem A; ac proinde factus hic numerus idem erit, qui C. Quod eſt propoſitum.

18.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; Geniti ex ipſis eandem rationem habebunt, quam multiplicati.

NVMERVS enim A, multiplicans numeros B, C, faciat D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita D, ad E. Aſſumpta enim vnitate F; [a] erit D, ex B, compoſitus totics, quoties vnitas F, eſt in A: ſimiliterque totics E, compoſitus erit ex C, quoties eadem vnitas F, eſt in eodem A: Atque adeo B, ipſum D, & C, ipſum E, æque metietur. Quare B, ipſius D, & C, ipſius E, eadem pars erit; [b] Ac proinde, erit vt B, ad D, ita C, ad E, [c] & permutando, vt B, ad C, ita D, ad E. Si numerus igitur duos numeros multiplicans fecerit aliquos, &c.

F .
A . . .
B . . C . . . .
D..... E .....

Quod oſtendendum erat.

[a] 15. defin.
[b] 20. defin.
[c] 13. ſeptimi.

SCHO-

SCHOLIVM.

SI numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo, idem ostendemus hoc modo. Quoniam A, multiplicans E, & C, facit D, & E; erit ex defin. 15. iam D, ad B, quàm E, ad C, vt A, ad F, vnitatem; ac proinde, ex lemmate propos. 14. vt D, ad B, ita E, ad C. Igitur permutando, vt D, ad E, ita B, ad C. Quod est propositum.

THEOR. 16. PROPOS. 18. 19.

SI duo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos: Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, quam multiplicantes.

NVMERI enim A, & B, multiplicantes numerum C, faciant D, & E. Dico esse vt A, ad B, ita D, ad E. Cum enim ex A, in C, fiat D; [a] fiet quoque idem D, ex C, in A. Eademq; ratione, cum ex B, in C, fiat E; fiet idem E, ex C, in B. Quia igitur idem C, multiplicans ipsos A, & B, facit D, & E; [b] erit, vt A, ad B, ita D, ad E. Si duo ergo numeri numerum quempiam multiplicantes, fecerint aliquos, &c. Quod erat demonstrandum.

A . . . . B . . . . .
C . . .
D ..... E .....

[a] 16. septimi.

[b] 17. septimi.

SCHOLIVM.

LIQVIDO constat, eandem hanc propositionem eodem modo demonstrari, si numeri A, B, C, sint fracti, vel vnus eorum, vel duo.

HANC autem propositionem, & præcedentem, ad quotcunq; numeros cum Campano accommodabimus, siue numeri omnes sint integri, siue non; hac ratione.

SI numerus quotcunque numeros multipli cet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; Habebunt producti numeri eaſdem rationes, quos numeri multiplicati, vel multiplicantes.

FIANT enim E, F, G, ex A, in B, C, D, vel ex B, C, D, in A. Dico eaſdem rationes habere numeros productos E, F, G, quas numeri multiplicantes, vel multiplicati B, C, D, habent: hoc eſt, eſſe, vt B, ad C, ita E, ad F; & vt C, ad D, ita F, ad G. Nã cum ex A, in B, C, vel ex B, C, in A, fiant E, F; [a] *erit vt B, ad C, ita E, ad F. Similiter quia ex A, in C, D, vel ex C, D, in A, fiunt F, G; erit quoque vt C, ad D, ita F, ad G. Atque ita de cæteris.*

A . . .
B . . C . . . D . . . .
E . . . . . F . . . . . G . . . . . .

[a] *17. vel 18. ſeptimi.*

19. THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI quatuor numeri proportionales fuerint; qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis erit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo, & quarto fit, numerus, æqualis fuerit ei, qui ex ſecundo, & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri proportionales erunt.

SINT quatuor numeri proportionales A, B, C, D, vt quidem A, ad B, ita C, ad D; fiatque E, ex A, primo in D, quartum; & F, ex B, ſecundo C, tertium. Dico numeros E, F, æquales inter ſe eſſe. Fiat enim rurſus G, ex A, in C.

in C. Quia igitur ex A, in C, D, fiunt G, E; [a] erit, vt C, ad D, hoc eſt, vt A, ad B, ita G, ad E. Rurſus quia ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [b] erit quoque, vt idem A, ad B, ita G, ad F. Quare, per lemma propoſ. 14. habebit G, ad E, & F, eandem proportionem; eam videlicet, quam habet A, ad B; Ac proinde E, & F, numeri æquales erunt, ex ijs, quæ ad defin. 20. ſcripſimus.

A... B.. C..... D.... E..... F..... G.....

[a] 17. ſeptimi.

[b] 18 ſeptimi.

SED iam ſit E, ex A, primo in D, quartum genitus, æqualis ipſi F, producto ex B, ſecundo in C, tertium. Dico quatuor numeros A, B, C, D, proportionales eſſe, vt quidem A, ad B, ita C, ad D. Fiat enim rurſus G, ex A, in C. Quia ergo ex A, in C, D, fiunt G, E; [c] erit vt C, ad D, ita G, ad E, vel ad F, ipſi E, æqualem. Habet enim G, ad æquales E, F, eandem rationem, vt ad defin. 20. docuimus. Rurſus, quoniam ex A, & B, in C, fiunt G, & F; [d] erit quoque, vt A, ad B, ita idem G, ad eundem F. Quare proportiones A, ad B, & C, ad D, cum eædē ſint proportioni G, ad F, eædem inter ſe erunt, per lemma propoſ. 14. Ac proinde erit, vt A, ad B, ita C, ad D. Si quatuor ergo numeri proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

[c] 17. ſeptimi.

[d] 18. ſeptimi.

SCHOLIVM.

LVCE clarius eſt, eandem demonſtrationem huius propoſ. locum habere in numeris fractis, ſiue omnes fracti ſint, ſiue non.

POTERAT huius theorematis prima pars proponi etiã ad hunc modum tam in numeris fractis, quàm in integris.

SI duo numeri duos numeros eandem, quã illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis, æquales inter ſe erunt.

ITA enim oſtenſum eſt numerum E, qui ſit ex A, antecedente in D, conſequentem, æqualem eſſe numero F, qui procreatur ex B, conſequente in C, antecedentem.

SED & ſequens theorema tam in fractis numeris, quàm in integris facile ex hac propoſ. 19. demonſtrabitur.

SI maior fuerit proportio primi ad ſecundũ, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, maior erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, maior fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum.

SIT primum maior proportio primi A, ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Dico numerum ex A, in D, procreatum, eſſe maiorem eo, qui ſit ex B, in C. Nam ſi intelligatur eſſe E, ad B, vt C, ad D; (ſiue E, numerus integer ſit, ſiue fractus; ſiue integer cum fracto: qui quidem repertetur, vt ad propoſ. 19. lib. 9. oſtendemus ſi numerus ex B, in C, procreatus diuidatur per D.) erit quoque maior proportio A, ad B, quàm E, ad B: ac proinde A, maior erit, quã E. Quare maior numerus fiet ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: [a] At qui ſit ex E, in D, æqualis eſt ei, qui fit ex B, in C. Igitur & numerus ex A, in D, genitus, maior erit, quàm numerus ex B, in C, procreatus. Quod eſt propoſitum.

A ..... E .....
B ....
C .....
D .....

[a] 19. ſeptimi.

FIAT deinde maior numerus ex A, in D, quàm ex B, in C. Dico maiorem proportionem eſſe A, primi ad B, ſecundum, quàm C, tertij ad D, quartum. Si namque intelligatur numerus E, ex quo in D, idem numerus fiat, qui ex B, in C; (ſiue E, numerus ſit integer, ſiue fractus, aut integer cum fracto) fiet quoque maior numerus ex A, in D, quàm ex E, in eundem D: ac proinde maior erit A, quàm E. Quare maior erit proportio A, ad B, quàm E, ad B: [b] At ita eſt E, ad B, vt C, ad D. Igitur maior erit quoque proportio A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

[b] 19 ſeptimi.

QVOD

QVOD si minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum; qui ex primo & quarto fit, numerus, minor erit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero: Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, minor fuerit eo, qui ex ſecundo & tertio fit, numero; minor erit proportio primi ad ſecundum, quàm tertij ad quartum. Eadem enim omnino demonſtratio erit, ſi modo vocem, maioris, mutes in vocem, minoris. Vt in hoc appoſito exemplo apparet. Quod tamen ita etiam oſtendi poteſt. Quoniam minor eſt proportio A, ad B, quàm C, ad D: hoc eſt, maior eſt proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum; maior fiet numerus ex C, primo in B, quartum, ſiue ex B, in C, quàm ex D, ſecundo in A, tertium, ſiue ex A, in D, vt demonſtratum iam eſt: hoc eſt, minor numerus fiet ex A, in D, quàm ex B, in C. quod eſt propoſitum. Deinde ſi minor numerus fiat ex A, in D, quàm ex B, in C; hoc eſt, maior ex B, in C, ſiue ex C, in B, quàm ex A, in D, ſiue ex D, in A; erit maior proportio C, primi ad D, ſecundum, quàm A, tertij ad B, quartum, vt iam eſt demonſtratum: hoc eſt, minor proportio erit A, ad B, quàm C, ad D. Quod eſt propoſitum.

A ..... E .....
B ....
C ...
D ..

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI tres numeri proportionales fuerint; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, qui a medio efficitur: Et ſi, qui ſub extremis continetur, æqualis fuerit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt.

SINT tres numeri proportionales A, B, C, vt quidem A, ad B, ita B, ad C. Dico numerum qui fit ex A, primo in C, tertium, æqualem eſſe ei, qui ex B, medio procreatur. Sumpto enim D, qui ipſi B, ſit æqualis, erit vt

B, ad C, hoc eſt, vt A, ad B, ita D, ad C; numeruſque genitus ex B, in D, æqualis erit ei, qui ex B, in ſe procreatur. Quia igitur quatuor numeri A, B, D, C, proportionales ſunt, [a] erit numerus factus ex A, in C, æqualis ei, qui fit ex B, in D, hoc eſt, ei, qui ex B, in ſe producitur.

A.....
B.....D.....
C....

[a] 19. ſeptimi.

SED iam ſit numerus productus ex A, primo in C, tertium, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe. Dico tres numeros A, B, C, proportionales eſſe. Sumpto enim rurſum D, æquali ipſi B; erit, vt B, ad C, ita D, ad C; & numerus, qui fit ex B, in D, æqualis erit ei, qui fit ex B, in ſe, hoc eſt, ei qui fit ex A, in C. Quoniam igitur numerus, qui fit ex A, primo in C, quartum, æqualis eſt ei, qui fit ex B, ſecundo in D, tertium, [b] erunt quatuor numeri A, B, D, C, proportionales, vt quidem A, ad B, ita D, ad C, vel B, ad C. Si tres igitur numeri proportionales fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 19. ſeptimi.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATIO hac non variabitur, etiamſi numeri A, B, C, ſint fracti, vel partim integri, partim fracti.

QVOD ſi maior fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; maior fiet numerus ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi maior numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; maior erit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium. Item ſi minor fuerit proportio primi ad ſecundum, quàm ſecundi ad tertium; minor numerus fiet ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe: Et ſi minor numerus fiat ex primo in tertium, quàm ex ſecundo in ſe; minor proportio erit primi ad ſecundum, quam ſecundi ad tertium. Id quod ex ſcholio antecedentis propoſitionis liquet, ſi ſecundo numero ſumatur alius æqualis, vt habeantur

A.....
B.....D.....
C.....

A....
B.....D.....
C.....

habeantur quatuor numeri. Tunc enim erit maior proportio primi ad secundum, quàm tertij ad quartum, aut minor, &c. vt in appositis exemplis apparet, etiamsi numeri sint fracti, vel partim fracti, partim integri.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 21.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, metiuntur æque numeros eandem cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem.

SINT numeri AB, CD, minimi in proportione eadem, quam habent alij duo numeri maiores E, F, ita vt sit, quemadmodum AB, ad CD, ita E, ad F. Dico AB, CD, æque metiri ipsos E, F; maiorem quidem AB, ipsum maiorem E, at minorem CD, ipsum minorem F: hoc est, antecedentem, ipsum antecedentem, & consequentem, ipsum consequentem. Cum enim sit, vt AB, ad CD, ita E, ad F; [a] erit vicissim, vt AB, ad E, ita CD, ad F; Atque adeo cum AB, CD, minores sint, quam E, F; [b] erit AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eadem pars, vel partes. Partes quidem nequaquam: Diuisis namque, si fieri potest, AB, CD, in partes AG, GB; CH, HD, numerorum E, F; erit multitudo partium AG, GB, æqualis multitudini partium CH, HD; Ac propterea AG, ipsius E, & CH, ipsius F, eadem pars. [c] Erit ergo, vt AG, ad E, ita CH, ad F; [d] & vicissim, vt AG, ad CH, ita E, ad F, vel AB, ad CD; Ac proinde numeri AG, CH, minores quam AB, CD, eandem habebunt proportionem, quam AB, CD. Quod est absurdum; cum AB, CD, in sua proportione ponantur minimi. Nõ ergo AB, ipsius E, & CD, ipsius F, eædem partes sunt. Quare eadem pars; Ac propterea AB, ipsum E, & CD, ipsum

A . . . G . . B
C . . H . D
E . . . . . .
F . . . . .

[a] *13. septimi.*
[b] *20. diffin.*
[c] *20. defin.*
[d] *13. septimi.*

ipſum F, æqualiter metietur. Minimi ergo numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, &c. Quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

IDEM hoc verum eſt, ſi quis dicat, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq; duos eſſe in ſua proportione minimos. Hoc enim poſito, oſtendetur eodem modo, primum metiri ſecundum; & ſecundum, tertium, vt in hoc appoſito exemplo apparet, vbi tertius numerus ſecundo

A ----- G --- B
C ..... H ..... D
E .....
F .....

æqualis eſt. Quamuis autem dari non poſſint tres numeri continuè proportionales, quorum duo primi in ſua proportione ſint minimi, niſi primus ſit vnitas; idem tamen demonſtratur in tribus, etiamſi primus ab aduerſario non dicatur eſſe vnitas, vt diximus. Quod idcirco diximus, vt propoſitio 12. lib. 9. demonſtrari poſſit, in qua aduerſarius cogitur concedere, tres numeros eſſe continuè proportionales, primosq; duos eſſe in ſua proportione minimos, ac proinde primum metiri ſecundum, ex hac propoſ. quod ante negauerat. Sed hoc planius fiet in propoſ. 12. lib. 9.

PARI ratione, & hoc verum eſt, quod Campanus docet.

QVOTLIBET numeri minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eædem ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidem alios numeros, qui eaſdem cum eis proportiones habent, primus primum, ſecundus ſecundum, tertius tertium, &c.

SINT enim plures, quam duo numeri A B. C D. E F. minimi in continuatione ſuarum proportionum, ſiue eadem ſit

A ... K ... B C .. L . D E .... M .... F
G ..... H ..... I .....

proportio A B, ad C D, quæ C D, ad E F, ſiue non; ita vt non poſſint

poſſint reperiri alij numeri ipſis AB, CD, EF, minores, quorum primus ad ſecundum ſit, vt AB, ad CD; & ſecundus ad tertium, vt CD, ad EF, &c. (quamuis tales proportiones reperiantur ſeorſum in minoribus numeris non continuatis; minorum proportio AB, ad CD, in numeris 4. ad 2. vel 2. ad 1. qui minores ſunt ipſis AB, CD; quemadmodum & proportiones numerorum 16. 20. 25. qui minimi ſunt in continuatione duarum proportionum ſubſeſquiquartarum, cum in minoribus numeris non poſſint continuari, reperiuntur ſeorſum in minoribus numeris; proportio quidem 16. ad 20. in 8. & 10. proportio vero 20. ad 25. in 4 & 5. vel in 12. & 15.) Sint deinde totidem numeri G, H, I, non minimi, continuati in eiſdem proportionibus, nimirum G. ad H, vt AB, ad CD; & H, ad I, vt CD, ad EF. Dico AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, metiri aequè. Cum enim ſit vt AB, ad CD, ita G, ad H; [a] erit viciſſim vt AB, ad G, ita CD, ad H. Eodem modo, cum ſit vt CD, ad EF, ita H, ad I; [b] erit quoque viciſſim, vt CD, ad H, ita EF, ad I. [c] Quare AB, ipſius G, & CD, ipſius H, & EF, ipſius I, erit vel eadem pars, vel eadem partes. Partes quidem nequaquam. Diuiſis enim, ſi fieri poteſt, AB, CD, EF, in AK, KB; CL, LD; EM, MF, partes numerorum G, H, I, erunt tot partes in AE, quot in CD, & in EF: atque adeo AK, ipſius G, & CL, ipſius H, eadem pars. [d] Erit ergo vt AK, ad G, ita CL, ad H; [e] & viciſſim vt AK, ad CL, ita G, ad H, vel AB, ad CD. Eodemque modo erit, vt CL, ad EM, ita CD, ad EF. Quare continuantur numeri AK, CL, EM, in proportionibus numerorum AE, CD, EF, & minores quam AF, CD, EF. Quod eſt abſurdum, cum ponantur in ſuarum proportionum continuatione minimi. Non ergo AB, CD, EF, eadem partes ſunt numerorum G, H, I. Quare ſinguli ſingulorum eadem pars; Ac propterea AB, ipſum G, & CD, ipſum H, & EF, ipſum I, aequè metietur. Quod eſt propoſitum.

[a] 13. ſeptimi.
[b] 13. ſeptimi.
[c] 20. deſin.
[d] 20. deſin.
[e] 13. ſeptimi.

QVOD ſi tres numeri dati A, B, C, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionũ, ita vt etiam quilibet duo minimi ſint, facilius idem hoc modo demonſtrabitur. Sint alij tres D, E, F, non minimi, qui eaſdem habeant proportiones, quas A, B, C. Dico A, B, C, ipſos D, E, F,

A.. B...., C...
D..... E ..... F .....

aequ



æque metiri. Nam per hanc propoſ. 21. A, B, cum ſint minimi in proportione A, ad B, æque metientur ipſos D, E; eademque ratione E, C, ipſos E, F. Quare cum A, ipſum D, & C, ipſum F, æque metiatur, ac B, ipſum E; metientur æque omnes A, B, C, ipſos D, E, F.

CÆTERVM hæc propoſitio cum ſuo ſcholio nullo modo convenire poteſt numeris fractis: propterea quòd in numeris fractis dari non poſſunt minimi numeri in ſua proportione, ſed quibuſuis datis, dari poſſunt alij minores, in infinitum. Atque hoc idem intelligendum eſt in omnibus alijs propoſitionibus, in quibus minimorum numerorum mentio fit. Ea enim omnes de numeris tantum integris ſunt intelligenda. Sic etiam quando de numeris inter ſe primis agitur, excludendi ſunt numeri fracti, cum hi non poſſint eſſe inter ſe primi, ſed quoſcunque metiri poſſit aliqua fractio, tanquam menſura communis. Nam ſi reducantur ad eandem denominationem, perſpicuum eſt, eos habere vnam particulam, vel plures, eiuſdem denominationis, menſuram communem. Alia autem omnes propoſitiones numerorum, in quibus minimi numeri in ſua proportione, vel primi non adhibentur, æquè conueniunt & integris numeris, & fractis. quod ſatis eſt ſemel hoc loco monuiſſe.

19.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

SINT tres numeri A, B, C, & totidem D, E, F, qui bini ſumantur, & in eadem ratione, ſitque perturbata eorum proportio, vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita D, ad E. Dico, ex æqualitate quoque eſſe vt A, ad C, ita D, ad F. Cum enim ſit vt A, ad B, ita E, ad F;

erit

, erit numerus ex A, in F, genitus æqualis numero, qui fit ex B, in E. Pari ratione, cum ſit etiam vt B, ad C, ita D, ad E, [b] erit eidem numero, qui fit ex B, in E, æqualis numerus, qui fit ex C, in D; Atque adeo numerus genitus ex A, primo in F, quartum æqualis erit numero ex C, ſecundo in D, tertium, producto. [c] Quare erit vt A, ad C, ita D, ad F.

A..... H...
B... D....
C..... E.....
G..... F..

[a] 19. ſeptimi.

[b] 19. ſeptimi.

[c] 19. ſeptimi.

QVOD ſi fuerint plures numeri, quam tres, ita vt ſit etiam C, ad G, vt H, ad D; Dico adhuc eſſe, vt A, ad G, ita H, ad F. Cum enim iam ſit oſtenſum in tribus numeris, eſſe vt A, ad C, ita D, ad F; ponatur autem vt C, ad G, ita H, ad D; erunt tres numeri A, C, G, & alij tres H, D, F, qui bini in eadem ratione ſumuntur, eſtque eorum proportio perturbata. Ex æqualitate igitur in tribus numeris oſtenſa, erit rurſus, vt A, ad G, ita H, ad F. Eodemque modo idem oſtendemus in quinque numeris, per quatuor, ſicut id in quatuor numeris demonſtratum fuit per tres, & ſic de pluribus. Itaque ſi fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini ſumantur, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

EODEM modo demonſtrabitur propoſitio in numeris fractis, vt conſtat.

QVONIAM verò Euclides ex illis ſex modis argumentandi in proportionibus, quos in magnitudinibus lib. 5. & explicauit, & demonſtrationibus confirmauit, duos tantum hic in numeris oſtendit, nimirum eum, qui a permutata proportione ſumitur, propoſ. 13. & illum, qui ex æqualitate dicitur, propoſ. 14. & 22. huius lib. non alienum a noſtro inſtituto erit, breuiter reliquos quatuor modos oſtendere in numeris, & alia quædam quinti libri ſequentibus theorematibus, quæ omnia conueniunt tam fractis numeris, quàm integris.

I.

SI quatuor numeri proportionales ſint: Et inuerſa ratione, ſiue conuertendo, proportionales erunt.

SIT, vt A, ad B, ita C, ad D. Dico & conuertendo, ſiue inuerſa ratione, eſſe vt B, ad A, ita D, ad C.

A..... C... B.... D..

Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D, [a] *erit vicißim A, ad C, vt B, ad D. Rurſus quia eſt B, ad D, vt A, ad C,* [b] *erit vicißim B, ad A, vt D, ad C. Quod eſt propoſitum.*

[a] 13. ſeptimi.

[b] 13. ſeptimi.

II.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque diuiſi proportionales erunt.

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico & diuidendo eſſe, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Cum enim ſit vt AB, ad CB, ita DE, ad FE;

A..... C... B

D .... F.. E

erit vicißim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE: Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, [d] *ita reliquus AC, ad reliquum DF: hoc eſt, AC, ad DF, vt CB, ad FE.* [e] *Vicißim ergo erit quoque AC, ad CB, vt DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.*

[a] 13. ſeptimi.

[d] 15. ſeptimi.

[e] 13. ſeptimi.

EADEM ratione demonſtrabimus Diuiſionem rationis conuerſam, & contrariam, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico per diuiſionem rationis conuerſam eſſe quoque, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; erit quoque diuidendo, vt AC, ad CE, ita DF, ad FE: Et conuertendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde, vt AC, ad AE, ita DF, ad DE. Dico per diuiſionem rationis contrariam, eſſe quoque, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quoniam enim eſt, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE;

DE; erit conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Ergo diuidendo, vt CB, ad AC, ita FE, ad DF: Et conuertendo, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Quod eſt propoſitum.

III.

SI diuiſi numeri proportionales ſint: Hi quoque compoſiti proportionales erunt.

SIT vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico & componendo eſſe, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF. Cum enim ſit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; [a] erit viciſſim, vt AB, ad DE, ita BC, ad EF; [b] Ac proinde AB, BC, ſimul ad DE, EF, ſimul, vt BC, ad EF: [c] Et viciſſim AB, BC, ſimul, hoc eſt, totus AC, ad BC, vt DE, EF, ſimul, hoc eſt, totus DF, ad EF. Quod eſt propoſitum.

A ..... E ... C
D .... E .. F

SIMILITER Compoſitio rationis conuerſa, & contraria oſtendetur hoc loco, vt in lib. 5. Sit enim primum, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis conuerſam eſſe quoque, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quia enim eſt, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF, erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE. Quod eſt propoſitum.

DEINDE ſit rurſus, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF. Dico per compoſitionem rationis contrariam eſſe quoque, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad BC, ita DE, ad EF; erit conuertendo, vt BC, ad AB, ita EF, ad DE: Et componendo ergo, vt AC, ad AB, ita DF, ad DE: Et conuertendo, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.

[a] 13. ſeptimi. [b] 12. ſeptimi. [c] 13. ſeptimi.

IIII.

SI compoſiti numeri proportionales ſint: Hi quoque per conuerſionem rationis proportionales erunt.

SIT

SIT vt AB, ad CB, ita DE, ad FE. Dico, per conuerſionem rationis eſſe quoque, vt AE, ad AC, ita DE, ad DF. Cum enim ſit, vt AB, ad CB, ita DE, ad FE; [a] *erit viciſſim, vt totus AB, ad totum DE, ita ablatus CB, ad ablatum FE;* [b] *Ac proinde, vt totus AB, ad totum DE, ita erit reliquus AC, ad reliquum DF.* [c] *Viciſſim igitur, vt AB, ad AC, ita DE, ad DF. Quod eſt propoſitum.*

A ..... C ... B
D .... F .. E

[a] 13. ſeptim.
[b] 11. ſeptim.
[c] 13. ſeptimi.

RVRSVS ex his facile demonſtrabimus theorema illud in numeris, quod in magnitudinibus oſtendit Euclides propoſ. 14. lib. 5. Videlicet.

V.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & quintus ad ſecundum eandem rationem, quam ſextus ad quartum: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eandem habebit rationem, quam tertius cum ſexto ad quartum.

SIT vt AB, primus ad C, ſecundum, ita DE, tertius ad F, quartum: Item vt BG, quintus ad C, ſecundum, ita EH, ſextus ad F, quartum. Dico ita eſſe AG, compoſitum ex primo & quinto, ad C, ſecundum, vt eſt DH, compoſitus ex tertio & ſexto, ad F, quartum. Cum enim ſit, vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit conuertendo vt C, ad BG, ita F, ad FH. Quoniam igitur eſt vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad BG, ita F, ad EH; erit ex æqualitate, vt AB, ad BG, ita DE, ad EH. Componendo igitur, vt AG, ad BG; ita DH, ad EH. Itaque cum rurſus ſit, vt AG, ad BG, ita DH, ad EH: & vt BG, ad C, ita EH, ad F; erit ex æqualitate, vt AG, ad C, ita DH, ad F. Quod eſt propoſitum.

A ..... B .. G | D ..... E ... H
C .... | F .....

EODEM

EODEM modo & hoc Theorema oſtendemus, quod ad propoſ. 24. lib. 5. in magnitudinibus demonſtrauimus.

VI.

SI duo numeri ad duos numeros eandem habeant rationem; & detracti quidam habeant ad coſdem eandem: Et reliqui ad coſdem eandem rationem habebunt.

SIT vt totus AB, ad C, ita totus DE, ad F; Item vt detractus AG, ad C, ita detractus DH, ad F. Dico & reliquũ GB, eſſe ad C, vt eſt reliquus HE, ad F. Cũ enim ſit, vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit conuertendo, vt C, ad AG, ita F, ad DH. Quia igitur eſt, vt AB, ad C, ita DE, ad F; & vt C, ad AG, ita F, ad DH; erit ex aqualitate vt AB, ad AG, ita DE, ad DH. Diuidendo ergo vt GB, ad AG, ita HE, ad DH. Itaque cum rurſus ſit, vt GB, ad AG, ita HE, ad DH; & vt AG, ad C, ita DH, ad F; erit ex aqualitate, vt GB, ad C, ita HE, ad F. Quod eſt propoſitum.

A ..... G .. B
C ....

D ..... H ... E
F .....

ITEM & hoc demonſtrabimus.

VII.

SI primus ad ſecundum eandem habuerit rationem, quam tertius ad quartum; habuerit autem & primus ad quintum eandem, quam tertius ad ſextum: Etiam primus ad compoſitum ſecundum cum quinto eandem rationem habebit, quam tertius ad quartum cum ſexto.

SIT vt primus A, ad ſecundum BC, ita tertius D, ad quartum EF; & vt primus A, ad quintũ CG, ita tertius D, ad ſextum FH. Dico ita eſſe A, primum ad EG, compoſitũ ex

ſecundo & quinto, vt eſt D, tertius ad E H, compoſitum ex quarto & ſexto. Cum enim ſit, vt A, ad B C, ita D, ad E F, erit conuertendo, vt B C, ad A, ita E F, ad D. Quia igitur eſt vt B C, ad A, ita E F, ad D, & vt A, ad C G, ita D, ad F H, erit ex æqualitate vt B C, ad C G, ita E F, ad F H, & componendo, vt B G, ad C G, ita E H, ad F H, & conuertendo, vt C G, ad B G, ita F H, ad E H. Quoniam ergo eſt, vt A, ad C G, ita D, ad F H, & vt C G, ad B G, ita F H, ad E H, erit ex æqualitate, vt A, ad B G, ita D, ad E H. Quod eſt propoſitum.

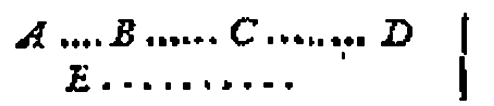
A ..... D .....
B ....C .. G E ..... F .... H

DENIQVE ex his omnibus inferemus hoc theorema.

VIII.

SI quotcunque numeri ad eundem habuerint proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quendam alium eundem; Habebũt quoque illi omnes ſimul ad eundem, proportionem, quam alij omnes hi ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcunque numeros proportiones habuerit, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales; Habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionem, quam idem alius numerus ad hos omnes ſimul.

HABEANT quotcunque numeri AB, BC, CD, ad eundem E, proportiones, quas totidem FG, GH, HI, habent ad eundem K. Hoc eſt, ſit vt AB, ad E, ita FG, ad K; & vt BC, ad E, ita GH, ad K; & vt CD, ad E, ita HI, ad K. Dico omnes illos ſimul, hoc eſt, ipſum AD, ad E, eandem habere proportionem, quam hi omnes ſimul habent, hoc eſt, quam ipſe FI, habet ad K. Cum enim ſit, vt AB, primus ad E, ſecundus, ita FG, tertius ad K, quartum: Item vt BC, quintus ad E,



ad E, ſecundum, ita GH, ſextus ad K, quartum; erit quoq; vt AC, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FH, tertius cum ſexto, ad K, quartum. Rurſus quia eſt, vt AC, primus ad E, ſecundum, ita FH, tertius ad K, quartum: Item vt CD, quintus ad E, ſecundum, ita HI, ſextus ad K, quartum; erit etiam, vt AD, primus cum quinto, ad E, ſecundum, ita FI, tertius cum ſexto, ad K, quartum: Atque ita de cæteris, ſi plures fuerint.

SED habeat iam idem numerus E, ad numeros quotcunque AB, BC, CD, proportiones eaſdem, quas idem alius numerus K, ad totidem FG, GH, HI; Hoc eſt, ſit vt E, ad AE, ita K, ad FG; & vt E, ad EC, ita K, ad GH; & vt E, ad CD, ita K, ad HI. Dico eſſe, vt E, ad omnes illos ſimul, nimirum ad AD, ita K, ad hos omnes ſimul, vtpote ad FI. Cum enim ſit, vt E, primus ad AB, ſecundum, ita K, tertius ad FG, quartum: Item vt E, primus ad BC, quintum, ita K, tertius ad GH, ſextum; erit quoque, vt E, primus ad AC, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FH, quartum cum ſexto. Rurſus quia eſt, vt E, primus ad AC, ſecundum, ita K, tertius ad FH, quartum: Item vt E, primus ad CD, quintum, ita K, tertius ad HI, ſextum; erit etiam, vt E, primus ad AD, ſecundum cum quinto, ita K, tertius ad FI, quartum cum ſexto. Atque ita de reliquis, ſi plures fuerint.

IAM vero, his demonſtratis, oſtendentur nouem vltimæ propoſitiones lib. 5. à Campano adiectæ, eodem modo in numeris improportionalibus, quo in magnitudinibus demonſtratæ fuere; ſi pro magnitudinibus intelligantur numeri ſiue integri, ſiue fracti, & pro modis argumentandi in proportionibus, qui libro 5. ſunt demonſtrati, aſſumantur iidem modi hoc lib. demonſtrati: Vt opus non ſit eas hic repetere. Satis enim eſt, vt dixi, ſi propoſitiones illæ quinti lib. in manus ſumantur, & magnitudines intelligantur eſſe numeri, eademq; prorſus demonſtrationes adhibeantur.

21. THEOR. 21. PROPOS. 23.

PRIMI inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

SINT numeri A, B, inter ſe primi. Dico eos eſſe minimos omnium, qui eandem proportionem habent, quã ipſi A, & B. Nam ſi non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, minimi habentes proportionem, quam A, & B. Sint ergo, ſi fieri poteſt, C, D, minimi in proportione A, & B, minoresque ipſis A, & B. Quoniam igitur C, D, minimi ſunt in proportione A, & B; [a] metietur C, ipſum A, & D, ipſum B, æque, atque adeo ſecundum eundem numerum, qui ſit E, ita vt C, toties metiatur ipſum A, & D, ipſum B, quoties vnitas eſt in E. Itaque cum vnitas numerum E, & numerus C, numerum A, æque metiatur, [b] metietur & viciſsim æque vnitas numerum C, & numerus E, numerum A. Rurſus quia vnitas numerum E, & numerus D, numerum B, æque metitur, [c] metietur quoque viciſsim æque vnitas numerum D, & numerus E, numerum B. Atque adeo, cum idem numerus E, vtrumque A, & B, metiatur, erit numerus E, eorum communis menſura. Quare A, & B, non ſunt primi inter ſe, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Non ſunt igitur alij numeri ipſis A, & B, minores, minimi in proportione A, ad B; Ac proinde A, & B, minimi ſunt. Primi ergo inter ſe numeri minimi ſunt, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... B ....
C ----- D ---
E ---

[a] 21. ſept.
[b] 15. ſept.
[c] 15. ſept.

22. THEOR. 22. PROPOS. 24.

MINIMI numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt.

SINT

SINT numeri A, & B, minimi omnium eandem cũ ipſis proportionem habentium. Dico eos eſſe inter ſe primos; hoc eſt, nullum numerum, præter vnitatem, communi mẽſura eos metiri. Si enim non ſunt inter ſe primi, ſed habent numerum communem menſuram; ſit numerus C, eorum menſura communis, metiaturque C, numerus numerum quidem A, toties, quoties vnitas eſt in numero D; At vero ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E. Quia igitur C, toties compoſitus, quot in D, ſunt vnitates, procreat ipſum A; & idem C, toties cõpoſitus, quot ſunt vnitates in E, producit ipſum B; [a] fit, vt D, & E ipſum C, multiplicantes, producant A, & B. [b] Quare eadem erit proportio A, ad B, quæ D, ad E; Atque adeo, cum D, & E, partes ipſorum A, & B, minores ſint, quam A, & B; non erunt A, & B, numeri minimi omnium eandem cum eis rationem habentium. Quod eſt abſurdum. Primi ergo inter ſe ſunt numeri A, & B; Ac proinde, minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. Quod oſtendendum erat.

A ..... B .....
C——
D ——— E ———

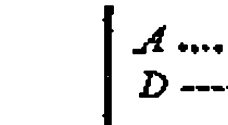
[a] 9. prop.
[b] 18. ſept.

SCHOLIVM.

HANC propoſitionem, & præcedentem cum Campano ad plures numeros extendemus, hoc modo.

QVOTCVNQVE numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionum. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi.

SINT quotcunq; numeri inter ſe primi A, B, C. Dico eos minimos eſſe in continuatione ſuarũ proportionum, ita vt in minoribus numeris continuari nõ poſſint, quamuis proportio



duorum in minoribus numeris reperiuntur. Si enim non ſunt minimi, erunt aliqui alij minores ipſis, nimirum D, E, F; minimi in continuatione illarum proportionum. Quia igitur D, E, F, minimi ſunt in proportione numerorum A, B, C; metietur D, ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, æque per ea, quæ ad propoſ. 21. huius lib. demonſtrauimus; atque adeo ſecundum vnum eundem numerum, qui ſit G; ita vt D, toties metiatur ipſum A, & E, ipſum B, & F, ipſum C, quoties vnitas eſt in G. Quoniam igitur vnitas numerum G, & numerus D ipſum A, æque metitur; 15. ſept. metietur quoque viciſſim æque vnitas numerum D, & numerus G, numerum A: Eademque ratione idem G, metitur & ipſum B, & ipſum C, æque, atque vnitas ipſos E, F; Atque idcirco A, B, C, cum habeant numerum G, communem menſuram, non erunt inter ſe primi, ſed compoſiti. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non ſunt igitur alij numeri minores ipſis A, B, C, minimi in continuatione proportionũ A, ad B, & B, ad C; ſed ipſi A, B, C, minimi ſunt.

IAM vero ſint A, B, C, in continuatione ſuarum proportionum minimi. Dico eos primos eſſe inter ſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur eos communis menſura numerus G, ita vt G, toties metiatur ipſum A, quoties vnitas eſt in D; & ipſum B, toties, quoties vnitas eſt in E; & ipſum C, toties, quoties vnitas eſt in F. Quoniam igitur G, toties compoſitus facit numeros A, B, C, quoties vnitas eſt in D, E, F; ſit vt D, E, F, ipſum G, multiplicantes producant ipſos A, B, C. Quare D, E, F, eaſdem habent proportiones, quas A, B, C, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus; Atque adeo, cum D, E, F, minores ſint quam A, B, C; non erunt A, B, C, minimi in continuatione ſuarum proportionum Quod eſt abſurdum. Primi igitur inter ſe ſunt A, B, C. Quod eſt propoſitum.

24. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint; Qui vnum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit.

SINT

SINT inter ſe primi A, & B; & ipſum A, metiatur numerus C. Dico C, ad reliquum B, eſſe primum. Si enim non ſunt inter ſe primi B, & C; metiatur eos communi menſurâ, ſi fieri poteſt, numerus D.

Quoniam igitur D, metitur C; & C, ipſum A; a metietur etiam D, ipſum A: Metitur autem & Ipſum B. Igitur A, & B, non ſunt inter ſe primi, cum habeant menſuram communem numerum D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſin. Eſt ergo C, ad B, primus. Eodem modo, ſi numerus quiſpiam metiatur ipſum B, erit is ad A, primus. Quapropter ſi duo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

A ..... B .....
C .... D ----

a 11. prop.

THEOR. 24. PROPOS. 26. 25.

SI duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundē primus erit.

SIT vterque numerus A, B, ad C, primus, producaturque ex A, in B, vel ex B, in A, numerus D. Dico & D, ad eundem C, primum eſſe. Si enim C, & D, non ſunt inter ſe primi; ſit eorum communis menſura numerus E, metiens ipſum D, toties quot vnitates ſunt in numero F. Quoniam igitur E, toties compoſitus facit ipſum D, quot ſunt vnitates in F; b fit vt F, ipſum E, multiplicans gignat ipſum D; c & contra E, ipſum F, multiplicans producat eundem D. Genitus eſt autem idē D, ex A, in B. Igitur cum ex E, primo in F, quartum fiat idem numerus, qui ex A, ſecundo in B, tertium; d erit vt E, primus ad A, ſecundum, ita B, tertius ad F, quartum. Quia vero A, & C, primi inter ſe ſunt; & E, ipſum C, ponitur metiri; e erit E, ad A, primus; Atque adeo E, & A. cum ſint inter ſe primi, f in ſua proportione minimi erunt.

A ..... B ...
C .....
D .....
E ---- F ---

b 9. prop.
c 6. ſept.
d 19. ſept.
e 21. ſept.
f 23. ſept.

a 31. sept. erunt.[a] Aeque igitur metientur ipsos B, & F, eandem proportionem habẽtes, nimirum E, ipsum B, & A, ipsum F. Quare cum E, metiatur vtrumque B, & C; non erunt B, & C, inter se primi. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Primus ergo erit D, ad ipsum C; Ac proinde, si duo numeri ad quempiã primi fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

26. ## THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquũ primus erit.

SINT inter se primi A, & B, gignaturque C, ex A, in se ipsum. Dico C, ad reliquum B, esse primum. Sumpto enim D, æquali ipsi A, erit & D, ad B, primus. Quoniam igitur A, & D, ad B, primi sunt,

A.... B.....
C.....
D ....

b 26. sept. [b] erit numerus ex A, in D, hoc est, ex A, in se genitus, nimirum C, ad eundem B, primus. Eademque arte ostendemus, numerum ex B, in se genitum, ad A, primum esse. Si duo ergo numeri primi inter se fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

27. ## THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, primi fuerint; Et qui ex eis gignentur, primi inter se erunt.

SIT vterque A, & B, ad vtrumq; C, & D, primus, gignaturque E, ex A, in B; & F, ex C, in D. Dico E, & F, inter se primos esse. Cum enim vterque A, & B, primus sit

ad

ad C; [a] erit quoque E, ex ipſis genitus, ad eundem C, primus. Rurſus cum vterque A, & B, ad D, ſit primus, erit eodem modo E, ipſis genitus, ad eundem D, primus. Quia igitur vterque C, & D, primus eſt ad E; [b] erit quoque F, ex illis procreatus, ad E, primus. Si ergo duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrumque, &c. Quod erat oſtendendum.

A..... B...
E.....
C... D..
F.....

[a] 26. ſept.
[b] 26. ſept.

THEOR. 27. PROPOS. 29. 28.

SI duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans vterque ſe ipſum fecerit aliquem; Et geniti ex ipſis primi inter ſe erunt: Et ſi, qui in principio, genitos ipſos multiplicantes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter ſe erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT primi inter ſe A, & B; & ex A, in ſe fiat C; at ex B, in ſe fiat D. Dico & C, D, primos inter ſe eſſe: Et ſi rurſum fiat E, ex A, in C; & F, ex B, in D; Dico E, F, quoque eſſe inter ſe primos. Cũ enim A, B, ſint inter ſe primi, [c] erit C, factus ex A, in ſe, ad reliquum B, primus: Atque eodem modo cum B, & C, primi ſint inter ſe, erit & D, factus ex B, in ſe, ad C, primus: atque adeo geniti duo C, D, primi inter ſe erunt.

A... B..
G..... D....
E..... F .....
G, 81. H, 16.
I, 243. K, 32.

[c] 27. ſept.

RVRSVS

[a] 27. sept. RVRSVS, quia A, & B, sunt inter se primi, [a] erit & C, factus ex A, in se, ad B; & D, genitus ex B, in se, ad A, primus: Est autem & C, ostensus ad D, primus. Vterque igitur A, C, ad vtrumque B, D, primus erit; [b] Ac proinde E, factus ex A, in C, primus erit ad F, factum ex B, in D. Quod si adhuc ex A, in E, fiat G; & ex B, in F, fiat H; cum A, & C, primi sint ad B, [c] erit quoque E, ex ipsis genitus, ad B, primus: Eademque ratione & F, ad A, primus erit. Quia igitur vterque A, E, ad vtrumque B, F, primus est; [d] erit & G, factus ex A, in E, ad H, factum ex B, in F, primus. Et sic deinceps, si plures fuerint. Nam eodem modo cum A, & E, primi sint ad B, [e] erit & G, ex ipsis factus, ad B, primus: necnon & H, ad A, [f] Quare & I, genitus ex A, in G, ad K, genitum ex B, in H, primus erit, cum vterque A, G, ad vtrumque B, H, sit primus. Si duo itaque numeri primi inter se fuerint, &c. Quod ostendendum erat.

[b] 28. sept.

[c] 26. sept.

A... B.. C..... D.... E ..... F..... G, 81. H, 16. I, 243. K, 32.

[d] 28. sept.

[e] 26. sept.

[f] 28. sept.

29.

THEOR. 28. PROPOS. 30.

SI duo numeri primi inter se fuerint: Etiam vterque simul ad quemlibet illorum primus erit: Et si vterque simul ad vnum aliquem illorum primus fuerit; Etiam, qui in principio, numeri primi inter se erunt.

SINT inter se primi AB, B C. Dico & vtrumque simul AC, primũ esse & ad AB, & ad BC. Si enim AC, AB, non sunt inter se primi; metiatur illos, si fieri potest, communi mensura numerus D. Quia igitur D, metitur totum AC, & ablatum AB; [g] metietur quoque reliquum BC.

[g] 12. prop.

BC. Non igitur primi inter ſe ſunt AB, BC, cũ eos metiatur numerus D. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare AC, ad AB, primus erit. Eodemque modo ad BC, oſtendemus eundem eſſe primum.

A.....B.....C
D-----

SED iam vterque AB, BC, ſimul, primus ſit ad vnum aliquem illorum, videlicet ad AB. Dico & AB, BC, inter ſe primos eſſe. Si enim non ſunt inter ſe primi, metiatur illos, ſi fieri poteſt, numerus D. Quia igitur D, metitur AB, & BC; [a] metietur quoque D, numerum AC, ex AB, BC, compoſitum; Ac proinde AC, AB, non ſunt inter ſe primi, cum eos numerus D, metiatur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Sunt igitur AB, BC, inter ſe primi. Eodemque argumento oſtendemus AB, BC, inter ſe primos eſſe, ſi AC, ad BC, primus eſſe ponatur. Si duo ergo numeri primi inter ſe fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 10. pron.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, numerum, qui ex duobus compoſitus ad vnum illorum primus eſt, ad reliquum quoque primum eſſe. Si enim AC, ad AB, primus eſt, erunt AB, BC, inter ſe primi, per ſecundam partem huius propoſ. Igitur & AC, ad BC, primus erit, per primam partem eiuſdem. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 29. PROPOS. 31. 32.

OMNIS primus nũmerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus eſt.

PRIMVS numerus A, non metiatur numerum B. Dico A, ad B, primum eſſe; hoc eſt, A, & B, eſſe inter ſe primos,

primos, licet B, compoſitus ſit. Si enim A, & B, non ſunt inter ſe primi, metiatur eos, præter vnitatem, ſi fieri poteſt, communi menſura numerus C. Non erit ergo C, idem qui A; quòd A, ponatur non metiri ipſum B. Quia igitur numerum A, alius numerus C, metitur, non erit A, primus. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Primus igitur eſt A, ad B; Ac propterea, omnis primus numerus, ad omnem numerum, &c. Quod demonſtrandum erat.

A ..... B .....
C ---

33. THEOR. 30. PROPOS. 32.

SI duo numeri ſeſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipſis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur.

DVO numeri A, & B, ſe mutuo multiplicantes faciãt C, quam metiatur numerus primus D. Dico & D, metiri ſaltem vnũ ipſorum A, & B, ſi non vtrumque metitur. Non metiatur enim D, ipſum A; metiatur vero ipſum C, toties, quot ſunt vnitates in numero E; ita vt C, fiat ex D, in E, qui idem factus eſt ex A, in B. Quia igitur numerus genitus ex D, primo in E, quartum, æqualis eſt numero genito ex A, ſecundo in B, tertium; [a] erit vt D, primus ad A, ſecũdum, ita B, tertius ad E, quartum. [b] Quia vero primus D, ad A, primus eſt, cum eum non metiatur; [c] erunt D, & A, in ſua proportione minimi. [d] Quare æque metientur ipſos B, & E; nimirum D, ipſum B, & A, ipſum E; Ac proinde ſi D, non metitur ipſum A, metietur ſaltem ipſum B: Eodemque modo ſi D, non metiatur ipſum B, metietur ſaltem ipſum A. Si duo ergo numeri ſe ſe mutuo

A .... B .....
C .....
D ... E .....

[a] 19. ſept.
[b] 21. ſept.
[c] 22. ſept.
[d] 21. ſept.

mutuo multiplicantes fecerint aliquem, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EODEM modo & hoc theorema ſequens demonſtrabimus.

SI duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autem ex ipſis metiatur aliquis non primus numerus, uel certe ad ipſum ſit compoſitus: is etiam ad unum eorum, qui in principio, compoſitus erit.

NAM ex A, in B, fiat C, quem vel metiatur numerus non primus D, vel certe compoſitus ad eum ſit: hoc eſt, vel D, & C, compoſiti ſint inter ſe. Dico D, quoque ad vnum ipſorũ A, B, compoſitum eſſe: id eſt, vel D, & A; vel D, & B, eſſe quoque inter ſe compoſitos. Si enim D, ad neutrum eorum compoſitus eſt; erit vterque A, & B, ad D, primus. [a] *Quare & C, ex illis genitus, ad eundem D, primus erit. Quod eſt abſurdum, cum D, ponatur vel metiri ipſum C, vel certe ad eum eſſe compoſitus. Eſt igitur D, compoſitus ad A, vel ad B, cum non ſit primus ad vtrumque.*

A ... B ....
C .....
D .....

[a] 26. ſept.

PROBL. 31. PROPOS. 33. 30.

OMNEM compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

SIT numerus compoſitus A. Dico aliquem numerũ primũ eum metiri. Metiatur enim ipſum numerus B, qui ſi primus fuerit, habetur propoſitum: Si vero cõpoſitus, metiatur eum numerus C, qui vel primus erit, vel cõpoſitus: Si primus, cum metiatur ipſum B; & B, ipſum A; [b] metietur quoque C, primus ipſum A. Si autem C, compoſitus

[b] 11. pron.

tus fuerit, metietur eum alius numerus. Quia vero numerus non diminuitur infinite, veniemus tandem ad aliquem numerum, quem nullus alius metiatur, atque adeo ad primum; qui cum metiatur omnes precedentes, [a] metietur quoque compositum A. Quod est propositum.

A ..... B..... C...

[a] 11. *pron.*

ALITER. Quia numerus A, compositus est; metietur eum aliquis numerus, vel etiam plures. Sit omnium metientium eum minimus B; quem dico esse primum. Si enim B, non est primus, metiatur eum, si fieri potest, numerus C. Quoniam igitur C, metitur ipsum B, & B, ipsum A; [b] metietur quoque C, minor ipso B, ipsum A. Quod est absurdum, cum B, ponatur omnium metientium minimus. Primus ergo est numerus B. Omnem igitur compositum numerum aliquis primus numerus metitur. Quod erat demonstrandum.

A ..... B... C --

[b] 11. *pron.*

31. THEOR. 32. PROPOS. 34.

OMNIS numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur.

SIT numerus quicunque A. Dico eum vel esse primum, vel certe aliquem primum eum metiri. Cum enim omnis numerus vel primus sit, vel compositus; si quidem A, primus est, habetur propositum: Si vero compositus; [c] metietur eum aliquis primus. Omnis igitur numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. Quod erat ostendendum.

A .....

[c] 33. *sept.*

34. PROBL. 3. PROPOS. 35.

NVMERIS datis quotcunque, reperire

perire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SINT quotcunque numeri A, B, C, habentes quaſcunque proportiones, ſiue eadem ſit proportio A, ad B, quæ B, ad C, ſiue non; oporteatq; totidem reperire, qui in eiſdē proportionibus ſint minimi. Quoniam A, B, C, ſunt inter ſe aut primi, aut compoſiti; Si primi inter ſe ſunt; erunt ipſi in continuatione ſuarum proportionum minimi, per ea, quæ ad propoſ. 24. huius lib. demonſtrauimus. Si vero non ſunt inter ſe primi, [a] inuenta ſit maxima eorum communis menſura numerus D, qui metiatur ipſos A, B, C, per numeros E, F, G. Dico E, F, G, minimos eſſe in proportionibus numerorum A, B, C. Quòd enim eaſdem habeant proportiones, quas numeri A, B, C, ſic oſtendetur. Quoniam D, ipſos A, B, C, metitur per E, F, G, [b] fit, vt D, ipſos E, F, G, multiplicans faciat A, B, C. Quare, per ea, quæ ad propoſ. 18. huius lib. oſtendimus, eaſdem rationes habebunt E, F, G, quas numeri A, B, C.

A ..... B .... C, ...
D ..
E ... F .. G ....
H ---- I ---- K ----
L -----

QVOD vero E, F, G, ſint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis, hoc modo perſpicuum fiet. Si non ſunt minimi, erunt aliqui alij ipſis minores, minimi in eiſdem proportionibus. Sint ergo, ſi fieri poteſt, minimi H, I, K; qui quoniam ipſos A, B, C, metiuntur æque, vt ad propoſ 21. huius lib oſtendimus; metiantur eos per numerum L. Quo poſito, [c] fit, vt L, multiplicans numeros H, I, K producat numeros A, B, C; [d] & viciſſim L, ipſos A, B, C, metiatur per H, I, K. Quoniam igitur E, primus multiplicans D, quartum facit A, & H, ſecundus multiplicans L, tertium facit eundem A; [e] erit, vt E, primus ad H, ſecundum, ita L, tertius ad D, quartum: Eſt autem E, maior quam H. Igitur & L, maior erit, quam D; Atque adeo, cum L, ipſos A, B, C, metiatur; non erit D, ma-

[a] 3. ſept.
[b] 9. pron.
[c] 9. pron.
[d] 8. pron.
[e] 19. ſept.

D, maxima menſura communis numerorum A, B, C. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur erunt alij numeri minores ipſis E, F, G, minimi in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C, ſed ipſi E, F, G, minimi erunt. Quamobrem, numeris datis quotcunque, reperimus minores, &c. Quod faciendum erat.

COROLLARIVM.

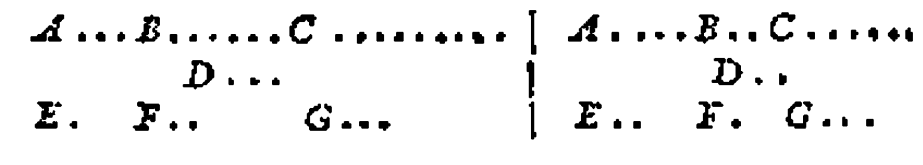
HINC ſit, maximam menſuram quotlibet numerorum, metiri ipſos per numeros, qui minimi ſunt omnium eandem proportionem cum ipſis habentium. Oſtenſum enim eſt, numeros E, F, G, per quos D, maxima menſura numerorum A, B, C, ipſos A, B, C, metitur, minimos eſſe in continuatione proportionum A, ad B, & B, ad C: Eademque eſt in cæteris ratio.

SCHOLIVM.

EX his facili via comperiemus duos minimos numeros, qui eandem habeant proportionem, quam quotcunq; numeri dati continue proportionales. Vt ſi proponantur continue proportionales A, B, C, D, E, ſiue illi ſint in continuatione proportionis A, ad B, minimi, ſiue non; reperiemus duos in eadem proportione minimos, ſi per hoc problema ſumamus F, & G, minimos in proportione ducrum A, & B, nimirum illos, per quos I, maxima eorum communis menſura eos metitur.

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E, 81.
I, 8.
F, 2. G, 3.

CÆTERVM contingit interdum, vnum numerorum



E, F, G, per hanc propoſ. inuentorum eſſe vnitatem; quando ſcilicet

ſcilicet D, maxima menſura vni ipſorum A, B, C, æqualis eſt, vt ex his exemplis apparet. Manifeſtum eſt autem, tunc innenxos E, F, G. eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, cum minor numerus dari non poſſit, quam vnitas.

PROBL. 4. PROPOS. 36. 36.

DVOBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIT reperiendus minimus numerus omnium, quos dati numeri A, & B, metiuntur. Sint primum dati numeri A, & B, inter ſe primi, ſeſeque mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, perſpicuum eſt. Nam cum producatur C, ex A, in B, vel ex B, in A; [a] metietur A, ipſum C, per B; & B, eundem C, per A. Vterque igitur A, & B, ipſum C, metitur. Quod autem C, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ſic demonſtrabimus. Si C, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum D, ipſo C, minorem; metianturque A, ipſum D, per E, at B, eundem D, per F. Quo poſito, [b] tam ex A, in E, quam ex B, in F, & e contrario, producetur numerus D. Quia igitur idem numerus D, fit ex A, primo in E, quartum, & ex B, ſecundo in F, tertium; [c] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita F, tertius ad E, quartum. Igitur A, & B, (cum ponantur primi inter ſe, [d] & ob id, in ſua proportione minimi) [e] æque metiuntur ipſos F, & E; nimirum A, ipſum F, & B, ipſum E. Quoniam vero A, multiplicans B, & E, facit C, & D; [f] erit C, ad D, vt B, ad E: Ac propterea cum B, metiatur ipſum E, vt oſtenſum eſt; metietur & C, numerus numerum D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B,

A .... B .....
C.....
D----------
E------ F----

[a] 7. pron.

[b] 9. pron.

[c] 19. ſept.

[d] 23. ſept.
[e] 21. ſept.
[f] 17. ſept.

metientur alium numerum minorem ipſo C; atq; adeo C, minimus eſt omnium, quos metiuntur.

SINT deinde dati numeri A, & B, non primi inter ſe. [a] Inueniantur C, & D, minimi in eadem proportione, vt ſint quatuor numeri proportionales, numerus A, ad B, vt C, ad D. Quo poſito, [b] fiet idem numerus ex A, primo in D, quartum, & ex B, ſecundo in C, tertium. Factus ergo ſit E. Dico E, hac via procreatum eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur. Quod enim eum metiantur, manifeſtum eſt. Nam cũ tam A, multiplicatus à D, quam B, multiplicatus a C, ipſum E, producat; [c] metietur tam A, quam B, ipſum E. Quod vero E, ſit minimus omnium, quos A, & B, metiuntur, ita probabitur. Si E, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt, A, & B, alium numerum F, ipſo E, minorem: metiatur autem A, ipſum F, per G; & B, eundem F, per H. Quo poſito, [d] fiet F, tam ex A, in G, quã ex B, in H. Quia igitur idem numerus F, fit & ex A, primo in G, quartum, & ex B, ſecundo, in H, tertium; [e] erit, vt A, primus ad B, ſecundum, ita H, tertius ad G, quartum. Quare C, & D, cum ſint minimi in proportione A, ad B, vel H, ad G; [f] metientur ipſos H, & G, æque; nimirum C, ipſum H; & D, ipſum G. Quia vero A, multiplicans D, & G, facit E, & F; [g] erit E, ad F, vt D, ad G; Ac propterea cum D, metiatur ipſum G, vt oſtenſum eſt; metietur etiam E, numerus numerum F, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, & B, metientur alium numerum ipſo E, minorem; atque adeo E, minimus eſt omnium, quos metiantur. Quamobrem, duobus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod faciendum erat.

[a] 35. ſept.
[b] 19. ſept.
A.... B.....
C.. D...
E.....
F----------
G----H---
[c] 7. prop.
[d] 9. prop.
[e] 19. ſept.
[f] 21. ſept.
[g] 17. ſept.

COROLLARIVM.

HINC fit, ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, productos numerum minimum, quem illi metian-

metiantur. Nam propoſitis C, & D, minimis in proportione A, ad B, demonſtratum eſt, numerum E, factum ex A, minore in D, maiorem, & ex B, maiore in C, minorem, eſſe minimum, quem A, & B, metiuntur.

SCHOLIVM.

HOC autem corollarium apud Cambanum eſt propoſitio 35. huius libri ſeptimi; Et ſequens propoſitio apud eundem, corollarium eſt propoſitionis 35.

THEOR. 33. PROPOS. 37. 35.

SI duo numeri numerum quempiam metiantur: Etiam minimus, quem illi metiuntur, eundem metietur.

METIANTVR duo numeri A, & B, quemlibet numerum CD, ſitque alius numerus E, minimus, quem iidem A, & B, metiuntur. Dico & E, ipſum CD, metiri. Si enim E, ipſum CD, non metitur; ablato E, ex CD, quoties poteſt auferri, relinquetur numerus quidã minor, quam E. Relinquat igitur E, ablatus ex CD, quoties poteſt, numerum, ſi fieri poteſt, FD, minorem ſe, ita vt E, metiatur ablatum CF. Quoniam igitur tam A, quam B, ipſum E, metitur, & E, ipſum CF; metietur quoque tam A, quam B, ipſum CF. Itaque A, & B, cum metiantur totum CD, & ablatum CF; metientur & reliquum FD. Eſt autem FD, minor quam E. Non igitur E, minimus eſt numerus, quem A, & B, metiuntur.

A . . B . . .
C . . . . . F - - - - - D
E . . . . . .

[a] 11. *prop.*
[b] 12. *prop.*

Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Quare E, ipſum CD, metitur. Si duo ergo numeri numerũ quempiam metiantur, &c. Quod erat demonſtrandum.

36. PROBL. 5. PROPOS. 38.

TRIBVS numeris datis, reperire, quem illi minimum metiantur, numerũ.

SIT inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri A, B, C, metiantur. [a] Inuento D, minimo, quem metiantur duo A, & B; metietur & eundem D, reliquus C, aut non metietur. Metiatur primum C, ipſum D, ita vt omnes tres A, B, C, ipſum D, metiuntur. Dico numerum D, minimum inuentum, quem A, & B, metiuntur, minimum quoque eſſe, quem tres A, B, C, metiantur. Si enim D, non eſt minimus, metiantur, ſi fieri poteſt A, B, C, alium numerum E, ipſo D, minorem. Quoniam igitur A, & B, metiuntur ipſum E, minorem quam D; non erit D, minimus, quem A, & B, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Immo, cum A, & & B, metiantur ipſum E; & D, ſit minimus, quem iidem A, & B, metiuntur; [b] metietur quoque D, ipſum E, maior minorem. Quod eſt abſurdum.

A... B.... C.....
D.....
E ----------

[a] 36. ſept.

[b] 37. ſept.

SED iam C, non metiatur ipſum D, inuentum. [c] Inuento igitur E, minimo, quem C, & D, metiantur; Dico E, eſſe minimum, quem A, B, C, metiantur. Quod enim eum metiantur, ita oſtendetur. Cũ A, & B, metiantur ipſum D, & D, ipſum E; [d] metientur quoque A, & B, ipſum E. Metitur autem & C, eundem E. Igitur omnes tres A, B, C, ipſum E, metiuntur. Quod autem E, ſit minimus, quem metiantur A, B, C, hoc modo probabitur. Si E, non eſt minimus; metiantur, ſi fieri poteſt,

A.. B... C....
D.....
E.....
F---------

[c] 36. ſept.

[d] 11. prop.

poteſt, A, B, C, alium numerum F, ipſo E, minorem. Quoniam igitur A, & B, ipſum F, metiuntur; [a] metietur quoque eundem F, numerus D minimum minimus inuentus, quem numeri A, & B, metiuntur; Atque adeo cum C, & D, metiantur ipſum F, erit eorum, quam E; non erit E, minimus, quem C, & D metiantur. Quod eſt abſurdum & contra hypotheſin. Immo cum C, & D, metiantur ipſum F; [b] metietur quoque eundem F, numerus E, minimus, quem metiuntur ijdem C, & D, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, B, C, alium numerum ipſo E, minorem metientur; ſed ipſe E, erit minimus. Quapropter tribus numeris datis, reperimus, quem illi minimum metiantur, numerum. Quod erat faciendum.

[a] 37. ſept.

[b] 37. ſept.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, ſi tres numeri numerum quempiam metiantur; etiam minimum, quem illi metiuntur, eundem metiri. Nam in extrema huius demonſtrationis parte, ex eo, quod A, B, C, ponebantur metiri ipſum F, oſtenſum eſt, & E, minimum, quem A, B, C, metiuntur, eundem F, metiri.

SCHOLIVM.

HOC corollarium alio modo, non ſecus ac propoſ. 37. huius lib. oſtendere poterimus. Metiantur enim A, B, C, quemcunque numerum D E; ſitque F, minimus, quem ijdem A, B, C, metiantur. Dico & F, ipſum D E, metiri. Si enim non metitur, metiatur eius partem D G, relinquatque numerum G E, ſe minorem.

A .. B ... C ....
D ..... G —— E
F .....

Quoniam igitur A, B, C, ipſum F, metiuntur; & F, ipſum D G; [c] metientur quoque A, B, C, eundem D G; Ac proinde, tum & totum D E, ponuntur metiri; [d] metientur & reliquum

[c] 33. prop.

[d] 33. prop.

G E, ipſo F, minorem. Quare F, non erit minimus, quem A, B, C, metiuntur. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Metitur igitur F, ipſum D E.

PARI ratione; Pluribus numeris datis, quam tribus, reperiemus, quem illi minimum metiantur, numerum; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam ſi dati numeri fuerint quatuor, inueniendus erit primum minimus, quem tres metiantur. Si quinque, reperiendus erit minimus, quem quatuor metiantur, &c. Reliqua autem omnia peragenda, vt de tribus numeris dictum eſt.

37. THEOR. 34. PROPOS. 39.

SI numerum quiſpiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam.

METIATVR numerum A, numerus B. Dico A, habere partem aliquam a B, denominatam. Metiatur enim B, ipſum A, totics, quot vnitates ſunt in numero C. Quia igitur vnitas ipſum C, & B, ipſum A, æque metitur; [a] & viciſsim vnitas æque ipſum B, & C, ipſum A, metietur; atque adeo eadem pars erit vnitas ipſius B, quæ C, ipſius A: Eſt autem vnitas pars ipſius B, denominata ab ipſo B, vt ad defin. 2. huius lib. docuimus. Igitur & C, pars erit ipſius A, ab eodem B, denominata. Si numerum ergo quiſpiam numerus metiatur, &c. Quod oſtendendum erat.

A . . . . . B, denominatam.
B . . . . C . . .

[a] 15. ſept.

THEOR.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 38.

SI numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus.

HABEAT numerus A, partem B, a qua numerus C, denominatur. Dico C, metiri ipsum A. Nam cum B, pars denominetur a C; sit autem & vnitas pars ipsius C, ab eodem C, denominata; metietur vnitas ipsum C, & B, ipsum A, æque. Vicissim ergo & vnitas ipsum B, & C, ipsum A, metietur. Si numerus ergo partem habuerit quamlibet, &c. Quod demonstrandum erat.

A . . . . . .
B . . . C . . . . .

[a] 15. *sept.*

PROBL. 6. PROPOS. 41. 39.

NVMERVM reperire, qui minimus cum sit, habeat datas partes.

SINT datæ partes A, B, C; Inueniendusque sit minimus numerus datas partes habens. Sint a partibus A, B, C, numeri denominati, siue qui ipsas denominent, D, E, F; [b] minimusq; quem D, E, F, metiuntur, numerus G. Dico G, esse minimum, qui habeat datas partes A, B, C. Quod enim eiusmodi partes habeat, ita ostendetur. Cum D, E, F, ipsum G, metiantur, habebit G, partes a D, E, F, denominatas, hoc est, partes A, B, C, cum hæ denominentur a D, E, F. Quod vero G, sit minimus illas partes habens, perspicuum est. Si enim non est minimus, habeat, si fieri potest,

D . . A, *Secunda*
E . . . B, *Tertia*
F . . . . C, *Quarta*
G . . . . . .
H ———

[b] 38. *sept.*

[c] 39. *sept.*

D.. A, *Secunda*
E... B, *Tertia*
F.... C, *Quarta*
G.....
H ----------

H, ipſo G, minor eaſdem partes A, B, C. Quia igitur H, habet partes A, B, C, [a] metientur ipſum numeri D, E, F, à partibus A, B, C, denominatas; Atque adeo, cum H, minor ſit quam G, non erit G, minimus, quem metiuntur D, E, F. Quod eſt abſurdum, & contra hypotheſim. Non igitur minor numerus, quam G, datas partes A, B, C, habebit, ſed ipſe G, minimus erit. Quare numerum reperimus, qui minimus cum ſit, habet datas partes. Quod faciendum erat.

[a] 4 8. ſept.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumantur numeri I, K, L, per quos numeri D, E, F, ipſum G, metiuntur; erunt numeri I, K, L, datæ partes A, B, C, ipſius G, denominatæ ſcilicet à

A, Secunda D.. I.....
B, Tertia E... K....
C, Quarta F....L...
G.....

D, E, F. Cum enim D, E, F, ipſum G, metiantur per I, K, L, metietur aque unitas ipſos I, K, L, & numeri D, E, F, ipſum G. [b] Viciſſim ergo metietur quoque unitas ipſos D, E, F, & numeri I, K, L, ipſum G; atque adeo unitas ipſorum D, E, F, eadem pars erit, qua numeri I, K, L, ipſius G. Cum ergo unitas ſit pars ipſorum D, E, F, ab ipſis denominata; erunt & I, K, L, ipſius G, partes denominatæ à D, E, F.

[b] 15. ſept.

EX his autem ſequitur, minimum numerum, quem quotlibet numeri metiuntur, eſſe minimum habentem partes à numeris metientibus denominatas. Oſtenſum enim eſt, numerum G, quem minimum metiuntur D, E, F, minimum eſſe, qui habeat partes A, B, C, cuiuſmodi ſunt I, K, L, à metientibus numeris D, E, F, denominatas.

IAM vero, vt Campanus ait, ſi inuentus minimus numerus datas partes habens duplicetur, triplicetur, &c. habebitur

habebitur ſecundus numerus poſt minimum, tertius, quartus, &c. eaſdem partes continens. Inuenio enim G, minimum, quas habeat partes A, B, C, denominatas a D, E, F; ſit illius duplus, numerus H; triplus vero I, &c. Dico H, eſſe ſecundum numerum, qui eaſdem partes A, B, C, à numeris D, E, F, denominatas habeat, & I, tertium, &c. ita vt nullus inter G, minimum, & eius duplum H, neque inter H, duplum, & I, triplum, &c. cadat alius numerus habens eaſdem partes, ſed ipſi ſoli H, I, & cæteri multiplices ipſius G, dictas partes contineant. Quod enim H, & I, &c. partes A, B, C, habeant, denominatas ſcilicet à D, E, F, ita oſtendemus. Quoniam D, E, F, metiuntur

G ..... A, D.
H ..... B, E..
I ..... C, F....
K ---------- M ------ L
N ---------- P ------ O

ipſum G, per conſtructionem; & G, ipſos H, I, & reliquos multiplices ipſius G; [a] metientur quoque D, E, F, eoſdem H, I, & reliquos multiplices ipſius G. [b] Quare H, I, & reliqui numeri ipſius G, multiplices, partes habebunt a metientibus numeris D, E, F, denominatas, quales ponuntur partes A, B, C. [a] 11. prop. [b] 39. ſept.

QVOD autem H, duplus ipſius G, minimi, ſit ſecundus eas partes habens, hoc modo demonſtrabimus. Si H, non eſt ſecundus, ſit, ſi fieri poteſt, alius K L, ipſo prior, qui nimirum maior ſit, quam G, minimus, & minor, quam H, duplus ipſius G. Detracto autem G, ex K L, relinquatur M L, ipſo G, minor. Quoniam igitur K L, partes habet A, B, C; [c] metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati; Ac propterea & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, metietur per coroll. propoſ. 38. huius lib. eundem K L: Metitur autem & G, ablatum K M, ſibi æqualem. [d] Igitur & reliquum M L, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter G, & H, cadens partes habet A, B, C; Ac proinde H, ſecundus eſt huiuſmodi partes habens. [c] 40. ſept. [d] 12. prop.

NON

NON aliter oſtendemus numerum I, triplum ipſius G, eſſe tertium dictas partes habentem. Si enim non eſt tertius, ſit alius, ſi fieri poteſt, videlicet N O, ipſo prior, qui videlicet maior ſit, quam H, duplus, minor vero quam I, triplus. Detracto autem H, duplo ex N O, relinquatur P O, minor ipſo G. Quia igitur N O, partes habet A, B, C, [a] metientur ipſum numeri D, E, F, a partibus illis denominati. Atque idcirco & G, minimus, quem D, E, F, metiuntur, eundem N O, per coroll. propoſ. 38. huius lib. metietur: Metitur autem & G, ipſam N P, ablatum ipſi H, duplo æqualem. [b] Igitur & reliquum P O, idem G, metietur, minorem maiar. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus inter H, & I, eadem partes habet A, B, C, datas; At proxime a I, tertius eſt illas partes habens. Eademque ratione quadruplus ipſius G, quartus erit; & quintuplus, quintus, &c.

[a] 40. ſept.

[b] 12. prop.

HVC quoque referri poteſt ſequens problema.

NVMERVM reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, ut quælibet pars ſubſequentem partem contineat.

SINT datæ partes A, B, C; inueniendusq; ſit numerus minimus, qui eas habeat hoc ordine, vt pars A, contineat partem B, & pars B, partem C. Sint à partibus A, B, C, numeri denominati D, E, F; Fiatq; G, ex E, in F: Item H, ex D, in G. Dico H, eſſe minimum numerum, qui quæritur. Quod enim habeat datas partes ordine ſra lato, facile demonſtratur. Nam cum ex D, in G, fiat H; erit G toties in H, quoties vnitas in D: Eſt autem vnitas pars ipſius D, denominata ab ipſo D. Igitur & G, pars eſt

A. Secunda. B, Tertia. C, Quarta.
D . . E . . . F . . . .
G . . . . . .
H . . . . . .
. Vnitas
I ----------
K ----------
L ----------
M ----

eſt ipſius H, ab eodem D, denominata; Atque adeò H, habet partem A, nimirum numerum G, à D, denominatam. Deinde quia ex E, in F, fit G; erit eadem ratione F, pars ipſius G, denominata ab E: Atque adeo A, pars ipſius H, nimirum numerus G, habet partem B, nimirum numerum F, ab E, denominatam. Denique cum F, habeat vnitatem, tanquam partem ab ipſo F, denominatam, perſpicuum eſt E, partem ipſius G, partis, nimirum numerum F, habere quoque partem C, ab F, denominatam, nimirum vnitatem. Quare numerus inuentus H, partem habet A; & pars A, partem B; & pars B, partem C. Quod autem H, ſit minimus eas partes hoc ordine cõtinens, hac ratione oſtendetur. Si enim non eſt minimus, habeat minor numerus I, ſi fieri poteſt, eaſdem partes eodem ordine, ith vt K, ſit ipſius I, pars A, à nũmero D, denominata; & L, ipſius K, pars B, ab E, denominata; & M, ipſius L, pars C, ab F, denominata. Quia igitur K, pars eſt ipſius I, à D, denominata; erit K, toties in I, quoties vnitas in D; [a] Atq; adeo ex D, in K, fiet I. Eadem ratione ex E, in L, fiet K; & L, ex F, in M. Itaq; cum D, ipſos G, & K, multiplicans faciat H, & I; [b] erit, vt H, ad I, ita G, ad K. Eadem ratione, cum ex E, in F, & L, fiant G, & K; erit, vt G, ad K, ita F, ad L. Et cum ex F, in vnitatem, & M, fiant F, & L; erit, vt F, ad L, ita vnitas ad M. Quoniam igitur eſt, vt H, ad I, ita G, ad K; & vt G, ad K, ita F, ad L; & vt F, ad L, ita vnitas ad M: Erit per lemma propoſ. 14. huius lib. vt H, ad I, ita vnitas ad M: Ponitur autè H, numerus numero I, maior. Vnitas igitur maior quoq; erit numero M, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo alius numerus minor, quam H, habet partes A, B, C, ordine prædicto, ſed ipſe H, minimus eſt. Quod eſt propoſitum.

[a] 15. defin.

[b] 19. ſept.

H. G. F. Vnitas.
I. K. L. M.

§ I. Vero plures fuerint partes, quam tres, eadem prorſus eſt via tenenda ac demonſtratio. Vt ſi numeri 2. 3. 4. 5. 6. ſint denominatores partium, fient 30. ex 5. in 6. & 120. ex 4. in 30. & 360. ex 3. in 120. & tandem 720. ex 2. in 360. Nam numerus 720. habebit partem a 2. denominatam; & hac partem a 3. denominatam; & hac aliam a 4. & hac aliam à 5. & hac denique partem à 6. denominatam, vt manifeſtum eſt.

QVOD

QVOD ſi numerum H, inuentum duplicemus, triplicemus, &c. habebimus alios numeros, videlicet ſecundum, tertium, quartum, &c. qui eaſdem partes eodem ordine habeant, duplicatas tamen, vel triplicatas, &c. Nam G, duplicatus, vel triplicatus, &c. dimidiata pars erit ipſius H, duplicati, vel triplicati, &c. quemadmodum & G, ipſius H. Eademque eſt ratio de cæteris partibus.

FINIS ELEMENTI SEPTIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM OCTAVVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipſorum primi inter ſe fuerint; ipſi minimi ſunt omnium eandem cum eis rationem habentium.

NVMERORVM deinceps proportionalium quotcunque A, B, C, D, extremi A, & D, inter ſe primi ſint. Dico A, B, C, D, minimos eſſe omnium eandem cum eis proportionem habẽtium. Si enim non ſunt minimi, erunt alij ipſis minores, in eadem proportione. Sint ergo ipſis minores in eadem ratione E, F, G, H, ſi fieri poteſt. Quoniam igitur quotcunq; numeri ſunt A, B, C, D, & alij illis æquales multitudine E, F, G, H, qui bini ſumuntur, & in eadem ratione, erit, ex æquali-

A ..... E ---
B ..... F -----
C ..... G --------
D ..... H ----------

* 14. ſept.

æqualitate, vt A, ad D, ita E, ad H: [a] Sunt autem A, & D, in ſua proportione minimi, quod inter ſe primi eſſe ponantur. [b] Igitur tam A, ipſum E, quàm D, ipſum H, æque metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo numeri minores ipſis A, B, C, D, ſunt in eadem cum eis ratione, ſed ipſimet minimi ſunt; Ac propterea, ſi fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 23. ſept.

[b] 21. ſept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, numeros A, B, C, D, eſſe minimos in continuatione ſuarum proportionum, ſi extremi A, & D, inter ſe primi ſint, ſiue A, B, C, D, ſint continue proportionales, vt vult Euclides, ſiue non. Vt hoc exemplum oſtendit, in quo proportiones omnes diuerſæ ſunt, quemadmodum in ſuperiori eadem ſemper proportio reperitur.

A .... E ---
B ..... F ----
C ..... G -----
D ..... H -------

2. PROBL. 1. PROPOS. 2.

NVMEROS reperire deinceps proportionales minimos, quotcunque iuſſerit quiſpiam, in data ratione.

SINT minimi numeri datæ rationis A, & B, oporteatque inuenire primum tres numeros minimos in proportione data A, ad B. Multiplicans A, ſeipſum, & numerum B, faciat C, & D. Deinde B, multiplicans ſeipſum faciat E. Dico C, D, E, eſſe tres minimos in proportione A, ad B; hoc eſt, eſſe vt C, ad D, ita D, ad E. Quod enim proportionales ſint in data proportione A, ad B, ſic oſtendemus. Cum ex A, in A, & B, fiant C, & D; [c] erit vt A, ad B, ita C, ad D. Rurſus cum ex B, in A, & B, fiant D, &

[c] 17. ſept.

D, & E; [a] erit quoque, vt A, ad B, ita D, ad E. Quare proportionales sunt C, D, E, continue in proportione data A, ad B. Quod vero in eadem ratione sint minimi, ita demonstrabitur. Quoniam extremi C, & E, procreati sunt ex A, & B, in seipsos; [b] sunt autem A, & B, inter se primi, quòd minimi sint in sua proportione; [c] Erunt & C, E, extremi, inter se primi. [d] Quare C, D, E, minimi sunt in ratione A, ad B.

A..... B...
C..... D..... E.....
F, 8. G, 12. H, 18. I, 27.
K, 16. L, 24. M, 36. N, 54. O, 81.

[a] 17. sept.
[b] 24. sept.
[c] 29. sept.
[d] 1. octau.

IAM vero ex A, in tres inuentos C, D, E, fiant F, G, H, & ex B, in vltimum E, fiat I. Dico quatuor numeros F, G, H, I, minimos esse in eadem ratione data A, ad B. Quod enim proportionales sint in ratione A, ad B, ita demonstrabimus. Quoniam A, multiplicans ipsos C, D, E, fecit F, G, H, habebunt, ex ijs, quæ ad propos. 18. lib. 7. ostendimus, numeri F, G, H, eadem proportiones, quas C, D, E, hoc est, quam habet A, ad B. Rursus quia A, & B, ipsum E, multiplicantes, fecerunt H, & I; [e] erit quoque, vt A, ad B, ita H, ad I. Sunt igitur F G, H, I, continue proportionales in data proportione A, ad B. Quod autem in data ratione minimi sint, ita perspicuum fiet. [f] Quoniam A, & B, minimi in sua proportione, sunt inter se primi; factique sunt C, & E, ex A, & B, in se ipsos; Item procreati sunt F, & I, ex A, B, in C, E; nimirum F, ex A, in C, & I, ex B, in F; [g] erunt & F, I, extremi, inter se primi. [h] Quare F, G, H, I, in sua proportione, quæ est A, ad B, minimi sunt.

[e] 18. sept.
[f] 24. sept.
[g] 29. sept.
[h] 1. octaui.

NON aliter, si ex A, in quatuor inuentos F, G, H, I, fiant K, L, M, N, & ex B, in vltimum I, fiat O; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B: Eademque ratione inueniemus sex, septem, octo, &c. Quare numeros reperimus deinceps proportionales minimos, &c.

Quod faciendum erat.

SCHO-

SCHOLIVM I.

EODEM modo quatuor numeri minimi proportionales producentur ex multiplicatione B, in tres inuentos E, D, C, & ex multiplicatione A, in C. Fiant enim I, H, G, ex B, in E, D, C: & F, ex A, in C. Quo facto, [a] numeri F, G, eandem rationem habebunt, quam A, B; quòd A, B, multiplicantes C, ipsos F, G, fecerunt: Item & G, H, I, ex iis, quæ ad propos. 18. huius lib. demonstrauimus, in eadem erunt ratione, in qua C, D, E, hoc est, in qua A, B; quòd B, multiplicans C, D, E, ipsos G, H, I, fecit. Sunt ergo F, G, H, I, in eadem ratione, in qua A, B. Quod vero minimi sint, ostendetur, vt prius.

[a] 18. sept.

NON aliter si ex B, in quatuor inuentos I, H, G, F, fiant O, N, M, L, & ex A, in F, fiat K; erunt K, L, M, N, O, quinque numeri minimi in data ratione A, ad B. Eademque ratione inuenietur sex, septem, octo, &c. Itaque siue A, multiplicetur in omnes inuentos, & B, in vltimum; siue B, in omnes inuentos, & A, in primum; producentur semper plures numeri in eadem ratione data A, ad B, minimi. Demonstrauit enim Euclides, quatuor F, G, H, I, produci ex A, in C, D, E, & ex B, in E: Nos autem eosdem ostendimus procreari ex B, in E, D, C, & ex A, in C.

A ..	B ..	
C	D	E .....
F, 8.	G, 12.	H, 18. I, 27.
K, 16.	L, 24.	M, 36. N, 54. O, 81.

COROLLARIVM I.

HINC fit, si tres numeri minimi sint continue proportionales, extremos quadratos esse: si autem quatuor fuerint, cubos. Nam trium minimorum C, D, E, extremi C, & E, facti sunt ex A, & B, in seipsos, ideoque æqualiter sunt æquales. Quare ex definitione 18. quadrati sunt. Eodem modo, cum quatuor minimorum F, G, H, I, extremi F, & I, geniti sint ex A, & B, lateribus in C, & E, quadratos ipsorum A, & B, hoc est, tam numerus F, ex mutua multiplicatione

cationetrium numerorum æqualium A, A, A, quam numerus I, ex multiplicatione mutua trium numerorum æqualium B, B, B, ſit procreatus, ac propterea vterque ſit æqualiter æqualis æqualiter; ipſi ex defin. 19. cubi erunt.

SIC etiam, ſi fuerint quinque numeri minimi proportionales continue; erunt extremi eorum quadrati quadratorum; Et ſic ſi fuerint plures, erunt eorum extremi, numeri alij ſub alijs denominationibus, quæ in Algebra ſolent explicari. Hæc autem omnia manifeſta ſunt ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales, iuxta hanc propoſ. procreantur.

NEQVE vero dicere quis poterit, corollarium hoc verũ quidem eſſe in tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus inuentis arte in hac propoſ. tradita, non autem in quibuſuis tribus, quatuorve numeris minimis continuè proportionalibus vtcunq; propoſitis: Dicere, inquam, nemo hoc poterit, quia dati quilibet tres numeri, vel quatuor minimi continuè proportionales æquales prorſus ſunt ijs, quiper hanc propoſ. inueniuntur. Si enim illi dati minores eſſent inuentis, non eſſent inuenti, minimi, quod eſt contra hãc propoſ. Si vero dati, maiores eſſent inuentis, non eſſent illi dati, minimi. quod eſt contra hypotheſim. Quod clariſſimè ita fiet perſpicuum. Dati ſint tres numeri A, B, C, minimi continuè proportionales:

A --- B ----- C ------
D, 2. E, 3.
F, 4. G, 6. H, 9.

ſumptiſq; duobus minimis D, E, in proportione A, ad B, vel B, ad C, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. inueniantur per hanc propoſ. ex his duobus minimis D, E, tres minimi F, G, H, in eadem proportione. Dico tres A, B, C, datos à tribus inuentis F, G, H, non differre. Nam neceſſario A, ipſi F, æqualis erit; atq; ita, cum ſit, vt A, ad B, ita F, ad G, erit quoq; permutando, vt A, ad F, ita B, ad G; ac proinde ſi A, æqualis eſt ipſi F, erit & B, ipſi G, æqualis: Eadẽq; ratione oſtendemus C, æqualem eſſe ipſi H: ideoq; tres A, B, C, tribus F, G, H, ſinguli ſingulis, æquales erũt. Eadẽq; ratio eſt de quatuor, aut pluribus.

Quòd ſi A, dicatur minor, quàm F, oſtendemus eodem argumento & B, C, minores eſſe, quàm G, H. Quare F, G, H, minimi non ſunt. quod eſt abſurdum, & contra hanc propoſ. Si vero A, concedatur maior, quàm F; erunt eodem argumento & B, C, maiores, quàm G, H: atq; idcirco A, B, C, minimi non ſunt. quod eſt contra hypotheſim. Cum ergo A, minor non ſit, aut maior, quàm F; æqualis omnino erit; ideoq; vt oſtenſum eſt, & B, C, ipſis G, H, æquales erunt. Quod eſt propoſitũ.

COROLLARIVM. II.

PERSPICVVM quoque eſt, extremos numeros proportionalium quotcunque ſecundum hanc propoſitionem inuentorum in data ratione minimorum, inter ſe primos eſſe. Quod quidem facile oſtendemus ex multiplicationibus, quibus numeri proportionales producuntur, & ex propoſ. 29. lib. 7. quemadmodum id demonſtratum ſunt de numeris extremis C, E, & F, I, &c.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam, duos numeros minimos in data ratione, metiri omnes medios quotcunque minimorum in eadem ratione; quia ſcilicet producuntur ex illorum multiplicatione in alios quoſdam numeros. Vt in dato exemplo D, medius producitur ex A, in B; & G, H, medij ex A, in D, & E, vel ex B, in C, & D; Item L, M, N, medij ex A, in G, H, I, vel ex B, in F, G, H; vt ex demonſtratione Euclidis, & ea, quam in Scholio tradidimus, apparet.

SCHOLIVM II.

QVONIAM vero tam numeri A, C, F, K, quam B, E, I, O, ex conſtructione, continue proportionales ſunt ab vnitate, quod illorum quidem proportiones a numero A, horum vero a B, denominentur, vt clarius demonſtrabitur propoſ. 9. huius lib. ſit vt extremi numeri quotcunque minimorum continue proportionalium ſint vltimi tot continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones a minimis numeris datæ rationis denominantur, quot ſunt propoſiti minimi continue proportionales. Ita enim in ſuperiori exemplo vides C, & E, extre-

extremos numeros trium minimorum continue proportionalium in proportione A, ad B, eſſe vltimos trium numerorum continue proportionalium ab vnitate, quorum proportiones denominantur ab A, & B. At vero F, & I, extremos quatuor continue proportionalium, eſſe vltimos quatuor numerorum ab vnitate continue proportionalium, &c. Quamobrem ſi quis optet inuenire quotcunque integros numeros minimos in data ratione non multiplici (in multiplici enim res facilis eſt, cuiuſcunque ab vnitate incipiat) continue proportionales; id facile hac via conſequetur. Inuentis duobus minimis numeris in data ratione, ſumantur ab vnitate tot numeri continue proportionales in proportione, cuius denominator ſit minor illorum, quot numeri minimi inueniendi proponuntur. Nam vltimus illorum ab vnitate continue proportionalium erit primus continue proportionalium inueniendorum, qui ſi per denominatorem datæ proportionis multiplicetur, habebitur ſecundus, & ſi hic rurſum per denominatorem eundem multiplicetur, gignetur tertius, & ſic deinceps. Vt ſi quis deſideret octo minimos numeros in proportione ſeſquialtera: Inuentis minimis duobus numeris 3. & 2. in ſeſquialtera proportione, ſumendi erunt octo numeri ab vnitate continue proportionales in proportione dupla, quæ denominatur a 2. hoc modo 1.2.4.8.16.32.64.128. Nam horum vltimus 128, erit primus octo numerorum inueniendorum, qui minimi ſint in proportione 3. ad 2. vt hic patet, 128.192.288.432.648.972.1458.2187. ſi maiores numeri ad minores referantur. Eademque de reliquis eſt ratio.

BOETIVS autem, & alij regulam hanc ita explicãt, vt & nos quinto lib. in tractatione proportionum declarauimus. Sumantur tot numeri continue ab vnitate multiplices ſecundum denominationem partis aliquotæ, cuius in data proportione ſit mentio, quot numeros continue proportionales oportet inuenire in data proportione. Nam vltimus numerus erit primus inueniendorum. Vt in dato exemplo, quia deſiderantur octo numeri minimi in proportione ſeſquialtera, ſumendi ſunt octo numeri ab vnitate dupli, vt prius, qui minimum denominantur a denominatore partis ſecundæ, ſeu dimidiæ, cuius mentio ſit in proportione ſeſquialtera, hoc eſt, a 2. Quod ſi optentur quinque numeri minimi in proportione ſeſquiquin-

ea, ſumendi erunt quinque numeri ab vnitate quintupli; vt hic 1. 5. 25. 125. 625. Nam 625. eſt primus quinque numerorum in proportione ſeſquiquinta, vt hic apparet; 625. 750. 900. 1080. 1296. Atque ita de cæteris. Porro hac arte non poſſunt inueniri (quod mirum videri poſſit) plures numeri continuè proportionales, quam propoſiti ſunt. Neque enim poſt 1296. in vltimo exemplo alius numerus inuenietur, qui habeat ad 1296. proportionem ſeſquiquintam; ſicut neq; in priori exemplo poſt 2187. alius poteſt reperiri, qui ad 2187. proportionem ſeſquialteram habeat. Ratio autem huius rei eſt, quod extremi hac arte inuenti ſint inter ſe primi, vt ex demonſtratione liquet. Hinc enim fit, vt vltimus non poſſit eſſe ad alium quempiam numerum, vt primus ad ſecundum, veluti propoſ. 17. lib. 9. demonſtrabitur.

3. THEOR. 2. PROPOS. 3.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium candẽ cum eis rationem habentium; Illorum extremi ſunt inter ſe primi.

SINT numeri A, B, C, D, minimi deinceps proportionales. Dico extremos A, & D, inter ſe primos eſſe. Inueniantur enim duo E, F, minimi in ratione A, ad B, vel B, ad C, vel C, ad D. Deinde iuxta viam præcedentis problematis, tres minimi G, H, I, in eadem ratione, nec non quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo K, L, M, N, æqualis ſit multitudini A, B, C, D. Quoniam igitur A, B, C, D, minimi ſunt in ſua proportione, & in eadem quoque proportione minimi ſumpti ſunt K, L, M, N, illis multitudine æquales; erunt ſinguli ſingulis æquales, ne minores minimis dentur in eadem proportione, nimirum A, ipſi K, & D, ipſi N. Id quod nos Geometricè demon-

A, 8. B, 12. C, 18. D, 27.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

demonſtrauimus ad finem coroll. 1. ſuperioris propoſ. Sunt autem per coroll. 2. propoſ. præcedentis K, & N, inter ſe primi. Primi ergo quoque ſunt A, & D. Quocirca, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales minimi omnium eandem cum eis, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HÆC propoſitio intelligenda eſt de numeris minimis continue proportionalibus, vt ex eius demonſtratione, & verbis Euclidis apparere poteſt. Nam ſi A, B, C, D, non eſſent proportionales continue, inueniri non poſſent, ex precedenti problemate, K, L, M, N, totidem minimi in eadem proportione. Immò ſi diuerſæ ſint proportiones, dabuntur aliquando minimi numeri deinceps proportionales, hoc eſt, continuati in ſuis proportionibus diuerſis, quorum extremi non ſunt inter ſe primi. Sunt enim hi numeri 6. 10. 13. 18. minimi in continuatione ſuarum proportionum, cum tamen extremi 6. & 18. compoſiti ſint inter ſe. Itaque hoc Theorema primi eſt conuerſum, quoad numeros continue proportionales. Etenim numeri quotcunque continue proportionales, quorum extremi inter ſe ſint primi, minimi ſunt in ſua proportione, vt conſtat ex 1. theor. Et viciſſim, numeri extremi quotcunque minimorum continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, velut hic demonſtratum eſt. At vero primum theorema, prout ſpectat ad numeros non continue proportionales, conuerti nequit. Nam licet numeri quotcunque non continue proportionales, quorum extremi ſunt inter ſe primi, minimi ſint in continuatione ſuarum proportionum, vt ex ſcholio propoſ. 1. huius lib. liquet; Tamen non ſemper e contrario, numeri extremi quotcunque minimorum non continue proportionalium, inter ſe primi ſunt, vt manifeſtum eſt in exemplo nuper prolato 6. 10. 13. 18.

PROBL. 2. PROPOS. 4. 4.

RATIONIBVS datis quotcunq; in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

SINT primum datæ duæ rationes in minimis numeris A, ad B, & C, ad D; oporteatque inuenire tres numeros minimos deinceps proportionales, in datis proportionibus. [a] Inuento numero E, minimo, quem metiantur B, & C, secundus & tertius; quoties B, ipsum E, metitur, toties A, metiatur ipsum F; & quoties C, eundem E, toties ipsum G, metiatur D. Dico F, E, G, minimos esse in proportionibus datis. Quod enim deinceps datas proportiones habeant, ita ostendemus. Quoniam A, & B, æque metiuntur ipsos F, & E, hoc est, per eundem numerum; metiantur per H. Quo posito, [b] A, & B, multiplicantes ipsum H, producent F, & E. [c] Quare erit vt A, ad B, ita F, ad E. Eadem ratione, cum C, & D, æque metiantur ipsos E, & G; erit vt C, ad D, ita E, ad G. Igitur F, E, G, deinceps proportionales sunt in rationibus A, ad B, & C, ad D. Quod autem minimi sint, sic manifestum erit. Si non sunt minimi, erunt aliqui illis minores, singulis singuli in eisdem rationibus. sint, si fieri potest, I, K, L. Quia igitur A, & B, minimi sunt in sua proportione; [d] ipsi æque metientur I, & K, in eadem proportione existentes, nimirum B, ipsum K, consequens consequentem. Eademque ratione C, & D, æque metientur K, & L, nimirum C, ipsum K, antecedens antecedentem. Quare cum B, & C, ipsum K, metiantur; [e] metietur eundem K, numerus E, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod est absurdum. Non igitur erunt alij numeri minores ipsis F, E, G, in rationibus A, ad B, & C, ad D; Ac propterea ipsi F, E, G, minimi sunt in datis rationibus.

SINT deinde datæ tres rationes in numeris minimis A, ad B; C, ad D; & E, ad F; inueniendique sunt quatuor minimi deinceps proportionales in datis rationibus. [f] Inuento rursum numero G, minimo, quem metiantur B, secundus, & C, tertius; quoties B, ipsum G, metitur, toties metiatur A, ipsum H; & quoties C, ipsum G, toties D, ipsum I, metiatur. Quibus peractis, aut E, ipsum I, metitur, aut non. Metiatur primum; Et quoties E, ip-

a 36. sept.
b 9. pron.
c 18. sept.
d 21. sept.
e 37. sept.
f 36. sept.

A, 6. B, 5. C, 4 D, 3.
H, 4. F, 24. E, 20. G, 15.
I——— K ——— L ———

E, ipſum I, metitur, totics F, metiatur ipſum K. Dico H, G, I, K, minimos eſſe in datis rationibus.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,5. F,7.
H,24. G,20. I,15. K,21.
L---- M------ N---- O------

Quod enim ſint in datis rationibus deinceps proportionales, conſtat. Cum enim A, & B, ipſos H, & G, æque metiantur; erit vt prius, quemadmodum A, ad B, ita H, ad G. Eadem ratione erit, vt C, ad D, ita G, ad I: & vt E, ad F, ita I, ad K; quòd tam C, & D, ipſos G, & I, quã E, & F, ipſos I, & K, metiantur æque. Igitur H, G, I, K, deinceps proportionales ſunt in datis rationibus. Quod autem ſint minimi, ſic oſtendemus. Si non ſunt minimi, ſint in eiſdem rationibus minores ipſis, ſinguli ſingulis, ſi fieri poteſt L, M, N, O. Quia igitur A, & B, minimi ſunt in ſua proportione; [a] ipſi metientur æque L, & M, eandem habentes rationem, nimirum B, conſequens conſequentem M. Eodem modo C, & D, æque metientur M, & N, nimirum C, antecedens antecedentem M. Quocirca cum B, & C, ipſum M, metiantur; [b] metietur eundem M, & numerus G, minimus, quem B, & C, metiuntur, minorem maior. Quod eſt abſurdum. Non ergo erunt alij numeri deinceps proportionales in rationibus datis minores ipſis H, G, I, K; Ac proinde H, G, I, K, in datis rationibus minimi ſunt.

[a] 21. ſept.

[b] 37. ſept.

SED iam E, non metiatur ipſum I. [c] Inuento ergo numero K, minimo, quem E, & I, metiantur; quoties I, ipſum K, metitur, totics quoque G, ipſum L; & H, ipſum M, metiatur: & quoties E, metitur K, toties metiatur F, ipſum N. Dico M, L, K, N, eſſe minimos in proportionibus datis. Cum enim H, G, I, ipſos M, L, K, æque metiantur; erit vt ſupra, quemadmodum H, ad G, ita M, ad L; & vt G, ad I, ita L, ad K: Eſt autem eadem ratione, vt H, ad G, ita A, ad B; & vt G, ad I, ita C, ad D; quòd & A, B, ipſos H, G; & C, D, ipſos G, I, metiantur æque. Igitur vt A, ad B, ita M, ad L; & vt C, ad D, ita L, ad K. Atqui vt E, ad F, ita quoque

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7.
H,24. G,20. I,15.
M,48. L,40. K,30. N,105.
O------ P---- Q--- R----

[c] 36. ſept.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. H,24. G,20. I,15. M,48. L,40. K,30. N,105. O---- P---- Q---- R----

est K, ad N, cum E, F; æque ipsos K, N, metiantur. Sunt ergo M, L, K, N, deinceps proportionales in datis rationibus. Dico & minimos eos esse in eisdem rationibus. Si namque non sunt minimi, dentur ipsis minores in rationibus eisdem O, P, Q, R, si fieri potest. Quoniam ergo A, B, in sua proportione minimi sunt; [a] ipsi æque metientur O, P, in eadem ratione existentes, nimirum B, consequens consequentem P. Eodem argumento C, D, ipsos P, Q, metientur æque, videlicet antecedens C, antecedentem P; Atq; adeo cum B, & C, ipsum P, metiantur; [b] metietur quoque G, minimus, quem metiuntur B, & C, eundem P. Quia vero ostensum est, esse vt G, ad I, ita L, ad K, hoc est, ita P, ad Q; erit permutando, vt G, ad P, ita I, ad Q: Atque ideireo, cum metiatur G, ipsum P, metietur & I, ipsum Q. Metitur autem & E, eundem Q; [c] quod E, F, in sua proportione minimi æque metiantur Q, R, eiusdem rationis, nimirum antecedens E, antecedentem Q. Ergo cum metiantur I, E, ipsum Q; [d] metietur etiam K, quem minimum metiuntur I, E, eundem Q, maior minorem. Quod est absurdum. Non dabuntur ergo alij numeri deinceps proportionales in datis rationibus minores quam M, L, K, N; propterea que ipsi M, L, K, N, minimi sunt.

[a] 21. sept.

[b] 37. sept.

[c] 21. sept.

[d] 37. sept.

QVOD si quatuor rationes datæ fuerint; inuenien di prius erunt numeri deinceps proportionales in tribus prioribus rationibus; deinde cum quarta posteriori agendum, vt nuper cũ tertia proportione data. Veluti si quarta proportio data sit in numeris minimis S, ad T; inueniemus primum M, L, K, N, minimos deinceps proportionales in tribus proportionibus A, ad B; C, ad D; & E, ad F. Deinde si S, ipsum N, metiatur, accipiemus O, quem T, toties metiatur, quoties S, ipsum N, metitur. Nam M, L, K, N, O, erunt deinceps proportionales

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7. S,3. T,2. M,48. L,50. K,30. N,105. O,70.

A,6. B,5. C,4. D,3. E,2. F,7 S,9. T,2. M,48. L,40. K,30. N,105. R,144. Q,120. P,90. O,315. V,70.

tionales in datis rationibus minimi. Si vero S,ipſum N, non metiatur; ſumemus O,quem S,& N,minimum metiantur. Et quoties N,ipſum O,metitur, toties metiatur K,ipſum P;& L,ipſum Q;& M,ipſum R;quoties vero S, eundē O,metitur, toties T,ipſum V,metiatur. His enim peractis, erunt R,Q,P,O,V,deinceps proportionales minimi in rationibus A,ad B;C,ad D; E, ad F, & S,ad T. Quæ omnia eo argumento,quo prius,demonſtrabimus. Eodem modo operabimur,ſi quinque, vel plures rationes datæ ſint in minimis numeris. Itaque rationibus datis quotcunque in minimis numeris, &c. Quod faciendum erat.

a 36. ſept.

SCHOLIVM.

SI omnes rationes, vel aliqua datæ fuerint in numeris nō minimis, abſoluemus nihilo minus problema propoſitum; ſed prius exhibendæ erunt rationes datæ in minimis numeris, antequam ad inuentionem minimorū numerorū deinceps proportionalium aggrediamur, vt ex demonſtratione manifeſtū eſt.

DIFFERT autem hoc problema ab eo, quod propoſitione 35. lib. 7. demonſtratum eſt, quod hic non dantur numeri deinceps proportionales, ita vt quilibet intermedius ſit & antecedens, & cōſequens, licet proportiones ſint diuerſæ, quemadmodum ibi.

PORRO inuentis minimis numeris deinceps proportionalibus in datis rationibus, ſi ij multiplicentur per quemcunque numerum eundem, procreabuntur alij in eiſdem rationibus deinceps proportionales, vt conſtat ex ijs, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus.

THEOR. 3. PROPOS. 5. 5.

PLANI numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

SINT

SINT duo numeri plani A, B, & latera prioris quæcunque C, D; posterioris vero E, F. Dico proportionem A, ad B, compositam esse ex laterum proportionibus, nimirum ex proportionibus C, ad E, & D, ad F; vel ex proportionibus C, ad F, & D, ad E; ita vt latera vnius sint antecedentia, & alterius consequentia, quemadmodum propos. 23 lib. 6. docuimus. Faciant D, & E, se mutuo multiplicantes numerum G. Quoniam igitur D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; [a] erit A, ad G, vt C, ad E. Eodemque modo, quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit G, ad B, vt D, ad F. Quare A, G, B, sunt deinceps proportionales in proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F. [b] Componitur autem proportio A, ad B, ex proportionibus A, ad G, & G, ad B. Eadem ergo proportio A, ad B, ex proportionibus laterum C, ad E, & D, ad F, componitur.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. E, 3. F, 16.

[a] 17. sept.

[b] 27. defin.

EODEM argumento ostendemus, proportionem A, ad B, compositam esse ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, si latera E, & F, loca inter se permutent, fiatque G, ex mutua D, & F, multiplicatione. Cum enim D, multiplicans C, & F, faciat A, & G; [c] erit A, ad G, vt C, ad F. Similiter cum F, multiplicans D, & E, faciat G, & B; erit G, ad B, vt D, ad E. Ac proinde rursum A, G, B, deinceps proportionales sunt in rationibus laterum C, ad F, & D, ad E. [d] Cum ergo proportio A, ad B, componatur ex proportionibus A, ad G, & G, ad B; Eadem ex proportionibus C, ad F, & D, ad E, componetur. Quare plani numeri rationem inter se habent ex lateribus compositam. Quod demonstrandum erat.

A, 24. B, 48. G, 96. C, 4. D, 6. F, 16. E, 3.

[c] 17. sept.

[d] 27. defin.

SCHOLIVM.

ESSET hoc loco disputandum de compositione proportionum, quemadmodum in expositione defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in scholio propos. 23. lib. 6. facturos nos hoc loco recepimus.

recepimus. Sed quia res hæc accuratè explicari non potest ſine fractorum numerorum operationibus, quas ad finem lib. 9. demonſtrabimus; differendam eam eundem in locum cenſuimus. Hoc Lectorem commonere volui, vt ſciat, vbi res hæc pertractetur à nobis, & cur eam hic, vt polliciti ſumus, non exponamus.

THEOR. 4. PROPOS. 6. 6.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundum non metiatur; neq; alius quiſquam vllum metietur.

SINT continue proportionales A, B, C, D, E; & A, primus non metiatur B, ſecundum. Dico neque alium quenquam illorum vllum metiri. Quod enim nullus proximè inſequẽtem metiatur, manifeſtum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ſ ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: A, vero ipſum B, non metiatur; neque B, ipſum C, neque C, ipſum D, neque D, ipſum E, metietur. Quod vero nec alius quiſquam illorum vllum metiatur, ſic demonſtrabimus. [a] Sumptis tribus numeris minimis F, G, H, in ratione A, ad B; erit ex æquo, vt A, ad C, ita F, ad H. Quia vero eſt vt A, ad B, ita F, ad G; non metitur autem A, ipſum B; neque F, ipſum G, metietur; Ac propterea F, non erit vnitas, alias F, ipſum G, metietur, cum vnitas omnem numerum metiatur. [b] Quare cum F, & H, ſint inter ſe primi, & F, non ſit vnitas; nõ metietur F, ipſum H; Atque ob id neque A, ipſum C, metietur. Eſt enim oſtenſum eſſe A, ad C, vt F, ad H. Eadem ratione oſtendemus, quod nec B, tertium a ſe numerum D, nec C, tertium E, metiatur. Quod ſi quatuor numeri minimi ſumantur in ratione A, ad B, ſimili modo demonſtra-

[a] 2 octaui.

[b] 3. octaui.

monſtrabimus, neque A, quartum D, neque B, quartum E, metiri. Atque ita de reliquis. Si itaque ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

SI maiores numeri ad minores referantur, proponi poterit hæc propoſitio ad hunc modum.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem ſecundi non ſit multiplex, neque alius quiſquam vllius multiplex erit.

SINT enim continue proportionales A B, C, D, E; & A, primus non ſit multiplex ſecundi B. Dico neque alium quenquam illorum vllius eſſe multiplicem. Quod enim nullus proxime inſequentis multiplex ſit, conſtat. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C, C, ad D; & D, ad E: non ſit autem A, ipſius B, multiplex; neque B, ipſius C; neque C, ipſius D; neque D, ipſius E, multiplex erit. Quod autem neq; alius quiſquam illorum vllius ſit multiplex, hoc pacto confirmabitur. Quoniã D, ipſius E, non eſt multiplex: non metietur e contrario E, ipſum D, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7. ſcripſimus. Quoniam igitur ſunt numeri deinceps proportionales quotcunque E, D, C, B, A; (Nam cum ſit D, ad E, vt C, ad D; B, ad C; & A, ad B; erit conuertendo E, ad D, vt D, ad C; C, ad B; & B, ad A.) Et F, primus ſecundum D, non metitur, [a] neq; alius quiſquam illorum vllum metietur. Quare e contrario, ſi maiores ad minores referantur, neque quiſquam illorum vllius erit multiplex, per ea, quæ in defin. 5. lib. 7 ſcripſimus.

[a] 6. octau.

SED & ex his ſequens theorema demonſtrabimus.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus vero ſecundum metiatur; & quicun-

quicunque alius quemlibet ſequentium metietur. Si primus autem ſecundi ſit multiplex; & quicunque alius cuiuslibet ſequentium multiplex erit.

SINT deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, E; & primus A, ſecundum B, metiatur. Dico & quemque illorum quemlibet ſequentium metiri. Quod enim quilibet proxime inſequentem metiatur, A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48. perſpicuum eſt. Nam cum ſit, vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E; metiatur autem A, ipſum B; & B, ipſum C; & C, ipſum D; & D, ipſum E, metietur. Quod autem quilibet illorum quemlibet ſequentium metiatur, nempe B, ipſos D, & E, hoc modo oſtendetur. Quia B, ipſum C, metitur, & C, ipſum D; [a] metietur quoque B, ipſum D. Rurſus quia D, ipſum E, metitur; [b] metietur quoque B, (ipſum D, metiens) eundem E. Et ſic de reliquis.

[a] 11. pron.
[b] 11. pron.

SED iam primus A, multiplex ſit B, ſecundi. Dico & quemque illorum cuiuslibet ſequentium multiplicem eſſe. Cum enim ſit vt A, ad B, ita B, ad C; C, ad D; & D, ad E: ſit autem A, ipſius B, multiplex; erit & B, ipſius C; & C, ipſius D; & D, ipſius E, multiplex. Quilibet ergo cuiuslibet A, 48. B, 24. C, 12. D, 6. E, 3. proxime inſequentis multiplex eſt. Rurſus quia D, ipſius E, eſt multiplex; metietur e contrario E, ipſum D: ſunt autem, per inuerſam rationem, E, D, C, B, A, continue proportionales. Igitur & quilibet illorum quemlibet ſequentium metietur, vt demonſtratum eſt; Ac propterea e contrario, ſi maiores ad minores referantur, & quilibet cuiuſque ſequentium multiplex erit.

CONVERTEMVS etiam hanc propoſitionem ſextam, & theorema, quod primo loco in ſcholio demonſtrauimus, hac ratione.

SI

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam nullum a ſecundo metiatur; neque primus ſecundum metietur. Et ſi primus, vel alius quiſquam nullius a ſecundo ſit multiplex: neque primus ſecundi multiplex erit.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & primus A, vel alius quiſque nullum à ſecundo B, metiatur. Dico neq; A, primum, metiri B, ſecũdum. Si enim A, primus ſecundum B, dicatur metiri; metietur quoque, per ea, quæ ſecundo loco in hoc ſcholio oſtendimus, quicunque alius quemlibet ſequentium. Quod eſt abſurdum, cum neque primus, neque alius quiſquam vllum a ſecundo metiri ponatur. Non ergo A, ipſum B, metietur.

A, 81. B, 54. C, 36. D, 24. E, 16.

IAM vero A, primus, vel alius quiſquam nullius a ſecundo B, ſit multiplex. Dico neq; A, primum multiplicem eſſe B, ſecundi. Si namque A, primus multiplex eſſe dicatur B, ſecundi; multiplex quoque erit quicunque alius cuiuslibet ſequentium, ex iis, quæ ſecundo theoremate huius ſcholij demonſtrauimus. Quod eſt abſurdum. Neque enim primus, neque alius quiſquam vllius a ſecundo multiplex eſſe ponitur. Non igitur A, ipſius B, multiplex erit.

7. THEOR. 5. PROPOS. 7.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur, is etiam metietur ſecundum.

SINT deinceps proportionales A, B, C, D, E; & A, primus

primus extremum E, metiatur. Dico & A, primum metiri B, ſecundum. Si enim A, ipſum B, non dicatur metiri: neq; alius quiſquam vllum metietur. Quare nec A, ipſum E. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, metiri E. Igitur A, primus B, ſecundum metietur; Atque idcirco, ſi ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 3. B, 6. C, 12. D, 24. E, 48.

*6. octaui.

SCHOLIVM.

VT theorema, quod ſecundo loco in ſcholio precedentis propoſ. demonſtrauimus, conuertamus, ampliſicabimus hanc propoſ. hoc modo.

SI ſint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quiſquam quemlibet a ſecundo metiatur; metietur & primus ſecundum. Et ſi primus, vel alius quiſquã cuiuslibet a ſecundo ſit multiplex; primus quoque ſecundi multiplex erit.

QVOD eodem modo demonſtrabimus. Si enim primus non dicatur metiri ſecundum, vel illius eſſe multiplex; neque alius quiſquam vllum metietur; vel illius multiplex erit, ex propoſ. 6, & 1. theoremate ſcholij precedentis.

THEOR. 6. PROPOS. 8. 8.

SI inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri: tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent.

CADANT

CADANT inter duos numeros A, B, medij proportionales continue C, D; ſitque vt A, ad B, ita E, ad F. Dico tot medios numeros continue proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B. Sumptis enim totidem numeris G, H, I, K, minimis in ratione A, ad C, quot ſunt numeri A, C, D, B; erit ex æquo, vt A, ad B, atq; adeo vt E, ad F, ita G, ad K.[a] Quare cum G, & K, inter ſe primi ſint, quippe qui extremi ſint minimorũ numerorum;[b] ac propterea in ſua proportione minimi;[c] æque metietur G, ipſum E, & K, ipſum F. Quoties ergo G, & K, ipſos E, & F, metiuntur, toties H, & I, alios numeros L, & M, metiantur, ita vt numeri G, H, I, K, numeros E, L, M, F, æque metiantur, ſinguli ſingulos.[d] Quia igitur G, H, I, K, multiplicantes numerum, per quem metiuntur numeros E, L, M, F, ipſos E, L, M, F, producũt; in eiſdem rationibus erunt E, L, M, F, in quibus G, H, I, K, vt ad propoſ. 18. lib. 7. demonſtrauimus. At G, H, I, K, ſunt continue proportionales. Igitur & E, L, M, F, continue proportionales ſunt; Atque ideirco, cum multitudo E, L, M, F, æqualis ſit multitudini A, C, D, B; tot cadent medij proportionales inter E, & F, quot inter A, & B. Si igitur inter duos numeros medij continua proportione ceciderint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A, 24. C, 36. D, 54. B, 81.
G, 8. H, 12. I, 18. K, 27.
E, 32. L, 48. M, 72. F, 108.

A, 40. C, 20. D, 10. B, 5.
G, 8. H, 4. I, 2. K, 1.
E, 8. L, 4. M, 2. F, 1.

A, 27. C, 9. D, 3. B, 1.
G, 27. H, 9. I, 3. K, 1.
E, 108. L, 36. M, 12. F, 4.

[a] *3. 1 Arithm.*
[b] *23. ſept.*
[c] *21. ſept.*
[d] *9. prop.*

SCHOLIVM.

NON ſolum ex demonſtratione conſtat, totidem medios proportionales cadere inter E, & F, quot inter A, & B; verum etiam eandem eſſe proportionem numerorum E, L, M, F, quæ eſt numerorum A, C, D, B. Oſtenſum enim eſt E, L, M, F, in eadem eſſe proportione, in qua G, H, I, K: Sed hi eandem habent, ex conſtructione, quam A, C, D, B.

Igitur

Igitur & E, L, M, F, eandem habent quam A, C, D, B.

EADEM hac propoſitio vera eſt, ſi exiſtentibus numeris A, & B, ſumatur vel E, vel F, vnitas. Item ſi vel A, vel B, fuerit vnitas, exiſtentibus E, & F, numeris; vt in exemplis apparet.

CONSTAT etiam ex hoc theoremate, inter numeros dupla proportionis, vel ſuperparticularis cuiuſuis, vel ſuperbipartientis, non poſſe cadere numerum medium proportionalẽ. Cum enim dupla proportio in minimis numeris reperiatur inter binarium, & vnitatem; ſuperparticularis vero inter numeros ſola vnitate differentes; ſuperbipartiens denique inter numeros, quorum differentia eſt binarius: ſi inter duos numeros duplæ proportionis, vel ſuperparticularis, vel ſuperbipartientis, medius numerus caderet proportionalis; caderet quoque, per hoc theorema, numerus aliquis medius proportionalis inter binarium, & vnitatem; vel inter numeros ſola vnitate differentes, vel etiam binario, nimirum inter numeros minimos, qui eaſdem cum illis proportiones habent: quod fieri nulla ratione poteſt. Nam neque inter binarium & vnitatem, neque inter duos numeros ſola vnitate differentes, vllus numerus interponitur, tantum abeſt, vt aliquem medium proportionalem ipſi recipiant. Similiter inter duos numeros binario inter ſe diſtantes interiicitur ſolum numerus, qui ab vtroque vnitate differt; Quem nulla poſſe ratione eſſe inter illos medium proportionalem, in hunc modum demonſtrabimus. Differant numeri AB, CD, (ſiue CD, vnitas ſit, & AB, ternarius, ſiue non,) binario, inter quos cadat numerus EF, minor vnitate quam AB, maior vero quam CD, vnitate quoque. Dico EF, non eſſe medium proportionalẽ inter AB, CD. Si enim dicatur eſſe AB, ad EF, vt EF, ad CD: ablato ex AB, numero AG, ipſi EF, æquali, vt reliqua ſit vnitas GB; & ex EF, numero EH, ipſi CD, æquale, vt relinquatur etiam vnitas HF; erit quoq; vt AB, totus ad EF, totum, ita AG, ablatus ad EH, ablatum; cum AG, EH, ipſis EF, CD, æquales ſint, ex conſtructione. Igitur erit quoque reliquus GB, ad reliquum

A .. G . B	A ..... G . B
E . H . F	E .... H . F
C . D	C ..... D

HF, hoc eſt, vnitas ad vnitatem, vt totus AB, ad totum EF, maior ad minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo EF, medius proportionalis eſt inter AB, & CD.

ITAQVE inter numeros triplæ proportionis medius proportionalis cadere non poteſt. Alioquin caderet etiam medius proportionalis, ex hoc theoremate, inter 3. & 1. minimos numeros proportionis triplæ, qui binario inter ſe differunt. quod fieri non poſſe, proxime demonſtrauimus.

PARI ratione inter numeros quintuplæ proportionis cadere non poteſt medius proportionalis. Si enim cadere dicatur, cadet quoque, ex hoc theoremate, medius proportionalis inter 5. & 1. minimos numeros proportionis quintuplæ. quod fieri non poſſe, ita demonſtrabimus. Cadat primum, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis binarius, vel ternarius D: ita vt ſit AB, ad D, vt D, ad C: Et conuertendo C, ad D, vt D, ad AB. Et quoniã vnitas C, metitur D; metietur quoque D, ipſum AB. At binarius, vel ternarius D, metitur quoque ſenarium AE. Igitur D, metitur totum AE, & ablatum AB: [a] ac proinde & D, numerus metietur reliquam vnitatẽ BE. Quod eſt abſurdum.

A . . . . . B . E
D . . D . . .
C .

[a] 11. prop.

CADAT deinde, ſi fieri poteſt, inter quinarium AB, & vnitatem C, medius proportionalis quaternarius D. Oſtendemus ergo, vt prius, D, metiri quinariũ AB: Metitur autem quaternarius D, quaternarium etiam AE. Igitur D, metitur totum AB, & ablatum AE: [b] ac proinde & D, numerus reliquam vnitatem EB, metietur. Quod eſt abſurdum.

A . . . . E . B
D . . . .
C .

[b] 11. prop.

EX quibus fit, neque illud interuallum Muſicum, quod in dupla proportione conſiſtit, vt Diapaſon, vel, vt vulgo dicitur, Octaua; neque illud, quod in ſeſquioctaua proportione reperitur, cuiuſmodi eſt Tonus, ſeu vulgo Secunda, bifariam poſſe ſecari, hoc eſt, in duas proportiones æquales. Illa enim proportio bifariam (quod ad propoſitum attinet) ſecari dicitur, inter cuius terminos medius proportionalis cadit: Vt quia inter hos terminos 24. & 6. proportionis quadruplæ cadit medius proportionalis numerus 12. hoc modo. 24. 12. 6. Idcirco

proportio

proportio quadrupla bifariam diuisa esse dicitur in duas duplas proportiones. Cum ergo ostensum sit, inter numeros duplæ proportionis, & superparticularis, qualis est sesquioctaua, non cadere medium numerum proportionalem; perspicuum est, Diapason, & Tonum, bifariam secari non posse. Vnde Diapason prima sui diuisione in Diapenten, & Diatessaron, quorum interuallorum illud in proportione sesquialtera, hoc vero in sesquitertia consistit, apud Musicos secatur, vt hic apparet, 2. 3. 4. Est enim hic proportio dupla diuisa in proportionem sesquialteram, & sesquitertiam, tanquam in maximas sui partes inter se inæquales. Ita quoque Tonus in duo semitonia, quorum alterum maius, alterum minus dicitur, secari solet. Sed de his plura apud Musicos reperies.

RVRSVM ex his demonstrari potest, proportionem diametri cuiusuis quadrati ad latus eiusdem, numeris non posse exprimi, sed esse irrationalem. Cum enim per ea, quæ ad propos. 47. lib. 1. demonstrauimus, quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere descripti; quadratorum vero proportio sit duplicata proportionis laterum; fit, vt proportio quadrati ex diametro descripti ad quadratum lateris duplicata sit proportionis diametri ad latus. Cum ergo illa proportio, cuius duplicata est proportio dupla, numeris exprimi nequeat, quòd inter numeros duplæ proportionis medius proportionalis non cadat, qui illam bifariam secet, vt ostendimus; manifestum est, nec proportionem diametri ad latus numeris exprimi posse, sed esse irrationalem, seu, quod idem est, diametrum esse lateri incommensurabilem. qua de re plura ad 9. & vltimam propos. lib. 10. scribemus.

THEOR. 7. PROPOS. 9. 9.

SI duo numeri sint inter se primi, & inter eos medij cõtinua proportione ceciderint nũmeri; quot inter eos medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter vtrumque eorum, ac

vnitatem

vnitatem medij continua proportione cadent.

CADANT inter numeros A, B, intet ſe primos medij continue proportionales C, D Dico totidem cadere continue proportionales inter vnitatem, & A, nec non inter vnitatem, & B, quot inter A, & B, cadunt. Inuentis enim duobus numeris E, & F, minimis in ratione A, ad C; ſumantur in eadē proportione tres minimi G, H, I; & quatuor K, L, M, N, & ſic deinceps, donec multitudo aſſumptorum æqualis ſit multitudini A, C, D, B.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
Vnitas. 1.
E, 2. F, 3.
G, 4. H, 6. I, 9.
K, 8. L, 12. M, 18. N, 27.

[a] 2. octaui.

[b] 1. octaui. Quoniam ergo A, B, extremi inter ſe primi ſunt; [b] erunt A, C, D, B, minimi in proportione E, ad F Sunt autem & totidem K, L, M, N, ex conſtructione, in eadem proportione minimi. Igitur K, L, M, N, ipſis A, C, D, B, æquales ſunt, ſinguli ſingulis, vt K, ipſi A; & N, ipſi B, ne minores minimis dentur. Quia vero, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 2. huius lib E, ſeipſum multiplicans produxit G, multiplicans vero ipſum G, fecit K, [c] metietur E, ipſum G, per E, & G, ipſum K, per eundem E; [d] Metitur autem & vnitas ipſum E, per E. Aeque igitur metietur vnitas ipſum E, & E, ipſum G, & G, ipſum K; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius E, & E, ipſius G, & G, ipſius K. [e] Proportionales ergo ſunt deinceps, vnitas, & numeri E, G, K. Simili ratione, cum manifeſtum ſit ex eadem demonſtratione propoſ. 2 huius lib. quòd F, ſe ipſum multiplicans producat I, multiplicans vero ipſum I, faciat N; [f] metietur F, ipſum I, per F, & I, ipſum N, per eundem F; [g] Metitur autem & vnitas ipſum F, per F. Aeque igitur metietur vnitas ipſum F, & F, ipſum I, & I, ipſum N; Ac propterea eadem pars erit vnitas ipſius F, & F, ipſius I, & I, ipſius N. [h] Proportionales ergo ſunt cōtinue, vnitas, & numeri F, I, N; Ac proinde cum tam multitudo E, G, K, quam F, I, N, vnà cum vnitate, æqualis ſit multi-

[c] 7. pron.
[d] 5. pron.
[e] 20. defin.
[f] 7. pron.
[g] 5. pron.
[h] 20. defin.

multitudini K,L,M,N,vel A,C,D, B; (vt perſpicuũ eſt ex propoſ.2.huius lib Nam duo E, F,ſunt ſecundi ab vnitate:& tres G,H,I,tertij; & quatuor K,L,M, N, quarti,&c.) tot cadent medij continuè proportionales numeri inter vnitatem,& K,numerum,ſeu A, ſibi æqualem;& inter vnitatem,& numerum N,ſiue B,ſibi æqualẽ, quot inter numeros A, B.Si duo ergo numeri ſint inter ſe primi,& inter eos medij,&c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM

PERSPICVVM autem eſt,numeros,qui in continua proportione cadunt inter numeros A, & B, atque vnitatem, habere proportiones denominatas à minimis numeris proportionis A,ad C;hoc eſt,quas habẽt E,& F, numeri ad vnitatem;id quod in ſcholio propoſ.2.huius lib. quoque aſſeruimus.

CONSTAT etiam ex demonſtratione hac,ſi numerus ſeipſum multiplicans aliquem fecerit; & rurſum multiplicet productum, & ſic deinceps;omnes productos eſſe continue proportionales ab vnitate. Oſtenſum enim eſt & E,G, K,& F, I,N,qui hac ratione ſunt procreati, ex demonſtratione propoſ.2.huius lib.continue eſſe proportionales ab vnitate.

THEOR. 8. PROPOS. 10. 10.

SI inter duos numeros, & vnitatem, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumq; numerorum A,B,& vnitatem,quotcunq; numeri medij continue proportionales;inter A,quidẽ & vnitatẽ,numeri C,D,E:At vero inter B,& vnitatẽ,numeri F,G,H,illis multitudine æquales. Dico totidẽ medios continue proportionales cadere inter A,& B,quot inter vtrumque A, B, & vnitatem.

Multiplicantes enim ſe mutuo C, & F, faciant I. Deinde C, multiplicans I, & G, faciat K, & L. Rurſus idem C, multiplicans K, L, & H, faciat M, N, & O, totidem inter A, & B, quot ſũt inter vtrumque A, B, & vnitatẽ. Quoniam igitur eſt, vt vnitas ad C, ita C, ad D; D, ad E; & E, ad A; æque metietur vnitas ipſum C, & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A: [a] Metitur autem vnitas ipſum C, per C. Igitur & C, ipſum D, & D, ipſum E, & E, ipſum A, per C, metietur. [b] Quare C, ſeipſum multiplicans fecit D; multiplicans autem D, fecit E, & multiplicans E, fecit A. Eadem ratione F, ſeipſum multiplicans fecit G, & multiplicans G, fecit H, & multiplicans H, fecit B. Itaque cum C, multiplicans C, & F, fecerit D, & I; [c] erit, vt C, ad F, ita D, ad I. Similiter, quia F, multiplicans C, & F, fecit I, & G; [d] erit vt C, ad F, ita I, ad G. Sunt igitur tres D, I, G, continue proportionales in ratione C, ad F. Rurſus quia C, multiplicans D, I, G, fecit E, K, L; habebunt E, K, L, per ea, quæ ad propoſ. 18. lib. 7. oſtendimus, eandem proportionem continuam, quam D, I, G, hoc eſt, quam C, ad F. Eodem modo, quia C, & F, multiplicantes G, fecerunt L, & H; [e] erit vt C, ad F, ita L, ad H. Quatuor ergo numeri E, K, L, H, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F. Poſtremo, quia C, multiplicans E, K, L, H, fecit A, M, N, O, habebunt, ex iis, quæ a nobis ſunt demonſtrata ad propoſ. 18. lib. 7. A, M, N, O, eandem continuam proportionem, quam E, K, L, H, hoc eſt, quam C, ad F. Eadem ratione, cum C, & F, multiplicantes H, fecerint O, & B, [f] erit, vt C, ad F, ita O, ad B. Quinque igitur numeri A, M, N, O, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad F; Ac proinde tot medij proportionales cadunt inter A, & B, quot inter A, vel B, & vnitatem, cum multitudo M, N, O, facta ſit æqualis multitudini C, D, E, vel F, G, H. Quocirca ſi inter duos numeros,

A, 81. M, 162. N, 324. O, 648. B, 1296.
E, 27. K, 54. L, 108. H, 216.
D, 9. I, 18. G, 36.
C, 3. F, 6.
1.
Vnitas.

[a] 3. *prop.*
[b] 2. *prop.*
[c] 17. *ſept.*
[d] 17. *ſept.*
[e] 18. *ſept.*
[f] 18. *ſept.*

numeros, & vnitatem, continue proportionales cecide-rint numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

EX his conſtat, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B, proportionem habere, quam duo numeri vnitati propinquiores, quales ſunt C, & F.

PATET etiam ex hac demonſtratione, ſi quotquot numeri fuerint ab vnitate continue proportionales, ſecundum ab vnitate in ſe multiplicatum producere tertium, & ex eodem in hunc fieri quartum; & ex eodem in hunc gigni quintum, & ſic deinceps. Demonſtratum enim eſt, ex eo quod C, D, E, A, continue proportionales ſunt ab vnitate; D, tertium fieri ex C, ſecundo in ſe; & E, ex C, in D; & A, ex eodem C, in E, &c.

LIBET hoc loco nonnulla alia theoremata demonſtrare ad numeros continue proportionales pertinentia, quæ tum ad ea, quæ ſequuntur, tum ad alia multa erunt vtilia; hinc initium ſumentes.

I.

SI ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT numeri A, B, C, D, continue ab vnitate proportionales, & ab eadem totidem alij E, F, G, H. Dico proportionem B, tertij ab vnitate ad F, ab eadem tertium, duplicatam eſſe eius, quam habet A, ſecundus ad E, ſecundum, &c. Quoniam enim inter vtrumque numerorum B, F, & vnitatem cadit medius vnus proportionalis; inter B, quidem &

D,81. M,108. N,144. O,192. H,256.
C,27. K,36. L,48. G,64.
B,9. I,12. F,16.
A,3. E,4.
1.
Vnitas.

* 10.octa.

vnitatem, numerus A; At inter F, & vnitatem numerus E; * cadet quoq; inter B, & F, vnus medius proportionalis: æque adeo, per ſcholium huius propoſ. in ratione A, ad E. Cadat igitur, & ſit I. Eodem modo cadent inter C, & G, duo medij in eadem proportione A, ad E, qui ſint K, L; quot nimirum cadunt inter vtrumque C, G, & vnitatem. Nec non inter D, H, tres, qui ſint M, N, O, in eadem ratione A, ad E, proportionales. Quoniam igitur ex defin. B, ad F, proportionem habet duplicatam eius, quam habet B, ad I; Eſt autem vt B, ad I, ita A, ad E; Habebit quoque B, ad F, rationem duplicatam eius, quam habet A, ad E. Non aliter habebit C, ad G, rationem triplicatam rationis A, ad E; quia ratio C, ad G, triplicata eſt proportionis C, ad K; & eſt vt C, ad K, ita A, ad E. Sic etiam D, ad H, rationẽ habebit quadruplicatam rationis A, ad E, & ſic de cæteris.

HOC idem demonſtrabimus, ſi fuerint duo ordines numerorum continue proportionalium, ab aliquo numero eodem incipientes. Vnde hoc idem theorema ita proponemus.

II.

SI ſint ab aliquo numero eodem duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualium; Habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam; & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius.

SINT ab A, numero continue proportionales B, C, D, E, & ab eodem totidem alij F, G, H, I. Dico rurſum, proportionis B, ad F, eſſe duplicatam proportionem C, ad G; & D, ad H, tri-

H, triplicatam: & E, ad I, quadruplicatam. Ex A, in ſe fiat K, & ex A, in K, fiat L; & ex A, in L, fiat M. Similiter ex B, in ſe fiat N; & ex B, in N, fiat O; & ex E, in O, fiat P. Poſtremo ex F, quoq; in ſe fiat Q; & ex F, in Q, fiat R; & ex F, in R, fiat S. Quibus peractis, erunt A, K, L, M, continue proportionales ab vnitate, vt cõſtat ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Eademq; ratione erunt B, N, O, P, ab vnitate proportionales; necnon & F, Q, R, S. Quia igitur ratio N, ad K, duplicata eſt rationis B, ad A, ex theoremate 1. huius ſcholij: Eſt autem, ex defin. eiuſdem rationis B, ad A, duplicata quoque ratio C, ad A; Erit C, ad A, vt N, ad K. Eodem modo erit A, ad G, vt K, ad Q. Nam ex eodem 1. theoremate eſt ratio K, ad Q, duplicata rationis A, ad F; & eiuſdem, ex defin. duplicata eſt ratio A, ad G. Quare cum ſit C, ad A, vt N, ad K; & A, ad G, vt K, ad Q; erit ex æquo C, ad G, vt N, ad Q: Atqui ratio N, ad Q, duplicata eſt rationis B, ad F, ex theoremate 1. huius ſcholij; quòd tam B, N, quam F, Q, ſint ab vnitate cõtinuè proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio C, ad G, duplicata eſt rationis B, ad F. Eiſdẽ argumẽtis erit ratio D, ad H, triplicata rationis E, ad F. Nam ratio O, ad L, ex 1. theoremate, triplicata eſt rationis B, ad A; quòd tam B, N, O, quàm A, K, L, ſint ab vnitate continuè proportionales, ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. & eiuſdẽ triplicata eſt ratio D, ad A, ex defin. Igitur eſt D, ad A, vt O, ad L. Eodemque modo eſt A, ad H, vt L, ad R: quòd utraque proportio triplicata ſit proportionis A, ad F:

E, 162. I, 512.
D, 54. Vnitas. H, 128.
C, 18. 1. G, 32.
B, 6. F, 8.
A, 2.
N, 36. K, 4. Q, 64.
O, 216. L, 8. R, 512.
P, 1296. M, 16. S, 4096.

E, 81. I, 1.
D, 54. Vnitas. H, 2.
C, 36. 1. G, 4.
B, 24. F, 8.
A, 16.
N, 576. K, 256. Q, 64.
O, 13824. L, 4096. R, 512.
P, 331776. M, 65536. S, 4096.

Proportio

E, 81. I, 1. Proportio quidem A, ad
D, 54. Vnitas H, 2. H, ex defin. at proportio
C, 36. G, 4. L, ad R, ex 1. theor. hu-
B, 24. F, 8. ius ſcholij, propterea quòd
A, 16. tam A, K, L, quam F,
N, 576. K, 256. Q, 64. Q, R, eorumnè proportio-
O, 13824. L, 4096. R, 512. nales ſunt ab vnitate,
P, 331776. M, 65536. S, 4096. ex ſcholio propoſ. 9. hu-
ius lib. Eſt ergo ex æquo D, ad H, vt O, ad R. Sed ratio O, ad R, triplicata eſt rationis R, ad F, ex 1. theor. eò quòd tam B, N, O, quàm F, Q, R, ſunt continuè proportionales ab vnitate ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. Igitur & ratio D, ad H, triplicata eſt eiuſdem rationis B, ad F. Non ſecus demonſtrabimus rationem E, ad I, eſſe quadruplicatam rationis B, ad F. Atque ita deinceps.

IDEM omnino demonſtrabitur, ſi numeri vnius ordinis deſinant in vnitatem, vt ex hac ſubiecta figura eſt manifeſtum, in qua I, eſt vnitas.

CÆTERVM theorema hoc demonſtrabimus etiam in lineis ab vna & eadem linea proportionalibus, lib. 14. propoſ. 28. licet non in quotcunque lineis. Vnde multo generalius eſt hoc in numeris, quam illud in lineis. Ex his autem in hunc modum demonſtratis efficiemus propoſitionem hanc 10. Euclidis magis vniuerſalem, hoc modo.

III.

SI inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, continue proportionales ceciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, & aſſumptum, deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent.

CADANT inter vtrumque numerorum A, B, & aſſumptum numerum C, quotlibet numeri continue proportionales; inter A, quidem & C, numeri D, E, F; inter B, verò & C,

& C, totidem numeri G, H, I. Dico tot quoque medios continue proportionales cadere inter A, & B, quot inter A, & C, & inter B, & C. Item tot inter F, & I, quot inter F, & C, & inter I, & C. Et tot inter E, & H, quot inter E, & C, & inter H, & C. Sumptis enim tribus K, L, M, minimis in ratione D, ad G; erit ex defin. ratio K, ad M, duplicata rationis K, ad L, hoc eſt, D, ad G: Sed per theor. 2. huius ſcholij, ratio quoque E, ad H, duplicata eſt eiuſdem rationis D, ad G. Igitur eſt vt K, ad M, ita E, ad H; Atque adeo cum inter K, & M, cadat vnus medius proportionalis L; cadet quoque vnus medius, nimirum N, inter E, & H; quemadmodum & inter E, & C, & inter H, & C, vnus medius cadit. Simili modo, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quatuor minimi numeri, oſtendemus, inter F, & I, duos medios cadere, ſicut & inter F, & C, & inter I, & C, duo medij cadunt. Et eadem ratione inter A, & B, tres medij cadent, ſi in eadem proportione D, ad G, ſumantur quinque numeri minimi.

A, 162. Q, 216. R, 288. S, 384. B, 512.
F, 54. O, 72. P, 96. I, 128.
E, 18. N, 24. H, 32.
D, 6. G, 8.
C, 2.
K, 9. L, 12. M, 16.

2 8. oct. ani.

HOC etiam verum eſt, ſi loco alterius numeri, nimirum B, vnitas aſſumatur, veluti perſpicuum eſt in hac ſubiecta figura in qua numerus B, vnitas eſt, cadunteque tam inter A, & C, quam inter B, & C, tres numeri continue proportionales, quot ſcilicet inter A, & B, cadunt, &c.

A, 1048576. Q, 32768. R, 1024. S, 32. B, 1.
F, 65536. O, 2048. P, 64. I, 2.
E, 4096. N, 128. H, 4.
D, 256. G, 8.
C, 16.
K, 1024. L, 32. M, 1.

EX his etiam apparet, numeros, qui medij proportionales cadunt inter A, & B; necnon inter F, & I; atque inter E, & H, proportionem habere, quam duo numeri D, & G, numero aſſumpto C, propinquiores.

THEOR.

11.

THEOR. 9. PROPOS. 11.

DVORVM quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationẽ.

SINT quadrati numeri A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, vnum medium proportionalem numerum cadere: & proportionem A, ad B, quadrati ad quadratum, eſſe duplicatam proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quia igitur C, multiplicans ſeipſum fecit A, quadratum, ex defin. quadrati; & ipſum D, multiplicãs fecit E, ex conſtructione; [a] erit vt C, ad D, ita A, ad E. Rurſus, quia D, multiplicans C, fecit E, ex conſtructione; & multiplicans ſeipſum, ex defin. quadrati, fecit B, quadratum; [b] erit quoque, vt C, ad D, ita E, ad B. Quare A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione laterum C, & D. Ac proinde inter quadratos A, & B, medius continue proportionalis cadit E. Quod vero, ex eo quod A, E, B, continue proportionales ſunt numerus A, ad B duplicatam rationem habet eius, quam habet A, ad E; duplicatam quoque rationem habebit A, quadratus ad B, quadratum, eius, quam habet C, latus ad latus D; cum hæc proportio eadem ſit, quæ A, ad E. Duorum ergo quadratorum numerorum vnus medius proportionalis eſt, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 17. ſept.

A, 9. E, 21. B, 49. C, 3. D, 7.

[b] 17. ſept.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM eſt ex dictis, inter duos quadratos numeros cadere numerum medium proportionalem in conti-

nuo

nua proportione lateris ad latus. Nam eadem eſt proportio quadrati A, ad E, medium proportionalem, quæ lateris C, ad latus D, vt demonſtratum eſt.

PARI ratione liquet, numerũ mediũ proportionalem E, & vtrũlibet quadratorum A, B, eſſe inter ſe compoſitos. Cum enim A, E, B, proportionales ſint oſtenſi in ratione C, ad D, hoc eſt, eſſe A, ad E, & E, ad B, vt C, ad D; metiatur autem latus D, quadratum ſuum B, conſequens conſequentem, ſi de proportionibus E, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur & G, ipſum E, antecedens antecedentem; quandoquidem eſt E, ad B, vt C, ad D. Metitur autem & latus C, quadratum ſuum A. Igitur E, & A, menſuram communem habent C; atque adeo inter ſe ſunt compoſiti. Similiter cum ſit A, ad E, vt C, ad D; & metiatur latus C, ſuum quadratum A, antecedens antecedentem; metietur quoque D, ipſum E, conſequens conſequentem. Quare cum & latus D, metiatur ſuum quadratum B; habebunt E, & B, communem menſuram D; Ideoque compoſiti erunt inter ſe. Perſpicuum autem eſt ex hac demonſtratione, priorum numerorum A, E, communem menſuram eſſe C, latus prioris quadrati A; poſteriorum vero E, B, menſuram communem eſſe D, latus quadrati poſterioris B.

A 3 4 9
C 3 D 7

THEOR. 10. PROPOS. 12. 11.

DVORVM cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem.

SINT numeri cubi A, & B, quorum latera C, & D. Dico inter A, & B, duos medios numeros continue proportionales cadere: Et pportionẽ A, ad B, cubi ad cubũ, tripli-

A,27. H,36. I,48. B,64.
E,9. G,12. F,16.
C,3. D,4.

triplicatam esse proportionis C, ad D, lateris ad latus. Multiplicans enim C, seipsum faciat E; & D, seipsum multiplicans faciat F; At C, & D, se mutuo multiplicantes faciant G; Multiplicantes vero G, faciant H, & I. Quoniam igitur C, seipsum, & D, multiplicans fecit E, & G; [a] erit, vt C, ad D, ita E, ad G. Eadem ratione, cum D, multiplicans C, & seipsum, fecerit G, & F; [b] erit quoque vt C, ad D, ita G, ad F; propterea que E, G, F, continue proportionales sunt in ratione C, ad D. Rursus, quia ex defin. cubi, C, ipsum E, multiplicans fecit A; & ex [c] constructione multiplicans ipsum G, fecit H; [c] erit vt E, ad G, hoc est, vt C, ad D, ita A, ad H. Similiter cum D, ipsum G, multiplicans fecerit, ex constructione, numerum I; multiplicans vero ipsum F, ex defin. cubi, fecerit [d] cubum B; [d] erit quoque, vt G, ad F, hoc est, vt C, ad D, ita [e] I, ad B: [e] Est autem & H, ad I, vt C, ad D; quod C, & D, ipsum G, multiplicantes fecerunt ex constructione, H, & I. Igitur A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Atque adeo inter cubos A, & B, duo medij H, & I, cadunt continue proportionales. Quoniam vero, ex eo quod A, H, I, B, continue sunt proportionales, numerus A, ad B, triplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad H; triplicatam quoque rationem habebit A, ad B, cubus ad cubum, eius, quam habet C, ad D, latus ad latus cum sit C, ad D, vt A, ad H. Quam ob rem duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 17. sept.
[b] 17. sept.
[c] 17. sept.
[d] 17. sept.
[e] 18. sept.

SCHOLIVM.

HIC quoque manifestum est, inter duos cubos cadere duos numeros medios proportionales in continua proportione lateris ad latus. Ostensum enim est, ita esse A, ad H, & H, ad I, & I, ad B, vt C, ad D.

EODEM modo constat, duos numeros medios proportionales H, I, & vtrumlibet cuborum A, B, esse inter se compositos. Cum enim A, H, I, B, ostensi sint proportionales in ratione

ratione C, ad D; hoc eſt, eſſe A, ad H, & I, ad B, vt C, ad D: Metiatur autem latus D, cubum ſuum B, conſequens cõ-

A, 27. H, 36. I, 48. B, 64.
E, 9. G, 12. F, 16.
C, 3. D, 4.

ſequentem, ſi de proportionibus I, ad B, & C, ad D, loquamur; metietur quoque C, ipſum I, antecedens antecedentem, quandoquidem eſt I, ad B, vt C, ad D: Metitur autem & latus C, cubum ſuum A; immo & ipſum H, quòd H, factus ſit ex multiplicatione C, in G, ex conſtructione. Igitur A, H, I, communem habent menſuram C; atque adeo inter ſe compoſiti ſunt. Similiter cum ſit A, ad H, vt C, ad D; metiatur autem latus C, cubum ſuum A, antecedens antecedentem, metietur quoque D, ipſum H, conſequens conſequentem: Metitur autem & latus D, cubum ſuum B; immo & ipſum I, quod I, factus ſit ex multiplicatione D, in G, ex conſtructione. Igitur H, I, B, communem menſuram habent D; Ac proinde ſunt inter ſe compoſiti. Manifeſtum autem etiam hic eſt, priorum trium numerorum A, H, I, communem menſuram eſſe C, latus cubi prioris A; poſteriorum vero trium H, I, B, menſuram communem eſſe D, latus poſterioris cubi B.

THEOR. 11. PROPOS. 13. 12.

SI ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſq; ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primum poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos: ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet.

SINT continue proportionales A, B, C, qui ſeipſos multiplicantes faciant D, E, F; multiplicantes autem ipſos D, E, F, faciant G, H, I; & rurſum multiplicãtes ipſos G, H, I,

G,H,I,faciant K,L,M,& ita deinceps. Dico quoque D, E,F,& G,H,I,& K,L,M,continue eſſe proportionales. Multiplicantes enim A,& B, ſe mutuo faciant N; & B, C,ſe mutuo multiplicantes faciant O. Deinde A,multiplicans N,E, faciat P, Q. Item B, multiplicans O,F,

A, 2. B, 4. C, 8.
D,4. N,8. E,16. O,32. F,64.
G,8. P,16. Q,32. H,64. R,128. S,256. I,512.
K, 16. L, 32. V, 64. X, 128. L, 256. Y,512. Z,1024. a,2048. M,4096.

faciat R,S Similimodo A,multiplicans P, Q, H,faciat T,V,X;& B,multiplicans R,S,I,faciat Y,Z, a.Quoniam igitur A,multiplicans ſeipſum,& B,fecit D,& N; [a] erit vt A,ad B,ita D,ad N.Eodem modo,quia B,multiplicãs A,& ſeipſum,fecit N,& E;erit etiam,vt A, ad B, ita N, ad E. Sunt igitur D,N,E,continue proportionales in ratione A,ad B. Rurſus,quia B,ſeipſum, & numerum C, multiplicans fecit E,& O; [b] erit vt B,ad C,ita E,ad O. Eademque ratione,cum C, multiplicans B, & ſeipſum, fecerit O,& F; erit, vt B,ad C,ita O,ad F; propterea q; & E, O, F,continue proportionales ſunt in ratione B, ad C,ſeu A,ad B Quare cum D,N,E,in eadem ratione ſint continue proportionales,in qua E, O, F;erit ex æquo D, ad E, vt E,ad F; atque adeo D,E,F,continue proportionales ſunt.

[a] 17. ſept.

[b] 17. ſept.

DEINDE, quia A,multiplicans D, N, E, fecit G, P, Q; erunt ex ijs,quæ ad propoſ.18. lib. 7. oſtendimus, G, P, Q, in eadem ratione,in qua D, N, E, hoc eſt, in ratione A,ad B proportionales. Item quia A,& B,multiplicantes E fecerunt Q, & H; [c] erit quoque, vt A,ad B,ita Q, ad H. Sunt ergo G, P, Q, H, proportionales in ratione A ad B. Similiter, quia B, multiplicans E, O, F, fecit H, R, S; erunt ex demonſtratis ad propoſ. 18.lib.7.H,R,S,proportionales in ratione E, O, F, hoc eſt, B,ad C,ſeu A,ad B. Et eodem modo,cum B, C,multiplicantes F,fecerint S,& I; [d] erit vt B,ad C, hoc eſt, vt A,ad B,ita S,ad I;propterea que & H,R,S,I, proportionales ſunt in ratione A,ad B.Quo circa,cũ G, P, Q, H,

[c] 18. ſept.

[d] 18. ſept.

eandem

eandem habeant proportionem continuam, quam H, R, S, I; erit ex æquo G, ad H, vt H, ad I; Ac proinde G, H, I, continue ſunt proportionales.

NON diſsimili argumento demonſtrabimus & K, L, M, eſſe continue proportionales; & eodem modo in alijs procedemus Igitur ſi ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

SVNT autem, vt ex demonſtratione liquet, numeri primo loco ꝓducti D, E, F, proportionales in duplicata ratione datorum numerorũ A, B, C. Nam D, ad E, habet proportionẽ duplicatam eius, quam habet D, ad N, hoc eſt, A, ad B, &c.

ITA quoque numeri ſecundo loco geniti G, H, I, erunt in ratione triplicata A, ad B: Et numeri tertio loco procreati, in quadruplicata, & ſic deinceps ſemper vno amplius.

BREVIVS propoſitionẽ totam demonſtrabimus hac ratione. Fiant ex A, B, C, continuè proportionalibus in ſeipſos, numeri D, E, F; & in hos ex eiſdem numeri G, H, I; & rurſum ex eiſdẽ in hos numeri K, L, M. Dico D, E, F; & G, H, I; & K, L, M, eſſe quoque continue proportionales. Nã ex ſcholio propoſ. 9. huius lib. tam A, D, G, K, quam B, E, H, L; & D, F, I, M, continue ſunt ab vnitate proportionales. Quare ex 1. theoremate ſcholij propoſ. 10. huius lib. erit D, ad E, in duplicata ratione A, ad B, vel B, ad C. Sed eiuſdem rationis B, ad C, duplicata eſt ratio E, ad F, per idem theorema. Igitur D, E, F, cõtinue ſunt ꝓportionales in duplicata ratione A, ad B, & B, ad C. Eodẽ modo oſtẽdemus G, H, I, eſſe proportionales cõtinue in triplicata ratione rationis A, ad B, & B, ad C: At vero K, L, M, in quadruplicata, atque ita de cæteris.

A, 2.	B, 4.	C, 8.	
D, 4.	E, 16.	F, 64.	
G, 8.	H, 64.	I, 512.	
K, 16.	L, 256.	M, 4096.	

EX qua rurſum demonſtratione apparet, numeros primo loco proãctos eſſe in duplicata ratione datorum numerorum; ſecundo vero loco procreatos, in triplicata, &c. Id quod luce clarius ex 1. theor. ſcholij propoſ. 10. huius lib. elicitur.

QVAMVIS autem in vtraque demonſtratione huius propoſ. 13. dati ſint tantum tres numeri continue proportionales A, B, C, eádem tamen propoſitionem demonſtrabimus, etſiamſi plures fuerint, quam tres. Sint namq; numeri plures, quam tres A, B, C, D, continue proportionales, qui ſe ipſos multiplicantes faciant E, F, G, H; poſtea vero multiplicantes ipſos E, F, G, H, faciant I, K, L, M, & ſic deinceps. Quoniam igitur E, F, G, ex demonſtratis, proportionales ſunt in ratione A, ad B; item F, G, H, in ratione B, ad C, hoc eſt, in eadem ratione A, ad B, cum illi producti ſint ex A, B, C, proportionalibus in ſe ipſos: hi vero ex B, C, D, proportionalibus quoque in ſe ipſos: Erunt E, F, G, H, continue proportionales. Non ſecus proportionales erunt I, K, L, M; & alij deinceps eodem modo producti.

A, 2. E, 4. C, 8. D. 16.
E, 4. F, 16. G, 64. H, 256.
I, 8. K, 64. L, 512. M, 4096.

13. PROBL. 12. PROPOS. 14.

SI quadratus numerus quadratum numerum metiatur: & latus vnius metietur latus alterius. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratum metietur.

METIATVR quadratus A, cuius latus C, quadratum B, cuius latus D. Dico & latus C, latus D, metiri. Multiplicantes enim ſe mutuo C, & D, faciant E. Quoniam igitur, vt liquet ex demonſtratione propoſ. 11. huius lib. A, E, B, continue proportionales ſunt in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus extremum B; *metietur quoque A, primus ſecundum E. Quare cum ſit vt A, ad E, ita C, ad D; & C, latus ipſius D, metietur.

A, 4. E, 12. B, 36.
C, 2. D, 6.

*7. def. 7.

METÍA-

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & quadratum A, quadratum B, metiri. Eodem enim modo erit, vt C, ad D, ita A, ad E, propterea quod A, E, B, continue proportionales sunt in ratione C, ad D, vt demonstratum est propos. 11. huius lib. Quare cum C, metiatur D, metietur quoque A, primus E, secundum; ac proinde & extremum B, metietur, ex theoremate 2. scholij propos. 6. huius lib. Si quadratus ergo numerus quadratum numerum metiatur, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 13. PROPOS. 15. 14.

SI cubus numerus cubum numerum metiatur; & latus vnius metietur latus alterius. Et si latus vnius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubum metietur.

METIATVR cubus A, cuius latus C, cubum B, cuius latus D. Dico & latus C, metiri latus D. Vterque enim C, & D, se ipsum multiplicans faciat E, & F; multiplicantes autem se mutuo faciant G. Multiplicantes denique G, faciant H, I. Quoniam igitur, vt apparet ex demonstratione propos. 12. huius lib tam E, G, F, quam A, H, I, B, continue sunt proportionales in ratione C, ad D; Metitur autem A, primus B, extremum; [a] metietur quoque idem A, primus H, secundum. Cum ergo sit, vt A, ad H, ita C, ad D; metietur & C, latus latus D.

A, 8. H, 24. I, 72. B, 216.
E, 4. G, 12. F, 36.
C, 2. D, 6.

[a] 7. octaui.

METIATVR iam C, latus latus D. Dico & A, cubum metiri cubum B. Eodem enim argumento erit, vt C, ad D, ita A, ad H, propterea quod A, H, I, B, continue proportionales sunt in ratione G, ad D, vt ostensum est propos. 12 huius lib. Quapropter cum latus C, metiatur latus D, metietur & A, ipsum H; atque idcirco & extremum B,

mum B, cubus cubum, ex ijs, quæ ad propoſ. 6. huius lib. demonſtrauimus. Itaque ſi cubus numerus cubum numerum metiatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

15. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus vnius metietur alterius latus. Et ſi latus vnius quadrati non metiatur latus alterius: neque quadratus quadratum metietur.

SINT quadrati A, & B, quorum latera C, & D; Nō metiatur autem A, ipſum B. Dico neque C, latus metiri latus D. Si enim fieri poteſt, metiatur C, ipſum D. Quia igitur C, latus quadrati A, metitur D, latus quadrati B; [a] metietur & quadratus A, quadratū B. Quod eſt abſurdum; Ponitur enim non metiri. Non ergo latus C, metitur latus D.

A, 16. B, 81. C, 4. D, 9.

[a] 14. octa.

SED iam latus C, non metiatur latus D. Dico quod nec quadratus A, quadratum B, metietur. Si namque A, metiri dicatur ipſum B; [b] metietur quoque C, latus illius latus huius D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim non metiri. Igitur quadratus A, quadratum B, non metietur. Quapropter ſi quadratus numerus quadratum numerum non metiatur, &c. Quod erat oſtendendum

[b] 14. octa.

15. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI cubus numerus cubum numerum non metiatur: neque latus vnius latus alterius

alterius metietur. Et ſi latus cubi vnius latus alterius non metiatur: neque cubus cubum metietur.

SINT cubi A, & B, quorum latera C, & D; Non metiatur autem A, ipſum B. Dico quod nec latus C, latus D, metietur. Si enim C, dicatur metiri D; a metietur quoque A, cubus cubum B. Quod eſt abſurdum, cum ponatur non metiri. Non ergo latus C, latus D, metietur.

A, 8. B, 27. C, 2. D, 3.

a 15. octa.

SED iam C, latus non metiatur latus D. Dico quod nec cubus A, cubum B, metietur. Nam ſi metiri dicatur; b metietur etiam C, latus latus D. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim nõ metiri. Non igitur A, cubus cubum B, metietur. Quocirca, ſi cubus numerus cubum numerum non metiatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

b 15. octa.

SCHOLIVM.

PROXIME antecedentes quatuor propoſitiones hoc etiam modo proponi poſſunt, ſi maiores numeri ad minores referantur.

SI quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius latus lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si verò quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris erit multiplex. Et ſi latus lateris non ſit multiplex; neque quadratus quadrati, neque cubus cubi erit multiplex.

NAM si quadratus A, quadrati B, & cubus A, cubi B, sit multiplex; metietur B, quadratus quadratum A, & cubus B, cubum A. [a] Igitur & latus D, latus C, metietur; ac proinde latus C, lateris D, multiplex erit. [a] 14. & 15. octaui.

QVOD si latus C, lateris D multiplex sit; metietur latus D, latus C. [b] Igitur & B, ipsum A, quadratus quadratum, & cubus cubum metietur; Ac propterea A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, erit multiplex. [b] 14. & 15. octaui.

A, 36. B, 9. C, 6. D, 3.

A, 64. B, 8. C, 4. D, 2.

AT vero si A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, non sit multiplex; non metietur B, ipsum A, quadratus quadratũ, aut cubus cubum. [c] Igitur neque latus D, latus C, metietur. Quare C, latus lateris D, non erit multiplex. [c] 16. & 17. octaui.

A, 49. B, 9. C, 7. D, 3.

A, 125. B, 8. C, 5. D, 2.

SIMILITER si C, latus lateris D, non sit multiplex; non metietur D, latus latus C. [d] Igitur nec B, ipsum A, quadratus quadratum, nec cubus cubum metietur; Atque adeo A, ipsius B, quadratus quadrati, & cubus cubi, multiplex non erit. [d] 16. & 17. octaui.

16.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

DVORVM similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus: Et planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SINT plani numeri similes A, B, & latera illius sint C, D, huius vero illis proportionalia E, F: ita vt C, D, se mutuo multiplicantes faciant A; & E, F, mutuo se multiplicantes faciant B; sitque vt C, ad D, ita E, ad F. Dico inter A, & B, cadere vnum numerum medium proportionalem, & proportionem A, ad B, esse duplicatam proportionis

portionis laterum homologorum C,E, vel D,F. Multiplicantes enim se mutuo D,E, faciant G. Quoniam igitur est C, ad D, vt E, ad F; erit permutando C, ad E, vt D, ad F. Et quia D, multiplicans C, & E, fecit A, & G; erit A, ad G, vt C, ad E; hoc est, vt D, ad F. Similiter quia E, multiplicans D, & F, fecit G, & B; erit quoque G, ad B, vt D, ad F. Proportionales ergo sunt A, G, B, in ratione C, ad E, vel D, ad F; Atque adeo inter A, & B, medius proportionalis cadit G.

A. 12. G. 18. B. 27. C. 6. D. 2. E. 9. F. 3.

a 17. sept.

b 17. sept.

QVIA vero, cum A, G, B, sint continuè proportionales, A, ad B, duplicatam habet rationem eius, quam habet A, ad G, hoc est, C, ad E, vel D, ad F; perspicuum est proportionem numeri plani A, ad planum B, esse duplicatam eius, quam habet C, ad E, vel D, ad F, latus homologum ad latus homologum. Duorum igitur similium planorum numerorum, &c. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

QVIA ostensum est A, G, B, esse proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, manifestum est, inter duos similes planos A, & B, cadere medium proportionalem G, in ratione laterum homologorum C, E, vel D, F, assumptorum.

CONSTAT etiam ex dictis, medium proportionalem G, & vtrumlibet planorum A, B, esse inter se compositos. Cum enim ostensi sint A, G, B, proportionales in ratione C, ad E, vel D, ad F, id est, esse A, ad G, & G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F; metiantur autem E, F, latera numerum B, cuius sunt latera, consequentes consequentem, si de proportionibus G, ad B, & C, ad E, vel D, ad F, loquamur; metientur quoque C, D, ipsum G, antecedentes antecedentem, quòd sit G, ad B, vt C, ad E, vel D, ad F. Atqui C, D, latera metiuntur numerum A, cuius sunt latera. Igitur G, A, mensuram communem habent tam C, quam D. Ac proinde compositi sunt inter se. Rursus cum sit A, ad G, vt C, ad E, vel D, ad F; metiuntur autem C, D, latera ipsum planum A, antecedentes

antecedentem; metientur etiam E, F, ipſum G, conſequentes conſequentem. Quare cum & E, F, latera ſuum planum B, metiantur, habebunt G, B, communem menſuram tam E, quam F; ideoque erunt inter ſe compoſiti.

EX qua demonſtratione etiam manifeſtum relinquitur, priorum duorum numerorum A, G, communes menſuras eſſe C, D, latera prioris plani A; poſteriorum autem G, B, menſuras communes eſſe E, F, latera plani poſterioris B.

18. THEOR. 17. PROPOS. 19.

DVORVM ſimilium ſolidorum numerorũ duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationem habet lateris homologi ad latus homologum.

SINT ſolidi numeri ſimiles A, B, & latera illius ſint C, D, E, huius vero illis proportionalia F, G, H, ita vt ſit C, ad D, quemadmodum F, ad G; & D, ad E, ſicut G, ad H. Dico inter A, & B, cadere duos medios proportionales, & proportionẽ A, ad B, eſſe triplicatam eius, quã habẽt latera homologa C, F, vel D, G, vel E, H. Multiplicantes enim ſe mutuo C, D, faciant I; & F, G, ſe mutuo multiplicantes faciant K. Itẽ D, F, ſe mutuo multiplicãtes faciant L. Poſtremo E, H, ipſum L, multiplicãtes faciant M, N. Quia igitur C, D, E, ipſis F, G, H, proportionales ſunt; erunt & permutando proportionales, nimirum vt C, ad F, ita D, ad G, & E, ad H. Quoniam vero D, multiplicans C, & F, fecit I, & L; [a] erit vt C, ad F, ita I, ad L. Simili modo, quia F, multiplicans D, &

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H. 10.

[a] 17. ſept.

D, & G, fecit L, & K; [a] erit quoque vt D, ad G, ita L, ad K. Sunt ergo I, L, K, continue proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Et quoniam A, ſolidus factus eſt ex mutua multiplicatione laterum C, D, E; factus eſt autem I, ex multiplicatione mutua C, D; fit vt E, multiplicans I, faciat A. Eodem modo cum B, ſolidus factus ſit ex mutua multiplicatione laterum F, G, H; & K, factus ex mutua multiplicatione F, G; numerus H, ipſum K, multiplicans faciet B. Quare cum E, multiplicans I, & L, fecerit A, & M, [b] erit A, ad M, vt I, ad L, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. Eadem ratione, cum H, multiplicans L, K, fecerit N, & B; [c] erit N, ad B, vt L, ad K, hoc eſt, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H. [d] Eſt autem & M, ad N, vt E, ad H; quod E, H, multiplicantes L, fecerint ipſos M, & N. Igitur A, M, N, B, continue ſunt proportionales in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Atque idcirco inter A, B, ſolidos ſimiles duo medij M, N, continue proportionales cadunt.

[a] 17. ſept.
[b] 17. ſept.
[c] 17. ſept.
[d] 18. ſept.

QVONIAM vero, cum A, M, N, B, ſint proportionales continue; proportio A, B, triplicata eſt eius, quam habet A, ad M; Eſt autem A, ad M, vt C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; Habebit quoque A, ad B, ſolidus ad ſolidum, proportionem triplicatam eius, quam habet C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H, latus ad latus homologum. Quocirca, Duorum ſimilium ſolidorum numerorum duo medij, &c. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

CVM demonſtratum ſit A, M, N, B, proportionales eſſe in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; liquet inter duos ſimiles ſolidos A, & B, cadere duos medios proportionales M, & N, in ratione laterum homologorum G, F, vel D, G, vel E, H, aſſumptorum.

Ex iis, quæ dicta ſunt, perſpicuum etiã eſt, duos medios proportionales M, N, & vtrumlibet ſolidorum A, B, inter ſe eſſe compoſitos. Cum enim A, M, N, B, oſtenſi ſint proportionales in ra-

in ratione C, ad F, vel D, ad G, vel E, ad H; hoc eſt, eſſe A; ad M, & M, ad N, & N; ad B, vt C, ad F, vel D; ad G, vel E, ad H; metiantur autem F, G, H, latera ſuum ſolidum B, conſequentes conſequentem, ſi de proportionibus N, ad B, & C; ad F, vel D; ad G, vel E; ad H, loquamur; metientur quoque C, D, E, ipſum N, antecedentes antecedentem; quòd ſit N, ad B, vt C, ad F, vel D, ad G, vel F, ad H. Atqui & C, D, E, ipſum M, metiuntur; (Cum enim M, factus ſit; per conſtructionem, ex E, in L; metietur E, ipſum M. Deinde quia M, N, B, proportionales ſunt ipſis I, L, K; metitur autem K; ipſum B, quod B, factus ſit ex K, in H; metietur quoque I; ipſum M; Metiuntur autem & C, D, laterà planum ſuum I;

a 11. pron. a Igitur & C, D, metientur ipſum M; Atque adeo C, D, E, ipſum M, metientur.) Nec non & ipſum A, nimirum latera ſuum ſolidum. Ergo A, M, N, habent communem menſuram tam C, quam D, quam E; Ideoque tòmpoſiti inter ſe ſunt. Rurſus quia eſt A, ad M, vt C, ad F, vel D; ad G, vel E, ad H; metiuntur autem C, D, E, latera ſolidum ſuum A;

A, 30. M, 60. N, 120. B, 240.
I, 6. L, 12. K, 24.
C, 2. D, 3. E, 5. F, 4. G, 6. H, 10.

antecedentes antecedentẽ; metientur quoque F; G; H, ipſum M; conſequentes conſequentem. Metiuntur vero & F, G, H, ipſum N; (Cum enim N, factus ſit ex H, in L, per conſtructionem; metietur H, ipſum N. Deinde quia A, M, N, ipſis I, L, K, proportionales ſunt: metitur autem I, ipſum A, quòd A, factus ſit ex I, in E; metietur etiam K, ipſum N. Cum ergo & F, G; latera metiantur planum ſuum K; metientur quoque E; G; ipſum N; atque adeo F, G, H, ipſum N, metientur.) Nec non & ipſum B, nimirum latera ſuum ſolidum. Igitur M, N, B, communem habent menſuram tam F, quam G, quam H: Quare ſunt inter ſe compoſiti. Ex quibus liquido conſtat; priorum trium numerorum A, M, N, communes eſſe menſuras C, D, E, latera prioris ſolidi A; At vero F, G, H; latera poſterioris ſolidi B, communes menſuras eſſe poſteriorum trium numerorum M, N, B.

QVIA verò ſolidus numerus tria latera habet, ex quorum mutua multiplicatione gignitur, demonſtremus hoc loco, eundem numerum ſolidum procreari, ſive primum latus ducat

catur in ſecundum; & numerus procreatus in tertium; ſive primum in tertium, & numerus genitus in ſecundum; ſive denique ſecundum in tertium, & productus numerus in primum: Quin etiam, propoſitis quotuis numeris, eundem ſemper numerum gignu ex eorum multiplicatione mutua, quomodocunq; ordinem inter ſe permutent. Qua quidem res magnum uſum habet in rebus Arithmeticis. Proponatur ergo eiuſmodi theorema.

DATIS quotlibet numeris, procreabitur ex eorum mutua multiplicatione idem ſemper numerus, quomodocunque ordinem inter ſe permutent.

SINT primum tres numeri dati A, B, C, & ex A, in B, fiat D; & ex D, in C, fiat E. Dico eundem E, procreari, ſi ex A, in C, fiat F; & F, in B, multiplicetur: Item ſi ex B, in C, fiat G, & G, in A, multiplicetur. Quoniam enim C, multiplicans D, facit E; [a] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [b] ita quoque eſt F, ad A, quòd A, multiplicans C, faciat F. Igitur erit vt E, ad D, ita F, ad A: Vt autem D, ad B, [c] ita eſt A, ad vnitatem; propterea quòd A, multiplicans B, facit D. Igitur ex aequalitate erit, vt E, ad B, ita F, ad vnitatem: [d] atque ideirco numerus ex E, in vnitatem factus, hoc eſt, ipſemet numerus E, aequalis erit numero facto ex B, in F, producto ex A, in C. Quemadmodum igitur numerus E, fit ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, fit ex A, in C, & ex producto in B. Quod eſt primum.

A,	3.	
B,	5.	
C,	8.	
D,	15.	
E,	120.	
F,	24.	
G,	40.	
E,	F,	[d] 19. ſept.
D,	A,	
B,	vnitat.	

[a] 15. defin.
[b] 15. defin.
[c] 15. defin.

RVRSVS quia ex C, in D, fit E; [e] erit vt E, ad D, ita C, ad vnitatem: Sed vt C, ad vnitatem, [f] ita etiam eſt G, ad B, eò quòd G, factus ex B, in C. Igitur erit, vt E, ad D, ita G, ad B: Vt autem D, ad A, [g] ita eſt B, ad vnitatem, propterea quòd D, factus eſt ex A,

E,	G,	[f] 15. defin.
D,	B,	
A,	vnitat.	[g] 15. defin.

[e] 15. defin.

ex A, in B. Igitur ex æquo erit, vt E, ad A, ita G, ad vnitatem: [a] ac proinde numerus factus ex E, in vnitatem, id
[a] 19. sept. est, ipsemet numerus E, æqualis erit numero genito ex A, in G, productum ex B, in G. Quemadmodum igitur E, gignitur ex A, in B, & ex producto in C; ita idem E, procreatur ex B, in C, & ex producto in A. Quod est secundum.

SINT deinde quatuor numeri A, B, C, D: atq; ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, fiat E. Dico eundē E, gigni ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C: Itē ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D. Itē ex A, in C, & ex ꝓducto in D, & ex producto in B: Itē ex A, in D, & ex producto in B, & ex ꝓducto in C: Itē ex A, in D, & ex producto in C, & ex ꝓducto in B: Itē ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex producto in D: Itē ex B, in C, & ex producto in D, & ex ꝓducto in A: Itē ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C: Item ex B, in D, & ex producto in C, & ex producto in A: Item ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B: Item ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A; ita vt præter primam multiplicationem, qua omnes quatuor numeri ordinatim multiplicantur inter se, fiant 11. multiplicationes diuersæ producentes eundem semper numerum. Quoniam enim vt in tribus ostensum est, idem numerus fit, siue genitus numerus ex A, in B, ducatur prius in C, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic productus in C, constat id, quod primo loco proponitur.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

DEINDE quia vt in tribus est ostensum, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex A, in C, & ex producto in B, perspicuum est, eundem numerū gigni tū ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, tū ex A, in C, & ex producto in E, & ex producto in D. quod est secūdū.

TERTIO quoniam, vt in tribus est ostensum, idem numerus procreatur, siue genitus ex A, in C, ducatur prius in B, deinde hic productus in D, siue prius in D, deinde hic ꝓductus in B, patet, eundē generari numerū tū ex A, in C, & ex producto in B, & ex producto in D, tum ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, Cū ergo ille sit æqualis proximè ostēsus primo ꝓducto, erit & hic æqualis eidē, q̄ est tertiū.

QVARTO quia, vt in tribus ostensum est, idē numerus fit ex

fit ex A, in B, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in B, gignetur quoq; idē numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex A, in D, & ex producto in B, & ex producto in C. Sed ille oſtenſus eſt primo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt quartum.

QVINTO quoniā, vt demonſtratū eſt in tribus, idem numerus gignitur ex A, in C, & ex producto in D, qui ex A, in D, & ex producto in C; producetur idē numerus ex A, in C, & ex producto in D, et ex producto in B, qui ex A, in D, & ex producto in C, & ex producto in B. Cū ergo ille ſit oſtenſus tertio loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D; erit & hic eidem æqualis. Quod eſt quintū.

SEXTO, quia, vt in tribus demonſtrauimus, idem numerus fit ex A, in B, & ex producto in C, qui fit ex B, in C, & ex producto in A; liquet eundem procreari numerum tam ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D, quàm ex B, in C, & ex producto in A, & ex producto in D. Quod eſt ſextū.

SEPTIMO quia, vt in tribus oſtēdimus, idē numerus gignitur, ſiue ꝓductus ex B, in C, ducatur prius in A, deinde hic ꝓductus in D, ſiue prius in D, deinde hic ꝓductus in A; cōſtat eūdē numerū fieri ex B, in C, & ex ꝓducto in D, & ex ꝓducto in A, qui fit ex B, in C, & ex ꝓducto in A, & ex ꝓducto in D. Sed hic proximè oſtēſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex ꝓducto in C, & ex ꝓducto in D. Igitur & ille ꝙ eſt ſeptimū.

OCTAVO quia, vt in tribus oſtenſum eſt, idem numerus procreatur ex A, in B, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in A, gignetur quoq; idem numerus ex A, in B, & ex producto in D, & ex producto in C, qui ex B, in D, & ex producto in A, & ex producto in C. Sed ille primo loco oſtenſus eſt æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic. Quod eſt octauum.

NONO quia, vt demonſtratum eſt in tribus, idem numerus fit ex B, in C, & ex producto in D, qui ex B, in D, & ex producto in C; procreabitur idem quoque numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex B, in D, & ex ꝓducto in C, & ex producto in A. Sed ille oſtenſus eſt ſeptimo loco æqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Ergo & hic. Quod eſt nonum.

DECIMO

DECIMO quoniam, vt in tribus est demonstratum, idem gignitur numerus ex A, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in A; producetur quoque idem numerus ex A, in C, & ex producto in D, & ex producto in B, qui ex C, in D, & ex producto in A, & ex producto in B. Sed ille, vt tertio loco est ostensum, aqualis est ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in B. Igitur & hic. Quod est decimum.

A, 2. B, 3. C, 4. D, 5. E, 120.

POSTREMO quoniam, vt ostensum est in tribus, idem numerus gignitur ex B, in C, & ex producto in D, qui ex C, in D, & ex producto in B; procreabitur quoque idem numerus ex B, in C, & ex producto in D, & ex producto in A, qui ex ex C, in D, & ex producto in B, & ex producto in A. Sed ille septimo loco ostensus est aqualis ei, qui fit ex A, in B, & ex producto in C, & ex producto in D. Igitur & hic eidem aqualis erit. Quod est vndecimum.

EODEM argumentandi modo vtendum est in quinq; vel pluribus numeris, dummodo interdum in quinq; assumatur id quod tam in quatuor demonstratum est; & in sex, quod in quinque, &c.

A. B. C. D. E.
A. B. C. E. D.
A. B. E. D. C.
B. C. A. D. E.

Vt in quinque numeris A, B, C, D, E, ap paret, quorum ordinem ter immutauimus, idemque semper numerus ex continua eorum multiplicatione inter se procreatur. Nam productus ex A, in B, cum C, D, E, constituit quatuor numeros. Ergo quemodocunque inter se ordinem permutent, eundem semper gignent numerum: ac proinde tam secundus ordo, quàm tertius, eundem numerum producet, quem primus. Item quia tres numeri A, B, C, quomodocunque ordinem commutent, eundem efficiunt numerum: fit vt quartus ordo eundem prorsus numerum procreet, quem primus, & sic de cæteris.

17.

THEOR. 18. PROPOS. 20.

SI inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; Similes plani erunt illi numeri.

CADAT

CADAT inter A, & B, medius proportionalis C. Dico A, & B, esse planos similes. Sumantur D, & E, minimi in ratione A, C, B. Quia igitur D, E, minimi sunt in ratione A, ad C; [a] metientur D, & E, ipsos A, & C, æque: metiantur per F. Similiter æque metientur ipsos C, & B: metiantur per G. [b] Itaque F, multiplicans D, & E, faciet A, & C: [c] Item G, eosdem D, & E, multiplicans faciet C, & B. Quia ergo E, multiplicans F, & G, fecit C, & B; [d] erit, vt C, ad B, ita F, ad G: Vt autem C, ad B, ita erat D, ad E. Igitur erit vt D, ad E, ita F, ad G; & permutando vt D, ad F, ita E, ad G. Quoniam vero F, multiplicans D, fecit A, erit A, planus, cuius latera D, F. Simili modo, quia G, multiplicans E, fecit B; erit & B, planus cuius latera E, G. Cum ergo hæc latera ostensa sint esse proportionalia, hoc est, D, ad F, vt E, ad G; erunt ex defin. A, B, plani similes. Quare si inter duos numeros vnus, &c. Quod demonstrandum erat.

A, 18. C, 24. B, 32.
D, 3. E, 4. F, 6. G, 8.

[a] 21. sept.
[b] 2. pron.
[c] 2. pron.
[d] 17 sept.

THEOR. 19. PROPOS. 21. 19.

SI inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; Similes solidi sunt illi numeri.

CADANT inter A, & B, duo medij proportionales C, D. Dico A, & B, esse similes solidos. Sumantur tres E, F, G, minimi in ratione A, C, D, B. Quoniam igitur inter E, & G, medius cadit proportionalis F; [e] erunt E, & G, plani similes: sunt ipsius E, latera H, I; ipsius vero G, latera

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.
A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

[e] 20. octa

A, 24. C, 72. D, 216. B, 648.
E, 1. F, 3. G, 9.
H, 1. I, 1. M, 24. K, 3. L, 3. N, 72.

A, 8. C, 12. D, 18. B, 27.
E, 4. F, 6. G, 9.
H, 2. I, 2. M, 2. K, 3. L, 3. N, 3.

latera illis proportionalia K, L. Et quia E, F, G, cum minimi ſint in ratione A, C, D, [a] æque metiuntur ipſos A, C, D, eiuſdem rationis cum illis; metiantur per M. Eodemque modo, [b] quia E, F, G, minimi æque metiuntur C, D, B, eandem habentes rationem cum illis; metiantur per N; [c] ita vt M, multiplicans E, F, G, faciat A, C, D; & N, multiplicans eoſdem E, F, G, faciat C, D, B. Factus eſt autem E, ex multiplicatione mutua ſuorum laterum H, & I; nec non G, ex mutua multiplicatione ſuorum laterum K, & L. Igitur A, producitur ex mutua multiplicatione H, I, M, & B, ex mutua multiplicatione K, L, N; atque adeo A, ſolidus eſt numerus, ex deſin. latera habens H, I, M; & B, ſolidus etiam, latera habens K, L, N. Quia vero M, & N, multiplicantes F, faciunt C, & D, vt oſtendimus; [d] erit C, ad D, vt M, ad N: [e] Sunt autem C, & D, in eadem ratione, in qua E, & F; quòd N, multiplicans E, & F, fecerit ipſos C, & D; Nec non & E, F, eandem habent rationem, quam H, K, vel I, L. Etenim inter planos ſimiles E, G, cadit F, medius proportionalis, per coroll. propoſ. 19. huius lib. in ratione laterum homologorum H, K, vel I, L. Igitur erit quoque H, ad K, & I, ad L, vt M, ad N; & permutando H, ad I, vt K, ad L; & I, ad M, vt L, ad N. Proportionalia ergo ſunt latera H, I, M, lateribus K, L, N; ac propterea ſimiles ſunt numeri ſolidi A, & B. Quam ob rem, ſi inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 21. ſept.
[b] 21. ſept.
[c] 9. prop.
[d] 18. ſept.
[e] 17. ſept.

SCHOLIVM.

DVO exempla appoſuimus, in quorum priori liquido conſtat, unitatem E, eſſe planum numerum, & unitates H, I, eius latera, licet improprie, vt in definitione numeri plani minimi. Si enim unitatem a numeris planis excludamus,

non

non potuimus hac argumentatione Euclidis demonſtrare, numeros A, & B, qui includunt duos medios proportionales C, & D, eſſe ſolidos ſimiles. Quod idem continget in alys omnibus numeris, qui habent duos medios proportionales in ratione multiplici, cuiuſmodi ſunt etiam A, B, in eodem priori exemplo. Hoc autem eſt abſurdum, cum Euclides propoſitionem generaliter proponat, eamque ſine vlla exceptione demonſtret.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 20.

SI tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, ſitque primus eorum A, quadratus. Dico & tertium C, quadratum eſſe. Nam cum
inter A, & C, cadat medius proportionalis B; [a] erunt A, & C, plani ſimiles. Quare exiſtente A, quadrato, erit & C, ei ſimilis, quadratus. Si igitur tres numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod demonſtrandum erat.

A 9, B 54, C 324.

[a] 20. octaui

THEOR. 21. PROPOS. 23. 21.

SI quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit cubus; Et quartus cubus erit.

SINT quatuor numeri A, B, C, D, proportionales continue, & A, primus ſit cubus. Dico & quartum D, cubum eſſe. Cum enim inter
A, & D, cadant duo medij proportionales B, C;
ei unt A, & D, ſolidi ſimiles. Quare exiſtente A, cubo, erit & D, illi ſimilis, cubus. Quã ob rẽ, ſi quatuor numeri deinceps ſint proportionales, &c. Quod erat oſtendendũ.

A 27, B 45, C 75, D 125,

[b] 21. octaui

SCHOLIVM.

HAEC est apud omnes interpretes Euclidis, quos ego vidi, vulgata demonstratio præcedentium duarum propositionum, quam qui diligẽter examinare velit, inueniet sane mẽdacem esse, & imperfectam. Cum enim ad defin. 21. lib. 7. tradiderimus, duos numeros plano, vel solidos posse similes esse, quamuis non quibuscunque lateribus vnius exhiberi possint alia latera alterius proportionalia, dummodo quibusdam lateribus vnius proportionalia sint quædam alterius, iure optimo quis inficiari poterit, si duorum planorum similium vnum fuerit quadratus, alterum quoque quadratum esse, & si duorum similium solidorum vnus cubus fuerit, alterum etiam esse cubum: quod tamen in demonstratione pro concesso, atque omnibus perspicuo assumebatur. Nam positis duobus numeris planis 36. & 64. similibus, satis est, vt duobus lateribus prioris, qualia sunt 3. & 12. exhibeantur alia duo latera posterioris, numerum 4 & 16. proportionalia. Vnde etiamsi prior sit quadratus, habens duo latera æqualia 6. & 6. merito dubitare quis possit, immo omnino negare, posteriorem habere alia duo latera his proportionalia, hoc est, inter se quoque æqualia, atque adeo esse quadratum: quemadmodum etiam manifestum est, hisce lateribus prioris 4. & 9. vel 2. & 18. non respondere alia latera in posteriori proportionalia. Si igitur his lateribus prioris numeri non reperiuntur alia latera in posteriori proportionalia, quamquam ipsi numeri sint similes, cur sine demonstratione vlla concedemus, his lateribus prioris æqualibus 6. & 6. assignari posse in posteriori alia duo proportionalia, videlicet & inter se æqualia? Idem dicendum est de solidis similibus. Quapropter vtramque propositionem Euclidis aliter demonstrabimus, ad hunc, qui sequitur, modum.

SINT tres numeri A, B, C, continue proportionales, & primus A, quadratus. Dico & C, tertium esse quadratum. Sumpto enim D, latere quadrati A, cum D, ex defin. in se faciat A; erunt D, & A, ex scholio propos. 9 huius lib. ab vnitate continue proportionales; eritque conuertendo A, ad D, vt D, ad vnitatem, atque adeo cum inter numerum A, eundem, & eam numerum C, quam vnitatem, cadant

A, 36. B, 48. C, 64.
D, 6. E, 8.
vnitas

cadant medij proportionales multitudine æquales, numerum vnus; cadent quoque totidem, ex theor. 3. scholij propos. 10. huius lib. inter unitatem, atque C, numerum, numerum vnus, qui sit E. Quoniam igitur unitas & E, C, numeri sunt continue proportionales, producetur C, ex E, in se ipsum, ex scholio propos. 10. huius lib. Ac proinde C, quadratus erit, ex defin. cuius latus E.

ALITER. Sumptis tribus numeris D, E, F, minimis in ratione A, ad B, & B, ad C, metietur D, ipsum A, & F, ipsum C, æque, ex iis, quæ ostendimus ad propos. 21. lib. 7. Et quoniã extremi D, F, minimorũ trium numerorũ, per coroll. 1. propos. 2. huius lib sunt quadrati. Est autem & A, quadratus, ex hypothesi, [a] cadet inter A, & D, quadratos medius vnus proportionalis, vt G. Quia vero est, ex æquo, vt A, ad C, ita D, ad F, & permutando, vt A, ad D, ita C, ad F, [b] cadet quoque inter C, & F, vnus proportionalis medius, numerus H. Cum ergo E, primus metiatur C, vltimum; [c] metietur idem & secundum H. Sumpto autem I, latere quadrati F, metiatur I, toties numerum K, quoties F, ipsum H, metitur, ita vt H, ad F, & K, ad I, eandem habeant proportionem multiplicem. Sit quoque L, quadratus ipsius K. [d] Itaque quia ratio L, ad F, quadrati ad quadratum, duplicata est rationis K, ad I, lateris ad latus, hoc est, H, ad F: Est autem & ratio C, ad F, eiusdem rationis H, ad F, ex defin. duplicata, quòd conuertendo sint proportionales etiam C, H, F, erit I, ad E, vt C, ad F, Ac proinde I, & C, æquales sunt. Existente ergo L, quadrato, ex constructione, & C, quadratus erit.

A, 36.	B, 48.	C, 64.	
G, 18.		H, 32.	[a] 11. octaui
D, 9.	L, 12.	F, 16.	
L, 64.	K, 8.	I, 4.	

[b] 8. octaui

[c] 7. octaui

[d] 11. octaui

ALITER. [e] Quoniam A, & C, similes plani sunt, sint eorum latera proportionalia, D, E, quidem ipsius A, at F, G, ipsius C, ita vt sit D, ad E, sicut F, ad G: assumaturque H, latus quadratum A. Quoniam igitur idem numerus A, producitur ex D, in E, & ex H, in se, [f] erunt D, H, E, continue proportionales. Cum ergo sit F, ad G, vt D, ad E, cadatque inter D, & E, me-

[e] 20. octaui

A, 36.	B, 48.	C, 64.	
H, 6.		I, 8.	
D, 3.	E, 12.	F, 4. G, 16.	

[f] 20 sept.

a 8. octaui. dius proportionalis H,[a] cadet quoque inter F, & G, vnus medius proportionalis, qui sit I. Quare cum F, I, G, sint continue proportionales; idē numerus fiet ex F, in G, qui ex I, in se ipsum. Est autem C, ex F, in G. Igitur & idem C, fiet ex I, in se ipsum: Atque adeo C, quadratus erit, ex definitione, cuius latus I.

b 20 sept. A,36. B,48. C,64. H,6. I,8. D,6. E,6. F,8. G,8.

SINT rursum quatuor numeri A, B, C, D, continue proportionales, & A, primus, sit cubus. Dico & D, quartum, cubum esse. Sumpto enim E, latere cubi A, fiat ex E, in seipsum numerus F, ac proinde, ex defin. ex E, in F, cubus A. Quia ergo E, in se facit F, & in F, facit A; erunt, ex scholio propos. 7. huius lib. E, F, A, continue proportionales ab vnitate, atque adeo conuertendo proportionales quoque erunt numeri A, F, E, & vnitas. Itaque cum inter numerum D, & vnitatē, ac eundem numerum A, cadant medij proportionales multitudine æquales, videlicet duo, cadent, ex theorem. 3. scholij propos. 20. huius lib. eosdem medij inter vnitatem, & numerum D, qui sint G, H. Itaque quia vnitas, & numeri G, H, D, continue sunt proportionales: fiet H, ex G, in se, & D, ex G, in productum H, vt ad propos. 18. huius lib. a nobis est demonstratū. Quare D, cubus, est, ex definitione, cuius latus G.

A,64. B,160. C,400. D,1000. F,16. H,100. E,4. G,10. vnitas.

ALITER. Inuentis quatuor numeris minimis E, F, G, H, in ratione A, ad B, & B, ad C, & C, ad D, meminerimus E, ipsum A, & H, ipsum D, æque, per ea, quæ ad propos. 21. lib. 7. demonstrauimus. Et quia E, H, extremi quatuor numerorum, cubi sunt, ex 1. coroll. propos. 2. huius lib. Est autē & A, cubus, ex hypothesi,

c 12. octaui K,32. I,16. E,8. F,20. G,50. H,125. P,1000. O,10. N,5. M,500. L,250.

[c] cadent inter E, A, cubos duo medij proportionales, qui sint I, K. Quoniam autem, ex æquo, est vt A, ad D, ita E, ad H, & per-

& permutando, vt A, ad E, ita D, ad H; [a] *eadem quoque inter H, D, duo media proportionales, quæ ſint L, M. Cum ergo H, primus metiatur D, extremum,* [b] *metietur idem & L, ſecundum. Sumpto deinde N, latere cubi H, metiatur N, toties numerum O, quoties H, ipſum L, ita vt L, ad H, & O, ad N, eandem habeant proportionem multiplicem: ſit quoque P, cubus ipſius O. Itaque cum ratio P, ad H, cubi ad cubum, triplicata ſit rationis O, ad N, lateris ad latus, hoc eſt L, ad H: Sit autem & ratio D, ad H, eiuſdem rationis L, ad H, ex defin. triplicata; quod conuertendo proportionales etiam ſint D, M, L, H, vt P, ad H, vt D, ad H; Ac propterea P, & D, æquales inter ſe. Quare cum P, cubus ſit, ex conſtructione, cubus quoque erit D.*

[a] 8. octaui

[b] 7. octaui.

[c] 12. octaui

THEOR. 22. PROPOS. 24. 22.

SI duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, primus autem ſit quadratus, & ſecundus quadratus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, quadratus ad quadratum D; ſitque A, quadratus. Dico & B, eſſe quadratũ. Cum enim ſit A, ad B, vt C, ad D; [d] cadat autem inter C, & D, quadratos vnus medius proportionalis, vt delicet E; [e] cadet quoque inter A, & B, medius vnus qui ſit F. Quia igitur tres numeri ſunt continue proportionales A, F, B; & A, primus eſt quadratus; erit & B, tertius, quadratus. Quare ſi duo numeri rationem habeant inter ſe, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, &c. Quod erat oſtendendũ.

A, 36. F, 48. B 64.
C, 9. E, 12. D, 16.

[d] 11. octaui

[e] 8. octaui.

[f] 22. octaui

COROLLARIVM.

LIQVET ex his, proportionem cuiuſuis numeri quadrati ad quemlibet numerum non quadratum

exhiberi nullo modo posse in duobus numeris quadratis. Si enim exhiberetur, [a] essent ambo priores numeri habentes proportionem, quam quadrati proportionis exhibitæ, etiam quadrati, cum primus ponatur quadratus. Quod est absurdum. Ponitur enim secundus, non quadratus. Vnde numeri in dupla proportione, proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum: Si enim haberent, essent omnes hi dupli numeri 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c. quadrati. Primo enim 4. existente quadrato, [b] esset & 8. quadratus. Igitur & 16. & 32. &c. quod est absurdum. [c] Nam inter 4. & 8: & inter 8. & 16. & inter 16. & 32. &c. caderet medius proportionalis si essent quadrati: cum tamen in scholio propos. 8. huius lib. demonstratum sit, inter numeros duplæ proportionis quosuis non posse cadere medium proportionalem.

SIMILI modo numerum quintuplæ proportionis proportionem non habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. Si enim haberent, [d] caderet inter eos medius proportionalis. [e] Igitur & inter 5. & 1. minimos numeros quintuplæ proportionis. quod fieri non posse, demonstratum a nobis est in scholio propos. 8. huius lib.

[a] 24. octaui

[b] 24. octaui

[c] 11. octaui

[d] 11. octaui

[e] 8. octaui

23. THEOR. 23. PROPOS. 25.

SI duo numeri rationem inter se habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, primus autem sit cubus, & secundus cubus erit.

SIT enim A, ad B, vt C, cubus ad D, cubum; sitq; A, cubus. Dico & B cubum esse. Cum enim sit A, ad B, vt C, ad D; [f] cadant autem inter C, & D, cubos duo medij proportionales, qui sint E, F; & cadent quoque

A. 8. G, 12. H, 18. B, 27.
C, 64. E, 96. F, 144. D, 216.

[f] 12. octaui

[g] 8. octaui

quoque inter A, & B, duo medij, qui ſint G, H. Quia igitur quatuor numeri A, G, H, B, ſunt continue proportionales, & A, primus eſt cubus; [a] erit & B, quartus cubus. Quocirca, ſi duo numeri rationem inter ſe habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, &c. Quod demonſtrandum erat. [a] 23. octaui

COROLLARIVM.

PATET etiam ex his, proportionem cuiuſuis numeri cubi ad quemlibet numerum non cubum, non poſſe reperiri in duobus numeris cubis. Si enim reperiretur, [b] *eſſent ambo priores numeri habentes proportionem, quam cubi proportionis reperti, etiam cubi, cum primus ponatur cubus. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim ſecundus, non cubus.* [b] 23. octaui

THEOR. 24. PROPOS. 26. 24.

SIMILES plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

SINT plani ſimiles A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita aliquem numerum quadratum ad alium quendã quadratum. Cum enim A, & B, ſint plani ſimiles; [c] cadet inter eos vnus medius proportionalis, videlicet C. Sumptis ergo tribus numeris D, E, F, minimis in ratione cõtinua A, G, B; erunt extremi D, & F, quadrati, ex coroll. 1 propos. 2. huius lib. Quare cum ſit, ex æquo A, ad B, vt D, ad F, manifeſtum eſt, ita eſſe A, ad B, vt eſt quadratus aliquis, videlicet D, ad quadratum alium, vt ad F. Ergo

A, 20.	C, 30.	B, 45.
D, 4.	E, 6.	F, 9.

[c] 18. octaui

similes plani numeri rationē inter se habent, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM

FACILE etiam demonstrabimus conuersum huius, videlicet.

NVMERI, quī proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, similes plani sunt.

HABEANT numeri A, B, proportionem inter se, quam quadrati C, D. Dico A, B, esse planos similes. [a] *Quoniam enim inter quadratos C, D, cadit unus medius proportionalis: Et est, vt C, ad D, ita A, ad B,* [b] *cadet quoque medius proportionalis inter A, & B.* [c] *Quare A, & B, plani similes sunt.*

A, 8. B, 18. C, 16. D, 36.

[a] 18. octaui
[b] 8. octaui
[c] 20. octau.

EX hoc perspicuum est planos numeros, qui similes non sunt, proportionem non habere, quam quadratus ad quadratum. Si enim haberent; essent, vt modo demonstratum est, plani similes. quod est absurdum. ponuntur enim non similes.

25. THEOR. 25. PROPOS. 27.

SIMILES solidi numeri rationem habent inter se, quam cubus numerus ad cubum numerum.

SINT similes solidi A, B Dico esse, vt A, ad B, ita cubum quempiam numerum ad alium quendam cubum. Quia enim A, B, sunt solidi similes; [d] cadent inter eos duo medij proportionales. qui sint C, D. Sumptis autem quatuor numeris E, F, G, H, minimis in continua proportione A, C, D, B; erūt extremi E, H, ex coroll. 1 propos. 2 huius

[d] 19. octaui

huius lib. cubi. Quare, cum ex æquo ſit A, ad B, vt E, ad H; conſtat ita eſſe A, ad B, vt eſt cubus aliquis, nimirum E, ad alium cubum, videlicet ad H. Similes ergo ſolidi numeri rationem habent inter ſe, &c. Quod erat oſtendendum.

A, 240. C, 360. D, 540. B, 810.
E, 8. F, 12. G, 18. H, 27

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius etiam demonſtrabimus; ſcilicet.

NVMERI, qui proportionem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum, ſunt ſolidi ſimiles.

NVMERI enim A, B, proportionem habeant inter ſe, quam cubi C, D. Dico A, B, ſolidos eſſe ſimiles. Nam cum ſit A, ad E, vt C, ad D, [a] cadant autem inter C, D, cubos duo medij proportionales; [b] cadent quoque inter A, B, duo medij. [c] Sunt ergo A, & B, ſolidi ſimiles.

A, 16. B, 54.
C, 24. D, 216.

[a] 12. octaui
[b] 8. octaui
[c] 27. octaui

EX hu omnibus perſpicue infertur, nullos numeros habentes duplam proportionem, vel ſuperparticularem, vel ſuperbipartientem, eſſe ſimiles planos, vel ſolidos. Si enim eſſent ſimiles plani, [a] caderet inter eos medius vnus proportionalis, quod fieri non poſſe, tam dudum oſtenſum eſt in ſcholio propoſ. 8 huius lib. Eadem ratione non erunt ſimiles ſolidi, cum inter eos cadere non poſſint duo medij proportionales. [c] Nam alias caderent quoque duo medij inter minimos earũdem proportionum numeros. Quod fieri non poteſt, quod hi vel ſola vnitate, vel certe binario tantum inter ſe diſtent, vt in ſcholio prædicto traditum eſt, inter quos certum eſt, non poſſe intercipi duos numeros, neàum duos medios proportionales.

[a] 18. octaui
[c] 8. octaui

SIMILITER nec duo quiuis numeri primi eſſe poſſunt plani ſimiles, vel ſolidi, cum non poſſint habere latera proportionalia. Nam quilibet numerus planus, qui ſit nume-

rus primus, latera habet ſolummodo vnitatem, & ſeipſum; quamuis improprie. Vt bi numeri plani 19. & 23. latera habent 1. 19. & 1. 23. cum ex horum mutua multiplicatione producantur, quæ conſtat non eſſe proportionalia. Quuis vero numerus ſolidus, qui numerus etiam primus ſit, latera tantum habet duas vnitates, & ſe ipſum. Vt bi numeri ſolidi 29. & 47. latera habent 1. 1. 29. & 1 1. 47. cum ex mutua horum multiplicatione producantur. Perſpicuum autem eſt, ea non poſſe eſſe proportionalia.

RVRSVS neque duo quicunque numeri inter ſe primi, qui quadrati non ſint, vel cubi, (quamuis neuter eorum primus ſit) plani ſimiles, vel ſolidi ſimiles eſſe poſſunt. Si enim duo huiuſmodi numeri inter ſe primi, dicantur eſſe plani vel ſolidi ſimiles, [a] cadet inter illos vnus medius proportionales, vel duo. Cum ergo extremi duo ponantur inter ſe primi, erunt omnes tres, vel quatuor inter ſe primi, cum nullus numerus illos omnes, tanquam communis menſura metiri poſſit, propter duos extremos inter ſe primos. Quare minimi erunt continuè proportionales, vt in ſcholio propoſ 24. lib. 7. demonſtrauimus. Ac propterea ex coroll. 1. propoſ. 2. huius lib. extremi duo quadrati erunt, vel cubi. quod abſurdum eſt. Ponuntur enim neque quadrati, neque cubi.

[a] 18. & 19. octaui

EX his ſequitur, ſi duo numeri ſint plani, vel ſolidi ſimiles, quorum minor ſit primus, minorem numerare maiorem. Nam ſi eum non numeraret; [b] eſſent duo propoſiti numeri inter ſe primi: ac proinde, vt proximè oſtendimus, non poſſent eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. quod abſurdum eſt, & contra hypotheſim. Verum hoc oſtenſiuè quoque ita demonſtrabimus. Sint primum duo numeri plani ſimiles A, B, ſitq; A, minor, primus. Dico A, ipſum B, metiri. Nam cum A, & B, ponantur plani ſimiles, habebunt latera proportionalia. Cum ergo latera numeri primi A, ſint C, vnitas, & numerus D, ipſi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter C, vnitatem, & numerum D, ipſi A, æqualem, metiatur primum numerum A: ſint E, F, latera numeri B, lateribus C, D, proportionalia, ita vt ſit C, ad E, vt D, ad F. Erit igitur per mutando C, ad D, vt E, ad F. [c] Igitur numeri

A, 3. B, 48.
C, 1. D, 3. E, 4. F, 12.

[b] 31. ſept.

[c] 19. ſept.

rus

vus factus ex C, primo in F, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in E, tertiũ: Fit autem ex C, vnitate in F ipse met numerus F. Idem ergo numerus F, fit ex D, in E. [a] Quare D, ipsum F, metietur: [b] Metitur autem F, ipsum B, quod B, gignatur ex E, in F, [c] Igitur & D, id est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum.

a 4. prom.
b 4. prom.
c 11. prom.

HINC Perspicuum est, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse plano similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem, vt proximè ostendimus. Cum ergo & seipsum metiatur, non essent inter se primi, sed compositi. quod est contra hypothesim.

SINT deinde duo solidi similes A, B, sitque A, minor primus. Dico A, ipsum B, metiri; Nam cum A, & B, sint solidi similes, habebunt latera proportionalia. Sint ergo latera numeri primi A, sint B, C, vnitates, & numerus D, ipsi A, æqualis, quòd nullus alius numerus, præter vnitatem, & numerum D, ipsi A, æqualem, metiatur numerum primum A: sint E, F, G, latera numeri B, lateribus B, C, D, proportionalia, ita vt sit B, ad E, vt C, ad F; & D, ad G.

A, 3. B, 24. B, 1. C, 1. D, 3. E, 2. F, 2 G, 6.

Quia igitur est C, ad F, vt D, ad G; erit permutando C, ad D, vt F, ad G. [d] Igitur numerus factus ex C, primo in G, quartum æqualis erit ei, qui fit ex D, secundo in F, tertium: Fit autem ex C, vnitate in G, ipsemet numerus G. Idem ergo numerus G, fiet ex D, in F. [e] Quare D, ipsum G, metietur. [f] Metitur autẽ G, ipsum B, quòd G, latus sit ipsius B. [g] Igitur & D, hoc est, A, illi æqualis, eundem B, metietur. quod est propositum.

d 19. sept.
e 4. prop.
f 4. prom.
g 11. prop.

ATQVE ex hoc etiam constat, duos numeros inter se primos, quorum minor primus sit, non posse esse solidos similes. Nam si essent similes, metiretur minor maiorem; vt proximè ostendimus. Cum ergo & se ipsum metiatur, non essent inter se primi, sed inter se compositi. quod est contra hypothesim.

ITAQVE facilis admodum est inuentio duorum planorum, vel solidorum non similium. Si enim accipiantur duo numeri habentes proportionem duplam, vel superpartientem, vel certe duo numeri primi, vel duo inter se primi, quorum neutr quadratus sit, aut cubus; erunt

erunt illi ipſi per ea, quæ tradita ſunt, plani ſeu ſolidi non ſimiles.

RVRSVS quilibet duo numeri, quorum alter quadratus ſit, alter uero non quadratus, plani ſunt non ſimiles, quales ſunt 16. & 20. Si enim eſſent plani ſimiles, [a] haberent proportionem, quam quadratus ad quadratum. Exiſtente igitur 16. quadrato, [b] eſſet & 20. quadratus, quod eſt abſurdum. ponitur enim non quadratus.

[a] 26. octaui

[b] 24. octaui

PARI ratione quilibet duo numeri, quorum alter cubus ſit, alter uero non cubus, ſolide ſunt non ſimiles, ut 27. & 40. Si enim eſſent ſolidi ſimiles, [c] haberent proportionem, quã cubus ad cubum. Cum igitur 27. cubus ſit, [d] eſſet & 40. cubus. quod eſt abſurdum. ponitur enim non cubus.

[c] 27. octaui

[d] 33. octaui

FINIS ELEMENTI OCTAVI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM NONVM.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

I.

SI duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant quendam; Productus quadratus erit.

DVO numeri plani ſimiles A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C Dico C, quadratum eſſe. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, quadratum. Quoniam igitur A, multiplicãs A, & B, produxit D, & C, [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. At inter A, & B, cum ſint plani ſimiles [b], vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter D, & C, vnus medius proportionalis cadet. Cadat ergo E, vt ſint continue proportionales D, E, C. Itaq; cũ tres D, E, C, continue ſint proportionales, ſitq; primus D, quadratus, ex conſtructione; [d] erit quoque C, tertius, quadratus. Si duo ergo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo, &c. Quod erat demonſtrandum.

A, 6. B, 54.
D, 36. E, 108. C, 324.

[a] 17. ſeptimi.
[b] 18. octaui
[c] 8. octaui
[d] 22. octaui

THEO-

2.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum; ſimiles plani erunt.

DVO numeri A, B, ſe mutuo multiplicantes faciant C, quadratũ. Dico A, B eſſe ſimiles planos. Multiplicans enim A, ſe ipſum faciat D, quadratũ.

A,6. B,54. D,36. C,324.

Quoniam igitur A, multiplicãs A, & B fecit D, & C; [a] erit vt A, ad B, ita D, ad C. [b] At inter D, & C, quadratos vnus medius cadit proportionalis. [c] Igitur & inter A, & B vnus medius proportionalis cadet; [d] Ac propterea A, & B, ſimiles plani ſunt. Quare ſi duo numeri ſe mutuo multiplicantes, &c. Quod demonſtrandũ erat.

17 ſept. a. octaui

11. octaui b.

8. octaui c.

20. octaui d.

SCHOLIVM.

EX his demonſtrabimus quatuor inſequentia theoremata non inutilia.

I.

SI duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes faciant quempiam: Productus quadratus erit.

DVO quadrati A, B, ſe mutuo multiplicãtes faciãt C. Dico C, eſſe quadratum.

A,4. B,25. C,100.

Cum enim A, & B, ſint ſimiles plani, nimirum quadrati; [a] erit C, ex eis productus, quadratus,

1. noni a.

II.

SI duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant

ciant quadratum; alter autem sit quadratus; Et reliquus quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratum; sitque A, quadratus.
Dico & B, quadratum esse. Cum enim A, & B, se mutuo multiplicantes faciant C, quadratũ:[a] erunt A, & B, similes plani:[b] atque adeo inter eos vnus medius cadet proportionalis, videlicet D.[c] Quare A, existente quadrato, erit & B, quadratus.

A, 9. D, 12. B, 16. C, 144.

[a] 8. noni
[b] 18. octaui
[c] 22. octaui

III.

SI duo numeri se mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem sit quadratus; Reliquus non quadratus erit.

DVO numeri A, B, se mutuo multiplicantes faciant C, non quadratum, sitque A, quadratus.
Dico B, non quadratum esse. Si enim B, dicatur esse quadratus, erit & C, productus ex quadratis A, B, quadratus, per theor. 1. huius scholy, Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur quadratus est B, numerus.

A, 4. B, 20. C, 80.

IIII.

SI duo numeri, quadratus & non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant aliquem; Productus non quadratus erit.

DVO numeri A, quadratus, & B, non quadratus, se mutuo multiplicantes faciant C. Dico C, non esse quadratum. Nam si C, foret quadratus, cum producatur ex A, in B, sitque A, quadratus; esset & B, ex theor. 2. huius scholy, quadratus. Quod est absurdum, & contra hypothesim. Non igitur C, quadratus erit.

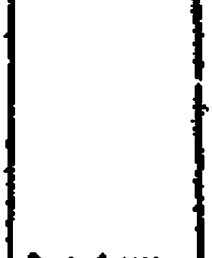
A, 9. B, 20. C, 180.

THEO-

3.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; Productus cubus erit.



FACIAT cubus A, ſeipſum multiplicans numerũ B. Dico B, eſſe cubum. Sit enim C, latus cubi A; & ex C, in ſe fiat D, & ideirco ex C, in D, ipſe cubus A, gignatur. Quia igitur C, ſeipſum multiplicãs fecit D: [a] metietur C, ipſum D, per C; [b] Metitur autem & vnitas ipſum C, per C. Igitur eadem pars eſt vnitas ipſius C, quæ C, ipſius D, nimirum denominata a C; Ac proinde [c] vt vnitas ad C, ita C, ad D. Rurſus quia C, multiplicans D, fecit A; [d] metietur D, ipſum A, per C, Metiebatur autem & C, ipſum D, per C. Eadem ergo pars eſt C, ipſius D, quæ D, ipſius A; [e] ideoque vt C, ad D, ita D, ad A: ſed vt C, ad D, ita erat vnitas ad C. Igitur vt vnitas ad C, ita C, ad D, & D, ad A; Atque adeo inter vnitatem & numerum A, duo medij proportionales cadunt numeri C, D. [f] At quia A, ipſum B, metitur per A, quod A, ſe ipſum multiplicans fecerit B; [g] metitur vero & vnitas ipſum A, per A; Eadem erit pars vnitas ipſius A, quæ A, ipſius B; [h] Ac propterea erit vt vnitas ad A, ita A, ad B. Quare cum inter vnitatem & numerum A, cadant duo medij proportionales C, & D; [i] cadent totidem inter A, & B, nimirũ E, & F. Cũ ergo quatuor numeri A, E, F, B, ſint continue proportionales, & A, primus ſit cubus, [k] erit quoque B, quartus cubus. Si cubus igitur numerus ſe ipſum multiplicans, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 7. pron.
[b] 5. pron.
[c] 20 defin.
[d] 7. pron.
[e] 20. defin.
[f] 7. pron.
[g] 5. pron.
[h] 10. defin.
[i] 8. Octaui.
[k] 23. Octaui.

4.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI cubus numerus cubum numerum multi-

multiplicans faciat aliquem; Factus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in cubum B, numerus C. Dico C, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D; [a] erit q. D, cubus. Quoniá vero A multiplicans A, & B, fecit D, & C; [b] erit vt A, ad B, ita D ad C. [c] At inter A, & B, cubos duo medij proportionales cadunt. [d] Igitur & inter D, & C, duo medij proportionales cadent; [e] Ac propterea D, existente cubo, & C, cubus erit. Quocirca si cubus numerus cubũ numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 3. noni.
A, 8. B, 27. D 64. C, 216.
[b] 17. sept.
[c] 12. octaui
[d] 8. octaui.
[e] 23. octaui

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, numerus cubus C. Dico & B, cubum esse. Multiplicans enim A, se ipsum faciat D, [f] qui cubus erit. Quoniam igitur A, multiplicans A, & B, fecit D, & C, [g] erit vt A, ad B, ita D, ad C, [h] At inter D, & C, cubos duo cadunt medij proportionales. [i] Totidem igitur & inter A, & B, cadent; [k] Ac proinde existente A, cubo, & B, cubus erit. Quamobrem si cubus numerus numerum quendam multiplicans, &c. Quod ostendendum erat.

[f] 3. noni.
A, 8. B, 27. D, 64. C, 216.
[g] 17 sept.
[h] 12. octaui
[i] 8. Octaui
[k] 23. octaui

SCHOLIVM.

EX his & hæc, quæ sequuntur, facile demonstrabuntur, videlicet.

I

SI cubus numerus non cubum numerum

multiplicans faciat aliquem; Factus non cubus erit.

FIAT ex A, cubo in B, non cubum numerus C. Dico C, non eſſe cubum. Si enim C, ſit cubus; [a] *& multiplicatus B, cubus erit, quod non ponitur.*

A,8. B,20. C,160.

[a] 5. noni

II.

SI cubus numerus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit.

FIAT ex cubo A, in numerum B, non cubus C. Dico & B, non eſſe cubum. Si namque B, ſit cubus, [b] *& factus C, cubus erit, quod eſt contra hypotheſim.*

A,8. B,17. C,136.

[b] 4. noni

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat: Et ipſe cubus erit.

MVLTIPLICANS ſeipſum numerus A, faciat B, cubũ. Dico & A, cubũ eſſe. Fiat enim ex A, in B, numerus C, qui cubus erit, cum A, in ſe faciat B, & ipſe C, ex A, in B, gignatur; atque adeo æqualis æqualiter æqualis ſit, vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ ad definitionem cubi ſcripſimus. Quia igitur B, cubus multiplicans numerum quempiam A, facit cubum C, erit & A, cubus. Quare ſi numerus ſeipſum multiplicans cubum faciat, &c. Quod erat demonſtrandum.

A,8. B,64. C,512.

[c] 5. noni

SCHOLIVM.

ALIAM demonſtrationem interpretes Euclidis hoc loco

loco adducunt, & quidem longiorem. Postquam enim demonstrarunt C, factum ex A, in B, esse cubum, inferunt. [a] Ergo inter B, & C, cubos duo medij proportionales cadunt. [b] Quoniam vero est vt B, ad C, ita A, ad B, quòd A, multiplicans A, & B, ipsos B, & C, fecit, [c] cadent quoque inter A, & B, duo medij proportionales. [d] Atque adeo existente B, cubo, & A, cubus erit. Verum nostra demonstratio breuior est, & planior, vt perspicuum est.

A, 8. B, 64. C, 512.

[a] 12. Octaui
[b] 17. sept.
[c] 8. octaui
[d] 23. octaui

THEOR. 7. PROPOS. 7. 7.

SI compositus numerus numerum aliquem multiplicans, quempiam faciat: Factus solidus erit.

NVMERVS compositus A, multiplicans numerum quemlibet B, faciat C. Dico C, esse solidum Cum enim A, sit compositus, [e] metietur eum, præter vnitatẽ, numerus aliquis metiatur D, ipsum A, per E Quo posito, [f] multiplicante D, ipsum E, producetur A. Cum ergo B, ipsum A, multiplicãs fecerit C; procreabitur C, ex mutua multiplicatione trium numerorũ D, E, B; Ac propterea solidus erit ex defin cuius latera D, E, B. Quapropter si compositus numerus numerum aliquem multiplicans, &c. Quod erat ostendendum.

A, 6. B, 11. C, 66. D, 2, E, 3.

[e] 13. defin.
[f] 9 pron.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint: Tertius quidem ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes omnes: Quartus autem est cubus, & duos intermittẽtes omnes: Septimus vero cubus simul, & quadratus, & quinque intermittẽtes omnes.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A,B.C,D,E,F,G,H,I,K,L,M. Dico tertiũ quidẽ B,ab vnitate esse quadratũ,& vnũ intermittẽtem

Vnitas. A,3 B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187. H,6561 I,19683.I,K.59049. L,177147. M,531441.

omnes,quales sunt D,F,H.K.M: Quartum autem C,cubum,& duos intermittentes omnes,cuiusmodi sunt F,I, M:septimum vero F,cubũ simul,& quadratum, & quinque intermittentes omnes, nimirum M Quoniam enim est vnitas ad A, vt A, ad B;æque metietur vnitas numerum A,& numerus A,numerum B. [a] Metitur autem vnitas numerum A,per A.Ergo & A,ipsum B,per A,metietur; [b] Atque adeo A,multiplicans A,ipsum B,producet. Quare B.quadratus est. Quia vero tres deinceps proportionales sunt B,C,D,& est B,quadratus; [c] erit & D,quadratus Eadem ratione assumptis tribus deinceps proportionalibus D,E,F.cum D.sit quadratus, [d] & F. quadratus erit;Nec non & omnes vnum intermittentes.

RVRSVS quia est vnitas ad A, vt B, ad C; æque metietur vnitas numerũ A,& numerus B, numerũ C; [e] Metitur autem vnitas ipsum A,per A.Igitur & B,ipsum C, per A, metietur; [f] atque adeo B, ipsum A, multiplicans procreabit numerum C.Quare cum A, seipsum multiplicans faciat B,multiplicans vero B,faciat C,vt est ostensum;erit C,cubus.Quia vero quatuor deinceps proportionales sunt C,D,E,F,& est C,cubus; [g] erit & F,cubus. Eodem argumento, assumptis quatuor deinceps proportionalibus I,G,H,I, cum F, sit cubus; [h] & I, cubus erit; atque omnes semper duos intermittentes.

POSTREMO quia F,septimus ab vnitate ostensus est & quadratus, & cubus: ipse erit cubus simul & quadratus: Atque eodem modo M, septimus ab F, intermissis nimirũ quinque G, H, I,K, L, cubus erit simul & quadratus;Nec non & omnes quinque intermittẽtes. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales sucrint,&c Quod erat demonstrandum.

[a] 5. pron.
[b] 9. pron.
[c] 22. octani
[d] 22. octani
[e] 5. pron.
[f] 9. pron.
[g] 23. octani
[h] 23. octani

SCHO-

SCHOLIVM.

HOC theorema poteſt quoque hoc modo proponi.

SI ſint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, nono, vndecimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime numeros poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, duodecimo, decimoquinto, decimooctauo, & alijs, quę ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri quartus, ſeptimus, decimus, tertiusdecimus; decimusſextus, decimusnonus, &c. ſunt cubi. Omnes vero qui proxime ſequuntur numeros poſitos in locis ſexto, duodecimo, decimooctauo, vigeſimoquarto, & alijs, quę metitur ſenarius, quales ſunt ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, vigeſimus quintus, &c. ſunt cubi ſimul, & quadrati.

NAM primi ordinis numeri omnes ſemper vnum intermittunt poſt tertium ab vnitate: At ſecundi ordinis numeri omittunt ſemper duos numeros poſt quartum ab vnitate, Numeri denique tertij ordinis quinque ſemper interponunt poſt ſeptimum ab vnitate, quemadmodum in theoremate proponit Euclides.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 9.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero poſt vnitatem ſit quadratus, Et reli-

qui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

SINT ab vnitate continue proportionales numeri quotcunque A, B, C, D, E, F, ſitque primum A, proximus

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256, E, 1024. F, 4096.

vnitati quadratus. Dico & reliquos omnes quadratos eſſe. Quod enim tertius ab vnitate, & omnes vnum intermittentes, quales ſunt B, D, F, quadrati ſint, [a] iam demonſtratum eſt. Quod vero & reliqui intermedij C, & E, quadrati ſint, ita perſpicuum fiet. Cum tres continue propor

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

tionales ſint A, B, C; ſitque A, quadratus; erit & C, quadratus. Eodemque modo, aſſumptis tribus continue proportionalibus C, D, E, tũ C, ſit quadratus; & E, quadratus erit. Omnes igitur A, B, C, D, E, F, quadrati ſunt. Idẽ oſtẽdemus, ſi plures numeri ſint cõtinue proportionales.

SIT iam A, proximus vnitati cubus. Dico & reliquos cubos eſſe. Quod enim quartus ab vnitate, & omnes

Vnitas. A, 8 B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

duos intermittentes, cuiuſmodi ſunt C, & F, ſint cubi, [d] iam eſt demonſtratum. Quod autem & reliqui B, D, E, cubi ſint, ſic oſtendemus. Cum ſit vnitas ad A, vt A, ad B; æque, metietur vnitas numerum A, & numerus A, numerum B: [e] Metitur autem vnitas numerũ A, per ipſum A. Igitur, & A, ipſum B, per ſeipſum metietur. [f] Atque adeo cubus A, ſeipſum multiplicans numerum B, procreabit. [g] Quare B, cubus eſt. Quoniam vero quatuor continue proportionales ſunt A, B, C, D, eſtque A, cubus, [h] & D, cubus erit. Eademq; ratione, aſſumptis quatuor

[a] 8. noni
[b] 22. octaui
[c] 22. octaui
[d] 8. noni
[e] 3. proni
[f] 9. pron.
[g] 3. noni
[h] 23. octaui

tuor deinceps proportionalibus B,C,D,E, cum B, cubus sit; [a] & E, cubus erit. Omnes igitur A,B,C,D,E,F. cubi sunt. Non secus demonstrabimus, omnes cubos esse, si plures continue proportionales fuerint. Quocirca, si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 23. octaui

SCHOLIVM.

NON demonstrauit Geometra, si numerus, qui post vnitatem, sit cubus simul & quadratus, & reliquos omnes esse cubos simul, & quadratos; quia perspicue hoc ipsum ex demonstratis colligitur. Nam si proximus vnitati sit cubus simul, & quadratus: qua parte est cubus, ea ratione omnes reliqui cubi erunt; qua vero parte est quadratus, ea ratione & reliqui omnes quadrati erunt, vt demonstratum est. Omnes igitur erunt cubi simul, & quadrati.

VERVM tota propositio facilius ita poterit demonstrari. Sit primum A, proximus vnitati, quadratus. Dico & omnes quadratos esse. Quoniam enim ex scholio propos. 10. lib. 8. A, seipsum multiplicans facit B, erit ex defin. B, quadratus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, sunt.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64. D, 256. E, 1024. F, 4096.

que A, B, quadrati, erit & C, quadratus, ex scholio propos. 2. huius lib. Rursus quia ex eodem scholio propos. 10. lib. 8. A, multiplicans C, facit D, suntq; A, C, quadrati; erit ex eodē scholio propos. 2. huius lib. & D, quadratus: Atque ita deinceps; cum ex illo scholio propos. 10. lib. A, multiplicans D, producat E, & multiplicans E, faciat F, &c.

SIT deinde A, proximus vnitati, cubus. Dico & omnes esse cubos. Quia enim ex scholio propos. 10. lib. 8. cubus A, seip-

Vnitas. A, 8. B, 64. C, 512. D, 4096. E, 32768. F, 262144.

sum multiplicans facit B, [b] erit & B, cubus. Item quia ex eodem scholio, A, multiplicans B, facit C, suntq; A, B, cubi; [c] erit & C, cubus. Rursus quia ex eodem scholio, A, multiplicans C, facit D, suntq; A, C, cubi; [d] erit quoque D, cubus. Atque ita de cæteris, cum ex eo scholio, A, multiplicans D, gignat E, & multiplicans E, procreet F, &c.

[b] 3. noni
[c] 4. noni
[d] 4. noni

10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, qui vero post vnitatem, non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At si, qui post vnitatem, non sit cubus, neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes.

SINT ab vnitate quotcũq; numeri deinceps proportionales A,B,C,D,E,F,G,H,I,&c. & primum A, proximus vnitati nõ sit quadratus. Dico nec aliũ vllũ esse quadratũ, præter tertiũ ab vnitate, & vnũ intermittẽtes omnes, hoc est, præter B,D,F,H.&c. Si enim præter hos alius

Vnitas.A,2.B,4 C,8 D,16.E,32.F, 64. G, 128.H, 256, I,512. K,1024 L,2048. M,4096.

a 8. noni

b 8. noni

c 24. octauæ

est quadratus, sit quadratus E. a Cum ergo & D, sit quadratus; sitque vt D, ad E, vel E, ad F, ita A, ad B, & conuertendo vt E, ad D. vel F, ad E. ita B, ad A; habebit B, ad A, rationem, quam quadratus numerus E, ad quadratum numerum D, vel quadratus F, ad quadratum E. sed B, tertius ab vnitate est quadratus. b Igitur & A, primus ab vnitate quadratus erit. Quod est absurdum; ponitur enim A, non quadratus. Non ergo E, quadratus est. Eadem ratione ostendemus, nullum alium, præter dictos, quadratum esse.

SED iam A, proximus vnitati non sit cubus. Dico nec alium vllum esse cubum, præter quartum ab vnitate, & duos

& duos intermittétes omnes, videlicet præter C, F, I &c. Nam ſi præter hos alius poteſt eſſe cubus, ſit D, cubus. Cũ ergo & F, cubus ſit, ſitque ex æquo vt D, ad F, ita A, ad C, (quod tres D, E, F, eandem habeant rationem, quã tres A, B, C,) & conuertendo vt F, ad D, ita C, ad A; habebit C, ad A, rationem, quam cubus F, ad cubum D: [a] Sed C, eſt cubus, cum ſit quartus ab unitate. [b] Igitur & A, primus ab vnitate cubus erit, quod eſt contra hypotheſim. Non igitur D, cubus eſt. Quod ſi E, credatur eſſe cubus; [c] cum & C, cubus ſit, ſitque ex æquo, vt C, cubus ad E, cubum, ita A, ad C, & conuertendo vt cubus E, ad cubum C, ita C, ad A; exiſtente C, cubo, [d] erit, & A, cubus, quod non ponitur. Non ergo E, cubus eſt. Quemadmodum autem oſtenſum eſt duos D, & E, inter duos cubos C, & F, cubos non eſſe, ita quoque eadem ratione oſtendemus neque G, & H, inter cubos F, & I, neque vllos alios duos, inter duos cubos, eſſe cubos. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 8 noni.
[b] 8 noni
[c] 25. octaui
[d] 8 noni
[c] 25. octaui

SCHOLIVM.

NON eſt autem neceſſe, ſi numerus, qui poſt vnitatem, non ſit cubus ſimul, & quadratus, nullum alium eſſe cubum ſimul, & quadratum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinque intermittentes omnes; cum aliquando tertius ab vnitate, aliquando vero quartus poſſit eſſe cubus ſimul, & quadratus, non exiſtente primo ab vnitate cubo ſimul, & quadrato.

SIT enim primum A, qui poſt vnitatem, cubus quidem, non autem ſimul & quadratus.

Dico B, tertium eſſe cubum ſimul & quadratum; cubum quidem, [f] quod primo exiſtente cubo, omnes cubi ſint, [g] quadratum vero, quod tertius ſit ab vnitate.

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

[f] 8. noni.
[g] 8. noni

SIT deinde A, poſt vnitatem quadratus quidem, non autem ſimul & cubus. Dico quartum C, eſſe cubũ ſimul & quadratũ; [h] Cubum quidem, quod quartus ſit ab vnitate, [i] quadratum vero,

Vnitas. A, 4. B, 16. C, 64.

8. noni

[a] 9. noni

ro, [a] quod primo existente quadrato, omnes sint quadrati.

SIT postremo A, post vnitatem neque cubus, neque quadratus. Dico nullum alium esse cubum simul & quadratum, praeter septimum F, & quinque intermittentes omnes. Cum

Vnitas. A,6. B,36. C,216. D,1296. E,7776. F,46656.

[b] 10. noni

enim primo non existente quadrato, [b] nullus alius quadratus sit, praeter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes, cuiusmodi sunt, vt in scholio propos 8. huius lib. docuimus, tertius, quintus, septimus, nonus, vndecimus, decimustertius, decimusquintus, decimusseptimus, decimusnonus, &c. Primo autem non existente cubo, [c] nullus alius sit cubus, praeter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes, quales sunt, vt ex eodem scholio apparet, quartus, septimus, decimus, tertiusdecimus, decimussextus, decimusnonus, &c. perspicuum est, tantummodo septimum, tertiumdecimum, decimumnonum, qui quidem omnes quinque intermittunt, quadratos esse simul, & cubos, & sic de caeteris. Nam in haec loca sola incidunt quadratus, & cubus simul, vt liquido constat ei, qui rectè propositionem hanc & octauam huius libri expenderit.

[c] 10. noni

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; Minor maiorem metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus sunt numeris.

SINT ab vnitate quotcunque numeri continue proportionales A,B,C,D,E,F,G. Dico quemlibet nu-

Vnitas. A,3. B,9. C,27. D,81. E,243. F,729. G,2187.

norem, vt C, quemlibet maiorem, vt G, metiri per aliquem

quęm numerorum A,B,C,D,E,F,G. Cum enim ſit ex æquo vt C,ad G,ita vnitas ad D; (quòd quinque numeri C, D, E, F, G, eandem habeant rationem continuam quam vnitas & quatuor numeri A, B, C, D,) æque metietur vnitas numerum D, atque numerus C, numerum G: [b] Sed vnitas metitur numerum D, per ipſummet D. Igitur & C, numerus numerum G, per D, metietur. Eadem ratione metietur E, ipſum F, per A, quod ſit vt E, ad F, ita vnitas ad A, &c. Sic quoque metietur A, ipſum G, per F, cum ſit ex æquo vt A, ad G, ita vnitas ad F, &c. Atque ita de reliquis eodem modo. Si igitur ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c. quod erat oſtendendum.

[a] 20. defin.

[b] 5. prom.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex his, quantum abeſt minor numerus a minore metiente, tantum diſtare ab vnitate eum numerum, per quem minor maiorem metitur; propterea quod eadem eſſe debet proportio minoris ad maiorem, quæ vnitatis ad eum, per quem metitur minor maiorem, vt

Vnitas. A, 3: B, 9. C, 27. D, 81. E, 243. F, 729: G, 2187.

ex demonſtratione apparet. Itaque B, metietur F, per D; Et C, metietur F, per C, numirum per ſe ipſum, &c. quia tam inter B, & F, quàm inter vnitatem & D, tres numeri interponuntur: Et tam inter C, & F, quàm inter vnitatem & C, duo interiecti ſunt numeri.

HINC rurſus efficitur, quemlibet numerum, qui ſe ipſum multiplicet; producere numerum, qui in numeris proportionalibus tantum ab eo diſtet, quantum ipſe ab vnitate: Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreari numerum, qui tantum a maiore diſtet; quantum minor ab vnitate; propterea quod ſi numerus numerum metiens multiplicet eum, per quem metitur, [c] producatur ille; quem metitur. Ergo C, ſe ipſum multiplicans gignet F, cum F, tantum abſit a C, quantum C, ab vnitate; ac propterea C, ipſum F, per C, metiatur, vt diximus. Sic quo-

[c] 9. prop.

que

que B, multiplicans D, faciet eundem F; quod D, ipsum F, metiatur per B, &c. & sic de reliquis.

11. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint; quicunque primorum numerorum vltimũ metiuntur, ijdem & eum, qui vnitati proximus est, metientur.

SINT ab unitate deinceps proportionales quotcunque numeri A, B, C, D. Dico quoscunque primorum numerorum, qui metiuntur vltimum D, metiri quoque A, proximum unitati. Metiatur enim numerus primus E, ipsum D. Dico eundem E, primum metiri etiam numerum A, vnitati proximum. Si namque non metitur ipsum A; [a] erit E, cum primus sit, ad A, primus: hoc est, A, & E, inter se primi erunt.

Vnitas. A, 10. B, 100. C, 1000. D, 10000. E, 5. H, 20. G, 200. F, 2000.

Metiatur E, ipsum D, per F, [b] atque adeo E, multiplicans F, faciat D. Quia vero & A, ipsum D, metitur per C; ac proinde A, multiplicans C, facit D, vt in scholio præcedẽtis proposit. ostendimus; producetur idem nũmerus D, ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum. Cum ergo A, & E, sint inter se primi; [d] ac proinde in sua proportione minimi; [e] metietur æque A, ipsum F, & E, ipsum C. Metiatur E, ipsum C, per G, [f] atque adeo E, multiplicans G, faciat C. Quia vero & A, ex scholio eodem præcedentis propos. metitur C, per B, [g] atque adeo A, multiplicans B, facit C; procreabitur idem numerus C, ex A, primo in B, quartum, & ex E, secundo in G, tertium. [h] Erit igitur vt A, primus ad E, secundum, ita G, tertius

[a] 31. sept.
[b] 9. prop.
[c] 19. sept.
[d] 23. sept.
[e] 21. sept.
[f] 9. prop.
[g] 9. prop.
[h] 19. sept.

tertius ad B,quartum.Quapropter cum A,& E,ſint inter ſe primi,[a] ac propterea in ſua proportione minimi,[b] metietur æque A,ipſum G,& E,ipſum B. Metiatur E,ipſum B,per H:[c] ita vt E,multiplicans H,faciat B. Metitur autem & A,ipſum B,per A,atque ideirco A,ſe ipſum multiplicans facit B,vt ex eodem ſcholio præcedentis propoſ apparet. Gignitur ergo idem numerus B, ex E, primo in H,tertiũ,& ex A,medio in ſeipſum,[d] Quare erit vt E,primus ad A,ſecundum,ita A,ſecundus ad H,tertium. Cum ergo E,& A,inter ſe primi ſint,[e] ac proinde in ſua proportione minimi,[f] æque metietur E,ipſum A, & A, ipſum H.Quod eſt contra hypotheſim. ponitur enim E, ipſum A,non metiri.Quare falſum eſt E, ipſum A , non metiri. Nam ex eo quod E, non dicatur metiri ipſum A,ſemper demonſtrabitur E, ipſum A,metiri ; Quod eſt abſurdum.Metitur ergo E,ipſum A. Eodem argumento oſtendemus quoſcunque alios numeros primos ipſum D,metientes metiri quoque ipſum A;Eademque erit ratio ſi C,vel B, vltimus numerus ſtatuatur.

[a] 33. ſept.
[b] 21. ſept.
[c] 9. pron.
[d] 20. ſept.
[e] 23. ſept.
[f] 21. ſept.

ALITER. Metiatur E, numerus primus vltimum D.Dico & E,ipſum A,metiri Si enim nõ metiatur, [g] erit E,ad A,primus Quia igitur A,& E,inter ſe primi ſunt, & A, ſeipſum multiplicãs faciet B,vt ex ſcholio propoſ. prędentis conſtat, [h] erit B,ad E, primus.Quia ergo A, & B, ad E,primi ſunt, fit autem C, ex A, in B, per idem ſcholium præcedentis propoſ. [i] erit C, ad E, primus. Rurſus eodem modo,quia A,& C, ad E,primi ſunt ; & fit D, ex A,in C,ex eodem ſcholio præcedentis propoſ. [k] erit D, ad E,primus Non igitur E,ipſum D, metitur. Quod eſt contra hypotheſim. Metitur ergo E, ipſum A. Si igitur ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales fuerint, &c. Quod oſtendendum erat.

[g] 31. ſept.
[h] 27 ſept.
[i] 26. ſept.
[k] 26. ſept.

Vnitas. A,6.B,36. C,216.D,1296. E,3.

COROLLARIVM.

ITAQVE neque vllus numerus primus, qui

maior

maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum unitati non metiens, metiri poteſt vltimum. Si namque metiretur vltimum, metiretur quoque vnitati proximum, vt demonſtratum eſt. quod non ponitur.

SCHOLIVM.

EST autem admirabilis prima huius propoſitionis demonſtratio. Nam in ea Euclides ex eo, quod E, dicatur non metiri ipſum A, oſtendit demõſtratione affirmatiua E, ipſum A, metiri: quod uidetur fieri non poſſe. Nam ſi quis demonſtrare inſtituat, Socratem eſſe album, ex eo, quod non eſt albus, paradoxum aliquid, & inopinatum in medium videatur aſſerre; Cui tamen non abſimile quid facium hic eſt in numeris ab Euclide, & in alys nonnullis propoſitionibus, quæ ſequũtur. Caradanus quoque ſimile quid effecit in magnitudinibus, lib. 5. de propor. propoſ. 201. gloriaturque ſe primum omnium hanc rationem demonſtrandi reperiſſe: quod arbitror eum nõ dicturum fuiſſe, ſi diligentius ſum huius demonſtrationis expendiſſet, vel certe, ſi expendit, eam in memoriam reuocaſſet, quandoquidem ipſo longe prior Euclides vſus eſt hoc etiam demonſtrãdi modo, vt ex hoc theoremate 12. eſt manifeſtum. Eodem genere demonſtrandi vſus eſt Theodoſius lib. 1. ſphæricorum propoſ. 12. vt ibidem monuimus.

CAETERVM ex demonſtratis perſpicuum eſt, quemcunque numerum primum, qui vltimum metitur, metiri etiam omnes alios ante ipſum. [a] Cum enim metiatur proximum vnitati, hic autem omnes ſubſequentes, [b] quod ſemper minor maiorem metiatur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris; [c] manifeſtum eſt, quod & ille omnes metiatur.

[a] 12. noni
[b] 11. noni
[c] 11. prop.

13. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſuerint, qui ve-

ro

ro poſt vnitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, præter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus.

SINT ab vnitate continue proportionales quotcũque numeri A, B, C, D, quorum A, proximus vnitati ſit primus. Dico nullum alium numerum, præter ipſos A, B, C, metiri maximum D. Si enim fieri poteſt, metiatur numerus alius E, diuerſus ab A, B, C, ipſum D. Manifeſtum autem eſt, E, non eſſe numerum primum. Si enim primus ſit, & metiatur extremum D; [a] metietur quoque ipſum A, vnitati proximum, qui primus ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur E, primus eſt, ſed compoſitus; [b] atque adeo eum aliquis numerus primus metietur. quem dico alium eſſe non poſſe, præter primum A. Si enim alius primus quam A, metiatur E; cum E, metiatur extremum D; [c] metietur quoque ille alius primus eundem D, [d] atq; adeo & ipſum A, primum, nimirum vnitati proximum. Quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus, quam A, ipſum E, metitur. Metiatur iam E, ipſum D, per F. Dico F. diuerſum eſſe ab A, B, C. Si enim F, ſit idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; & E, metiatur D, per F; metietur vtique E, ipſum D, per aliquem ipſorum A, B, C; [e] & viciſſim aliquis ipſorum A, B, C, (nimirum is, per quem E, ipſum D, metitur,) metietur D, per E. [f] Cũ ergo quilibet ipſorũ A, B, C, metiatur D, per aliquẽ ipſorũ A, B, C; erit E, idẽ qui aliquis ipſorũ A, B, C, qđ eſt cõtra hypotheſim. ponitur.n. E, nõ idẽ, qui aliquis ipſorũ A, B, C. Nõ igitur F, idem eſt, qui aliquis ipſorum A, B, C, ſed diuerſus. Quoniã vero E, metitur D, per F; [g] metietur viciſſim F, ipſum D, per E. Non erit autem F, primus: ſi enim ſit primus, & metiatur D, vltimum; [h] metietur & A, proximum vnitati, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Igitur F, non primus eſt, ſed compoſitus; [i] atque adeo eum aliquis

Vnitas. A,5. B,25. C,125. D,625.
E —— H —— G —— F ——

[a] 12. noni
[b] 33. ſept.
[c] 11 pron.
[d] 12. noni
[e] 8. pron.
[f] 11. noni
[g] 8. pron.
[h] 12. noni
[i] 33. ſept.

Vnitas. A,5. B,25. C,125. D,625.
E.... H.... G.... F....

aliquis numerus primus metietur, quem rursus dico nullum alium esse posse præter primum A. Si namque alius primus quã A, metiatur F; cum F, metiatur D, extremum; [a] metietur quoque ille alius primus eundem D; [b] atque adeo & ipsum A, proximum vnitati, qui primus est. quod est absurdum. Ergo non alius primus quam A, ipsum F, metietur. Iam vero quoniã E, metitur D, per F; [c] fiet D, ex E, in F: Fit autem & D, ex A, in C, vt in scholio propos. 11 huius lib. docuimus. Idem igitur numerus D, fit ex A, primo in C, quartum, & ex E, secundo in F, tertium; [d] Ac proinde erit vt A primus ad E, secundum, ita F, tertius ad C, quartum: Metitur autem A, ipsum E; vt ostensum est. Ergo & F, ipsum C, metietur. Metiatur per G. Quoniam igitur F, diuersus ab A, B, metitur C, vltimum (te linquimus enim iam numerum D,) per G; ostendemus similiter, G, diuersum esse ab A, B, & nõ primum, sed compositum, quẽ solus A, primus metiatur: quemadmodum id ostensum est de numero F, per quem E, diuersus ab A, B, C, metiebatur D, vltimum.

SI enim G, sit idem, qui aliquis ipsorum A, B; metiaturq; F, ipsum C, per G; metietur vtique F, ipsum C, per aliquem ipsorum A, B; [e] & vicissim aliquis ipsorum A, B (videlicet is, per quem F, ipsum C, metitur) inetietur C, per F. Cum ergo quilibet ipsorum A, B, metiatur C, per aliquem ipsorum A, B; erit F, idem qui aliquis ipsorum A, B. quod est absurdum. ostensum est enim F, non esse eundem, quem aliquem ipsorum A, B. Non ergo G, est idem qui aliquis ipsorum A, B, sed diuersus. Quoniã autem F, metitur C, per G; [f] metietur vicissim G, ipsum C, per F. Non erit autem G, primus. Si enim primus sit, metiaturque vltimum C; metietur quoque numerum primum A, vnitati proximum. quod est absurdum. Non ergo G primus est, sed compositus; ac proinde eum aliquis primus metietur, quem dico nullum alium posse esse præter A. Nam si alius primus quam A, metiatur G; cum G; metiatur C, vltimum; [k] metietur quoque ille alius

[a] 31. prop.
[b] 32 noni
[c] 9. prop.
[d] 19. sept.
[e] 8. prop.
[f] 11. noni.
[g] 8. prop.
[h] 12. noni
[i] 33. sept.
[k] 11. prop.

alius primus eundem C; atque adeo & ipſum A, vnitati proximum, qui primus eſt. quod eſt abſurdum. Ergo non alius primus quam A, ipſum G, metitur. [b] Iam vero quia C, fit ex F, in G; quòd F, metiatur C, per G; Fit autem idem C, ex A, in B, vt docuimus in ſcholio propoſ. 11. huius lib Fiet idem numerus C, ex A, primo in b, quartum, & ex F, ſecundo in G, tertium. [c] Quare erit vt A, primus ad F, ſecundum, ita G tertius ad B quartum Metitur autem A, ipſum F, vt demonſtratũ eſt. Igitur & G, ipſum B, metietur. metiatur per H Quia ergo G, diuerſus ab A, metitur B, vltimũ (relinquimus enim iam numeros C, & D,) per H; oſtendemus ſimiliter H, diuerſum eſſe ab A; quemadmodum id oſtenſum eſt de numeris F & G.

NAM ſi H, idem ſit qui A; metiatur que G, ipſum B, per H; metietur vtique G, ipſum B, per A, Et vicißim A, ipſum B, per G, metietur. Cum igitur metiatur A ipſum B per A, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 11. huius lib erit G, idem qui A. quod eſt abſurdum oſtenſum eſt enim G, non eſſe eundem, quem A. Non ergo H, idem eſt, qui A, ſed diuerſus. [e] Iam uero quia B, fit ex G, in H; quod G, ipſum B, metiatur per H: Fit autem & idem B, ex A, in ſe, vt in ſcholio propoſ. 11. huius lib docuimus; Fiet idem numerus B, ex H, primo in G, tertiũ, & ex A, medio in ſe ipſum. [f] Quare erit vt H primus ad A, ſecundum, ita A ſecundus ad G, tertium: At A, metitur ipſum G, vt eſt demonſtratum. Igitur, & H, ipſum A, metietur, numerum primum Quod eſt abſurdum. Quare ſi A, primus eſt, maximum D, nullus alius numerus metitur, præter ipſos A, B, C. Ac proinde ſi ab vnitate quotcunq; numeri deinceps proportionales fuerint, &c Quod erat oſtendendum.

[a] 12. nono

[b] 9. pron.

[c] 19. ſept.

[d] 8. pron.

[e] 9. pron.

[f] 20. ſept

THEOR. 14. PROPOS. 14. 14.

SI minimum numerum primi numeri metiantur: Nullus alius numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur.

SIT numerus A, minimus, quem metiantur primi numeri B, C, D. Dico nullum alium primum præter ipſos B,C,D,metiri ipſum A. Metiatur enim, ſi fieri poteſt, primus numerus E, diuerſus à B,C,D,ipſum A,per numerum F. Quia igitur E,metitur A,per F; a multiplicans E,ipſum F, faciet A. b Quare ſinguli B,C, D,alterum ipſorũ E,F, metientur:non quidem ipſum E, primum, & ab ipſis diuerſum:ergo ipſum F, qui minor eſt quam A. Quod eſt abſurdum.Ponitur enim A,minimus,quem primi B, C, D, metiantur. Si igitur minimum numerum primi numeri metiantur, &c.Quod demonſtrandum erat.

A.....
B.. C... D.....
E---- F------

a 9. pron.
b 32. ſept.

SCHOLIVM

ADDIT hoc loco Campanus ſequens theorema ad ea, quæ ſequuntur, non inutile. Videlicet.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem rationem habentium cum ipſis : Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoq; alterum duorum numerorum, qui in eadem ratione ſumuntur minimi, vel certe ad alterum erit compoſitus.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B,C,D,E,in ſua proportione minimi,in qua ſumantur etiam duo minimi F,G:Metiatur autem primo H,primum eorum, nimirum A. Dico H, metiri quoque vel F, vel G, vel certè ad alterum eorum compoſitum eſſe. Sit eam H, non primus, ſed compoſitus : c Et ſumantur in eadem proportione tres numeri minimi I, K, L, & quatuor M, N, O, P, & ſic deinceps, donec habeantur tot, vno minus, quot ſunt ipſi A, B, C, D, E.

c 2. Octaui

Quoniam

Quoniam igitur, vt conſtat ex modo proueandi quotlibet minimos tradito in 2. propoſ. lib. 8. numerus A,

A, 16. B, 24. C, 36. D, 54. E. 81.
M, 8. N, 12. O. 18. P, 27.
I, 4. K, 6. L, 9.
H ---- F, 2. G, 3.

ſit ex F, in M; metitur autem H, ipſum A, erit H, compoſitus, ex ſcholio propoſ. 32. lib. 7. ad F, vel ad M. Si ad F, habemus propoſitum; ſi vero ad M, qui quidem ſit ex F, in I, vt cõſtat ex demõſtratione propoſ 2. lib. 8. erit, ex ſcholio euiſdẽ propoſ. 32. li. 7. rurſus H, c poſitus vel ad F, vel ad I. Si ad F, habetur propoſitum: ſi vero ad I, cum I, gignatur ex F, in ſe ipſum, erit H, compoſitus ad F, ex eodem ſcholio propoſ. 32. lib. 7. Quòd ſi H, ſit primus, oſtendemus eodem modo, ex propoſ 32. lib. 7. non autem ex ſcholio, eum metiri ipſum F.

DEINDE *metiatur H, non primus ſecundum B. Quia ergo E, ſit ex F, in N, erit vt prius H, compoſitus vel ad F, vel ad N. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad N, qui quidem ſit ex F, in K, erit H, eodem modo compoſitus vel ad F, vel ad K. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad K, cum K, gignatur ex F, in G, erit quoque H, compoſitus vel ad F, vel ad G. Quòd ſi H, ſit primus, demonſtrabimus eadem ratione eum metiri vel F, vel G, ex propoſ. 32. lib. 7.*

RVRSVS *metiatur H, non primus tertium C, qui cum ſit ex F, in O, erit H, compoſitus vel ad F, vel ad O. Si ad F, habetur propoſitum, ſi vero ad O, qui quidem ſit ex F, in L, erit H, compoſitus vel ad F, vel ad L. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad L, cum L, gignatur ex G, in ſe, compoſitus quoque erit H, ad G. Quòd ſi H, ſit primus, probabimus eodem modo ex propoſ. 32. lib. 7. eum metiri ipſum G.*

PRAETEREA *metiatur H, non primus quartum D, qui cum ſit ex F, in P; erit H, compoſitus vel ad F, vel ad P. Si ad F, habetur propoſitum; ſi vero ad P, qui quidem ſit ex G, in L, erit etiam H, compoſitus vel ad G, vel ad L. Si ad G, habetur propoſitum; ſi vero ad L, cum L, producatur ex G, in ſe; erit quoque H, ad G, compoſitus. Quod ſi H, primus ſit, oſtendemus eodem modo ex propoſ 32. lib. 7 eum metiri ipſum G.*

EODEM *modo ſi H, non primus metiatur vltimum E, oſtendemus H, compoſitum eſſe ad G, Si vero H, primus*

sit, eum metiri ipsum G; atque ita in cæteris eadem semper erit demonstratio.

ITAQVE si H, metiatur primum numerum A, metietur idem ipsum F, vel ad eum compositus erit: Si vero H, metiatur vltimum E, metietur idem ipsum G, vel ad eum compositus erit: Si denique, H, metiatur alterum, præter primum & vltimum, metietur idem vel ipsum F, vel ipsum G, aut ad alterutrum erit compositus. Id quod perspicuum est ex ipsa demonstratione.

DEMONSTRATIO IN NVMERIS eorum, quæ in lineis secundo libro Euclides demonstrauit prioribus 10. theorematibus.

QVONIAM ad theorema sequens demonstrandum Theon quadam assumit in numeris, quæ demonstrata sunt de lineis libro secundo, perinde ac si eadem de numeris essent ostensa, non alienum instituto nostro duximus, nonnulla exponere, quæ Geometrice ab Euclide libro 2. demonstrata sunt de lineis, hoc loco de numeris demonstrare. Quod idem & Barlaam monachum fecisse a nonnullis est traditum. Sequemur autem eundem ordinem, quem Euclidem in secundo libro tenuisse conspicimus.

I.

SI fuerint duo numeri, seceturque ipsorum alter in quotcunque partes: Numerus planus comprehensus sub illis duobus numeris æqualis est numeris, qui sub numero indiuiso, & qualibet parte numeri diuisi continentur.

SINT duo numeri A B, & C, quorum A B, diuidatur in A D, D E, E B, fiatque F, ex C, in A B. Item G H, ex C, in A D, & H I, ex C, in D E, & I K, ex C, in E B.

Dico

Dico F, æqualem esse numero G H, H I, I K, hoc est, toti numero G K, ex G H, H I, I K, composito. Quoniam enim C, multiplicans A B, fecit F; metietur A B, ipsum F, per C, hoc est, A B, pars erit ipsius F, denominata à C. Eadem ratione A D, ipsius G H; & D E, ipsius H I, & E B, ipsius I K, pars erit à C, denominata, eadem numerum, quæ A B, ipsius F. Quia vero per ea, quæ ad propos. 5. lib. 7. demonstrauimus, totus A B, totius G K, eadem pars est, quæ A D, ipsius G H; erit quoque A B, tota totius G K, pars eadem, quæ A B, ipsius F, Ac proinde inter se æquales erunt F, & G K. Quod est propositum.

A . . . D . . E . B C . .
F . . . . . .
G . . . . . H . . . I . . K

[a] 2. prom.

[b] 4. prom.

II.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numeri plani sub toto, & singulis partibus comprehensi æquales sunt numero quadrato, qui a toto efficitur.

NVMERVS enim A B, diuidatur in A C, C B. Dico numeros, qui fiunt ex A B, toto: & partes A C, C B, simul æquales esse numero quadrato, qui ex toto A B, efficitur. Sumpto enim numero D, qui æqualis sit ipsi A B, erit per theor. 1. numerus factus ex D, hoc est, ex A B, in A B, numerum quadratus ipsius A B, æqualis numero, qui fiunt ex D, hoc est, ex A B, in A C, & in C B. quod est propositum.

D . . . . . .
A . . . C . . B

IDEM demonstrabitur, si A B, in plures partes, quam in duas secetur, vt ex adiecta secunda figura apparere potest. Eadem enim ratione erit numerus factus ex E, hoc est, ex A B, in A B, numerum quadratus ipsius A B, æqualis numero, qui gignuntur ex E, hoc est, ex A B, in singulas partes A C, C D, D B

E . . . . . .
A . . . C . . D . B

III.

SI numerus in duas partes diuidatur: Numerus planus ſub toto, & vna parte comprehenſus æqualis eſt & illi, qui ſub partibus continetur, numero, & illi, qui a prædicta parte efficitur, quadrato.

SIT numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum, qui fit ex toto AB, in partem AC, æqualem eſſe & ei, qui ſub partibus AC, CB, continetur, & quadrato dictæ partis AC. Sumpto enim numero D, qui dictæ parti AC, æqualis ſit, erit ex 1. theorem. numerus factus ex D, hoc eſt, ex, AC, in AB; vel (quod idem eſt) ex AB, in AC, æqualis numeris factis ex D, hoc eſt, ex AC, in CB, & ex D, hoc eſt, ex AC, in AC, quadrato ſcilicet ipſius AC. Quod eſt propoſitum.

D . . . .
A . . . . C . . . . . B

IIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus ex toto factus æqualis eſt quadratis, qui a partibus efficiuntur, vna cum numero plano, qui bis ſub partibus continetur.

SIT numerus AB, diuiſus in AC, CB. Dico numerum quadratum ex AB, factum æqualem eſſe quadratis partium AC, CB, vna cum numero, qui ſit bis ex parte AC, in partem CB. Nam ex 2 theorem. numerus quadratus ipſius AB, æqualis eſt numeris, qui fiunt ex AB, in AC, & in CB. Eſt autem numerus, qui fit ex AB, in AC, per 3. theorema, æqualis numero genito ex AC, in CB, vna cum quadrato ipſius AC: Item numerus,

A . . . . . C . . . . B

rus, qui fit ex A B, in C B, eodem modo æqualis numero producto ex A C, in C B, vna cum quadrato ipſius C B. Igitur numerus quadratus ex A B, factus æqualis eſt quoque numeris quadratis partium A C, C B, vna cum numero bis, qui fit ex A C, in C B. Quod eſt propoſitum.

V.

SI numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Numerus planus ſub partibus inæqualibus contentus, vna cum numero quadrato numeri inter duas ſectiones medij, æqualis eſt quadrato, qui ex dimidio numero gignitur.

NVMERVS, n. A B, ſecetur in partes æquales A C, C B; & non æquales A D, D B. Dico numerum ſub partibus inæqualibus A D, D B, contentum, vna cum quadrato numeri intermedij C D, (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) eſſe æqualem quadrato, qui ex dimidio numero C B, efficitur. Nam cum numerus quadratus ipſius C B, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C D, D B, vnà cum plano numero bis cõprehenſo ſub C D, D B, numero vero comprehenſo ſemel ſub C D, D B, vna cũ quadrato ipſius D B, æqualis ſit, per 3 theorema, numerus factus ex C B, in D B; fit, vt ſi hic numerus factus ex C B, in D B, ſumatur pro quadrato ipſius D B, vna cum numero facto ex C D, in D B, numerus quadratus ipſius C B, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius C D, vna cum reliquo numero facto ex C D, in D B, ſemel, & numero ex C B, hoc eſt, ex A C, in D B, producto. Atqui ex 1. theorem. numeris, qui ſiunt ex C D, in D B, & ex A C, in D B, æqualis eſt numerus, qui fit ex toto A D, in D B. Igitur quadratus ipſius C B, æqualis erit quadrato ipſius C D, vna cum numero qui fit ex A D, in D B; hoc eſt, numerus factus ex A D, in D B, vna

A ..... C ... D .. B

cum quadrato ipſius C D, æqualis erit quadrato ipſius C B. Quod eſt propoſitum.

VI.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, & illi aliquis alius numerus adijciatur: Numerus qui fit ex toto cum adiecto in adiectum, vna cum quadrato dimidij numeri, æqualis eſt quadrato eius numeri, qui ex dimidio & adiecto componitur.

NVMERVS enim A B, ſecetur in partes æquales A C, C B, eique adijciatur numerus B D. Dico numerum factum ex toto A B, & adiecto B D, tanquam vno, nimirum ex A D, in adiectum B D, vna cum quadrato dimidij numeri C B, æqualem eſſe quadrato, qui fit ex C B, dimidio & adiecto B D, tanquam vno, hoc eſt, quadrato ipſius C D. Cum enim quadratus ipſius C D, per 4. theorema, æqualis ſit quadratis partium C E, B D, vna cum numero bis comprehenſo ſub C B, B D, hoc eſt, quadratis partiũ C E, B D, vna cum numeris ſub C E, B D, & ſub A C, B D, comprehenſis; numeris autem contentis ſub C B, B D, & ſub A C, B D, & ſub B D, B D, hoc eſt, quadrato ipſius B D, æqualis ſit. ex 1 theorem. numerus factus ex A D, in B D; fit, vt ſi huic numero factus ex A D, in B D, ſumatur pro quadrato partis B D, vna cum numeris factis ex C B, in B D, & ex A C, in B D, quadratis ipſius C D, æqualis etiam ſit reliquo quadrato ipſius C B, vna cum numero facto ex A D, in B D; hoc eſt, numerus factus ex A D, in B D, vna cum quadrato ipſius C B, æqualis ſit quadrato ipſius C D. quod eſt propoſitũ.

A . . . . C . . . . B . . D

VII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Quadratus

dratus totius, una cum quadrato unius partis, æqualis est numero; qui fit bis ex toto in dictam partem, una cum quadrato reliquæ partis.

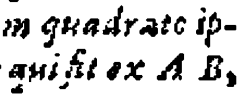
DIVIDATVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico quadratum totius AB, una cum quadrato partis CB, æqualem esse numero bis, qui fit ex toto AB, in dictam partẽ CB, una cum quadrato reliquæ partis AC.

Cum enim, 4. theorem. quadratus totius AB, æqualis sit quadratis partium AC, CB, una cum numero; qui fit bis ex AC, in CB: si quadratis ipsius CB, addatur communis; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales quadratis numerorum AC, CB, CB, una cum numero qui fit bis ex AC, in CB. Atqui ei, qui fit ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, æqualis est, per 3. theorema, numerus qui fit ex AB, in CB; Ac proinde ei, qui fit bis ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, bis, æqualis est, qui fit bis ex AB, in CB. Igitur si pro numero, qui fit bis ex AC, in CB, una cum quadrato ipsius CB, bis, sumatur numerus factus bis ex AB, in CB; erunt quadrati numerorum AB, CB, simul, æquales numero, qui fit bis ex AB, in CB, una cum quadrato reliquæ partis AC. Quod est propositum.

VIII.

SI numerus in duas partes diuidatur: Qui fit quater ex toto in unam partem, una cum quadrato reliquæ partis, æqualis est quadrato numeri compositi ex toto & priori parte.

SECETVR numerus AB, in partes AC, CB. Dico numerum; qui fit quater ex toto AB, in partem CB, una cum quadrato reliquæ partis AC, æqualem esse quadrato numeri qui ex toto AB, & prædicta parte CB, componitur. Addito enim numero BD, qui æqualis sit di-



A . . . . C . . . B . . . D

dæ parti C B; cum quadratus totius A D. compoſiti ex A B, & B D, ſiue dicta parte C B, ſit æqualis per 4. theorema, quadratis numerorum A B, B D, una cum numero qui ſit bis ex A B, in B D, hoc eſt, quadratis numerorum A B, C B una cum eo, qui ſit bis ex A B, in C B; Sint autem, ex 7. theorem. quadrati numerorum A B, C B, ſimul æquales numero bis comprehenſo ſub A B, C B, una cum quadrato numeri A C; fit, vt ſi pro quadratis numerorum A B, C B, ſumatur numerus factus bis ex A B, in C B, una cũ quadrato ipſius A C, quadratus factus ex A D, æqualis ſit numero, qui ſit quater ex A B, in C B, una cum quadrato reliquæ partis A C. Quod eſt propoſitum.

IX.

Si numerus ſecetur in duas partes æquales, & non æquales: Quadrati qui ab inæqualibus partibus fiunt, dupli ſunt quadratorum, qui a dimidio numero, & ab intermedio efficiuntur.

DIVISVS ſit numerus A B, in partes æquales A C, C B, & non æquales A D, D B. Dico quadratos partium inæqualium A D, D B, duplos eſſe quadratorum, qui ex A C, dimidio, & ex C D, numero intermedio (qui quidem exceſſus eſt inter ſemiſſem A C, vel C B, & alterutram partium inæqualium A D, D B.) efficiuntur. Cum enim quadratus numeri A D, æqualis ſit, ex 4.

A . . . . . C . . . D . . B

theorem. quadratis numerorum A C, C D, una cum numero bis, qui ſit ex A C, in C D; Si communis apponatur quadratus partis D B; erunt quadrati partium A D, D B, æquales quadratis partium A C, C D, D B, una cum numero bis, qui ſit ex A C, hoc eſt, ex C B, in C D. Atqui quadrato ipſius D B, una cum numero bis, qui ſit ex C B, in C D, æquales ſunt ex 7. theor. quadrati, qui ſunt ex C B, hoc eſt, ex A C, & C D. Vterque, ſi pro quadrato ipſius D B, vnà cum eo, qui ſit bis ex C B, in C D, ſumantur quadrati ipſorum A C, C D, erunt qua-

quadrati partium AD, DB, æquales quadratis partium AC, CD, bis; Ac propterea quadrati partium AD, DB, dupli erunt quadratorum, qui ex partibus AC, CD, fiunt. Quod eſt propoſitum.

X.

SI numerus in duas partes æquales diuidatur, adijciatur autem illi alius quiſpiam numerus: Quadratus compoſiti numeri ex toto & adiecto, & quadratus numeri adiecti, ſimul dupli ſunt eius quadrati, qui ex dimidio efficitur, & eius, qui fit a numero compoſito ex dimidio, & adiecto.

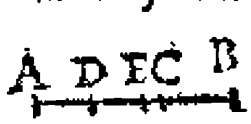
SIT numerus AB, diuiſus in partes æquales AC, CB, eique adijciatur numerus BD. Dico quadratum numeri AD, compoſiti ex toto AB, & adiecto BD, & quadratũ adiecti numeri BD, utroſque ſimul, duplos eſſe quadratorum, quæ fiunt ex AC, dimidio, & ex CD, compoſito ex CB, dimidio, & adiecto BD. Cum enim quadratus ipſius AD, æqualis ſit, ex 4. theorem. quadratis partium AC, CD, una cum numero bis, qui fit ex AC, hoc eſt, ex CB, in CD; ſi communis addatur quadratus partis BD; erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis partium AC, CD, BD, una cum numero bis, qui fit ex CB, in CD. Sed per 7. theorem. quadrato ipſius BD, una cum numero bis qui fit ex CB, in CD, æquales ſunt quadrati numerorũ CB, CD, & quadrato ipſius CB, æqualis eſt quadratus ipſius AC. Igitur ſi pro quadrato ipſius BD, una cum numero, qui fit bis ex CB, in CD, ſumantur quadrati numerorum CB, CD, hoc eſt, numerorum AC, CD: erunt quadrati numerorum AD, BD, æquales quadratis numerorum AC, CD, bis; Ac propterea quadrati numerorum AD, BD, dupli erunt quadratorum, qui ex AC, CD, efficiuntur. Quod eſt propoſitum.

A...C...B..D

JAM

AM vero theorema 11. lib. 2. non posse numeris accommodari, hoc est, nullo modo fieri posse, vt numerus aliquis in duas partes diuidatur, ita vt numerus planus, qui ex toto in vnam partium fit, aequalis sit quadrato reliquae partis, vt ibi mihi visus sum, ita demonstrabimus.

DIVIDATVR, si fieri potest, numerus AB, in C, ita vt numerus factus ex toto AB, in partem CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC. Quia igitur numerus contentus sub extremis AB, CB, aequalis est quadrato numeri medij AC;



a 20. sept. *erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Est autem AB, maior quam AC. Igitur & AC, maior est quam CB Ablato tam CD, qui ipsi CB, sit aequalis, erit quoque vt AB, ad AC, ita AC, ad CD. Quoniam ergo totus AB, ad totum AC, est vt AC, ex toto AD, detractus ad CD, ex toto AC,* b 13. sept. *detractum; b erit quoque vt totus AB, ad totum AC, vel vt detractus AC, ad detractum CD, ita CB, ex AB, residuus, hoc est, CD, ipsi CB, aequalis, ad AD, ex AC, residuū. Quia igitur est vt AC, ad CD, ita CD, ad AD; & est AC, maior quam CD; erit quoque CD, maior quam AD. Ablato ergo DE, qui ipsi AD, sit aequalis; erit etiam vt AC, ad CD, ita CD, ad DE. Itaque quia est, vt totus AC, ad totum CD, ita CD, ex toto AC, detractus ad* c 11. sept. *DE, ex toto CD, detractum; c erit quoque vt totus AC, ad totum CD, vel vt detractus CD, ad detractum DE, ita AD, ex AC, residuum, hoc est, DE, ipsi AD, aequalis, ad EC, ex CD, residuum. Quare cum sit vt CD, ad DE ita DE, ad EC; sit autem CD, maior, quam DE; erit etiam DE, maior, quam EC; Ac proinde ex ED, auferri poterit numerus ipsi EC, aequalis; & sic deinceps, nec vnquam finis erit factae detractionis. Quod est absurdum: cum numerus non possit diuidi in infinitum. Non ergo numerus AB, diuidatur ita, vt planus numerus ex toto in vnam partem factus, aequalis sit quadrato reliquae partis. Quod est propositum.*

ALITER. Quoniam numerus AB, in C, ita diuisus est, vt is qui fit ex AB, in CB, aequalis sit quadrato reliquae partis AC; erit numerus, qui quater fit ex AB, in CB, quadruplus quadrati ipsius AC; Ac proinde numerus, qui

qui fit quater ex A B, in C B, una cum quadrato ipſius A C, quintuplus erit quadrati partis A C. Eſt autem numerus contentus quater ſub A B, C B, una cum quadrato ipſius A C, quadratus, quippe cum æqualis ſit quadrato numero, qui fit ex numero compoſito ex A B, & C B, per 8 theorema. Igitur duo numeri quadrati (numerum is, qui quater continetur ſub A B, C B, una cum quadrato ex A C; & quadratus ex A C,) proportionem habent, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5. Quod eſt abſurdum, ut conſtat ex 20. vnd. propoſ. 24. lib. 8. Non ergo numerus A B, diuiditur ita in C, vt is qui producitur ex A B, in C B, æqualis ſit quadrato ipſius A C. Quod eſt propoſitum.

A C B

VERVM hæc eadem clarius demonſtrabimus ad 3 corol. 29. huius lib.

THEOR. 15. PROPOS. 15. 16.

SI tres numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandem cum ipſis rationem habẽtium; Duo quilibet compoſiti, ad reliquum primi erũt.

SINT tres numeri A, B, C, minimi omnium eandem cum illis proportionem habẽtium. Dico quoslibet duos compoſitos, ad reliquum primos eſſe, numerũ A, B, ſimul ad C; & B, C, ſimul ad A; & A C, ſimul ad B. Sumptis enim duobus D, E, in eadem cum illis proportione minimis, ex ſcholio propoſ. 35 lib. 7 manifeſtũ eſt ex demonſtratione propoſ. 2. lib. 8. D, ſeipſũ multiplicantẽ facere A; multiplicantẽ vero ipſum E, facere B; atq; E, ſeipſum multiplicantẽ facere C. Quia igitur D, E, minimi in ſua proportione inter ſe primi ſunt; [a] erit & vtrvtq; D, E, ſimul ad quẽlibet illorũ primus. Itaq; cũ tã cõpoſitus ex D, E,

A, 9 B, 12. C, 16. D, 3. E, 4.

[a] 24. ſexti.
[b] 30. ſexti.

[a] 26. sept. D,E, quam ipſe D, ad E, primus ſit; [a] erit quoq; numerus factus ex D, E, tanquam vno, in D, ad eundem E, primus: Qui autem ſit ex D, E, tanquam vno, in D, æqualis eſt per 3. theorema ſcholij præcedẽtis, & numero A, facto ex D, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & A, B, compoſiti, primi ſunt ad E; [b] Ac proinde & ad C, qui factus eſt ex E, in ſe, primi ſunt A, B, ſimul compoſiti.

[b] 27. sept.

[c] 30. sept. DEINDE quia, vt prius, [c] vterque D, E, ſimul primus eſt ad quemlibet ipſorũ D, E; efficitur, (cum tam cõpoſitus ex D, E, quam ipſe E, primus ſit ad D,) numerum factum ex D, E, tanquam vno, in E, primum eſſe ad D: Qui autem ſit ex D, E, tanquam vno, in E, æqualis eſt per 3. theorem. ſcholij antecedẽtis, & numero C, facto ex E, in ſe, & numero B, facto ex D, in E. Igitur & B, C, ſimul cõpoſiti, ad D, primi ſunt, [d] atq; adeo & ad ipſum A, qui factus eſt ex D, in ſe, primi ſunt B, & C, ſimul compoſiti.

B, 12. C, 16. A, 9. D, 3. E, 4.

[d] 26. sept.

[e] 27. sept.

[e] 30. sept. POSTREMO quia, vt prius, [e] vterque D, & E, ſimul ad quemlibet ipſorum primus eſt; atq; adeo e contrario, quilibet ipſorũ D, E, primus eſt ad compoſitum ex D, E, [f] erit quoq; qui ſit ex D, in E, ad compoſitũ ex D, E, primus; [g] Ac proinde & idem qui ſit ex D, in E, ad eũ qui ſit ex D, E, tanquã vno, in ſe, primus erit. Qui autem ſit ex D, E, tanquam vno, in ſe, [h] æqualis eſt, per 4. theorem. antecedentis ſcholij, eis qui ſunt ex D, & E, in ſe ipſos, vna cum eo qui ex D, in E, bis. Igitur & factus ex D, in E, primus erit ad eos, qui ſunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex D, in E, bis. Quoniã ergo duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex ijs, qui ſiunt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui ſit ex D, in E, atq; is qui ſit ex D, in E, primi ſunt ad aliquẽ ipſorũ, nimirũ ad eũ, qui ſit ex D, in E, vt oſtenſũ eſt, [i] erunt etiam duo illi, nimirum compoſitus ex ijs, qui ſiũt ex D, & E, in ſe ipſos, & ex eo, qui fit ex D, in E, atque is, qui ſit ex D, in E, inter ſe primi. Rurſus quia duo numeri ſimul, videlicet compoſitus ex ijs, qui ſiunt ex D, & E, in ſe ipſos, atq; is, qui

A, 9. C, 16. B, 12. D, 3. E, 4.

[f] 26. sept.

[g] 27. sept.

[i] 30. sept.

is, qui fit ex D, in E, ad aliquem ipsorum, nimirum ad eũ qui fit ex D, in E, primi sunt, vt ostẽsum est;[a] erunt etiam duo illi, nimirum compositus ex ijs, qui fiunt ex D, & E, in se ipsos, atque is, qui fit ex D, in E, inter se primi. Cum igitur ex D, & E, in se ipsos fiant A, & C; Item ex D, in E, fiat B; erunt A, & C, simul compositi, primi ad B. Quam ob rem, si tres numeri deinceps proportionales, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 30. sept.

SCHOLIVM.

CAMPANVS hoc theorema aliter, & quidem facilius demonstrat de quotcunque numeris continue proportionalibus minimis, hoc modo ipsum proponens.

SI quotcunque numeri deinceps proportionales, fuerint minimi omnium eandẽ cum ipsis rationem habentium: Ad quemlibet corũ reliqui omnes simul compositi, erunt primi.

SINT continue proportionales minimi quotcunque numeri A, B, C, D. Dico ad quemlibet eorum reliquos omnes simul compositos, esse primos; Videlicet A, B, C, simul ad D; & A, B, D, simul ad C; & A, C, D, simul ad B; & B, C, D, simul ad A. Si enim A, B, C, simul non sunt primi ad D, erunt A, B, C, simul, atque D, compositi inter se; atque adeo eos aliquis numerus communis mensura metietur. Metiatur eos numerus E, si fieri potest; sumãturq; F, & G, duo minimi in ratione A, B, C, D, numerorum. Quoniam ergo A, B, C, D, continue proportionales sunt, & minimi; metitur autẽ E, aliquẽ eorũ, nempe D metietur quoq; E, alterum ipsorum F, G, vel certe compositus erit ad alterum ipsorum F, G, ex scholio propos. 14. huius libri. Atque idcirco ipsum E, & alterũ ipsorum F, G, alius numerus metietur: Metiatur eos H. Itaque cum H, metiatur F; & E,

A, 8. B, 12. C, 18. D 27.
E --- F, 2. G, 3. H ---

A, 8, B, 36, C, 54. D, 27,
E ---- F, 12. G, 18. H. ---

& E, ponatur metiri compositum ex A, B, C, & ipsum D; metiatur quoque H, eundem compositum ex A, B, C, & ipsum D. Quia vero H, metitur quoque alterum ipsorum F, G; & tam F, quam G, medios numeros B, C, metitur per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. metietur quoque H, medios B, G; ac propterea & compositum ex B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, C, & detractum compositum ex B, C, vt demonstrauimus; metietur quoque id, quod relinquitur A. Metiebatur autem & ipsum D. Sunt ergo A, D, extremi minimorum A, B, C, D, inter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur compositi inter se sunt compositus ex A, B, C, & numerus D. Ergo inter se primi.

RVRSVS, si A, B, D, simul compositi non sunt primi ad C; metietur eos, vt primus, aliquis numerus. Metiatur eos E, qui ipsum ex B, C, metiatur. Quia igitur E, metitur alterum ipsorum F, G, vel commensurus erit ad alterum ipsorum F, G. Metiatur ergo H, ipsum E, & alterum ipsum F, K. Itaque cum H, metiatur E, & E, compositum ex A, B, D; metietur etiam H, eundem compositum ex A, F, D. Quia igitur H, metitur alterum ipsorum F, G, qui metitur per coroll. 3. propos. 2. lib. 8. medios B, C; metietur quoque H, ipsos B, C. Itaque cum H, metiatur totum compositum ex A, B, D, & detractum B, metietur quoque id, quod relinquitur A, D, reliquum. Et quia H, metitur alterum ipsorum F, G, quorum F, ipsum K, & G, ipsum D, metitur, & constat ex demonstratione propos. 2. lib. 8. metietur etiam H, alterum ipsorum A, D. Igitur & reliquum. Sunt ergo A, D, extremi inter se compositi. Sed & primi inter se sunt. Quod fieri non potest. Non igitur A, B, D, simul compositi, ad C, compositus sunt. Ergo primi. Quod est propositum.

NON aliter ostendemus & A, C, D, extremos, esse ad B, primos; nec non, & B, C, D, simul ad A. Et idem generatim est de quotlibet numeris continuè proportionalibus.

17.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

SI duo numeri, primi inter se fue-

rint

11. prop.
11. prop.
11. prop.
12. prop.
12. prop.
14. prop.
11. prop.
14. prop.
13. vltimi

rint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam.

SINT primi inter ſe A, & B Dico non eſſe vt A, ad B, ita B, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita B, ad alium, nimirum ad C.

Quoniam igitur A, & B, primi ſunt inter ſe, [a] atque adeo in ſua proportione minimi; [b] ipſi æque metientur numeros B, & C, in eadem ratione exiſtentes, nimirum A, ipſum B, & B, ipſum C: Metitur autem & A, ſe ipſum. Igitur A, metitur ipſos A B, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo eſt vt A, ad B, ita B, ad alium numerum C. Eademque ratione non erit, vt B, ad A, ita A, ad alium Quare ſi duo numeri, primi inter ſe fuerint, &c. Quod demonſtrandum erat.

A .....
B .....
C ———

[a] 23. ſept.
[b] 21. ſept.

THEOR. 17. PROPOS. 17. 18.

SI fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint: Non erit vt primus ad ſecundum, ita vltimus ad alium quempiam.

SINT continue proportionales quotcunque numeri A, B, C, D, quorum extremi A, D, inter ſe primi ſint. Dico non eſſe, vt A, ad B, ita D, ad alium numerum. Si enim fieri poteſt, ſit vt A, ad B, ita D, ad alium, videlicet ad E. Erit igitur permutando vt A, ad D, ita B, ad E: Sunt autem A, D, cum ſint inter ſe primi, [c] minimi in ſua proportione. [d] Igitur æque metientur ipſos B, & E; nimirum A, ipſum

A, 8 B, 12. C, 18. D, 27. E———

[c] 23. ſept.
[d] 21. ſept.

ipſum B, & D, ipſum E. At
A,8. B,12. C,18. D,27. E---- qui eſt vt A, ad B, ita B, ad
C: Ergo cum A, metiatur
[a] 11. prop. ipſum B; & B, ipſum C, metietur; [a] atque ob id & A,
ipſum C, metietur. Et quia eſt vt B, ad C, ita C, ad
D; metitur autem B, ipſum C; metietur & C, ipſum
[b] 11. prop. D. Quare A, metiens ipſum C, [b] metietur quoque
ipſum D. Metitur vero & A, ſe ipſum. Igitur A, me-
titur ipſos A. D, inter ſe primos. Quod eſt abſurdum.
Non ergo eſt vt A, ad B, ita D, ad alium numerum E. Eo-
dem quoque argumento non erit vt D, ad C, ita A, ad
alium. Quocirca ſi fuerint quotcunque numeri dein-
ceps proportionales, &c. Quod erat oſtendendum.

19. PROBL. 1. PROPOS. 18.

DVOBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis tertius proportionalis inueniri.

DATI duo numeri ſint A, & B, oporteatque conſi-
derare, an inueniri poſsit tertius ipſis proportionalis,
hoc eſt, an ſit B, ad alium quempiam
A,4. B,7. numerum, vt A, ad B. Aut igitur A, B,
primi inter ſe ſunt, aut non. Si ſunt
[c] 16. noni inter ſe primi [c] perſpicuum eſt ex demonſtratis, non poſ-
ſe ipſis reperiri tertium proportionalem. Si vero non
ſunt A, & B, inter ſe primi; multiplicans B, ſe ipſum fa-
ciat C. Aut igitur A, metitur ipſum C, aut non. Metia-
tur primum A, ipſum C, per
A,4. B,6. D,9. C,36. D. Dico ipſis A, B, inueniri
poſſe tertium proportiona-
lem, immo ipſum D. eſſe tertium proportionalem. Cum
[d] 9 prop. enim A, metiatur C, per D, [d] fiet C, ex A, in D: Fit autẽ
ex conſtructione, idem C, ex B, in ſe ipſum. Igitur, qui
continetur ſub extremis A, D, æqualis eſt ei, qui ex me-
[e] 20. ſept. dio B, deſcribitur; [e] Ac proinde erit vt A, ad B, ita B, ad
D. Quare D, inuentus eſt tertius proportionalis ip-
ſis A, B.

SED

SED non metiatur A, ipſum C. Dico ipſis A, B, nõ poſſe reperiri tertium proportionalem. Si enim inueniri poteſt, inuentus ſit D, ita vt ſit A, ad B, quemadmodum A, 6. B, 4. D —— C, 16. B, ad D Quoniam igitur eſt, vt A, ad B, ita B, ad D; [a] erit numerus contentus ſub extremis A, D, æqualis ei, qui fit ex B, medio in ſe ipſum, hoc eſt, ipſi C. Quare cum C, fiat ex A, in D; [b] metietur A, ipſum C, per D: ſed & non metiri ponitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur inueniri poteſt ipſis A, B, tertius proportionalis, quando A, primus non metitur C, productum ex B, ſecundo in ſe ipſum. Eadem via conſiderabimus, an ipſis B, & A, inueniri poſsit alius tertius numerus, ad quem ita ſit A, vt B, ad A. Duobus ergo numeris datis conſiderauimus, &c. Quod faciendum erat.

[a] 20. ſept.

[b] 7. prop.

PROBL. 2. PROPOS. 19. 20.

TRIBVS numeris datis, conſiderare, an poſſit ipſis quartus proportionalis inueniri.

SINT dati tres numeri A, B, C, ſiue deinceps proportionales, ſiue non; oporteatque conſiderare, an poſſit reperiri quartus ipſis proportionalis, hoc eſt, an ſit C, ad aliquem alium numerum, vt A, ad B. A, 8. B, 12. C, 18. E, 27. D, 216. Multiplicans B, ipſum C, faciat D. Aut A, 4. B, 8. C, 9. E, 18. D, 72. igitur A, ipſum D, metitur, aut non. Metiatur primum A, ipſum D, per E. Dico ipſis A, B, C, inueniri poſſe quartum proportionalem, immo ipſum E, eſſe quartum proportionalem. Cum enim A, metiatur D, per E; fiet D, ex A, in E: Fit autem idem D, ex B, in C, per conſtructionem. Igitur qui ſub extremis A, E, continetur, æqualis eſt ei, qui ſub B, C, ſecundo, & tertio cõtinetur; [d] Ac propterea erit vt A, ad B, ita C, ad E. Quare inuẽtus eſt E, ipſis A, B, C, quartus ꝓportionalis.

[c] 9. prop.

[d] 19. ſept.

SED iam non metiatur A, ipsum D. Dico ipsis A, B, C, non posse inueniri quartum proportionalẽ. Sit enim, si fieri potest, inuentus quartus proportionalis E, ita vt sit quemadmodum A, ad B, ita C, ad E. Quia ergo quatuor numeri A, B, C, E, proportionales sunt,

A,4. B,6. C,9. E---- D,54.
A,3. B,4. C,10. E---- D,40.

[a] 19. sept. erit numerus contentus sub extremis A, E, æqualis ei, qui ex B, secundo fit in C, tertium, hoc est, ipsi D. Quare

[b] 7. prop. cum D, fiat ex A, in E; [b] metietur A, ipsum D, per E: sed & ponitur non metiri. Quod est absurdum. Non igitur inueniri potest ipsis A, B, C, quartus proportionalis, quando A, primus non metitur D, productum ex B, secundo in C, tertium. Eadem methodo considerabimus, an ipsis C, B, A, inueniri possit aliquis quartus, ad quem ita se habeat A, vt C, ad B. Quocirca tribus numeris datis considerauimus, an possit, &c. Quod erat faciendũ.

SCHOLIVM.

HÆC quæ proximis quatuor propositionibus, nimirum 16. 17. 18. & 19 demonstrata sunt, intelligi debent de numeris integris. Nam si de fractis loquamur, potest quibuslibet duobus, vel tribus, adiungi alius proportionalis, quamuis extremi inter se primi sint. Nam datis duobus, si quadratus numerus secundi diuidatur per primũ, procreabitur tertius proportionalis. Vt duobus numeris datis 3. 8. si quadratus numerus secundi 8. nimirum 64. diuidatur per 3. inuenietur tertius proportionalis $21\frac{1}{3}$. hoc modo. 3. 8. $21\frac{1}{3}$. Quia enim diuisis 64. per 1. sit numerus $21\frac{1}{3}$. producetur numerus diuisus 64. ex multiplicatione Quotientis $21\frac{1}{3}$. per diuisorem 3. vt ad defin. 15. lib. 7. tradidimus. Cum ergo idem numerus 64. factus sit ex medio numero 8. in se; [c] *erunt 3. 8. $21\frac{1}{3}$. continue proportionales.*

[c] 20. sept.

DATIS autem tribus numeris, si numerus ex secundo in tertium genitus diuidatur per primum, procreabitur quartus proportionalis. Vt datis tribus numeris 9. 6. 20. si numerus 120. ex secundo in tertiũ genitus diuidatur per primum 9. reperietur quartus proportionalis $13\frac{1}{3}$. hoc modo 9. 6. 20. $13\frac{1}{3}$.

Cum

Cum enim diuiſis 120. per 9. fiat 13 $\frac{1}{3}$ producetur numerus diuiſus 120 ex multiplicatione Quotientis 13 $\frac{1}{3}$. per diuiſorem 9. ex iis, quæ in defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Fit autẽ idem numerus diuiſus ex ſecundo in tertium. [a] *Igitur quatuor numeri 9. 6. 20. 13 $\frac{1}{3}$ proportionales ſunt.* [a] 19. ſept.

EX his facile cognoſcemus, propoſitis quotcunque numeris continue proportionalibus, an poſſit ipſis alius proportionalis adiungi. Sumptis enim tribus vltimis, ſi ipſis alius poteſt inueniri, ille idem erit omnibus illis proportionalis:

THEON, & qui illum ſequuntur, inter quos etiam eſt Federicus commandinus, quatuor membris hoc problema abſoluunt. Aut enim (inquit) tres dati numeri & deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; Aut non deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi primi inter ſe; Aut deinceps quidem proportionales, ſed eorum extremi non primi inter ſe; Aut denique nec deinceps proportionales, nec eorum extremi inter ſe primi. Vbi mirari ſatis non poſſum, quo nam modo diligentiſſimi Euclidis interpretes, & in alijs quidẽ demonſtrationibus vigilantiſſimi, in ſecundo membro huius problematis demonſtrando dormitarint, & quaſi ſui obliti, ac de diligentia remittentes, in errorem, eumq; non leuem, incurrerint. Dicunt enim, ſi tres numeri dati non ſint deinceps proportionales, ſed eorum extremi inter ſe primi, non poſſe ipſis quartum proportionalem inueniri. Quod quidem & falſum eſt, & demonſtratio, qua id ipſum comprobare nituntur, vitioſa. Nam falſitas huius rei perſpicue in his numeris non continue proportionalibus apparet 4. 8. 9. quorum extremi 4. 9. ſunt inter ſe primi, & nihilominus eis adiungi poteſt quartus proportionalis 18. Quis enim non videt, eſſe vt 4. ad 8. ita 9. ad 18. cum vtrobique proportio ſit ſub-dupla? Idem videri poteſt in exemplis alijs infinitis, vt hic 2. 4. 7. 14. Item 3. 9. 4. 12. Item 2. 10. 3. 15. Item 5. 10. 6. 12. &c. In omnibus enim his numeris extremi priorum eorum ſunt inter ſe primi, cum tamen ipſis adiungatur poſterior quartus proportionalis. Falſum ergo eſt, illis dari non poſſe quartum proportionalem. Quod autem vitioſa ſit eorum demonſtratio, qua hoc probare conendunt, perſpicuum fiet, ſi demonſtrationem ipſam in medium proferamus. Ita igitur ratiocinantur.

SINT trium numerorum A, B, C, non deinceps proportionalium, extremi A, C, inter ſe primi. Dico ipſis inueniri nullo modo poſſe quartum proportionalem. Si enim poteſt inueniri, ſit illę D, ita vt ſit quẽadmodum A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad C, ita fiat D, ad E. Erit igitur ex aquo, vt A, ad C, ita C, ad E: Sed ſunt A, C, inter ſe primi, [a] *& ob id minimi.* [b] *Igitur metientur aque ipſos C, E, nimirum A, ipſum C, & C, ipſum E. At vero & A, ſe ipſum metitur. Ergo A, metitur duos A, C, primos inter ſe. Quod fieri non poteſt. Ipſis igitur A, B, C, quartus proportionalis inueniri nequit.*

A, 3. B, 6. C, 8. D, 16. E

[a] 23. ſept.
[b] 21. ſept.

HÆC eſt eorum demonſtratio, in qua aſſumunt eſſe vt B, ad C, ita D, ad alium quendam numerum, videlicet ad E; quod quidem fieri poſſe, nuſquam demonſtrarunt: Immo hoc ipſum vertitur in dubium in hoc problemate. Non enim minus inquiritur, an tribus numeris B, C, D, quartus proportionalis poſſit inueniri, quam tribus A, B, C; cum non magis hoc conſtet in illis, quam in his. Quapropter cum ibi id pro conceſſo aſſumant, vt hic idem fieri non poſſe, oſtendant; liquido conſtat, eos petere principium (vt cum Dialecticis loquamur) in demonſtrando. Quin etiam, quotieſcunque quatuor numeri dantur proportionales, ſed non deinceps, quorum primus, & tertius, primi inter ſe ſunt, quales ponuntur eſſe A, B, C, D; nulla ratione fieri poteſt, vt detur alius, ad quem ita ſe habeat quartus, ſicut ſecundus ad tertium: quod tamen ipſi tanquam conceſſum, atque probatum aſſumunt; quandoquidem ſine probatione vlla exigunt, vt detur illis numerus E, ad quem ita ſe habeat quartus D, vt B, ſecundus ad C, tertiũ. Hoc vero non poſſe fieri, facile demonſtrabimus eodem argumento, quo ipſi vtuntur.

SINT enim quatuor numeri A, B, C, D, proportionales, non tamen deinceps, ſintque A, & C, primus, & tertius, inter ſe primi. Dico fieri non poſſe, vt ſit D, ad alium numerum, quemadmodum B, ad C. Sit enim, ſi poteſt fieri, vt B, ad C, ita

ita D, ad E. Eſt ergo ex æquo, vt A, ad C, ita C, ad E; Atque adeo vt ipſi oſtenderunt; metietur A, duos A, & C, primos inter ſe. Quod eſt abſurdum. Non ergo fieri poteſt, vt D, ad E, ſit, quemadmodum B, ad C. Quare apertiſſime falſum in demonſtratione ſecundi membri aſſumpſerunt Theon, & alij Euclidis interpretes, qui Theonem ſequuntur.

A 4, B 12, C 3, D 9, E

PRIMVM vero membrum perſpicuè & aperte oſtendunt. Nam ſi tres numeri deinceps proportionales ſunt, & eorum extremi inter ſe primi; [a] manifeſtum eſt, ex demonſtratis, non poſſe ipſis quartum proportionalem inuenire. Poſtrema tandem duo membra expediunt non aliter, ac nos totum problema abſoluimus.

[a] 17. noni

THEOR. 18. PROPOS. 20. 21.

PRIMI numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorũ numerorũ.

SINT propoſiti primi numeri quotcunque A, B, C. Dico ipſis A, B, C, plures eſſe primos numeros.[b] Sumpto enim numero D E, minimo, quem A, B, C, metiuntur; ponatur ei vnitas E F. Aut ergo totus D F, primus eſt, aut non primus. ſit primum primus. Sunt ergo primi numeri A, B, C, & D F, plures propoſita multitudine A, B, C.

A, 2. B, 3. C, 5.
30 1
D ---------- E . F

[b] 38. ſept.

SED iam non ſit primus D F. [c] Metietur ergo eum aliquis numerus primus, nimirum G. Dico G, primum nulli ipſorũ A, B, C, eundẽ eſſe. Si namque G, ſit idẽ, qui vnus ipſorum A, B, C; metiantur autem A, B, C, ipſum D E; & G, eundẽ D E, metietur. Quare G, metiens totum D F, & detractum D E, [d] metietur quoq; E F, reliquũ, numerus vnitatẽ. Quod eſt abſurdum. Ergo G, primus non eſt idem, qui vnus ipſorum A, B, C; Ac pro-

A, 3. B, 5. C, 7.
105 1
D ---------- E. F
53
G ------

[c] 33. ſept.

[d] 11. prop.

inde inuenti sunt primi numeri A, B, C, G, plures proposita multitudine primorum numerorũ A, B, C. Eademq; via plures inuenientur quam A, B, C, G, si sumatur minimus, quem ipsi metiantur, &c. Quocirca primi numeri plures sunt, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

POTERAT idem hoc theorema instar problematis hoc modo proponi.

PRIMIS numeris quotcunque propositis, inuenire alium primum numerum ab illis diuersum.

NAM si primi quotcunque propositi sint A, B, C, inueniemus eodem modo alium primum ab illis diuersum, videlicet D F, si primus est, vel certe G, qui ipsum D F, metitur. Atque eodem modo quatuor primis alium quintum, & quinque primis alium sextum inueniemus; & sic deinceps primos numeros, quotquot quis volet, inueniemus.

22. ## THEOR. 19. PROPOS. 21.

SI pares numeri quotcunque componantur: totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque pares numeri A B, B C, C D. Dico & totum compositum A D, parem esse. Cum enim A B, B C, C D, sint pares, habebunt singuli singulas partes dimidias, ex definitione. Sit ergo E, dimidia pars ipsius A B; & F, ipsius B C; & G, ipsius C D.

A ..... B .... C ....., D
E . . . F , . G ....

Quoniam igitur est vt A B, ad E, ita B C, ad F; & C D, ad G; (quod semper sit proportio dupla:) erit quoque vt A B, ad E, ita A D, ad E, F, G.

a 12. sept.

E,F,G,simul. Est autem AB, ipsius E, duplus Igitur & totus A D, compositi ex E,F,G, duplus erit; Ac propterea A D, dimidiam partem habens numerum ex E, F, G, compositum par erit, ex definitione. Si igitur pares numeri quotcunque, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 20. PROPOS. 22. 23.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsornm sit par: Totus par erit.

COMPONANTVR quotcunque numeri impares, quorum multitudo par A B, B C, C D. D E. Dico & totum compositum A E, parem esse. Cum enim A B, BC, CD, DE, sint impares; differet A ... B ..... C ..... D ..... E quilibet vnitate 1 pari, ex definitione. Quare detracta ab vnoquoque vnitate, quilibet reliquorum par erit. [a] Quare, & compositus ex ipsis par erit. Est autem & multitudo vnitatum detractarum par. [b] Igitur & totus A E, compositus par erit. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 21. noni

[b] 21. noni

THEOR. 21. PROPOS. 23. 24.

SI impares numeri quotcunq; componantur, multitudo autem ipsorum sit impar: & totus impar erit.

QVOTCVNQVE numeri impares, quorũ multitudo impar est, A B, B C, C D, componantur. Dico & totum A D, compositum, imparem esse. Cum enim impar numerus differat vnitate à pari, ex definitione; ablata

ablata vnitate E D, ab impari C D; erit reliquus C E, par. a Est autē & A C, compoſitus ex imparibus A B, B C, multitudine paribus, par. b Igitur & A E, compoſitus ex paribus A C, C E, par erit. Quare addita unitate E D, totus A D, impar erit, cum impar a pari differat unitate, ex definitione. Si igitur impares numeri quotcunque, &c. Quod oſtendendum erat.

A ..... B ... C ..... E . D

a 22. noni

b 21. noni

SCHOLIVM

PARI ratione, Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus numeris additus faciet imparem. Nam dempta vnitate ex impare, reliquus erit par; cum ex defin. Impar à pari differat vnitate. c *Quare reliquus ille par cum alio pari dato; vel cum pluribus datis, conficiet parem. Addita ergo rurſus illa vnitate, totus fiet impar; cum à pari ſola vnitate differat. Quod eſt propoſitum.*

c 21. noni

25. ## THEOR. 22. PROPOS. 24.

SI a pari numero par detrahatur: Et reliquus par erit.

EX pari numero A B, detrahatur par C B. Dico & reliquum A C, parem eſſe. Aut enim C B, par detractus dimidia pars eſt ipſius A B, aut maior quam dimidia pars, vel minor. Sit primū dimidia pars. Cum igitur ipſi C B, pari æqualis ſit A C, reliqua pars dimidia; erit & A C, numerus par.

A ..... C ..... B

SED iam C B, par detractus maior ſit, vel minor dimidia parte ipſius A B. Quoniam igitur A B, C B, pares numeri, dimidias partes habent, ex definitione; ſit D B, dimidia pars ipſius A B; & E B, dimidia ipſius C B. Itaque cum ſit vt A B, ad D B, dimidium, ita C B, ad E B, dimidium;

midiũ; erit permutando vt A B, ad C B, ita D B, ad E B; & diuidẽ do vt A C, ad D E, ita C B, ad E B; Rursusque permutando, vt A C, ad D E ita C B, ad E B. Atqui C B, ipsius E B, duplus est: Igitur & A C, ipsius D E, duplus erit; Ac propterea A C, cum bifariam diuidatur, (quod D E, sit eius pars dimidia) par erit Si ergo a pari numero par detrahatur, &c. Quod erat ostendendum.

A..... C. D... E.....B
A..... D ... C.. E.. B

THEOR. 23. PROPOS. 25. 26.

SI a pari numero impar detrahatur: Et reliquus impar erit.

EX pari numero A B, impar detrahatur C B. Dico & reliquum A C, imparem esse. Detracta enim vnitate C D, ex C B, reliquus sit numerus D B, par. Quia igitur & totus A B, ponitur par; erit & reliquus A D, par. Dempta ergo vnitate C D, reliquus A C, impar erit Si igitur a pari numero impar detrahatur, &c. Quod demonstrandum erat.

A..... C. D .... B

a 24. noni

THEOR. 24. PROPOS. 26. 27.

SI ab impari numero impar detrahatur: Reliquus par erit.

EX impari numero A B, impar detrahatur C B. Dico reliquum A C, parem esse. Detracta enim D B, vnitate ex imparibus A B, C B; erunt reliqui A D, C D, pares. Quia ergo ex pari A D, par aufertur C D; erit & reliquus A C par. Quare si ab impari numero impar detrahatur, &c. Quod erat demõstrãdũ.

A.... C.....D. B

b 24. noni

THEOR.

28. ## THEOR. 25. PROPOS. 27.

SI ab impari numero par detrahatur: Reliquus impar erit.

EX impari A B, detrahatur par C B. Dico reliquum A C, imparem eſſe. Detracta enim A D, vnitate ex impare A B; erit reliquus D B, par: Ex quo cum detrahatur C B, par; reliquus DC, par quoq; erit; Ac proinde addita vnitate A D, fiet A C, impar. Si ergo ab impari numero par detrahatur, &c. Quod demonſtrandum erat.

a 24. noni

A . D . . . . C . . . . . B

29. ## THEOR. 26. PROPOS. 28.

SI impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem: Factus par erit:

FIAT ex A, impari in B, parem numerus C. Dico C, parem eſſe. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipſi B, æqualibus, quot in A, ſunt vnitates Quare cum B, ſit par, componetur C, ex tot paribus ipſi B, æqualibus, quot ſunt vnitates in A; [b] Atq; adeo par erit. Si ergo impar numerus parem multiplicans, &c. Quod oſtendendum erat.

A . . . B . . . .

C . . . . . .

b 21. noni

SCHOLIVM.

EADEM demonſtratione oſtendemus & hoc.

SI par numerus parem multiplicans fecerit aliquem; Factus par erit.

NAM

NAM rursus C, componetur ex tot paribus ipsi B, aequalibus, quot in A, continentur unitates, &c.

A . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

CONSTAT quoque ex his, Parem numerum in se multiplicatum procreare parem: vt patet, si pares A, & B, ponantur aquales.

THEOR. 27. PROPOS. 29. 30.

SI impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem. Factus impar erit.

EX impari A, in imparem B, fiat C. Dico C, imparē esse. Cum enim C, fiat ex A, in B; componetur C, ex tot numeris ipsi B, æqualibus, quot sunt vnitates in A. Quare cum tam A, quam B, sit impar; componetur C, ex imparibus ipsis B, æqualibus, quorum multitudo impar est, nimirū æqualis multitudini vnitatum, quæ in A, impari continentur. Igitur C, impar erit. Quocirca si impar numerus imparem numerum multiplicans, &c. Quod erat ostendendum. *23 noni

A . . . B . . . . . .
C . . . . . .

COROLLARIVM.

HINC sequitur, Imparem numerum in se multiplicatum gignere imparem: vt constat, si impares A, & B, ponantur aquales.

EX

EX CAMPANO.

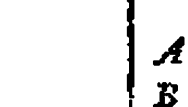
NVMERVS impar numerum parem metiens, per numerum parem eum metitur.



METIATVR impar A, parem B, per C. Dico C, parem esse. Nam si impar sit; [a] *erit B, factus ex A, impari in C, imparem impar. Quod est absurdum, cum ponatur par. Est ergo C, par.*

[a] 29. noni

NVMERVS impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur.



METIATVR impar A, imparem B, per C. Dico C, imparem esse. Si enim sit par; [b] *erit B, factus ex A, impari in C, parem par. Quod est absurdum, cum impar ponatur. Est ergo C, impar.*

[b] 28. noni

SCHOLIVM.

EX *his clarissimè quoque demonstrabimus theorema* 11. *lib.* 2. *numeris non posse accommodari:* [A] *quod etiam in scholio propos.* 14. *huius lib. aliter ostendimus; recepimusq; nos hoc loco clarius demonstraturos. Secetur enim, si fieri potest, numerus A B, in partes A C, C B, ita vt numerus ex A B, in C B, factus, aequalis sit quadrato reliquae partis A C.*



Aut igitur vtraque pars A C, C B, impar est, aut maior A C, impar, & minor C B, par; aut contra, maior A C, par, & minor C B, impar; aut denique vtraque pars A C, C B, par. Sit primum vtraque pars A C, C B, impar, [c] *ideoque totus numerus A B, par.* [d] *Igitur qui fit ex A B, in C B, par est: qui vero ex A C, in se fit, impar est, ex Coroll. huius propos.* 29. *Cum ergo numerus ex A B, in C B,*

[c] 23. noni
[d] 28. noni.

C B, genitus ponatur æqualis ei, qui fit ex A C, in ſe; erit par numerus impari æqualis. quod fieri non poteſt.

DEINDE ſit A C, impar, & C B, par, ideoque ex ſcholio propoſ. 23. huius lib. totus A B, impar. [a] *Quia ergo numerus ex A B, impare in parem C B, factus, par eſt: & numerus ex impare A C, in ſe genitus, impar, ex coroll. huius propoſ. 29. erit rurſus ille par huic impari æqualis. quod eſt abſurdum.* [a] 28. noni

TERTIO ſit A C, par, & C B, impar; ideoque ex ſcholio propoſ. 23. huius lib. totus A B, impar. [b] *Quia ergo numerus ex A B, impare in imparem C B, factus, impar eſt: & numerus ex pare A C, in ſe genitus, par, ex coroll. propoſ. 28. huius lib. erit rurſus ille impar huic pari æqualis. quod abſurdum eſt.* [b] 29. noni

QVARTO ſit vtraque pars A C, C B, par. Inueneris igitur, ex ſcholio propoſ. 35. lib. 7. duobus numeris minimis D, E, in proportione A C, ad C B; [c] *erunt D, E, inter ſe primi: ac proinde ambo pares non erunt, ſed vel vterque impar, vel vnus impar, & alter par. Et quia eſt, vt A C, ad C B, ita D, ad E; erit conuertendo, vt C B, ad A C, ita E, ad D: Et componendo, vt A B, ad A C, ita totus D E, ad D:* [d] *Eſt autem, vt A B, ad A C, ita A C, ad C B; quòd numerus factus ex A B, in C B, æqualis ponatur quadrato medij A C. Igitur erit quoque vt totus D E, ad D, ita D, ad E,* [e] *ac proinde numerus, qui fit ex toto D E, in E, æqualis erit quadrato ipſius D. Totus ergo numerus D E, ſectus eſt in partes D, E, quarum vel vtraque impar eſt, vel vna impar, & altera par; ita vt numerus factus ex toto D E, in partem E, æqualis ſit quadrato alterius partis D. quod fieri non poſſe, iam demonſtratum eſt in numero A B, quando vtraque pars A C, C B, vel impar eſt, vel vna impar, & altera par. Conſtat ergo propoſitum.* [c] 34. ſept. [d] 20. ſept. [e] 20. ſept.

THEOR. 28. PROPOS. 30. 33.

SI impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur.

METIATVR impar A, parem B. Dico A, dimidiũ quoq; ipſius B, metiri. Metiatur A, ipſũ B, per C. Erit ergo,

ergo, ex ijs, quæ in antecedente propoſ. ex Campano demonſtrauimus, numerus C, par; Atque adeo dimidiã
[a] 8. *tron.* partem habebit. Itaque cum A metiatur B, per C, [a] metietur quoque C, ipſum B, per A;
A... C.... Ac proinde C, pars erit ipſius B, de-
B ..... nominata ab A, vt ad 3 definitionẽ lib. 7 docuimus. Quoniam vero eſt vt C, ad dimidium ſui, ita B, ad dimidium ſui; & permutando vt C, ad B, ita dimidia pars ipſius C, ad dimidiam partem ipſius B: Eſt autem C, pars ipſius B, denominata ab A, vt oſtenſum eſt; erit & dimidium ipſius C, dimidij
[b] 40. *ſept.* ipſius B, pars ab eodem A, denominata, [b] Ac propterea A, dimidium ipſius B, metietur. Si impar ergo numerus parem numerum metiatur, &c. Quod erat oſtendendũ.

34. THEOR. 29. PROPOS. 31.

SI impar numerus ad aliquem numerum primus ſit: & ad illius duplum primus erit.

IMPAR numerus A, primus ſit ad numerum B, cuius duplus ſit C. Dico A, ad C, quoque primum eſſe. Si enim A, C, non ſunt inter ſe primi; metietur eos aliquis
numerus, qui ſit D; qui
A ..... B..... neceſſario impar erit. Nã
C.....D —— ſi ſit par, cũ metiatur impa-
rem A; [c] erit A factus
[c] 8. *noni* ex D, pari in eum numerũ, per quem metitur, par. Quod eſt abſurdum ponitur enim A, impar. Quare D, impar parem C, metitur; (eſt enim C, par, cum dimidium habeat B.) [d] metietur quoque numerum B, eius dimidium:
[d] 30. *noni* Metitur autem & A, Igitur D, ipſos A, B, primos inter ſe metitur. Quod eſt abſurdum. Non igitur A, ad C, primus non eſt Ergo primus. Quapropter ſi impar numerus ad aliquem numerum primus ſit, &c. Quod erat oſtendendum.

COROL-

COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, numerum imparem, qui ad aliquem numerum primus est, primum quoque esse non solum ad eius duplum, vt Euclides demonstrauit, sed etiam ad eius quadruplum, octuplum, sedecuplum, & sic deinceps per proportionem duplam progrediendo. Nam si primus est ad duplum, [a] primus quoque erit ad quadruplum, qui dupli duplus est: Et similiter ad octuplum, qui quadrupli duplus est, &c.

[a] 31. noni

THEOR. 30. PROPOS. 32. 35.

NVMERORVM à binario duplorum vnusquisque pariter par est tãtum.

NVMERI a binario A, dupli quotcunque sint B, C, D, E. Dico B, C, D, E, esse pariter pares tantum. Quod enim sint pariter pares, perspicuum est, Nam exposita vnitate, cum A, sit binarius, & B, C, D, E, a binario dupli; erunt A, B, C, D, E, ab vnitate deinceps proportionales, nimirum in proportione dupla. [b] Quare A, quilibet ipsorum B, C, D, E, & quilibet minor maiorem sequentem metietur per aliquem ipsorum A, B, C, D, E; qui cum omnes sint pares, vtpote dupli a binario; metietur quemlibet ipsorum B, C, D, E, par numerus per numerum parem; Ac propterea quilibet pariter par erit, ex definitione.

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16. E, 32.

[b] 31. noni

QVOD autem ijdem numeri sint pariter pares tantum, liquido etiam constat. Cum enim A, B, C, D, E, sint ab vnitate continue proportionales, sitque A, proximus vnitati numerus primus, nimirũ binarius; [c] nullus alius quemlibet ipsorum metietur, præter ipsos A, B, C, D, E;

[c] 13 noni

qui cum sint omnes pares; metietur quemlibet ipsorum par numerus per parem numerum tantum: Ac propterea quilibet pariter par est tantum. Numerorum igitur a binario duplorum, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HINC cum Arithmeticis facile colligemus artem, qua omnes numeros inueniamus, qui sint pariter pares tantum.

Sint. n. A, B, C, D, E, F, à binario dupli, qui ex hic demonstratis omnes sunt pariter pares tantum.

A,4. B,8. C,16. D,32. E,64. F,128.

I —— H —— G ——

Dico nullum alium esse pariter parem tantum, praeter eos, qui in hoc ordine continentur; Atque adeo si ordo numerorum a binario duplorum infinite augeatur, omnes numeros pariter pares tantū inueniri, nullo relicto. Si enim fieri potest, sit alius numerus G, extra ordinem numerorum a binario duplorum, pariter par tantum, cuius pars dimidia sit H. Erit igitur H, numerus par: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars dimidia; metietur binarius, numerus par, ipsum G, per H, numerum imparem; Atque adeo G, pariter impar erit. Quod est absurdum: ponitur namque pariter par tantum) cuius rursum dimidia pars sit I. Erit igitur rursum I, par numerus: (Nam si dicatur impar, cum sit ipsius G, pars quarta; metietur numerus par 4. ipsum G, per I, numerum imparem; Atque ob id G, pariter impar erit; Quod est absurdum: ponitur enim pariter par tantum.) Atque ita deinceps erit semper dimidia pars numerus par, donec ad vnitatem veniamus. Sit ergo iam ipsius I, dimidia pars vnitas, ita vt sit I, binarius. Igitur H, G, sint a binario I, dupli; Ac proinde G, erit aliquis ex ordine ipsorum A, B, C, D, E, F. ponitur autē, non esse. Quod est absurdum. Nullus ergo alius pariter par est tantum, praeter eos, qui a binario sunt dupli.

36. THEOR. 31. PROPOS. 33.

SI numerus dimidium habeat imparem: Pariter impar est tantum.

HABEAT

HABEAT numerus A: dimidiam partem numerum imparem. Dico A, eſſe pariter imparem tantum. Quod enim ſit pariter impar, ita perſpicuum fiet. Quoniã A ..... A, dimidium habet imparem; metietur binarius numerus par ipſum A, per illum dimidium imparem. Quare A, ex definitione, pariter impar eſt. Quod autem idem A, ſit pariter impar tantum, hoc modo demonſtrabimus. Sit B, dimidia pars ipſis A; & C, binarius. Si igitur A, non eſt pariter impar tantum; ipſe erit quoque pariter par. Quare eum metietur aliquis par numerus per parem numerum. Metiatur eum D, par per parem E. [a] Igitur fit A, ex D, in E: ſed idem A, fit ex C, binario in B, eius dimidium. Ergo numerus factus ex C, primo in B, quartũ æqualis eſt ei, qui fit ex D, ſecundo in E, tertium. [b] Ac propterea erit vt C, ad D, ita E, ad B. Metitur autem C, binarius parem D. Igitur & E, ipſum B, metietur, par impa rem. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo A, pariter par. Ergo pariter impar tantum. Quocirca ſi numerus dimidium habeat imparem, &c. Quod demonſtrandum erat.

A .....
B ..... C ..
D ----- E ----

[a] 9. prim.

[b] 19. ſept.

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi omnium numerorum imparium dupli ſumantur, inuenientur omnes numeri, qui ſunt pariter impares tantum.

Impares.	3. 5. 7. 9. 11. 13. 15.
Pariter impares tantũ.	6. 10. 14. 18. 22. 26. 30.

Quod enim quilibet illorum ſit pariter impar tãtum, conſtat ex hac propoſitione; quippe cum quilibet dimidium habeat imparem. Quod autem illi ſoli ſint pariter impares tantum, perſpicuum erit ex ſequenti theoremate, in quo demõſtratur, omnes pares, qui nec a binario ſunt dupli, neque dimidios habent impares, eſſe pariter pares, & pariter impares. Cum ergo

nullus alius par habeat dimidium imparem, praeter duplos imparium numerorum; manifestum est, nullum alium, praeter ipsos, esse pariter imparem tantum; sed vel esse pariter parem tantum, vel certe pariter parem & pariter imparem.

37.

THEOR. 32. PROPOS. 34.

SI par numerus neque a binario duplus sit, neque dimidium habeat imparem: Pariter par est, & pariter impar.

PAR numerus A, neque sit a binario duplus, neque dimidium habeat imparem, sed parem. Dico A, & pariter parem esse, & pariter imparem. Quod enim sit pariter par, liquet,

A .....

Nam cum dimidium habeat parem, metietur cum binarius, par numerus, per parem, nempe per dimidium. Igitur ex definitione, pariter par est.

QVOD autem idem A, sit etiam pariter impar, ita ostendemus. Diuiso A, bifariam, & eius dimidio rursus bifariam, & ita deinceps; tandem incidemus in aliquem imparem. Nam si in binarium incideremus, esset A, a binario duplus; ponitur autem & non duplus. Quod est absurdum. Igitur cum in imparem incidamus, metietur ille impar ipsum A, per numerum parem: Alias si per imparem metiretur, * cum impar imparem multiplicans faciat imparem; esset A, factus ex illo impare in hunc imparem, impar. Quod est absurdum. ponitur enim par. Quare cum impar metiatur A, per parem; atque adeo vicissim par per imparem; erit ex definitione A, pariter impar. Fuit autem & pariter par. Igitur est & pariter par, & pariter impar. Si par ergo numerus neque a binario duplus sit, &c. Quod ostendendum erat.

* 29. noni

SCHO-

SCHOLIVM.

FACILE ex hic inueniemus omnes numeros, qui & pariter pares sint, & pariter impares. Relictis enim omnibus illis, qui a binario sunt dupli, & omnibus, qui dimidios habent impares; erunt ex hac propos. omnes alij pares, & pariter pares & pariter impares.

PORRO ex proximis tribus theorematibus aperte intelliguntur ea, quæ in definitionem 9. lib. 7. scripsimus.

THEOR. 33. PROPOS. 35. 38.

SI sint quotcunq; numeri deinceps proportionales, detrahantur autem a secundo, & vltimo æquales ipsi primo: Erit vt secundi excessus ad primum, ita vltimi excessus ad omnes ipsum antecedentes.

SINT quotcunque numeri continue proportionales A, B C, D, E F; & ex B C, secundo, & E F, vltimo detrahantur C G, F H, primo A, æquales. Dico esse vt B G, ad A, ita E H, ad A, B C, & D, simul. Detrahatur F I, ipsi B C, & F K, ipsi D, æqualis. Quoniam igitur F I, æqualis est ipsi B C, & ablatus F H, ablato C G; erit & reliquus I H, reliquo B G, æqualis. Quia vero est vt A, ad B C, ita B C, ad D, & D, ad E F; conuertendoque vt E F, ad D, ita D, ad B C, & B C, ad A; Atque



est K F, ipsi D, & I F, ipsi B C, & H F, ipsi A, æqualis: Erit quoque vt E F, ad K F, ita K F, ad I F, & I F, ad H F. Diuidendo igitur vt E K, ad K F, ita K I, ad I F, & I H, ad H F; a Ac proinde ita etiam erunt omnes E K, K I, I H, ad omnes K F, I F, H F, hoc est, totus E H, ad D, B C, A, simul, (quibus sumpti sunt æquales K F, I F, H F,) vt I H, ad H F, hoc est, vt B G, ad A; sunt enim B G, & A, ipsis I H, & H F, æquales. Quare si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, &c. Quod demonstrandum erat.

a 12. sept.

SCHOLIVM.

EX hoc theoremate veniemus in notitiam summæ quotcunque numerorum cõtinue proportionalium, si modo primus, secundus, & vltimus fuerint noti. Cum enim sit vt excessus secundi ad primum, ita excessus vltimi ad omnes ipsum antecedentes; Si primus a secundo, & vltimo demptus, fiatque vt reliquus secundi ad primum, ita reliquus vltimi ad aliũ: Erit hic alius summa omnium numerorum proportionalium, qui vltimum antecedunt. Si igitur adijciatur vltimus, habebitur tota summa. Inuenietur autem quartus ille proportionalis, si primus multiplicetur in excessum vltimi, & productus diuidatur in excessum secundi: vt liquet ex scholio propos. 19. huius lib. quandoquidem tres dati numeri, quibus quartus proportionalis inueniendus est, sunt, excessus secundi, primus, & excessus vltimi: Vt in exemplo apposito, si primus numerus, nimirũ vnitas, detrahatur ex 3. secundo, & ex 2187. vltimo; erunt reliqui excessus, 2. 2186. Quoniam igitur debet esse vt 2. ad 1. ita 2186. ad summã omniũ, excepto vltimo, si secũdus numerus 1. multiplicetur per tertiũ 2186. fiet numerus 2186. qui si diuidatur in primum 2. exurget numerus 1093. Videlicet summa omnium, excluso vltimo 2187. qui si adiungatur summæ inuentæ 1093. procreabitur summa omnium 3280.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

THEOR.

THEOR. 34. PROPOS. 36.

39.

SI ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compositus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: Factus erit perfectus.

SINT ab vnitate quotcunque numeri A,B,C,D, dupli, quoad E, ex illis compositus sit primus; & E, multiplicans D, ultimum faciat F. Dico F, esse numerũ perfectum. Quot enim sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E, dupli, nimirum E,G,H,I. Quia igitur A,B,C,D, eandem rationem habent, quam E,G,H,I; erit ex æquo, vt A, ad D, ita E, ad I; [a] Ac propterea numerus factus ex A, primo in I, quartum æqualis est facto ex D, secundo in E, tertium: Factus est autem F, ex D, in E. Igitur idem F, fiet ex A, in I; [b] ideoque I, ipsum F, metietur per A, binarium; & ob hoc F, ipsius I. duplus erit. Quare E, G, H, I, F, deinceps dupli sunt. Detrahantur ex G, secundo, & ex F, vltimo numeri K, L, primo E, æquales, sintque reliqui excessus M, N. [c] Erit igitur vt M, ad E, ita N, ad E, G, H, I, simul: Est autem M, æqualis ipsi E. (Cum enim G, duplus sit ipsius E, ablatusque sit K, ipsi E, æqualis; erit & reliquus M, ipsi E, æqualis.) Ergo & N, æqualis est ipsis E, G, H, I, simul. Additis igitur æqualibus, nimirum numero L, (qui æqualis est ipsi E, ablatus) & numero composito ex vnitate, & A, B, C, D, numeris; (qui com-

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G ——— 62. H, 124. I, 248. F ——— 496.
K, 31. M, 31. L, 31. N, 465.
O ——— P ———

[a] 19. *sept.*

[b] 7. *pron.*

[c] 35. *noni*.

compoſitus eidem E, per conſtructionem, eſt æqualis) erit compoſitus ex LN, nimirum ipſa F, æqualis vnitati, & numeris A, B, C, D, E, G, H, I, ſimul. Quare cum vni-

Vnitas. A, 2. B, 4. C, 8. D, 16.
E, 31. G——62. H, 124. I, 248. F——496
K, 31. M, 31. L, 31. N. 465.
O—— P——

tas, & omnes numeri A, B, C, D, E, G, H, I, metiantur ipſum F; (Cum enim F, factus ſit ex E, in D; [a] metietur D, ipſum F; [b] atque adeo eundem F, metietur vnitas, & numeri A, B, C, [c] qui ipſum D, metiuntur. Rurſus cum I, ipſum F, metiatur, vt oſtenſum eſt, [d] metientur quoque eundem F, numeri E, G, H, [e] qui ipſum I, propter proportionem duplam, metiuntur) & nullus alius numerus ipſum F, metiatur, vt mox oſtendemus; Erunt vnitas & numeri A, B C, D, E, G, H, I, omnes partes, quas F, habere poteſt: Quibus cum æqualis oſtenſus ſit ipſe F; erit F, ex definitione, perfectus.

QVOD autem nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, ipſum F, metiatur, ita demonſtrabimus. Metiatur, ſi fieri poteſt, alius numerus O, præter illos, ipſum F, per P; [f] atque adeo F, fiat ex O, in P: Sed & idem F, factus eſt ex E, in D. Idem ergo numerus fit ex E, primo in D, quartum, & ex P, ſecundo in O, tertium; [g] ac propterea eſt vt E, ad P, ita O, ad D. Quoniam vero, cũ A, B, C, D, ab vnitate ſint proportionales, & A, proximus vnitati primus, [h] vltimum D, nullus alius, præter A, B, C, metitur: & O, ponitur non idem, qui aliquis ipſorum A, B, C; non metietur O, ipſum D. Vt autem O, ad D, ita erat E, ad P; neque igitur E ipſum P, metietur. Cum ergo E, primus ſit, [i] erunt E, & P, inter ſe primi; [k] ideoq; in ſua proportione minimi: [l] Ac proinde æque metietur E, ipſum O, & P, ipſum D. [m] Nullus vero alius præter A, B, C, ipſum D, metitur. Igitur P, idem erit, qui aliquis ipſorũ A, B, C. Sit ergo idem, qui B, & quot ſunt B, C, D, tot ab E, ſumantur dupli E, G, H. Erit igitur ex æquo, vt B, ad D, ita E, ad H; [n] Ac proinde idem numerus

[a] 7. *prop.*
[b] 11. *prop.*
[c] 11. *noni*
[d] 11. *prop.*
[e] 11. *noni*
[f] 9. *prop.*
[g] 19. *ſup.*
[h] 13. *octaui*
[i] 31. *ſept.*
[k] 23. *ſept.*
[l] 21. *ſept.*
[m] 23. *octa.*
[n] 19. *ſept.*

rus fiet ex B, primo in H, quartum, qui ex D, ſecundo in E, tertium. Qui autem ex D, in E, æqualis fuit ei, qui ex P, in O. Idem ergo fiet ex P, in O, qui ex B, in H, [a] atque adeo erit, vt P, ad B, ita H, ad O. Erat autem P, idem qui B: Igitur & H, idem eſt, qui O. Quod eſt abſurdum. ponitur enim O, diuerſus ab omnibus A, B, C, D, E, G, H, I. Non igitur alius numerus O, ipſum F, metitur, ſed ipſum ſoli A, B, C, D, E, G H, I, metiuntur. Quam ob rem, ſi ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 19. ſept.

SCHOLIVM.

EX hoc theremate elicitur modus inueniendi omnes numeros perfectos, & earum partes aliquotas, quibus ſimul ſumptis, iuxta definitionem numeri perfecti, ipſi æquales ſunt. Si enim quotcunque numeri ab vnitate dupli in vnam ſummã colligantur, donec compoſitus ſit numerus primus, Erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorũ, perfectus. Quod ſi ab illo primo, qui ex illis duplis componitur, ſumantur tot continue dupli (ipſo primo etiam computato) quot ſunt numeri illi dupli ab vnitate, excluſa vnitate; erunt hi numeri accepti, & illi ab vnitate dupli, vna cum ipſa vnitate, omnes partes aliquotæ, quas perfectus numerus inuentus habere poteſt. Quæ omnia perſpicua ſunt ex demonſtratione theorematis, & facile ex ſubiectis exemplis percipi poſſunt. Vt quia numerus 3. compoſitus ex 1. 2. primus eſt; erit propterea numerus 6. qui fit ex 3. in 2. vltimum duplorum, perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 3. Item, quia cõpoſitus ex his 1. 2. 4. nimirum 7. primus eſt: idcirco 28. factus ex 7. in 4. eſt perfectus habens has partes aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. At vero quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. hoc eſt. 15. non eſt primus; non erit 120. factus ex 15. in 8. perfectus.

DENIQVE quia compoſitus ex his 1. 2. 4. 8. 16. nimirum 31. primus eſt; erit 496. factus ex 31. in 16. numerus perfectus, cuius partes aliquotæ ſunt 1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248. Eodem modo & reliquos perfectos numeros inueniemus.

LVBET hoc loco demonſtrare proprietates quaſdam propor-

proportionalitatis Geometricæ, qua nititur admirabilis illa proprietas, quam libro 5. ſeptimo loco, cum de proportionalitate Geometrica ageremus, expoſuimus. hinc exordientes.

I

QVOLIBET numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus conuerſo ordine proportionales.

NVMERVS enim A, diuiſus per B, C, faciat quotientes D, E. Dico eſſe, vt B, ad C, ita E, ad D. Quoniam enim diuiſo A, per B, fit Quotiens D; fiet A, ex B, in D, vt ad defin. 15. lib. 7. ſcripſimus. Eadem ratione idem A, fiet ex C, in E. Quia ergo idem numerus A, fit ex B, primo in D, quartum, & ex C, ſecundo in E, tertium; * *erit vt B, primus ad C, ſecundum, ita E, tertius ad D, quartum. Quod eſt propoſitum.*

A, 48. B, 8. C, 3. D, 6. E, 16.

* 19. ſept.

II.

QVOLIBET numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quotientibus reſpondentibus conuerſo ordine proportionales,

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, ſint Quotiens F, G, H, I. Dico eſſe, vt B, ad C, ita G, ad F: Et vt C, ad D, ita H, ad G: Et vt D, ad E, ita I, ad H. Hoc autem manifeſtum eſt ex theoremate 1. proxime demonſtrato. Cum enim duo B, C, diuidentes A, faciant F, G; erit vt B, ad C, ita G, ad F. Itē cum duo C, D, diuidentes A, faciant G, H; erit vt C, ad D, ita

A, 48. B, 3. C, 4. D, 8. E, 6. F, 16. G, 12. H, 6. I, 8.

ita H, ad Q. Item cum duo D, E, diuidentes A, faciant H, I; erit vt D, ad E, ita I, ad H: Atque ita deinceps, si plures fuerint. Quod est propositum.

III.

QVOLIBET numero per quotuis numeros continue proportionales diuiso, erunt Quotientes conuerso ordine in eadem proportione continuè proportionales.

DIVISO enim numero A, per B, C, D, E, continuè proportionales, sint Quotientes F, G, H, I. Dico I, H, G, F, in eadem proportione B, ad C, continuè proportionales esse.

A, 15.
B, 1. C, 2. D, 4. E, 8.
F, 15, G, 7-1/2. H, 3-3/4. I, 1-7/8.

Quoniam enim per 2. theorema est, vt D, ad E, ita I, ad H: Et vt C, ad D, hoc est, vt D, ad E, ita H, ad G; Et vt B, ad C, hoc est, vt C, ad D, & D, ad E, ita G, ad F; erunt I, H, G, F, continue proportionales in proportione D, ad E, vel B, ad C. Quod est propositum.

IIII.

SI sint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eisdem proportionibus; erit vt summa priorum ad quemlibet eorum, ita summa posteriorum ad eum, qui illi in posterioribus respondet.

SINT quotuis numeri A, B, C, quorum summa D: Et totidem alij E, F, G, quorum summa H; sitque vt A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G. Dico esse, vt D, ad A, B, C, sigillatim, ita H, ad E, F, G,

A, 3. B, 6. C, 20. D, 29.
E, 6. F, 12. G, 40. H, 58.

E, F, G, ſigillatim. Cum enim ſit, vt A, ad B, ita E, ad F; erit componendo, vt A, B, ſimul ad B, ita E, F, ſimul ad F: Vt autem B, ad C, ita eſt F, ad G. Igitur ex æquo, vt A, B, ſimul ad C, ita erit E, F, ſimul ad G: Et componendo, vt A, B, C, ſimul, hoc eſt, vt D, ad C, ita E, F, G, ſimul, hoc eſt, H, ad G. quod eſt propoſitum.

QVIA igitur eſt, vt D, ad C, ita H, ad G: Et conuertendo, vt C, ad B, ita G, ad F; erit ex æquo, vt D, ad B, ita H, ad F. quod eſt propoſitum.

DENIQVE quia eſt, vt D, ad B, ita H, ad F: Et conuertendo, vt B, ad A, ita F, ad E; erit ex æquo, vt D, ad A, ita H, ad E. quod eſt propoſitum. Eademq; ratio eſt de pluribus.

V.

SI ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdē proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdem prorſus Quotientes, quos ſumma poſteriorum per ipſos diuiſa facit.

NAM, vt in in 4. theor. oſtenſum eſt, eadem proportio eſt ſummæ priorum ad primum, quæ ſummæ poſteriorum ad primum: ac proinde vtriuſq; proportionis idem denominator erit. Cum ergo ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem gignatur denominator proportionis; idem Quotiens omnino procreabitur, ſi vtraq; ſumma ſeorſum per primos numeros, quæq; per ſuum, diuidatur. Eademq; ratio eſt, ſi per ſecundos, tertios, quartos, &c. diuiſio fiat. Conſtat ergo propoſ.

VI.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; Et Quotientum ſumma per ipſos Quotientes;

Et

Et horum ſecundorum Quotiẽtum ſumma per eoſdem ſecundos Quotientes; & ſic deinceps in infinitũ: procreabuntur alternis ſemper ijdem primi Quotientes ordine conuerſo.

SINT cõtinuæ proportionales quotuis numeri A, B, C, D, quorũ ſumma E, per ipſos diuiſa faciat Quotientes F, G, H, I, & horum ſumma K, per eos diuiſa faciat Quotientes L, M, N, O. Dico hos Quotientes, & illos eſſe eoſdem alternis, ordine conuerſo, hoc eſt, F, & O, eoſdem eſſe; Item G, & N; H, & M; I, & L, &c.

Quoniam enim per 3. theor. Quotientes F, G, H, I, eandẽ continuam proportionem habent conuerſo ordine, quam numeri A, B, C, D: Et Quotientes L, M, N, O, conuerſo ordine eandem, quam Quotientes F, G, H, I, hoc eſt, eandem eodem ordine, quæ numeri A, B, C, D: erit per 4. theorema, E, ad A, vt K, ad I. Quare cũ ex diuiſione antecedentis termini per conſequentem producatur denominator proportionis, fiet idem Quotiens ex diuiſione E, per A, qui ex diuiſione K, per I. Cum ergo Quotientes ſint F, & O, æquales erunt F, & O. Eadem ratione æquales erunt G, & N; H, & M; I, & L. &c. quod eſt propoſitum.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E. 15.

F, 15. G, $7\frac{1}{2}$. H, $3\frac{3}{4}$. I, $1\frac{7}{8}$. K, $28\frac{1}{8}$.

L, $1\frac{7}{8}$. M, $3\frac{3}{4}$. N, $7\frac{1}{2}$. O, 15.

VII.

SI ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur: erit ſumma omnium Quotientum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorũ ab extremis æqualiter diſtantium, vel deniq; (ſi Quotientum nu-

meri us

merus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe.

SINT primum quotuis numeri multitudine pares continue proportionales A, B, C, D, E, F, quorum ſumma G, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes H, I, K, L, M, N, quorum ſumma O. Dico ſumma O, æqualẽ eſſe numerũ qui fit ex H, in N, vel ex I, in M, vel ex K, in L. Quia enim per 4. theor. Quotientes H, I, K, L, M, N, ſunt continue proportionales cõuerſo ordine in proportione A, ad B; erit N, ad M, vt I, ad H. [a] Igitur idem numerus gignitur ex N, in H, qui ex M, in I; hoc eſt, idem ex H, in N, qui ex I, in M. Eademq; ratione idem fiet ex I, in M, qui ex K, in L. Et quoniam per 6. theor. ſumma O, diuiſa per H, I, K, L, M, N, producit eoſdem Quotientes conuerſo ordine, hoc eſt, ſumma O, diuiſa per H, facit Quotientem N; producetur ſumma O, ex H, in N, per defin. ac proinde & ex I, in M, & ex K, in L.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 32. G, 63.
H, 63. I, 31 1/2. K, 15 3/4. L, 7 7/8. M, 3 15/16. N, 1 31/32. O, 124 1/2.

[a] 19. ſept.

SINT deinde quotuis numeri multitudine impares continuè proportionales A, B, C, D, E, quorũ ſumma F, per ipſos ſigillatim diuiſa faciat Quotientes G, H, I, K, L, quorum ſumma M. Dico ſumma M, æqualem eſſe numerum genitum ex G, in L; & ex H, in K; & ex I, in ſeipſum. Quod enim æqualis ſit ei, qui fit ex G, in L. & ex H, in K, demonſtrabimus, vt prius. Deinde vero quia tres numeri H, I, K, cõtinue proportionales ſunt; [b] erit numerus ex H, in K, genitus, id eſt, ſumma M, æqualis numero, qui ex I, in ſeipſum ducto generatur. quod eſt propoſ.

A, 1. B, 2. C, 4. D, 8. E, 16. F, 31. G, 31. H, 15 1/2. I, 7 3/4. K, 3 7/8. L, 1 15/16. M, 60 1/16.

[b] 20. ſept.

HINC fit, quando numerus terminorum eſt impar, ſummam Quotientum eſſe numerum quadratum, cuius latus, ſiue radix, eſt medius terminus.

ITAQVE

ITAQVE ſi inueniendi ſint quotcunque numeri continue proportionales in data proportione, quorũ ſumma æqualis ſit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuſuis duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant: accipiendi ſunt in data proportione tot numeri quicunque continuè proportionales, quot inquiruntur. Nam ſi eorum ſumma per ipſos ſigillatim diuidatur; erunt Quotientes quæſiti numeri, vt ex hoc 7. theor. perſpicuum eſt. Quod ſi deſiderentur quotuis numeri multitudine impares, quorum ſumma ſit numerus quadratus, cuius latus, ſiue radix ſit medius terminus: ſumendi ſunt in data proportione totidem numeri continuè proportionales, eorumq; ſumma per eos ſigillatim diuidenda. Quotientes enim erunt numeri quæſiti, vt ex eodem hoc 7. theor. liquet. Atq; mirabile ſanè eſt, poſſe reperiri quotcunq; numeros continuè proportionales in data proportione, etiam mille, aut plures, quorum omnium ſumma æqualis ſit producto ex primo in vltimum; & ex quibuſlibet duobus, qui ab extremis æqualiter diſtant, inter ſe multiplicatis; & denique, ſi terminorum numerus eſt impar, ex medio termino in ſeipſum multiplicato.

SIC etiam ſi quis optet duos numeros in data proportione, quorum ſumma æqualis ſit numero producto ex vno in alterum, ſumat duos numeros in data proportione quoſcunque, eorumq; ſummam per vtrumq; diuidat. Quotientes enim dabunt numeros quæſitos, vt oſtenſum eſt: quia videlicet eorum ſumma æqualis eſt numero, qui fit ex primo in vltimum, hoc eſt, in ſecundum. Exempli gratia. Sint inueniendi duo numeri in proportione ſeſquiquinta, quorum ſumma æqualis ſit numero, qui ex multiplicatione vnius in alterum producitur. Sumantur duo numeri quicunque in data proportione ſeſquiquinta, nimirum 6. & 5. eorumque ſummæ 11. per vtrumq; diuidatur. Nam Quotientes $1\frac{5}{6}$. & $2\frac{1}{5}$. ſunt numeri quæſiti. Habent enim proportionem ſeſquiquintam datam, & tam eorum ſumma, quàm numerus ex multiplicatione eorum productus, eſt $4\frac{1}{30}$.

MINV-

MINVTIARVM SIVE NVmerorum fractorum

DEMONSTRATIONES.

I.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator sit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores.

SINT duæ minutiæ *A B, C B*, eundem habentes denominatorem, & numerator *C*, sit vnitas. Dico ita esse minutiam *A B*, ad minutiam *C B*, vt est numerator *A*, ad numeratorem *C*. Quoties enim vnitas *C*, continetur in *A*, toties minutia *C B*, in minutia *A B*, includitur; propterea quòd minutia *A B*, diuiditur in tot minutias minutia *C B*, æquales, quot vnitates sunt in *A*, ita vt qualibet earum minutiarum habeat numeratorem *C*, & denominatorem *B*. Igitur eadem pars est vnitas *C*, numeri *A*, quæ minutia *C B*, minutiæ *A B*; ac proinde est, vt vnitas *C*, ad *A*, ita minutia *C B*, ad minutiam *A B*: Et conuertendo, ita *A*, ad *C*, numerator ad numeratorem, vt minutia *A B*, ad minutiam *C B*, quod est propositum.

A, 6. *C*, 1.
B, 11. *B*, 11.

2. 20. defin.

QVONIAM vero minutiæ sunt fractiones, siue particulæ vel vnitatis, vel alterius cuiusuis numeri, (Neque enim eorum sententiam probare possum, qui existimant, eas respectu solius vnitatis esse accipiendas; propterea quòd falso putant, earum demonstrationes non posse omnes explicari in numeris integris, sed solum in vnitate. Nos enim in hac tractatione omnes demonstrationes quibuslibet etiam numeris integris accommodabimus.) conabimur omnes minutiarum demonstrationes numeris integris explicare, vt exemplis etiam studiosius lector addiscat, veras esse demonstrationes, quas afferimus.

SINT

SINT ergo data minutia $\frac{6}{11}$. *&* $\frac{1}{11}$. *particula, verbi gratia, huius numeri integri 44. Et quia eius* $\frac{1}{11}$. *est 4. &* $\frac{6}{11}$. *sunt 24 perspicuum est, ita esse 4. ad 24. vt est numerator 1. ad numeratorem 6. Vel ita 24. ad 4. vt 6. ad 1.*

HANC porrò propositionem demonstrabimus propos. 4. in vniuersum de quibuscunq; duabus minutijs eiusdem denominationis, etiamsi neutra numeratorem habeat vnitatem.

II.

NVMERATOR cuiusuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius est minutia.

SIT minutia quacunque A B. Dico esse numeratorem A, ad denominatorem B, vt est minutia A B, ad suum integrũ. Sumatur minutia C B, cuius numerator C, vnitas, & denominator idem B: Item alia minutia, cuius numerator D, aqualis sit eidem denominatori B, ita vt suo integro sit aqualis. Quando enim numerator denominatori est aqualis, minutia suo integro aquiualet; quippe quæ tot particulas integri contineat, in quot ipsum integrum diuisum est, ac proinde totum integrum contineat. [1] *Quoniã igitur est, vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et vt C, ad D, ita minutia C B, ad minutiam D B; erit ex aquo vt A, ad D, hoc est, vt numerator A, ad denominatorem B, ipsi D, aqualem, ita minutia A B, ad minutiam D B, hoc est, ad integrum. quod est propositum.*

A, $\frac{3}{5}$.	C, $\frac{1}{5}$.	D, $\frac{5}{5}$.
B, 5.	B, 5.	B, 5.

[1] 1. huius

ALITER. Sit primum data minutia A B, numerator A, vnitas, ita vt minutia sit pars aliquota integri C, siue C, sit vnitas, siue numerus, pars, inquam, aliquota à B, denominata, propterea quòd tot minutiæ ipsi A B, aquales integrum C, conficiunt, quoties vnitas est in B, denominatore. Cum ergo & vnitas A, sit pars numeri B, ab ipso B, denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. scripsimus; eadem pars erit vnitas

A, $\frac{1}{5}$.	C, 1.
B, 5.	C, 30.

[a] 20. defin. tas A, numeri B, quæ minutia A B, integri C. [a] Quare erit, vt A, numerator ad B, denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod eſt propoſitum.

DEINDE non ſit vnitas numerator A. Sumatur minutia D B, cuius numerator D, vnitas & denominator idem B, qui minutia A B. [b] Et quia eſt, vt A, ad D, numerator ad numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam D B: Et vt D, ad B, ita minuta D B, ad integrum C, vt proxime demonſtrauimus; erit ex æquo, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum C. quod eſt propoſitum.

A, 3. D, 1. C, 1.
B 5. B, 5. C, 30.

[b] 5 huius

ITAQVE ſi data minutia $\frac{3}{5}$. ſit huius numeri integri 30. erit eius $\frac{1}{5}$. numerus 6. ac proinde $\frac{3}{5}$. numerus 18. vbi vides ita eſſe 18. ad 30. vt eſt 3. ad 5. numerator ad denominatorem.

III.

MINVTIA quælibet, pars eſt numeratoris à denominatore denominata.

SIT quælibet minutia A B. Dico eam eſſe partem numeratoris A, à denominatore B, denominatam. [c] Quoniam enim eſt, vt A, ad B, numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad ſuum integrum C; erit permutando, vt A, ad minutiam A B, ita B, ad integrum: Et conuertendo, vt minutia A B, ad A, ita integrum ad B. Cum ergo integrũ C, ſit pars denominatoris B, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties vnitas eſt in denominatore B.) ab ipſo denominatore B, denominata; (Cum enim æquè metiatur vnitas denominatorem, & integrum ipſum integrum toties acceptum, quotics vnitas eſt in denominatore; ſit autem vnitas pars denominatoris à denominatore denominata, vt ad defin. 2. lib. 7. ſcripſimus; erit quoque integrum eadem pars integri toties accepti, quotics vnitas eſt in denominatore) erit quoque minutia A B, numeratoris A, (hoc eſt, integri toties accepti, quoties

A, 3. C, 1.
B, 5. C, 30.

[c] 2. huius

quoties eſt vnitas in numeratore A.) eadem pars a denominatore B, denominata. quod eſt propoſitum.

PONATVR minutia $\frac{3}{5}$. eſſe huius integri 30. cuius $\frac{3}{5}$. ſunt 18. Et quia numerator 3. numerat tria integra, hoc eſt, valet 90. & denominator 5. valet 150. (quemadmodum, cum eadem minutia $\frac{3}{5}$. ſumitur reſpectu vnitatis, numerator continet tres vnitates, & denominator quinque.) liquido conſtat, 18. eſſe quintam partem numeratoris, hoc eſt, trium vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ tres vnitates faciunt 90. partem, inquã, a denominatore 5. denominatam; quemadmodum & 30. datus numerus integer, quinta pars eſt denominatoris, hoc eſt, quinque vnitatum, quarum qualibet numerum integrum 30. ſignificat, quæ quinque vnitates conficiunt 150. pars, inquam, à denominatore 5. denominata.

IIII.

DVAE minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores.

QVOD prima propoſitione oſtẽſum eſt de duabus minutijs, quarum altera numeratorem habet vnitatem, demonſtratur hic de quibuſuis minutijs. Habeant ergo duæ minutiæ A B, C B, eundem denominatorem B. Dico eſſe minutiam A B, ad minutiam C B, vt eſt A, ad C, numerator ad numeratorem. [a] *Quia enim eſt, vt A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum: Et vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B; (Nam* [b] *cum ſit, vt C, ad B, ita minutia C B, ad integrum, erit conuertendo, vt B, ad C, ita integrum ad minutiam C B.) erit ex æquo, vt A, numerator ad C, numeratorem, ita minutia A B, ad minutiam C B. quod eſt propoſitum.*

A, 6. C, 5.
B, 7. B, 7.

[a] 2. huius

[b] 3. huius

DATAE minutiæ $\frac{6}{7}$. $\frac{3}{7}$. *ſint huius integri 28. cuius* $\frac{6}{7}$. *ſunt 24 &* $\frac{3}{7}$. *ſunt 12. vbi perſpicuum eſt, ita eſſe 24. ad 12. vt eſt numerator 6. ad numeratorem 3:*

V.

SI duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur, erit prior minutia ad poſteriorem, vt prior numerus productus ad poſteriorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD: Et ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico eſſe minutiam AB, ad minutiam CD, vt eſt F, ad G. Fiat enim H, ex B, in D. Quia igitur A, B, multiplicantes D, faciunt F, H; [a] *erit vt A, ad B, ita F, ad H. Vt autem A, ad B,* [b] *ita eſt minutia AB, ad integrum. Igitur erit quoque, vt minutia AB, ad integrum, ita F, ad H. Rurſus quia C, D, multiplicantes B, faciunt G, H;* [c] *erit vt C, ad D, ita G, ad H: Et conuertendo, vt D, ad C, ita H, ad G. Vt autem D. ad C, ita eſt integrum ad minutiam CD. (Nam* [d] *cum ſit, vt G, ad D, ita minutia CD, ad integrum, erit conuertendo, vt D, ad C, ita integrum ad minutiam CD.) Igitur erit quoque, vt H, ad G, ita integrum ad minutiam CD. Ex æquo igitur erit, vt F, ad G, ita minutia AB, ad minutiam CD. quod eſt propoſitum.*

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B, 3. D. 5.
H, 15.

F. AB.
H. Integrum.
G. CD.

[a] 18. ſept.
[b] 2. huius
[c] 18. ſept.
[d] 2. huius

SI duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$ *ſint particulæ numeri 30. erunt duæ tertiæ eius, 20. at quatuor quintæ eiuſdem, 24. Perſpicuum autem eſt, ita eſſe 20. ad 24. vt 10. ad 12. qui duo numeri procreati ſunt ex numeratoribus in denominatores, permutato ordine.*

ITAQVE ſi productus numerus F, æqualis fuerit numero producto G, erit quoque minutia AB, minutiæ CD, æqualis: ſi minor, minor: Et ſi maior, maior; propter eandem pro-

proportionem F, ad G, & minutia ad minutiam. Atque hæc eſt demonſtratio regulæ, quam in Arithmetica dedimus ad dignoſcendum, vtra duarum minutiarum maior ſit.

VI.

INTEGRVM ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorum productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur.

SINT duæ minutiæ AB, CD. Et ex B, in D, fiat H: at ex A, in D, fiat F; & ex C, in B, fiat G. Dico ita eſſe integrum ad ſummã minutiarum AB, CD, vt eſt H, ad ſummam numerorum F, G. Quoniam enim eſt, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita F, ad G; erit componendo, vt ſumma minutiarum AB, CD, ad minutiam CD, ita ſumma numerorum F, G, ad G. Vt autem minutia CD, ad integrum, ita eſt G, ad H, (Nam [b] *vt minutia CD, ad ad integrum, ita eſt C, ad D.* [c] *Et vt C, ad D, ita eſt G, ad H: propterea quòd C, D, ipſum B, multiplicantes fecerunt G, & H.) Igitur ex æquo erit, vt ſumma minutiarũ AB, CD, ad integrum, ita ſumma numerorum F, G, ad H: Et conuertendo, vt integrum ad ſummam minutiarum AB, CD, ita H, ad ſummam numerorum F, G. quod eſt propoſitum.*

F, 10. G, 12.
A, 2. C, 4.
B 3. D, 5.
H, 15.

[a] 5. huius
[b] 2. huius
[c] 18 ſept.

SINT rurſus duæ minutiæ $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. particulæ numeri 30. cuius $\frac{2}{3}$, ſunt 20. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem 24. ac proinde ſumma minutiarum 44. Vbi vides, ita eſſe integrum 30. ad hanc

ſummam 44. vt eſt 35. ex denominatoribus productus ad 22. ſummam numerorum 10. 12. ex numeratoribus in denominatores permutato ordine productorum.

VII.

SI duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris.

HABEANT duæ minutiæ AB, AC, eundem numeratorem A. Dico ita eſſe minutiam AB, ad minutiam AC, vt eſt denominator C, ad denominatorem B. Figat enim D, ex A, in C: & E, ex A, in B. Quia igitur A, multiplicans C, B, fecit D, E; a erit vt D, ad E, ita C, ad B. Vt aut D, ad E, b ita eſt minutia AB, ad minutiam AC. Igitur erit quoque minutia AB, ad minutiam AC, vt C, ad B. quod eſt propoſitum.

D. 105. E. 35. A. 5. / B. 7. × A. 5. / C. 21.

a 17. ſept.
b 5. huius

DVÆ minutia $\frac{5}{7}$. $\frac{5}{21}$. ſint particulæ numeri integri 42. cuius $\frac{5}{7}$. ſunt 30. & $\frac{5}{21}$. eiuſdem 10. Manifeſtum autè eſt, ita eſſe 30. ad 10. vt poſterior denominator 21. ad priorem 7.

VIII.

MINVTIAE, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionem, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eandem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior

maior eſt: Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem.

SINT duæ minutiæ AB, CD, ſitque eadem proportio A, ad B, quæ C, ad D, numeratoris ad denominatorem. Dico minutias has æquales eſſe. [a] *Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum: Et vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum: vt autem A, ad B, ita ponitur C, ad D; erit quoque minutia AB, ad integrum, vt minutia CD, ad idem integrum. Æquales ergo ſunt minutiæ AB, CD. quod eſt propoſitum.*

A, 3. C, 9.
B, 4. D, 12.

[a] 2. huius

SED ſint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico eſſe, vt A, ad B, ita C, ad D. Cum enim æquales ſint minutiæ, erit vt minutia AB, ad integrum, ita minutia CD, ad idem integrum. [b] *Eſt autem, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; Et vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D. Igitur erit quoque, vt A, ad B, ita C, ad D. quod eſt propoſitum.*

[b] 2. huius

DEINDE ſit maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. Dico maiorem eſſe minutiam AB, quàm CD. [c] *Cum enim ſit, vt A, ad B, ita minutia AB, ad integrum; & vt C, ad D, ita minutia CD, ad idem integrum; ponatur autem maior proportio A, ad B, quàm C, ad D; erit quoque maior proportio minutiæ AB, ad integrum, quàm minutiæ CD, ad idem integrum. Maior ergo eſt minutia AB, quàm minutia CD. quod eſt propoſitum.*

A, 3. C, 2.
B, 4. D, 3.

[c] 2. huius

VERVM ſit iam minutia AB, maior, quàm minutia CD. Dico maiorem eſſe proportionem A, ad B, quàm C, ad D. Erit enim maior proportio minutiæ AB, maioris ad integrum, quàm minutia CD, minoris ad idem integrum. [d] *Cùm ergo ſit, vt minutia AB, ad integrum, ita A, ad B; & vt minutia CD, ad integrum, ita C, ad D: erit quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D. quod eſt propoſitum.*

[d] 2. huius

MINVTIARVM $\frac{1}{4}.\frac{9}{12}$. *integer numerus ſit 24. cuius tã* $\frac{1}{4}.\tilde{q}\,\frac{9}{12}$ *ſunt 18. ac proinde æquales ſunt minutiæ* $\frac{3}{4}.\frac{9}{12}$. *At* $\frac{2}{3}$ *eiuſdem numeri 24. ſunt 16. vbi manifeſtum eſt, numerum*

rum 18. maiorem esse numero 16. ideoq; minutiam $\frac{3}{4}$. *maiorem esse minutia* $\frac{2}{3}$.

IX.

MINVTIAE, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores: sunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorem proportionem habet, quàm denominator, illa maior est: Et maioris numerator maiorem habet proportionem, quàm denominator.

SINT duas minutiæ AB, CD, sitq; eadem proportio A, ad C, quæ B, ad D. Dico minutias ipsas æquales esse. Erit enim permutando, vt A, ad B, ita C, ad D: [a] *ac proinde minutia æquales erunt, quod est propositum.*

a 8. huius

A, 6. C, 2.
B, 9. D, 3.

SED sint iam minutiæ æquales AB, & CD. Dico ita esse A, ad C, vt B, ad D. [b] *Erit enim vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur permutando, vt A, ad C, ita B, ad D. quod est propos.*

b 8. huius

DEINDE sit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Dico minutiam AB, maiorem esse minutia CD. Erit enim permutando quoque maior proportio A, ad B, quàm C, ad D, [c] *ac propterea maior erit minutia AB, quàm CD. quod est propositum.*

A, 6. C, 3.
B, 9. D, 5.

c 8. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm CD. Dico maiorem proportionem esse A, ad C, quàm B, ad D. [d] *Erit enim maior proportio A, ad B, quàm C, ad D: ideoque & permutando maior proportio erit A, ad C, quàm B, ad D. quod est propositum.*

d 8. huius

SINT duas minutiæ $\frac{6}{9}$. $\frac{2}{3}$. *partes integri numeri 90.*

vbi

vbi vides minutiam $\frac{6}{9}$. *hoc est, 60. æqualem esse minutiæ* $\frac{2}{3}$. *id est, numero 60. At vero minutiam eandem* $\frac{6}{9}$. *id est, 60. maiorem esse minutia* $\frac{3}{6}$ *hoc est, numero 54.*

X.

DVAS minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere.

DVÆ minutiæ AB, CD, habeant dissimiles denominatores B, D. Fiat E, ex A, in D; & F, ex C, in B; & G, ex B, in D. Dico minutias EG, FG, quarũ numeratores E, F & denominator idem G, esse æquales minutijs AB, CD. Quoniam enim A, B, multiplicantes D, faciunt E, G; [a] *erit vt A, ad B, ita E, ad G.* [b] *Quare minutiæ AB, EG, æquales erunt. Eodem modo, quia C, D, multiplicantes B, faciunt F, G,* [c] *erit vt C, ad D, ita F, ad G.* [d] *Igitur minutiæ CD, FG, æquales erunt. quod est propositum.*

E, 10. F, 9.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 5.
G, 15.

[a] 18. *sept.*
[b] 8. *huius*
[c] 18. *sept.*
[d] 9. *huius*

XI.

INTEGRVM numerum quemcumque ad dati denominatoris minutiam reducere.

SIT primum A, integrum 1. reducendum ad minutiam, cuius denominator C. Sumatur numerator B, denominatori C, æqualis. Dico minutiã BC, vnitati A, æqualem esse. [e] *Quia enim est, vt B, ad C, sic minutia BC, ad integrum A: Est autem B, ipsi C, æqualis. Igitur & minutia BC, integro A, id est, vnitati, erit æqualis. quod est propositum.*

A, 1. B, 6. C, 6.

[e] 2. *huius*

DEINDE sit integer numerus A, reuocandus ad minutiam, cuius denominator C. Ex A, in C, fiat B, numera-

tor.

tor. Dico minutiã BC, integro A, aequalem esse. Supponatur enim integro A, unitas D, vt fiat minutia AD, tot vnitatibus aequalis, quoties vnitas est in A. Quia igitur ex A, in C, fit B; erit ex defin. multiplicationis, sta B, ad C, vt A, ad D, vnitatem. Cum ergo minutiarum AD, EC, numeratores A, B, ad denominatores D, C, eandē

A, 7. B, 42.
D, 1. C, 6.

proportionem habeant, [a] ipsa inter se aequales erunt. Quare cum minutia AD, sit integro A, aequalis, ob denominatorem, qui est vnitas; erit quoque minutia BC, eidem integro A, aequalis. quod est propositum.

[a] 8. huius

XII.

DATAM minutiam duplare, ac dimidiare.

SIT primum minutia AB, duplanda. Dupletur numerator A, vt fiat numerator C, manente eodem denominatore B: vel denominator B, quando par est, dimidietur, vt fiat denominator D, manente eodem numeratore A. Dico vtramque minutiam CB, AD, duplam esse minutiæ AB. Cum enim minutia AB, CB, eundem habeant denominatorem; [b] erit vt C, ad A, numerator ad numeratorem, ita CB, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem C, ipsius A, duplus ex constructione. Igitur & minutia CB, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.

A, 3. C, 6. A, 3.
B, 8. B. 8. D, 4.

[b] 4. huius

RVRSVS quia minutiæ AB, AD, eundem habent numeratorem; [c] erit vt B, ad D, denominator ad denominatorem, ita AD, ad AB, minutia ad minutiam. Est autem B, ipsius D, duplus, per constructionem. Igitur & minutia AD, minutiæ AB, dupla erit. quod est propositum.

[c] 7. huius

DEINDE dimidianda sit minutia AB. Dupletur denominator B, vt fiat denominator C, manente eodem numeratore A: Vel numerator A, quando par est, dimidietur, vt fiat numera-

A, 6. A, 6. D, 3.
B, 11. C, 22. B, 11.

numerator D, manente eodem denominatore B. Dico vtrag; minutiam A B, D B, dimidium esse minutiæ A B. Cum enim minutiæ A B, A C, eundem habeant numeratorem; [a] *erit vt B, ad C, denominator ad denominatorem, ita A C, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo B, sit per constructionem ipsius C, dimidium; erit & minutia A C, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum.* [a] 7. huius

RVRSVS cum minutiæ A B, D B, habeant eundem denominatorem; [b] *erit vt D, ad A, numerator ad numeratorem, ita D B, ad A B, minutia ad minutiam. Cum ergo D, sit ipsius A, dimidium, ex constructione; erit & minutia D B, minutiæ A B, dimidium. quod est propositum.* [b] 4. huius

EODEM modo minutia data triplicabitur, quadruplicabitur, &c. si vel numerator triplicetur, quadruplicetur, &c. eodem manente denominatore; vel (quando fieri potest) si denominatoris accipiatur pars tertia, quarta, &c. manente eodem numeratore.

SIC etiam datæ minutiæ sumetur pars tertia, quarta, &c. si denominator triplicetur, quadruplicetur, &c. manente eodem numeratore; vel (quando fieri potest) si numeratoris tertia pars, quarta, &c. sumatur. Quod eodem modo demonstrabitur.

XIII.

MINVTIA minutiæ æqualis est minutiæ simplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur.

SIT enim A B, minutia minutiæ C D, respectu integri numeri E, siue vnitatis E, & valorem huius minutiæ minutia exprimat simplex minutia K. Fiat F, ex A, in C; & G, ex B, in D. Dico datam minutiam minutiæ æqualem esse simplici minutiæ F G, respectu integri E, cuius videlicet numerator F, & denominator G. Fiat enim rursus H, ex C, in B.

Et

[a] 2. huius

[b] 18. sept.

[c] 2. huius

[d] 17. sept.

2. huius

Et quoniam eſt, vt A, ad B, ita minutia A B, ad ſuum integrum, nimirum ad minutiam C D, cuius integrum eſt E: [b] *Item vt A, ad B, ita eſt F, ad H; quòd A, B, ipſum C, multiplicantes faciãt F, H: Erit quoque, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H. Rurſus* [c] *quia eſt, vt C, ad D, ità minutia C D, ad ſuum integrum E:* [d] *Item vt C, ad D, ita eſt H, ad G; quod B, ipſos C, D, multiplicans fecerit H, G: Erit quoq; vt C D, minutia ad ſuum integrum E, ita H, ad G. Quoniã igitur eſt, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita F, ad H: Et vt minutia C D, ad E, integrũ, ita H, ad G; erit ex æquo, vt A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita F, ad G. Vt autem A B, minutia minutiæ C D, ad integrum E, ita eſt ſimplex minutia K, ad idem integrum E; quòd ſimplex minutia K, æqualis poſita ſit datæ minutiæ A B, minutiæ C D; cum eius valorem reſpectu integri E, exprimat. Igitur erit quoque, vt F, ad G, ita minutia ſimplex K, ad integrum E.* [e] *Cum ergo quoque ſit, vt F, ad G, ita minutia F G, ad idem ſuum integrum E; æquales erunt minutiæ ſimplices K, & F G: ac proinde cum minutia K, æqualis ſit datæ minutiæ minutiæ, erit quoque ſimplex minutia F G, æqualis datæ minutiæ A B, reſpectu minutiæ C D, cuius integrum E. quod eſt propoſitum.*

F, 6. H, 9.
A, 2. C, 3. E, 1.
B, 3. D, 4. E, 24.
G, 12. K, $\frac{1}{2}$.
A B. F.
C D. H.
E. G.

SIT $\frac{2}{3}$. *minutia minutiæ* $\frac{3}{4}$. *reſpectu integri 24. Huius numeri* $\frac{3}{4}$. *ſunt 18. & huius numeri* $\frac{2}{3}$. *ſunt 12. qui numerus eſt* $\frac{1}{2}$. *dati integri numeri 24. Manifeſtum autem eſt, ſi tam numeratores 2. 3. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. procreari minutiam* $\frac{6}{12}$. *quæ huic* $\frac{1}{2}$. *æquivalet qualis nimirum erat numerus 12. reſpectu numeri integri 24.*

XIIII.

MINVTIAM minutiæ, aut minutiam

tiam minutiarum ad ſimplicem minutiam reducere.

SIT primum AB, minutia minutiæ CD. Ex A, in C, ſiat E; & ex B, in D, ſiat F.[a] *Et quoniam minutia EF, exprimit valorem minutiæ AB, reſpectu minutiæ CD; reducta erit data minutia minutiæ ad ſimplicem minutiam EF. quod eſt propoſitum.*

E, 6.
A, 2. C, 3.
B, 3. D, 4.
F, 12.

DEINDE ſit AB, minutia minutiarum CD, EF, ita vt CD, ſit minutia minutiæ EF; & AB, minutia minutiæ CD. Fiat G, ex A, in C; & H, ex B, in D. Item I, ex G, in E; & K, ex H, in F; atq; ita deinceps, ſi plures ſint minutiæ, numeri vltimo loco producti I, K, in numeros ſequentis minutiæ ducantur. Dico minutiam IK, cuius numerator I, & denominator K, datæ minutiæ minutiarum æqualem eſſe.[b] *Nam minutia GH, æqualis eſt minutiæ AB, minutiæ CD, reſpectu minutiæ EF, tãquam integri cuiuſdam.*[c] *Item minutia IK, æqualis eſt minutiæ GH, (hoc eſt, minutiæ AB, minutiæ CD.) minutiæ EF, reſpectu integri, cuius EF, eſt minutia; & ſic deinceps, ſi plures ſint minutiæ. Quare minutia IK, ex numeris vltimo loco productis conſtituta, æqualis eſt datæ minutiæ minutiarum. quod eſt propoſitum.*

G, 6. I, 6.
A, 2. C, 3. E, 1
B, 3. D, 4. F, 2.
H, 12. K, 24.

SIT $\frac{2}{3}$. minutia minutiarum $\frac{3}{4}$. $\frac{1}{2}$. reſpectu integri 24. Huius numeri $\frac{1}{2}$. eſt numerus 12. & huius numeri $\frac{3}{4}$. ſunt 9. Huius denique $\frac{2}{3}$. ſunt 6. qui numerus eſt $\frac{1}{4}$. totius integri 24. Liquido autem conſtat, ſi tam numeratores 2. 3. 1. inter ſe multiplicentur, quàm denominatores 3. 4. 2. gigni minutiam $\frac{6}{24}$. quæ æqualis eſt minutiæ $\frac{1}{4}$. qualis minimum pars erat numerus 6. reſpectu integri 24.

[a] 13. huius
[b] 13. huius
[c] 13. huius

XV.

DATIS duabus minutijs, alterutram earum

rum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuentæ numerent per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductę in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ in denominatorem illius reductę, productos.

SINT duæ minutiæ A B, C D, quarum A B, ad aliam æqualem reducenda sit, cuius numeratorem numerator C, metiatur per numerum ex A, in D, productum; denominatorem vero denominator D, metiatur per numerum ex C, in B, productum. Fiat F, ex C, in D; & ex F, in A, B, fiant G, H. Itẽ ex A, in D, fiat K; & L, ex C, in B. Dico minutiam G H, minutiæ A B, æqualem esse; & C, metiri G, per K, ex A, in D, productum; & D, metiri H, per L, ex C, in B, productum. Quoniam enim F, multiplicãs A B, facit G, H; [a] *erit vt A, ad B, ita G, ad H,* [b] *ac proinde minutiæ A B, G H, æquales erunt. Deinde quia C, multiplicans D, facit F,* [c] *metietur C, ipsum F, per D:* [d] *Metitur autem & vnitas ipsum D, per D. Eadem igitur pars est C, ipsius F, quæ vnitas ipsius D. Cum ergo vnitas sit ipsius D, pars à D, denominata, erit quoque C, ipsius F, pars à D, denominata. Eadem ratione erit F, ipsius G, pars ab A, denominata; propterea, quòd G, sit ex F, in A. Quia igitur C, minutia est minutiæ F, respectu integri G, sunt eius numeratores, vnitates; & denominatores, numeri D, A, à quibus partes C, F, denominantur;* [e] *constituet C, minutia minutiæ F, respectu integri G, minutiam simplicem M, quas minutias C, F, M, (sursum scripsimus) respectu eiusdem integri G; cuius numerum numerator ex numeratoribus minutiarum C, F, & denominator ex earundem denominatoribus producuntur. Quare cum numeratores gignant vnitatem, & denominatores numerum K; (quod numeratores sint vnitates, denominatores autem numeri D, A, à quibus*

G, 24.	K, 8.	
A, 2. / B, 3. F, 12.	C, 3. / D, 4.	
H, 36.	L, 9.	
C, $\frac{1}{4}$. F, $\frac{1}{2}$.	M, $\frac{1}{4}$.	

[a] 17. sexti.
[b] 8. huius & 7. primi
[c] 3. primi
[d] 5. primi
[e] 13. huius

quibus partes C, F, denominantur, & ex quorum multiplicatione factus eſt numerus K, conſtituet minutia C, minutiæ F, reſpectu integri G, minutiã ſimplicẽ eiuſdẽ integri G, cuius numerator eſt unitas, & denominator numerus K, qualis eſt minutia M: ac proinde C, numerator minutiæ datæ C D, qui conſtituit C, minutiam minutiæ F, reſpectu integri G, pars erit ipſius integri G, à numero K, denominata. Quocirca numerus C, ipſum G, metietur per K; toties nimirum ſumptus, quoties unitas eſt in K, numero. Eadem prorſus ratione demonſtrabimus, D, metiri ipſum H, per L, numerum. Quod eſt propoſitum.

XVI.

DVAE minutiæ, quarum numeratores in denominatores viciſsim ducti gignũt numeros æquales, æquales ſunt: Et minutiarũ æqualium numeratores in denominatores viciſsim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior eſt: Et maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit.

SINT duæ minutiæ A B, C D: & ex A, in D, fiat E; atque ex C, in B, fiat F: ſintque primum numeri E, F, æquales. Dico minutias A B, C D, æquales eſſe. Quoniam enim numerus E, factus ex A, primo in D, quarum æqualis eſt numero F, facto ex C, ſecundo in B, tertiũ; [a] *erit vt A, primus ad C, ſecundũ, numerator ad numeratorem, ita B, tertius ad D, quartum, denominator ad denominatorem.* [b] *Quare minutiæ A B, C D, æquales ſunt. VEL ſic.* [c] *Quoniam eſt, vt E, ad F, ita minutia A B, ad minutiam C D; Eſt autem E, ipſi F, æqualis; erit quoque minutia A B, minutiæ C D, æqualis. quod eſt propoſitum.*

E, 24. A, 2. E, 3. — F, 24. C, 8. D, 12.

a 19. ſept.
b 6. huius
c 5. huius

SED

SED sint iam æquales minutiæ AB, CD. Dico numerũ E, æqualem quoque esse numero F. Nam ob æqualitatem minutiarum [a] erit, vt A, ad C, numerator ad numeratorem, ita B, ad D, denominator ad denominatorem. [b] Quapropter idẽ numerus fiet ex A, primo in D, quartum, qui ex C, secundo in B, tertium; ac proinde æquales erunt E, & F, numeri. VEL sic. [c] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiã CD, ita E, ad F; ponuntur autem minutiæ æquales; erunt quoque numeri E, F, æquales. quod est propositum.

[a] 9. huius
[b] 19. sept.
[c] 5. huius

DEINDE sit E, numerus maior numero F. Dico minutiam quoque AB, maiorem esse minutia CD. Cum enim ex A, in D, fiat numerus E, maior quàm F; gignatur F, ex minore numero quàm A, in D, nimirum ex G, in D. Quia igitur idem numerus F, fit ex G, primo in D, quartum, & ex C, secundo in B, tertium, [d] erit vt G, primus ad C, secundum, ita B, tertius ad D, quartum: Est autẽ maior proportio A, ad C, quàm G, ad C; ergo A, maior sit quã G. Igitur maior quoque erit proportio A, ad C, quàm B, ad D; [e] ac proinde minutia AB, maior erit, quàm minutia CD. VEL sic. [f] Quoniam est, vt E, ad F, ita minutia AB, ad minutiam CD; est autem E, maior quàm F; erit quoque minutia AB, maior quàm minutia CD. quod est propositum.

E, 24, F, 21
G, 1 3/4 A, 2 × C, 7
B, 3 D, 12.

[d] 19. sept.
[e] 9. huius
[f] 5. huius

VERVM sit iam minutia AB, maior quàm minutia CD. Dico & numerum E, numero F, esse maiorem. Cum enim maior sit minutia AB, quàm minutia CD, [g] erit maior proportio A, ad C, quàm B, ad D. Minor ergo numerus, quàm A, habebit ad C, eandem proportionem, quam B, ad D, qui sit G. [h] Idem ergo numerus fiet ex G, primo in D, quartũ, qui ex C, secundo in B, tertium. Cum ergo ex A, in D, maior fiat, quàm ex G, in D; propterea quòd A, maior est quàm G, erit quoque E, factus ex A, in D, maior, quàm F, ex C, in B, genitus. VEL sic. [i] Quoniam est, vt minutia AB, ad minutiam CD, ita E, ad F: Est autem AB, minutia maior quàm minutia CL; erit quoq; E, maior quàm F. quod est propositum.

[g] 9. huius
[h] 19. sept.
[i] 5. huius

ATQVE hæc est quoque demonstratio eius regulæ, quam in Arithmetica præscripsimus ad dignoscendum, vtra duarum

duarum minutiarum propoſitarum maior ſit. Id quod etiam ad 5. propoſitionem monuimus.

XVII.

DATAM minutiam ad minimos terminos reducere.

SIT minutia AB, ad minimos reuocanda terminos. Si igitur A, & B, ſint inter ſe primi, non poterit minutia AB, ad minores terminos reuocari, ſed ipſa iam in minimis erit terminis conſtituta. Reducatur enim ſi fieri poteſt, ad minores terminos C, D, ita vt minutia CD, minutiæ AB, ſit æqualis. a Quoniam igitur eſt, vt A, ad B, ita C, ad D; ſuntque C, D, numeri minores numeris AB; non erunt A, B, minimi termini in ſua proportione: b ſunt autem & minimi, cum primi inter ſe ſint. quod eſt abſurdum.

A, 11. C ∞
B, 12. D, ∞

SI vero A, B, non ſint inter ſe primi; c ſit eorum maxima menſura C, qua metiatur A, per D; & B, per E. Dico minutiam DE, cuius numerator D, & denominator E, æqualem eſſe datæ minutiæ AB, & in minimis terminis conſtitutam. Quoniam enim C, metitur A, B, per D, E; d producentur A, B, ex C, in D, E. e Quare erit, vt A, ad B, ita D, ad E, f ac propterea minutiæ AB, DE, æquales erunt. Deinde quia C, maxima menſura numerorum A, B, metitur ipſos per D, E; erũt ex coroll. propoſ. 35. lib. 7. D, E, minimi in proportione A, ad B. Quod eſt propoſitum.

A, 36. D, 3
B, 48. E, 4.
C, 12.

a 8. huius
b 23. ſept.
c 2. ſept.
d 9. pron.
e 17. ſept.
f 8. huius

XVIII.

DATAM minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri poteſt, reuocare.

SIT data minutia AB, reuocanda ad æqualem aliam,

cuius denominator datus sit C. Ex A, numeratore in denominatorem datum C, fiat D, quem metiatur B, denominator datæ minutiæ per E. Dico minutiam EC, cuius numerator E, & denominator C, datus, æqualem esse minutiæ A B, datæ. Quia enim B, metitur D, per E, [a] *fiet D, ex B, in E: Factus est autem idem D, ex A, in C.* [b] *Igitur erit, vt A, primus ad B, secundum, ita E, tertius ad C, quartum;* [c] *ideoque minutiæ A B, EC, æquales erunt. quod est propositum.*

A, 3. E, 9
B, 4. C, 12.
D, 36.

[a] 9. pron.
[b] 19. sept.
[c] 7. huius

QVOD si B, non metiatur D, ex A, in C, procretum, non poterit data minutia A B, reduci ad denominationem datam C. Reducatur enim, si fieri potest, ad minutiam E C. Quia ergo minutiæ A B, E C, æquales sunt; [d] *erit vt A, ad B, ita E, ad C.* [e] *Idem igitur numerus fiet ex A, primo in C, quartum, qui ex B, secundo in E, tertium, videlicet numerus D, factus ex A, in C.* [f] *Igitur B, metietur D, per E. quod est absurdum. Ponitur enim B, ipsum D, non metiri.*

A, 3. E, ∞
B, 4. C, 10.
D, 30.

[d] 8 huius
[e] 19. sept.
[f] 7. pron.

XIX.

QVANDO minor numerus per maiorẽ diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens.

SIT minor numerus A, diuidendus per maiorem B. Dico Quotientem esse minutiam A B, cuius numerator A, & denominator B. [g] *Quoniam enim est, vt A, ad B, numerus diuisus ad dividentem, hoc est, vt numerator ad denominatorem, ita minutia A B, ad integrum, hoc est, ad vnitatem; erit ex defin. Diuisionis minutia A B, Quotiens diuisionis numeri A, per numerum B. quod est propositum.*

A, 6. B, 11.
A, 6.
B, 11.

[g] 2. huius

HINC fit, si diuiso numero integro maiore per integrum numerum

numerum minorem, aliquid ſuperſit; Quotienti integro inuento addendam adhuc eſſe minutiam, cuius numerator ſit numerus ex diuiſione reliquus; denominator vero, numerus diuidens. Nam reliquus ille numerus, qui neceſſario minor eſt numero diuidente, diuidendus adhuc eſt per eundem numerum diuidentem, qui maior eſt. Verbi gratia. Diuiſo numero 23. per 4. Quotiens integer eſt 5. & ſuperſunt 3. adhuc diuidenda per 4. [a] *Fit ergo minutia* $\frac{3}{4}$. *ita vt totus Quotiens ſit* $5\frac{3}{4}$. [a] *19. huius*

XX.

MINVTIAS plures in vnam ſummam colligere.

SINT primum addenda duæ minutiæ A B, C B, eiuſdem denominationis. Ex A, & C, numeratoribus fiat ſumma D, cui idem denominator B, ſupponatur. Dico minutiam D B, eſſe ſummam ex additione minutiarum A B, C B, collectam. Quoniam enim minutiæ eundem habent denominatorem; [b] *erit vt A, ad C, ita minutia A B, ad minutiam C B: Et componendo, vt A, C, ſimul ad C, ita minutia A B, C B, ſimul ad minutiam C B.* [c] *Vt autem C, ad D, ita quoque eſt minutia C B, ad minutiam D B. Igitur ex æquo erit, vt A, C, ſimul ad D, ita minutiæ A B, C B, ſimul ad minutiam D B. Cum ergo A, & C, ſimul æquales ſint ipſi D, ex conſtructione; erunt quoque minutiæ A B, C B, ſimul æquales minutiæ D B. quod eſt propoſitum.*

[b] *4. huius*

[c] *4. huius*

DEINDE ſint addendæ duæ minutiæ A B, C D, diuerſarum denominationum. Ducatur A, numerator prioris in D, denominatorem poſterioris; & C, numerator poſterioris in B, denominatorem prioris, collectaque ſit ſumma E, ex duobus illis productis, cui ſupponatur denominator F, ex multiplicatione mutua denominatorũ B, D, procreatus. Dico

$A, 2 / B, 3$ × $C, 3 / D, 4$ $E, 17$. $F, 12$.

A, 2/B, 3 ✕ C. 3/D, 4. E, 17. F, 12.

minutiam E F, esse summã ex datis duabus minutijs A B, C D, collectam.[a] Quoniam enim est, vt integrum ad summam duarum minutiarum A B, C D, ita F, ex denominatoribus productus ad E, summam productorum ex numeratoribus in denominatores vicissim ductis; erit conuertendo, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita E, ad F: [b] Vt autem E, ad F, ita quoque est minutia E F, ad idem integrum. Igitur erit, vt summa minutiarum A B, C D, ad integrum, ita minutia E F, ad idem integrum. Quapropter summa minutiarum A B, C D, æqualis erit minutiæ E F: ac proinde minutia E F, summa erit ex minutijs A B, C D, collecta. quod est propositum.

[a] 6. huius

[b] 2. huius

VEL sic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores vicissim, & ex multiplicatione denominatorum inter se, sunt duæ minutiæ eiusdem denominationis, minutijs A B, C D, æquales, vt ex demonstratione propos. 10. cõstat: si summæ E, productorum ex numeratoribus in denominatores suppenatur F, communis denominator ex denominatoribus procreatus, facta erit minutia E F, summa minutiarũ A B, C D, hoc est, duarum illarum eiusdem denominationis, ad quas A B, C D, reductæ sunt, vt initio huius propositionis est demonstratum.

IAM vero datis pluribus minutijs, addenda primum erunt duæ primæ: deinde hæc summa cum tertia coniungenda, atque hæc summa cum quarta, & sic deinceps, donec omnes absoluantur.

QVOD si dentur integra cum minutijs, addenda erunt integra seorsum, & minutiæ seorsum.

SINT verbi gratia, $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. minutiæ huius integri 60. cuius $\frac{2}{3}$. sunt 40. & $\frac{3}{4}$. sunt 45. Ex 40. & 45. fit summa 85. hoc est, totus numerus integer 60. & insuper 25. unitates, quæ faciunt $\frac{5}{12}$. integri 60. quemadmodum ex $\frac{2}{3}$. & $\frac{3}{4}$. collecta est summa $\frac{17}{12}$. id est, semel 1. & insuper $\frac{5}{12}$.

ITA etiam summa minutiarum $\frac{1}{3}$. $\frac{4}{9}$. est $\frac{21}{27}$. hoc est, in minimis terminis $\frac{7}{9}$. Si igitur illarum minutiarum integrum sit 36. erit $\frac{1}{3}$. ipsius 12. at $\frac{4}{9}$. eiusdem, 16. Vbi vides ex 12. & 16. confici 28. hoc est $\frac{7}{9}$. ipsius integri 36.

MINV-

XXI.

MINVTIAM minorem ex maiore detrahere.

EX *maiore minutia* A B, *detrahenda ſit minor* C B; *ſintque primum hæ minutiæ eiuſdem denominationis. Detracto numeratore* C, *minoris minutiæ ex* A, *numeratore maioris, reliquus ſit numerus* D, *cui idem denominator* B, *ſupponatur. Dico minutiam* D B, *reliquam eſſe poſt detractionem minutiæ* C B, *ex minutia* A B. *Quia enim* C, *ex* A, *ſubtractus relinquit* D; *componetur* A, *ex* C, *&* D. *Minutia ergo* A B, *cuius numerator* A, *ex numeratoribus* C, D, *collectus eſt, ſumma eſt duarum minutiarum* CB, DB, *vt in prima parte antecedentis propoſitum eſt oſtenſum. Quare detracta minutia* C B, *ex minutia* A B; *reliqua fiet minutia* DB. *quod eſt propoſitum.*

A, 7	C, 3	D, 4
B, 10.	B, 10.	B, 10.

DEINDE *minutiæ* AB, CD, *habeant diuerſos denominatores, detrahendaque ſit minor* CD, *ex maiore* A B. *Ex* C, *numeratore minoris in* B, *denominatorem maioris fiat* F; *&* E; *&* *ex* A, *numeratore maioris in* D, *denominatorem minoris fiat* F: *atque* E, *ablatus ex* F, *relinquat* G, *cui ſupponatur denominator* H, *ex mutua multiplicatione denominatorum procreatus. Dico minutiam* G H, *eſſe reliquam poſt detractionem minutiæ* C D, *ex minutia* A B. *Quoniam enim* D, *multiplicans* A, B, *facit* F, H; [a] *erit vt* A, *ad* B, *ita* F, *ad* H: [b] *vt autem* A, *ad* B, *ita eſt minutia* A B, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* F, *ad* H, *ita minutia* A B, *ad integrum. Rurſus quia* B, *multiplicans* C, D, *facit* E, H; [c] *erit vt* C, *ad* D, *ita* E, *ad* H: [d] *Vt autem* C, *ad* D, *ita eſt minutia* C D, *ad integrum. Igitur erit quoque vt* E, *ad* H, *ita minutia* CD, *ad integrum. Quia igitur eſt, vt* E, *primus ad* H, *ſecundum, ita minutia* C D; *tertius numerus ad integrum,*

F, 15.	E, 8.		
A, 3	C, 2	G, 7
B, 4	D, 5	H, 20.

[a] 17. *ſept.*
[b] 2. *huius*
[c] 17. *ſept.*
[d] 2. *huius*

a 2. huius

grum, quartum numerum; Et vt G, quintus ad eundem ſecundum H, ita minutia G H, ſextus numerus ad idem integrum, quartum numerum; erit ex 5. theor. ſcholij propoſ. 22. lib. 7. vt E, G, primus & quintus ſimul, ad H, ſecundū, ita minutiæ C D, G H, tertius & ſextus numerus ſimul, ad integrum. Vt autem E, G, ſimul ad H, ita eſt F, ipſis E, G, æqualis, (Nam E, ex F, detractus reliquit G.) ad eundem H. Igitur erit quoque, vt F, ad H, ita minutiæ C D, G H, ſimul ad integrum. Cum ergo oſtenſum ſit, vt eſt F, ad H, ita eſſe minutiam A B, ad integrum; erit quoque vt minutia A B, ad integrum, ita minutiæ C D, G H, ſimul ad idem integrum: ac propterea æquales erunt minutiæ A B, & minutiæ C D, G H, ſimul. Detracta igitur minutia C D, ex minutia A B, reliqua erit minutia G H. quod eſt propoſitum. VEL ſic. Quoniam ex multiplicatione numeratorum in denominatores viciſſim, & ex ductu denominatorum inter ſe, gignuntur duæ minutiæ eiuſdem denominationis minutijs datis æquales, vt ex demonſtratione propoſ. 10. conſtat; ſi E, factus ex C, in B, detrahatur ex F, facto ex A, in D; & reliquo numero G, ſupponatur communis denominator H, ex denominatoribus productus, fiet minutia G H, reliqua poſt detractionem minutiæ C D, ex minutia A B, veluti initio huius propoſ. oſtenſum eſt.

IAM vero ſi dentur integra vna cum minutijs, ſubtrahenda erunt integra ſeorſum ab integris, & minutia à minutia. Quòd ſi minutia detrahenda, maior ſit, quàm ea, à qua fieri debet ſubtractio, b reducenda prius erit vnitas vna numeri integri, à quo fit ſubtractio, ad minutiam denominatoris minutiæ adhærētis. Vt ſi ſubtrahēda ſint 6 $\frac{2}{5}$. ex 10 $\frac{3}{4}$. ſubtractis 6. ex 10. ſuperſunt 4. & ſubductis $\frac{2}{5}$. ex $\frac{3}{4}$. ſupereſt minutia $\frac{7}{20}$. Totus ergo numerus reliquus erit 4 $\frac{7}{20}$. At ſi ſubtrahenda ſint 4 $\frac{6}{7}$. ex 20 $\frac{3}{4}$. faciemus ex vna vnitate numeri 20. minutiam $\frac{4}{4}$. quæ cū $\frac{3}{4}$. facit $\frac{7}{4}$. remanebunq; 19. integra. Subtracto ergo integro numero 4. ex 19. ſuperſunt 15. & ſubductæ minutia $\frac{6}{7}$. ex minutia $\frac{7}{4}$ reliqua eſt minutia $\frac{25}{28}$. Totus ergo reliquus numerus erit 15 $\frac{25}{28}$.

b 11. huius

SINT verbi gratia $\frac{3}{4}$. & $\frac{2}{5}$. minutiæ huius numeri integri 40. Igitur ſi $\frac{2}{5}$. id eſt, 16. detrahantur ex $\frac{3}{4}$. hoc eſt,

ex

ex 30. superſunt 14. nimirum $\frac{7}{20}$. integri numeri 40. vt ſuperior calculus docuit.

XXII.

MINVTIAM per minutiam multiplicare.

SIT minutia A B, per minutiam C D, multiplicanda. Ex multiplicatione numeratorum A, C, inter ſe fiat E, cui ſupponatur F, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam E F, gigni ex multiplicatione minutiarum A B, C D, inter ſe. Fiat enim G, ex E, in D; & H, ex C, in F: [a] *Eritq; vt minutia E F, ad minutiam C D, ita G, ad H. Quia vero C, multiplicans A, F, facit E, H;* [b] *erit vt A, ad F, ita E, ad H: Et permutando, vt A, ad E, ita F, ad H. Rurſus quia D, multiplicans E, & B, facit G, & F;* [c] *erit vt E, ad B, ita G, ad F. Ex aqualitate igitur perturbata, vt hic apparet, erit vt A, ad B, ita G, ad H. Vt autem G, ad H, ita oſtendimus eſſe minutiam E F, ad minutiam C D:* [d] *Et vt A, ad B, ita eſt minutia A B, ad integrum, hoc eſt, ad 1. Igitur erit quoque vt minutia E F, ad minutiam C D, ita minutia A B, ad 1. Quapropter ex defin. Multiplicationis, minutia E F, producitur ex multiplicatione minutia A B, in minutiam C D. quod eſt propoſitum.*

	H, 60.	G, 40.		
A, 3.	C, 4		E, 8	
B, 3.	D, 5		F, 15.	
A.	G.			
E.	F.			
B.	H.			

[a] 25. huius
[b] 17. sept.
[c] 17. sept.
[d] 2. huius

QVOD ſi minutia per numerum integrum ſit multiplicanda, ſupponenda erit integro numero vnitas, vt fiat quaſi minutia, cuius numerator eſt numerus integer datus, denominator autem vnitas. Ex quo fit, ſatis eſſe, ſi tunc numerator propoſitæ minutiæ per datum numerum integrum multiplicetur, & producto numero ſupponatur eiuſdem minutiæ propoſitæ denominator; propterea quòd vnitas integro numero ſuppoſita in denominatorem datæ minutiæ ducta eundem denominatorem datæ minutiæ non auget. Vt ſi multiplicari debeat minutia $\frac{3}{4}$. per 5. fient $\frac{15}{4}$. vt hic apparet, $\frac{3}{4}$. $\frac{5}{1}$. Gignetur enim minutia $\frac{15}{4}$.

[a] 11. huius

SI vero integris minutia adhæreant, a reuocanda erunt integra ad minutiam eiuſdem denominationis cum minutia adhærente, atque ex numeratore huius minutiæ, & numeratore minutiæ adhærentis vnus numerator conſtitui. Vt ſi multiplicanda ſint $7\frac{2}{3}$. per $4\frac{1}{2}$. fient ha duæ minutiæ multiplicandæ, $\frac{23}{3}$. $\frac{9}{2}$.

IAM vt multiplicationem minutiarum integris numeris accõmodemus, nõ erit minutia producta cũ integro numero aſſumpto conferenda, vt in additione, ac ſubtractione factũ eſt, ſed cum quadrato numeri integri aſſumpti: quia cum comparatio inter ſimilia fieri debeat, ex multiplicatione autem duorum numerorum inter ſe gignatur numerus planus, conferendus erit numerus productus cum plano totius numeri integri, hoc eſt, cum eius quadrato. Itaque ſint $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{5}$. minutiæ huius numeri integri 60. ex quarum multiplicatione gignitur minutia $\frac{8}{15}$. Neceſſe eſt ergo, vt $\frac{2}{3}$. numeri 60. in $\frac{4}{5}$. eiuſdem faciãt numerum, qui conſtituat $\frac{8}{15}$. quadrati, qui ex 60. in ſe producitur: Id quod liquido conſtat. Nam $\frac{2}{3}$. numeri 60. ſunt 40. & $\frac{4}{5}$. eiuſdem ſunt 48. At ex 40. in 48. fit numerus 1920. qui efficit $\frac{8}{15}$. numeri 3600. hoc eſt, quadrati ipſius 60.

XXIII.

MINVTIAM per minutiam diuidere.

SIT diuidenda minutia A B, per minutiam C D, & primum huius numeri C, D, metiantur illius numeros A, B, per E, F; ita vt diuiſo A, per C, Quotiens ſit E, & diuiſo B, per D, Quotiens ſit F. Dico minutiam E F, eſſe Quotientem diuiſionis minutiæ A B, per minutiam C D. Quoniam enim C, metitur A, per E; & D, metitur B, per F; [b] gignetur A, ex C, in E; & B, ex D, in F. [c] Igitur minutia A B, producta eſt ex multiplicatione minutiæ E F, per minutiam C D: ac proinde ex defin. multiplicationis erit, vt minutia A B, ad minutiam C D, ita minutia

A, 12	C, 3	E, 4.
B, 16.	D, 8.	F, 2.
A, 6	C, 3	E, 2.
B, 8.	D, 8.	F, 1.
A, 3	C, 3	E, 1
B 8.	D, 4.	F, 2.

[b] 9. pron.
[c] 22. huius

nutia EF, ad 1. Quocirca cum ſit, vt AB, minutia diuiſa ad CD, minutiam diuidentem, ita minutia EF; ad 1. erit ex defin. Diuiſionis minutia EF, Quotiens diuiſionis minutia AB, per minutiam CD. quod eſt propoſitum.

DEINDE numeri C, D, minutia CD, non metiantur numeros A, B, minutia AB. [2] Reducatur minutia AB, ad aliam æqualem EF, cuius numeros E, F, numeri C, D, minutia CD, metiantur per numeros G, H, ex A, in D, & ex C, in B, productos: q̃d quidem fiet, ſi K, ex C, in D, procreatus ducatur in A, B, vt gignantur E, F, veluti propoſ. 15. oſtenſum eſt. Quoniam igitur C, D, metiuntur E, F, per G, H; erit minutia GH, Quotiens diuiſionis minutia EF, vel AB, illi æqualis, per minutiam CD, vt initio huius propoſ. demonſtratum eſt. quod eſt propoſitum.

[2] 15. huius.

E, 24.	A, 2	K, 12.	C, 3.	G, 8
F, 36.	B, 3.		D, 4.	H, 9.
E, 90	A, 6	K, 15.	C, 3	G, 30
F. 135.	B, 9.		D, 5.	H. 27.

QVIA vero G, H, numeri minutiæ Quotientis GH, gignuntur ex A, in D, & ex C, in B, vt dictum eſt, ſatis eſt ad diuiſionem cuiuſuis minutiæ per quamlibet minutiam, ſi numerator A, minutiæ diuidendæ in D, denominatorem minutiæ diuidentis; & C, numerator minutiæ diuidentis in B, denominatorem minutiæ diuidendæ ducatur. Prior enim numerus procreatus G, dabit numeratorem, & poſterior H, denominatorem Quotientis minutiæ GH. Atque hoc verum eſt in omnibus minutijs, ſiue numeri minutiæ diuidentis numeros minutiæ diuidendæ metiantur, ſiue non. Nam ſemper ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis, & ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ, procreantur duo numeri, per quos numeri minutiæ diuidentis metiuntur numeros minutiæ, ad quam minutia diuidenda ſecundum doctrinam propoſ 15. reuocatur, vt ex eius propoſ. demonſtratione liquet, atque in hoc appoſito exemplo apparet, vbi numeri C, D, numeros A, B,

E, 48.	A, 8.	K, 6.	C, 2.	G, 4	H, 24
F, 54.	B, 9.		D, 3.	H, 3.	L, 18.

metiuntur

metiũtur per G, H; & numeros E, F, procreatos ex A, B in K, productum ex C, in D, ijdem numeri C, D, metiũtur per K, L: atque adeo tam minutia G H, quàm K L, Quotiens est minutia A B, per minutiam C D, diuisa.

IAM vero si numerus integer diuidendus sit per minutiam, vel per numerum integrum minutia diuidenda, supponenda est ei vnitas, vt fiat quasi minutia, cuius numerator est datus numerus integer, & denominator 1. Vt si numerus 8. diuidendus proponatur per $\frac{1}{2}$. fiet Quotiens $\frac{16}{1}$. vt in appositio priori exemplo perspicuum est. Si autem minutia $\frac{1}{2}$. diuidenda sit per integrum numerum 8. fiet Quotiens $\frac{1}{16}$. vt in posteriori exemplo apparet.

$\frac{8}{1.}$ $\frac{1}{2.}$ $\frac{16}{1.}$

$\frac{1}{2.}$ $\frac{8}{1.}$ $\frac{1}{16.}$

QVOD si minutia adhæreant integris, reducenda erunt integra ad minutiam eiusdem denominationis cum minutia adhærente, veluti ad finem antecedentis propos. diximus.

VERVM quia non facile est memoriter tenere, ex numeratore minutiæ diuidendæ in denominatorem minutiæ diuidentis ducto numeratorem Quotientis minutiæ, denominatorem autem ex numeratore minutiæ diuidentis in denominatorem minutiæ diuidendæ; satius erit ad memoriam iuuandam, loca numerorum minutiæ diuidentis inter se permutare, vt in Arithmetica tradidimus, ac deinde regulam multiplicationis vsurpare. Vt si diuidenda proponatur minutia $\frac{3}{4}$. per $\frac{2}{7}$. permutandi erunt numeri minutiæ diuidentis hoc modo $\frac{7}{2}$. Vnde Quotiens erit $\frac{21}{8}$. vt hic vides. Nam hac ratione numerator minutiæ diuidendæ semper ducitur in denominatorem minutiæ diuidentis, iuxta regulam multiplicationis, quæ præcipit, numeratores esse multiplicandos inter se, vt fiat numerator, &c.

$\frac{3}{4.}$ $\frac{7}{2.}$ $\frac{21}{8.}$

SIT integer numerus 700. cuius minutia $\frac{3}{4}$. diuidenda sit per eiusdem $\frac{2}{7}$. hoc est, numerus 525. per 200. Perspicuum

cuum autem eſt, diuiſis 525. per 200. Quotientem eſſe 2-$\frac{5}{8}$. id eſt, minutiam $\frac{21}{8}$, quæ proximè inuenta eſt. Sic etiam ſi integer numerus 10. octies ſumptus diuidatur per eius dimidium, nimirum per 5. Quotiens fiet 16. qui inuentus ſupra fuit, ex diuiſione 8. per $\frac{1}{2}$.

XXIIII.

MINVTIAM in minutiam inferere.

SIT minutia AB, in minutiam CD, inferenda, ſitque primum ſenſus, addendam eſſe minutiam AB, vnius particulæ minutiæ CD, ad minutiã CD: hoc eſt, addendas eſſe $\frac{3}{4}$. vnius ſeptimæ ad $\frac{6}{7}$. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris minutiæ fiat F. cui addatur A, numerator prioris, & compoſito numero G, ſupponatur denominator H, ex multiplicatione denominatorum B, D, procreatus. Dico minutiam GH, procreari ex inſitione minutiæ AB, in minutiam CD, in eo ſenſu, quem diximus, hoc eſt, minutiam GH, æqualem eſſe minutiæ AB, reſpectu vnius particulæ minutiæ CD, additæ ad minutiam CD. Queniam enim AB, minutia vnius particulæ minutiæ CD, a reducitur ad ſimplicem minutiam AH, cuius numerator idem eſt, qui A, productus nimirum ex vnitate in A; denominator autem numerus H, ex denominatoribus B, D, procreatus, vt in appoſito hoc exemplo appæret. Item minutia FH, minutiæ CD, æqualis eſt, habens eundem denominatorem H, ex denominatoribus B, D, productum; numeratorem vero F, ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris productum: (Cum enim B, in C, D, facias F, H;

F, 24.

A, 3 C, 6 G, 27.
B, 4. D, 7. H, 28.

A, 3 1 A, 3
B, 4. D, 7. H, 28.

a 14. huius

a 17. sept.
b 8. huius

F, H; a erit vt C, ad D, ita F, ad H; b ac propterea minutia C D, F H, aquales erunt.) efficitur, minutiam G H, cuius numerator G, ex numeratoribus F, A, minutiarum F H, A H, componitur, (nimirum ex numero ex C, in B, producto, & ex A,) denominator autem H, idem, qui earundem minutiarum F H, A H; efficitur, inquam, minutiam G H, summam esse minutiarum F H, A H, vt initio propos. 20. ostensum est; hoc est, summã ex minutia A B, respectu vnius particulæ minutiæ C D, quæ minutiæ A H, ostensa est aqualis, & ex minutia C D, quæ ostensa est aqualis minutiæ F H, collectam. Minutia igitur G H, procreatur ex insitione minutiæ A B, in minutiam C D; id est, aqualis est minutiæ A B, vnius particulæ minutiæ C D, & minutiæ C D, simul. quod est propositum.

I A M vero si plures minutiæ A B, C D, E F, G H, sint inserendæ, hoc est, si minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H: & minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, addi debeant ad minutiam G H, ita agendum erit. Ex G, numeratore postremæ minutiæ G H, in F, denominatorem penultimæ minutiæ E F, fiat numerus, cui addatur E, numeratore eiusdẽ penultimæ minutiæ E F, vt fiat numerus K. Deinde producto ex K, in D, denominatorem antepenultimæ minutiæ C D, addatur C, numerator eiusdem minutiæ C D, vt fiat M. Producto quoque ex M, in B, denominatorem proximè antecedentis minutiæ A B, adijciatur A, numerator eiusdem minutiæ A B, vt fiat P: Atque ita deinceps ducatur semper vltimus numerus conflatus in denominatorem proximè antecedentis minutiæ; producto q; numerator eiusdem proximè antecedentis minutiæ adijciatur, donec nulla minutia superst. Numero autem P, qui vltimo loco conflatus est, supponatur numerus Q, ex denominatoribus inter se multiplicatis procreatus, ducendo primum H, in F, vt fiat L; deinde L, in D; vt fiat N; post

P, 119. M, 59. K, 14.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15,

poſt hæc N, in B, vt fiat Q, &c. Dico minutiam P Q, ex inſitione datarum minutiarum produci in eo ſenſu, quem expoſuimus. Nam vt in duabus minutijs oſtenſum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiæ E F, in minutiam G H, hoc eſt, æqualis eſt ſummæ ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, & ex minutia G H, collectæ. Deinde minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator C, (productus nimirum ex C, in vnitatem bis poſitam hoc modo, 3. 1. 1.) & denominator N, ex D, in L, hoc eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, procreatus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex D, in K, productus, denominator autem idem numerus N, ex D, in L, productus, [b] æqualis eſt minutiæ K L: [c] quod numeratores harum minutiarum ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum D, in K, L, gignat numeros alterius illius minutiæ. Igitur, cum per ea, quæ ad initium propoſ. 20. demonſtrauimus, minutia M N, cuius numerator M, ex numeratore C, & ex numero, qui fit ex D, in K, conflatur, æqualis ſit ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator C, & denominator N, atque ex minutia cuius numerator ex D, in K, producitur, denominator vero N; æqualis quoque erit eadem minutia M N, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H, atque ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H. Rurſus minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H, [d] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator A, & denominator Q, ex B, in N, id eſt, ex multiplicatione denominatorum H, F, D, B, productus: Minutia quoque, cuius numerator eſt numerus ex B, in M, procreatus, denominator vero idem numerus Q, ex B, in N, productus, [e] æqualis eſt minutiæ M N, [f] quod numeratores harũ minutiarum ad denominatores eãdem proportionem habeãt, quippe cum B, in M, N, gignat numeros alterius illius minutiæ. Cum minutia igitur P Q, cuius numerator P, ex numeratore A, & ex numero, qui fit ex B, in M, conflatur, æqualis ſit ſumma collectæ ex minutia, cuius numerator A, & denominator Q, atque ex minutia, cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator vero Q, vt initio propoſ. 20. monſtratum eſt;

[a] 14. huius
[b] 8. huius
[c] 17. ſept.
[d] 14. huius
[e] 8. huius
[f] 17. ſept.

eſt; æqualis quoque erit eadem minutia P Q, ſummæ collectæ ex minutia G H, & ex minutia E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ G H; & ex minutia A B, vnius particulæ minutiæ C D, vnius particulæ minutiæ E F, vnius particulæ minutiæ C D, quod eſt propoſitum. Eademque ratio eſt de pluribus.

SIT deinde ſenſus, addendam eſſe minutiam A B, totius minutiæ C D, ad minutiam C D. Ex C, numeratore poſterioris minutiæ in B, denominatorem prioris fiat F, cui addatur E, ex numeratoribus A, C, productus, conflatoque numero G, ſupponatur H, ex denominatoribus B, D, procreatus. Dico minutiam G H, produci ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in eo, quem diximus, ſenſu; hoc eſt, minutiam G H, æqualẽ eſſe ſummæ collectæ ex minutia C D, & ex minutia A B, minutiæ C D. Quoniam enim minutia A B, minutiæ C D, [a] *reducitur ad minutiam ſimplicem E H, cuius numerator eſt E, ex numeratoribus A, C, procreatus, denominator autem H, ex denominatoribus B, D, productus, vt exemplum appoſitum demonſtrat:* [b] *Minutia quoque F H, æqualis eſt minutiæ C D;* [c] *quòd numeratores ad denominatores eandem proportionem habeant; quippe cum B, in C, D, faciat F, H: Erit minutia G H, (quę ex ijs, quæ ad initium propoſ. 20. oſtendimus, æqualis eſt ſummæ minutiarum E H, F H,) æqualis ſummæ collectæ ex minutia C D; (hoc eſt, ex minutia F H) & ex minutia A B, minutia C D, (id eſt, ex minutia E H,) atque ideo minutia G H, procreatur ex inſitione minutiæ A B, in minutiam C D, in hoc poſteriori ſenſu. quod eſt propoſitum.*

E, 18. F, 24.
A, 3 C, 6 G, 42
B, 4. D, 7. H, 28.

[a] 14. huius

A, 3 C, 6 E, 18
B, 4. D, 7. H, 28.

[b] 2. huius
[c] 17 ſept.

QVOD ſi plures ſint minutiæ inferendæ A B, C D, E F, G H, hoc eſt, minutia A B, minutia C D, minutia E F, minutia G H; & minutia C D, minutia E F, minu-

tia

tia G H ; & minutia E F , minutia G H , addenda ſint ad minutiam G H, ita agendum erit . Ducatur G, in F, productoque numero addatur numerus ex E, in G, procreatus, vt fiat K. Deinde ducatur K, in D, numeroque producto adijciatur numerus ex C, E, G, factus, vt fiat M. Producto quoque numero ex M, in B, addatur numerus ex A, C, E, G, procreatus, vt fiat P. Atque ita deinceps ducatur ſemper numerus vltimo loco genitus in denominatorem antecedentis minutiæ, numeroque procreato adijciatur numerus ex omnibus numeratoribus minutiarum ad eum vſque locum aſſumptarum productus, donec nulla ſuperſit minutia. Numero autem P, qui vltimo loco procreatus eſt, ſupponatur numerus Q, ex omnibus denominatoribus productus, vt in priori ſenſu. Dico minutiam P Q, produci ex inſitione dictarum minutiarum, ſi inſitio intelligatur, vt dictum eſt. Nam, vt in duabus minutijs demonſtratum eſt, minutia K L, producitur ex inſitione minutiarum E F, G H, id eſt, æqualis eſt ſummæ collectæ ex minutia E F, totius minutiæ G H, & ex minutia G H. Deinde minutia C D, totius minutiæ E F, totius minutiæ G H, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus G, E, G, producitur, denominator autem eſt N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus. Minutia quoque, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator autem eſt idem N, ex D, in L, hoc eſt, ex denominatoribus H, F, D, procreatus; [b] æqualis eſt minutiæ K L; [c] quòd numeratores harũ minutiarũ ad denominatores habeant proportionẽ eandẽ: quippe cum D, in K, L, faciat numeros alterius huius minutiæ. Igitur cũ minutia M N, cuius numerator M, cõflatur ex numero, quem numeratores C, E, G, gignunt,

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4
B, 2. D, 4. F, 3. H, 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

P, 232. M, 104. K, 20.

A, 1 C, 3 E, 2 G, 4.
B, 2. D, 4. F, 3. H. 5.

Q, 120. N, 60. L, 15.

[a] 14. huius

[b] 8. huius
[c] 17. ſept.

gignunt, & ex numero, quem D, in K, procreat, æqualis ſit per ea, quæ initio propoſ. 20. oſtenſa ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus C, E, G, producitur, denominator autem N, ex denominatoribus H, F, D, procreatus, atque ex minutia, cuius numerator ex D, in K, gignitur, denominator verò eſt idem N; æqualis erit etiam eadem minutia MN, ſummæ collectæ ex minutia GH; & ex minutia EF, minutia GH; & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH. Rurſus minutia AB, minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH, [a] facit minutiam ſimplicem, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autē Q, ex B, in N, procreatus, ſiue ex denominatoribus H, F, D, E. Minutia quoque, cuius numerator ex B, in M, producitur, denominator autē eſt idem Q, ex B, in N, procreatus, [b] æqualis eſt minutiæ MN; [c] quòd harum minutiarum numeratores eandem habeant ad denominatores proportionem; cum B, in M, N, faciat numeros alterius huius minutiæ. Minutia ergo PQ, cuius numerator P, conflatur ex numero, quem numeratores A, C, E, G, gignunt, & ex numero, quem facit B, in M, cum æqualis ſit, ex iis, quæ initio propoſ. 20. demonſtrata ſunt, ſummæ collectæ ex minutia, cuius numerator ex numeratoribus A, C, E, G, producitur, denominator autem eſt Q; atque ex minutia cuius numerator ex B, in M, gignitur, denominator autem eſt idem Q; æqualis quoque erit ſummæ collectæ ex minutia GH; & ex minutia EF, minutiæ GH; & ex minutia CD, minutiæ EF, minutiæ GH; & ex minutia AB, minutiæ CD, minutiæ EF, minutiæ GH. quod eſt propoſitum. Eadem ſi de pluribus eſt ratio.

[a] 14. huius

[b] 8. huius

[c] 17. ſept.

DE PROPORTIONVM compoſitione.

EXPEDITIS iis, quæ ad fractorum numerorum demonſtrationes pertinent, reliquum eſt, vt compoſitionem proportionum explicemus: id quod ad propoſ. 5. lib. 8. nos hoc loco facturos recepimus. In primis igitur, compoſitionem illam proportionum, de qua Euclides egit defin. 10. lib. 5. & defin. 5. lib. 6. & in iis propoſitionibus, vel duplicatam, triplicatam, aut

aut compoſitam proportionem de magnitudinibus, vel numeris demonſtrat, non eſſe verè additionem proportionum, ita vt duplicata, vel triplicata proportio ſit duplo, aut triplo maior ea proportione, cuius illa dicitur duplicata, triplicataue: Item vt proportio ex pluribus proportionibus cõpoſita ſit verè totũ quippiã, cuius partes ſint proportiones, ex quibus cõponi dicitur, vt plerunq; interpretes Eucl. exiſtimant, ex hoc perſpicuè confirmari poteſt: quòd pars eſſet vel æqualis, vel maior toto. Nam cũ hæc compoſitio intelligẽda ſit, ſiue maior quantitas cũ minore, ſiue minor cũ maiore conferatur, vt ad defin. 10. lib. 5 oſtẽdimus, ſi, poſitis his tribus terminis continuè proportionalibus, 1. 10. 100. proportio 1. ad 100. non ſolũ duplicata diceretur proportionis 1. ad 10. vt vult defin. 10. lib. 5. ſed vere eſſet duplo maior, ita vt coaceruata foret ex duabus proportionibus 1. ad 10. & 10. ad 100. æqualibus, vt Eucl. interpretes putant, quis non videt, partem eſſe maiorem toto, nimirum proportionem 1. ad 10. quæ vna pars eſt, maiorẽ eſſe proportione 1. ad 100? Hic autem 4. 4. 4. partẽ æqualem eſſe toti? Sic etiã, ſi, poſitis his tribus terminis nõ cõtinuè proportionalibus, 4. 2. 8. proportio 4. ad 8, verè coaceruaretur ex proportionibus 4. ad 2. & 2. ad 8. tanquam ex partibus, vt ijdẽ auctores contendunt, eſſet quoq; pars maior quam totũ, quòd proportio dupla 4. ad 2. maior ſit proportione ſubdupla 4. ad 8. Hic autem 10. 5. 1. 2. 5. pars toti foret æqualis, proportio videlicet 10. ad 5. primi termini ad ſecundũ, proportioni 10. ad 5. primi termini ad vltimũ. Id quod cogunatur omnino concedere, velint nolint, ex propoſ. 5. lib. 8. Sint enim duo numeri plani 24. & 48. Prioris latera ſint 12. & 2.

Poſterioris vero 3. & 16. Quoniã igitur	24.	48.
Euclides ibi demonſtrat, proportionẽ 24.	12. 2.	3. 16.

ad 48. compoſitã eſſe ex proportionibus laterum, hoc eſt, ex proportione 12. ad 3. & ex proportione 2. ad 16. erit pars componẽs, (ſi hæc cõpoſitio eſt vera additio.) nimirũ proportio quadrupla 12. ad 3. maior toto, proportionẽ videlicet ſubdupla 24. ad 48. Pari ratione, ſi proportio ſubdupla 24. ad 48. vere totũ eſt, & eius partes componẽtes proportio quadrupla 12. ad 3. & proportio ſuboctupla 2. ad 16. ſi alterutra harũ ab illa ſubtrahatur, reliqua erit altera. Igitur & maius ex minore ſubtrahi poteſt, nimirũ proportio quadru

pla 12. ad 3. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. & ſubtracta proportione ſiboctupla 2. ad 16. ex proportione ſubdupla 24. ad 48. reliqua erit proportio quadrupla 12. ad 3. maior quàm ea, à qua facta eſt ſubtractio. Quòd ſi poſterioris numeri plani 48. latera ſumantur 12. & 4. erit vna partium componentiũ, nimirum proportio 2. ad 4. æqualis toti, proportioni videlicet 24. ad 48. Et ſubtracta proportione 2. ad 4. ex proportione æquali 24. ad 48. ſupereſſet adhuc proportio æqualitatis 12. ad 12. quamaior eſt quàm totũ, hoc eſt, quàm proportio 24. ad 48. Rurſus ſequeretur, totũ non augeri, etiamſi ei infinitæ partes adderentur. Poſitis enim his quatuor terminis, 12. 4. 2. 1. ſi proportio 12. ad 1. vere coacernatur ex proportionibus 12 ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. velut ex partibus, ita vt hæ proportiones ſimul ſumptæ proportioni 12. ad 1. ſint æquales: ſi cum illis terminis cõtinuentur adhuc alij tres termini hoc modo. 12. 4. 2. 1. 6. 3. 1. componetur eadẽ proportio 12. ad 1. ex ſex proportionibus, quarum priores tres ſunt eædem illæ, ex quibus prius componebatur. Tres ergo proportiones 1. ad 6. & 6. ad 3. & 3. ad 1. additæ tribus proportionibus 12. ad 4. & 4. ad 2. & 2. ad 1. non augent totum ex illis coacernatum. Hæc autem omnia abſurda ſunt, & contra principia Mathematicorũ. Huc accedit, quòd ſecundum communem hominum ſenſum duæ proportiones triplæ conſtituant proportionem ſextuplã, non autem nonuplam, vt prædicti auctores volunt, quanquã nõcupla proportio dicatur tripla duplicata, vt in his numeris apparet, 9. 3. 1. Nam quis non videat, ſi agens aliquod ſit, vt 3. illud idem duplo potentius factum eſſe vt 6. non autem vt 9? Sic etiã communis intelligentia comprehendit ex proportione tripla, & quintupla confici proportionem octuplã, propterea quòd duo mouẽtia vt 3. & 5. moueant ſimul ſumpta, vt 8. non autẽ ex illis conſtitui proportionem 15. ad 1. quamuis hæc ex illis per continuationẽ compoſita eſſe dicatur, ex defin. 5. lib. 6. vt patet in his numeris, 15. 5. 1. His adde, multorũ agentiũ vires nõ poſſe dimidiari, ea quòd inter duos numeros, qui proportionẽ agentis ad patiens exprimunt, nullus medius cadat proportionalis. Verbi gratia. Agens vt 6. nõ poſſet habere agens duplo minus, quòd inter 6. & 1. nullus medius proportionalis cadat numerus: quis autem

non

non ſtatim intelligat: agens vt 3. in dupla proportione minus eſſe, quàm agens vt 6?

LIQVET ergo, huiuſmodi compoſitionem proportionũ non eſſe additionem, ſed proportionũ continuatione, quæ per multiplicationem denominatorum fit, vt ad defin. 5. lib. 6. demonſtrauimus, vbi etiam expoſuimus, cur extremorum proportio dicatur ex mediis proportionibus compoſita propter terminorum cõtinuationem, quemadmodũ & ad defin. 10 lib. 1. explicauimus, cur, poſitis tribus, quatuor, aut pluribus terminis continuè proportionalibus, extremorũ proportio appelletur duplicata, triplicata, aut quadruplicata, &c. eius proportionis, quam primi duo termini habent. Hæc autem planius percipientur ex ijs, quæ iam iam de vera compoſitione proportionum dicturi ſumus.

ITAQVE omnes operationes Arithmeticæ in proportionibus, nimirũ additio, ſubtractio, multiplicatio, ac diuiſio, fieri debent per proportionũ denominatores, vt rectè docet Volumnius Rodulphus in diſputatione de proportione proportionum. Et quoniam denominatores proporsionum ſunt fractiones, ſiue minutiæ, vt lib. 5. docuimus, (cũ denominatori cuiuſlibet proportionis multiplicis, qui numerus integer eſt, ſupponi poſſit vnitas, vt ex eo fiat quaſi minutia ab vnitate denominata.) quarũ qualibet æqualis eſt fractioni, quã conſtituũt duo quicunq; numeri in ea proportione, cuius illa fractio denominator eſt, ſi ex antecedẽte fiat numerator, & ex cõſequente denominator: manifeſto colligitur, operationes Arithmeticas in proportionibus ab operationibus fractarũ numerorũ nõ differre, ſiue per proportionũ d. nominatores, ſiue per numeros earundẽ proportionũ quoſcunq;, poſitis tamen conſequentibus terminis ſub antecedentibus, inſtar minutiarũ, inſtituãtur, vt egregie Cardanus præcipit in ſua Arithmetica, vt iam apparebit.

PRIMVM .n. ſint in vnã ſummã colligẽdæ duæ proportiones, tripla, & quintupla. Quoniã denominatores sũt 3. & 5. ex quorũ additione fit sũma 8. coacer	3 × 5	12 × 40.
nabitur octupla proportio ex illis. quæ	1 1.	4 8.
sũma etiã colligitur, ſiue denominato	8	256
res, ſuppoſita prius vnitate cuilibet il-	1.	32.

lorũ, inſtar minutiarũ addãtur, ſiue numeri 12. 4. & 40. 8. inter quos datæ proportiones reperiuntur, perinde ac ſi eſſent

ſ acti nun eri, poſitis terminis conſequentibus ſub antecedentibus, in unã ſum ꝫ colligãtur. Prior enim modo colligitur proportio 8. ad 11. poſteriore autẽ 256. ad 32. quarũ utraq; octupla eſt. Sic etiã ex proportione dupla ſuperquadripartiente ſeptimas, & ſeſquialtera, quarũ denominatores ſunt $2\frac{4}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. & que inter numeros 54. 21. & 6. 4 reperiuntur, ſit proportio quadrupla ſeſquidecimaquarta, qualem habent tam numeri 57. 14. quàm 342. 84. Sed quado per denominatores inſtituitur operatio, revocandi prius ſunt denominatores ad unicas fractiones, vt hic factũ eſt. Nam $2\frac{4}{7}$. revocauimus ad $\frac{18}{7}$. & $1\frac{1}{2}$. ad $\frac{3}{2}$. Quod in alijs etiam operationibus intelligendum eſt.

18	3	54	6
7	2	21	4.
57		342	
14.		84.	

DEINDE ſi ex proportione octupla ſubtrahatur proportio tripla: Item ex proportione quadrupla ſeſquidecimaquarta deducatur proportio ſeſquialtera; reliqua fient proportiones quintupla, & dupla ſuperquadripartiens ſeptimas, vt hic perſpicuum eſt.

8	3	256	12	57	3	342	6
1	1.	32	4.	14	2.	84	4.
5		640		72		864	
1.		128.		28		336.	

TERTIO ſi multiplicanda ſit prorortio tripla per 2. vel quod idem eſt, per proportionẽ duplam: Item proportio ſeſquialtera per ſupertripartientem quintas; inſtituenda erit operatio, vt hic vides, producetur q; ibi proportio ſextupla, hic autem dupla ſuperbipartiens quintas.

3	2	6		12	10	120		3	8	24		9	16	144
1	1.	1.		4	5.	20.		2	5.	10.		6	10.	60.

QVARTO & vltimo ſi proportio ſextupla diuidẽda proponatur per proportionẽ triplã: Itẽ proportio dupla ſuperbipartiens quintas per proportionẽ ſeſquialtera, ſi diuiſorus termini permutentur, vt in diuiſione minutiarum docuimus, ita inſtituetur operatio.

VIDES

6	1	6	120	4	480	24	2	48	144	6	864
1	3.	3.	20	12.	240.	10	3.	30.	60	9.	540.

VIDES ergo operationes Arithmeticas proportionum ab operationibus minutiarum nulla in re discrepare, nisi quòd in proportionibus necesse non est interponere lineolam inter numeratorem & denominatorem, quemadmodum in minutiis.

IAM vero multiplicationem proportionũ à nobis præscriptam, quam auctores additionem falsò nũcupant, cum proportionum compositione, de qua Euclides defin. 10. lib. 5. & defi. 5. lib. 6. egit, conuenire, atq; adeo compositionẽ illam Euclidis verè esse multiplicationem, non autem additionem, vt diximus, hoc modo demonstrabimus. Sint duæ proportiones A, ad B, & C, ad D, siue æquales, siue inæquales; ducaturq; A, antecedens in antecedentem C, & fiat E; ex cõsequente vero B, in consequentem D, fiat F. Dico proportionem E, ad F, quæ ex illa multiplicatione producitur, esse compositam ex proportionibus duabus A, ad B, & C, ad D: ita vt si proportiones hæ A, ad B, & C, ad D, fuerint æquales, proportio E, ad F, dicatur alterutrius earum duplicata, vt vult defin 10. lib. 5 si autem fuerint inæquales, dicatur ex illis composita, ex sententia defin. 5. lib. 6. Fiat enim G, ex B, in C. Et quia ex A, B, in C, fiunt E, & G; [a] erit vt A, ad B, ita E, ad G. Rursus quia ex B, in C, D, fiunt G, & F; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad F. Componitur autẽ proportio E, ad F, ex proportionibus E, ad G, & G, ad F, ex defin. Euclidis. Igitur eadem proportio E, ad F, componitur ex proportionibus A, ad B, & C, ad D, cum hæ eadẽ sint, quæ E, ad G, & G, ad F. Quod etiam patet ex demonstratione, quam ad defin. 5. lib. 6. ex Eutocio, & Vitellione attulimus. Cũ enim compositio proportionum ab Euclide descripta respondeat multiplicationi denominatorum inter se, vt ibi demonstratimus, nostra vero multiplicatio à multiplicatione denominatorum nõ differat, liquido constat, compositionem illam proportionum esse multiplicationem, quam tradidimus.

A, 6.	C, 12.		A, 3	C, 6			
B, 2.	D, 4.		B, 2.	D, 5.			
E, 72.	F, 8.		F, 18.	F, 10.			
G, 24.			G, 12.				

[a] 18. sept.
[b] 17. sept.

EADEM ratione oſtendemus, ſubtractionem proportionum, quam iidem auctores docent, non eſſe aliud, quàm diuiſionem à nobis explicatam, eſſeque compoſitioni illi Euclidis contrariam. Sit enim ex proportione A, ad B, detrahenda proportio C, ad D, vt ipſi uolunt. Ex A, in D, fiat E, & ex B, in C, fiat F. quod idem eſt, ac ſi termini proportionis G, ad D, permutent loca, & regula multiplicationis adhibeatur. Dico proportionem E, ad F, qua ex diuiſione proportionis A, ad B, per proportionem C, ad D, producitur, vt docuimus, eſſe eam, qua relinquitur, ſublata proportione C, ad D, ex proportione A, ad B: hoc eſt, proportionem A, ad B, compoſitam eſſe ex proportionibus C, ad D, & E, ad F. iuxta defin. Euclidis. Fiat enim G, ex A, in C. Quia igitur ex A, B, in C, fiũt G, F; [a] erit vt A, ad B, ita G, ad F. Rurſus quia ex A, in C, D, fiunt G, E; [b] erit vt C, ad D, ita G, ad E. Cum ergo proportio G ad F, compoſita ſit ex proportionibus G, ad E, & E, ad F, vt vult Euclides; erit quoque proportio A, ad B, (quia eadem eſt, quæ G, ad F,) compoſita ex eiſdem proportionibus G, ad E, hoc eſt, C, ad D, & E, ad F: ac proinde ſubducta proportione C, ad D, ex proportione A, ad B, reliqua erit proportio E, ad F: quemadmodum ſi ex proportione G, ad F, (poſito termino E, medio) dematur proportio G, ad E, reliqua eſt proportio E, ad F. Sed quis nõ videt, hoc potius eſſe diuidi proportionem A, ad B, per proportionem C, ad D, quàm proportionem C, ad D, ex proportione A, ad B, ſubtrahi, ne manus ex minore auferre dicatur, vt in poſteriori exemplo accidit? Atque hæc de proportionum compoſitione: qui plura deſiderat, legat eruditiſſimum tractatum hac de re à Volumnio Rodulpho Spoletano conſcriptum.

A, 9.	C, 3	A, 4.	C. 6.
B, 1.	D, 1.	B, 2.	D, 3.
E, 9.	F, 3.	E, 8.	F, 12.
G, 27.		G, 24.	

[a] 18. ſept.
[b] 17. ſept.

FINIS ELEMENTI NONI.

EVCLI-

EVCLIDIS

ELEMENTVM DECIMVM.

DEFINITIONES.

I.

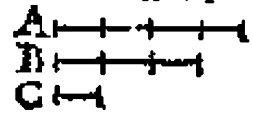
COMMENSVRABILES magnitudines dicuntur, quas eadem mensura metitur.

ABSOLVIT Euclides in antecedentibus tribus libris ea, quæ ad numeros ſpectant, quantum ſatis viſum eſt ad res Geometricas intelligendas: Nunc in hoc decimo libro aggreditur ad diſputationem linearum commenſurabilium, & incommenſurabilium, quarum cauſa numerorum tractationem ab eo ſuſceptam eſſe ſuperius diximus. Nam ſine cognitione harum linearum complures magnitudines cum ſolidæ tum planæ, neque perfectè intelligi poſſunt, neq; cum res tulerit, in opus atque uſum conferri; propterea q plerunq; latera earũ incõmenſurabilia ſunt: Id qđ & de pla

nis ipſis atque ſolidis dici poteſt, quippe cum & hæc incommẽ ſurabilia ſæpenumero exiſtãt, vt ad finem huius libri demonſtrabimus. Quoniam vero hic liber multis obſtrũctus eſt difficultatibus, ob linearum, de quibus differt, obſcuritatem; omnes neruos induſtriæ meæ in eo contendam, vt ex his, quæ hactenus ab Euclide ſunt demonſtrata, ita planus reddatur, ac facilis, vt ſine multo labore a quouis, qui præcedentiũ tamen librorum demonſtrationes recte intellexerit, poſſit percipi. Neque enim in eorum poſſum ſententiam ire, qui putant ad eius intelligentiam eſſe neceſſariam eam partem Arithmetices, qua de radicibus numerorum, tam rationalibus quàm irrationalibus, vt vocant, ſermonem inſtituit: Immo contra perſuaſum mihi prorſus habeo, cognitionem perfectam illius partis Arithmetices pendere ex hoc 10. lib. tantum abeſt, vt exiſtimem, tractationem illam radicum requiri, vt facilius hic liber intelligatur. Non negarim tamen, eum, qui rationem radicum atque calculum tenuerit, maiore cum voluptate hunc librum percepturum, quam qui illarum omnino ſit ignarus, propterea quod ille demonſtrationes ad vſum poteſt reuocare, hic vero nullo modo. Hæc enim de cauſa & nos priora decem theoremata ſecundi lib. numeris accõmodauimus, vt oblectationem animi maiorem ex eo ſtudioſus caperet, ac fructum; non autem vt ea, quæ in illo demonſtrantur, facilius arbitraremur intelligi poſſe ex numeris. Cur ergo (dicet aliquis) vt in eo libro, non perinde etiam in hoc exempla numerorum, quibus Algebra vtitur, vſurpaſti, vt ea res & maiori voluptati eſſet, & commodo legentibus? In promptu cauſa eſt, quare id omittendum putauimus. Cum enim perpauci ſint hoc tempore, quibus celeberrima illa Algebræ ars ſit cognita, videbantur numeri illi, ſi adhiberentur, tenebras potius effuſuri, quam lucis aliquid maioris daturi, & perſpicuitatis, quippe ita ingenia ſtudioſorum pro adiumẽto, ac luce, quam his noſtris commentarijs afferre laboramus, plus caperent incommodi, minuſq; demonſtrationes iſtas perciperent: Id quod in lib. 2. accidere non potuit, cum additionem numerorum integrorum, ac multiplicationem, quæ ſolæ neceſſariæ ibi fuerunt, nemo fere ſit, qui ignorer. Huc accedit, quod qui in Algebra ſunt verſati, facili negotio demonſtrationes huius lib. ad numeros accommodare poſſunt per ſeipſos, quando volunt,

do uolunt, præsertim cum iam hoc ipsum non multo ante a Michaele Stifelio nobili Arithmetico in 2. lib. operis, quod de Arithmetica integra inscripsit, diligenter effectum sit, & accurate.

ITAQVE, vt ad instituentum redeamus, inchoans rem ipsam Euclides, more suo, ab explicationibus vocabulorum, quibus vtendum erit; declarat primo loco, quanam magnitudines dicantur commensurabiles, definiens eas esse, quas eadē mensura metitur. Vt duæ magnitudines A, B, quas eadem mēsura C, metitur, (metitur enim C, ipsam A, quater repetita, & ter sumpta ipsam B,) dicuntur commensurabiles. Eodem modo commensurabiles sunt, linea 20. palmorū & linea 13. palmorum; quia eas linea tam vnius palmi, quā dimidiati palmi, quam tertiæ partis vnius palmi, &c. metitur. Similiter commēsurabiles dicuntur superficies, quas vna, & eadem superficies metitur; Item corpora, solidaue commensurabilia, quæ metitur idem corpus, seu solidum.



II.

INCOMMENSVRABILES autem, quarum nullam communem mensuram contingit reperiri.

TALES magnitudines sunt, diameter quadrati cuiusuis, & latus eiusdem; quoniam nullam habent mensuram communem, vt propositione vltima huius lib. demonstrabitur ab Euclide. Sunt etiam plurimæ aliæ lineæ incommensurabiles, quibus scilicet mensura aliqua communis dari nullo modo potest, quarum multas hoc lib. Geometra explicat, docetque, quanam ratione inueniri possint. Rursus, superficies dicentur incommensurabiles, & solida incommensurabilia, quæ nullam admittunt mensuram communem.

III.

RECTAE lineæ potentia commē-

surabiles

ſurabiles ſunt, cum quadrata earum idem ſpatium metitur.

LINEARVM rectarum quædam commenſurabiles ſunt longitudine, quas nimirũ alia linea, tanquam menſura communis, metitur; cuiuſmodi ſunt illæ, quas in expoſitione defin. 1. commẽſurabiles ſimpliciter diximus: quædam vero longitudine incommenſurabiles, quas ſcilicet nulla linea, tanquam menſura communis, metitur. Rurſus linearum, quæ ſunt incommẽſurabiles longitudine, alia ſunt eiuſmodi, vt earũ quadrata ſint commenſurabilia; alia vero ita ſe habent, vt & quadrata earum incommenſurabilia ſint. Lineæ ergo illæ longitudine incommenſurabiles, quarum quadrata ſunt commẽſurabilia, appellantur hic ab Euclide potentia commenſurabiles; quia videlicet ſecundum earum potentias, hoc eſt, ſecundum earum quadrata (eſt enim, vt ad propoſ. 47. lib. 1. diximus, potentia cuiuſque lineæ, quadratum ab ea deſcriptum) commenſurabiles ſunt, licet ipſæ ſecundum longitudinem ſint prorſus incommenſurabiles.

QVOD ſi quis roget, cur Euclides definierit ſeorſum lineas potentia commenſurabiles, non autem commenſurabiles longitudine; reſpondendum eſt, lineas longitudine commẽſurabiles ſatis ſuperq; eſſe explicatas in definitione commenſurabilium magnitudinum, cũ huiuſmodi lineas una communis menſura metiatur, vt dictũ eſt: At vero quoniã lineas potentia commenſurabiles nulla communis menſura metiri poteſt, ſed tantummodo earum quadrata idem ſpatium metitur, ideo neceſſarium omnino fuit, vt ea propria definitione explicarentur.

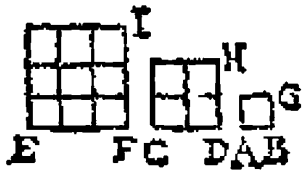
IIII.

INCOMMENSVRABILES autem, cum quadratis earum nullum ſpatium, quod ſit communis eorum menſura, contingit reperiri.

LINEAS reliquas longitudine incommenſurabiles, quarum

rum etiam quadrata incommenſurabilia ſunt, vocat incommenſurabiles potentia.

HABENT autem lineæ cõmenſurabiles tã lõgitudine quàm potentia, hanc quaſi conuenientiã inter ſe, & cõnexionem, vt lineæ longitudine cõmenſurabiles, ſint etia commenſurabiles potentia, ita vt nullæ lineæ dari poſſint commenſurabiles lõgitudine, quin earum quadrata commẽſurabilia quoque ſint; quoniam quadratum ex communi earũ menſura deſcriptum metitur tanquã menſura communis earum quadrata, vt in ſubiecta figura apparet: ſicut enim recta A B, metitur rectas C D, E F, ita quoq; quadratũ A G, quadrata C H, E I, metitur: Non aute, vt omnes lineæ potentia cõmenſurabiles, ſint etiam commenſurabiles longitudine; multæ enim lineæ ſunt potentia commenſurabiles, hoc eſt, quadrata habent commenſurabilia, quæ tamen longitudine omnino incommenſurabiles ſunt, vt in hoc libro demonſtrabitur, Rurſus inter lineas incommenſurabiles tam longitudine quàm potentia, huiuſmodi colligatio reperitur, vt omnes lineæ potentia incommenſurabiles; ſint etiam incommenſurabiles longitudine; Non autem contra, vt omnes lineæ longitudine incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles potentia, cum multæ lineæ reperiantur longitudine inter ſe incommenſurabiles, cum tamen potentia, hoc eſt, ſecundum earum quadrata, commenſurabiles exiſtant. Quæ quidem omnia perſpicua erunt ex coroll. propoſ. 9. huius libri.



V.

HIS poſitis, oſtenditur, cuicunq; rectæ propoſitæ rectas lineas multitudine infinitas & commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles: alias quidem longitudine, & potentia; alias vero potentia ſolum. Vocetur autem propoſita recta linea, Rationalis.

SI proponatur aliqua recta linea nota magnitudinis, erũt eminium aliarum, quæ cum ipſa comparantur, quædam illi commenſurabiles longitudine ac potentia, quædam vero potentia tantum: Item quædam illi incommenſurabiles longitudine tantum; quædam vero longitudine, & potentia, vt hoc decimo libro demonſtrabitur variis in locis. Non enim vult Euclides, ex dictis oſtendi, ſeu colligi, (quamquàm eius verba hoc ſonare videantur) hæc ita ſe habere: ſed ſolum indicat nobis, & innuit quodam modo, linearum quaſdã dici poſſe propoſitæ rectæ lineæ commenſurabiles longitudine, & potentia, quaſdam autem potentia tantum, &c. Quod quidem ex dictis nullo modo ſequitur, ſed demonſtrabitur in ſequentibus, vt diximus.

LINEA autem illa propoſita, ratione cuius aliæ commenſurabiles ſunt, vel incommenſurabiles, dicitur Græcis ῥητὴ; Latinis vero Rationalis; quoniã exponitur ſemper certa, & nota, aliæ vero cum illa comparatæ non ſemper notæ ſunt, quamuis ſingulæ ſeorſum ſumptæ exiſtant certæ quoque, ac notæ; cum qualibet in quotcunque partes æquales poſſit diuidi.

VI.

ET huic commenſurabiles ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum, Rationales.

DOCET lineas alias illi, quæ Rationalis dicitur, commenſurabiles quomodocunque, appellari quoque Rationales; non quidem ex poſitione, vt illa ſed quia cum illa comparatæ reperiuntur ei commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum.

ITAQVE ex ſententia Euclidis, ra[illegible]dix quadrata huius numeri 20. vel 1000. &c. Seu quod idem eſt, linea recta, cuius quadratum eſt 20. vel 1000. &c. dicitur Rationalis; cum potentia ſit commenſurabilis lineæ Rationali, (eſt enim tam numerus 20. quàm 1000. commenſurabilis numero cuilibet quadrato, vt 16. vel 100. &c.) quamuis longitudine ſit eidem

eidem incommenſurabilis. Decipiuntur ergo Arithmetici non pauci, qui idcirco eam Irrationalem vocant, quod numero non poſſit exprimi.

VII.

HVIC vero incommenſurabiles, Irrationales vocentur.

QVONIAM in antecedenti defin. Euclides lineas illas, quæ longitudine & potentia, vel quæ potentia tantum ſunt commenſurabiles propoſitæ rectæ Rationali, appellant Rationales; liquido conſtat, cum hîc eas dicere Irrationales, quæ propoſitæ rectæ Rationali incommenſurabiles ſunt omnibus modis, longitudine videlicet & potentia, non autem longitudine tantum. Ex quibus etiam manifeſtum eſt, radicem quadratam huius numeri 20. vel 1000. &c ſeu (quod idem eſt) lineam, cuius quadratũ eſt 20. vel 1000. &c. non poſſe appellari Irrationalem, cum non ſit longitudine, & potentia, ſed longitudine tantum Rationali lineæ propoſitæ incommenſurabilis.

VIII.

ET quadratum, quod a propoſita recta fit dicatur Rationale.

QVEMADMODVM linea illa, quæ certa ponuntur ac notæ, Rationalis dicitur: Ita quoque quadratum ab ea deſcriptum, Rationale vocatur, quia & ipſum certum eſt, ac notum, comparationeque illius alia ſuperficies, commenſurabiles, incommenſurabilesne dicuntur.

IX.

ET huic commenſurabiles quidem, Rationalia.

OMNES

OMNES planæ ſuperficies quadrato Rationalis lineæ propoſitæ commenſurabiles, Rationales dicuntur; non quidem ex poſitione, vt illud, ſed quia cum eo collatæ reperiũtur ei vel commenſurabiles, vel incommenſurabiles: quemadmodum etiam lineæ, quæ Rationali lineæ quomodocunq; commenſurabiles ſunt, Rationales appellantur.

QVONIAM vero lineæ potentes ipſa ſpatia commenſurabilia quadrato Rationalis lineæ propoſitæ, ſunt ſaltem potẽtia commenſurabiles lineæ Rationali, ex 3. defin. perſpicuum eſt, ipſas quoque appellari iuxta defin. 6. Rationales.

X.

HVIC vero incommenſurabilia, Irrationalia dicantur.

NON aliter ſuperficies planæ quadrato à Rationali lineæ deſcripto incommenſurabiles, Irrationales uocantur, ac lineæ, quæ Rationali propoſitæ prorſus incommenſurabiles ſunt, Irrationales ſunt dictæ.

XI.

ET rectæ, quæ ipſa poſſunt, Irrationales: ſi quidem ea quadrata ſint, ipſa latera; ſi vero alia quæpiam rectilinea, rectæ, quæ ſpatijs incommenſurabilibus æqualia quadrata deſcribunt.

VOCAT lineas, quæ poſſunt ſpatia quadrato Rationalis lineæ incommenſurabilia, Irrationales; quemadmodum & ipſa ſpatia dixit Irrationalia: Ita vt ſi incommenſurabilia ſpatia fuerint quidẽ quadrata, latera ipſorum dicantur Irrationalia; ſi uero non fuerint quadrata, ſed aliæ quæcunque figuræ rectilineæ, appellentur rectæ, quæ deſcribunt quadrata æqualia illis ſpatijs incommenſurabilibus, Irrationales.

COL-

COLLIGITVR autem, lineas potentes ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis linea, dici debere Irrationales, ex 7. defin. quemadmodum ſupra ex 6. defin. collegimus, lineas, quæ poſſunt ſpatia commenſurabilia eidem quadrato Rationalis linea, appellari debere Rationales. Nam lineæ, quæ poſſunt illa ſpatia incommenſurabilia, ſunt potentia incommenſurabiles lineæ Rationali, ex 4. defin. Cum ergo omnes lineæ potentia incommenſurabiles, ſint quoque incommenſurabiles longitudine, vt ad defin. 4. diximus, demonſtrabiturque in coroll. propoſ. 9. manifeſtum eſt, ex 7. defin. lineas illas, quæ poſſunt ſpatia incommenſurabilia quadrato Rationalis linea, dici Irrationales.

PRÆTEREVNDVM quoque non eſt, Euclidem & veteres Geometras has voces: longitudine & potẽtia, atq; potentia tãtum: apponere fere ſemper vocibus iſtis: commenſurabiles, ac incõmenſurabiles: Vix autem, & rariſſimè his: Rationales, & Irrationales: Recte enim dicuntur lineæ commenſurabiles longitudine & potentia, vel potentia tantum; item incommenſurabiles longitudine & potentia, vel longitudine tantum: Minus uero recte Rationales longitudine & potentia, uel potentia tantum, aut Irrationales longitudine & potentia, vel longitudine tantum. Quod quidem, quoniam Campanus non animadnertit, occaſionem multis præbuit, ut uarie, & obſcure in hoc 10. lib. de lineis commenſurabilibus, incommenſurabilibuſque, nec non Rationalibus, Irrationalibuſque ſint locuti.

CÆTERVM his definitionibus adiungemus poſtulatum unum, & nonnulla pronunciata, quorum uſus in hoc libro reperitur.

POSTVLATVM, SIVE Petitio.

POSTVLETVR, quamlibet magnitudinem toties poſſe multiplicari, donec quamlibet magnitudinem eiuſdem generis excedat.

PROPO-

PROPOSITIS enim duabus magnitudinibus eiuſdem generis inequalibus, cum maior infinita non ſit, minor vero infinite poſſit augeri, perſpicuum eſt, minorem toties poſſe multiplicari, donec ſuperet maiorem. Cõſtat hoc etiam ex iis, quæ in defin. 5. lib. 5. ſcripſimus. Ibi enim eas magnitudines diximus tum demum cenſeri eiuſdem magnitudinis, cum alterutra ita poteſt multiplicari, vt alteram excedat. Atque ex huius conditionis defectu, angulum rectilineum, & angulum contingentiæ, diuerſi eſſe generis, docuimus.

AXIOMATA SIVE Pronunciata.

I.

MAGNITVDO quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

II.

MAGNITVDO quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoq; omnem magnitudinem, quam illa metitur.

III.

MAGNITVDO metiens totam magnitudinem, & ablatam, metitur & reliquam.

HAEC axiomata, vt ad numeros pertinent, oſtenſa ſunt a nobis in vltimis tribus pronunciatis lib 7. Quare cum ſit eadem ratio in magnitudinibus, non eſt, quod fruſtra eorum demonſtrationes hic repetamus, præſertim quod ad verbum

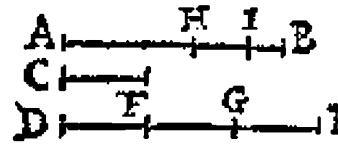
bum huc poſſint transferri, mutata ſolum voce numeri in vocem magnitudinis.

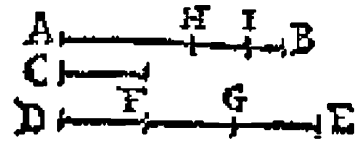
CÆTERVM quia hoc in libro diſcedendũ nobis fuit a numero, quem Theon in propoſitionibus Euclidis ſequitur, vt ad propoſ. 13. dicemus, quemadmodum & in omnibus ſeriem Campani negleximus; vt docuimus ad initium primi libri; curauimus, vt duplex numerus in margine e regione propoſitionum apponeretur, quorum ſuperior ordinem Theonis, inferior autè Campani ſeriem demoſtraret. Quod ſi vnus tantum numerus reperiatur in margine, nullam tunc eſſe inter Theonem, & Campanum diſcrepantiam, intelligas, quod ad numerum propoſitionum attinet.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

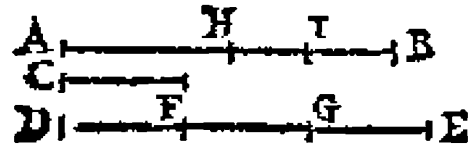
DVABVS magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiore auferatur maius quàm dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſus detrahatur maius quàm dimidium; & hoc ſemper fiat: Relinquetur tandem quędam magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine.

PROPOSITAE ſint duæ magnitudines inæquales AB, & C, quarũ AB, ſit maior. Dico ſi ex AB, auferatur maius quam dimidium; & ab eo, quod reliquum eſt, rurſum maius quam dimidium; atque hoc ſemper fiat: relinqui tãdem magnitudinẽ quandam, quæ minor ſit quã C. Multiplicetur. n. C, toties, donec magnitudo facta DE, maior ſit quã AB, ita vt DE, ſit multiplex ipſius C, proxime maior quã AB. Diuiſa autem DE, in partes DF, FG, GE, ipſi C, æquales, detrahatur ex AB, maius quã dimidium AH, & ex reliqua HB, maius quam dimidiũ HI; atq; hoc ſemper fiat, donec partes ipſius AB,





multitudine æquales ſint partibus ipſius D E. Sint ergo iam partes A H, H I, I B, tot, quot ſunt ipſæ DF, FG, GE. Quia igitur DE, maior eſt quã A B; At ex DE, ablatũ eſt DF, minus quã dimidiũ, vel certe dimidiũ, ſi DE, ipſius C, ſit duplex; ex AB, vero maius quã dimidiũ AH: Erit reliquum FE, reliquo H B, maius. (Cum enim DE, maior ſit quam AB; ſi ex D E, dimidium auferretur, necnon & ex A B, dimidium, eſſet quoque reliquum ex DE, maius reliquo ex A B, Si ergo ex D E, auferatur minus quam dimidium, vel certe dimidium, & ex A B, maius quam dimidium; erit reliquum ex DE, maius reliquo ex AB.) Rurſus quoniam FE, maior eſt quàm HB, auferatur q; ex FE, dimidium F G, vel certe minus quam dimidium, ſi F E, maior ſit quam duplex ipſius C; at ex H B, maius quam dimidium H I; erit eodem modo reliquum GE, maius reliquo I B: atque ita procedendo oſtẽdemus tandem poſtremam partem ipſius DE, qualis hic eſt GE, maiorem eſſe poſtrema parte ipſius A B, qualis hic eſt IB. Dum ergo G E, poſtrema pars ipſius D E, æqualis ſit ipſi C; erit quoque C, maior quam I B, poſtrema pars ipſius AB. Relicta igitur eſt I B, magnitudo, quæ minor eſt magnitudine C. Quare duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, ſi a maiori auferatur maius, &c. Quod erat demonſtrandum.

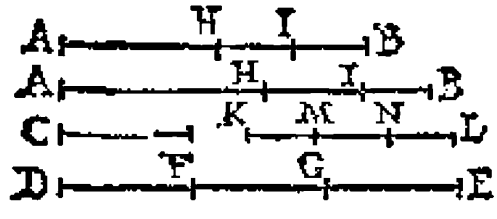


IDEM demonſtrabitur, ſi ex A B, auferatur dimidium A H, & ex reliquo H B, rurſus dimidiũ HI, &c. Nam eadem ratione erit reliquum FE, maius reliquo H B, nec non & reliquum G E, maius reliquo I B; cum ex maiori D E, ablatum ſit D F, minus quàm dimidium, vel certe dimidium; & ex minori A B, dimidium A H, &c.

ALITER. Facta conſtructione, vt prius, ſumatur K L, ita multiplex ipſius I B, vt eſt multiplex D E, ipſius C. Diuiſa ergo K L, in partes K M, M N, N L, ipſi I B, æquales, erunt tot partes in K L, quot in D E. Quoniam

vero

vero A H, maior eſt quam H B, vel certe illi æqualis, ſi ablatum ſit dimidium ex A B; & H B, maior eſt, quam I B; erit quoque A H, maior quam I B, hoc eſt, quam K M. Rurſus quia H I, maior eſt quam I B, vel certe illi æqualis; eſt autem I B, ipſi M N, æqualis: erit quoque H I, maior quam M N, vel illi æqualis; atque adeo tota A I, maior, quã tota K N. Additis ergo æqualibus I B, N L, erit tota A B, maior quam tota K L: Eſt autem D E, maior adhuc, quam A B. Multo ergo maior erit D E, quam K L. Quare cũ ſit, vt D E, ad C, ita K L, ad I B; (Sumpta enim fuit K L, ipſius I B, tam multiplex, quam multiplex eſt D E, ipſius C,) erit quoq; C, maior quam I B. Ac proinde relicta eſt I B, minor quam C. Quod erat demonſtrandum.



[a] 14. quinti

SCHOLIVM.

LVCE clarius ex demonſtratione huius Theorematis apparet, duas quantitates inæquales propoſitas debere eſſe tales, vt minor multiplicata, tandem maiorem poſſit ſuperare. Id quod ad propoſ. 16. lib. 5. monuimus, cum de angulo contactus contra Iacobum Peletarium ageremus.

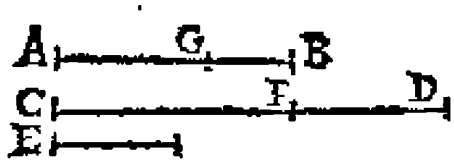
THEOR. 2. PROPOS. 2.

2.

SI duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedentem metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines.

DVABVS inæqualibus magnitudinibus propoſitis A B, C D, quarũ minor A B, detrahatur ex maiore C D, & reliqua huius ex A B; & ſic deinceps, alterna quadam

detractione, auferatur ſemper minor de maiore, & nunquam reliqua metiatur præcedentem. Dico magnitudines AB, CD, incommenſurabiles eſſe. Si enim non ſunt incommenſurabiles, metietur eas aliqua menſura communis. Metiatur eas ſi fieri poteſt, magnitudo E, quæ vel æqualis erit ipſi AB, vel minor. Detracta autē AB, ex CD, quoties poteſt, relinquat FD, ſe minorē, ita vt AB, ipſam CF, metiatur. Rurſus detracta FD, ex AB, relinquat ſe minorē GB, ita vt FD, metiatur ipſam AG; atq; hoc ſemper fiat. [a] Relinquetur ergo tandem ex CD, vel AB, magnitudo quædam minor quam E. (Quoniam cum AB, ablata ex CD, relinquat FD, ſe minorē, erit CF, ablata maior, quam dimidia ipſius CD; alias ſi eſſet dimidia, vel minor quam dimidia, poſſet adhuc AB, detrahi ex CD. Eodem modo erit AG, ablata ex AB, maior quam dimidia ipſius AB: Et ſic deinceps ſemper fiet. Quare cum ſemper auferatur maius, quam dimidiū, [b] relinquetur tādem magnitudo quædam minor quā E.) Sit ergo iam relicta GB, minor quam E. Quoniam igitur E, metitur AB; & AB, metitur CF; [c] metietur quoque E, ipſam CF: Metitur autem E, & totam CD. [d] Igitur E, reliquam quoque FD, metietur. At FD, metitur AG: [e] quare & E, ipſam AG, metietur. Metitur autem E, & totam AB: [f] ergo E, reliquam etiam GB, metietur, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo AB, CD, magnitudines aliqua magnitudo metietur. Quare incommenſurabiles ſunt. Si igitur duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] *1. decimi*

[b] *1. decimi*

[c] *2. pron.*

[d] *3. pron.*

[e] *2. pron.*

[f] *3. pron.*

SCHOLIVM I.

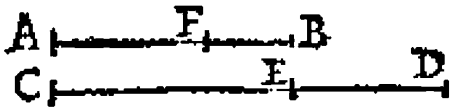
HOC Theorema conuertemus ad hunc modum.

SI duabus magnitudinibus incommenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor

de

de maiore, alterna quadam detractione: Nunquam reliqua præcedentem metietur.

SINT incommenſurabiles magnitudines AB, CD, detrahaturq; minor AB, ex CD, & reliqua ſit ED. Item ED, ex AB, auferatur, relinquaturque FB, & ſic deinceps. Dico in hac alterna detractione nunquam reliquam metiri præcedentem. Si enim fieri poteſt, metiatur FB, præcedentem ED. Quoniam igitur FB, metitur ED; & ED, metitur AF; [a] *metietur quoque FB, ipſam AF: Metitur autem & ſe ipſam:* [b] *Igitur FB, & totam AB, metietur: Metitur autem AB, ipſam CE.* [c] *Igitur & FB, ipſam CE, metietur. Ponitur autem & FB, metiri ipſam ED:* [d] *Igitur & FB, totam CD, metietur. Oſtenſa eſt autem & FB, ipſam AB, metiri. Quare FB, vtramq; AB, CD, metitur, quod eſt abſurdum. ponuntur enim AB, CD, incommenſurabiles. Nunquam ergo magnitudo aliqua reliqua præcedentem magnitudinem metitur. Quod eſt propoſitum.*



a 2. pron.
b 1. pron.
c 2. pron.
d 1. pron.

SIMILITER & hoc demonſtrabimus.

SI duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: Metietur quædam reliqua præcedentem.

NAM ſi nunquam reliqua metiretur præcedentem, eſſent propoſitæ magnitudines incommenſurabiles, vt demonſtrauit hoc theoremate Euclides. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim commenſurabiles.

ITAQVE facile ex his dignoſcemus, an duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Nã detracta ſemper minore de maiore, alterna quadam detractione, ſi reliqua quæpiam metiatur præcedentem: erunt magnitudines propoſitæ commẽſurabiles, cum illa eadem reliqua metiatur vtramque magnitudinem propoſitam, vt cõſtat ex

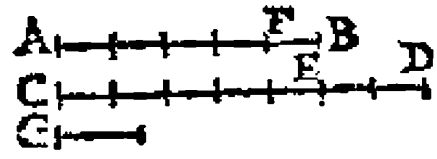
demonſtratione primi theorematis huius ſcholij. Ex eo enim, quod reliqua magnitudo F B, metiri dicebatur precedentem E D, oſtenſum eſt, eandem reliquam F B, metiri vtramque magnitudinem A B, C D. Si uero nunquam reliqua magnitudo præcedentem metiatur, propoſitæ magnitudines incommenſurabiles erunt, vt Euclides hoc loco demonſtrauit.

3

PROBL. 1. PROPOS. 3.

DVABVS magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

DATAE duæ magnitudines commenſurabiles ſint AB, CD, quarum oporteat maximam menſuram inuenire. Quoniam A B, C D, commenſurabiles ſunt, fit vt ſi minor AB, ex maiore CD, detracta, quoties poteſt, relinquat E D; & E D, detracta ex A B, quoties poteſt, relinquat F B, & hoc ſemper fiat alterna quadã detractione; tandem reliqua quæpiam magnitudo præcedentem metiatur, per 2. theor. præcedentis ſcholij. Metiatur iã F B, reliqua præcedentem ED. Dico FB, eſſe maximam menſuram communem magnitudinum A B, C D. Quod enim vtramque metiatur, ita oſtendemus. Quoniam FB, metitur ED; & ED, metitur A F; metietur quoque FB, ipſam A F: At metitur F B, & ſe ipſam; Igitur FB, totam A B, metietur; atque adeo & ipſam C E, quam A B, metitur. Cum ergo, & ipſam ED, metiatur; metietur quoq; F B, totam CD. Metitur ergo FB, utramque A B, CD. Quare vtriuſque A B, C D, communis menſura eſt FB.



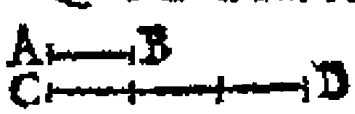
a 2. pron.
b 1. pron.
c 2. pron.
d 1. pron.

QVOD autem FB, ſit maxima earum communis mẽſura, ita probabimus. Si non eſt maxima, erit aliqua alia communis earum menſura, maior quam F B. Sit ergo, ſi fieri poteſt, G, illarum communis menſura, maior quam FB. Quia igitur G, metitur vtramque AB, CD; metitur autem

autem & AB, ipſam CE; [a] metietur quoq; G, ipſam CE: At metitur quoq; totam CD. [b] Igitur G, reliquam quoque ED, metietur: Metitur autem ED, ipſam AF. [c] Ergo & G, ipſam AF, metietur. Quare cum G, totam etiam AB, metiatur; [d] metietur quoq; eadem G, reliquam FB, maior minorem. Quod eſt abſurdum. Non ergo maior magnitudo, quam FB, communis menſura eſt ipſarum AB, CD. Quare FB, maxima earum communis menſura eſt.

[a] 2. pron.
[b] 3. pron.
[c] 2. pron.
[d] 3. pron.

QVOD ſi minor magnitudo AB, metiatur maiorẽ CD, ita vt detracta ex CD, nihil relinquat; erit ipſa AB, ambarum maxima menſura communis; cum & ſe ipſam metiatur. Duabus ergo magnitudinibus commenſurabilibus datis, &c. Quod faciendum erat.



COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, quod magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem.

ELICITVR hoc ex ea parte demonſtrationis, qua oſtenſum eſt FB, eſſe maximam menſuram communem ipſarum AB, CD. Demonſtratum enim eſt ibi, magnitudinem G, ſi metiatur magnitudines AB, CD, metiri quoque maximam menſuram FB. Eademque eſt ratio de cæteris.

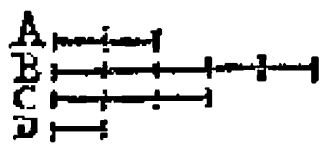
SCHOLIVM.

EX his, quæ dicta ſunt, non erit difficile conſiderare, an quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne. Sint enim tres magnitudines A, B, C. Primum experior per ea, quæ ad propo. 2. huius lib. docuimus, an duæ A, & B, commenſurabiles ſint, an non. Quæ ſi fuerint incommenſurabiles, perſpicuũ eſt, omnes tres A, B, C,

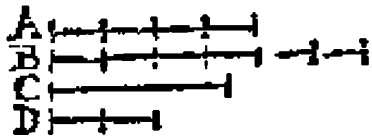


esse incommensurabiles, quod nullam habere possint communem mensuram, propter incommensurabiles magnitudines A, & B.

SI vero A, & B, fuerint commensurabiles, sit earum maxima communis mensura inuenta D; qua si metiatur quoque magnitudinem C, manifestum est, tres magnitudines A, B, C, commensurabiles esse, cum habeant communem mensuram D.



QVOD si D, maxima mensura magnitudinum A, & B, non metiatur C; erunt C, & D, vel commensurabiles, vel non. Si sunt incommensurabiles, erunt quoque omnes tres A, B, C, incommensurabiles. Si enim credantur esse commensurabiles, metietur earum maxima cõmunis mensura ipsam D, maximam mensuram magnitudinũ A, & B, per coroll. huius propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoque C, non erunt C, & D, incommensurabiles. Quod est contra hypothesim.



SI vero C, & D, sunt commensurabiles, erunt quoque tres A, B, C, cõmensurabiles. [a] *Inuenta enim E, maxima mensura ipsarum C, & D; cũ E, metiatur D; & D, ipsas A, & B;* [b] *metietur quoque E, ipsas A, & B. Quare cum eadem E, metiatur quoque C; metietur E, tres magnitudines A, B, C; Ac propterea commensurabiles sunt. Quod est propositum.*

[a] *3. decimi*

[b] *2. pron.*

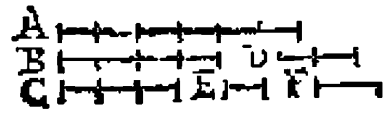
SIMILITER explorabimus, an plures data magnitudines, quam tres, sint commensurabiles, nec ne. Nam si data sint quatuor, experiemur id primum in tribus; si quinque, in quatuor, &c. Reliqua autem perficiemus, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

4. PROBL. 2. PROPOS. 4.

TRIBVS magnitudinibus commensu-

mensurabilibus datis, maximam earum mensuram communem inuenire.

SINT datæ tres magnitudines commensurabiles A,B,C, quarum maximam mẽsuram inuenire oporteat. a Sit D, maxima mensura ipsarũ A,B, inuenta. Si ergo D, metiatur quoque C, perspicuum est D, maximam esse mensuram omnium trium A,B,C. Nam si maior magnitudo quam D, metiri dicatur magnitudines A,B,C; metietur eadẽ, per coroll. propos. 3. huius lib. maximam mensuram ipsarum A,B, nempe ipsam D, maior magnitudo minorem. quod fieri non potest. Si uero D, non metiatur C, erunt saltẽ D,C, commensurabiles. Cum enim A,B,C, sint commensurabiles, metietur qualibet mensura earum cõmunis ipsam D, maximam mensuram ipsarum A,B, per coroll. præcedentis propos. Cum ergo eadem illa mensura metiatur quoq; ipsam D; erunt D,& C, commensurabiles. b Sit igitur E, maxima mensura ipsarum inuenta. Dico E, maximam mensuram esse datarum magnitudinum A, B, C. Quod enim sit communis earum mensura, ita planum fiet. Quia E, metitur D,& C;& D, metitur A,& B; c metietur quoq; E, ipsas A,& B. Metitur autem & ipsam C: Igitur E, mensura est communis ipsarum A,B,C, quemadmodum asseruimus.



QVOD autem E, sit earum maxima mensura, hoc modo confirmari potest. Si non est maxima, sit F, maior quam E, si fieri potest, carum mensura communis. Quoniam igitur F, metitur A, & B; metietur quoque earum maximã mẽsuram D, per coroll. præcedẽtis propos. Metitur autem & C: Igitur F, metiens D, & C, metietur quoque earum mensuram maximam E, ex eodem coroll. maior magnitudo minorem. Quod est absurdum. Non ergo maior magnitudo quam E, magnitudines A, B, C, metitur; Ac propterea E, maxima est earum communis mensura. Quam ob rem tribus magnitudinibus commensurabilibus datis, &c. Quod erat faciendum.

a 3. decimi

b 3. decimi

c 2. pron.

COROL-

COROLLARIVM.

APERTE quoque ex hoc colligitur, quod magnitudo metiens tres magnitudines, metitur quoque maximam earum mensuram communem.

INFERTVR autem hoc ex vltima parte demonstrationis. Ostensum enim est ibi, magnitudinem F, si metiatur ipsas A, B, C, metiri quoque E, maximam illarum communem mensuram. Eademque de cæteris est ratio.

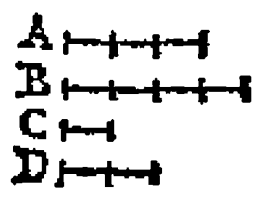
SIMILI modo, pluribus magnitudinibus commensurabilibus datis, quam tribus, maximam earum mensuram communem inueniemus; locumque habebit hoc idem corollarium. Nam si datæ magnitudines fuerint quatuor, inuenienda erit primum maxima mensura communis trium magnitudinum; Si quinque, accipienda erit quatuor magnitudinum mensura maxima, &c. Reliqua vero omnia absoluenda erunt, vt de tribus magnitudinibus est dictum.

LEMMA.

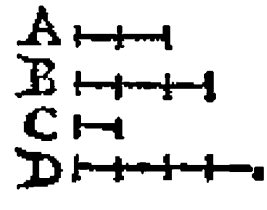
SI sint quotcunque magnitudines, & totidem etiam numeri, qui bini in eadem ratione sumantur, in qua binæ magnitudines: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri.

SINT quotcunque magnitudines A, B, C, D, in eisdem rationibus, in quibus totidē numeri E, F, G, H: Vt quidem A, ad B, ita E, ad F; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita G, ad H. Dico ex æquo esse, vt A, ad D, ita E, ad H. Quoniam.n. ex ijs, quæ ad defi. 5. lib. 6.

lib. 6. a nobis demonſtrata ſunt, tam proportio A, ad D, componitur ex proportionibus A, ad B; B, ad C; & C, ad D; quam proportio E, ad H, ex proportionibus E, ad F; F, ad G; & G, ad H; perſpicuum eſt, cum proportiones componentes proportionem A, ad D, æquales ponantur proportionibus, quæ proportionem E, ad H, componunt, & compoſitas proportiones, nempe A, ad D, & E, ad H, æquales eſſe, hoc eſt, eſſe vt A, ad D, ita E, ad H. Quod eſt propoſitum.



IDEM ſequitur, ſi magnitudinum, & numerorum proportio fuerit perturbata, vt in hoc exemplo apparet, in quo eſt, vt A, ad B, ita G, ad H; & vt B, ad C, ita F, ad G; & vt C, ad D, ita E, ad F. Eadem enim prorſus eſt demonſtratio.



SCHOLIVM.

QVONIAM præcedenti lemmate & in propoſitione, quæ ſequitur, & in alijs multis, vtendum nobis erit; placuit illud hoc loco breuiter demonſtrare, cum non facile videatur ex demonſtratis ſequi. Nam magnitudo & numerus diuerſa genera quantitatis conſtituũt: At proportio ex æqualitate in præcedentibus libris oſtenſa tantum eſt in quãtitatibus eiuſdem generis; In numeris quidem lib. 7. Libro vero 5. in magnitudinibus: quanquam demonſtratio in quinto lib. facta, etiam ad hoc lemma transferri poſſit, cum omnes demonſtrationes illius libri numeris quoque conueniant. Vel certe demonſtratio facta in 7. lib. huic eidem lemmati congruet, cum magnitudines A, B, C, D, quæ proportiones habent eaſdem, quas numeri E, F, G, H, rationem induant numerorum.

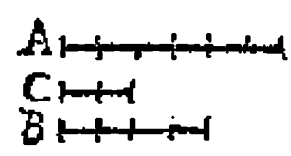
THEO.

THEOR. 3. PROPOS. 5.

5. **COMMENSVRABILES magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum.**

SINT magnitudines commenſurabiles A, B. Dico eos habere proportionem inter ſe, quam numerus aliquis habet ad alium numerum. Sit enim earum maxima menſura inuenta C: Et quoties ea repetita metitur A, toties vnitas reperita metiatur numerum D: Et quoties eadem C, repetita metitur B, toties vnitas repetita metiatur numerum E. Quoniam igitur magnitudo C, magnitudinem A, & vnitas numerum D, æque metitur; continebit æqualiter magnitudo A, magnitudinem C, atque numerus D, vnitatem. Quare erit vt A, ad C, ita numerus D, ad unitatem: Eſt autem & vt C, ad B, ita vnitas ad numerum E; quod C, ipſam B, atq; vnitas numerum E, æque metiatur. Igitur per lemma præcedens, erit ex æquo, vt A, magnitudo ad B, magnitudinem, ita D, numerus ad E, numerum. Commenſurabiles ergo magnitudines inter ſe rationem habent, &c. Quod erat demonſtrandum.

2 3. *derim.*



SCHOLIVM.

CVM Euclides ad demonſtrationem huius theorematis aſſumat maximam communem menſuram propoſitarum magnitudinum commenſurabilium, qualis ſuit C, ipſarum A, & B, perſpicuum eſt, lineas debere eſſe longitudine, & ob id potentia quoque commenſurabiles, vt rationem habeant inter ſe, quam numerus ad numerum. Hæ enim ſolæ communem recipiunt menſuram, atq; adeo in eis demonſtratio locum habet.

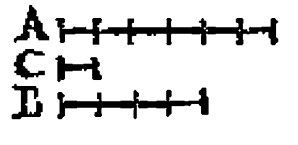
QVOD ſi lineæ ſint potentia tantum commenſurabiles, habebunt quidem earum quadrata inter ſe rationem, quam numerus

numerus ad numerum, quia commenſurabilia ſunt, atque idcirco menſuram habent communem, ipſiſque demonſtratio huius theorematis conuenit: At ipſæ lineæ nequaquam, quia longitudine incommenſurabiles cum ſint, cõmunis menſuræ ſunt expertes, ac propterea huius theorematis demonſtratio in ipſas conuenire nullo modo poteſt.

EX demonſtratione porro eiuſdem huius theorematis liquido conſtat, commenſurabilium magnitudinum proportionem eſſe eam, quam habent numeri, per quos eorum communis menſura maxima ipſas metitur. Oſtenſum enim eſt, eam habere proportionem magnitudines A, & B, quam habent numeri D, & E; per quos ſcilicet earum menſura communis maxima C, ipſas metitur.

VNDE ſi propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus A, & B, libeat inuenire, quam proportionem habeant in numeris; ſumendi erunt duo numeri D, & E, quos vnitas æque, ac communis magnitudinum commenſurabilium A, & B, menſura maxima C, ipſas magnitudines metitur. Nam vt demonſtratum eſt, magnitudines A, & B, proportionem habent, quam numeri D, & E.

QVOD ſi loco maximæ menſuræ C, ſumamus aliam quãcumque communem earum menſuram, nihilominus hoc theorema demõſtrabimus eodem argumẽto. Quamuis enim numeri D, & E, maiores inueniantur in hac poſteriori demonſtratione, quam in priori; habent tamen eandem proportionẽ cum illis, vt ex appoſita figura apparet. Quoniã vero in priori demonſtratione numeri inuenti, ſunt minimi omniũ eandem cum ipſis proportionẽ habentiũ; propterea fortaſſis Euclides in demonſtratione maximam communem menſuram aſſumpſit, & non quamlibet, licet id neceſſarium non ſit.



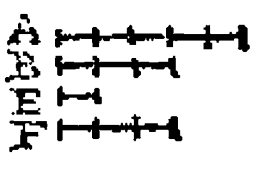
THEOR. 4. PROPOS. 6.

6.

SI due magnitudines inter ſe proportionem

tionem habeant, quam numerus ad numerum: commenſurabiles erunt magnitudines.

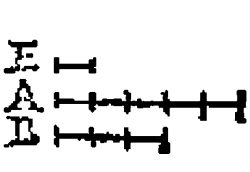
HABEANT duæ magnitudines A, B, eam proportionem, quam numeri C, D. Dico A, B, magnitudines eſſe commenſurabiles. Quoties enim vnitas continetur in numero C, in tot æquales partes diuiſa intelligatur magnitudo A, quarũ partium vni æqualis ſit magnitudo E. Deinde quoties vnitas repetita metitur numerum D, toties magnitudo E, repetita metiatur magnitudinem quandam aliam F. Quoniam igitur magnitudo E, toties in A, continetur, quoties vnitas in C; continebit æqualiter A, ipſam E, & C, numerus vnitatem. Quare erit A, ad E, vt C, ad vnitatem: Eſt autem & vt E, ad F, ita vnitas ad D, quod E, ipſam F, & vnitas ipſum D, æque metiatur. Igitur per lemma propoſ. 4. huius lib. erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad D: Erat autem etiã vt C, ad D, ita A, ad B. Igitur erit vt A, ad B, ita A. ad F; ac propterea B, & F, magnitudines æquales inter ſe ſunt. Quocirca cum E, ipſam F, metiatur, metietur quoq; eadem E, ipſam B: Metiebatur autem & ipſam A. Igitur magnitudo E, vtramque A, & B, metitur; Ac proinde A, & B, magnitudines commenſurabiles inter ſe ſunt. Si igitur duę magnitudines inter ſe proportionẽ habeant, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 9. quinti

b 2. defin.

ALITER. Quot ſunt unitates in C, in tot partes æquales intelligatur diuiſa magnitudo A, quarum partium uni æqualis ſit magnitudo E. Quoniam igitur eſt vt E, ad A, ita vnitas ad C, quod E, ipſam A, & vnitas ipſum C, æque metiãtur; ponaturque vt A, ad B, ita C, ad D; erit per idẽ lemma ſuperius, ex æquo, vt E, ad B, ita vnitas ad D: Metitur autem vnitas numerum D. Igitur & magni-

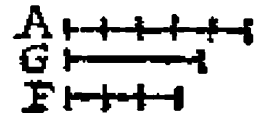


magnitudo E, magnitudinem B, metitur: Metitur autem E, ipſam quoq; A. Igitur A, & B, habentes eandem communem menſuram E, ſ commenſurabiles ſunt. Quod eſt propoſitum. a 1. *den.*

COROLLARIVM.

EX priori autem demonſtratione theorematis aperta eſt nobis via, qua lineam rectam inueniamus, ad quam ita ſe habeat quauis alia data recta linea, vt numerus ad numerum. Nam (repetita priori figura huius propoſitionis) ſi inuenienda ſit linea, ad quam ita ſe habeat linea data A, vt numerus C, ad numerum D; diuidenda erit linea A, in tot æquales partes, quot vnitates ſunt in C; et ſumenda alia linea F, tot earundem partium, quot unitates ſunt in D. Hoc enim ſi fiat, erit A, ad F, vt C, ad D, vt demonſtratum eſt.

HINC rurſus apparet, quanam arte poſsit inueniri linea recta, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum alterius data recta, vt numerus ad numerum. Si namque inueniẽda ſit linea, ad cuius quadratum ita ſe habeat quadratum linea data A, vt numerus C, ad numerum D, inuenienda erit primum linea F, ex iis, quæ modo diximus, ad quam ſic ſe habeat A, vt C, ad D: [b] *Deinde accipiẽda inter A, & F, media proportionalis G. Erit enim quadratum ex A, ad quadratum ex G, vt C, numerus ad numerum D. Cum enim tres rectæ A, G, F, ſint continue proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad F, atque adeo vt numerus C, ad numerum D, (cum ſit vt A, ad F, ita C, ad D,) ſic quadratum ex A, ad quadratum ex G; cum quadrata omnia ſint ſimilia ſimiliterque deſcripta.*



b 13. *ſexti*

SCHO-

SCHOLIVM

IN hoc etiam theoremate manifestum est, lineas proportionem habentes, quam numerus ad numerum, commensurabiles esse longitudine & potentia, non autem potentia tãtum; quoniam habent, vt ex demonstratione constat, mensuram communem, quemadmodum & magnitudines A, & B, mensuram communem E, habere demonstratum est.

7. 0. THEOR. 5. PROPOS. 7.

INCOMMENSVRABILES magnitudines inter se proportionem non habent, quam numerus ad numerum.

SINT incommensurabiles magnitudines A, & B.

A ⊢——⊣

B ⊢————⊣

Dico eas proportionem non habere, quam habet numerus ad numerum. Si enim A, & B, proportionem dicantur habere, quam numerus ad numerum, erũt ipsæ commensurabiles. Quod *6. decimi est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non igitur A, & B, proportionem habent, quam numerus ad numerum. Quare incommẽsurabiles magnitudines, &c. Quod ostendendum erat.

SCHOLIVM.

QVOCVNQVE modo lineæ incommensurabiles sint, siue longitudine & potentia, siue longitudine tantum, semper colligemus, eas proportionem non habere, quam numerus ad numerum, vt vult theorema. Nam alias, vt demonstratum est, essent longitudine commensurabiles. Quod non ponitur.

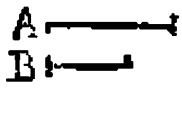
8. 0. THEOR. 6. PROPOS. 8.

SI duæ magnitudines inter se pro-

portio-

portionem non habeant, quam numerus ad numerum: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

NON habeant magnitudines A, & B, inter ſe proportionem, quam numerus ad numerum. Dico eas incõmenſurabiles eſſe. Si enim A, & B, credantur eſſe cõmenſurabiles; * erit earum proportio, quæ numeri ad numerum. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non habere proportionem, quam numerus ad numerum. Non igitur commenſurabiles ſunt A, & B. Quocirca ſi duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, &c. Quod erat oſtendendum.



* 5. decimi

SCHOLIVM.

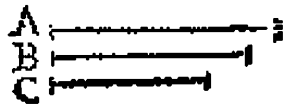
QVOD ſi lineæ proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, erunt ipſæ neceſſario, ex hoc theoremate, longitudine incommenſurabiles; alioquin proportionem haberent, quam numerus ad numerum, vt ad propoſ. 5. huius lib. demonſtrauimus. quod eſt contra hypotheſim. Non autem colligendũ eſt ex hoc theoremate, lineas, quæ proportionem non habent, quam numerus ad numerum, neceſſario & potentia incommenſurabiles eſſe, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione. Non enim ſequitur, ſi potentia tantum ſint commenſurabiles, eas proportionem habere, quam numerus ad numerum, vt in demonſtratione theorematis aſſumitur; immo nullo modo talem proportionem habere poſſunt, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. docuimus. Solum igitur infertur ex huius theorematis demonſtratione, lineas proportionem non habentes, quam numerus ad numerum, longitudine eſſe incommenſurabiles.

LEMMA.

SI ſint tres quantitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoque proportio-

nales; ſitque vt prima illarum ad tertiam, ita prima harum ad tertiam: Erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundã.

SINT continue proportionales tam quantitates A, B, C, quam D, E, F; ſiue priores in eodem genere ſint, in quo poſteriores, ſiue non; ſitque vt A, ad C, ita D, ad F. Dico quoque eſſe vt A, ad B, ita D, ad E.



D, 49.
E, 42.
F, 36.

Quoniam enim tam proportio A, ad C, proportionis A, ad B, quam proportio D, ad F, proportionis D, ad E, duplicata eſt; ponunturque proportiones A, ad C, & D, ad F, æquales; erunt quoque proportiones A, ad B, & D, ad E æquales; quandoquidem earum proportiones duplicatæ æquales ſunt.

IDEM ſequitur, ſi plures quantitates ſint, quã tres; ſi tamen in quatuor aſſumamus triplicatam proportionem loco duplicatæ, ad demonſtrationem: & in quinque, quadruplicatam, &c.

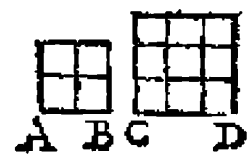
7. THEOR. 7. PROPOS. 9.

QVAE a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; & latera habebunt longitudine commẽſurabilia. Quæ

vero

vero a rectis lineis longitudine incommenſurabilibus fiunt quadrata; inter ſe proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; neque latera habebunt longitudine commenſurabilia.

SINT primum rectæ AB, CD, longitudine commenſurabiles. Dico quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, proportionem habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ. Quoniam.n. rectæ AB, CD, longitudine ſunt commẽſurabiles; [a] erit AB, ad CD, vt numerus ad numerũ: Sit vt E, numerus ad numerum F; quadrati autem ipſorum E, & F, ſint G, & H. Quoniam igitur eſt AB, ad CD, vt E, numerus ad numerũ F: [b] habet autem quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, duplicatam proportionem lateris AB, ad latus CD: [c] Itẽ & numerus quadratus G, ad quadratum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F; Erit proportio quadrati ex AB, ad quadratũ ex CD, eadem, quæ numeri quadrati G, ad numerũ quadratum H; quandoquidem ambæ hæ proportiones, duplicatæ ſunt proportionum æqualium. Quod eſt propoſitũ.



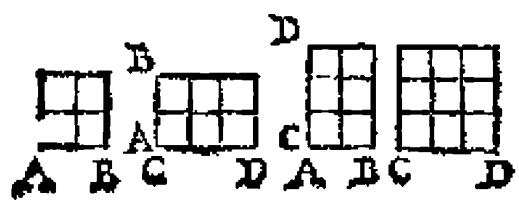
E, 2. F, 3.
G, 4 H, 9.

[a] 5. decimi

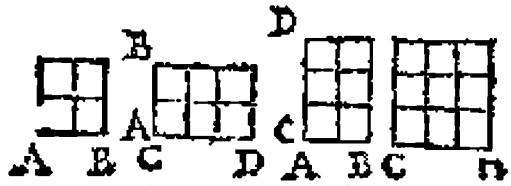
[b] 20. ſexti

[c] 11. octa.

ALITER. Poſita eadẽ conſtructione, cõtineatur rectangulum BD, ſub rectis AB, CD. Et E, F, ſe mutuo multiplicãtes faciant I, qui medius proportionalis erit inter quadratos G,



E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.



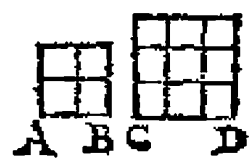
E, 2. F, 3.
G, 4. I, 6. H, 9.

H, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 11. lib 8 atq; adeo in proportione lateris E, ad latus F, vt diximus in ſcholio eiuſdē propoſ.

[a] 2. *ſexti* Quoniam igitur eſt AB, ad CD, vt E, ad F: [a] Vt autem AB, ad CD, ita eſt quadratum ex AB, ad rectangulum BD, ob eandem altitudinem AB, ſi CD, ponatur baſis rectanguli; Item vt E, ad F, ita eſt G, ad I: Erit quoque quadratum ex AB, ad rectangulum BD, vt quadratus numerus G, ad numerum I. Rurſus quia eſt AB, ad CD, vt E, ad F, [b] Vt autem AB, ad CD, ita eſt rectangulum BD, ad quadratum ex CD, ob eandem altitudinem CD, ſi AB, ponatur baſis rectanguli; Item vt E, ad F, ita eſt I, ad H: Erit quoque rectangulum BD, ad quadratum ex CD, vt I, numerus ad numerum quadratum H. Quare tres magnitudines, nimirum quadratum ex AB, rectangulum BD & quadratum ex CD, in eadem ratione continua ſunt, in qua tres numeri G, I, H. Igitur ex æquo, per lemma propoſ. 4. huius lib. erit quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Quod eſt propoſitum.

[b] 1. *ſexti*

SIT ſecundo quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt numerus quadratus G, ad numerum quadratum H. Dico rectas AB, CD, eſſe longitudine cōmēſurabiles. Sint. n. numeri E, & F, latera quadratorum numerorum G, & H, vt in priori figura. Quoniam igitur eſt quadratum ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratū numerū H: [c] Habet aūt quadratū ex AB ad quadratū ex CD, proportionē duplicatam lateris AB, ad latus CD; [d] Item & quadratus numerus G, ad quadratum numerum H, proportionem habet duplicatam lateris E, ad latus F: Erit proportio lateris AB, ad latus CD, quæ lateris E, ad latus F; quandoquidem harum proportionum duplicatæ proportiones æquales ſunt. Quare cum rectæ AB, CD, proportionem habeant



E, 2. F, 3.
G, 4 H, 9.

[c] 20. *ſexti*

[d] 11. *octaui*

habeant, quam numeri E, F, a ipſæ commenſurabiles erunt longitudine. Quod eſt propoſitum. *a 6. decimi*

ALITER. Repetatur conſtructio figuræ poſterioris. ᵇ Quia igitur eſt vt AB, ad CD ita quadratũ ex AB, ad rectangulũ BD; Itẽ vt AB, rurſum ad CD, ita rectãgulũ BD, ad quadratũ ex CD, vt ſupra diximus; erũt quadratũ ex AB rectangulũ BD, & quadratũ ex CD, continue proportionalia in ratione lineæ AB, ad lineã CD: Sunt autẽ & numeri G, I, H, cõtinue proportionales in rõne numeri E, ad numerũ F, vt ſupra oſtendimus; ponitur q; quadratũ ex AB, ad quadratum ex CD, vt quadratus numerus G, ad quadratũ numerũ H. Igitur erit per lemma præcedens AB, ad CD, vt G, ad I, hoc eſt, vt E, ad F; ideoq; AB, CD, rectæ, proportionẽ habẽtes quã numeri E, F, cõmenſurabiles ſunt lõgitudine Qđ eſt propoſitũ. *ᵇ 8. ſexti* *ᶜ 6. decimi*

SINT tertio rectæ A, B, longitudine incommenſurabiles. Dico earum quadrata proportionem non habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum ex A, ad quadratum ex B, proportionem dicatur habere, quam numerus quadratus ad numerum quadratũ; erunt A, B, longitudine cõmenſurabiles, vt iã eſt demonſtratũ. Quod eſt abſurd. ponũtur enim longitudine incõmenſurabiles. Non ergo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, proportionem habet, quã numerus quadratus ad numerũ quadratum. Quod eſt propoſitũ.

A ⟵
B ⟵

QVARTO, ac poſtremo quadratũ ex A, ad quadratum ex B, non habeat proportionem, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Dico eas longitudine eſſe incõmenſurabiles. Si enim longitudine cõmenſurabiles credãtur; habebũt earũ quadrata, vt eſt demõſtratũ, proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ. qđ eſt abſurdũ. ponuntur. n. non habere. Nõ ergo longitudine cõmenſurabiles ſunt A, & B. Quod eſt propoſitũ. Igitur quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus fiunt quadrata, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, rectas lineas, quæ longitudine ſunt commenſurabiles, omnino & potentia com-

mensurabiles esse: Quæ vero potentia commensurabiles, non omnino & longitudine. Et quæ longitudine incommensurabiles sunt, non omnino & potentia incommensurabiles: Quæ vero potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles esse.

QVONIAM n. quadrata linearum longitudine commẽsurabilium proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate demonstratum est, hoc est, simpliciter quam numerus ad numerum; [a] *ipsa commẽsurabilia erũt;* [b] *Ac propterea & latera ipsorum potentia commensurabilia existent. Quare lineæ longitudine commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles sunt.*

DEINDE quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, sed tamẽ, quam numerus simpliciter ad numerum, [c] *potẽtia quidem commensurales sunt,* [d] *cũ earum quadrata commẽsurabilia sint; at longitudine nequaquam, vt in hoc theoremate est ostensum; perspicuum est, lineas potentia commensurabiles, non omnino & longitudine commensurabiles esse. Solum enim eæ lineæ potentia commensurabiles, quarum quadrata proportionem habent quam numerus quadratus ad numerum quadratum, longitudine quoque sunt commensurabiles, vt constat ex secunda parte huius theorematis.*

RVRSVS quia lineæ, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sed tamen, quam numerus ad numerum, incommensurabiles quidem sunt longitune, at potentia commensurabiles, vt modo diximus; liquido constat, lineas longitudine incommensurabiles, non omnino & potentia incommensurabiles esse.

[a] 6. decimi
[b] 3. defin.
[c] 3. defin.
[d] 6. decimi

esse. solum enim eæ lineæ longitudine incommensurabiles, quarum quadrata proportionem non habent, quam numerus ad numerum, [a] potẽtia quoque incommensurabiles sunt, [b] cum earum quadrata incommensurabilia sint.

[a] 4. defin.
[b] 8. decimi

POSTREMO lineas potentia incommensurabiles, esse omnino & longitudine incommensurabiles, perspicuum est. Nam si longitudine essent commensurabiles, omnino & potentia commensurabiles forent, vt patet ex prima parte corollarij. Quod est absurdum. Ponuntur enim potentia incommensurabiles. Quamobrem lineæ potentia incommensurabiles, omnino & longitudine incommensurabiles sunt.

SCHOLIVM.

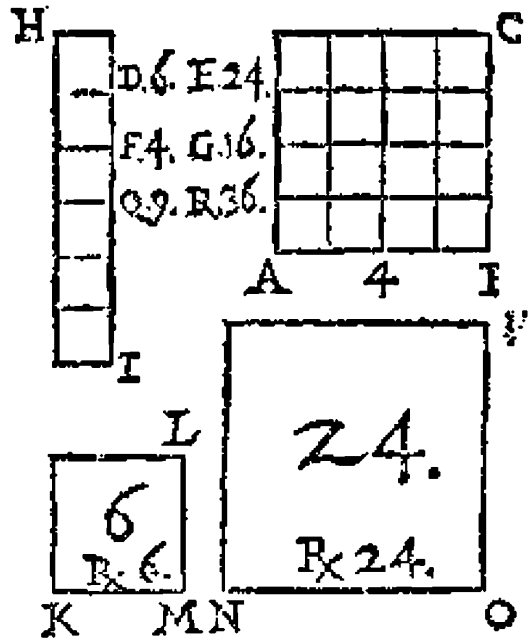
VT autem scopus priorum duarum partium huius theorematis planius perfectiusq; percipiatur, diligenter considerãda sunt hæc, quæ sequuntur. Primum lineas rectas longitudine commensurabiles, quarum quadrata, ex prima parte theorematis, proportionem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non solum esse eas, quæ numeris exprimi possunt, si cũ linea Rationali proposita comparentur; quales sunt illæ, quæ in demonstratione sunt positæ: (est enim recta AB, 2. & CD, 3.) verum etiam illas, quæ nullis possunt numeris efferri, si cum Rationali linea proposita conferantur: Deinde econtrario, quadrata inter se proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quorũ lineæ, seu latera, ex secunda theorematis parte, longitudine sunt commensurabilia, non solum ea esse intelligenda, quæ continent totidem quadratas mensuras æquales illis, in quas quadratum Rationalis lineæ resolvitur, quot sunt vnitates in numeris quadratis, eandem cum ipsis proportionem habentibus; cuiusmodi sunt quadrata in demonstratione descripta: (continet enim quadratum ex AB, quatuor mensuras quadratas, & quadratum ex CD, nouem; quot nimirum vnitates sunt in quadratis numeris G, H.) Sed ea etiam, quæ vel pauciores, vel plures mensuras quadratas complectuntur, quã

ſunt unitates in numeris illis quadratis, ſi cum quadrato lineæ Rationalis conferantur. Sæpe numero enim lineæ datæ cõmenſurabiles inter ſe ſunt longitudine, ſed numeris exprimi non poſſunt, propterea quod Rationali lineæ propoſitæ ſunt longitudine incommenſurabiles; Ac propterea quadrata illarum proportionem quidem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in hoc theoremate eſt oſtenſum, at pauciores quadratæ menſuras, vel plures continent, quam ſunt in quadratis illis numeris vnitates. Hæc autem omnia perſpicua faciemus hac demonſtratione.

EXPONATVR linea Rationalis AB, expreſſa numero 4. cuius quadratum AC, continebit menſuras quadratas 16. Sint quoque numeri D, E, plani ſimiles non quadrati, habentes tamen proportionem, [a] vt in Arithmeticis eſt demonſtratum, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, nempe 4. ad 16. Deinde ſumatur rectangulum HI, conſtans ex ſex quadratis menſuris quadrati AC, quot nimirum vnitates in D, numero continentur; [b] atq; ipſi HI, quadratum æquale conſtituatur KL, cuius latus KM. Poſtremo per ea, quæ in coroll. propoſ. 6. huius lib. oſtendimus, inueniatur recta NO, ad cuius quadratum NP, ita ſe habeat KL, quadratum rectæ KM, vt numerus D, ad numerum E, vel vt quadratus F, ad quadratum G. Quoniã igitur eſt vt quadratus numerus F, ad quadratum numerum G, vel vt numerus D, ad numerum E, videlicet 6. ad 24. ita quadratũ KL, ad quadratum NP, per conſtructionem; Continet autem quadratum KL, 6. mẽſuras quadratas, quarum 16. continet quadratũ Rationale AC: (conſtructum enim eſt quadratum KL, æquale rectangulo HI, conſtanti ex 6. huiuſmodi quadratis menſuris.) continebit quadratum NP, earundem menſurarum quadratarũ 24. ac propterea

a 26. octaui

b 14. ſecũdi



pterea KM, NO, latera quadratorum KL, NP, erũt Rad 6. & Rad. 24. quæ numeris exprimi nequeunt, cũ 6. & 24. non ſint numeri quadrati, eruntq; lineæ Rationali AB, longitudine incommenſurabiles, inter ſe autem commenſurabiles longitudine, ex hoc theoremate, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerum G. Quod etiam ex hoc conſtare poteſt. Nam cum quadrata KL, NP, proportionem habeãt, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6 duplicatam laterum KM, NO, ſit autem quadratorum proportio ſubquadrupla, nempe 1. ad 4. erit proportio laterum ſubdupla uidelicet 1. ad 2. huius enim illa duplicata eſt, vt hic apparet 1. 2. 4. [a] *Quare longitudine commenſurabiles ſunt rectæ KM, NO, cum proportionem habeant, quam numerus ad numerum. Intelligendæ ſunt ergo in hoc theoremate lineæ etiam illæ longitudine commenſurabiles, quæ numeris non poſſunt exprimi, ſi cum linea Rationali comparentur. Quod ſi cõſiderentur eædem lineæ KM, NO, ſimpliciter, & abſolute, nulla habita ratione lineæ Rationalis AB, numeris poterunt efferri. Cum. n. proportionem habeant ſubduplam, ſi KM, diuidatur in duas partes æquales, diuidetur NO, in eiuſdem magnitudinis partes 4 ſi illa in 3. ſecabitur hæc in 6. &c. At vero hæ partes nullo modo æquales ſunt partibus lineæ Rationalis AB, immo illis omnino ſunt longitudine incommenſurabiles, vt diximus.*

[a] 6. decimi

RVRSVS, quia quadrata KL, NP, proportionem habentia, quam quadratus numerus F, ad quadratum numerũ G, plures quadratas menſuras continent æquales illis, in quas AC, quadratum Rationalis lineæ AB, reſoluitur, quam vnitates ſunt in dictis numeris quadratis F, G; (Nam KL, æquale eſt ſex huiuſmodi menſuris, & NP, continet 24. At numerus quadratus F, componitur ex quatuor unitatibus, & G, ex 16.) Et ſi maiores quadrati in eadẽ proportione ſumantur Q, R, pauciores talis menſuras complectuntur quadrata KL, NP, quam ſint vnitates in numeris quadratis Q, R, cũ alter ex 9. alter vero ex 36. unitatibus cõſtituatur; manifeſtũ eſt, in hoc theoremate intelligenda quoq; eſſe quadrata proportionẽ habentia, quã numerus quadratus ad numerũ quadratũ, quæ pauciores quadratas mẽſuras, vel plures cõprehẽdũt, quot vnitates in illis quadratis numeris reperiuntur, ſi ea conferantur

cum

cum quadrato lineæ Rationalis propoſitæ. Quod ſi eadē quadrata KL, NF, conſiderentur abſolutè, & ſimpliciter, nulla habita ratione quadrati AC, ex Rationali lineâ AB, deſcripti, reſolui poterunt in totidem menſuras quadratas, quot vnitates in quadratis numeris F, G, vel Q, R, continentur. Nā ſi recta KM, diuidatur in duas partes, & NO, in quatuor, vt dictum eſt, continebit quadratum KL, quatuor menſuras quadratas, & quadratum NP, ſexdecim, quot ſcilicet vnitates reperiuntur in quadratis numeris F, G. Item, ſi eadem lineæ ſecentur in partes tres, & ſex, habebunt earum quadrata menſuras quadratas 9. & 36. quot nimirum vnitates comprehenduntur in numeris quadratis Q, R, &c. At huiuſmodi menſuræ nullo modo æquales ſunt quadratis menſuris, in quas quadratum AC, Rationalis lineæ AB, reſoluitur.

IDEM dicemus de omnibus alijs quadratis, eorumq; lateribus, quorum ſuperficies non exprimuntur numeris quadratis, dummodo proportionem habeant inter ſe, quam numeri quadrati ad numeros quadratos; cuiuſmodi ſunt quadrata, quorum ſuperficies ſint 12. & 3. habentes proportionem, quā quadratus numerus 16. ad quadratum numerum 4. &c.

ITAQVE theorema hoc intelligendum eſt de lineis lōgitudine commenſurabilibus inter ſe, quamuis interdum Rationali lineæ incommenſurabiles ſint, vt ſit ſenſus. Quadrata quæ deſcribuntur a rectis lineis longitudine inter ſe commē ſurabilibus, licet interdum longitudine ſint incommenſurabiles lineæ Rationali propoſitæ, proportionem inter ſe habent, quā quadratus numerus ad quadratum numerum, quamuis ipſa quadrata, ſi cum quadrato Rationalis lineæ conferantur, ſæpe numero numeris quadratis nullo modo poſſint exprimi: Et quadrata inter ſe proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſiue hæc quadrata numeris quadratis poſſint exprimi, ſiue non, ſi comparentur cum quadrato Rationalis lineæ, latera habebunt longitudine inter ſe commenſurabilia, etiamſi lineæ Rationales ſint longitudine incommenſurabiles, &c.

COLLIGIT Campanus ex hoc theoremate, in figuris quadratis diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine, hac ratione. Quoniam quadratum diametri duplū eſt quadrati lateris, vt ad prop. 47. lib. 1. demonſtrauimus;

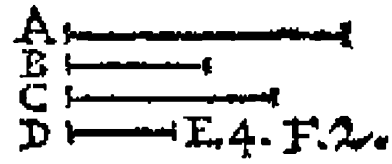
Nulla

Nulla autem proportio dupla eadem esse potest, quæ quadrati numeri ad quadratum nu- *um, quod inter numeros duplã proportionem habentes nullus medius cadat proportionalis, vt in scholio propos. 8. lib. 8. ostendimus: Non habebunt quadratum diametri, & quadratum lateris proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Quare ex vltima parte huius theorematis eorum latera, nempe diameter, & latus in uno eodemque quadrato, longitudine inter se sunt incommensurabilia. Hoc etiam nos demonstrauimus in scholio propos. 8. lib. 8. Quod tamen clarius ostendet Euclides propos. vltimæ huius lib.*

THEOR. 8. PROPOS. 10. 11. 10.

SI quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima vero secundæ fuerit commensurabilis; & tertia quartæ commensurabilis erit. Et si prima secundæ fuerit incommensurabilis; & tertia quartæ incommensurabilis erit.

SINT proportionales quatuor magnitudines, A, B, C, D, sitque A, prima secundæ B, commensurabilis. Dico & tertiam C, quartæ D, commensurabilem esse. Quoniam.n. A, & B, inter se commensurabiles sunt,[a] habebit A, ad B, proportionem quã numerus ad numerum, nempe quam E, ad F: Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D: Igitur & C, ad D, proportionem habet quam numerus E, ad numerum F.[b] Quare C, & D, commensurabiles inter se sunt.



[a] 5. decimi

[b] 6. decimi

SED sit iam A, ipsi B, incommensurabilis. Dico & C, ipsi D, esse incommensurabilem. Quoniam.n. A, & B, incommensurabiles sunt,[c] non habebit A, ad B, proportionem

[c] 7. decimi

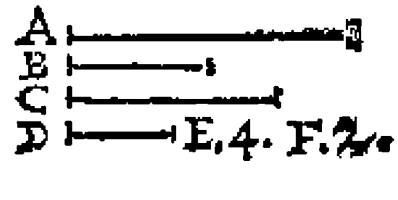
tionem, quam numerus ad numerum : Ponitur autem vt A, ad B, ita C, ad D. Igitur nec C, ad D, proportionem habet, quam numerus ad numerum. [a] Quare C, & D, incommenſurabiles ſunt inter ſe. Si quatuor ergo magnitudines proportionales fuerint, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 8. decimi

SCHOLIVM.

QVOD ſi quatuor propoſitæ magnitudines fuerint lineæ, prima autem ſecundæ commenſurabilis fuerit longitudine, erit & tertia quartæ longitudine commenſurabilis, vt ex demonſtratione huius theorematis apparet. Eodem enim modo oſtendemus poſteriores duas proportionem habere numeri ad numerum. Quare, vt in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, longitudine commenſurabiles ſunt.

SI autem prima ſecundæ fuerit commenſurabilis potentia tantum, erit & tertia quartæ potentia tantum commenſurabilis. Repetatur enim eadem figura. Quoniam igitur A, cõmenſurabilis eſt potentia ipſi B, [b] *erunt earum quadrata commenſurabilia,* [c] *ac propterea proportionem habebunt, quã numerus ad numerum.* [d] *Eſt autem, vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. (quod quatuor lineæ proportionales ſint, & earum quadrata figuræ ſimiles ſimiliterq; deſcriptæ.) Igitur & quadrata ex C, D, proportionem habebunt, quã numerus ad numerũ.* [e] *Quare commenſurabilia erunt;* [f] *Ac propterea lineæ C, D, potentia commenſurabiles. Quod autem potentia tantum ſint commenſurabiles, ita manifeſtum fiet. Quoniam rectæ A, B, cum ſint commenſurabiles potentia tantum, longitudine incommenſurabiles ſunt; non erit earum proportio, qua numerus ad numerum, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. docuimus; Ac propterea neque C, D, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Longitudine ergo incommenſurabiles ſunt C, D, ex ſcholio propoſ 8. huius lib. Sunt autem potentia commenſurabiles, vt oſtendimus: Igitur potentia tantum ſunt commenſurabiles. Quod eſt propoſitũ.*



[b] 3. defin.
[c] 5. decimi
[d] 22. ſexti
[e] 6. decimi
[f] 3. defin.

E A-

EADEM ratione, si prima secundæ sit incommensurabilis longitudine tantum, erit & tertia quartæ longitudine tantum incommensurabilis. Nam si A, & B, sint longitudine tantum incommensurabiles; erunt ipsarum potentiæ commensurabiles; ac propterea ipsæ potentia tantum commensurabiles erunt. Igitur, vt nunc ostendimus, erunt quoque rectæ C, D, potentia tantum commensurabiles; Ac idcirco longitudine tãtum incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

RVRSVS si quatuor magnitudinum priores duæ fuerint lineæ, duæ vero reliquæ superficies, vel solida; sequetur nihilominus, si lineæ sint longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles, & reliquas duas magnitudines commensurabiles, vel incommensurabiles esse. Si enim lineæ longitudine sint commensurabiles, erit earum proportio, qua numeri ad numerum, ex ijs, quæ in scholio propos. 5. huius lib. docuimus. Cum ergo habeant reliquæ duæ magnitudines proportionem eandẽ, quam lineæ, erit quoque illarum proportio, quæ numeri ad numerum; [a] atque adeo commensurabiles erunt. Si vero lineæ lõgitudine incommensurabiles sint, siue potentia commensurabiles existant, siue non; non erit earum proportio, qua numeri ad numerum, vt constat ex scholio propos. 7. huius lib. Igitur neq; reliquarum duarum magnitudinum eandem cum illis proportionem habentium, proportio erit, quæ numeri ad numerum. [b] Quare incommensurabiles erunt. Quod est propositum.

[a] 6. decimi

[b] 8. decimi

EODEM modo, si priores duæ magnitudines fuerint superficies, vel solida, posteriores vero duæ, lineæ, demõstrabimus, si plana, vel solida commensurabilia sint, vel incommensurabilia, lineas longitudine commensurabiles esse, vel incommensurabiles. Si enim plana, solidaue commensurabilia sint, [c] habebunt ipsa proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur & lineæ eandem cũ ipsis rationẽ habentes, proportionem habebunt, quã numerus ad numerũ; ac propterea longitudine commensurabiles erunt, vt diximus in scholio propos. 6. huius lib. Si vero plana, vel solida sint incommensurabilia, nõ habebũt ea proportionem, quam numerus ad numerum. Igitur neq; lineæ eandem cum ipsis proportionem habentes, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Ergo longitudine incommensurabiles erunt per ea, quæ docuimus in scholio propos. 8. huius lib. Quod est propositum.

[c] 5. decimi

LEMMA

LEMMA.

DVOS numeros planos innenire, qui proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

INVENIANTVR duo plani numeri non ſimiles, per ea, quæ ad finem lib. 8. docuimus. Nam huiuſmodi numeri non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, vt in ſcholio propoſ. 26. lib. 8. demonſtrauimus. Quod eſt propoſitum.

QVOD ſi plures numeros inuenire velimus, quorum quilibet duo proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, ſumemus quotcunque numeros primos, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 20. lib. 9. tradidimus, A, 3. B, 5. C, 7. D, 11. E, 13. *A, B, C, D, E. Nulli enim horum primorum acceptorum proportionem inter ſe habent, ex ſcholio propoſ. 26. lib. 8. quam numeri quadrati ad numeros quadratos, cum non ſint plani ſimiles, vt ad finem lib. 8. docuimus.*

SCHOLIVM.

PORRO inuentionem numerorum planorum non ſimilium, qui videlicet proportionem non habeant, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, non recte quidam tradiderunt hoc loco, inter quos etiam eſt Federicus Commandinus. Quod vt oſtendamus, adducenda eſt eorum ratio, qua dictos numeros inuenire conantur. Ita igitur rem expediunt.

EX-

EXPONANTVR quatuor numeri A,B,C,D, ita vt non ſit ſicut A,ad C,ita B, ad D;& fiat ex A,B, numerus E; & ex C,D,numerus F.Perſpicuũ igitur eſt E,F,numeros planos eſſe, planos autem diſsimiles;quoniam latera proportionalia non ſunt, quod facere oportebat.

A, 2.	C, 3.
B, 6.	D,16.
E, 12.	F,48.

HÆC eſt eorum ratio inueniendorum numerorum planorum non ſimilium. Errãt autem huiuſmodi interpretes, quia ſæpe numero inuenti numeri ſecundum eorum doctrinam,plani ſimiles ſunt. Nam numeri ex eorum demonſtratione inuenti,12. & 48. ſunt plani ſimiles, cum proportionem habeant, quam quadrati numeri 4.& 16.Item; priorum numerus latera habeat 3.& 4.proportionalia lateribus poſterioris 6. & 8. vt conſtat; quamuis latera prioris ab illis aſſumpta 2. & 6. non ſint proportionalia lateribus poſterioris accepta 3. & 16. Satis enim eſt, vt duo numeri plani ſint ſimiles, aliqua duo latera vnius proportionalia eſſe quibuſdam duobus lateribus alterius, non autem requiritur, vt quæcunque duo latera vnius proportionalia ſint quibuſcunq; duobus lateribus alterius; quæ de re plura ſcripſimus in defin.21.lib.7.& in ſcholio propoſ. 23.lib.8.

PROBL. 3. PROPOS. 11.

10.
11.

PROPOSITAE rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommenſurabiles, alteram quidem longitudine tantum, alteram vero etiam potentia.

SIT recta propoſita A,cui primum inuenienda ſit linea incommenſurabilis longitudine tantum.Inueniantur,per lemma præcedens, duo numeri B, & C, proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum

dratum numerum: Deinde ex corollario propoſ. 6. huius lib. reperiatur linea D, ad cuius quadratum ſic ſe habeat quadratum ex A, vt numerus B, ad numerũ C. Dico D, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine tantum. Quod enim A, & D, longitudine ſint incommenſurabiles, ita probabitur. Quoniam eſt quadratum ex A, ad quadratum ex D, vt numerus B, ad numerum C; non eſt autem proportio B, ad C, quæ numeri quadrati ad numerum quadratum; ergo quadratum ex A, ad quadratum ex D, proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Igitur rectæ A, & D, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quod autem tantum longitudine ſint incommenſurabiles, patet. Cum enim quadrata ex A, & D, proportionem habeãt, quam numerus B, ad numerum C, ipſa commenſurabilia erunt. Sunt ergo rectæ A, & D, ex definitione, potentia commenſurabiles. Quare longitudine tantum incommenſurabiles ſunt.

A ——— B, 10.
E ———
D ——— C, 6.

a 9. decimi

b 6. decimi

SIT iam eidem rectæ propoſitæ A, inueniẽda linea incommenſurabilis lõgitudine, & potẽtia. Inueniatur recta E, inter rectas A, & D, longitudine tantum incõmenſurabiles, media proportionalis. Dico E, ipſi A, incommenſurabilẽ eſſe longitudine, & potẽtia. Quoniam enim eſt quadratum ex A, ad quadratum ex E, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad D; & A, incommenſurabilis eſt longitudine ipſi D, vt iam eſt oſtenſum erit & quadratum ex A, incommenſurabile quadrato ex E. Quare rectæ A, E, ex definitione, potẽtia ſunt incõmenſurabiles; ac proinde ex coroll. propoſ. 9. huius lib. & omnino lõgitudine incõmenſurabiles ſunt. Eſt igitur E, ipſi A, incommenſurabilis longitudine, & potentia. Quocirca propoſitæ rectæ lineæ inuenimus duas rectas, &c. Quod erat demonſtrandum.

c 13. ſexti

d 10. deci.

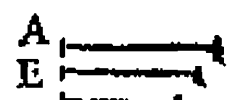
SCHOLIVM.

SI igitur recta A, propoſita ſtatuatur Rationalis, ita vt ab ea menſuræ cæterarum ſumantur; erit & recta D, per de-

fin.

fin. 6. Rationalis, quia potentia illi eſt commenſurabilis, licet eidem longitudine incommenſurabilis ſit. At vero E, Irrationalis, ex defin. 7. cum Rationali A, incommenſurabilis ſit longitudine, & potentia.

CAETERVM ex demonſtratione huius theorematis liquido conſtat, rectam mediam proportionalem inter duas rectas potentia tantum commenſurabiles, vel quod idem eſt, inter duas longitudine tantum incommenſurabiles, eſſe vtrilibet illarum incommenſurabilem longitudine & potentia; atque adeo appellari Irrationalem, ſi alterutra illarum ſtatuatur Rationalis. Ex eo enim quod rectæ A, D, ſunt longitudine tantum incommenſurabiles, vel commenſurabiles potentia tantum, demonſtrauimus rectam E, inter illas mediam proportionalem, eſſe ipſi A, incommenſurabilem longitudine, & potentia: Eodemque argumento oſtendemus eandem longitudine, & potentia ipſi D, eſſe incommenſurabilem. Cum enim rectæ D, E, A, ſint continuè proportionales, erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt quadratum ex D, ad quadratum ex E, ita recta D, ad rectam A: Eſt autem recta D, recta A, incommenſurabilis longitudine. [a] Igitur & quadratum ex D, quadrato ex E, incommenſurabile erit. Quare rectæ D, & E, ex defin. incommenſurabiles ſunt potentia, atque adeo & longitudine, per coroll. propoſ. 9. huius lib.



B, 10.

C, 6.

[a] 20. deci.

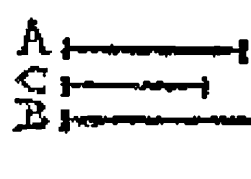
IN codicibus vulgatis præponitur hæc vndecima propoſitio à Theone propoſitioni decimæ præcedenti: quod errore librariorum factum eſſe puto, cum ſecunda pars huius ex præcedenti propoſitione decima demõſtretur, vt ex dictis apparet.

THEOR. 9. PROPOS. 12.

12. 8.

QVAE eidem magnitudini ſunt commenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles.

SIT vtraq; magnitudo A, B, magnitudini C, commenſurabilis. Dico & A, B, inter ſe eſſe commenſurabiles. Cum enim A, & C, ſint commenſurabiles, [a] habebit A, ad C, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus D, ad numerũ E. Rurſus quia C, B, commenſurabiles ſunt, habebit quoque C, ad B, proportionem, quam numerus ad numerum: habeat quam numerus F, ad numerum G, [b] ſumanturque tres numeri H, I, K, minimi deinceps proportionales in proportionibus D, ad E, & F, ad G; ſitque H, ad I, vt D, ad E, hoc eſt, vt A, ad C; & I, ad K, vt F, ad G, hoc eſt, vt C, ad B. Quoniam igitur eſt A, ad C, vt H, ad I; & C, ad B, vt I, ad K; erit ex æquo A, ad B, vt H, ad K, numerus ad numerum. Quare A, B, proportionem habentes, quam numeri H, K, [c] inter ſe commenſurabiles ſunt. Quæ ergo eidem magnitudini commenſurabiles ſunt, &c. Quod demonſtrandum erat.



[a] 5. decimi

[b] 4. octaui

[c] 6. decimi

SCHOLIVM.

QVOD ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, atq; A, & B, ipſi C, longitudine commenſurabiles exiſtant, erunt quoq; A, & B, inter ſe longitudine commenſurabiles, vt conſtat ex demonſtratione theorematis, quia eodem modo oſtendemus, lineas A, & B, proportionem habere, quam numerus H, ad numerum K: Quare longitudine commenſurabiles erunt, vt ad propoſ. 6. diximus. Si vero A, & B, fuerint ipſi C, potentia commenſurabiles, licet eidem longitudine ſint incommenſurabiles, demonſtrabuntur eodem modo & A, B, inter ſe commenſurabiles potentia. Cum enim A, & C, ſint potentia commenſurabiles, [d] *erit quadratum ex A, ad quadratum ex C, vt numerus ad numerum, nempe, vt D, ad E, cum quadrata ex A, C, per defin. ſint commenſurabilia. Eodem modo erit quadratum ex C, ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum, nimirũ vt F, ad G.* [e] *Sumptis ergo in eiſdem rationibus D, ad E, & F, ad G, tribus numeris minimis H, I, K, deinceps pro-*

[d] 5. decimi

[e] 4. octaui

por-

portionalibus; erit rursum ex æquo quadratũ ex A, ad quadratũ ex B, vt numerus H, ad numerum K.[a] Quare quadrata ex A, & B, commensurabilia sunt; atque adeo lineæ A, B, potentia commensurabiles. Non tamen ex hoc sequitur, A, & B, potentia tantum esse commensurabiles. Possunt enim esse duæ lineæ lõgitudine inter se cõmensurabiles, licet vtraq; cuipiam alteri lineæ potentia tantũ sit commensurabilis; quales sunt duæ Rationales longitudine inter se cõmensurabiles, potentia vero tantum Rationali expositæ commẽsurabiles, quas quidem inueniemus postea in scholio 2. propos. 19. huius lib.

[a] 6. decimi

SED & conuersum quodammodo huius theorematis demonstrabimus hoc modo.

SI sint duæ magnitudines commensurabiles, altera vero sit vni cuipiam commensurabilis; erit & reliqua eidem commensurabilis.

SINT enim A, & B, commensurabiles, sitq; A, ipsi C, commensurabilis. Dico & B, eidem C, commensurabilem esse. Cum enim tam B, quam C, ipsi A, sit commensurabilis; erunt quoque B, & C, ex hoc theoremate, inter se commensurabiles. Quod est propositum.

A ----------
C --------
B ----------

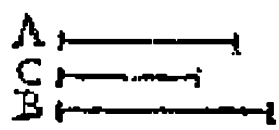
QVOD si magnitudines A, B, C, sint lineæ, & A, B, commensurabiles longitudine, sit autem A, ipsi C, commensurabilis longitudine; erit & B, reliqua eidem C, longitudine commensurabilis. Nam cum tam B, quam C, ipsi A, longitudine sit commensurabilis, erunt etiam B, C, inter se commensurabiles longitudine, vt ostendimus. At vero si lineæ A, & B, potentia tantũ sint cõmensurabiles, & A, ipsi C, commensurabilis siue longitudine, & potentia, siue potentia tantũ, colligemus quidẽ eodem argumento, reliquã B, eidem C, potentia esse commensurabilẽ; quia vtraq; B, C, ipsi A, hac ratione potentia est cõmensurabilis ex hypothesi. Non autẽ colligere licebit, si A, ipsi C, cõmensurabilis sit longitudine, reliquam B, eidẽ C, longitudine commensurabilẽ esse, quia non vtraque B, C, ipsi A, longitudine cõmensurabilis est, sed C, quidẽ longitudine, at vero B, potentia tantum, vt ex hypothesi constat.

12. 0.

THEOR. 10. PROPOS. 13.

SI ſint duæ magnitudines, & altera quidem eidem ſit commenſurabilis, altera vero incommenſurabilis: Incommenſurabiles erunt magnitudines.

SINT duæ magnitudines A, & B, quarum A, ſit ipſi C, commenſurabilis, & B, eidem C, incommenſurabilis. Dico A, & B, inter ſe incommẽſurabiles eſſe. Si enim B, dicatur eſſe cõmenſurabilis ipſi A; cum eidem A, commenſurabilis ponatur C; [a] erunt B, & C, inter ſe commenſurabiles. quod eſt abſurdum. ponitur enim B, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi A, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duę magnitudines, & altera quidem, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 11. deci.

SCHOLIVM.

SI magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, quidem ipſi C, longitudine commenſurabilis, at B, eidem C, incommenſurabilis longitudine; erunt A, & B, longitudine incommenſurabiles. Si enim longitudine commenſurabiles eſſent, [b] *oſtenderemus quoque B, C, eſſe inter ſe longitudine commenſurabiles. (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A commenſurabilis eſſet longitudine) quod non ponitur. Pari ratione, ſi A, ipſi C, potentia ſit commenſurabilis, ſiue tantum, ſiue etiam longitudine, at vero B, eidem C, potentia incommenſurabilis; erunt A, & B, potentia incommenſurabiles. Si enim eſſent commenſurabiles potentia, eſſent quoque B, & C, potentia commenſurabiles. (cum hoc poſito, vtraque B, C, ipſi A, potentia eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. Ponitur enim B, ipſi C, potentia incommenſurabilis.*

[b] 11. deci.

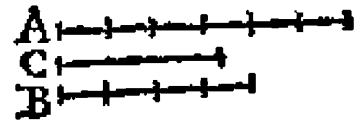
QVONIAM vero hæc propoſitio 13. apud Theonem lemma

lemma eſt, ſit, vt poſthac in noſtra editione numerus propoſitionum Euclidis differat ab eo, quem Theon ſequitur. Reliquimus enim de data opera ordinem ac ſertem Theonis hoc loco, quia a iunioribus, & peritioribus Geometris hoc theorema in numerum propoſitionum Euclidis iam eſt aſcitum.

THEOR. 11. PROPOS. 14. 13. & 8.

SI ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera autem ipſarum magnitudini cuipiam incommenſurabilis fuerit: Et reliqua eidem incommenſurabilis erit.

SINT duæ magnitudines commenſurabiles A, & B, quarum A, incommẽſurabilis ſit alteri cuipiam C. Dico & B, eidem C, eſſe incommenſurabilem. Nam ſi B, dicatur eſſe commenſurabilis ipſi C, ac propterea & C, ipſi B; cũ & A, ipſi B, ponatur commenſurabilis; [a] erunt & A, C, inter ſe commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim A, ipſi C, incommenſurabilis. Non ergo B, ipſi C, commenſurabilis eſt. Quare ſi ſint duæ magnitudines commenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.



[a] 12. deci.

SCHOLIVM.

HIC quoque, ſi magnitudines A, B, C, ſint lineæ, & A, B, commenſurabiles longitudine; ſit autem A, ipſi C, ſiue longitudine tantum, ſiue longitudine & potentia incommenſurabilis; erit & B, eidem C, longitudine incommenſurabilis. Si enim B, & C, eſſent longitudine commenſurabiles, [b] eſſent quoque A, & C, commenſurabiles longitudine. (Cum hoc poſito, vtraque A, & C, ipſi B, longitudine eſſet commenſurabilis.) Quod eſt abſurdum. ponitur enim A, ipſi C, longitu-

[b] 12. deci.

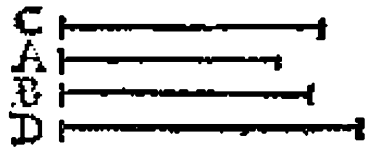
dine incommensurabilis. Quod si A, & B, cõmensurabiles sint potentia tantum, & A, ipsi C, potentia incommensurabilis, colligemus eodem modo, & B, ipsi C, potentia incommensurabilem esse. Alias si B, C, potentia essent commensurabiles; & A, C, potentia commensurabiles essent. (cum hoc posito, utraque A, C, ipsi B, potentia esset commensurabilis.) Quod non ponitur.

[a] 12. deci.

COLLIGVNT porro ex hoc theoremate interpretes Euclidis sequens theorema ad ea, quæ in hoc lib. demonstrantur, perutile.

QVAE incommensurabilibus sunt commensurabiles; & inter se incommensurabiles erunt.

SINT duæ magnitudines incommẽsurabiles A, B, quibus commensurabiles sint C, & D, nempe C, ipsi A, & D, ipsi B. Dico C, & D, inter se incommensurabiles esse. Quoniam. n. A, & C, commensurabiles ponuntur, & est A, ipsi B, incommensurabilis; [b] erit quoque reliqua C, eidem B, incommensurabilis. Rursus quia D, & B, commensurabiles ponuntur, & est B, ostensæ ipsi C, incommensurabilis; [c] erit & D, reliqua eidem C, incommensurabilis. Quod est propositum.



[b] 14. deci.

[c] 14. deci.

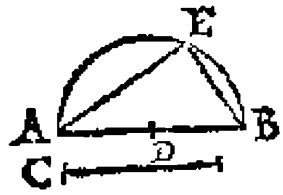
SI autem magnitudines A, B, C, D, sint lineæ, & A, B, vel longitudine tantum incommensurabiles, vel longitudine & potentia; sint autem C, D, ipsis A, B, longitudine commensurabiles; erunt C, & D, eodem argumento, longitudine incõmensurabiles. Si vero A, & B, incõmensurabiles sint potẽtia, & ipsis potẽtia tantũ cõmensurabiles C, & D; ostendemus similiter C, & D, potentia esse incõmẽsurabiles; vt perspicuũ ẽ.

LEMMA.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, inuenire id, quo maior plus potest, quam minor.

QVAMVIS id, quod lemma hoc proponit, osten-

oſtenderimus antea ad propoſ. 47. lib. 1. tamen quia hic breuius ex ijs, quæ tradita ſunt in lib. 3. & 4. demonſtratur, non inutile iudicauimus, idem hoc loco aliter efficere. Sint ergo datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, & C, quarum AB, maior, oporteatque inuenire, quo AB, plus poſſit quam C. Diuiſa AB, bifariam in D, deſcribatur



ex centro D, & interuallo DA, vel DB, ſemicirculus AEB, in quo aptetur recta AE, ipſi C, æqualis, iungaturque recta EB. Dico rectam AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ EB. Cum enim angulus E, in ſemicirculo rectus ſit; erit quadratum ex AB, æquale quadratis ex AE, EB; atque idcirco AB, plus poterit quam AE, hoc eſt, quam C, quadrato rectæ EB. Quod eſt propoſitum. Similiter

[a] 1. quarti
[b] 31. tertij
[c] 47. primi

DVABVS datis rectis lineis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectam, quæ illas poteſt.

HOC etiam aliter tradidimus ad propoſ. 47. lib. 1. Sint ergo datæ duæ rectæ AE, EB, quæ ſi coniungantur ad angulum rectum E, poterit eas recta ducta AB, quippe cum quadratum ex AB, æquale ſit quadratis ex AE, EB.

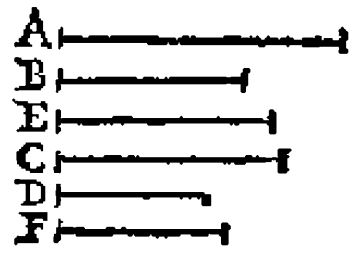
[d] 47. primi

THEOR. 12. PROPOS. 15. 14. 12.

SI quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, prima vero tanto plus poſſit

quam ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi commenſurabilis longitudine: Et tertia tanto plus poterit quã quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi prima tanto plus poſſit quã ſecunda, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi incõmenſurabilis lõgitudine: Et tertia tanto plus poterit quam quarta, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

SINT quatuor rectæ lineæ proportionales A B, C D, poſsitque A, prima plus quam B, ſecunda, quadrato rectæ E, & C, tertia plus poſsit quam D, quarta, quadrato rectæ F. Dico, ſi E, commenſurabilis ſit longitudine ipſi A; & F, commenſurabilem eſſe longitudine ipſi C: Si vero E, ſit longitudine incommenſurabilis ipſi A; & F, ipſi C, longitudine incommenſurabilẽ eſſe. Quoniam.n.eſt vt A, ad B, ita C, ad D; [a] erit quoque vt quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D. Eſt autẽ quadratum ex A, æquale quadratis ex B, E, per hypotheſim; & quadratum ex C, quadratis ex D, F. Igitur erunt quoque, vt quadrata ex B, E, ad quadratum ex B, ita quadrata ex D, F, ad quadratum ex D: Et diuidendo, vt quadratum ex E, ad quadratum ex B, ita quadratum ex F, ad quadratum ex D; [b] Ac propterea erit etiam vt recta E, ad rectam B, ita recta F, ad rectam D; conuertendoque vt B, ad E, ita D, ad F. Quia igitur eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & vt B, ad E, ita D, ad F, erit quoque ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. Quare ſi A,



[a] 22. ſexti

[b] 22. ſexti

eſt

eſt longitudine commenſurabilis ipſi E, erit quoque C, ipſi F, longitudine commẽſurabilis: Et ſi A, longitudine eſt incommenſurabilis ipſi E, erit & C, ipſi F, incommenſurabilis longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonſtrandum.

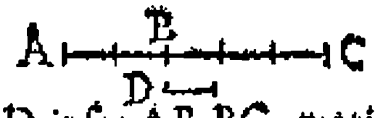
SCHOLIVM.

EODEM argumento oſtendemus, ſi E, potentia tantũ commenſurabilis fuerit ipſi A; & F, potentia tantum ipſi C, eſſe commenſurabilem, vt conſtat ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. ſcripſimus.

THEOR. 13. PROPOS. 16. 15. 9.

SI duæ magnitudines commenſurabiles componantur; & tota magnitudo vtrique ipſarum commenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarum commenſurabilis fuerit; & quæ a principio magnitudines commenſurabiles erunt.

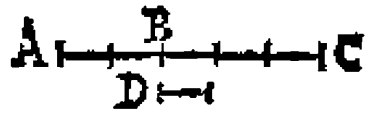
COMPONANTVR duæ magnitudines commenſurabiles AB, BC. Dico totam quoque magnitudinem AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilem eſſe. [a] Sit enim ipſarum AB, BC, communis menſura D. Quoniam igitur D, ipſas AB, BC, metitur, [b] metietur quoque D, totam AC, ex ipſis compoſitam. Cum ergo D, metiatur AC, & AB; erunt AC, AB, commẽſurabiles. Similiter cum D, metiatur AC, & BC; erunt & AB, BC, commenſurabiles; Ac propterea AC, vtrique ipſarum AB, BC, commenſurabilis erit.



[a] 3. decimi

[b] 1. pron.

SED



SED iam tota AC, ex AB, BC, composita commensurabilis sit alteri ipsarum AB, BC, nempe ipsi AB. Dico & AB, BC, inter se commensurabiles esse.[a] Sit enim D, communis mensura ipsarum AC, AB. Quoniam igitur D, metitur totam AC, & ablatam AB;[b] metietur quoque D, reliquam BC. Quare cum D, metiatur AB, BC; commensurabiles erunt AB, BC, inter se. Eodē argumento ostendemus AB, BC, esse commensurabiles, si AC, ipsi BC, fuerit commensurabilis. Si duæ igitur magnitudines cōmensurabiles componantur, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 3. decī.

[b] 3. pron.

COROLLARIVM.

HINC sequitur, si tota magnitudo ex duabus composita, commensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ commensurabilem esse. Vt si AC, ipsi AB, sit commensurabilis, esse quoque eandem AC, reliquæ BC, commensurabilem. Nam vt in posteriori parte theorematis ostensum est, semper D, communis mensura totius AC, & ablatæ AB, cum metiatur totam AC, & ablatam AB, metietur quoque reliquam BC, ex 3. pronunciato. Quare commensurabiles sunt AC, BC. Quod est propositum.

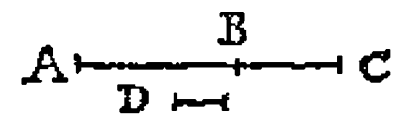
16. 9.

THEOR. 14. PROPOS. 17.

SI duæ magnitudines incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit; & quę a principio magnitudines incommensurabiles erunt.

COMPONANTVR duæ magnitudines incō mensu rabiles

rabiles A B, B C. Dico totam quoq; magnitudinem A C, vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilem esse. Si enim non est vtrique incommensurabilis, sit alteri commensurabilis, si fieri potest, nempe ipsi A B, [a] sitque D, communis mensura ipsarum A C, A B. Quoniam igitur D, metitur totam A C, & ablatam A B; [b] metietur quoque D, reliquam B C; Ac propterea cum D, metiatur vtramque A B, B C erunt A B, B C, commensurabiles. Quod est absurdum. ponuntur enim incommensurabiles. Non ergo commẽsurabilis est A C, ipsi A B; Eademque ratione neque ipsi B C, commensurabilis erit. Quare vtrique ipsarum A B, B C, incommensurabilis est.



[a] 3. decimi

[b] 3. 1ren.

SED iam tota A C, composita ex A B, B C, incommẽsurabilis sit vni ipsarum componentium, nempe ipsi A B. Dico quoque A B, B C, incommensurabiles esse. Si enim sint commensurabiles, [c] erit quoque tota A C, vtrique ipsarum A B, B C, commensurabilis Quod est absurdum. Ponitur enim A C, alteri ipsarum, nempe ipsi A B, incommensurabilis. Non ergo commẽsurabiles sunt A B, B C. Eodem argumento ostendemus A B, B C, incommensurabiles esse, si A C, ipsi B C, incommensurabilis fuerit. Quapropter si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

[c] 16. d. ti.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, si tota magnitudo ex duabus composita incommensurabilis sit alteri ipsarum, eandem & reliquæ incommensurabilem esse. Nempe si A C, incommensurabilis sit ipsi A B, esse quoq; eandem A C, reliquæ B C, incommensurabilem. Si enim A C, ipsi B C, foret commensurabilis, esset quoque A C, ex coroll. præcedentis propos. reliqua A B, commensurabilis. Quod est absurdum. ponitur enim incommensurabilis. Non est ergo A C, ipsi B C, commensurabilis, sed incommensurabilis. Quod est propositum.

SCHO-

SCHOLIVM I.

PERSPICVVM est, in duabus proximis antecedentibus propositionibus, earumque corollarijs, si de lineis agatur, intelligendas esse lineas longitudine commensurabiles, vel incommensurabiles. Assumitur enim ad vtriusque propositionis demonstrationem communis mensura D, &c. quam quidem solum lineæ longitudine inter se commensurabiles habent, vt ex defin. apparet.

LEMMA I.

SI ad aliquam rectam lineam applicetur ſparallelogrammum deficiens figura quadrata; Parallelogrammum applicatum æquale eſt ei rectangulo, quod ſub ſegmentis rectæ lineæ ex applicatione factis continetur.

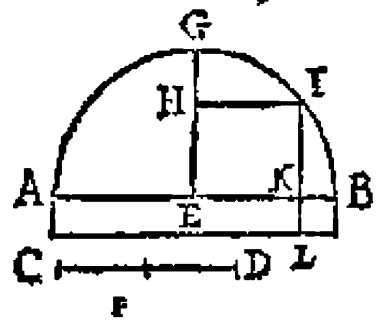
HOC lemma demonſtrauimus nos in ſcholio propoſ. 28. lib. 6.

LEMMA II.

DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata.

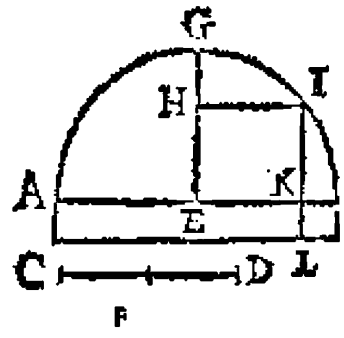
QVAMVIS id, quod hoc lemmate proponitur, abſolui poſsit ex propoſ 28. lib. 6. quod quarta pars quadrati ex minore linea deſcripti minor ſit rectangulo ad dimidium maioris lineæ applicato, deficienteq; figura quadrata, vt vult propoſ. illa 28. lib. 6. hoc eſt, quadratum ex dimidio minoris lineæ deſcriptum.

ptum, (quod quidem quarta pars eſt quadrati ex tota deſcripti, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2.) minus ſit quadrato ex dimidiata parte maioris deſcripto: (quod quidem applicatum eſt ad dimidium maioris, deficitq; figura quadrata.) Quamuis, inquam, abſolui hoc poſſit per propoſ. 28. lib 6. libet tamen idipſum hoc in loco cum alijs interpretibus exequi alia ratione facilliori. Sint igitur datæ rectæ inæquales AB, CD, quarum AB, maior ſit, oporteatque ad AB, applicare parallelogrammum deficiens figura quadrata, quod quidē parallelogrammum æquale ſit quartæ parti quadrati ex recta C D, deſcripti. Sectis rectis AB, CD, biſariam in E, & F, deſcribatur ex centro E, & interuallo EA, vel EB, ſemicirculus AGB; & ex E, perpendicularis ad AB, ducatur EG. Et quia tota AB, maior ponitur quam tota CD, erit quoque AE, dimidia ipſius AB, hoc eſt EG, ipſi AE, æqualis, maior quam CF, dimidia ipſius C D. Poſita igitur EH, æquali ipſi CF, agatur per H, ipſi AB, parallela HI, demittaturque IKL, ad AB, perpendicularis, & ſit KL, ipſi KB, æqualis; Ac tandem perficiantur rectangulum AL, & quadratum BL. Dico parallelogrammum AL, applicatum ad rectam AB, deficiens figura quadrata BL, æquale eſſe quartæ parti quadrati rectæ CD. Quoniam n. KI, media proportionalis eſt inter AK, KB, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 6. tradidimus; [a] *erit rectangulum ſub AK, KB, hoc eſt, rectangulum AL, æquale quadrato ex KI, hoc eſt, quadrato ex EH;* [b] *(eſt enim KI, ipſi*



[a] 17. ſexti

[b] 34. primi



KI, ipsi EH, æqualis, ob parallelogrammum EI,) hoc est, quadrato ex CF: Est autem quadratum ex CF, quarta pars quadrati ex CD; quod quadratum ex CD, per scholiũ propos. 4. lib. 2. quadruplũ sit quadrati ex CF. Igitur parallelogrammum AL, ad rectam AB, applicatum deficiensque quadrato BL, æquale est quartæ partī quadrati ex CD, descripti. Quod est propositum.

SCHOLIVM. II.

EX hoc lemmate absoluemus & hoc problema, quod sequitur, in hunc modum.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectãgulum sub partibus contentum, æquale sit dato rectilineo, quod tamen maius non sit, quam quadratum a dimidia linea descriptum.

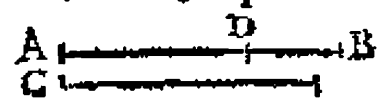
SIT enim recta data AB, & rectilineum quodcunque, cui æquale ponatur quadratum ex CF, non maius quam quadratum ex dimidia AE, ita vt latus CF, non maius sit latere AE. Educta ergo ad AB, perpendiculari EG, sit EH, æqualis ipsi CF. Deinde acta HI, parallela ipsi AB, demittatur IK, perpendicularis ad AB. Quibus peractis ostendemus, vt prius, rectangulum sub partibus AK, KB, æquale esse quadrato ex IK, hoc est, quadrato ex CF, atque adeo & rectilineo dato, cui æquale est positum quadratum ex CF. Quod est propositum. Diximus autem, rectilineum datum non debere esse maius, quam quadratum ex dimidia linea descriptum; quia si maius esset, esset quoque recta CF, maior quam recta EG. Quare ex EG, abscindi non posset recta ipsi CF, æqualis: quod tamen ad problema efficiendum requiritur, vt ex demonstratione manifestum est.

LEMMA

LEMMA III.

SI sint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore descripti, deficiens figura quadrata; Non erunt segmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia.

SINT duę rectę inęquales A B, *&* C; *& ad maiorem* A B, *applicetur parallelogrammum deficiens quadrato, sitque illud æquale quartę parti quadrati ex minore* C, *descripti, ita vt* D B, *latus sit quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit. Dico segmẽta* A D, D B, *inęqualia esse. Si enim* A D, D B, *segmenta dicantur esse ęqualia; cum ex* 1. *lemmate parallelogrammum applicatum ad* A B, *deficiensque figura quadrata ex* D B, *descripta, æquale sit rectangulo sub* A D, D B; *sit autem quod sub æqualibus* A D, D B, *quadratum; erit dictum parallelogrammum, quadratum ex* A D, *dimidio ipsius* A B, *descriptum; atque adeo ex scholio propos.* 4. *lib.* 2. *quadratum ex* A B, *quadruplũ erit ipsius parallelogrammi: Est autem & quadratum ex* C, *per hypothesim, quadruplum eiusdem parallelogrammi applicati, nempe quartę partis quadrati ex* C. *Igitur quadrata rectarum ex* A B, *&* C, *æqualia sunt, atque rectę* A B, *&* C, *ęquales. Quod est absurdum. ponuntur enim inæquales, &* A B, *maior. Inęqualia igitur sunt segmenta* A D, D B. *Quod est propositum.*



HOC facile etiam apparet ex constructione problematis in antecedente lemmate. Cum enim abscissa sit per

ſit per conſtructionem, E H, æqualis dimidiatæ parti ipſius C D, nempe ipſi C F, ductaque H I, parallela ipſi A B, & tandem demiſſa perpendicularis I K, vt partes factæ ex applicatione ſint A K, K B; manifeſtum eſt A K, K B, ſegmenta eſſe inæqualia, cum A B, in E, ſecta ſit bifariam. Immo hinc conſtat, prius ſegmentum maius eſſe, & poſterius, quod latus eſt quadrati, quo parallelogrammum applicatum deficit, minus.

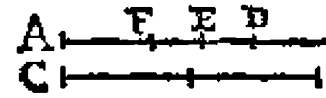
17. 13.

THEOR. 15. PROPOS. 18.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; maior tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſsit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minori, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet.

SINT

SINT duæ rectæ inæquales A B, & C, quarum maior A B; quartæ autem parti quadrati ex minore C, descripti, per lemma secundum præcedentis propos. applicetur ad A B, parallelogrammum æquale, & deficiens figura quadrata, contentum sub A D, B D, faciatque segmenta A D, D B, longitudine commensurabilia. Dico A B, plus posse quã C, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Quoniã. n. per 3. lẽma præcedentis propos. A D, maior est, quam D B; diuidatur A B, bifariam in E, & ipsi E D, æqualis sumatur E F. Quo facto, cum totæ E A, E B, æquales sint, & ablatæ quoque E F, E D; erunt & reliquæ A F, B D, æquales. Et quia recta A B, diuisa est bifariam in E, & non bifariam in D; [a] erit rectangulum sub A D, D B, vna cum quadrato ex E D, æquale quadrato ex E B; Ac propterea quadruplum rectanguli sub A D, D B, & quadrati ex E D, æquale erit quadruplo quadrati ex E B: Est autem quadruplo rectanguli sub A D, D B, æquale quadratũ ex C; (Ponitur enim rectangulum sub A D, D B, æquale quartæ parti quadrati ex C,) & quadruplo quadrati ex E D, æquale est quadratum ex F D; (quadratum enim ex F D, quadruplum est ex scholio propos. 4. lib. 2. quadrati ex E D, cum F D, dupla sit ipsius E D,) & quadruplo quadrati ex E B, æquale est quadratum ex A B. (quod quadratum ex A B, quadruplum sit per scholiũ propo. 4. lib. 2. quadrati ex E B, dimidiata parte ipsius A B.) Igitur & quadrata ex C, & F D, æqualia sunt quadrato ex A B; Ac proinde recta A B, plus potest quam recta C, quadrato rectæ F D. Hanc igitur F D, demonstrare oportet longitudine commensurabilem esse ipsi A B. Quoniam rectæ A D, D B, longitudine ponuntur commensurabiles; [b] erit quoq; tota A B, parti D B, commensurabilis longitudine. Est autem & ipsi D B, composita ex D B, A F, longitudine commensurabilis: (quod composita ex D B, A F, dupla sit ipsius D B) Igitur cum vtraque A B, & composita ex D B, A F, longitudine sit commensurabilis ipsi D B; [c] erunt quoque A B, & composita ex D B, A F, longitudine inter se commensurabiles; Ac propterea cum A B, composita ex A F, D B,



[a] 5. secũdi

[b] 10. deci.

[c] 12. deci.

DB, tanquam una, & ex FD, cõmẽsurabilis sit longitudine cõpositæ ex A F, D B; erit eadem AB, ex coroll. propos. 16. huius lib. commensurabilis lõgitudine reliquæ F D. Ergo A B, plus potest quam C, quadrato rectæ F D, longitudine sibi commensurabilis.

S E D iam AB, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis; & quartæ parti quadrati ex C, æquale parallelogrammũ applicetur ad AB, deficiens figura quadrata, faciatque segmenta AD, DB. Dico & rectas AD, DB, longitudine esse commensurabiles. Iisdem enim constructis, similiter demonstrabimus AB, plus posse, quam C, quadrato rectæ FD. Quare cũ, AB, ponatur plus posse, quam C, quadrato rectæ lõgitudine sibi cõmensurabilis; erit recta AB, ipsi FD, lõgitudine cõmensurabilis. Igitur cũ tota A B, cõposita ex FD, & ex AF, DB, tanquam vna, commensurabilis sit longitudine ipsi FD; erit eadem AB, longitudine cõmensurabilis reliquæ compositę ex AF, DB, per coroll. propos. 16. huius lib. Est autem & composita ex AF, DB, ipsi DB, longitudine commensurabilis, cum ipsius sit dupla: Igitur cũ vtraque AB, DB, longitudine sit cõ-
[a] 12. deci. mensurabilis compositæ ex AF, D B; [a] erunt quoq; AB DB, longitudine inter se commensurabiles: Atque adeo cum tota AB, composita ex AD, DB, commensurabilis
[b] 16. deci. sit longitudine ipsi DB; [b] erunt ipsæ AD, DB longitudine quoque inter se commensurabiles. Quocirca si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales, &c. Quod erat demonstrandum.

18. 14.

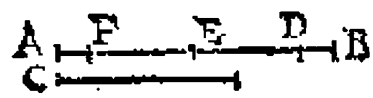
THEOR. 16. PROPOS. 19.

SI fuerint duæ rectæ lineæ inæquales quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammũ ad maiorẽ applicetur deficiẽs figura quadrata, & in partes incõmensurabiles lõgitudine ipsam diuidat; maior tanto plus poterit,

quam

quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incõmenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit, quam minor, quãtum eſt quadratum rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata; in partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet.

SINT duæ rectæ inæquales AB, & C, quarum maior AB; quartæ autem parti quadrati ex C, minore deſcripti applicetur ad AB, per 2. lemma propoſ. præcedentis, parallelogrammum æquale deficiens figura quadrata, quod faciat in recta AB, partes AD, DB, longitudine incõmenſurabiles. Dico AB, plus poſſe quã C, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Iiſdem enim quæ ſupra conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB, plus poſſe quam C, quadrato rectæ FD. Hanc igitur demonſtrare oportet ipſi A longitudine eſſe incommenſubilem. Quoniam rectæ AD, DB, ponuntur longitudine incommenſurabiles; [a] erit quoque tota AB, parti DB, longitudine incommenſurabilis. Sed DB, longitudine commenſurabilis eſt compoſitæ ex DB, AF, cum hæc illius ſit dupla. Igitur cum duarum linearum commẽſurabilium DB, & quæ componitur ex DB, AF, ipſa DB, longitudine ſit incommenſurabilis rectæ AB: [b] erit quoque reliqua compoſita ex DB, AF, eidem AB, longitudine incommenſurabilis: Ac propterea cum AB, compoſita ex AF, DB, tanquam una, & ex FD, incommenſurabilis ſit longitudine compoſitæ ex AB, DB, erit eadem AB,

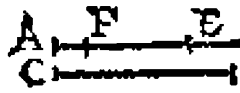


[a] 17. deci.

[b] 14. deci.

per coroll.propoſ.17. huius lib.& reliquæ F D,longitudine incommenſurabilis.Ergo A B,plus poteſt quam C, quadrato rectæ F D,longitudine ſibi incommẽſurabilis.

IAM vero A B, plus poſsit quam C, quadrato lineæ longitudine ſibi incommẽſuraBilis;& quartæ parti quadrati ex C,æquale parallelogrãmum applicetur ad A B, deficiés figura quadrata,faciatque in recta AB,partes AD,DB.Dico & rectas AD, DB, eſſe incommenſurabiles longitudine.Iiſdem enim conſtructis, oſtendemus vt prius,rectam AB,plus poſſe quam C,quadrato rectæ FD.Quare cum AB,ponatur plus poſſe,quã C, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis; erit AB,ipſi FD,incommenſurabilis longitudine.Igitur cum tota AB,compoſita ex FD,& ex AF,DB, tamquam vna,longitudine incommenſurabilis ſit ipſi F D; erit eadem AB,per coroll.propoſ.17.huius lib.& reliquæ compoſitæ ex AF, DB, longitudine incommenſurabilis : Eſt autem compoſita ex AF,DB, ipſi DB, longitudine commenſurabilis,cum illa huius ſit dupla. Igitur cum duarũ linearum commenſurabilium, nempe quæ ex A F, D B, componitur,& DB,ipſa compoſita ex A F,DB,longitudine incommenſurabilis ſit rectæ A B; [a] erit & reliqua DB,eidem AB,longitudine incõmenſurabilis ;Ac proinde cum tota A B,compoſita ex AD,DB, incommenſurabilis ſit ipſi DB, longitudine ; [b] erunt & ipſę A D, D B, longitudine inter ſe incommenſurabiles. Quam ob rem ſi fuerint duæ rectæ lineæ inæquales,quartę autem parti quadrati, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] *14. deci.*

[b] *17. deci.*

SCHOLIVM I.

EGIT hactenus Euclides de magnitudinibus commenſurabilibus, & incommenſurabilibus;nunc ad Rationales & Medias tranſit in ſequentibus.

LEMMA I.

QVONIAM demonſtratum eſt, lineas longitudine

dine commenſurabiles, omnino & potentia cõmenſurabiles eſſe, potentia vero commenſurabiles, nõ omnino & longitudine, ſed poſſe & longitudine commenſurabiles eſſe, & incommenſurabiles; manifeſtum eſt, ſi expoſitæ Rationali aliqua linea cõmenſurabilis fuerit longitudine, illam Rationalem vocari, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed etiam potentia: longitudine enim commenſurabiles, omnino & potentia commenſurabiles ſunt. Si vero expoſitæ Rationali aliqua linea fuerit potentia commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Rationalis, & commenſurabilis ipſi longitudine, & potentia. Quod ſi expoſitæ Rationali rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis; dicetur & ſic Rationalis, potentia tantum ipſi commenſurabilis.

LEMMA II.

EX PROCLO. Rationales vocat eas lineas, quæ expoſitæ Rationali vel longitudine & potentia commenſurabiles ſunt, vel potentia ſolum. Sunt autem & aliæ lineæ, quæ longitudine quidem expoſitæ Rationali incommenſurabiles ſunt, potentia autem ſolum cõmenſurabiles; atque ob id rurſus dicuntur Rationales, & commenſurabiles inter ſe, quatenus Rationales; commenſurabiles, inquam, inter ſe vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum: Et ſi quidem longitudine, dicuntur & ipſæ Rationales longitudine inter ſe commenſurabiles, vt intelligatur, etiã potentia commenſurabiles eſſe; Si vero potentia inter

ſe ſolum ſunt commenſurabiles: dicuntur ipſæ quoque Rationales, potentia ſolum inter ſe commenſurabiles.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex his colligere licebit tria genera linearũ Rationalium longitudine inter ſe commenſurabilium. Aut enim duarum linearum Rationalium longitudine inter ſe cõmenſurabilium, altera æqualis eſt expoſitæ Rationali; ac proinde vtraque Rationali commenſurabilis quoque longitudine: Aut neutra Rationali expoſitæ æqualis eſt, longitudine tamen ei vtraque eſt commenſurabilis: Aut denique vtraque expoſitæ Rationali commenſurabilis eſt ſolum potentia. Hæc autem tria genera inuenientur hoc modo. Sit expoſita Rationalis A, diuiſa in quatuor partes, quot nimirum vnitates ſunt in numero B. Sumpto deinde quolibet alio numero C, ſit D, recta vna partium rectæ A; & quoties D, metitur lineam A, toties metiatur quandam aliã E. Item quoties vnitas eſt in C, toties eadem D, metiatur quampiam aliam lineam F. Quoniam igitur A, & E, componuntur ex partibus multitudine æqualibus, quæ quidem magnitudine æquales ſunt ipſi D; ipſæ æquales erunt. Rurſus quia D, metitur omnes tres A, E, & F, erunt omnes tres A, E, & F, longitudine commenſurabiles. Quare E, & F, Rationali A, commenſurabiles longitudine, Rationales ſunt: Sunt autem & oſtenſæ longitudine inter ſe commenſurabiles, cum habeant D, communem menſuram. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales E, F, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, & quarũ vna, nempe E, æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

A
B. 4. C. 6. D
E
F

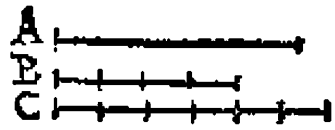
IAM vero D, metiatur duas lineas quaſdam C, E, per duos numeros F, G, quorum neuter idem ſit qui B, ita vt vtraq; linea C, & E, inæqualis ſit ipſi A. Erunt igitur vt prius, tres rectæ A, C, E, menſuram habentes communem D, longitudine commenſurabiles. Quare C, E, Rationali A, longitudine commenſurabiles, Rationales ſunt. Cum ergo & inter ſe ſint

A
B. 4. D
C
E
F. 5. G. 3.

ſint longitudine commenſurabiles; inuenta erunt duæ Rationales C, E, longitudine commenſurabiles & inter ſe, & expoſitæ Rationali A, quarum neutra æqualis eſt Rationali expoſitæ A.

POSTREMO expoſita Rationali A, a inueniatur recta B, longitudine tantum incommenſurabilis, qua ſecetur in quotcunque partes æquales, & ſumatur C, compoſita ex aliis quotcunque partibus, quæ magnitudine æquales ſint partibus rectæ B. Quo facto, erũt B, & C, longitudine commenſurabiles. Dico eaſdem expoſitæ Rationali A, potentia ſolum eſſe cõmenſurabiles. Quoniam.n. A, B, potentia ſunt commenſurabiles; erit quadratum ex A, quadrato ex B, commenſurabile: Eſt autem eidem quadrato ex B, commenſurabile quadratum ex C: quod B, C, longitudine ſint commenſurabiles, atque adeo & potentia; b Igitur quadrata rectarum A, & C, commenſurabilia quoque inter ſe ſunt. Quare C, ipſi A, potentia eſt commenſurabilis. Et quia duarum rectarum B, C, longitudine commenſurabilium B, eſt ipſi A, longitudine incommenſurabilis; c erit quoque reliqua C, eidem A, longitudine incommenſurabilis. Eſt ergo C, ſolum potentia ipſi A, commenſurabilis. Et quia B, & C, Rationali expoſitæ A, potentia commenſurabiles, Rationales ſunt; Inuentæ erunt duæ Rationales B, C, longitudine quidem inter ſe commenſurabiles, potentia vero tantum commenſurabiles expoſitæ Rationali A. Quod eſt propoſitum.

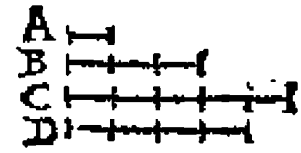
a 11. deci.



b 12. deci.

c 14. deci.

QVOD ſi quis optet inuenire quotcunque lineas Rationales longitudine inter ſe commẽſurabiles, id efficiet hoc modo. Sumpta mẽſura quauis A, componantur quotlibet lineæ B, C, D, ex tot partibus ipſi A, æqualibus, quot ſunt vnitates in totidem numeris inæqualibus E, F, G. Nam lineæ B, C, D, habentes communem menſuram A, longitudine commenſurabiles erunt.



CÆTERVM & omnes lineas Rationales, non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe eſſe commenſurabiles, facile hoc modo demonſtrabimus. d Quoniã Rationales lineæ

d 6. defin.

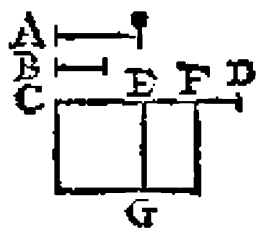
ſunt, quæ expoſitæ Rationali ſunt commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [a] *quæ autem eidem commenſurabiles, & inter ſe commenſurabiles ſunt; manifeſtum eſt, Rationales lineas quaſcunque inter ſe commenſurabiles eſſe.*

a 12. deci

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ, erit ut prima ad ſecundam, ita quadratum, quod fit a prima, ad rectangulum, quod ſub duabus illis rectis lineis continetur: Et vt ſecunda ad primam, ita rectangulum ſub ipſis, ad quadratum ex prima.

SINT duæ rectæ A, & B. Dico eſſe vt A, ad B, ita quadratum ex A, ad rectangulum ſub A, & B, comprehenſum. Ex quantacunque.n. linea recta CD, abſcindatur CE, ipſi A, æqualis, & EF, ipſi B. Deinde ſuper CE, deſcribatur quadratum CG, perficiaturque rectangulum GF, contentum ſub CE, & EF, hoc eſt, ſub A, & B. [b] *Quoniam igitur eſt vt CE, ad EF, hoc eſt, vt A, ad B, ita parallelogrammum CG, hoc eſt, quadratum ex A, ad parallelogrammum GF, ſub A, & B, comprehenſum; perſpicuum eſt, ſi ſint duæ rectæ lineæ, eſſe primam ad ſecundam, vt quadratum ex prima deſcriptum, ad rectangulum ſub ipſis comprehenſum.*



b 1. ſexti

EODEM modo erit, vt B, ad A, ita rectangulum FG, ad quadratum GC. Quod eſt propoſitum.

LEMMA

LEMMA IIII.

SPATIVM Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt.

SIT ſpatium A, commenſurabile Rationali ſpatio B. Dico & A, Rationale eſſe. Sit nãq; C, quadratũ Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia dicuntur, vel irrationalia, quod nimirum ab ex poſita Rationali deſcribitur. Quoniam igitur B, Rationale eſt, [a] *erit ipſum Rationali C, commenſurabile: Eſt autem & A, ipſi B, commenſurabile. Igitur A, & C, cum commenſurabilia ſint ipſi B,* [b] *inter ſe quoque commenſurabilia erunt; ac proinde ſpatium A, Rationali quadrato C, ex Rationali linea expoſita deſcripto commenſurabile,* [c] *Rationale eſt. Quod erat demonſtrandum.*



[a] 9. defin.

[b] 12. deci.

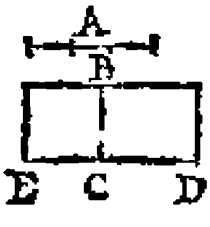
[c] 9. defin.

THEOR. 17. PROPOS. 20.

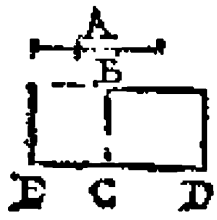
19.
15.

QVOD ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis lineis, ſecundum aliquem prædictorum modorum, continetur rectangulum; Rationale eſt.

SIT expoſita Rationalis A, & ſpatium rectangulũ BD, contentum ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus BC, CD, ſecundum aliquem prædictorum modorũ. (hoc eſt, ſecundum aliquem trium modorũ, quos in ſcholio 2. antecedẽtis propoſ. explicuimus; ita vt vel altera ipſarũ



BC,



BC, CD, Rationali expoſitę A, ſit æqualis, vel neutra, ſed tamen ei vtraque commenſurabilis ſit aut longitudine, aut potentia tantum. Dico BD, rectangulum Rationale eſſe. Deſcribatur. n. ex altera earum, nempe ex BC, quadratum BE. Quoniam igitur BC, Rationalis Rationali expoſitæ A, commenſurabilis eſt vel longitudine & potentia, vel potentia ſolum; erit quoque quadratum BE, ex BC, deſcriptum quadrato ex A, commenſurabile; [b] Eſt autem quadratum ex A, Rationale, ratione cuius reliqua Rationalia uocantur, vel Irrationalia. [c] Igitur & BE, illi commenſurabile, Rationale eſt. Quia vero BC, hoc eſt, EC, & CD, longitudine commenſurabiles ſunt; (ponuntur enim BC, CD, Rationales inter ſe longitudine commenſurabiles.) [d] & eſt vt EC, ad CD, ita EB, ad BD; [e] erunt quoque EB, BD, commenſurabilia. Quare ex lemmate 4. antecedętis propoſ. BD, Rationali BE, commęſurabile, Rationale eſt. Quod igitur ſub Rationalibus longitudine commenſurabilibus rectis, &c. Quod erat demonſtrandum.

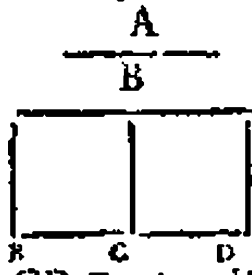
a 3. *defin.*
b 4. *defin.*
c 9. *defin.*
d 1. *ſexti*
e 10. *deci.*

20.
16.

THEOR. 18. PROPOS. 21.

SI Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine commenſurabilem.

SIT rurſum expoſita Rationalis A, & alia Rationalis BC, ſecundum aliquem modorum, quos in ſcholio 2. propoſitionis 19. expoſuimus, hoc eſt, ſiue BC, æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non, commenſurabilis tamen ei vel longitudine & potentia, vel potętia tantum. Applicetur autę ad BC, Rationale BD, latitudinem faciens CD. Dico CD, Rationalę eſſe, & ipſi BC, commenſurabilę longitudine. Deſcribatur. n. ex BC, quadratū BE; quod ſimili-



ter,

ter, vt in antecedenti propoſ. oſtendemus Rationale eſſe. Quia igitur BE, BD, Rationalia ſunt, [a] ipſa commenſurabilia erũt quadrato ex linea Rationali expoſita A, deſcripto; [b] Ac propterea & cõmenſurabilia inter ſe erũt: [c] Eſt autẽ vt BE, ad BD, ita EC, hoc eſt, BC, ad CD. Igitur & BC, CD, cõmenſurabiles ſunt longitudine, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. docuimus. Eſt ergo CD, ipſi BC, cõmenſurabilis lõgitudine: [d] ſed & Rationalis, quippe quæ Rationali BC, atq; idcirco Rationali expoſitæ A, commenſurabilis ſit, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demõſtrauimus. Quare latitudo CD, Rationalis eſt, & longitudine commenſurabilis ipſi BC. Si igitur Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinẽ efficit, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. defin.
[b] 12. deci.
[c] 1. ſexti
[d] 6. defin.

LEMMA.

RECTA linea potens ſpatium Irrationale, Irrationalis eſt.

POSSIT recta A, ſpatium Irrationale, hoc eſt, quadratum ex A, æquale ſit ſpatio cuipiam Irrationali. Dico A, Irrationalem eſſe.

Si enim dicatur Rationalis; erit eius quadratum Rationale quoque, vt in demonſtratione propoſ. 20. huius lib. oſtenſum eſt. quod eſt abſurdum. ponitur enim Irrationale. Non ergo A, Rationalis eſt. Igitur Irrationalis.

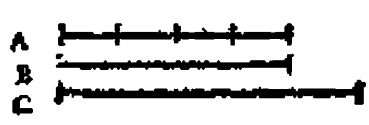
A

HOC idẽ conſtat ex definitione 11. huius lib. Vbi lineæ potẽtes ſpatia Irrationalia, vocãtur Irrationales.

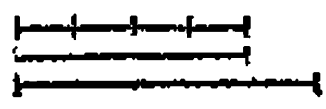
LEMMA. II.

DVAS rectas Rationales potentia ſolum commenſurabiles inuenire.

DVO genera ſunt linearum Rationalium potentia tantum inter ſe commenſurabiliũ. Aut enim altera earum eſt æqualis expoſitæ



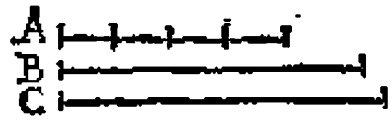
Ra-



Rationali, aut neutra. Prioris generis lineas ita inueniemus. Sit expoſita Rationalis A, cui æqualis ſumatur B. Deinde ipſi B, [a] *inueniatur C, longitudine tantũ incõmenſurabilis, ſeu (quod idẽ eſt) potentia tantum commenſurabilis. Quoniam igitur B, C, ipſi A, commenſurabiles ſunt; (B, quidem, quod ei ſit æqualis; at C, ex conſtructione, quod inuenta ſit potentia tantum commenſurabilis ipſi B, atque adeo ipſi A.) Rationales erunt B, & C: Sunt autem & potentia ſolum commenſurabiles. Inuentæ ergo ſunt duæ Rationales B, C, potentia tantum commenſurabiles, quarum altera, nempe B, expoſitæ Rationali A, æqualis eſt.*

[a] 11. deci.

POSTERIORIS autem generis lineas hac arte reperiemus. Sit rurſus expoſita Rationalis A, cui longitudine tantũ incommenſurabilis [b] *inueniatur B; & huic rurſum longitudine tantum incommenſurabilis C, maior aut minor quam A. Dico B, C, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quod enim ſint ſolum commenſurabiles potentia, patet ex conſtructione. Quod autem ſint Rationales, ita oſtendemus. Quoniam A, C, ipſi B, potentia ſunt commenſurabiles; erunt & A, C, commenſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Quare cum vtraque B, C, expoſitæ Rationali A, ſit potentia commenſurabilis;* [c] *erunt B, C, Rationales. Inuentæ ergo ſunt B, & C, Rationales potentia tantum commenſurabiles.*



[b] 11. deci.

[c] 6. deſin.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD si inueniendæ sint quotcunque lineæ Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, exequemur id hac ratione.

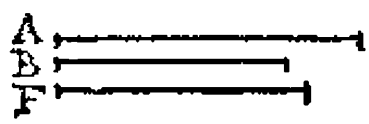
SVMANTVR per ea, quæ in scholio propos. 20. lib. 9. docuimus, tot numeri primi, quot lineæ Rationales quæruntur nempe, A, B, C, D. Deinde sumpta linea Rationali E, fiat vt A, ad B, ita quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt in coroll. propos. 6. huius lib. ostendimus. Item vt B, ad C, ita quadratum ex F, ad quadratum ex G; & denique vt C, ad D, ita quadratum ex G, ad quadratum ex H. Dico rectas E, F, G, H, Rationales esse, & potentia tantũ commensurabiles inter se. Quod enim Rationales sint, manifestum est. Cum enim earum quadrata proportionem habeant, quam numeri A, B, C, D, (nempe quadratum ex E, ad quadratum ex F, vt numerus A, ad numerum B, ex constructione; similiterque quadratum ex F, ad quadratum ex G, vt B, ad C, & quadratum ex G, ad quadratum ex H, vt C, ad D. At vero ex æquo quadratum ex E, ad quadratum ex G. vt A, ad C; similiterq; quadratũ ex E, ad quadratũ ex H, vt A, ad D; & denique quadratum ex F, ad quadratum ex H, vt B, ad D.) erunt ipsa inter se commẽsurabilia, [a] *ac propterea & rectæ ipsæ potentia saltem commensurabiles. Existente ergo E, Rationali, erunt & reliquæ F, G, H, Rationales. Quod autem potentia tantum sint commensurabiles, ita ostendemus. Quoniam earum quadrata proportionalia sunt numeris primis A, B, C, D: numeri autem primi proportionem non habent, quam quadrati numeri, vt ad finem lib. 8. docuimus; non habebunt etiam quadrata rectarum E, F, G, H, proportionem, quam numeri quadrati.* [b] *Quare rectæ E, F, G, H, longitudine incommensurabiles sunt. Ostensæ sunt autem Rationales, & potentia commensurabiles. Rationales igitur sunt, & potentia tantum commensurabiles. Quod est propositum.*

A, 5. E
B, 7. F
C. 3. G
D, 2. H

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

QVOD si propositis quotcunque Rationalibus potentia solum commensurabilibus, inueniendæ sit adhuc alia, quæ omnibus



C, 10. D, 6, E, 7.

omnibus illis commensurabilis sit potentia tantum, fiet id hoc modo. Sint propositæ duæ Rationales potentia tantum commensurabiles A, B, quarum quadrata proportionem habeant, quam numerus C, ad numerum D: Sumpto autẽ alio numero E, qui ad quemlibet ipsorum C, D primus sit; (Inuenietur autem huiusmodi numerus facile, si sumatur primus, qui neutrum ipsorum C, D, metiatur.) fiat vt D, ad E, ita quadratum lineæ B, ad quadratum lineæ F, per coroll. propositionis 6. huius lib. Dico F, Rationalem esse, & ipsis A, B, potentia solum commensurabilem. Quod enim Rationalis sit, ex eo patet, quod commensurabilis sit Rationali B, saltem potentia, cum quadrata rectarum B, F, proportionem habentia, quam numeri D, E, [a] *commensurabilia sint. Cum ergo proportio D, ad E, non sit, qua numeri quadrati ad numerum quadratum, vt ad finem lib. 8. ostendimus; (quòd D, & E, qui ambo non sint quadrati, cum E, primus nullo modo quadratus sit, sint inter se primi, ideoque plani non similes, ac proinde ex ijs, quæ in scholio propos. 26. lib. 8. ostendimus, proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum)* [b] *erunt rectæ B, F, longitudine incommensurabiles. Ergo potentia tantum commensurabiles. Eadem ratione erunt A, & F, potentia solum commensurabiles. Nam ex æquo erit quadratum ex A, ad quadratum ex F, vt C, numerus ad numerum E. Cum ergo hi numeri proportionem non habeant, quam quadratus ad quadratum; (quod ostendemus perinde, vt idem demonstrauimus de numeris D, & E,) erunt A, F, longitudine incommensurabiles, &c.*

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

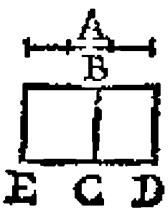
21. 19.

THEOR. 19. PROPOS. 22.

QVOD sub Rationalibus potentia solum commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum; Irrationale est: Et

Et recta linea ipſum potens, Irrationalis eſt. Vocetur autem Media.

SIT expoſita Rationalis A, & rectangulum BD, contentum ſub Rationalibus BC, CD, potentia tantum commenſurabilibus ſecundum aliquem modorum, quos in lemmate 2. præcedentis propoſ. diximus. (hoc eſt, ſiue altera illarum æqualis ſit Rationali expoſitæ A, ſiue non.) Dico rectangulum BD, eſſe Irrationale; & rectam, cuius quadratum ipſi BD. æquale eſt, Irrationalem quoque, quæ uocetur Media. Deſcribatur enim ex altera illarum, vt ex BC, quadratum BE, quod erit Rationale, vt in demonſtratione propoſ. 20. diximus. [a] Et quoniam eſt vt EC, hoc eſt, BC, ad CD, vt BE, ad BD. Eſt autem BC, ipſi CD, longitudine incommenſurabilis, ex hypotheſi; erit ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. huius lib. tradidimus, BE, ipſi BD, incommenſurabile. [b] Quare cum BE, commenſurabile ſit quadrato ex Rationali expoſita A; ſit autem BE, ipſi BD, incommenſurabile; [c] erit quoque quadratum ex Rationali expoſita A, eidem BD, incommenſurabile; Ac propterea BD. quadrato Rationalis expoſitæ incommenſurabile exiſtens, [d] Irrationale eſt. Quamobrem & recta potens ipſum BD, Irrationalis eſt, ex 1. lemmate propoſ. antecedentis.



VOCETVR autem hæc linea potens ipſum BD, Media, [e] propterea quod media proportionalis ſit inter duas BC, CD, Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles, quippe cum eius quadratũ æquale ſit rectangulo BD, ſub ipſis BC, CD, comprehenſo. Quod igitur ſub Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 1. ſexti.

[b] 9. defin.

[c] 14. decim.

[d] 10. defin.

[e] 17. ſexti

SCHO-

SCHOLIVM.

ITAQVE *omnis linea media proportionalis inter duas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles, Media vocabitur.*[a] *Cum enim eius quadratum æquale sit rectãgulo sub talibus Rationalibus comprehenso, quod quidem in hoc theoremate ostensum est, esse Irrationale, erit latus ipsius, nempe media proportionalis inter dictas Rationales, linea Irrationalis, quæ Media appellatur. Ex quo lineam Mediam facile describemus, si dicamus eam esse lineam Irrationalem, quæ medio loco proportionalis est inter duas lineas Rationales potentia tantum inter se commensurabiles. Vel quæ potest rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus contentum. Nam sola hæc linea Media hoc loco appellatur.*

[a] 57. sexti

VT *autem recte hoc loco monet Campanus, non solum recta potens rectangulum Irrationale sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus contentum, Irrationalis est, vocaturque Media: Verum etiam quadratum ipsius, vel rectangulum illud Medium dicitur, quia medio loco proportionale est inter quadrata illarum rectarum Rationalium potentia solum commensurabilium, quemadmedum & recta ipsa media proportionalis est inter dictas Rationales. Nam si tres lineæ sint cõtinue proportionales, quales sunt BC, & recta Irrationalis, quæ Media dicitur, & CD; erunt quoque rectilinea similia, similiterque descripta super ipsas, cuiusmodi sunt earum quadrata, proportionalia, vt in scholio propos. 22 lib. 6. demonstrauimus. Quare quadratum ex Media descriptum proportionale est inter quadrata rectarum BC, CD, ideoque Medium appellari potest.*

HOC *autem non ita intelligas, vt putes omne rectangulum Medium contineri sub duabus rectis Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, quale est Medium BD. Hoc enim falsum est, cum & Spatium Medium contineri possit sub duabus Irrationalibus, nempe Medijs longitudine, vel potentia tantum inter se commensurabilibus, vt ex propos. 25. & 26. huius lib. constabit. Itaq; non reciprocantur, rectangulum sub duabus Rationalibus potentia tantum inter se commensurabilibus*

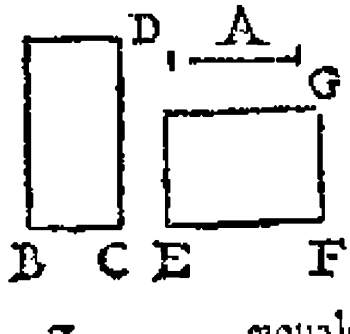
rabilibus contentum, & ſpatium Medium. Omne ſiquidem rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt, vt oſtendimus: At non omne ſpatium Medium ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus continetur. Vniuerſe tamen omne ſpatium Medium æquale eſt alteri cuipiam Medio ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. Nam alias recta ipſum potens, non eſſet dicenda Media, quia non poſſet rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus comprehenſum; vel non eſſet proportionalis inter duas Rationales potentia tantum commenſurabiles.

VNDE Medium deſcribi ſic poterit, vt dicamus, illud eſſe rectangulum ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum: Vel certe rectangulum, quod alteri cuipiam rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus comprehẽſo æquale eſt, ita vt ipſũ poſſit linea recta, quæ Media in hoc theoremate eſt vocata. Omne enim Medium non contentum ſub duabus huiuſmodi Rationalibus reuocari poteſt ad aliud Medium, cuius latera ſunt duæ lineæ Rationales potentia tantum commenſurabiles, vt in ſcholio ſequentis theorematis oſtendemus.

THEOR. 20. PROPOS. 23. 22. 20.

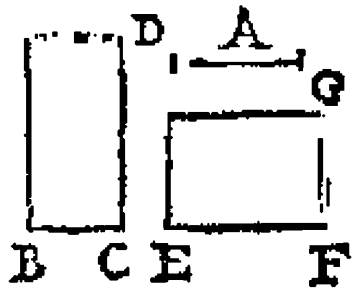
QVOD a Media fit, ad Rationalem applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem.

SIT linea Media A, & Rationalis BC, ſiue ea ſit expoſita, ſiue expoſitæ commenſurabilis longitudine & potentia, vel potentia tantum; appliceturque ad BC, rectangulum BD, æquale quadrato ex Media A, vel rectangulo, quod huic quadrato



Z æquale

[a] 45. pri.



æquale eſt, faciatq; latitudinem CD. Dico CD, Rationalem eſſe, & ipſi B C, longitudine incommenſurabilẽ. Quoniam.n. A, Media eſt, ipſa poterit rectangulum ſub duabus rectis Rationalibus potentia tantum inter ſe commẽſurabilibus contentum; alias non poſſet dici Media. Sit igitur illud rectangulum EG, ſub Rationalibus E F, F G, potentia tantum commenſurabilibus contentum. Et quia A, ex hypotheſi, poteſt etiam ipſum BD; æqualia erunt B D, & E G, [a] lateraque idcirco habebunt reciproca circa æquales angulos; nempe erit vt B C, ad E F, ita F G, ad C D; [b] Ac propterea quoque vt quadratum ex B C, ad quadratum ex E F, ita quadratum ex F G, ad quadratum ex C D: Sed quadratũ ex B C, commenſurabile eſt quadrato ex E F. (quod rectæ B C, E F ponantur Rationales; atque adeo inter ſe commenſurabiles vel longitudine & potentia, vel potẽtia tantum.) [c] Igitur & quadratum ex F G, commenſurabile erit quadrato ex C D; propterea aque & rectæ F G, CD, commenſurabiles erunt ſaltem potentia. Ergo cum FG, Rationalis expoſitę Rationali ſit commenſurabilis, ſi ipſa non eſt expoſita Rationalis; erit quoque C D, expoſitæ Rationali commenſurabilis, vt oſtendimus in ſcholio propoſ. 12. huius lib. atque adeo C D, ex definitione, Rationalis erit. Dico quod & longitudine incommenſurabilis ipſi BC. Quoniã.n. EF, FG, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles; & eſt vt EF, ad F G, ita quadratum ex EF ad rectangulum EG, ſub E F, FG, contentum, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. [d] erit quadratum ex E F, incommenſurabile rectangulo E G, atque adeo rectangulo B D, quod huic æquale eſt. Atqui quadratum ex EF, commenſurabile eſt quadrato ex CD. (quod EF, CD, Rationales ſint, atque idcirco ſaltem potentia commenſurabiles.) Igitur cum quadratum ex CD, commenſurabile ſit quadrato ex E F; at rectangulum B D, eidem quadrato ex EF, incommenſurabile; [e] incommenſurabilia

[a] 14. ſexti
[b] 22. ſexti
[c] 10. deci.
[d] 10. deci.
[e] 13. deci.

lia erunt quadratum ex CD, & rectangulum BD. Est autem ex lemmate 3. propos. 19. huius lib. quadratum ex CD, ad rectangulũ BD, vt recta CD, ad rectam BC. [a] Incommensurabiles ergo sunt longitudine CD, & BC. Rationalis ergo est CD, & Rationali BC, longitudine incommensurabilis. Quamobrem, quod a Media fit, ad Rationalem applicatum, &c. Quod demonstrandum erat. [a] 10. deci.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex propos. 45. lib. 1. applicabimus ad BC, rectangulum quadrato ex A, æquale, si ipsis BC, & A, [b] sumatur tertia proportionalis pro latere CD. Cum enim BC, A, & CD, proportionales sint; [c] erit rectangulum BD, sub extremis BC, CD, contentum æquale quadrato mediæ proportionalis A. [b] 11. sexti [c] 17. sexti

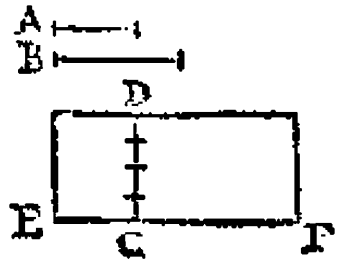
HAC arte vtendum erit & in sequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale quadrato cuiuspiam lineæ rectæ.

PORRO ex hoc theoremate manifestũ est, omne Medium, hoc est, spatium, quod linea Media potest, æquale esse cuidam alteri rectangulo contento sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus. Nam si illi Medio ad Rationalem lineam applicetur æquale rectangulum, fac'et id, per hoc theorema, alterum latus Rationale, longitudine lineæ Rationali incommensurabile. Quare rectangulum hoc applicatum Medio æquale, Medium erit sub duabus Rationalibus potentia solum commensurabilibus contentum. Atq; hoc modo quodcunque Medium reduci poterit ad Medium cõtentum sub duabus Rationalibus potentia tantum commensurabilibus.

THEOR. 21. PROPOS. 24. 23. 21.

MEDIAE cõmensurabilis, Media est.

SIT Mediæ A, recta B, commensurabilis siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & B, Mediam esse. Exposita enim sit Rationalis CD, [d] ad quam applicetur rectãgulũ DE, æquale quadrato ex A, Media. [d] 45. primi



Quoniam igitur DE. Medium ad Rationalem CD, applicatum, facit CE, latitudinem; [a] erit CE, Rationalis ipſi CD, longitudine incõmenſurabilis. Rurſus ad CD, Rationalem [b] applicetur rectangulum DF, quadrato ex B, æquale. Et quia rectæ A, B, ponuntur commenſurabiles, erũt quoque eorum quadrata, hoc eſt, rectangula ipſis æqualia, DE, DF, commenſurabilia. [c] Eſt autem vt DE, ad DF, ita recta EC, ad rectam CF. [d] Igitur EC, CF, longitudine ſunt commenſurabiles: Sed EC, oſtenſa eſt Rationalis, & longitudine ipſi CD, incommenſurabilis. [e] Igitur & CF, longitudine eidem CD, incommenſurabilis eſt. Cum ergo & Rationalis ſit, propterea quod Rationali expoſitæ CD, ſit commenſurabilis; (Nam cum EC, CF, ſint longitudine oſtenſæ commenſurabiles, & EC, ipſi CD, commenſurabilis ſaltem potentia, quod Rationalis ſit; erit & CF, eidem CD, commenſurabilis potentia, ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. ſcripſimus) erunt CD, CF, Rationales potentia tantum commenſurabiles, (Ac proinde recta B, poteus rectangulam DF, ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus CD, CF, Media eſt. Mediæ igitur commenſurabis, Media eſt. Quod oſtendendum erat.

[a] 23. deci.
[b] 45. primi
[c] 1. ſexti
[d] 10. deci.
[e] 14. deci.
22. deci.

COROLLARIVM.

EX hoc manifeſtum eſt, ſpatium Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſſe. Poſtquam.n. demonſtratum eſt DF, commenſurabile eſſe Medio DE, oſtenſum ex eo mox fuit DF, eſſe quoque Medium. Eademque ratio eſt in cæteris. Quodtamen hoc etiam modo poteſt demonſtrari.

SIT ſpatium DF ſpatio Medio DE, commenſurabile. Dico & DF, Mediũ eſſe. Poſſit enim A, Media ipſum DE, Medium. (Nam cum DE, Medium ſit, poterit ipſum recta, quæ Media dicitur, vt

m

in ſcholio propoſ. 22. huius lib. tradidimus.) & B, ipſum D F. Quoniam igitur D E, D F, commenſurabilia ſunt, erunt quoque quadrata ex A, E, ipſis æqualia, commenſurabilia. Quare A, B, rectæ potentia ſaltẽ ſunt cõmenſurabiles; Atq; idcirco ex. ſtante A, Media, erit & B, illi commenſurabilis Media, vt in hoc theoremate oſtenſum eſt. Igitur & D F, Medium erit. Omne enim ſpatium, quod poteſt Media, Medium appellatur, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus.

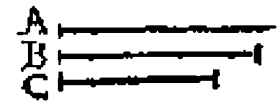
LEMMA I.

QVEMADMODVM autem in lemmate 1. propoſ. 19. huius lib. de Rationalibus dictum eſt, ita & hic de Mediis dicemus. Nimirum rectam lineam Mediæ longitudine commenſurabilem, dici Mediam, & ipſi commenſurabilem non ſolum longitudine, ſed & potentia; Vniuerſe enim quæ longitudine commenſurabiles ſunt, etiam potentia ſunt commenſurabiles. Si vero recta quædam linea Mediæ potentia fuerit commenſurabilis, ſi quidem & longitudine, dicetur & ſic Media, & ipſi commenſurabilis longitudine & potentia. Quod ſi Mediæ rurſus aliqua linea commenſurabilis exiſtens potentia, longitudine fuerit incommenſurabilis, dicetur & ſic Media ipſi potentia ſolum commenſurabilis.

LEMMA II.

DVAS rectas Medias longitudine commenſurabiles; Item duas potentia tantum commenſurabiles inuenire.

SIT Media aliqua linea A, cui si inueniantur duæ rectæ commensurabiles B, C; illa quidem longitu-



dine, hæc vero potentia tantum; a *erit vtraque B, C, Mediæ A, commensurabilis, Media. Cum ergo A, B, sint longitudine commensurabiles; & A, C, potentia tantum; erũt inuentæ A, B, Mediæ longitudine commensurabiles; & A, C, Mediæ potentia solum commensurabiles. Quod est propositum.*

a 24. deci.

SCHOLIVM.

QVAMVIS omnis linea recta Mediæ commensurabilis, Media sit; nõ tamen omnis Media cuilibet Mediæ est commensurabilis; cum duæ Mediæ dari possint prorsus incommensurabiles, longitudine videlicet, & potentia, vt ex propos. 36. huius lib. apparebit. Vbi etiam docebimus, quanam via inueniendæ sint duæ Mediæ longitudine & potentia incommensurabiles.

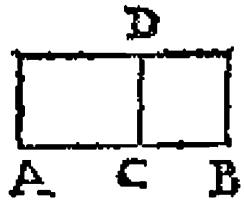
24. 23.

THEOR. 22. PROPOS. 25.

QVOD sub Medijs longitudine commensurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, Medium est.

CONTINEATVR rectangulum AD, sub Medijs AC, CD, longitudine cõmensurabilibus. Dico AD, Medium esse. Describatur ex CD, Media quadratũ BD, quod erit Medium. b Et quoniam est vt AC, ad CB, ita AD, ad DB: Sunt autẽ AC, CB, hoc est, AC, CD, longitudine cõmensurabiles; c erunt AD, DB, cõmensurabilia. Quare spatium AD, Medio DB, cõmensurabile, Mediũ est, ex coroll. præcedentis propos.

b 1. sexti



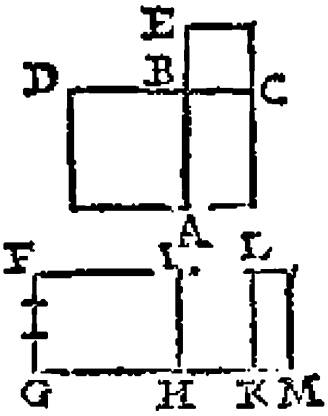
c 10. deci.

propoſ. Quod ergo ſub Medijs longitudine commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

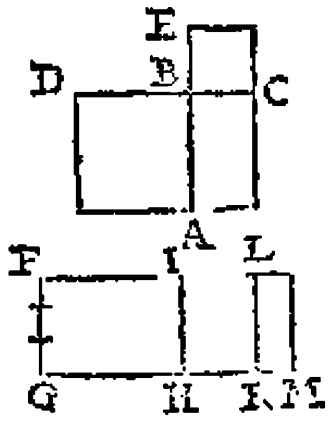
THEOR. 23. PROPOS. 26. 25. 23.

QVOD ſub Medijs potentia tantũ commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum, vel Rationale eſt, vel Medium.

SIT rectangulum AC, comprehenſum ſub Medijs AB, BC, potentia tantum commẽſurabilibus. Dico AC, eſſe vel Rationale, vel Medium. Deſcribantur ex AB, BC, quadrata AD, CE, quæ Media erunt, vt in ſcholio propoſ. 22. huius lib. docuimus; cum rectæ AB, BC, Mediæ ponantur. Exponatur Rationalis FG, [a] ad quam applicetur rectangulum FH, quadrato AD, ex AB, deſcripto æquale; & ad HI, rectangulum IK, rectangulo AC, æquale; & denique ad KL, rectangulum LM, æquale quadrato CE, ex BC, deſcripto; eritque totũ FM, vnum rectangulum, quemadmodum propoſ. 45. lib. 1. eſt oſtenſum. Quia vero AD, CE, Media ſũt, erunt & FH, LM, illis æqualia, Media: quæ cum applicentur ad Rationales FG, KL, [b] (eſt enim & KL, Rationali FG, æqualis, ob parallelogrammum FK, Rationalis.) faciantque latitudines GH, KM, [c] erunt rectæ GH, KM, Rationales, ipſi FG, ſeu KL, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, potentia inter ſe ſunt commenſurabiles, erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo & ipſis æqualia rectangula FH, LM, commenſurabilia: [d] Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad KM. [e] Igitur GH, KM, longitudine inter ſe commenſurabiles ſunt. Quare GH, KM. Rationales oſtenſæ, ſunt longitudine inter ſe commenſurabiles, Rationali vero FG, ſolum commenſurabiles



[a] 45. primi
[b] 34. primi
[c] 23. deci.
[d] 1. ſexti
[e] 10. deci.



potentia, cum ei oſtenſæ ſint longitudine incommenſurabiles; Ac propterea rectangulum ſub ipſis GH, KM, Rationale eſt. Et quoniam eſt, vt DB, ad BC, ita AB, ad BE, (quod DB, BC, ipſis AB, BE, ſint æquales, vtraque vtrique) & vt DB, ad BC, ita AD, ad AC; & vt AB, ad BE, ita AC, ad CE: erit quoque vt AD, ad AC, ita AC, ad CE; atque adeo AD, AC, CE, proportionalia ſunt. Igitur & illis æqualia FH, HL, LM, proportionalia erunt: Habent autem rectæ GH, HK, KM, eaſdem proportiones, quas rectangula FH, HL, LM. Igitur & rectæ GH, HK, KM, proportionales ſunt, & propterea quæ rectangulum ſub GH, KM, quadrato ex HK æquale eſt. Eſt autem rectangulum ſub GH, KM, oſtenſum Rationale. Igitur & quadratum ex HK, Rationale eſt; ideoque & recta HK, Rationalis erit; & ob hoc ipſi FG, Rationali expoſitæ, hoc eſt, ipſi HI, commenſurabilis vel longitudine, & potentia, vel ſolum potentia. Et ſi quidem HK, ipſi HI, longitudine ſit commenſurabilis; rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, longitudine commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, erit Rationale. Si vero HK, ipſi HI, potentia ſolum commenſurabilis ſit; erit rectangulum HL, ſub Rationalibus HI, HK, potentia tantum commenſurabilibus contentum, hoc eſt, AC, illi æquale, Medium. Eſt ergo AC, rectangulum ſub Medijs AB, BC, potentia tantum commenſurabilibus contentum, vel rationale, vel Medium. Quocirca quod ſub Medijs potentia tantum commenſurabilibus, &c. Quod erat oſtendendum.

a 10. deci.
b 1. ſexti
c 1. ſexti
d 17. ſexti
e 6. defin.
f 10. deci.
g 22. deci.

SCHOLIVM.

FACILIVS quam ex 45. prop. lib. 1. applicabimus ad HI, rectangulum ipſi AC, æquale, h *ſi tribus rectis HI, AB, BC, quarta proportionalis ſumatur pro latere HK.* i *Nam rectangulum ſub extremis HI, HK, æquale erit rectangulo ſub medijs AB, BC.*

h 12. ſexti
i 16. ſexti

HAC

HAC eadem arte vtemur in ſequentibus, quando ad aliquam rectam applicandum erit rectangulum æquale alteri rectangulo.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtratur, rectangulum contentum ſub duabus rectis Medijs potentia tantum commenſurabilibus eſſe vel Rationale, vel Mediũ; docebit Euclides propoſ. 28. quanam ratione inuenienda ſint duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant: Propoſ. vero 29. duas Medias potentia ſolum commenſurabiles inquiret, quæ ſpatium Medium contineant.

ITA QVE habemus ex his, [a] rectangulum contentum ſub duabus Rationalibus longitudine commenſurabilibus eſſe Rationale; [b] Sub duabus vero Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum rectãgulum eſſe Irrationale, appellarique Medium, & rectam, quæ ipſum poteſt, Mediam. Rurſus ex demonſtratis conſtat, [c] rectangulum comprehenſum ſub duabus Medijs longitudine commenſurabilibus eſſe Medium; [d] Rectangulum autem ſub duabus Medijs potentia ſolum commenſurabilibus comprehenſum eſſe vel Rationale, vel Medium.

[a] 20. deci.
[b] 22. deci
[c] 25. deci.
[d] 26. deci.

QVOD ſi quis roget, qualenam rectangulum ſit illud, quod ſub duabus Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur; Reſpondemus illud nec Rationale eſſe, nec Medium, ſed tertium quoddam genus conſtituere; nempe æquale eſſe rectangulo, quod continetur ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur.

SIT enim rectangulũ AC, comprehenſum ſub duabus Medijs AB, BC, longitudine & potentia incommenſurabilibus. Dico AC, neque Rationale eſſe, neq, Mediũ, &c. Conſtructis.n. eiſdem, vt in theoremate, oſtendemus ſimiliter, rectas GH, KM, Rationales eſſe, & ipſi FG, longitudine incommenſurabiles. Et quia rectæ AB, BC, ponũtur incommenſurabiles longitudine & potentia, erunt & earũ quadrata AD, CE, atque adeo ipſis æqualia rectangula FH, LM, incommenſurabilia: [e] Vt autem FH, ad LM, ita eſt recta GH, ad rectam KM. [f] Igitur rectæ GH, KM, longitudine inter ſe ſunt incommenſurabiles. Quare GH, KM, oſtenſæ Rationales, ſunt potentia tantum inter ſe commenſurabiles, [g] Ac propterea

[e] 1. ſexti.
[f] 10. deci.
[g] 22. deci.

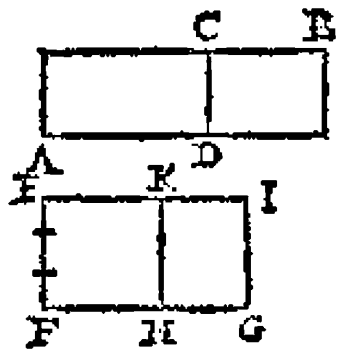
pterea rectangulum ſub ipſis GH, KM, Irrationale eſt, quod [d] *Medium appellatur, & recta ipſum potens, Irrationalis, quæ*
a 27. ſexti *dicitur Media.* [a] *Poteſt autem rectangulum ſub ipſis GH, KM, recta HK: (Nam, vt prius, oſtendemus tres GH, HK, KM, eſſe proportionales) Igitur HK, Irrationalis eſt, & Media. Quare IK, Rationale non eſt: ſi enim Rationale*
b 21. deci. *eſſet,* [b] *faceret ipſum ad Rationalem HI, applicatum latitudinem HK, Rationalem, & ipſi HI, longitudine commenſurabilem. Quod eſt abſurdum. oſtenſa enim eſt HK, Irrationalis, ac Media. Eodem modo neque IK, Medium*
c 23. deci. *eſt; Si enim eſſet Medium,* [c] *faceret ipſum applicatum ad Rationalẽ HI, latitudinẽ HK, Rationalẽ, & ipſi HI, longitudine incommenſurabilẽ. quod eſt abſurdũ. oſtenſa eſt. n. HK, Irrationalis, & Media. Itaque cũ IK, neq; Rationale ſit, neq; Medium; neceſſario neq; AC, illi æquale, Rationale erit, neq; Medium, ſed tertium quoddã genus conſtituet, nempe æquale erit ipſi IK, quod ſub Rationali, & Media, cõtinetur, cũ HI, Rationalis ſit, & HK, oſtenſa Media. Ex quibus efficitur, rectã quæ poteſt ſpatiũ ſub duabus Medijs lõgitudine & potentia incommenſurabilibus) quales ponuntur AB, BC, cõprehenſum, poſſe quoq; rectangulũ ſub Rationali, & Irrationali, quæ Media vocatur, contentũ. Quod eſt propoſitũ.*

26. 22.

THEOR. 24. PROPOS. 27.

MEDIVM non ſuperat Medium Rationali.

SVPERET Medium AB, Medium AC, rectangulo DB. Dico DB, non eſſe Rationale. Sit enim, ſi fieri poteſt, DB, Rationale. Expoſita ergo Rationali linea EF;
d 45. primi [d] *ad ipſam applicetur rectangulũ EG, Medio AB, æquale; & Medio AC, rectangulum EH, æquale, vt ſit reliquũ HI, Rationali DB, æquale. Erunt igitur EG, EH, æqualia Medijs AB, AC, Media; & HI, æquale Rationali DB, Rationale. Quoniam ergo Media EG, EH, ad Rationalem EF, ſunt applicata;*
e 23. deci. [e] *erunt rectæ FG, FH, Rationales*



nales,& ipſi E F,incommenſurabiles longitudine. Rurſus, quia Rationalẽ HI,applicatum eſt ad Rationalem HK; (a eſt enim recta HK,Rationali E F,æqualis) b erit recta HG,Rationalis,& ipſi EF, longitudine commenſurabilis.Quare cum HG,EF,longitudine ſint commenſurabiles; & EF,ipſi FH,longitudine incommenſurabilis, vt eſt oſtenſum; c erit & H G,eidem F H, longitudine incommenſurabilis. Eſt autem vt F H, ad HG,ita quadratum ex FH,ad rectangulũ ſub F H,H G, ex tertio lemmate propoſ.19.huius lib.d Igitur quadratum ex F H, incommenſurabile eſt rectangulo ſub F H, HG.Sed quadrato ex F H, commenſurabile eſt quadratũ ex HG;(quod ſint ambo ex lineis Rationalibus F H, H G, deſcripta) e atque adeo & duo quadrata ex F H, HG,ſimul,quadrato ex F H,commenſurabilia ſunt: Et rectangulo ſub F H, H G,commenſurabile eſt id, quod bis continetur ſub FH, HG,(quia hoc illius eſt duplũ.) Igitur per ea,quæ in ſcholio propoſ.14.huius lib.oſtendimus,& duo quadrata ex FH,H G,ſimul incommenſurabilia ſunt rectangulo ſub FH,HG,bis. f Quare & compoſitũ ex quadratis rectarũ FH,HG,& ex rectãgulo bis ſub FH,HG, incõmenſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarũ FH,HG. g At quadratis ex FH,H G, vna cum rectãgulo bis ſub F H, H G,æquale eſt quadratum ex FG. Igitur & quadratũ F G, incommenſurabile eſt cõpoſito ex quadratis rectarum F H,H G:Eſt autem compoſitum hoc Rationale,ex lemmate 4.propoſ.19 huius lib.quod oſtenſum ſit cõmenſurabile quadrato Rationali ex FH. Igitur cũ huic cõpoſito, quod Rationale eſt,incõmenſurabile ſit quadratũ ex FG, h erit quadratũ ex F G,Irrationale; i ac propterea & recta FG,Irrationalis erit. Quod eſt abſurdũ. oſtenſa enim eſt F G, Rationalis longitudine ipſi EF,incõmenſurabilis.Nõ ergo D B,quo Medium AB,ſuperat Mediũ A C,Rationale eſt.Quã ob rem Mediũ nõ ſuperat Mediũ Rationali. Quod erat oſtẽdendũ.

a 34. pri.
b 21. deci.
c 14. deci.
d 10. deci.
e 16. deci.
f 17. deci.
g 4. ſecũdi
h 10. defin.
i 11. defin.

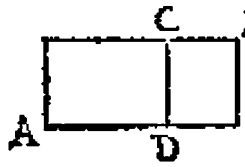
SCHO-

SCHOLIVM.

EX dictis & hoc demonſtrabimus.

RATIONALE ſuperat rationale Rationali.

RATIONALE enim AB, ſuperet Rationale AC, ſpatio DB. Dico DB, quoque eſſe Rationale. Quoniã. n. AB, AC, Rationalia ſũt;

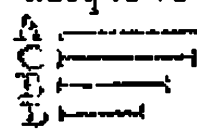


9. defin. 12. deci. *[a] erunt AB, AC, commenſurabilia quadrato Rationalis expoſitæ; [b] atque adeo & inter ſe commenſurabilia. Quare cum totum AB, compoſitũ ex AC, DB, commenſurabile ſit ipſi AC; erit quoque idem AB, reliquo DB, commenſurabile, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Eſt autem AB, Rationale. Igitur & DB, ex lemmate 4 propoſ. 19. huius lib. Rationale eſt. Quod eſt propoſitum.*

27. PROBL. 4. PROPOS. 28.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant.

EXPONANTVR per lemma 2 propoſ. 21. huius lib. duæ Rationales A, B, potentia tantum commenſurabiles [c] inter quas media proportionalis ſumatur C; [d] fiatque vt A, ad B, ita C, ad D. Dico C, D, eſſe Medias



potentia tantum commẽſurabiles, quæ Rationale cõprehendant. Quoniam. n. A, B, Rationales ponũtur potentia tantum commenſurabiles; [e] erit rectangulum ſub ipſis contentum, Irrationale, quod Medium vocatur; atque adeo [f] cum ipſum poſsit recta C, erit C, Media. Et quoniam eſt vt A, ad B, ita C, ad D; ſuntque A, B, potentia tantũ commenſurabiles; erunt quoque C, D, ſolum commenſurabiles

c 13. ſexti. d 12. ſexti. e 22 deci. f 17. ſexti.

ſurabiles potentia, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtendimus. Eſt ergo & D, Mediæ C, commenſurabilis, Media. Quare inuentæ ſunt Mediæ C, D, potentia tantũ commenſurabiles. Dico iam ipſas continere Rationale. Quoniam.n. eſt vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; Vt autem A, ad C, ita eſt C, ad B; erit quoque vt C, ad B, ita B, ad D; ideoq; B, media proportionalis inter C, & D, [b] poterit rectangulum ſub ipſis C, D, comprehenſum. Eſt autem quadratum ex B, linea Rationali, Rationale. Igitur & rectangulum ſub C, D, Rationale eſt. Medias ergo inuenimus C, D, potenta tantum commenſurabiles, quæ Rationale comprehendunt. Quod faciendum erat.

[a] 24. deci.

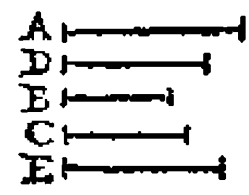
[b] 17. ſexti

PROBL. 5. PROPOS. 29.

28.
0.

MEDIAS inuenire potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant.

EXPONANTVR per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib demonſtrauimus, tres Rationales A, B, C, potentia tantum commenſurabiles; [c] & inter A, B, media proportionalis inueniatur D. [d] Deinde fiat vt B, ad C, ita D, ad E. Dico D, E, Medias eſſe, potentia tantum commẽſurabiles, quæ Medium cõtinent. Quoniam.n. A, B, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; erit rectangulum ſub A, B, atque adeo & quadratum ex D, [e] quod illi æquale eſt, [f] Irrationale, quod Medium dicitur; & ipſa recta D, Media. Et quia eſt vt B, ad C, ita D, ad E; ſunt autem B, C, Rationales, & potentia ſolum commenſurabiles; erũt quoque D, E, potentia ſolum commenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. demonſtratum eſt. Cum ergo D, Media ſit, [g] erit & E, illi potentia ſolum commenſurabilis,



[c] 13. ſexti

[d] 12. ſexti

[e] 17. ſexti

[f] 22. deci.

[g] 24. deci.

rabilis, Media; Ac propterea D, E, Mediæ ſunt potentia tantum cõmenſurabiles. Dico iam ipſas continere Mediũ. Quoniam.n. eſt vt B, ad C, ita D, ad E; & permutando vt B, ad D, ita C, ad E: Vt autem B, ad D, ita D, ad A; erit quoque vt D, ad A, ita C, ad E. [a] Rectangulum igitur ſub D, E, æquale eſt ei, quod ſub A, C: Eſt autẽ quod ſub A, C, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, [b] Irrationale, & Medium. Igitur & rectangulum ſub D, E, Medium eſt. Medias ergo inuenimus D, E, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium continent. Quod faciendum erat.

[a] 16. ſexti

[b] 22. deci.

SCHOLIVM. I.

IN ijs quæ ſequuntur, indigemus hoc problemate.

DVOS numeros planos ſimiles inuenire.

SVMANTVR quatuor quicunque numeri proportionales, A, B, C, D, vt quidem A, ad C, ita B, ad D. Multiplicantes autem ſe mutuo A, & B, faciant E; Item C, & D, ſe multiplicantes faciant F. Erunt ergo E, & F, numeri plani ſimiles, quandoquidem latera habent proportionalia, vt ex conſtructione eſt manifeſtum.

A, 6. C, 12.
B, 4. D, 8.
E, 24. F, 96.

QVONIAM autem in lib. 9. oſtenſum eſt, ſi impar numerus, vel par parem multiplicet, procreari numerum parem; Imparem vero, ſi impar multiplicet imparem; perſpicuum eſt, quonam modo inueniri poſſint duo plani ſimiles, quorum vterq; par ſit, vel impar; Vel vnus quidem par, alter vero impar. Si enim latera ſumpta, ſint numeri pares, erunt eorum plani pares etiam: ſi autem numeri ſint impares, erunt & plani eorum impares. Quod ſi vnius latera ſint impares numeri, alterius autem pares, erit illorum quidem planus, impar; horum vero par: Similiter pares erunt plani, ſi quilibet habeat vnum latus numerum parem, alterum vero imparem, &c.

[c] 28. & 29 noni.

LEMMA

LEMMA I.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit.

INVENIANTVR per ea, quæ in ſcholio proximo dicta ſunt, duo plani ſimiles AB, & C, quorum vterque vel par ſit, vel impar.[a] *Et quoniam, ſiue a pari par auferatur, ſiue ab impari impar, reliquus par eſt; detracto BD, ex AB, qui æqualis ſit ipſi C, erit reliquus AD, par. Quo diuiſo bifariã in E; Dico numerum factum ex AB, in BD,*[b] *qui quidem quadratus eſt, compoſitum cum quadrato numeri ED, facere quadratũ. Quoniam.n. numerus AD, bifariam eſt diuiſus in E, & ei additus DB; erit ex 6. theoremate eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, numerus qui fit ex AB, in BD, vna cum quadrato numeri DE, æqualis quadrato numeri EB. Quare duo quadrati, nempe qui fit ex AB, in BD, & quadratus numeri DE, compoſiti faciunt quadratum, eum videlicet, qui ex BE, gignitur. quod eſt propoſitum.*

A ..... E ..... D ..... B
C .. ..

[a] 24. & 26 noni.

[b] 1. noni

COROLLARIVM.

EX his manifeſtum eſt, quando AB, & C, ſimiles ſunt, inuentos eſſe eadem arte duos numeros quadratos numerorum BE, ED, quorum exceſſus, nimirum numerus ex AB, in BD, factus, etiam numerus quadratus ſit.

QVOD ſi numeri ſumãtur AB, & C, nõ ſimiles, vterq; tamẽ par, vel impar; inuenti erunt eodẽ modo duo

duo quadrati numerorum B E, E D, quorum exceſſus, numerus ſcilicet, qui ſit ex A B, in B D, non eſt
a 2. noni. quadratus. Si enim quadratus eſſet, a numeri A B, B D, hoc eſt, A B, & C, plani ſimiles eſſent. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim non ſimiles.

SCHOLIVM II.

ITAQVE ſi iubeamur inuenire duos quadratos numeros, quorum exceſſus etiam ſit numerus quadratus; ſumemus vt prius, duos planos ſimiles, quorum vterque par, vel impar ſit, nempe A B, & C, & reliqua perficiemus, vt in proximo lemmate eſt dictum. Nam quadrati numeri ex B E, E D, deſcripti ſunt illi, quos quarimus. Excedit enim quadratus ex B E, quadratũ ex E D, numero. qui producitur ex A B, in B D, qui etiã quadratus eſt.

A ..... E ..... D ..... B
C .....

SI vero inueniendi ſint duo quadrati, quorum exceſſus non ſit quadratus: ſumendi erunt duo numeri plani A B, & C, non ſimiles, quorũ vterque par ſit, vel impar, & reliqua peragẽda, vt prius. Nam ſimiliter oſtendemus quadratum ex B E, aquale eſſe quadrato ex D E, vna cum eo qui ex A E, in B D, fit; Quare exceſſus quadratorum ex B E, E D, eſt numerus factus ex A B, in B D, qui cum non ſit quadratus; (Si enim eſſet quadratus, eſſent A B, B D, plani ſimiles quod non ponitur) conſtat propoſitum.

A ... E ... D ..... B
C .....

HOC poſterius facilius abſoluemus, ſi quemcunque quadratum numerum diuidamus in duos numeros, quorum alter ſit quadratus, alter vero non. Vt ſi quadratus 36. diuidatur in quadratum 16. & non quadratum 20. excedet quadratus 36. quadratum 16. numero 20. non quadrato. Sic quoque ſi idem quadratus 36. diuidatur in quadratum 25. & non quadratum 11. ſuperabit quadratus 36. quadratum 25. numero non quadrato 11. & ſic de cæteris.

LEMMA.

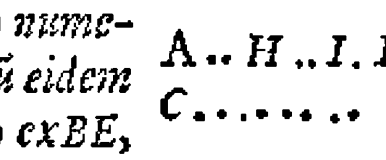
LEMMA II.

DVOS numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus.

SINT duo numeri plani ſimiles A B, *&* C, *pares, vel impares, vt in lemmate præcedẽti, fiatque eadem conſtructio, ita vt rurſus quadratus, qui ſit ex multiplicatione ſimilium numerorum* A B, D B, *inter ſe, vna cum quadrato ex* D E, *æqualis ſit quadrato ex* B E. *Auferatur deinde ex* D E, *vnitas* E F. *Erit ergo quadratus ex* D F, *minor quadrato ex* D E, *quod & latus* D F, *latere* D E, *minus ſit. Dico quadratos numeros, quorum alter ex* A B, *in* B D, *alter vero ex* D F, *in ſe ſit, compoſitos non efficere numerum quadratum. Nam ſi compoſitus ex ipſis eſt quadratus, erit is vel maior quadrato ex* B F, *vel æqualis, vel minor: quod fieri non poſſe, in hunc modum demonſtrabimus. Sit enim primum maior, quam quadratus ex* B F; *ac propterea latus ipſius maius latere* B F. *Erit ergo latus ipſius vel æquale numero* B E, *vel maius.* (*Minus enim non erit, quoniam inter numeros* B E, B F, *ſola vnitate inter ſe diſtantes nullus medius eſt numerus, ne vnitas ipſa ſecetur; Eſſet autem dictum latus inter ipſos medium, ſi maius poneretur quam* B F, *minus vero quam* B E.) *Si dicatur æquale, ita vt quadrato ex* B E, *æqualis ſit quadratus numerus*

A H I E F G D B
C

compoſitus ex quadrato, qui fit ex A E, in B D, & ex quadrato numeri D F; cũ eidem quadrato ex B E,



ſit oſtenſus in præcedenti lẽmate æqualis numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E; erit, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ei, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D E. Ablato ergo communi, eo ſcilicet qui fit ex A E, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, æqualis reliquo quadrato ex D E; Ideoque & latus D F, lateri D E, æquale, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, inſe fit, æquale eſt numero B E. Sed neque maius. Sit enim, ſi fieri poteſt, latus illius æquale numero B I, qui maior ſit, quam B F, ita vt quadrato ex B I, æqualis ſit quadratus ille compoſitus. Quoniam igitur quadratus ex B I, latere maiore, maior eſt quadrato ex B E, latere minore: erit quoque compoſitus ex quadratis, quorum alter ex A B, in B D, alter vero ex D F, inſe fit, (cum hic cõpoſitus æqualis ponatur quadrato ex B I,) maior quadrato ex B E. Eſt autem quadrato ex B E, oſtenſus in lemmate præcedenti æqualis numerus, qui fit ex A E, in B D. vna cum quadrato ex D E: Ablato ergo communi, qui fit ex A B, in B D; erit reliquus quadratus ex D F, reliquo quadrato ex D E, maior; ac proinde latus D F, latere D E, maius, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non ergo latus quadrati compoſiti ex quadratis, quorum alter fit ex A B, in B D, alter vero ex D F, in ſe, maius eſt latere B E. Sed neque æquale, neque

neque minus oſtenſum eſt. Non igitur quadratus ille compoſitus maior eſt quadrato ex B F.

SIT iam, ſi fieri poteſt, numerus qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F; & ponatur numerus A H, duplus vnitatis E F. Quia igitur totus A D, totius E D, duplus eſt, (diuiſus enim eſt A D, in E, bifariam) & ablatus A H, ablatæ vnitatis E F; erit & reliquus H D, reliqui F D, duplus, ex iis, quę ad propoſ. 7. lib. 7. oſtendimus; atque idcirco H D, in F, bifariam diuiditur. Quare ex 6. theorem. eorum, quæ ad propoſ. 14. lib. 9. demonſtrauimus, erit numerus qui fit ex H E, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis quadrato ex B F. Sed eidem quadrato ex B F, æqualis ponitur numerus, qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato D F: Igitur qui fit ex H B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis eſt ei, qui fit ex A E, in B D, vna cum quadrato ex D F: & detracto communi quadrato ex D F, relinquetur, qui fit ex H B, in B D, ei qui fit ex A B, in B D, æqualis. Quare cum H B, A B, multiplicantes eundem B D, producant æquales numeros; [2] *habeant autem multiplicantes eandem proportionem, quam producti; erit H B, ipſi A B, æqualis, pars toti. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, quadrato ex B F, æqualis.*

[2] 18. ſepti.

SIT tandem, ſi poteſt fieri, numerus qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F, ac propterea & latus eius latere B F, minus, quod ſit B G, ita vt qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, æqualis ſit quadrato ex B G. Sumatur

A . . H . . I . E . F . G . . . D . . . . B
C . . . . . .

autem ipſius E G, duplus A I. Quoniam igitur totus A D, totius F D, duplus eſt, & ablatus A I, ablati E G; erit rurſus & reliquus I D, reliqui G D, duplus; ac propterea I D, in G, diuidetur bifariam. Quare ex eodem theorem. 6. eorum, quæ ad propos. 14. lib. 9. demonſtrata ſunt, erit numerus qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis quadrato ex B G: ponitur autem eidem quadrato ex B G, æqualis qui fit ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Igitur qui fit ex I B, in B D, vna cum quadrato ex D G, æqualis eſt ei, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Ablatis igitur quadratis ex D G, & D F, quorum qui ex D G, minor eſt, remanebit qui ex I B, in B D, maior eo, qui ex A B, in B D, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non eſt ergo qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F, minor quadrato ex B F. Sed neque maior eſt oſtenſus, neque æqualis. Non igitur quadratus eſt, qui ex A B, in B D, vna cum quadrato ex D F. Quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM III.

EX hoc facile inueniemus duos numeros, ita vt ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Si enim per lemma præcedens inueniantur duo quadrati, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus; habebit hic compoſitus non quadratus ad neutrum ipſorum quadratorum proportionem, quam quadratus ad quadratum.

IDEM obtinebimus, ſi quemlibet numerum quadratũ in duos non quadrates partiti fuerimus. Ita enim quadratus totus ad neutrum eorum, in quos diuiſus eſt, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratum.

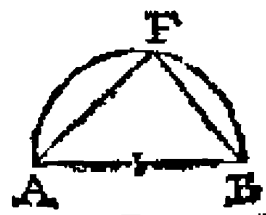
PROBL.

PROBL. 6. PROPOS. 30.

29. 17.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt maior, quam minor, plus possit quadrato rectæ lineæ longitudine sibi commensurabilis.

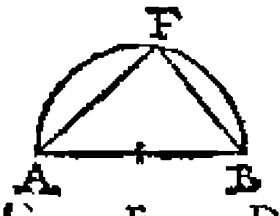
EXPONATVR linea Rationalis AB, & inueniantur ex ijs, quæ in scholio 2. propos. præcedentis tradidimus, duo numeri quadrati CD, CE, quorum excessus DE, non sit quadratus. Deinde per coroll. propos. 6. huius lib. fiat vt CD, numerus ad numerum DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, nimirum ad id, quod ex AF; accommodeturque AF, in semicirculo ABF, circa diametrum AB, descripto: ac denique connectatur recta FB. [a] Quoniam ergo angulus F, rectus est in semicirculo; [b] erit quadratum ex AB, æquale duobus quadratis ex AF, & FB; hoc est, recta AB, plus poterit quam AF, quadrato rectæ FB. Et quia est quadratum ex AB, ad quadratum ex AF, vt numerus CD, ad numerum DE; [c] ei unt quadrata ex AB, AF, commensurabilia; atque adeo cum quadratũ ex AB, sit Rationale, nempe ex linea Rationali AB, descriptum; erit & quadratum ex AF, Rationale, propterea q; & recta AF, ipsum describẽs, Rationalis. Rationales ergo sunt AB, AF; atq; adeo cõmensurabiles saltẽ potentia. Quia vero quadratũ ex AB, ad quadratũ ex AF, proportionẽ non habet, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; (cũ neq; quadratus numerus CD, ad non quadratũ DE, proportionem habeat, quã quadratus ad quadratũ; alias & DE, quadratus esset, [d] vt in Arithmeticis est demonstratũ. qđ nõ ponitur) [e] erũt rectæ AB, AF,



[a] 31. tertij
[b] 47. pri.
[c] 6. decimi
[d] 24. decimi
[e] 9. decimi

longitudine incommenſurabiles: Sunt autem commenſurabiles potentia, vt oſtenſum eſt. Igitur A B, A F, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles.

IAM vero, quoniam eſt vt CD, ad DE, ita quadratũ ex AB, ad quadratum ex A F; erit per conuerſionem rationis, vt quadratus numerus C D, ad quadratum numerum CE, ita quadratũ ex A B, ad quadratum ex F B (ſicut. 9. CD, ſuperat DE, quadrato CE, ita etiã quadratum ex AB, ſuperat quadratum ex AF, quadrato ex FB.), Quare rectæ A B, F B, longitudine commenſurabiles ſunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tãtum commenſurabiles, ita vt maior AB, plus poſsit, quam minor A F, quadrato lineæ F B, ſibi longitudine commenſurabilis. Quod faciendum erat.



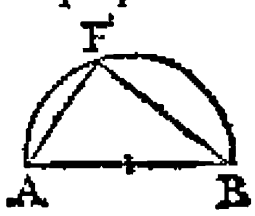
* 9. decimi

30. 18.

PROBL. 7. PROPOS. 31.

INVENIRE duas Rationales potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quam minor, plus poſsit quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis.

EXPONATVR Rationalis linea AB, inueniantur que per lemma 2. propoſ. 29. huius lib. duo numeri quadrati C E, E D, ita vt ex illis compoſitus C D, non ſit quadratus, vel certe numerus aliquis quadratus CD, ſecetur ĩ duos numeros non quadratos C E, E D: Vtrumuis enim horum fiat, totus CD. ad neutrum ipſorũ CE, ED, proportionem habebit, quam quadratus ad quadratũ, alias ſecundum priorem modum, eſſet totus C D, etiam quadratus:



dratus: iuxta posteriorem vero, quilibet ipsorum CE, ED, quadratus quoque, [a] vt in Arithmeticis ostensum est. quod non ponitur. Fiat deinde per coroll propos. 6. huius lib vt CD, ad DE, ita quadratum ex AB, ad aliud quadratum, vt ad id, quod ex AF; accommodeturq; AF, in semicirculo AFB, circa AB, descripto Denique connectatur recta FB. Poterit igitur, vt in præcedenti, AB, plus quam AF. quadrato rectæ FB; Eruntque AB, AF, Rationales potentia solum commensurabiles: Eadem enim hic est demonstratio, quæ in præcedenti propo. [Quoniã vero rursus, vt prius, est per conuersionem rationis, vt CD, ad CE, ita quadratum ex AB, ad quadratũ ex FB: Non habet autem CD, ad CE, proportionẽ quam quadratus ad quadratum; Non habebit quoque quadratum ex AB, ad quadratum ex FB, proportionem, quam quadratus numerus ad numerum quadratum. [b] Quare rectæ AB, FB, longitudine incommensurabiles sunt. Inuenimus ergo duas Rationales AB, AF, potentia tantum cõmensurabiles, ita vt maior AB, plus possit quam minor AF, quadrato lineæ FB, sibi longitudine incommensurabilis. Quod erat faciendum.

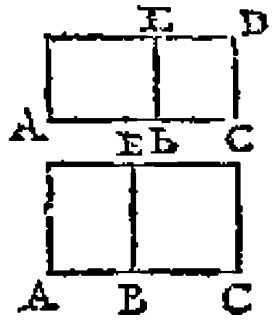
[a] 24. octaui

[b] 9. decimi

LEMMA.

SI sint duæ rectæ lineæ inæquales, erit vt maior ad minorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum minoris.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, in rectum constitutæ, quarũ AB, maior sit. Dico esse, vt AB, ad BC, ita rectangulum sub AB, BC, ad quadratum ex BC. Describatur. n. ex BC, quadratũ BD, compleaturq; rectangulũ AD; eritque rectangulum AE, sub AB, BC, contentum; quod BE, ipsi BC, sit æqualis: perspicuum autem est, esse vt AB, ad BC, ita AE, ad BD.



[c] 1. sexti

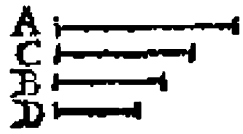
EODEM modo erit, vt minor ad maiorem, ita rectangulum sub ipsis contentum, ad quadratum maioris, vt in secunda figura est manifestum, in qua AB, *minor est, quam* BC.

31. 24. 25.

PROBL. 8. PROPOS. 32.

INVENIRE duas Medias potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus possit quam minor, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis.

a 30. deci. a REPERTAE sint duæ Rationales A, B, potẽtia tantum commẽsurabiles, ita vt A, maior plus possit quã B, minor quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis; sitq; C, media proportionalis inter A. & B; & fiat vt A, ad B, ita C, ad D. Quoniã igitur A, B, sunt Rationales potentia solum commensurabiles;



b 22. deci. b erit rectangulum sub A, B, Irrationale, & recta C, ipsum potens, linea Media. Et quia est vt A, ad B, ita C, ad D; sunt autẽ A, & B, potentia tantũ commensurabiles, erũt quoque C, & D, potentia solum commensurabiles, vt in

c 24. deci. scholio propos. 10. huius libri ostendimus. c Quare D, Mediæ C, commensurabilis, Media quoque est. Inuentæ ergo sunt duæ Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles. Dico eas Rationale comprehendere. Cum enim sit vt A, ad B, ita C, ad D; & permutando vt A, ad C, ita B, ad D; sit autẽ vt A, ad C, ita C, ad B; erit quoque vt C,

d 17. sexti ad B, ita B, ad D; d Ac propterea rectangulũ sub C, & D, æquale erit quadrato ex B. Quam ob rem, cum quadratum ex B, Rationali Rationale sit; erit & rectangulũ sub C, D, illi æquale, Rationale. Continent ergo Mediæ C, D, potentia tantum commensurabiles, Rationale. Quoniam

niam vero est vt A, ad B, ita C, ad D: potest autem A, plus quam B, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis, ex constructione; [a] poterit quoque C, plus quã D, quadrato lineæ longitudine sibi commensurabilis. Inuenimus igitur duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis. Quod faciendũ erat. [a] 15. decimi.

QVOD si repertæ sint A, B, Rationales potentia tantum commmensurabiles, ita vt A, plus possit quam B, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis; reliqua autem fiant, vt prius, ostendemus eodem modo, inuentas esse duas Medias C, D, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior C, plus possit quam minor D, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis.

SCHOLIVM.

ALII hoc problema demonstrant per lemma antecedens: Nos autem breuius ac facilius idem sine ipso ostendimus, vt facile iudicabunt, qui eum eorum demonstratione hanc nostram contulerint. Immo rectas C D, Medias esse potentia solum commensurabiles, quæ Rationale contineant, non aliter hic ostendimus, ac in propos. 28. huius lib.

LEMMA.

SI sint tres lineæ rectæ, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum sub prima & secunda contentum, ad id, quod sub secunda & tertia continetur.

SINT tres rectæ AB, BC, CD, in rectum constitutæ. Dico esse vt AB, ad CD, ita rectangulum sub AB, BC, ad rectangulum sub BC, CD. Describatur enim ex BC, quadratũ BCDE, perficiaturque rectangu-



lum

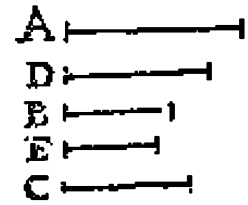
lum AF; *Eritque* A E, *contentum ſub* A B, B C; *&* C F, *ſub* B C, C D; *quod* B E, C D, *ipſi* B C, *æquales*
a 1. *ſexti* *ſint*. a *Perſpicuum autem eſt eſſe* AB, *ad* C D, *vt* A E, *ad* C F. *Quod eſt propoſitum*.

32. 26.

PROBL. 9. PROPOS. 33.

INVENIRE duas Medias potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior plus poſſit quam minor, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis.

SINT inuentę tres Rationales A, B, C, potentia tãtum commenſurabiles, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis. (Hoc autem fiet in hunc modum. b Repertis duabus Rationalibus A, C, potentia tantum commenſurabilibus, ita vt A, plus poſsit quam C, quadrato lineæ ſibi commenſurabilis longitudine; inueniatur alia B, vtrique A, & C, potentia ſolum commenſurabilis, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 21. huius lib. demõſtrauimus.) c Et ipſarum A, B, ſumatur media proportionalis D; d fiatque vt D, ad B, ita C, ad E.



b 30. *deci.*
c 13. *ſexti*
d 12. *ſexti*

Quoniam igitur ex lemmate antecedenti, eſt vt A, ad C, ita rectangulum ſub A, B, ad rectangulum ſub B, C: e Eſt autem rectangulo ſub A, B, æquale quadratum ex D; f & rectangulo ſub B, C, æquale rectangulũ ſub D, E, quòd proportionales ſint D, B, C, E; Erit quoque vt A, ad C, ita quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E: Sed vt quadratum ex D, ad rectangulum ſub D, E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. recta D, ad rectam E. Igitur erit vt A, ad C, ita D, ad E: Sunt autem A, C, potentia ſolum commenſurabiles. Ergo & D, E, potentia ſolũ commenſurabiles ſunt, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib.

e 17. *ſexti*
f 16. *ſexti*

lib. ostendimus. [a] Quia vero D, potens spatium sub A, B, Rationalibus potentia tantum commensurabilibus, Irrationalis est, & Media; [b] erit quoque E, ipsi ostensa commensurabilis, Media. Inuctæ ergo sunt duę Mediæ D, E, potentia solum commensurabiles. Et quia ostensum est rectangulo sub B, C, [c] quòd Mediũ est, (quòd B, C, sint Rationales potentia tantum commensurabiles,) æquale esse rectangulum sub D, E; erit rectangulum sub D, E, Medium. Denique quia ostendimus esse vt A, ad C, ita D, ad E; potest autem A, plus quam C, quadrato lineæ sibi longitudine commensurabilis, ex constructione; [d] poterit etiam D, plus quam E, quadrato lineæ longitudine sibi commẽsurabilis. Inuenimus ergo duas Medias D, E, potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ rectæ longitudine sibi commensurabilis. Quod erat faciendum.

[a] 22. decí.
[b] 24. decí.
[c] 22. decí.
[d] 15. decí.

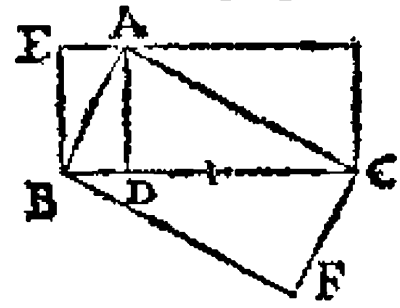
QVOD si repertæ fuerint A, B, C, Rationales potentia tantum commensurabiles, ita vt A, plus possit quam C, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, reliqua autem construantur, vt prius, demonstrabimus similiter, inuentas esse duas Medias D, E, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior D, plus possit quam minor E, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis. Id quod facile apparere potest ex adducta demonstratione.

LEMMA I.

SIT triangulum rectangulum ABC, angulum rectum habens BAC, a quo perpendicularis demittatur AD. Dico rectangulum contentum sub CB, BD, æquale esse quadrato ex AB: contentum autem sub BC, CD, æquale quadrato ex AC: & contentum sub BD, DC, æquale quadrato ex AD: contentum denique sub BC, AD, æquale contento sub AB, AC.

QVO-

QVONIAM ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. recta AB, media proportionalis eſt inter CB, BD; [a] erit rectangulum ſub CB, BD, quadrato ex AB, æquale.



EADEM ratione erit rectangulũ ſub BC, CD, æquale quadrato ex AC; quoniã per idem coroll. AC, media proportionalis eſt inter BC, CD.

RVRSVS quia ex eodẽ coroll. AD, inter BD, DC, media eſt proportionalis, erit eodem modo rectãgulum ſub BD, DC, æquale quadrato ex AD.

POSTREMO, [b] quia triangula ABC, ABD, ſimilia ſunt; erit vt BC, ad AC, ita AB, ad AD. [c] Quare rectangulum ſub BC, AD, æquale eſt rectangulo ſub AB, AC. Quod etiam ita oſtendetur. Compleatur rectangulum CE, contentum ſub BC, AD: Item rectangulũ AF, ſub AB, AC, contentũ. [d] Quoniam igitur rectangulum CE, duplum eſt trianguli ABC, necnon & rectangulum AF, eiuſdem trianguli eſt duplum; erunt inter ſe æqualia rectangula CE, AF. quod eſt propoſitum.

[a] 17. ſexti

[b] 8. ſexti

[c] 16. ſexti

[d] 41. primi

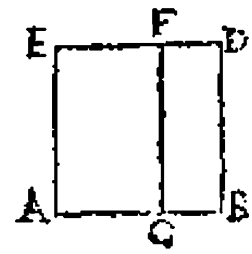
LEMMA II.

SI recta linea ſecetur in duas partes inæquales, erit vt maior pars ad minorem, ita rectangulum ſub tota & maiore parte, ad rectangulum ſub tota & minore parte contentum.

SECETVR recta AB, non bifariam in C, ſitque maior pars AC. Dico eſſe vt AC, ad CB, ita rectangu-

lum

ium ſub AB, AC, ad rectangulum ſub AB, CB. Deſcribatur enim ipſius AB, quadratum ABDE, ducaturque CF, ipſi AE, parallela; eritq; AF, contentum ſub AB, AC, & CD, contentum ſub AB, CB; quod AE, CF, ipſi AB, æquales ſint. [a] *Quoniam igitur eſt vt AC, ad CB, ita AF, ad CD; conſtat propoſitum.*



[a] 1. ſexti

EADEM ratione erit, vt minor pars BC, ad maiorem CA, ita BF, contentum ſub AB, BC, tota, & minore parte, ad CE, contentum ſub AB, CA, tota, & maiore parte.

LEMMA III.

SI ſint duæ rectæ lineæ inæquales, minor autem ſecetur bifariam; erit rectangulum ſub ipſis contentum duplum rectanguli, quod ſub maiori linea & dimidia parte minoris continetur.

SINT duæ rectæ inæquales AB, BC, angulum rectum conſtituentes ABC, ſeceturque minor BC, bifariam in D. Dico rectangulum ſub AB, BC, duplum eſſe rectanguli ſub AB, BD. Cõpleatur n. rectangulum AC, ſub AB, BC; ducaturq; DE, ipſi AB, parallela; eritq; BE, contentum ſub AB, & BD, dimidia minoris. [b] *Quoniam igitur AC, ipſius BE, duplum eſt, quod & baſis BC, dupla ſit baſis BD; conſtat propoſitum.*



[b] 1. ſexti

EODEM

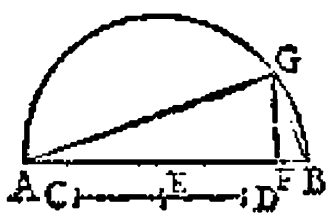
EODEM modo, si BC, secta bifariam, sit maior, erit quod sub AB, BC, continetur, duplum eius, quod continetur sub AB, minore & BD, dimidia maioris, vt ex secunda figura apparet.

33. 27.

PROBL. 10. PROPOS. 34.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero sub ipsis contentum, Medium.

a 31. deci. a REPERIANTVR duæ Rationales AB, CD, potentia solum commensurabiles, ita vt maior AB, plus possit, quã minor CD, quadrato lineæ longitudine sibi incommensurabilis; secetur q; CD, bifariam in E. Deinde per lemma 2. propos. 17. huius lib. ad AB, applicetur quadrato ex CE, hoc est, quartæ parti quadrati ex CD, æquale rectangulum deficiens figura quadrata, & sit illud, quod sub AF, FB, continetur. Postremo descripto semicirculo AGB, circa AB, erigatur FG, ad AB, perpendicularis, connectanturq; rectæ AG, GB. Quoniam igitur AB, plus potest, quam CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis, applicatumque est ad AB, rectangulum sub AF, FB, æquale quartę parti quadrati ex CD, deficiens figura quadrata; b 19. deci. erit AF, ipsi FB, longitudine incommensurabilis. Est autem vt AF, ad FB, ita per lemma 2. propositionis antecedentis, rectangulum sub AB, AF, id rectangulum sub AB, FB; Rectangulum vero sub AB, AF, quadrato ex AG, & rectangulum sub AB, FB, quadrato ex GB, est æquale, per lem-



ma

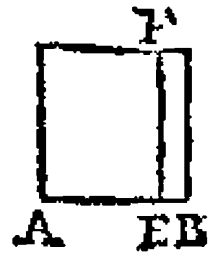
ma 1.eiuſdem antecedentis propoſitionis; [a] quòd angulus AGB, rectus ſit in ſemicirculo AGB. Igitur quoque erit vt AF, ad FB, ita quadratum ex AG, ad quadratum ex GB; ac propterea cum AF, FB, longitudine ſint incõmenſurabiles, [b] erũt quadrata ex AG, GB, incommenſurabilia. [c] Igitur rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles ſunt. Et quia quadratum ex Rationali AB, Rationale eſt, [d] æqualeque quadratis ex AG, GB; erit etiam compoſitum ex quadratis rectarum AG, GB, Rationale. Rurſus, quia ex 1. lemmate propoſitionis præcedentis, rectangulum ſub AF, FB, quod quadrato ex CE, æquale eſt factũ, [e] æquale eſt quadrato ex FG; (propterea quòd angulus AGB, rectus eſt, & FG, ad AB, perpendicularis) erunt quadrata ex FG, CE, æqualia; ac proinde & rectæ FG, CE, æquales. Quare CD, dupla exiſtens ipſius CE, dupla etiam erit ipſius FG. Igitur per lemma 3. antecedentis propoſitionis, rectangulum ſub AB, CD, duplum erit rectanguli ſub AB, FG. (cum FG, dimidia ſit minoris CD,) [f] Sed rectangulum ſub AB, CD, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium eſt. Igitur & rectangulum ſub AB, FG, illi commenſurabile, cum ſit eius dimidium, Mediũ eſt, per coroll. propoſ. 24. huius lib. Atqui rectãgulo ſub AB, FG, per 1. lemma propoſitionis præcedentis, æquale eſt rectangulum ſub AG, GB. Contentũ igitur ſub AG, GB, Medium quoque eſt: Oſtenſum autem eſt compoſitũ ex earum quadratis, Rationale. Inuentæ ergo ſunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommenſurabiles, quæ faciũt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis contentum; Medium. Quod faciendum erat.

[a] 31. tertij
[b] 10. deci.
[c] 4. defin.
[d] 47. primi
[e] 17. ſexti
[f] 22. deci.

SCHOLIVM.

DEMONSTRATVR hoc loco in ſcholio quodam antiquo, ſieri poſſe, vt duo ſpatia Irrationalia componant ſpatium Rationale, hac fere ratione.

EXPONATVR Rationalis linea AB, & duo numeri C, D, quorum C, maior ſit, non habentes proportionem, quam



quam quadratus ad quadratum; fiatq; vt C, ad D, ita quadratum ex AB, ad quadratum ex AE; & tandem descripto quadrato ex AB, educatur EF, ad AB, perpendicularis. Quoniã igitur est vt C, ad D, ita quadratũ ex AB, ad quadratum ex AE: Non habet autẽ C, ad D, proportionẽ quam quadratus ad quadratũ; erunt latera AB, AE, dictorum quadratorũ proportionẽ non habentium, quam quadratus ad quadratum, longitudine incommensurabilia; Ae propterea cum AB, tota longitudine sit incommensurabilis parti AE, erit eadem AB, & reliqua EB, longitudine incommensurabilis, ex coroll. propos. 17. huius lib. [b] Vt autem AB, ad AE, ita est quadratum ex AB, ad AF. Igitur cum AB, AE, incommensurabiles sint longitudine, [c] erunt quadratum ex AB, & rectangulum AE, incommensurabilia. Quare quadrato ex AB, existente Rationali, quod & AB, Rationalis ponatur; erit AF, dicto quadrato incommensurabile, Irrationale. Eodemque argumento ostendemus BF, Irrationale esse. Quia vero AF, BF, componunt quadratum Rationale ex AB; perspicuum est, ex duobus Irrationalibus conflici posse Rationale. Quod est propositum.

* 9. decimi — C, 6. D, 4.

[b] 1. sexti

[c] 10. deci.

AT vero si AF, FB, Rationalia sint, ostendemus & totũ AFB, ex ipsis compositum Rationale esse. Cum enim vtrumque AF, FB, Rationale sit; erunt ipsa inter se commensurabilia. [d] Igitur & totum AFB, ex ipsis compositum vtrique eorum commensurabile erit. Quare AFB, totum commensurabile vtrique Rationali AF, FB, [e] Rationale quoque est. Quod est propositum.

[d] 16. deci.

[e] 3. defin.

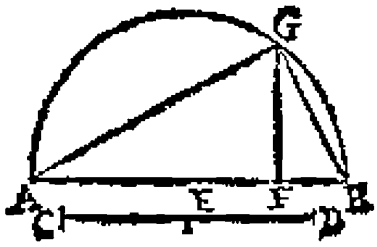
34. 28.

PROBL. 11. PROPOS. 35.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium; Rectangulum vero sub ipsis contentum Rationale.

RE-

1 REPERIANTVR duæ Mediæ AB, CD, potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior AB, plus possit quã minor CD, quadrato lineæ sibi longitudine incommensuabilis; fiantq; reliqua, vt in præcedenti propos. Ostendemus igitur similiter, vt in propos. antecedenti, rectas AG, GB, potentia esse incommensurabiles. Et quia quadratum ex Media AB, [b] æquale existens quadratis rectarũ AG, GB, Medium est; erit quoque cõpositum ex quadratis rectarum AG, GB, Medium. Rursus vt in antecedẽti propositione, ostẽdemus rectangulũ sub AB, CD, duplum esse rectanguli sub AB, FG; atque adeo illud esse huic commensurabile. Quare cum rectangulum sub AB, CD, Rationale sit, ex constructione; erit & rectangulum sub AB, FG, illi commensurabile, Rationale: Sed per 1. lemma propos. 33. huius lib. rectangulo sub AB, FG, æquale est rectangulum sub AG, GB. Igitur & rectangulum sub AG, GB, Rationale est. Ostensum autem est, compositum ex quadratis ipsarum AG, GB, esse Medium. Igitur duę rectæ AG, GB, quæ ostẽsæ sunt potentia incommensurabiles, faciũt compositum ex earum quadratis Medium, & rectangulum sub eisdem comprehensum, Rationale. Inuentæ ergo sunt duæ rectæ AG, GB, potentia incommensurabiles, quæ faciunt compositum quidem ex ipsarum quadratis Medium, Rectangulum vero sub ipsis contentum, Rationale. Quod erat faciendum.



[a] 32. deci.

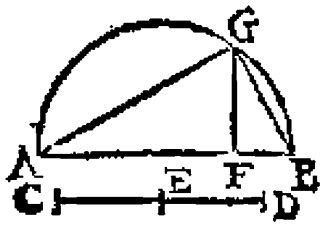
[b] 47. primi

PROBL. 12. PROPOS. 36. 35. 29.

INVENIRE duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant & compositum ex ipsarum qua-

dratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis.

a 33. deci. a REPERIANTVR duæ Mediæ A B, C D, potentia tantum commenſurabiles, quæ Medium contineant, ita vt maior A B, plus poſsit quam minor C D, quadrato lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſiantque reliqua, vt in propoſ. 34. Oſtendemus igitur ſimiliter, rectas A G, G B, potentia incommenſurabiles eſſe. Et quia quadratum ex Media A B, Medium eſt,



b 47. primi b, & quadratis rectarum A G, G B, æquale erit & compoſitum ex quadratis rectarum A G, G B, Medium. Rurſus, vt in 34. demonſtrabimus, rectangulum ſub A B, C D, duplum eſſe rectanguli ſub A B, F G, atque adeo illud eſſe huic commenſurabile. Quare cum ex conſtructione, rectangulum ſub A B, C D, Medium ſit: erit quoque rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, quod illi per 1. lemma propoſ. 33 huius lib. æquale eſt, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quoniam vero A B, longitudine incommenſurabilis ponitur ipſi C D; Eſt autem eidem C D, ipſa C E, longitudine commenſurabilis, quod illa huius ſit dupla; c erũt A B, C E, longitudine incommenſurabiles: Sed vt A B, ad C E, ita eſt per lemma 3. propoſ. 19. huius lib. quadratum ex A B, ad rectangulum ſub A B, C E, hoc eſt, ad rectangulum ſub A B, F G, hoc eſt, ſub A G, G B, (ſunt enim rectangula ſub A B, F G, & ſub A G, G B, per 1. lemma propoſ. 33. huius lib. æqualia,) d Igitur quadratum ex A B, incommenſurabile eſt rectangulo ſub A G, G B. Inuentæ ſunt ergo duæ rectæ lineæ A G, G B, potentia incommenſurabiles, quæ faciunt & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis contentum Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis. Quod faciendum erat.

c 13. deci.

d 10. deci.

SCHO-

SCHOLIVM.

EX hoc vero problemate facile illud absoluemus, quod ad propos. 24. huius lib. nos demonstraturos recepimus, nimirum.

INVENIRE duas Medias longitudine, & potentia incommensurabiles.

QVONIAM ostensum est tam compositũ ex quadratis rectarum AG, GB, quàm rectangulum sub ipsis, esse Medium, & hoc illi composito incommensurabile; erunt quoque lineæ potentes illud compositum Medium, & hoc rectangulũ Medium, Mediæ, incommensurabiles tam longitudine, quam potentia. Si enim potentia essent commensurabiles, essent & earum quadrata, hoc est, compositum ex quadratis rectarum AG, GB, & rectangulum sub AG, GB, commensurabilia. quod non ponitur. Quocirca si sumatur AB, potens compositũ ex quadratis rectarum AG, GB, & alia recta potens rectangulum sub AG, GB, id est, media proportionalis inter AG, GB; inuentæ erunt duæ Mediæ & longitudine, & potentia incommensurabiles. Quod est propositum.

PRINCIPIVM SENARIORVM per compositionem.

THEOR. 25. PROPOS. 37. 36. 30.

SI duæ Rationales potentia tantum commensurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus.

COMPONANTVR duę Rationales AB, BC, potentia solum commensurabiles, inuentæ per 2. lem-

ma propoſ.21.huius lib. Dico totam A C, Irrationalem eſſe. Quoniã.n. AB, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi BC; & vt AB, ad B C, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad quadratum ex B C, per lemma propoſ.31.huius lib., erit rectangulum ſub AB, BC, quadrato ex B C, incommenſurabile. Sed rectangulo ſub A B, B C, commenſurabile eſt eius duplum, nempe quod bis ſub A B, B C, continetur; & quadrato ex B C, commenſurabile eſt quadratum rectæ AB; (omnia enim ſunt Rationalia) atque adeo & compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, eidem quadrato ex B C, commenſurabile eſt. Igitur per ea, quę in ſcholio propoſ.14. huius lib. oſtendimus, & quod bis ſub AB, BC, continetur, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Quamobrem & compoſitũ ex eo, quod bis ſub AB, BC, & ex compoſito quadratorum rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum ex tota AC. (Eſt enim hoc quadratum æquale quadratis rectarum A B, B C, vna cũ rectangulo ſub AB, BC, bis) compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile erit: Eſt autem cõpoſitum ex quadratis rectarũ AB, BC, Rationale, quod commenſurabile ſit oſtenſum quadrato Rationali ex BC, Rõnali. Igitur quadratũ ex A C, quadrato Rõnali ex BC, incommenſurabile, Irrationale eſt; atq; adeo & recta ipſa AC, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus, ſeu vt alij loquuntur, Binomiũ, quia ex duobus nominibus, nempe ex duabus Rationalibus lineis AB, BC, potentia ſolum commenſurabilibus componitur. Si duæ igitur Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur, tota Irrationalis erit, &c. Quod oſtendendum erat.



a 10. decī.
b 16. decī.
c 4. ſecũdi
d 17. decī.
e 10. deſin.

SCHOLIVM.

ITAQVE ex duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus procreantur duæ lineæ Irrationales. Nã recta quæ inter eas eſt medio loco proportionalis, f Irrationalis eſt, quia Mediæ vocatur. At vero compoſitæ ex ipſis, g Irrationalis eſt, quia ex binis nominibus dicitur.

f 22. decī.
g 37. decī.

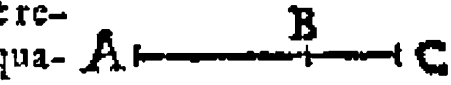
THEOR.

THEOR. 26. PROPOS. 38.

37. 31.

SI duæ Mediæ potentia tantum cõmenſurabiles componantur, quæ Rationale contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima.

COMPONANTVR duæ Mediæ [a] ſuperius inuentę AB, BC, potentia tantum commenſurabiles, quæ Rationale contineant. Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Quia.n. AB, eſt ad BC, vt rectangulũ ſub AB, BC, ad quadratum ex BC, vt in lemmate propoſ. 31. huius lib. eſt oſtenſum; ſunt autem AB, BC, longitudine incommenſurabiles; [b] erunt rectangulum ſub AB, BC, & quadratum ex BC, incommenſurabilia: Sed rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt, quod ſub AB, BC, bis; & quadrato ex BC, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC. (Nam cum AB, BC, potentia ſint commenſurabiles, erunt ipſarum quadrata commenſurabilia, [c] atque adeo & compoſitum ex ipſarum quadratis quadrato ex BC, commenſurabile erit.) Igitur & rectangulum ſub AB, BC, bis, & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabilia inter ſe ſunt, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. ſunt demonſtrata. Ergo compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, [d] quod huic compoſito æquale eſt, [e] incommenſurabile quoque eſt rectangulo ſub AB, BC, bis: Eſt autem eidem rectangulo bis ſub AB, BC, cõmenſurabile rectangulum ſemel ſub AB, BC, cũ hoc ſit illius dimidium. [f] Igitur quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo ſub AB, BC: Ponitur autẽ rectangulum ſub AB, BC, Rationale. [g] Irrationale ergo eſt quadratum



[a] 28. deci.
[b] 10. deci.
[c] 16. deci.
[d] 4. ſecundi
[e] 27. deci.
[f] 13. deci.
[g] 10. deſin.

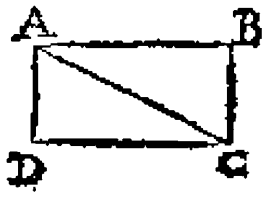
dratum ex A C, [a] & ob id recta quoque A C, Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima, vel vt alij loquuntur, Bimedialis prima. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 11. defin.

LEMMA.

QVOD sub linea Rationali, & Irrationali continetur rectangulum, Irrationale est.

CONTINEATVR rectangulum ABCD, sub Rationali A B, & Irrationali B C. Dico ipsum Irrationale esse. Si enim dicatur esse Rationale, [b] *faciet ipsum ad Rationalem A B, applicatum latitudinem B C, Rationalem. Quod est absurdum. ponitur enim B C, Irrationalis. Non ergo A C, Rationale est. Igitur Irrationale. Quod est propositum.*



[b] 21. deci.

38. 32.

THEOR. 27. PROPOS. 39.

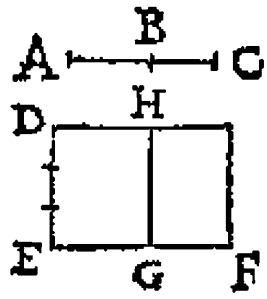
SI duæ Mediæ potentia tantum commensurabiles componantur, quæ Medium contineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs secũda.

COMPONANTVR duæ Mediæ, [c] superius inuentę A B, B C, potentia tantum commensurabiles, quæ Medium contineãt. Dico totam A C, Irrationalem esse. Exponatur enim Rationalis D E, [d] ad quam applicetur rectangulũ D F, æquale quadrato A C; & cõposito ex quadratis rectarum A B, B C, æquale alterum ad eãdem D E, applicetur D G. Et quia quadratum ex A C, hoc est, rectangu-

[c] 29. deci.

[d] 45. primi

ctangulũ DF, [a] æquale eſt duobus quadratis ex AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC; erit reliquum HF, æquale reliquo rectangulo, quod bis ſub AB, BC, continetur. Quoniã vero, ex hypotheſi, rectangulum ſub AB, BC, Medium eſt; erit & rectangulum bis ſub AB, BC, ei commenſurabile, hoc eſt, HF, Mediũ, ex coroll. propoſ 24. huius lib. Rurſus quia quadrata Mediarum AB, BC, potentia commenſurabilium, commenſurabilia ſunt; [b] erit & compoſitum ex ipſis, nimirum rectangulum DG, vtriuis ipſorum commenſurabile: Sed vtrumque quadratorũ ex Medijs AB, BC, Medium eſt Igitur & DG, ex coroll. propoſ. 24. huius lib Medium erit. Quia igitur Media DG, HF, applicantur ad Rationalem DE; ([c] eſt enim GH, Rationali DE, æqualis, [d] erunt eorũ latitudines EG. GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommẽſurabiles. Rurſus quia AB, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt; & eſt vt AB, ad BC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, BC, ex lemmate 3 propoſ. 19. huius lib. erit quadratum ex AB, incommenſurabile rectangulo ſub AB, BC, vt in ſcholio propoſ. 10. huius lib. oſtenſum eſt: Atqui quadrato ex AB, oſtenſum eſt commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC; & rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt, quod continetur bis ſub AB, BC, cum hoc illius ſit duplum. Igitur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib diximus, erit & compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, hoc eſt, rectangulũ DG, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, rectangulo HF. [e] Cum ergo ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; [f] erit EG, ipſi GF, longitudine incommenſurabilis: oſtenſum autem iam fuit EG, GF, eſſe Rationales. Rationales igitur ſunt EG, GF, potentia tantum commenſurabiles, [g] ac propterea, & tota EF, compoſita, Irrationalis eſt. Quare, per lemma antecedens, DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, Irrationale eſt; Ac propterea & quadratum ex AC, ipſi DF, æquale, Irrationale eſt. Quare & recta AC, Irrationalis eſt. Vocetur au-



[a] 4. ſecundi
[b] 16. deci.
[c] 34. primi
[d] 23. deci.
[e] 1. ſexti.
[f] 10. deci.
[g] 37. deci.

tem ex binis Medijs ſecunda, ſeu vt alijs placet, Bimediale ſecundum. Si duæ ergo Mediæ potentia tantum commenſurabiles, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

VOCAVIT Euclides in præcedenti propoſitione lineã Irrationalem AC, quæ componitur ex duabus Medijs potentia tantum commenſurabilibus, quæ Rationale contineant, ex binis Medijs primam: Hic vero lineã Irrationalẽ AC, quę componitur ex duabus Medijs potentia tantum commenſurabilibus, quæ Medium contineant, ex binis Medijs ſecundam, quoniam Rationale & natura, & cognitione prius eſt Medio, quod Irrationale eſt, ex propoſ. 22. huius lib.

LEMMA.

SI recta linea non bifariam ſecetur, erit cõpoſitum ex quadratis partium maius, quàm rectangulum ſub partibus bis comprehenſum, quadrato eius lineę, qua maior pars minorem ſuperat.

SECETVR recta AD, in B, non bifariam, ſitque maior pars AB; in qua ſumatur BC, minori parti BD, æqualis, vt ſit AC, exceſſus, quo AB, ſuperat BD, hoc eſt, BC, ipſi BD, æqualem. Dico quadrata rectarum AB. BD, ſimul maiora eſſe rectãgulo bis ſub AB BD, quadrato rectæ AC. Quoniã. n. quadrata ex AB, BC, * *æqualia ſunt rectangulo bis ſub AB, BC. vna cum quadrato ex AC; eſtq; BC, ipſi BD, æqualis: erunt quoq; quadrata ex AB, BD, æqualia rectangulo bis ſub AB, BD, vna cũ quadrato*



* 7. ſecundi

ex

ex AC. Quare quadrata ex AB, BD, maiora ſunt, quã rectangulum bis ſub AB, BD, quadrato rectæ AC. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

EX hoc ſequitur, quadrata partium inæqualium ſimpliciter eſſe maiora rectangulo, quod bis ſub partibus inæqualibus continetur.

THEOR. 28. PROPOS. 40.

39. 33.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur; quę faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Maior.

COMPONANTVR duæ rectæ[a] ſuperius inuentæ AB, BC, potẽtia incommenſurabiles, facientes quidem compoſitũ ex ipſarum quadratis Rationale; rectangulũ vero ſub ipſis contentũ, Mediũ Dico totã AC, eſſe Irrationalẽ, Quoniã. n rectangulũ ſub AB, BC, Mediũ ponitur, erit & rectãgulũ bis ſub AB, BC, illi cõmenſurabile, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24 huius lib. atq; adeo Irrationale. Ponitur autẽ compoſitũ ex quadratis rectarũ AB, BC, Rõnale. [b] Incõmenſurabile ergo eſt rectangulũ bis ſub AB, BC, compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. [c] Igitur & rectangulum bis ſub AB, BC, vna cum quadratis ex AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AB, BC. Cum ergo hoc compoſitum ponatur Rationale; [d] erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; [e] Ac propterea recta AC, Irrationalis eſt Vocetur autẽ Maior, quia [f] cum poſſit duo quadrata ex AB, BC,

[a] 34. decì.
[b] 10. defin.
[c] 17. decì.
[d] 10 defin.
[e] 11. defin.
[f] 4. ſecundi



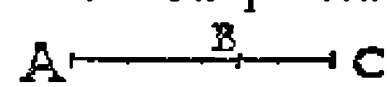
BC, & rectangulum bis ſub AB, BC; compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, per lemma antecedens, maius eſt rectangulo bis ſub AB, BC. Quare cum compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, Rationale ſit, rectangulum vero bis ſub AB, BC, Medium; recte vocabitur AC, Maior, ſiquidem a Rationali, quod maius eſt, nomen conuenit imponere. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, &c. Quod erat oſtendendum.

40. 34.

THEOR. 29. PROPOS. 41.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens.

a 35. deci. COMPONANTVR duæ rectæ, ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum quidem ex quadratis ipſarum, Medium, rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. Dico totam



AC, Irrationalem eſſe. Quoniam.n. compoſitũ ex quadratis rectarum AB, BC, Medium eſt; quod uero continetur bis ſub AB, BC, Rationale, quod eius dimidium, nempe quod ſub AB, BC, ſemel cõtinetur, Rationale ponatur; b erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, BC. c Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, una cum rectãgulo bis ſub AB, BC, hoc eſt, quadratum ex AC, incommenſurabile eſt rectangulo

b 10 defin.

c 17. deci.

bis

bis ſub AB, BC. Cum ergo rectangulum bis ſub AB, BC. vt diximus, ſit Rationale; [a] erit quadratum ex AC, illi incommenſurabile, Irrationale; [b] Ac proinde & recta AC, Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Medium potens, quia poteſt Medium, nempe compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & Rationale, rectangulum ſcilicet bis contentum ſub AB, BC. Conuenit autem Rationale Irrationali anteponi. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles, &c. Quod demonſtrandum erat.

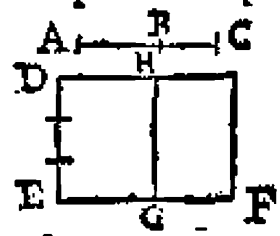
[a] 10. defin.
[b] 11. defin.

THEOR. 30. PROPOS. 42.

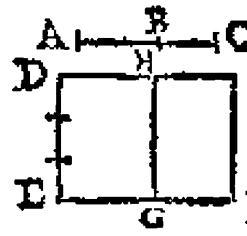
41. 35.

SI duæ rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciãt & compoſitũ ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum: tota recta linea Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens.

COMPONANTVR duæ rectæ [c] ſuperius inuentæ AB, BC, potentia incommenſurabiles, facientes compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub eiſdem Medium, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis ipſarum Dico totam AC, Irrationalem eſſe. Exponatur enim Rationalis DE, [d] ad quam applicetur rectãgulum DF, æquale quadrato ex AC; Et compoſito ex quadratis rectarum AB, BC, alterum æquale applicetur DG. Et quia quadratum ex AC, hoc eſt, rectangulum DF, [e] æquale eſt cõpoſito ex quadratis rectarũ AB, BC, vna cum rectangulo bis ſub AB, BC, erit reliquum HF, æquale rectangulo



[c] 36. decl.
[d] 45. primi
[e] 4. ſecũdi



gulo bis ſub AB, BC Quoniam vero tam compoſitum ex quadratis rectarum A B, B C, hoc eſt, rectangulum DG, quam rectangulum ſub AB, BC, atque adeo ex coroll. 24. huius libri, quod bis ſub A B, B C, nempe ipſum H F, (cum illi ſit commenſurabile) Medium ponitur, a facient DG, HF, ad Rationalem DE, applicata latitudines EG, GF, Rationales ipſi DE, longitudine incommenſurabiles. Rurſus quia compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, id eſt, rectangulum DG, incommenſurabile ponitur rectangulo ſub AB, BC: Eidem autem rectangulo ſub AB, BC, commenſurabile eſt ipſius duplum, nempe quod bis continetur ſub AB, BC, hoc eſt, ipſum HF; b erunt & DG, HF, incōmenſurabilia. Quare c cum ſit vt DG, ad HF, ita EG, ad GF; d erunt EG, GF, longitudine incommenſurabiles: Atqui EG, GF, oſtenſæ ſunt Rationales. Igitur EG, GF, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles; e Ac propterea tota EF, ex ipſis compoſita Irrationalis eſt Quare DF, contentum ſub Rationali DE, & Irrationali EF, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Irrationale eſt. Igitur & quadratum ex AC, illi æquale, Irrationale eſt; f ideoque & recta ipſa AC, Irrationalis. Vocetur autem bina Media potens, nimirum & compoſitum ex quadratis rectarum AB, BC, & rectangulum bis ſub AB, BC. Si duæ ergo rectæ lineæ potentia incommenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitū ex ipſarum quadratis Medium, &c. Quod erat demonſtrandum.

a 23. deci.

b 13. deci.

c 1. ſexti.

d 10. deci.

e 37. deci.

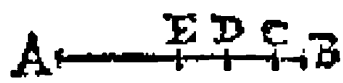
f 11. defin.

LEMMA

SI recta linea in partes inæquales ſecetur, & rurſus in alias partes inæquales; erunt quadrata partium magis inæqualium ſimul maiora quadratis partium minus inæqualiū ſimul.

SECETVR recta AB, inæqualiter in C, & rurſus

ſus inæqualiter in D, ſintque priores partes AC, CB, magis inæquales, quam poſteriores AD, DB. Dico quadrata ex AC, CB, ſimul maiora eſſe quadratis ex AD, DB, ſimul. Diuiſa enim AB, bifariam in E, cadet punctum D, vel inter E, C, vel inter A, E. Cadat primum inter E, C. Quoniam igitur rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, [a] æquale eſt quadrato ex EB: Item rectangulum ſub AD, DB, vna cum quadrato ex ED, æquale eſt eidem quadrato ex EB; erit rectangulum ſub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo ſub AD, DE, vna cum quadrato ex ED. Ablatis igitur quadratis inæqualibus rectarum inæqualium EC, ED, cum quadratũ ex EC, maius ſit quadrato ex ED; erit reliquũ rectangulũ ſub AC, CB, minus reliquo rectangulo ſub AD, DB; ac propterea & rectangulum bis ſub AC, CB, minus erit rectangulo bis ſub AD, DB. Quoniã vero quadratum ex AB [b] æquale eſt tã rectangulo bis ſub AC, CB, vna cũ quadratis ex AC, CB, quã rectãgulo bis ſub AD, DB, vna cum quadratis ex AD, DB; erit rectangulum bis ſub AC, CB, vna cum quadratis ex AC, CB, æquale rectãgulo bis ſub AD, DE, vna cum quadratis ex AD, DB. Quare cum rectangulum bis ſub AC, CB, oſtenſum ſit minus rectangulo bis ſub AD, DB, erunt reliqua quadrata ex AC, CB, maiora reliquis quadratis ex AD, DB. Quod eſt propoſitum.



[a] 5. ſecũdi

SED cadat iã D, inter A, E. Quoniã igitur partes AC, CB, magis inæquales ponuntur, quã partes AD, DB; erit AD, (quæ minor eſt poſteriorũ) maior quam CB; (quæ priorũ minor eſt) ac proinde cũ AE, EB, æqua-

[b] 4. ſecũdi

quales sint, erit reliqua EC, maior quam reliqua DE.



Itaque quia rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale est quadrato ex EB: Item rectangulum sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE, æquale est quadrato ex AE, hoc est, eidem quadrato ex EB; erit rectangulum sub AC, CB, vna cum quadrato ex EC, æquale rectangulo sub AD, DB, vna cum quadrato ex DE. Igitur vt prius, demonstrabimus quadrata ex AC, CB, maiora esse quadratis ex AD, DB. Quod est propositum.

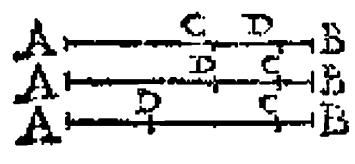
[a] 5 secundi.

42.
36.

THEOR. 31. PROPOS. 43.

QVAE ex binis nominibus, ad vnũ duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis nominibus AB, diuisa ad punctum C, in sua nomina, ita vt AC, CB, sint Rationales potentia tantum commensurabiles, vt vult propos. 37. huius libri.



Dico AB, ad aliud punctũ diuidi nõ posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam Rationales lineæ potentia tantum commensurabiles. Si enim fieri potest, diuidatur iterũ in sua nomina ad D. Constat ergo AB, in C, nõ diuidi bifariã. Nam si bifariã diuideretur, essent AC, CB, lõgitudine cõmensurabiles. quod est absurdum. ponuntur enim Rationales potentia tantũ cõmensurabiles. Eodẽ modo neque ad D, bifariã secabitur AB, cum & AD, DB, Rationales sint potentia tantũ cõmensurabiles. Secatur ergo AB, tam ad C, quã ad D, inæqualiter; ac propterea partes AC, CB, vel minus inæquales sunt, quã partes AD, DB, vel magis inæquales; Ac propterea per lemma antecedẽs, quadrata ex AC, CB, vel minora sũt quadratis ex AD, DB, vel maiora, (Ne-

ra,(Neque enim partes A D, D B, vbicunq; punctum D, extiterit, partibus A C, C B, æquales erunt, vtraque vtrique, nempe maior maiori, & minor minori. Nam hac ratione secaretur A B, secunda diuisione in eadem nomina, in quæ secta est diuisione prima, quod non ponitur.) Quia vero si ab æqualibus inæqualia demantur, residuorum excessus excessui ablatorum æqualis est, vt in pronũciatio 16 lib. 1. docuimus: Sunt autem quadrata ex A C, C B, vna cum rectangulo bis sub A C, C B, æqualia quadratis ex A D, D B, vna cum rectangulo bis sub A D, D B, [a] quod tam illa, quam hæc æqualia sint quadrato ex A B; fit, vt qui excessus fuerit ablati compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & ablati compositi ex quadratis rectarum A D, D B, idem sit reliqui rectanguli bis sub A C, C B, & reliqui rectanguli bis sub A D, D B. Sed excessus compositi ex quadratis rectarum A B, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium Rationale est. (cum enim rectæ A C, C B, Rationales sint, & ob id earum quadrata, Rationalia; erit & compositum ex earum quadratis, Rationale, ex ijs, quæ in scholio propositionis 34. huius libri ostendimus: eademque ratione erit & compositum ex quadratis rectarum A D, D B, Rationale. Quare cũ Rationale superet Rationale Rationali, vt in scholio propos. 27. huius libri demonstrauimus; manifestum est, excessum compositi ex quadratis rectarum A C, C B, & compositi ex quadratis rectarum A D, D B, spatium esse Rationale.) Igitur & excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale est. [b] Quoniam vero rectangulum sub A C, C B, Medium est, erit & quod bis sub A C, C B, illi cõmensurabile, ex coroll propos. 24. huius lib. Medium; Atque eodem modo rectangulum bis sub A D, D B, Medium erit. [c] Quare cum Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus rectanguli bis sub A C, C B, & rectanguli bis sub A D, D B, spatium Rationale. Ostẽdimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Nõ igitur A B, ex binis nominibus ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quare ad vnam duntaxat pun-

[a] 4 secundi

[b] 22. decimi.

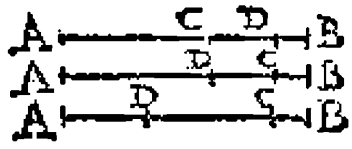
[c] 27. decimi.

punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

43. 37. ## THEOR. 32. PROPOS. 44.

QVAE ex binis Medijs prima, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs prima A B, diuiſa ad punctum C, in ſua nomina, ita vt AC, CB, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, quæ Rationale contineant, vt vult propoſito 38. huius libri. Dico A B, ad aliud punctũ diuidi non poſſe in alia nomina, quæ ſcilicet ſint etiam Mediæ lineæ potentia tantum commenſurabiles, continentesque Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in



alia nomina AD, DB. Igitur vbicũque punctum D, exiſtat, ſimiliter probabimus, vt in præcedenti propoſitione, exceſſum rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, eundem eſſe, qui eſt compoſiti ex quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum A D, D B: Sed exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. (Cum enim AC, CB, ponantur continere Rationale, erit & quod bis ſub AC, CB, ei, quod continetur ſemel ſub AC, C B, commenſurabile, Rationale. Eodemque modo Rationale erit, quod bis ſub AD, DB. Quare cum Rationale ſuperet Rationale Rationali, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus; perſpicuum eſt, exceſſum rectanguli bis ſub A C, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſſe Rationale.) Igitur & exceſſus compoſiti ex quadratis rectarum AC, CD, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatium Rationale eſt. Quia vero rectæ AC, CB, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles, erunt earum quadrata Media quoque, & commenſurabilia. * Quare & compoſitum

* 16. decimi.

positum ex ipsis vtrique ipsorum commensurabile erit. Igitur cum vtrumque sit Medium, erit & compositum ex ipsis, per coroll. propos. 24. huius libri, Medium. Eodem modo Medium ostendemus compositum ex quadratis rectarum AD, DB. Cum ergo Medium non superet Medium Rationali; non erit excessus compositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarū AD, DB, spatium Rationale. Ostendimus autem & Rationale esse. Quod est absurdum. Non igitur AB, ex binis Medijs prima ad aliud punctum, quam ad C, in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod demonstrandum erat.

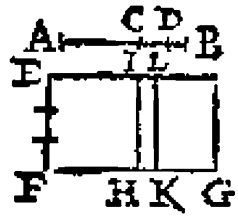
[a] 27. deci.

THEOR. 33. PROPOS. 45.

44. 38.

QVAE ex binis Medijs secunda, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT ex binis Medijs secunda AB, diuisa ad punctū C, in sua nomina, ita vt AC, CB, Medię sint potētia tantum commensurabiles, quæ Medium contineant, vt vult propos. 39. huius libri. Dico AB, ad aliud punctum diuidi non posse in alia nomina, quæ scilicet sint etiam lineæ Mediæ potentia tantum commensurabiles, continentesque Medium. Diuidatur enim, si potest fieri, in alia nomina AD, DB. Igitur vbicunque punctum D, existat,

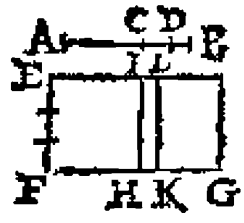


similiter ostendemus, vt in propositione 43. quadrata ex AC, CB, vel maiora esse quadratis ex AD, DB, vel minora. Exponatur Rationalis EF, [b] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale quadrato ex AB. Item EH, æquale quadratis ex AC, CB. Erit igitur reliquum IG, æquale ei, quod continetur bis sub AC, CB; quandoquidem quadratum ex AB, [c] æquale est quadratis ex AC, CB, &

[b] 45. pri.

[c] 4. secundi

rectangulo bis ſub AC,CB. Eodem modo ſi ad EF, applicetur EK, quadratis ex AD, DB, æquale; erit reliquum LG, æquale rectangulo bis ſub AD, DB, comprehenſo.



Et quia quadrata ex AC, CB, inæqualia ſunt quadratis ex AD, DB; erũt quoque rectangula EH, EK, quæ illis æqualia ſunt, inæqualia; ac propterea & rectæ FH, FK, inæquales erunt. Rurſus quia quadrata ex AC, CB, maiora ſunt, per lemma propoſ. 39. huius libri, rectangulo bis ſub AC, CB; erit & EH, maius quam IG; ac propterea EH, maius quam dimidium ipſius EG, ideoque & recta FH, maior quam dimidiũ ipſius FG. Eadem ratione oſtẽdemus FK, maiorẽ eſſe dimidio ipſius FG. Inæquales ergo ſunt partes FH, HG, partibus FK, KG, ſingulæ ſingulis. Quoniã vero AC, CB, Mediæ ſunt, & potẽtia commẽſurabiles; erũt & earũ quadrata Media, & commenſurabilia. [a] Igitur & compoſitum ex ipſis vtriquè ipſorum commenſurabile erit. Cum ergo vtrũque ipſorũ ſit Medium, erit quoque compoſitũ ex ipſis, hoc eſt, EH, per coroll. propoſ. 24. huius libri, Medium. Eademque ratione Medium erit EK. [b] Quare EH, EK, ad Rationalem EF, applicata faciunt latitudines FH, FK, Rationales ipſi EF, longitudine incommenſurabiles. Eodem modo cũ rectangulum ſub AC, CB, ponatur Mediũ, erit & quod bis ſub AC, CB, hoc eſt, IG, illi commẽſurabile, Mediũ, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Quare cum applicetur ad Rationalem HI, [c] erit HG, Rationalis ipſi HI, longitudine incommenſurabilis. Non aliter oſtendemus LG, Medium eſſe, & KG, Rationalem ipſi KL, lõgitudine incommenſurabilem. Rurſus quia AC, CB, longitudine ſunt incommenſurabiles; & eſt vt AC, ad CB, ita per lẽma 3. propoſ. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, [d] erit quadratum ex AC, rectangulo ſub AC, CB, incommenſurabile. Sed quadrato ex AC, cõmenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB: (cum enim AC, CB, potentia ſint commẽſurabiles, atq; adeo ipſarum quadrata cõmenſurabilia; [e] erit & compoſitum ex ipſis vtrilibet ipſorum, nimirum quadrato

a 16. deci.
b 23. deci.
c 23. deci.
d 10. deci.
e 16. deci.

quadrato ex AC, commensurabile.) Rectangulo vero sub AC, CB, commensurabile est, quod bis sub AC, CB. Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est, rectangulum EH, incommensurabile est, per scholiũ propos. 14. huius libri, rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi IG. Quocirca [a] cũ sit, vt EH, ad IG, ita FH, ad HG, erunt FH, HG, longitudine incommensurabiles. Ostensæ sunt autem & Rationales. Rationales ergo sunt FH, HG, potentia solum commensurabiles. Igitur FG, tota Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur, diuisaque in nomina ad punctum H. Eodem modo ostendemus & FG, ex binis nominibus diuisam esse in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non potest, [d] vt demonstratum est in præcedentibus. Igitur AB, ex binis Medijs secunda non diuiditur in sua nomina ad aliud punctũ, quam ad C. Quare ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat ostendendum.

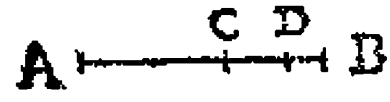
[a] 1. sexti
[b] 10. deci.
[c] 37. deci.
[d] 43. deci.

THEOR. 34. PROPOS. 46.

45. 39.

MAIOR ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT Maior AB, diuisa in sua nomina ad punctum C, ita vt AC, CB, potentia sint incommensurabiles, facientes quidem compositum ex ipsarum quadratis Rationale; rectangulum vero sub ipsis Mediũ, vt vult propos. 40. huius lib. Dico AB, non posse diuidi ad aliud punctũ in alia nomina, quæ scilicet lineæ incõmensurabiles quoq; sint potẽtia, facientes compositum ex ipsarũ quadratis Rõnale, & rectangulũ sub ipsis Mediũ. Si enim fieri potest, diuidatur in alia nomina ad D. Vbicunq; ergo punctum D, extiterit, demõstrabimus similiter, vt in propositione 43. excessum cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB, eum esse, qui rectanguli bis sub AC, CB, & rectanguli bis sub AD, DB. Sed excessus compositi ex



quadratis rectarum AC, CB, & compoſiti ex quadratis rectarum AD, DB, ſpatiũ eſt Rationale: (quia cũ utrũque compoſitum ex hypotheſi ſit Rationale, erit quoq; eorum exceſſus ſpatium Rationale, vt in ſcholio propoſ. 27. huius libri oſtendimus.) Igitur & exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, & rectanguli bis ſub AD, DB, ſpatium eſt Rationale. Quoniam vero rectangulum ſub AC, CB, ponitur Medium, erit & rectangulum bis ſub AC, CB, Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius libri, cum ei ſit commenſurabile. Atque eodem modo Medium erit rectangulum bis ſub AD, DB. 1 Igitur cum Medium non ſuperet Medium Rationali; non erit exceſſus rectanguli bis ſub AC, CB, ſpatium Rationale: Oſtendimus autem & Rationale eſſe. Quod eſt abſurdum. Non igitur Maior AB, ad aliud punctum, quam ad C, in ſua nomina diuiditur. Quapropter ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod erat demonſtrandum.

1 27. decimi.

46. 40.

THEOR. 35. PROPOS. 47.

RATIONALE ac Medium potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea Rationale ac Medium potens AB, diuiſa in ſua nomina in puncto C, ita vt AC, CB, incommenſurabiles ſint potentia, facientes compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; rectangulum uero ſub ipſis Rationale, vt vult propoſ. 41. huius libri. Dico AB, non poſſe diuidi in alio puncto in alia nomina, quæ nimirum ſint lineæ quoque incommenſurabiles potentia, facientes cõpoſitum quidem ex ipſarum quadratis Mediũ, & rectangulũ ſub ipſis Rationale. Diuidatur enim, ſi fieri poteſt, in alia nomina ad D. Vbicunque ergo punctum D, exiſtat, oſtendemus non aliter, ac in propoſ. 43. huius libri, exceſſum



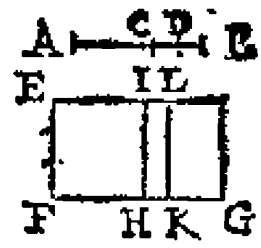
excessum rectanguli bis sub AC,CB, & rectãguli bis sub AD,DB,eundẽ esse, qui est cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD, DB.Sed excessus rectanguli bis sub AC,CB,& rectanguli bis sub AD,DB,spatium Rationale est;quod ostendemus,vt in propos.44.Igitur & excessus cõpositi ex quadratis rectarum AC, CB, & compositi ex quadratis rectarum AD,DB,spatium est Rationale.Quia vero composita ex his quadratis ponuntur esse Media: a Medium autem non superat Medium Rationali; non erit eorum excessus spatiũ Rationale.Sed & Rationale ostendimus. Quod est absurdum.Non igitur AB,Rationale ac Medium potens,ad aliud punctum,quam ad C,in sua nomina diuiditur. Quam ob rem ad unum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod ostendendum erat.

a 27. decimi.

THEOR. 36. PROPOS. 48. 47. 41.

BINA Media potens, ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina.

SIT linea potens bina Media AB, diuisa in sua nomina ad C,ita vt AC,CB, potentia incommensurabiles sint,facientes & compositum ex ipsarum quadratis Medium,& rectangulum sub ipsis Medium,incommensurabileque composito ex earum quadratis, vt vult propos. 42.huius libri.Dico AB,diuidi non posse ad aliud punctum in alia nomina, quæ videlicet sint etiã lineæ potentia incõmensurabiles, facientes & compositum ex ipsarũ quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex earum quadratis. Nam si potest fieri, diuidatur in alia nomina ad punctum D,ubicunque hoc punctũ D,existat. Constructio autẽ eadem fiat, quæ in propos.45.ostẽdemusq; vt ibi, partes FH, HG, partibus FK, KG, inæquales esse singulas singulis. Quoniam igitur compositum ex



quadratis rectarum AC, CB, Medium ponitur, erit & EH, illi compoſito æquale, Medium. Item quia rectangulum ſub AC, CB, ponitur etiam Medium, erit & IG, eius duplo æquale, Medium, ex coroll propoſ 24 huius lib. quia illi commenſurabile eſt. Igitur Media EH, IG, applicata ad Rationalem EF, (eſt enim IH, ipſi EF, æqualis) facium latitudines FH, HG, Rationales, longitudine ipſi EF, incomẽſurabiles. Eadem quoque ratione probabimus & rectas lineas FK, KG, Rationales eſſe, longitudine incommenſurabiles ipſi EF. Quia vero compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, deſcriptis, hoc eſt, rectangulum EH, incommenſurabile eſt, ex hypotheſi, rectangulo bis ſub AC, CB, nempe rectangulo IG, [b] eſtq; vt EH, ad IG, ita FH, ad HG; erunt FH, HG, longitudine incommenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 10. huius libri oſtẽdimus Sed oſtẽſæ ſunt Rationales Rationales ergo ſunt FH, HG, potẽtia ſolũ cõmenſurabiles. Igitur tota FG Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur, diuiſaque in nomina ad punctum H. Non ſecus demonſtrabimus & FG, ex binis nominibus diuiſam eſſe in alia nomina ad aliud punctum K. Quod fieri non poſſe, [c] iam ante demonſtratum eſt. Igitur AB, bina Media potens non diuiditur ad aliud punctum quam ad C, in ſua nomina. Quocirca ad vnum duntaxat punctum diuiditur in nomina. Quod oſtendendum erat.

[a] 23. deci.

[b] 1. ſexti

[c] 43. deci.

DEFINITIONES SECVNDAE.

EXPOSITA Rationali, & quæ ex binis nominibus, diuiſa in nomina, cuius maius nomen plus poſſit quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis,

I.

SI quidem maius nomen expoſitæ Ra-

Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur tota ex binis nominibus prima.

II.

SI vero minus nomen expoſitæ Rationali longitudine ſit commenſurabile Vocetur ex binis nominibus ſecũda.

III.

QVOD ſi neutrum ipſorum nominum ſit longitudine commenſurabile expoſitæ Rationali; Vocetur ex binis nominibus tertia.

RVRSVS ſi maius nomen plus poſſit, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem maius nomen expoſitæ Rationali commenſurabile ſit longitudine; Vocetur ex binis nominibus quarta.

V.

SI vero minus nomẽ; Vocetur quinta.

VI.

QVOD ſi neutrum ipſorum nomi-num; Vocetur ſexta.

SCHOLIVM.

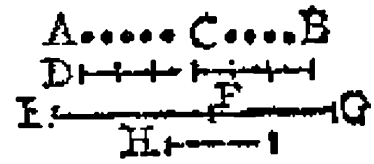
NVMERVS dictarum ſex linearũ, quæ ex binis nominibus appellantur, colligitur hac ratione. Quoniã nominã lineæ, quæ ex binis nõibus dicitur, ſunt lineæ Rõnales potentia tantũ commenſurabiles, non poterit vtrumq; nomen expoſitæ Rationali commenſurabile eſſe longitudine; (alias enim nomina ipſa eſſent quoq; lineæ longitudine inter ſe cõmenſurabiles, vt in ſcholio propoſ. 12. huius libri docuimus. quod nõ ponitur.) Sed vel vnum tantum, nempe maius, aut minus; vel neutrum: Atque ita tria genera conſurgunt linearum, quæ ex binis nominibus vocantur. Rurſus quia nomina inæqualia ſunt; (alias enim eſſent lineæ inter ſe longitudine commenſurabiles. quod non ponitur.) poterit maius nomen plus, quam minus, quadrato lineæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis: Et ſi quidem plus poſſit quadrato lineæ longitudine ſibi commenſurabilis, conſtituentur vna cum tribus dictis generibus, tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, nimirum prima, ſecunda, & tertia ex binis nominibus: Si vero plus poſsit quadrato lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, efficientur vna cum eiſdem tribus generibus aliæ tres diuerſæ lineæ ex binis nominibus, videlicet quarta ex binis nominibus, quinta, & ſexta, vt ex definitionibus hic ab Euclide traditis perſpicuum eſt. Sunt igitur ſex diuerſæ lineæ ex binis nominibus appellatæ.

PVLCHRE autem Euclides primas ordine facit tres, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commenſurabilis; Secundas vero tres reliquas, in quibus maius nomen plus poteſt, quam minus, quadrato rectæ lineæ ſibi incommenſurabilis longitudine; propterea quod commenſurabile antecedit incommenſurabile, vt manifeſtum eſt.

RVRSVS recte adhuc inter lineas ex binis nominibus, primam omnium ponit, in qua maius nomen commensurabile est longitudine expositæ lineæ Rationali; & secundam, in qua minus nomen eidem Rationali lineæ expositæ longitudine est commensurabile. quoniam maius natura antecedit minus, cũ minus a maiori contineatur; tertiam vero, in qua neutrum ipsorum nominum expositæ Rationali longitudine est commensurabile: Et in reliquis tribus eodem modo, primam dicti secundi ordinis quartam appellans; secundam, quintam; & tertiam, sextam.

PROBL. 13. PROPOS. 49. INVENIRE ex binis nominibus primam. 48. 42.

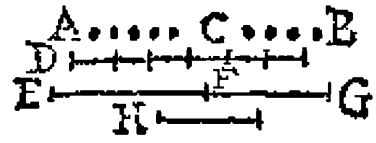
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, ex ijs, quæ in scholio 2. propo. 29. huius libri scripsimus, quorum excessus AC, non sit quadratus, ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratum; at AB, AC, proportionem nõ habeãt, quam quadratus ad quadratum: Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commẽsurabilis sumatur EF. Erit ergo & EF, Rationali D, commensurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad AC, ita per coroll. propos. 6. huius libri, quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. Dico EG, esse ex binis nominibus primam. Quoniam.n. quadrata ex EF, FG, cũ proportionem habeant, quam numeri AB, AC, [a] commensurabilia sunt; erunt & rectæ EF, FG, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa autem est EF, Rationalis. Igitur & FG, Rationalis est. Quia vero AB, ad AC, proportionem non habet, quam quadratus ad quadratum, non habebunt quoque quadrata ex EF, FG, proportionem, quam numerus quadratus ad quadratum. [b] Incommensurabiles ergo sunt longitudine rectæ EF, FG. Sunt igitur EF, FG, Rationales potentia solum commensurabiles;



[a] 6. decimi

[b] 9. decimi

a 37. deci. les; Atq; idcirco tota EG, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Dico & primam eſſe. Cum enim ſit vt numerus AB, ad numerum AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; ſit autem AB, maior, quam AC; erit quoque quadratum ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit maius, ex lemmate propoſ. 14. huius libri, quadrato rectæ H. Quoniã igitur eſt vt AB, numerus ad AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratum ex FG; erit quoque, per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, videlicet ad exceſſum, quo antecedens AB, ſuperat conſequentem AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H, nimirum ad exceſſum, quo antecedens quadratum ex EF, ſuperat conſequens quadratum ex FG: Habet autem AB, ad CB, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Igi



b 9. deci. tur & quadrata ex EF, & H, proportionem habebũt quam numerus quadratus ad numerum quadratum; b ac proinde rectæ EF, H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectę H, ſibi longitudine commenſurabilis; eſtque idem maius nomen EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus prima. Inuenimus ergo ex binis nominibus primam. Quod faciendum erat.

49. 43.

PROBL. 14. PROPOS. 50.

INVENIRE ex binis nominibus ſecundam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in precedenti propoſitione, expoſitaq; Rationali quadã D; ſumatur ei longitudine cõmenſurabilis FG. Erit ergo & FG, Rationalj D, commenſurabilis, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AC, ad numerum AB, ita per coroll. propoſ. 6. huius libri, quadratum ex FG, ad quadratum ex EF. Dico EG, eſſe ex binis nominibus ſecundam

dam. Quoniã. n quadrata ex FG, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, [a] commensurabilia sunt; erunt & rectę FG, EF, commensurabiles, saltem potentia: Ostensa est autem FG, Rationalis. Igitur & EF, Rationalis est. Quia vero AC, AB, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neque quadrata ex FG, EF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [b] Incõmensurabiles ergo sunt longitudine rectę FG, EF. Sũt igitur EF, FG, Rationales potentia tantum commensurabiles; [c] Atque idcirco tota EG, Irrationalis est, quę ex binis nominibus dicitur. Dico & secundam esse. Cũ enim sit vt numerus AC, ad numerum AB, ita quadratum ex FG, ad quadratum ex EF: Et conuertendo vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; sit autẽ AB, maior quam AC; erit & quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG. Sit, per lemma propos. 14. huius lib. maius quadrato rectæ H. Ostendemus iam, vt in precedenti propos. H, ipsi EF, longitudine commensurabilẽ esse. Quoniam igitur maius nomen EF, plus potest, quã minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine commensurabilis; estq; minus nomen FG, expositę Rationali D, commensurabile longitudine; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus secunda. Inuenimus ergo ex binis nominibus secundam. Quod erat faciendum.

[a] 6. deci.

[b] 9. deci.

[c] 37. deci.

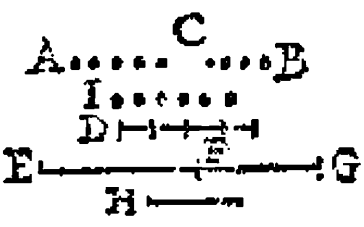
PROBL. 15. PROPOS. 51.

50. 44.

INVENIRE ex binis nominibus tertiam.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 49. Sumatur alius numerus I, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. quod quidem fiet, si sumatur I, non quadratus numerus proxime maior, quam AC. Ita enim, cum

cum non ſit quadratus, non habebit ad quadratum A B, proportionem, quam quadratus ad quadratum. Rurſus cum ſit non quadratus proxime maior, quam A C, differet vel ſola vnitate ab AC, vel binario. (Vnitate quidé, quando A C, numerus fuerit, cui addita vnitas non facit quadratum: binario vero, quando vnitas addita ad AC, quadratum facit. Vt ſi AC, ſit 8. erit non quadratus proxime maior 10. differens ab 8. binario. quia vnitas addita ad 8. facit quadratum 9. At ſi AC, ſit 5. erit non quadratus proxime maior 6. differens a 5 vnitate, quia vnitas addita ad 5. non facit quadratum, &c.) Quare vt in ſcholio propoſ. 8. lib 8. oſtendimus, non cadet inter I, & AC, medius proportionalis. Igitur non erunt ſimiles plani; ac propterea neque proportionem habebunt, quam numeri quadrati. Expoſita iam Rationali quapiam D, fiat per coroll propoſ. 6. huius lib. vt I, ad A B, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, [a] Erunt ergo quadrata ex D, & E F, proportioné habentia, quam numerus I, ad numerum A B, commenſurabilia; atque adeo & lineæ D, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Exiſtente igitur D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Quia vero I, ad A B, hoc eſt, quadratum ex D, ad quadratum ex E F, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratū; [b] erūt D, & EF, rectæ inter ſe longitudine incommenſurabiles. Rurſus per dictum coroll. fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG. [c] Erunt ergo quadrata ex EF, FG, proportionem habentia, quam numerus ad numerum, commenſurabilia; Ideoque & lineæ EF, FG, commenſurabiles, ſaltem potentia. Igitur cum E F, oſtenſa ſit Rationalis; erit & F G, Rationalis. Et quia A B, ad AC, hoc eſt, quadratum ex EF, ad quadratū ex FG, proportionem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; [d] erunt EF, F G, longitudine incommenſurabiles Sūt ergo EF, FG, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [e] Atque idcirco tota EG, Irrationalis eſt ex binis nominibus appellata. Dico & tertiam eſſe



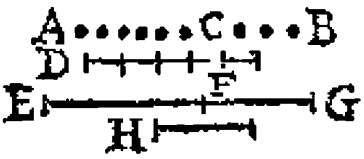
[a] 6. decimi
[b] 9. decimi
[c] 6. decimi
[d] 9. decimi
[e] 37. deci.

eſſe. Quoniam.n. eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratum ex EF, Et vt AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratum ex FG; erit ex æqualitate vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex FG: Non habet autē I, ad AC, proportionem, quā numerus quadratus ad numerum quadratū. Igitur nec quadrata ex D, & FG, proportionem habebunt, quam quadratus numerus ad numerum quadratum; ac propterea rectæ D, & FG, longitudine incommenſurabiles ſunt. Quoniam autem eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex FG; Eſt autem AB, maior quam AC; erit & quadratū ex EF, maius quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, per lemma propoſ. 14. huius lib. quadrato rectæ H. Oſtendemus iam ſimiliter, vt in 49. propoſ. H, ipſi EF, longitudine commenſurabilem eſſe. Quoniam igitur maius nomen EF, plus poteſt, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commēſurabilis; & neutra ipſarum EF, FG, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D, vt demonſtratum eſt; Erit EG, per definitionem, ex binis nominibus tertia. Inuenimus ergo ex binis nominibus tertiam. Quod erat faciendum. * 9. decimi

PROBL. 16. PROPOS. 52. 51. 45.

INVENIRE ex binis nominibus quartam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt compoſitus ex ipſis AB, ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, ex ijs, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib. tradidimus; exponatur Rationalis quædam D, cui longitudine commenſurabilis ſumatur EF. Erit ergo & EF, Rōnalis, cū Rationali D, commenſurabilis ſit. Quod ſi reliqua cōſtruantur, vt in propoſ. 49 oſtendemus ſimiliter, vt ibi, totā EG, ex binis nominibus eſſe. Dico & quartam eſſe. Erit enim



rursus, vt in 49. propos. quadratum ex EF, maius quam quadratũ ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectę H. Quoniam igitur eodem modo, vt in 49. propos. per conuersionem rationis est, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H: Non est autem AB, ad CB, vt quadratus ad quadratum; neq; quadratũ ex EF, ad quadratum ex H, erit vt numerus quadratus ad numerum quadratũ. [a] Longitudine ergo incõmensurabiles sunt rectę EF, & H. Itaq; cũ maius nomen EF, plus possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommensurabilis, & maius rursus nomen EF, longitudine commensurabile expositæ Rationali D; erit EG, per defin. ex binis nominibus quarta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quartam. Quod faciendum erat.

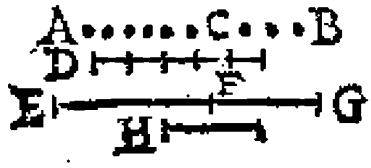
[a] 9. decī.

52. 46.

PROBL. 17. PROPOS. 53.

INVENIRE ex binis nominibus quintam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in precedenti propos. fiat constructio, vt in propos. 50. hoc est, sumatur FG, longitudine commensurabilis expositę Rationali D, &c. Ostendemus ergo vt in propos. 50. EG, esse ex binis nominibus. Dico & quintam esse. Demonstrabimus enim eodem modo, vt in 50. propos. quadratum ex EF, maius esse, quam quadratum ex FG. Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Quoniam vero, vt in propos. 49. ostensum est, per conuersionem rationis, est vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex H. Ostendemus, vt in propositione antecedenti, rectas EF, & H, longitudine incõmẽsurabiles esse. Quare cum maius nomen plus EF, possit, quam minus FG, quadrato rectę H, sibi longitudine incommensurabilis, & minus nomen FG, longitudine commensurabile expositę Rationali D; erit per definitionem EG, ex binis nominibus quinta. Inuenimus ergo ex binis nominibus quintam. Quod faciendum erat.



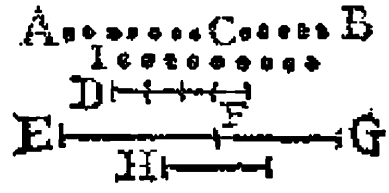
PROBL.

PROBL. 18. PROPOS. 54.

53. 47.

INVENIRE ex binis nominibus ſextam.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, planis non ſimilibus, quorum neuter ſit quadratus, & compoſitus ex ipſis AB, non ſit quoque quadratus, habeatq; ad neutrũ ipſorum proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; (quod quidem fiet, ſi numerus qui libet nõ quadratus diuidatur in duos numeros inter ſe primos.) Nam hac ratione & totus ad vtrũque ipſorum primus erit; atque idcirco proportionem ad illos non habebit, quam quadratus ad quadratum, per ea, quę ad finẽ lib. 8. demonſtrauimus.) Sumatur alius numerus quicunque I, qui nec ad AB, nec ad AC, habeat proportionem, quam quadratus ad quadratum; qualis eſt quiuis numerus quadratus. Hic enim ad AB, & AC, nõ quadratos proportionem nõ habebit, quã quadratus ad quadratũ. Exponatur deinde Rationalis aliqua D; & vt I, ad AB, ita fiat quadratũ ex D, ad quadratũ ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius lib. & reliqua fiãt, vt in propoſ. 51 oſtendemuſq; vt ibi, rectas D, & EF, eſſe longitudine in commẽſurabiles, atq; totã EG, ex binis eſſe nominibus. Dico & ſextãeſſe. Demonſtrabimus. n. ſimiliter, vt in 51. propoſ. D, & FG, longitudine eſſe incommenſurabiles, eſſeq; quadratum ex EF, maius, quam quadratum ex FG Sit ergo maius, quadrato rectæ H. Oſtendemus quoque vt in propoſ. 49. per conuerſionem rationis, eſſe vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum igitur AB, ad CB, atque adeo quadratum ex EF, ad quadratum ex H, proportionem non habeat, quam quadratus numerus ad quadratum; b erunt rectę EF, & H, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum maius



a 39. ſept.

b 9. deci.

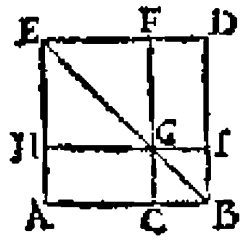
nomen

nomen EF, plus poſsit, quam minus FG, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommẽſurabilis, & neutrum ipſorum nominum EF, FG, longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali D; erit EG, per definitionem, ex binis nominibus ſexta. Inuenimus ergo ex binis nominibus ſextam. Quod faciendum erat.

LEMMA.

SI recta linea ſecta ſit vtcunque; erit rectangulum ſub partibus contentum, medium proportionale inter earum quadrata: Item rectangulum contentum ſub tota, & vna parte, mediũ proportionale inter quadratum totius lineę, & quadratum dictæ partis.

SECTA ſit recta AB, vtcumq; in C. Deſcribatur ex AB, quadratum A B D E, in quo diameter ducatur B E: Ducta autem ex C, recta CF, ipſi BD, parallela, quę diametrum ſecet in G, agatur per G, ipſi AB, parallela HI. Erunt igitur per coroll. propoſ. 4. lib. 2. FH, CI, quadrata partium AC, CB; vtrumq; autem rectangulorum DG, GA, comprehenſum ſub eiſdem partibus: At vero rectangula CD, AI, ſub tota AB, & parte CB, contenta. Dico DG, mediũ proportionale eſſe inter quadrata FH, CI: At CD, mediũ eſſe proportionale inter quadrata AD, CI. Quoniã. n. [a] *vt HG, ad GI, ita eſt tam FH, ad DG, quã AG, ad CI; erit vt FH, ad DG, ita AG, ad CI:* [b] *Eſt autem AG, ipſi DG, æquale. Igitur erit q;oque vt FH, ad DG, ita DG, ad CI; Atq; adeo DG, medium proportionale eſt inter quadrata FH, CI.*



[a] 1. ſexti.

[b] 43. prim.

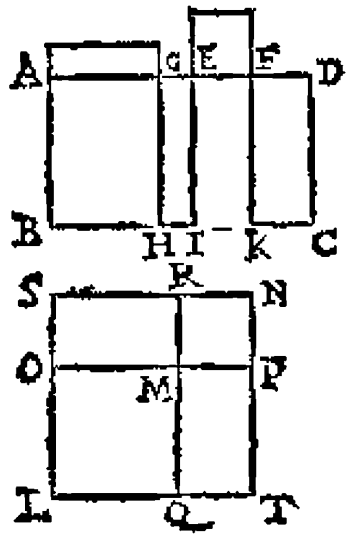
RVR-

RVRSVS quia est [a] *vt* AB, *ad* CB, *ita tam* AD, *ad* CD, *quam* AI, *ad* CI; *erit vt* AD, *ad* CD, *ita* AI, *ad* CI: *Est autem* AI, *ipsi* CD, *æquale. Igitur erit vt* AD, *ad* CD, *ita quoque* CD, *ad* CI. *Quare* CD, *medium proportionale est inter quadrata* AD, CI. *Eodem modo erit* AF, *medium proportionale inter quadrata* AD, FH. [a] 1. sexti.

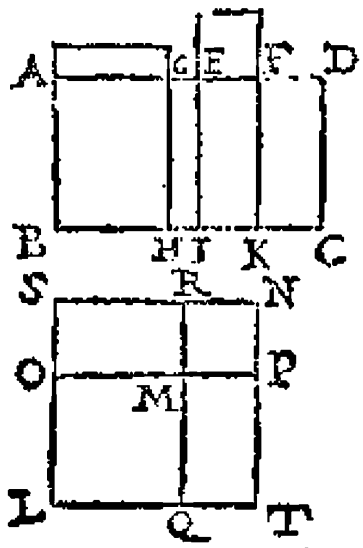
THEOR. 37. PROPOS. 55. 54. 48.

SI spatium contineatur sub Rationali, & ex binis nominibus prima; Recta linea spatium potens Irrationalis est, quæ ex binis nominibus appellatur.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & ex binis nominibus prima AD. Dico rectam lineã, quę potest spatium AC, Irrationalem esse, quæ ex binis nominibus appellatur. Sit enim ipsius AD, maius nomẽ AE. Erũt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commensurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis; & deniq; AF, expositæ Rationali AB, longitudine commensurabilis erit. Secetur ED, bifariã in F. Quia igitur AE, plus potest quam ED, quadrato rectæ sibi lõgitudine commẽsurabilis, si quartæ parti quadrati ex ED, hoc est, quadrato ex EF, æquale parallelogrammũ sub AG, GE, cõtentum, per 2 lemma propos. 17 huius lib. applicetur deficiens figura quadrata; [b] in partes longitudine cõmensurabiles ipsam diuidet. Quare AG, GE, partes in-



[b] 18. deci.



ter ſe longitudine commenſurabiles ſunt. Ducantur iam per puncta G, E, F, ipſis AB, DC, parallelæ GH, EI, FK.[a] Et parallelogrammo AH, æquale quadratum ſiat LM: At parallelogrammo GI, æquale ſiat quadratum MN; coniunganturq; quadrata LM, MN, ita ad angulum M, vt latera MO, MP, vnã rectam lineam conſtituant OP. Facient ergo & latera MQ, MR, vnã rectam QR, vt demonſtratum eſt a nobis ex Proclo ad propoſ. 15. lib. 1. propterea quod anguli OMQ PMR, ad verticem M, ſunt æquales, nempe recti. Completo autem rectangulo LN, cum rectæ OM, MP, rectis QM, MR, æquales ſint, ideoque & tota OP, toti QR; [b] ſit autem OP, ipſis SN, LT; & QR, ipſis LS, TN, æqualis; æquilaterum erit rectangulum LN; ideoque quadratum.

[a] 34. ſecun.

[b] 34. prim.

QVONIAM vero rectangulum ſub AG, GE, æquale eſt, per conſtructionem, quadrato ex EF; [c] erit vt AG, ad EF, ita EF, ad GE; [d] Ac propterea & vt AH, ad EK, ita EK, ad GI. Quare EK, medium proportionale eſt inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, MN, illis æqualia: Sed inter eadem quadrata LM, MN, medium proportionale eſt TM, ex antecedenti lemmate. Aequale igitur eſt TM, ipſi EK. [e] Cum ergo ipſi TM, æquale ſit MS, [f] & ipſi EK, æquale ſit FC; erit & MS, ipſi FC, æquale. Quocirca totum quadratum LN, toti rectangulo AC, æquale eſt; atq; adeo recta OP, poteſt ſpatiũ AC, contentum ſub AB, Rationali, & AD, ex binis nominibus prima. Dico OP, eſſe Irrationalem, quæ ex binis nominibus dicitur.

[c] 17. ſexti

[d] 8. ſexti.

[e] 43. primi

[f] 36. primi

QVONIAM enim AG, GE, oſtenſæ ſunt longitudine commenſurabiles; [g] erit & tota AE, vtriq; ipſarum longitudine commenſurabilis: Eſt autem AE, cum ſit maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus primæ, Rationali AB, commenſurabilis longitudine. Igitur & AG, GE, eidem AB, ex ſcholio propoſ. 12. huius

[g] 16. deci.

lib

lib. longitudine commenſurabiles ſunt; Atque adeo cum A B, ſit Rationalis, erunt & A G, G E, Rationales. [a] Quare rectangula A H, G I, ſub Rationalibus longitudine cõmenſurabilibus cõtenta Rationalia ſunt; Ideoque & quadrata L M, M N, ipſis æqualia, Rationalia erũt; Ac proinde & rectæ O M, M P, Rõnales erũt. [a] 20 deci.

ET quoniam A E, ipſi E D, longitudine incommenſurabilis eſt; Eſt autem ipſi A E, longitudine oſtenſa commenſurabilis A G; & ipſi E D, commenſurabilis eſt longitudine E F, eius dimidia; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib & A G, E F, inter ſe longitudine incommenſurabiles. Quare & A H, E K, [b] eandem proportionem habentia, quam A G, E F, [c] incommenſurabilia ſunt, ac proinde & L M, M T, illis æqualia, ſunt incommenſurabilia. [d] Igitur & rectæ O M, M P, longitudine ſunt incommenſurabiles, [e] cum eandem habeant proportionem, quam L M, M T: Sunt autem & O M, M P, Rationales oſtenſæ. Igitur O M, M P, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. [f] Quapropter tota O P, potens ſpatium A C, Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus dicitur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 1. ſexti
[c] 10. deci.
[d] 10. deci.
[e] 1. ſexti.
[f] 37. deci.

THEOR. 38. PROPOS. 56. 55. 49.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur.

CONTINEATVR ſpatiũ A C, ſub Rationali A B, & ex binis nominibus ſecunda A D. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Medijs prima dicitur. Sit namque A D, maius nomẽ A E.

Erunt igitur ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit quam ED, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine commẽſurabilis; Et denique ED, Rationali expoſitę AB, longitudine cõmenſurabilis. Secetur ED, biſariam in F; & reliqua conſtruantur, vt in antecedenti propoſitione. Quo facto, demonſtrabimus ſimiliter, vt ibi, rectam OP, poſſe ſpatium AC, contentum ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſecunda AD. Dico iam OP, Irrationalem eſſe, quæ ex binis Mediis prima vocatur.

QVONIAM enim AE, longitudine incõmenſurabilis eſt ipſi ED; & ED, minus nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, longitudine commenſurabilis eſt Rationali AB; [a] erunt AE, AB, longitudine incommenſurabiles. Et quia AG, GE, oſtenſæ ſunt in antecedenti propoſitione longitudine cõmenſurabiles; [b] erit quoque tota AE, vtrique ipſarum cõmenſurabilis. Quare cum AE, maius nomen exiſtens ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea ſit Rationalis; erunt & AG, GE, Rationales: quod cum utraque AG, GE, ipſi AE, ſit longitudine commenſurabilis; at uero AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; [c] erit utraque AG, GE, eidem AB, incommenſurabilis longitudine. Ac proinde tam AB, AG, quam AB, GE, Rationales ſunt potentia ſolum commenſurabiles. [d] Igitur rectangula AH, GI, Media ſunt, propterea quę & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, Media ſunt. Ergo & rectæ OM, MP, ſunt Mediæ.

QVIA uero AG, GE, longitudine ſunt commenſurabiles; [e] erunt & AH, GI, eandem cum illis proportionẽ habentia, commenſurabilia, atque ideirco & quadrata LM, MN, ipſis æqualia, commenſurabilia ſunt. Igitur & rectæ OM, MP, commenſurabiles ſunt, ſaltem potentia. Et quoniam AE, ED, longitudine incommenſurabiles

ſunt;

[a] 13. decimi.

[b] 16. decimi.

[c] 14. decimi.

[d] 22. decimi.

[e] 10. decimi.

ſunt; Ipſi vero AE, oſtenſa eſt longitudine commenſurabilis AG; & ipſi ED, longitudine cõmenſurabilis eſt EF, eius dimidia; erunt per ſcholium propoſ. 14. huius lib. AG, EF, longitudine incommenſurabiles; Ac proinde AH, EK, eandem habentia proportionem cum ipſis, [a] incommenſurabilia ſunt. Igitur & LM, MT, ipſis AH, & EK, æqualia, incommenſurabilia ſunt. [b] Ideoq; & rectæ OM, MP, longitudine ſunt incommenſurabiles. [c] cum eandem habeant proportionem, quã LM, MT. Cum ergo oſtenſum ſit OM, MP, Medias eſſe, & commenſurabiles, erunt OM, MP, Mediæ potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam denique ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus ſecundæ, linea eſt longitudine commenſurabilis ipſi AB, hoc eſt, ipſi EI: Eſt autem EF, ipſi ED, quoque longitudine commenſurabilis; [d] erunt etiam EI, EF, longitudine commenſurabiles; Ac propterea cum EI, Rationalis ſit, erit & EF, Rationalis. [e] Quare EK, rectangulum, Rationale eſt: Eſt autem MT, ſub OM, MP, contentum ipſi EK, æquale. Igitur & MT, Rationale eſt. Quapropter OM, MP, Mediæ ſunt potentia tantum commenſurabiles, Rationaleque continentes; [f] atque adeo OP, Irrationalis eſt, quæ ex binis Medijs prima appellatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſecunda, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 10. deci.
[b] 10. deci.
[c] 1. ſexti.
[d] 12. deci.
[e] 20. deci.
[f] 38. deci.

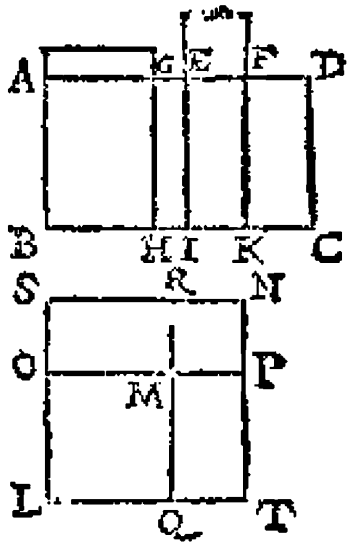
THEOR. 39. PROPOS. 57.

56.
50.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus tertia AD. Dico rectam,

quæ poteſt ſpatium A C, Irrationalem eſſe, quæ dicitur ex binis Mediis ſecunda. Sit.n.ipſius A D, maius nomen A E. Erunt ergo A E, E D, ex defin. Rationales potentia tantum commenſurabiles; & A E, plus poterit, quam E D, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; Et denique neutra ipſarum A E, E D, Rationali expoſitæ A B, longitudine commenſurabilis erit. Secta E D, bifariam in F, reliqua omnia fiant, vt in propoſ. 55. Similiter ergo, vt ibi, oſtendemus rectam O P, poſſe ſpatium A C: Et vt in antecedenti propoſ. 56. rectas O M, M P, eſſe Medias potentia tantum commenſurabiles; propterea quod A E, Rationali A B, ponitur longitudine incommenſurabilis, quemadmodum & ibi eadem A E, ipſi A B, longitudine erat incommenſurabilis. Quoniam vero E D, E F, ſunt commenſurabiles longitudine; eſtque E D, ipſi A B, Rationali, hoc eſt, ipſi E I, longitudine incommenſurabilis; [a] erit quoque E F, eidem E I, longitudine incommenſurabilis: Sunt autem E F, E I, Rationales, quod E F, dimidia ſit ipſius E D, Rationalis; & E I, expoſitæ Rationali A B; æqualis. Igitur E F, E I, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; [b] Ac propterea E K, Medium eſt; id eoque & M T, æquale ipſi E K, Medium eſt, quod ſub Mediis O M, M P, continetur. Itaque cum O M, M P, Mediæ ſint potentia ſolum commenſurabiles, contineantque ſpatium Medium; [c] erit O P, Irrationalis, quæ ex binis Mediis ſecunda appellatur. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 14. decimi.

[b] 22. decimi.

[c] 22. decimi.

57. 51.

THEOR. 40. PROPOS. 58.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali,

nali, & ex binis nominibus quarta; Recta linea ſpatium potẽs Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quarta AD. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalẽ, quæ Maior vocatur. Sit.n. AE, ipſius AD, maius nomen. Erunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantum commenſurabiles; & AE, plus poterit, quam ED, quadrato rectæ lineæ longitudine ſibi incommenſurabilis, & denique AE, ipſi AB, commenſurabilis erit longitudine. Secta ED, biſariam in F, fiant reliqua omnia, vt in propoſ. 55. [a] Erunt ergo AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Demonſtrabimus iam eodem modo, vt ibi, OP, poſſe ſpatium AC. Dico OP, Irrationalem eſſe, quæ vocatur Maior. Quoniam.n. AG, GE, longitudine incommenſurabiles ſunt; [b] erunt & rectangula AH, GI, eandem cum illis habentia proportionem, incommenſurabilia; atque adeo & quadrata LM, MN, ipſis AH, GI, æqualia, incommenſurabilia erunt. Quare rectæ OM, MP, potentia ſunt incommenſurabiles. Quia vero AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartæ, linea eſt longitudine commenſurabilis Rationali AB; erit & AE, Rationalis; [c] & rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Rationale. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN: Compoſitum ergo ex quadratis LM, MN, Rationale eſt.

[a] 55. deci.

[b] 21. deci.

[c] 20. deci.

ET quoniam ED, minus nomen ipſius AD, ex binis nominibus quartę, linea eſt longitudine incommenſurabilis Rationali AB, erit & EF, ipſius dimidia eidẽ AB, longitudine incõmenſurabilis; Et eſt EF, Rationalis, cũ ſit Rationali ED, commenſurabilis. Igitur EF, & AB, Rationales ſunt potentia ſolũ cõmenſurabiles. [d] Quare

[d] 22. deci.

EK, Medium eſt, ſub ipſis contentum; ideoq; & MT, illi æquale, contentumq; ſub OM, MP, Medium eſt. Quocirca cum OM, MP, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis LM, MN, Rationale; Rectangulum vero ſub ipſis MT, Medium; [a] Irrationalis erit tota OP, quæ Maior nominatur. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quarta, &c. Quod erat oſtendendum.

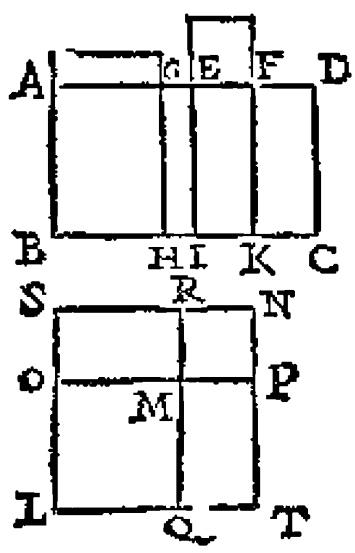
a 40. deci.

58.
52.

THEOR. 41. PROPOS. 59.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta; Recta linea ſpatium potens Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus quinta AD. Dico rectam lineam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe Irrationalem, quæ dicitur potens Rationale & Mediũ. Sit.n. ipſius AD, maius nomẽ AE. Sunt ergo ex defin. AE, ED, Rationales potentia tantũ commenſurabiles; & AE, plus poteſt, quam ED, quadrato rectæ lõgitudine ſibi incõmenſurabilis; & deniq; ED, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali AB. Secta ED, bifariã, fiant reliqua eadẽ, quæ in propoſ. 55. [b] Erunt igitur rurſus AG, GE, longitudine incommẽſurabiles. Simili autem modo, vt in ppoſ. 55. cõſtabit rectã OP, poſſe ſpatiũ AC. Dico OP, Irrationalẽ eſſe, quæ potens Rationale & Mediũ appellatur. Erunt enim, vt in propoſ. antecedenti, rectæ OM, MP, potentia incommenſurabiles. Et quia AE, maius nomen ipſius AD, ex binis nominibus quintæ, linea eſt Rationalis



b 59. deci.

tionalis & longitudine incõmenſurabilis Rationali AB; erũt AE, AB, Rationales potẽtia tantũ cõmenſurabiles. [a] Quare rectangulum AI, ſub ipſis contentum, Medium eſt. Eſt autem AI, æquale compoſito ex quadratis LM, MN. Igitur & compoſitum hoc, Medium erit. Rurſus quia ED, Rationalis ponitur longitudine commenſurabilis Rationali AB, cum ſit minus nomẽ ipſius AD, ex binis nominibus quintæ; erit & EF, ipſius dimidia, eidem AB, commenſurabilis lõgitudine, & Rationalis. [b] Quare EK, ſub Rationalibus EI, EF, lõgitudine commenſurabilibus, Rationale eſt; atque idcirco & MT, ſub OM, MP, contentũ Rationale erit, cum ipſi EK, ſit æquale. Quamobrẽ cũ rectæ OM, MP, potentia incõmenſurabiles ſint, faciantque cõpoſitum quidẽ ex ipſarũ quadratis LM, MN, Medium; Rectangulum vero MT, ſub ipſis contentum, Rationale; [c] Irrationalis erit tota OP: quæ dicitur potens Rationale, & Medium. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus quinta, &c. Quod erat demoſtrandum.

[a] 22. deci.

[b] 20. deci.

[c] 41. deci.

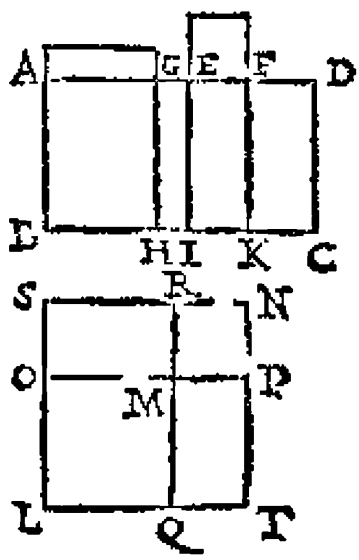
THEOR. 42. PROPOS. 60.

59. 53.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & ex binis nominibus ſexta; Recta linea ſpatiũ potens Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & ex binis nominibus ſexta AD. Dico rectam, quę ſpatium AC, poteſt, Irrationalem eſſe, quæ dicitur potẽs bina Media. Sit. n. ipſius AD, maius nomen AE. Sunt ergo AE, ED, ex defin. Rationales potentia tantum commenſura-

ſurabiles;& AE,plus poterit,quam ED, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis;& denique neutra ipſarum AE, ED, longitudine erit commenſurabilis Rationali AB, Fiant omnia,quæ in ſuperioribus; eruntque AG,GE, longitudine incommenſurabiles. Iã vero oſtendemus ſimiliter, vt in propoſ. 55. rectam OP, poſſe ſpatium AC. Item vt in propoſ.58. rectas O *M*, *M*P,potentia eſſe incommenſurabiles. Rurſus, vt in antecedenti propoſ. erit compoſitum ex quadratis L*M*,*M*N,Medium,Vt autẽ in propoſ.58 erit quoque *M*T,ſub O*M*,*M*P,comprehenſum,*M*ediũ. Et quia duarum rectarum AE,EF, illa quidem incommẽſurabilis eſt longitudine ipſi ED; hæc vero eidem commẽſurabilis;[b] erunt AE, EF, longitudine incommenſurabiles.[c] Igitur & AI,EK,incommenſurabilia ſunt.[d] cum eandem rationem habeant, quam AE, EF. Quare & compoſitum ex quadratis L*M*,*M*N, quod *ipſi* AI, æquale, eſt, & rectangulum *M*T, quod ipſi EK,eſt æquale, incommenſurabilia ſunt.Quapropter cum rectæ O*M*.*M*P, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex ipſarũ quadratis I. *M*, *M*N, *M*edium, & *M*T,ſub ipſis contentum, *M*edium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis;[e] erit tota OP,Irrationalis, quę bina *M*edia potens vocatur. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali,& ex binis nominibus ſexta,&c. Quod oſtendendum erat.



[a] 19. deci.

[b] 13. deci.

[c] 16. deci.

[d] 1. ſexti.

[e] 42. deci.

60.

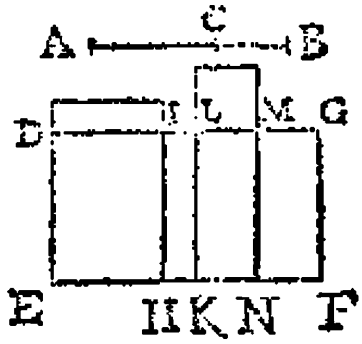
54.

THEOR. 43. PROPOS. 61.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus primam.

SIT

Sit ex binis nominibus AB, cuius maius nomen AC; [a] & ad Rationalem expositam DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse primam. Applicetur enim ad eandem Rationalem DE, rectangulum DH, æquale quadrato ex AC; & ad HI, aliud IK, æquale quadrato ex CB. Erit igitur reliquum LF, æquale ei, quod bis sub AC, CB, continetur, cum quadrata ex AC, CB, vna cum rectangulo bis sub AC, CB, æqualia sint qnadrato ex AB, quemadmodum & eidem quadrato ex AB, æquale est, per cõstructionem rectangulũ DF. Secetur LG, bifariam in M, puncto, per quod ipsis LK, GF, parallela agatur MN: eritque vtrumque rectangulum LN, MF, æquale ei, quod sub AC, CB, continetur. [c] Et quoniam AC, CB, Rationales sunt potentia solum commensurabiles, quod tota AB, sit ex binis nominibus; erũt quadrata ex AC, CB, Rationalia, & ob id commensurabilia; [d] quorum vtrique cum etiam commensurabile sit compositum ex ipsis; erit quoque compositum quadratorum ex AC, CB, Rationale. Est autem huic composito æquale, per constructionem, rectãgulum DK. Igitur & DK, Rationale erit; quod cum applicatum sit ad Rationalem DE, [e] faciet latitudinem DL, Rationalem, & ipsi DE, longitudine commensurabilem.

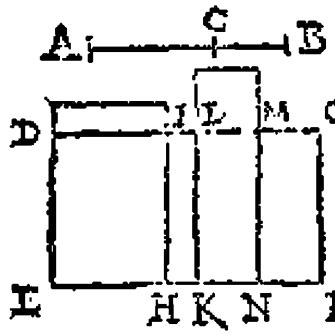


RVRSVS quia AC, CB, Rationales sunt solum potentia commensurabiles, [f] erit rectangulum sub ipsis, Medium, atq; adeo, & quod bis sub ipsis, cum sit ei commensurabile, hoc est, ipsum LF, Medium erit, per coroll. propos. 24. huius lib. Quare LF, applicatum ad LK, Rationalem, [g] facit LG, latitudinem Rationalem & ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Est autem DL, ostensa eidem DE, commensurabilis longitudine. Igitur DL, LG, longitudine incõmensurabiles sunt. [h] Sunt ergo DL, LG, Rationales potentia tantum commẽsurabiles; [i] Ac propterea DG, ex binis nominibus est. Dico & primam esse.

QVO-

[a] 45. primi
[b] 4. secun.
[c] 37. decimi.
[d] 15. decimi.
[e] 21. decimi.
[f] 22. decimi.
[g] 23. decimi.
[h] 13. decimi.
[i] 37. decimi.

QVONIAM. n. ex lẽmate propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC, CB, medium proportionale eſt inter quadrata ex AC, CB, erit quoque LN, medium proportionale inter DH, IK, atque adeo [a] cum rectæ DI, LM, IL, eandem rationem habeãt, quam DH, LN, IK; erit quoque recta LM, media proportionalis inter DI, IL. [b] Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex LM. Et quia quadrata ex rectis AC, CB, cõmenſurabilia ſunt, quod AC, CB, ponuntur potentia cõmenſurabiles; erunt & DH, IK, ipſis æqualia, commenſurabilia. [c] Igitur & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes rationem, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam autẽ DK, maius eſt, quam LF, quod & quadrata ex AC, CB, maiora ſint, per lemma propoſ. 39. huius libri, quam rectangulum bis ſub AC, CB; erit & recta DL, maior quã LG, [d] cum DL, LG, eandem rationem habeant, quã DK, LF. Itaque quoniam DL, maior eſt, quam LG, & ad DL, applicatur rectangulum ſub DI, IL, deficiens figura quadrata, æquale quadrato ex LM, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex minore LG, deſcripti; (oſtenſum enim eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quadrato ex LM.) diuiditurq; DL, ad I, in partes DI, IL, longitudine commenſurabiles, vt eſt demonſtratum; [e] poterit DL, maior plus quam LG, minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quare cum DG, oſtenſa ſit ex binis nominibus, & DL, maius nomen plus poſſe, quam LG, minus nomen, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque idem maius nomen DL, longitudine cõmenſurabile Rationali expoſitæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus prima. Quadratum ergo eius, quæ eſt ex binis nominibus, &c. Quod oſtendendum erat.



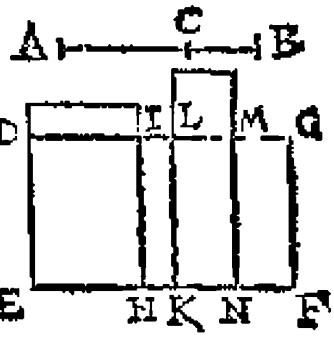
[a] 1. ſexti.
[b] 17. ſexti.
[c] 10. decimi.
[d] 1. ſexti.
[e] 18. decimi.

61. THEOR. 44. PROPOS. 62. 55.

QVADRATVM eius, quæ eſt ex binis

binis Medijs prima, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus secundam.

SIT ex binis Medijs prima AB, cuius maius nomen AC; [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse secundã. Cõstituantur. n. eadem, quæ in propos. præcedenti, ita vt rursus DH, IK, æqualia sint quadratis ex AC, CB, & vtrumque ipsorum LN, MF, ei quod sub AC, CB, continetur. Quoniam igitur AC, CB, ex binis Medijs primam AB, componentes [b] Mediæ sunt potentia tantum commensurabiles, quæ Rationale continent; erũt quadrata ex AC, CB, ato; adeo rectangula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, atque Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtrique ipsorum DH, IK, sit commensurabile; erit quoque ex coroll. propos. 24. huius lib. DK, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalẽ DE; [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Rursus quoniam rectangulum sub AC, CB, Rationale est; erit & eius duplum, nempe LF, Rationale; quod cum applicatum sit ad Rationalem LK; erit eius latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, longitudine commensurabilis. Quare cum duarum rectarũ DL, LG, ipsa LG, sit ipsi DE, cõmẽsurabilis lõgitudine, at DL, longitudine incõmensurabilis, [e] erũt DL, LG, longitudine incõmensurabiles. Quod cũ DL, LG, ostensæ sint Rationales; erunt ipsæ Rationales potẽtia solum cõmẽsurabiles; [f] ac propterea tota DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in antecedenti propos. demonstrabimus DL, maius nomen esse, & posse plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quocirca cum ipsius DG, maius nomen DL, plus



[a] 45. primi
[b] 38. deci.
[c] 16. deci.
[d] 23. deci.
[e] 21. deci.
[f] 13. deci.
[g] 37. deci.

possit

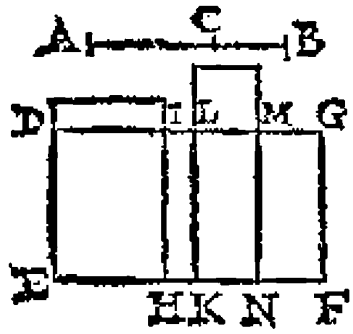
possit, quam minus nomen LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & minus nomen LG, ostensum sit longitudine commensurabile Rationali expositæ DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus secunda. Quadratum ergo eius, quæ est ex binis Medijs prima, &c. Quod erat ostendendum.

62. 56.

THEOR. 45. PROPOS. 63.

QVADRATVM eius, quæ ex binis Medijs secũda, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus tertiam.

SIT ex binis Medijs secunda AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulũ DF, æquale quadrato ex AB, latitudinẽ faciẽs DG. Dico DG, esse ex binis nominibus tertiã. Cõstructis. n. ijsdẽ, quæ in propos. 61. qrũ AC, CB, ex binis Medijs secundã AB, componentes, [b] Medię sunt potentia solum commensurabiles, quæ Medium continent; Erũt quadrata ex AC, CB, atque adeo rectãgula ipsis æqualia DH, IK, commensurabilia, & Media. [c] Cum ergo propterea & totum DK, vtriusque ipsorum DH, IK, sit commẽsurabile; erit & ex coroll. propos. 24. huius libri DK, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem DE; [d] erit eius latitudo DL, Rationalis ipsi DE, longitudine incõmensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, CB, Medium est; erit & eius duplum LF, Medium; quod cum applicatum sit ad Rationalem LK; [e] erit latitudo LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE longitudine incommensurabilis. Et quia AC, ipsi CB, longitudine est incommen-



[a] 45. primi
[b] 39. deci.
[c] 1. deci.
[d] 23. deci.
[e] 23. deci

mensurabilis;estq; vt AC,ad CB, ita per lemma 3. propos. 19. huius libri, quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC,CB,[a] erit quoque quadratum ex AC,rectangulo sub AC, CB, incommensurabile. [b] Est autem quadrato ex AC, commensurabile compositum ex quadratis rectarum AC, CB,quod quadrata ex AC, CB, commensurabilia sint,quippe cum rectę ipsę potentia ponantur commensurabiles;& rectangulo sub AC, CB, commensurabile est eius duplum, nimirum rectangulum bis sub AC,CB.Igitur compositum ex quadratis rectarum AC, CB, hoc est,rectangulum DK, incommensurabile est rectangulo bis sub AC,CB,hoc est, rectangulo LF, per ea,quæ in scholio propos.14.huius libri conscripsimus.Quare rectæ DL,LG, eandem rationem cum DK, LF, habentes [c] longitudine sunt incommensurabiles: Sunt autem ostensæ & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantum commensurabiles; [d] ac propterea tota DG,ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos.61.ostendemus DL,esse maius nomen, possęq; plus, quam minus LG, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quamobrem cum DL, maius nomen plus possit, quam LG, minus, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, & neutra ipsarum DL, LG,Rationali expositæ DE, sit ostensa longitudine cómensurabilis;erit ex defin. DG, ex binis nominibus tertia. Quadratũ ergo eius,quę ex binis Medijs secũda, ad Rationalem applicatum,latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. Quod erat demonstrandum.

[a] 10. decí.
[b] 16. decí.
[c] 10. decí.
[d] 37. decí.

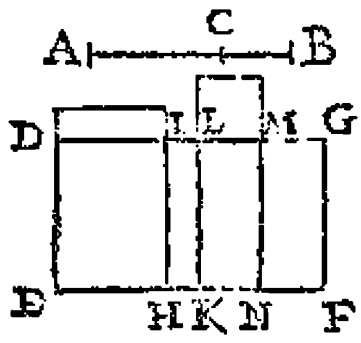
63.

THEOR. 46. PROPOS. 64.

57.

QVADRATVM Maioris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quartam.

SIT



SIT Maior AB, cuius maius nomen AC, [a] & ad [d] Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus esse, quartam. Construantur enim eadem prorsus, quæ in propos. 61. Et quia AC, CB, Maiorem AB, componentes, [b] potentia incommensurabiles sunt, faciuntque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, CB, Rationale, rectangulum vero sub ipsis, Medium; erit quoque DK, composito ex quadratis rectarū AC, CB, æquale existens, Rationale; At vero LF, duplū eius, quod sub AC, CB, continetur, Medium. Quoniam igitur rationale DK, ad Rationalem DE, est applicatum; [c] erit DL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Item cum LF, Medium sit applicatum ad Rationalem LK; [d] erit LG, Rationalis ipsi LK, hoc est, ipsi DE, lõgitudine incommensurabilis. Quare cum duarum rectarum DL, LG, illa quidem ipsi DE, commensurabilis sit longitudine; hæc vero eidē DE, longitudine incommensurabilis; [e] incommensurabiles erunt longitudine DL, LG: Ostensæ sunt autem & Rationales. Sunt igitur DL, LG, Rationales potentia tantum cõmensurabiles; [f] ideoque DG, ex binis nominibus est. Iam vero vt in propos. 61. demonstrabimus rectangulum sub DI, IL, æquale esse quadrato ex LM. Quia autem quadrata ex AC, CB, incommensurabilia sunt, quod rectæ AC, CB, potentia incõmensurabiles sint; Erunt etiam illis æqualia DH, IK, incommensurabilia; [g] atque adeo & rectæ DI, IL, eandem cum illis habentes proportionem, longitudine incommensurabiles. Quoniam vero vt in propos. 61. ostendimus, DL, maior est, quam LG, & ad DL, applicatum est rectangulum sub DI, IL, quadrato ex LM, hoc est, quartæ parti quadrati ex LG, æquale, deficiens figura quadrata, quod diuidit ipsam DL, ad I, in partes longitudine incommensurabiles; [h] poterit DL, plus quã LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quam ob rem cum & ipsa DL, (maius nomen ipsius DG,

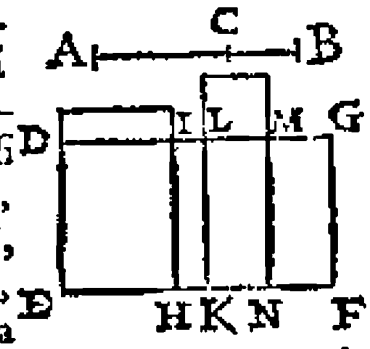
[a] 45. prim.
[b] 40. decim.
[c] 21. decim.
[d] 23. decim.
[e] 13. decim.
[f] 37. decim.
[g] 10. decim.
[h] 19. decim.

D G, quæ eſt ex binis nominibus,) oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis expoſitæ Rationali DE; erit ex defi. DG, ex binis nominibus quarta. Quadratum ergo maioris ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 47. PROPOS. 65. 64. 58.

QVADRATVM eius, quę Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus quintam.

SIT recta potens Rationale ac Medium AB, cuius maius nomen AC; & ad Rationalem DE, rectangulum DF, applicetur æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, ex binis nominibus quintam eſſe. Fiant. n. eadé omnino, quæ in propoſ. 61. Quoniam igitur rectæ AC, CB, componentes AB, potentem Rationale ac medium, potentia incommenſurabiles ſunt, facientes quidem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, at rectá gulum ſub ipſis contentum, Rationale; erit DK, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, Medium; & LN, æquale ei, quod ſub AC, CB, continetur, atque adeo ipſius duplum LF, Rationale. Igitur Medium DK, applicatum ad Rationalem DE, facit latitudinem DL, Rationalem, & longitudine Rationali DE, incommenſurabilem: At vero Rationale LF, ad Rationalem LK, applicatum, facit latitudinem LG, Rationalem longitudine ipſi LK, hoc eſt, ipſi DE, commenſurabilem. Quia igitur duarum rectarum DL, LG, hæc quidem longitudine commenſurabilis eſt Rationali DE, illa vero longitudine incommenſurabilis;



a 45. primi

b 41. decí.

c 23. decí.

d 21. decí.

a 13. deci
b 37. deci.

erunt DL, LG, lõgitudine incommensurabiles. Quare DL, LG, Rationales sunt potẽtia solũ cõmensurabiles; b Aĕ ppterea DG, est ex binis nominibus. Iã vero, vt in propos. 61. ostendemus rectangulũ sub DL, LL, æquale esse quadrato ex LM; & vt in antecedente propos. DL, maius nomen esse, atque posse plus, quam LG, quadrato rectę sibi longitudine incommensurabilis. Quapropter cũ & minus nomẽ LG, ostẽsum sit expositæ Rationali DE, longitudine commensurabile; erit ex defin. DG. ex binis nominibus quinta. Quadratum igitur eius, quæ Rationale ac Medium potest, &c. Quod demonstrandum erat.

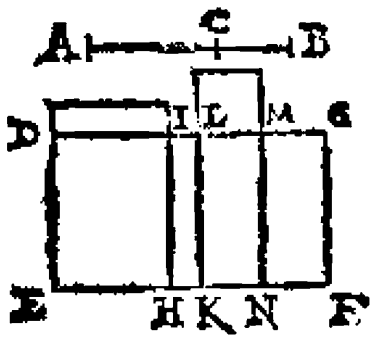
65. 59.

THEOR. 48. PROPOS. 66.

QVADRATVM eius, quæ bina Media potest, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam.

c 45. primi

SIT bina Media potens recta AB, cuius maius nomen AC, c & ad Rationalẽ DE, applicetur rectãgulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, esse ex binis nominibus sextã. Constructis.n. iisdem, quæ in propos 61. quoniã rectę AC, CB, componentes ipsam AB, potentẽ bina Media, d potentia incommẽsurabiles sunt, faciuntq; & cõpositum ex ipsarum quadratis Medium, & quod sub ipsis cõtinetur, Medium, & incommensurabile compositio ex quadratis ipsarum; erit tam DK, illi compositio æquale, quam LF, rectangulo bis sub AC, CB, æquale, Mediũ. Et quia Media DK, LF, applicata sunt ad Rationalem DE; e erũt eorum latitudines DL, LG, Rationales ipsi DE, longitudine incommen-



d 43. deci.

e 33. deci.

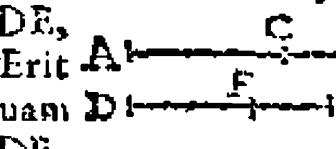
commensurabiles. [a] Quoniam vero compositũ ex quadratis rectarum AC, CB, incommensurabile est rectangulo sub AC, CB; eidem vero rectangulo sub AC, CB, commensurabile est rectangulum bis sub AC, CB, cum hoc illius sit duplum; [b] Erit compositum ex dictis quadratis, hoc est, DK, incommensurabile rectangulo bis sub AC, CB, hoc est, ipsi LF; Ac propterea rectæ DL, LG, eandem rationem habentes cum DK, LF, [c] longitudine incommensurabiles sunt. Rationales ergo sunt DL, LG, potentia solum commensurabiles; [d] Ac proinde DG, est ex binis nominibus. Iam vero, vt in præcedenti propos. demonstrabimus DL, esse maius nomen; posseq; plus quam LG, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Cũ ergo ostensum sit neutram ipsarum DL, LG, longitudine commensurabilem esse expositæ Rationali DE; erit ex defin. DG, ex binis nominibus sexta. Quadratum igitur eius, quæ bina Media potest ad Rationalem applicatum, latitudinem facit ex binis nominibus sextam. Quod erat ostendendum.

[a] 42 dec.
[b] 13. dec.
[c] 10. dec.
[d] 37. dec.

THEOR. 49. PROPOS. 67. 66. 60.

EI, quæ est ex binis nominibus, lõgitudine commensurabilis, & ipsa ex binis nominibus est, atque ordine eadem.

SIT ex binis nominibus quæcunq; AB, diuisa in sua nomina, quorum maius AC, & CB, minus, sitque recta DE, ipsi AB, longitudine commensurabilis. Dico DE, quoq; esse ex binis nominibus, & ordine eandẽ ipsi AB. [e] Fiat.n. vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. [f] Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE.



Et quoniã ipsi AB, longitudine cõmensurabilis ponitur DE; erit & DF, ipsi AC, & FE, ipsi CB, lõgitudine com-

[e] 12. sexti.
[f] 19. quin.
[g] 19. dec.

[a] 37. deci

mensura bilis : [a] Sunt autem AC, CB, cum sint nomina eius, quæ ex binis nominibus, Rationales. Igitur & DF, FE, Rationales sunt. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE;



[b] 10. deci.

Sunt autem AC, CB, potentia solum commensurabiles; [b] erunt & DF, FE, potentia solum commensurabiles. Igitur DF, FE, Rationales sunt potentia tantum commensurabiles; [c] Ac propterea DE, ex binis est nominibus. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Aut enim AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ lineę sibi longitudine commẽsurabilis, aut incõmensurabilis. Si quidẽ AC, plus potest quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis; [d] poterit & DF, plus quã FE, quadrato rectæ sibi longitudine cõmensurabilis. Quod si AC, cõmensurabilis sit longitudine Rationali expositæ, ita vt AB, sit ex binis nominibus prima; [e] erit & DF, eidẽ Rationali lõgitudine commensurabilis, cum vtraque, & Rationalis, & DF, eidem AC, sit commẽsurabilis longitudine. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus prima, hoc est, ordine eadem. Si vero CB, expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis, vt AB, sit ex binis nominibus secunda; erit eodem modo & FE, Rationali expositę longitudine commensurabilis. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus secunda. Si denique neutra ipsarum AC, CB, longitudine sit commensurabilis expositæ Rationali, ita vt AB, sit ex binis nominibus tertia; [f] erit & neutra ipsarum DF, FE, longitudine commensurabilis expositæ Rationali. Quare & DE, ex defin. est ex binis nominibus tertia.

[c] 37. deci.

[d] 35. deci.

[e] 12. deci.

[f] 12. deci.

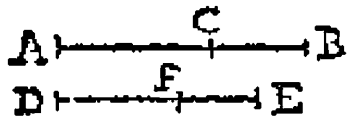
AT si AC, plus possit quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis; [g] poterit & DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, ex binis nominibus quartam esse vel quintam, vel sextam, prout & AB, fuerit ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta. Ei igitur, quæ ex binis nominibus, longitudine commensurabilis &c. Quod erat ostendendum.

[g] 15. deci.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD ſi recta DE, potentia tantum commenſurabilis ſit ipſi AB, quæ eſt ex binis nominibus, oſtendemus quidem eod-m modo, (ſi loco: Commenſurabilis longitudine: in demonſtratione reponamus vbique: commenſurabilis potentia tan'um:) & DE, eſſe ex binis nom.nibus: At eam eſſe ordine eandem ipſi AB, cui commenſurab: is eſt, nullo modo concludemus. Non enim ſequitur, ſi AC, maius nom.en longitudine ſit commenſurabile expoſitæ Rationali; & DF, maius nomẽ eidem eſſe commenſurabile longitudine; propterea quod non vtraque, nempe expoſita Rationalis, & DF, eiàdem AC, longitudine cõmenſurabilis eſt, ſed Rationalis quidem commenſurabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum, ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nulla ratione poteſt, vt DE, illi potentia tantũ cõmenſurabilis ſit ex binis nominibus ordine eadem.



SIT enim AB, ex binis nominibus prima, ſecunda, quarta, vel quinta, diuiſa in ſua nomina ad C; ſitque ei cõmenſurabilis potentia tantum DE, quam quidem, vt in theoremate, demonſtrabimus eſſe ex binis nominibus, diuiſamque eſſe in ſua nomina ad F; & partes AC, CB, partibus DF, FE proportionales eſſe, nimirum illas ad has eandem habere rationem, quam tota AB, ad totam DE. Dico nullo modo fieri poſſe, vt DE, ex binis nominibus ſit eadem ordine ipſi AB. Nam ſi poteſt fieri, ſit vtraque ex binis nominibus prima. Erit ergo vtrumque maius nomen AC, DF, ex defin. Rationali expoſita commenſurabilis longitudine. [a] Quare & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt. Et quoniam eſt vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt propterea & AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. Ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, ex binis nominibus prima eſt. Eo dè modo neq; vtraq; ex binis nominibus quarta erit. ſed neq; ſecũda vel quinta. Eſſet. n. vtrũq; nomen minus CB, FE, ex

[a] 12. decim.

[b] 10. decim.

defin. longitudine commensurabile Rationali expositæ, atque adeo & inter se. Igitur & tota AB, DE, longitudine forent commensurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum est, si AB, est ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia, rectam DE, ipsi AB, potentia solum commensurabilem, esse quoque unam ex illis tribus, licet ordine non eadem sit. Nam hoc posito, poterit AC, plus quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine commen
a 15. deci. *surabilis. Cum ergo sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; a potevit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare ex defin. erit DE, ex binis nominibus prima, vel secunda, vel tertia. Eodem modo si AB, est ex binis nominibus quarta, vel quinta, vel sexta, ita vt AC, plus possit, quam CB, quadrato rectæ sibi longitudine incommen-*
b 15. deci. *surabilis; b poterit quoque DF, plus quam FE, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum sit, vt AC, ad CB, ita DF, ad FE. Igitur ex defin. erit DE, ex binis nominibus etiam quarta, vel quinta, vel sexta, licet non eadem ordine ipsi AB.*

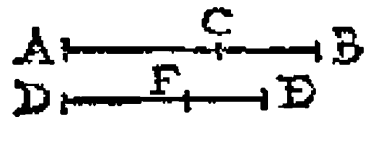
IN sequentibus autem quatuor propositionibus necessario erit DE, eadem ordine ipsi AB, quanquam potentia tantum illi commensurabilis sit.

67. 61.

THEOR. 50. PROPOS. 68.

EI, quæ est ex binis Mediis, longitudine commensurabilis, & ipsa ex binis Mediis est, atque ordine eadem.

SIT ex binis Mediis AB, quæcunque diuisa in sua nomina, quorũ AC, maius, & CB, minus, sitque ei recta



DE, lõgitudine commẽsurabilis. Dico DE, quoq; ex binis Mediis esse, & ipsi AB, ordine eandem.
c 12. sexti. d 19. quint. c Fiat. n. vt tota AB, ad totã DE, ita ablata AC, ad ablatã DF. d Erit ergo & reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota AB, ad totam DE. Et quoniam ipsi

ipſi AB, ponitur longitudine commenſurabilis DE; erit & DF, ipſi AC, & FE ipſi CB, longitudine commenſurabilis. Sunt autem AC, CB, Mediæ. Igitur & DE, FE, illis commenſurabiles, Mediæ ſunt. Rurſus quia eſt vt AC, ad DF, ita CB, ad FE; & permutãdo vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Sunt autem AC, CB, potentia ſolum cõmenſurabiles; [d] erunt & DF, FE, ſolum commenſurabiles potentia. Cũ ergo & oſtenſæ ſint Mediæ, erunt DF, FE Mediæ potentia tantum commenſurabiles; [e] Atque idcirco DE, erit ex binis medijs. Dico & ipſi AB, eandẽ eſſe ordine. Quoniam enim eſt vt AC, ad CB, ita DF, ad FE: Eſt autem vt AC, ad CB, ita quadratũ ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius libri; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, CB, ita quadratũ ex DF, ad rectangulum ſub DF, FE; & permutando vt quadratum ex AC ad quadratum ex DF, ita rectangulum ſub AC, CB, ad rectangulum ſub DF, FE. Commenſurabile eſt autem quadratũ ex AC, quadrato ex DF; quod rectæ AC, DF, commenſurabiles oſtenſæ ſint longitudine. [f] Igitur & rectangulum ſub AC, CB, rectangulo ſub DF, FE, commenſurabile eſt. Quare ſi rectangulum ſub AC, CB, fuerit Rationale, ita vt AB, ſit ex binis Medijs prima; erit & rectangulum ſub DF, FE, Rationale, cum illi ſit commenſurabile; [g] atque adeo & DE, ex binis Medijs prima erit. Si vero rectangulum ſub AC, CB, fuerit Mediũ, ita vt AB, ſit ex binis Medijs ſecunda: erit & rectangulum ſub DF, FE, ei commenſurabile, Medium, ex corollario propoſ. 24. huius lib. [h] Ac propterea & DE, erit ex binis Medijs ſecunda. Quare ei, quæ ex binis Medijs longitudine cõmenſurabilis, &c. Quod demonſtrandũ erat.

[a] 10 a ci
[b] 24. deci.
[c] 38. deci.
[d] 10. deci.
[e] 38. vel 39. deci.
[f] 10. deci.
[g] 38. deci.
[h] 39. deci.

SCHOLIVM.

EODEM prorſus modo demonſtrabimus, rectam lineam DE, ſi potentia tantum fuerit commenſurabilis ipſi AE, quæ eſt ex binis Medijs, ex binis Medijs eſſe, atque ordine eandem ipſi AB, cui commenſurabilis

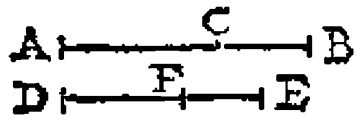
est; si modo loco: commensurabilis longitudine·ut demonstratione dicamus vbique: commensurabilis potentia tantũ, &c. vt manifestum est.

68. THEOR. 51. PROPOS. 69.

62.

MAIORI commensurabilis, & ipsa Maior est.

SIT linea *Maior* AB. diuisa *in* sua nomina ad C, eique commensurabilis sit DE, siue longitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, *Maiorem* esse. Fiant enim eadem, quæ superius; ita vt partes AC, CB, ad partes DF, FE, eandem habeant rationem, quam tota AB, ad totam DE.



Quoniam igitur AB, DE, commensurabiles sunt vel
[a] 10. deci. longitudine & potentia, vel potentia tantum; erunt quo que tam AC, DF, quam CB, FE, eodem modo commẽsurabiles. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita CB, ad FE,
[b] 22. sexti & permutando vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [b] erit vt quadratum ex AC, ad quadratum ex CB, ita quadratum ex DF, ad quadratum ex FE; & componendo vt compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad quadratum ex CB, ita compositum ex quadratis rectarum DF, FE, ad quadratum ex FE; Et conuertendo, vt quadratum ex CB, ad compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ita quadratum ex FE, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE; Et permutando vt quadratum ex CB, ad quadratum ex FE, ita compositum ex quadratis rectarum AC, CB, ad compositum ex quadratis rectarum DF, FE. Commensurabile est autem quadratum ex CB, quadrato ex FE, quod rectæ CB, FE, ostẽsæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia,
[c] 10. deci. vel potentia tantum. [c] Igitur & compositũ ex quadratis rectarũ AC, CB, cõmẽsurabile est cõposito ex quadratis
[d] 40. deci. rectarum DF, FE. [d] Est autem compositum illud Rationale,

nale, cum rectæ AC, CB, componant Maiorem AB. [a] Igitur & hoc Rationale est. [a 9. d fin]

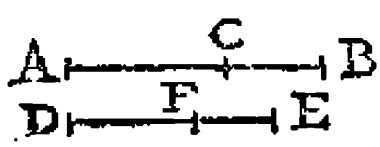
RVRSVS quia est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; Vt autem AC, ad CB, ita est quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, & vt DF, ad FE, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE, ex lemmate 3. propos. 19. huius libri; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum sub AC, CB, ita quadratum ex DF, ad rectangulum sub DF, FE: Et permutãdo vt quadratum ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, CB, ad rectangulum sub DF, FE. Est autem quadratum ex AC, quadrato ex DF, commensurabile, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint commensurabiles vel longitudine & potentia, vel potentia tantum. [b] Igitur & rectangulũ sub AC, CB, rectangulo sub DF, FE, commensurabile est. [c] Est autem rectangulum sub AC, CB, Medium. Igitur & rectangulum sub DF, FE, illi commẽsurabile, Medium est, ex coroll. propos. 24. huius libri. Quoniam vero est vt AC, ad CB, ita DF, ad FE; [d] suntque AC, CB, potentia incommensurabiles, cum componãt Maiorẽ AB; Erũt quoque DF, FE, potentia incommensurabiles. Itaq; cum DF, FE, sint potentia incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium, vt ostensum est; [e] erit tota DE, Maior. Maiori ergo commensurabilis, & ipsa Maior est. Quod demonstrandum erat. [b 10. decim] [c 40. decim.] [d 40. decim] [e 10. decim] [f 40. decim]

THEOR. 52. PROPOS. 70. 69. 63.

RATIONALE ac Medium potenti commensurabilis, & ipsa Rationale ac Medium potens est.

SIT recta AB, potens Rationale ac Medium, diuisa in sua nomina ad C, eique commensurabilis DE, siue lõgitudine & potentia, siue potentia tantum. Dico & DE, esse potentẽ Rationale ac Medium. Cõstructis. n. ijsdem, quæ

quæ ſupra, oſtendemus, vt in præcedenti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum D F, F E. [a] Eſt autẽ illud compoſitum Medium, cum rectę A C, C B, componant ipſam A B, potentem Rationale ac Medium. Igitur



per coroll. propoſ. 24. huius lib. & hoc compoſitum illi commenſurabile, Medium eſt. Eodem modo, vt in eadem propoſ. antecedenti, erit rectangulum ſub A C, C B, [b] quod Rationale eſt, commenſurabile rectangulo ſub D F, F E; atque adeo & rectangulum ſub D F, F E, Rationale eſt, ex 9. defin. Denique vt in eadem ſuperiori propoſ. erunt D F, F E, potentia incommenſurabiles. Quare cum D F, F E, ſint potentia incommenſurabiles, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale, vt demonſtratum eſt; [c] erit tota D E, Rationale ac Medium potens. Igitur Rationale ac Medium potenti commenſurabilis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 41. deci.

[b] 41. deci.

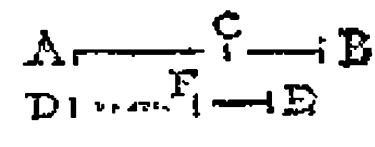
[c] 41. deci.

70.
64.

THEOR. 53. PROPOS. 71.

BINA Media potenti commenſurabilis, & ipſa bina Media potens eſt.

SIT bina Media potens A B, diuiſa in ſua nomina ad C, cuique commenſurabilis D L, ſiue longitudine & potentia, ſiue potentia tantum: Dico & D E, eſſe bina Media potentẽ. Conſtructis.n. iiſdem, quę ſupra, oſtẽdemus,



vt in propos. 69. compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, cõpoſito ex quadratis rectarũ D F, F E, commenſurabile eſſe: Nec nõ & rectangulum ſub A C, C B, eſſe commenſurabile rectangulo ſub D F, F E. [d] Cum ergo tam compoſitum ex quadratis rectarum A C, C B, quam rectangulum ſub A C, C B, Medium ſit; erit etiam ex coroll. propoſ. 24. huius libri.

[d] 42. deci.

bri, tam compoſitũ ex quadratis rectarum DF, FE, quàm rectangulum ſub DF, FE, Medium. Sed & DF, FE, potentia incommenſurabiles ſunt, vt prius. Poſtremo, quia compoſitum ex quadratis rectarum AC, CB, & rectangulum ſub AC, CB, incommenſurabilia ſunt, ex hypotheſi, propterea quod AB, bina Media poteſt: Eſt autem compoſito ex quadratis rectarum AC, CB, commenſurabile oſtenſum compoſitũ ex quadratis rectarũ DF, FE; & rectãgulo ſub AC, CB, proſ. 14. huius lib. compoſitũ ex quadratis rectarũ DF, FE, & rectangulum ſub DF, FE, incommenſurabilia. Quare cum rectæ DF, FE, potentia ſint incommenſurabiles, faciantq; compoſitum ex ipſarum quadratis Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium; incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; erit DE, bina *Media* potens. Itaque bina *Media* potenti commenſurabilis, & ipſa bina *Media* potens eſt. Quod erat oſtendendum.

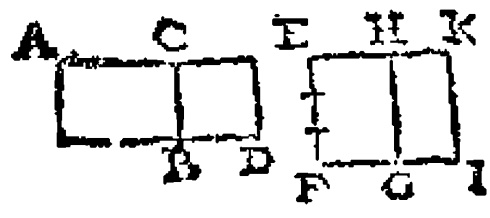
a 42. deci.

b 42. deci.

THEOR. 54. PROPOS. 72. 71. 65.

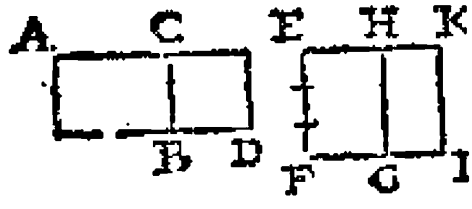
SI Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens.

SIT Rationale ſpatium AB, cum quo componatur Medium CD. Dico rectam, quæ totum ſpatium AD, poteſt, eſſe vel ex binis nominibus, vel ex binis Medijs primam, vel Maiorem, vel Rationale ac Medium potẽtem. Erit enim AB, vel maius quam CD, vel minus: Aequale ſiquidem non erit; alias cum AB, ſit Rationale, eſſet & illi æquale CD, Rationale, quod non ponitur. Sit primo



maius,

maius, & expoſita Rationali EF, [a] applicetur ad eam rectangulũ EG, æquale ipſi AB; & ad HG, aliud HI, æquale ipſi CD, vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Et quoniã AB, Rationale eſt, & CD, Medium; erit quoque EG, Rationale, & HI, Medium: quæ cum applicentur ad Rationalem EF; [b] erit EH, Rationalis, & ipſi EF, longitudine commenſurabilis; [c] At vero HK, Rationalis, & eidem EF, longitudine incommẽſurabilis. Rurſus qa EG, HI, incommenſurabilia ſunt, vt conſtat ex definitionibus; quod EG, Rationale ſit, at HI, Irrationale, nempe Medium; [d] erunt EH, HK, eandem cum illis habentes rationem, incommenſurabiles longitudine. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Et quoniam maius ponitur AB, quam CD, hoc eſt, EG, quam HI; erit quoq; EH, maior quã HK, [f] cum EH, HK, eandẽ rationem habeant, quã EG, HI. Iam vero maius nomen EH, plus poterit quam minus HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſsit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine; erit EK, ex defin. ex binis nominibus prima, cum EH, maius nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus prima EK, atque adeo & ſpatium AD, compoſitum ex Rationali AB, & Medio CD, [g] Irrationalis eſt, quæ ex binis nominibus appellatur.

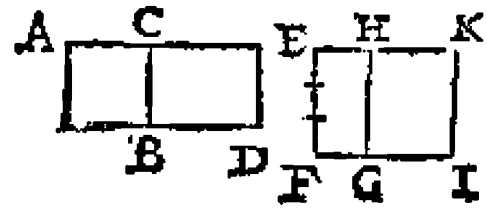


SI uero EH, plus poſsit quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit EA, ex binis nominibus quarta, ex defin. cum EH, maius nomen oſtẽſum ſit longitudine cõmenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quarta EK, atque adeo & ſpatium AD, [h] Irrationalis eſt, quæ vocatur Maior.

SIT deinde AB, minus quam CD; & eadem conſtruantur, quæ prius. Erit ergo, vt prius, EK, ex binis nominibus,

[a] 45. primi
[b] 21. deci.
[c] 23. deci.
[d] 10. deci.
[e] 37. deci.
[f] 1. ſexti.
[g] 35. deci.
[h] 38. deci.

minibus, & EH, ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Et quia AB, minus eſt, quam CD, hoc eſt, EG, quâ HI; erit quoq; recta EH, minor quam HK. Poterit igitur rurſus HK, maius nomen ipſius EK, quę eſt ex binis nominibus, plus quam EH, minus nomen, quadrato rectę longitudine ſibi commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſsit HK, quam EH, quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis; erit EK, ex binis nominibus ſecunda, cum EH, minus nomen commenſurabile ſit longitudine Rationali EF, vt oſtenſum eſt. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus ſecunda EK, atque adeo & ſpatium AD, ex Rationali AB, & Medio CD, compoſitum, [a] Irrationalis eſt, quæ dicitur ex binis Medijs prima.



[a] 56. decī.

SI vero HK, plus poſsit quam EH, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis; erit EK, ex binis nominibus quinta, cum EH, minus nomen oſtenſum ſit longitudine commenſurabile Rationali EF. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus quinta EK, atque adeo & ſpatium AD, [b] Irrationalis eſt, quæ Rationale & Medium potens appellatur. Si igitur Rationale, & Medium componantur, quatuor Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

[b] 59. decī.

THEOR. 55. PROPOS. 73.

SI duo Media interſe incommenſurabilia cõponatur, duæ reliquæ Irrationales fiunt, vel ex binis Medijs ſecunda, vel bina Media potens.

COMPONANTVR duo Media incommenſurabilia AB, CD. Dico rectam, quæ poteſt totum ſpatium AD, eſſe vel ex binis Mediis ſecundam, vel bina Media

72.
66.

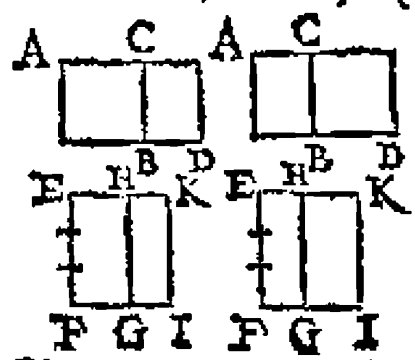
potẽtem. Erit enim rurſus AB, vel maius, quam CD, vel minus: Aequale ſiquidem non erit; alias eſſent AB, CD, commenſurabilia. quod non ponitur. Sit primo maius, & omnia fiant, quæ in præcedenti propoſitione. Et quia ſpatia AB, CD, ponuntur Media, & incommenſurabilia; erunt & ſpatia EG, HI, Media & incommenſurabilia; cum illis ſint æqualia. [a] Igitur rectæ EH, HK, eandẽ cum illis habentes rationem, longitudine incommenſurabiles ſunt; & vtraque (cum EG, HI, Media ſint, applicentur q; ad Rationalem EF.) [b] Rationalis eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rationales ergo ſunt EH, HK, potentia ſolum commenſurabiles; [c] ac propterea EK, ex binis nominibus eſt. Quoniam vero AB, maius ponitur quam CD; erit vt in antecedenti propoſ. EH, maius nomen ipſius EK. Poterit ergo plus quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poſſit EH, quam HK, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine, cum vtrumque nomen EH, HK, oſtenſum ſit longitudine incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex defin. ex binis nominibus tertia. Quare recta potens ſpatium EI, contentum ſub Rationali EF, & ex binis nominibus tertia EK, atque adeo & ſpatium AD, [d] Irrationalis eſt, quæ ex binis Mediis ſecunda dicitur.

[a] 10. deci.

[b] 23. deci.

[c] 37. deci.

[d] 37. deci.



SI vero EH, plus poſſit quam HK, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis, cum vtrumque nomen EH, HK, longitudine ſit incommenſurabile Rationali EF; erit EK, ex binis nominibus ſexta, vt conſtat ex defin. Recta igitur potens ſpatium EI, ſiue ſpatium AD, [e] Irrationalis eſt, quæ bina Media potens nominatur.

[e] 60. deci.

QVOD ſi AB, minus ſit, quam CD; non aliter propoſitum concludemus, vt ex figura conſtat. Quapropter ſi duo Media inter ſe incommenſurabilia componantur, duæ rel. quæ Irrationales fiunt, &c. Quod oſtendendum erat.

COROL-

COROLLARIVM.

EX his omnibus facile colligitur, eam, quæ ex binis nominibus, & reliquas ipſam ſubſequentes irrationales lineas, neque Mediæ, neq; inter ſe eaſdē eſſe.

NAM quadratum Mediæ, ad Rationalem lineam applicatum, [a] latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem. [a 23. deci.]

AT quadratum eius, quæ ex binis nominibus, ad Rationalem applicatum, [b] latitudinem efficit ex binis nominibus primam. [b 61. deci.]

ET quadratum eius, quæ, eſt ex binis Mediis prima, ad Rationalem applicatum, [c] latitudinem facit ex binis nominibus ſecundam. [c 62. deci.]

QVADRATVM deinde eius, quæ ex binis Mediis ſecunda, ad Rationalem applicatum, [d] latitudinem facit ex binis nominibus tertiam. [d 63. deci.]

AT vero quadratum Maioris ad Rationalem applicatum, [e] latitudinem facit ex binis nominibus quartam. [e 64. deci.]

QVADRATVM autem eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, ad Rationalem applicatum, [f] latitudinem facit ex binis nominibus quintam. [f 65. deci.]

POSTREMO quadratum eius, quæ bina Media poteſt, ad Rationalem applicatum, [g] latitudinem facit ex binis nominibus ſextam. [g 66. deci.]

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe; a latitudine quidē Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; Inter ſe autem, quod ordine non ſint eædem ex binis nominibus; perſpicuum eſt, omnes Irrationales lineas, de quibus hactenus eſt dictum, inter ſe differētes eſſe.

SCHOLIVM.

HACTENVS egit Euclides de ſeptem ſenarijs.

IN primo, qui continetur propoſ. 37. 38. 39. 40. 41. & 42. tradidit eorum ſex linearū Irrationalium, nimirū eius-

quæ ex binis nominibus; & eius, quæ ex binis Medijs prima; & eius, quæ ex binis Medijs ſecunda; & Maioris; & eius, quæ Rationale ac Medium poteſt; & denique eius, quæ poteſt bina Media.

IN ſecundo, quem continent propoſ. 43. 44 45. 46. 47. & 48. egit de earum diuiſionibus, docens ſingulas in ſingulis duntaxat punctis diuidi poſſe.

IN tertio deinde contento propoſ. 49. 50. 51. 52. 53. & 54. docuit inuentionem ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, videlicet primæ, ſecundæ, tertiæ, quartæ, quintæ, & ſextæ.

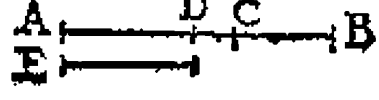
IN quarto, quem abſoluunt propoſ. 55. 56. 57. 58. 59. & 60. oſtendit, quo modo hæ ſex lineæ Irrationales, quæ in primo ſenario explicantur, inter ſe differant, docens, quanam linea Irrationalis ſit illa, quæ poteſt ſpatium contentum ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, vel ex binis nominibus ſecunda, vel tertia, vel quarta, vel quinta, vel ſexta.

IN quinto autem, quē reperies in propoſ. 61, 62. 63, 64. 65. & 66. docuit, quaſnam latitudines Irrationales faciant quadrata linearum Irrationalium in primo ſenario explicatarum, ad Rationalem lineam applicata.

IN ſexto vero, qui quinque propoſ. nempe 67. 68. 69. 70. & 71. abſoluitur, demonſtrauit lineam quamcunque commenſurabilem alicui dictarum ſex Irrationalium in primo ſenario, eſſe Irrationalem eandem illi, cui commenſurabilis eſt,

IN ſeptimo denique contento duabus propoſitionibus, nimirum 72. & 73. explicauit rurſus differentiam aliam ſex prædictarum Irrationalium.

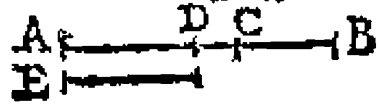
REPERITVR autem in his ſex lineis Irrationalibus, de quibus in primo ſenario, Analogia ſeu proportionalitas Arithmetica, quæ quidem conſiſtit in exceſſu eodem. Et recta media proportionalis, ſecundum Analogiam Arithmeticam, inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, eſt quoque Irrationalis eadē illi, inter cuius nomina media exiſtit.



SIT enim quæcunque Irrationalis, nempe ex binis nominibus AB, cuius maius nomē AC; & diuidatur AB, bifariam in D; & eius dimidia AD, vel

DB

DB, æqualis ſumatur E. Dico E, mediam eſſe, ſecundum Analogiam Arithmeticã, inter AC, CB: & E, eſſe quoq; ex binis nominibus. Quoniã .n. AC,



ſuperat dimidiã AD, recta DC; & dimidia DB, ſuperat ipſam CB, eadem recta DC; perſpicuum eſt, dimidiam ipſius AB, nempe E, eſſe mediam proportionalem inter AC, CB, in Analogia Arithmetica.

RVRSVS quia E, cõmenſurabilis eſt longitudine toti AB, cum hæc illius ſit dupla; erit & E, Irrationalis eadem ipſi AB, vt in ſexto ſenario eſt demonſtratum.

IDEM oſtendemus non aliter in cæteris lineis Irrationalibus contingere.

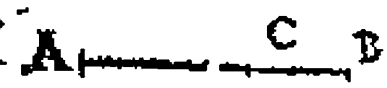
SEQVVNTVR iam ſeptem alij ſenarij, in quibus cadẽ Euclides demonſtrat de ſex alijs lineis Irrationalibus, quæ per detractionem generãtur, quæ in præcedentibus ſeptem ſenarijs de Irrationalibus, quæ per compoſitionem fiunt, eum oſtendiſſe docuimus.

PRINCIPIVM SENARIORVM per detractionem.

THEOR. 56. PROPOS. 74. 73. 68.

SI a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

DETRAHATVR a Rationali AB, Rationalis AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB. Dico reliquã BC, Irrationalẽ eſſe. Quoniã .n per lemma 3 propoſ. 19. huius lib. eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex AB, ad rectangulum ſub AB, AC: Et



ſunt AB, AC, longitudine incommenſurabiles; [a] erunt

[a] 10. decl.

incommenſurabilia quadratum ex A B, & rectangulum ſub AB, AC. Sed quadrato ex AB, commenſurabile eſt compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, (cum enim AB, AC, potentia ponantur commenſurabiles, erunt quadrata ex A B, A C, commenſurabilia.) Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile erit quadrato ex A B, (rectangulo vero ſub A B, AC, commenſurabile eſt rectangulum ſub AB, AC, bis. Igitur compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, & rectangulum ſub AB, AC, bis contentum, incommenſurabilia ſunt, vt in ſcholio propoſ. 14. huius libri demonſtrauimus. (Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarũ AB, A C, æquale rectangulo bis ſub AB, A C, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17. huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile eſt. Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarum A B, A C, ſit Rationale; (propterea quod commenſurabile eſt quadrato Rationali ex AB. linea Rationali deſcripto;) erit quadratum ex BC, Irrationale; atque adeo & recta ipſa BC, Irrationalis. Vocetur autem Apotome. Iuniores dicunt Reſiduum. Si igitur a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



a 16. deci.

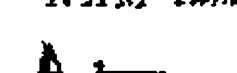
b 7. ſecun.

SCHOLIVM.

POTVISSET Euclides proponere quoque hanc propoſitionem hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome.

NAM cum A B, A C, ſint Rationales potentia tantum commenſurabiles; (*erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis*



c 37. deci.

binis nominibus dicitur, cuius maius nomen A B, & minus A C. Auferetur igitur A C, minus nomen ex maiori nomine A B, vt relinquatur Apotome B C.

THEOR. 57. PROPOS. 75.

74. 69.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commensurabilis existens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

DETRAHATVR a Media AB, Media A C, potentia solum commensurabilis ipsi A B, sitque rectangulum sub AB, AC, Rationale. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. Quoniam.n. AB, AC, potentia sunt commensurabiles; erunt quadrata ex AB, AC, commensurabilia;[a] atque adeo & compositum ex ipsis commensurabile erit quadrato ex A C. Est autem quadratum ex A C, Media Irrationale, & Medium. Igitur ex coroll. propos. 24. huius lib. & compositum ex quadratis rectarum AB, AC, Irrationale erit, ac Medium. Et quia rectangulum sub AB, AC, ponitur Rationale; erit & rectangulum bis sub AB, AC, Rationale. Igitur incommensurabile est compositum ex quadratis rectarum AB, AC, rectangulo bis sub AB, AC.[b] Cum ergo compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale sit rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; erit quoque rectangulum bis sub A B, A C, vna cum quadrato ex BC, incommensurabile: est autem rectangulo bis sub AB, AC.[c] Quare & rectangulum bis sub A B, A C, & quadratum ex B C, incommensurabilia sunt. Existente ergo rectangulo bis sub AB, AC, Rationali; erit quadratum ex B C, Irrationale; ideoque & recta BC, Irrationalis erit. Vocetur autem Mediæ Apotome prima, quia videlicet relinquitur



[a] 16. decim.

[b] 7. secund.

[c] 17. decim.

Poſt detractionem minoris nominis lineæ ex binis Medijs primæ, a maiori nomine, vt in ſcholio ſequenti patebit. Si igitur a Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

POTVISSET hæc propoſitio proponi hoc modo.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs prima, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima.

CVM enim AB, AC, ſint Media potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale; erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Medijs prima dicitur, cuius maius nomẽ AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Media Apotome prima.

A C B

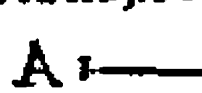
a 38. deci.

75. 70. THEOR. 58. PROPOS. 76.

SI a Media Media auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

DETRAHATVR a Media AB, Media AC, potentia ſolum commenſurabilis ipſi AB, ſitque rectangulum

lum ſub AB,AC, Medium. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalẽ. Quoniam.n.quadrata ex AB,AC, potentia cõmenſurabilibus commenſurabilia ſunt; a erit & compoſitum ex ipſis vtrique ipſorum commenſurabile: Eſt autem vtrũque ipſorum Medium, quod & rectæ AB, AC, Mediæ ponantur. Igitur & compoſitum ex ipſis, vtrique commenſurabile, Mediũ eſt, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Rurſus quia rectangulũ ſub AB, AC, Medium ponitur: erit & eius duplum, rectangulum videlicet bis ſub AB, AC, ex coroll propoſ. 24 huius lib Mediũ. b Cum ergo compoſitum ex quadratis rectarũ AB, AC, æquale ſit rectãgulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC; ſuperabit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, quod etiam Medium eſt, quadrato ex BC. c Medium autẽ non ſuperat Medium Rationali. Non ergo quadratũ ex BC, Rationale eſt. Ergo Irrationale, & ipſa recta BC, Irrationalis. Vocetur autẽ Mediæ Apotome ſecũda, quoniã relinquitur poſt detractionem minoris nominis eius, quę ex binis Medij ſecunda, a maioris nomine, vt ex ſcholio ſequenti apparebit. Si igitur Media Media auferatur, &c. Quod erat oſtendendum.



a 16. deci.

b 7. ſecun.

c 27. deci.

SCHOLIVM.

HOC etiam theorema ita potuiſſet proponi.

SI a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.

QVONIAM n. AB, AC, Mediæ ſunt potentia tantũ commenſurabiles, continentq; Medium; d erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ ex binis Medijs ſecunda appellatur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur BC, Mediæ Apotome ſecunda.

d 39. deci.

76. 71.

THEOR. 59. PROPOS. 77.

SI a recta linea recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidē ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.



DETRAHATVR a recta AB, recta AC, potētia ipſi AB, incommenſurabilis; Sit autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale; rectangulum vero ſub AB, AC, Medium. Dico reliquam BC, Irrationalem eſſe. Quoniam.n. compoſitū ex quadratis rectarū AB, AC, Rationale eſt; rectangulum vero ſub AB, AC, atque adeo, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & ei commēſurabile, hoc eſt, rectangulum bis ſub AB, AC, Medium, hoc eſt, Irrationale; erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC. Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarū AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, per coroll. propoſ. 17 huius lib. reliquo quadrato ex BC, incommenſurabile erit. Ponitur autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, Rationale. Igitur quadratum ex BC, illi incōmenſurabile, Irrationale eſt, & linea BC, Irrationalis. Vocetur autē Minor, quoniam relinquitur poſt detractionem minoris nominis lineę Maioris, a maiori nomine, vt in ſcholio ſequēti dicemus. Si igitur a recta linea recta auferatur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 10. defin.

[b] 7. ſecun.

[c] 10. defin.

SCHO-

SCHOLIVM.

SIC etiam theorema hoc poterat proponi.

SI a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.

NAM cum AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis continetur, Medium: [a] *erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ vocatur Maior, eiuſq; maius nomen AB, minus autem AC. Auferatur igitur AC, minus nomen ex maiori AB, vt relinquatur Minor BC.* a 40. deci.

THEOR. 60. PROPOS. 78. 77. 72.

SI a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autē ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipſi AB, incommenſurabilis; ſit autem compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & rectangulum ſub ipſis, Rationale. Dico reliquam BC, eſſe Irrationalem. Quoniam.n. compoſitū ex quadratis rectarum AB, AC, Medium eſt, hoc eſt, Irrationale; at rectangulum ſub AB, AC, atque adeo & eius duplum, nempe quod bis ſub

AB, AC, Rationale; [a] erit compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, incommenſurabile rectangulo bis ſub AB, AC, [b] Eſt autem compoſitum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale rectangulo bis ſub AB, AC, vna cum quadrato ex BC. Igitur & rectangulũ bis ſub AB, AC, vna cũ quadrato ex BC, incõmenſurabile eſt rectãgulo bis ſub AB, AC. [c] Sũt ergo & rectãgulũ bis ſub AB, AC, & quadratũ ex BC, incõmenſurabilia. Cũ ergo rectangulũ bis ſub AB, AC, Rationale ſit; [d] erit quadratũ ex BC, Irrationale, & recta BC, Irrationalis. Vocetur autẽ cum Rationali Medium totum efficiens: quia eius quadratũ additum rectãgulo bis ſub AB, AC, quod Rationale eſt, facit totum compoſitum ex quadratis rectarũ AB, AC, quod Medium exiſtit. Si igitur a recta recta auferatur potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale: Reliqua Irrationalis eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 10. defin.
[b] 7. ſecun.
[c] 17. deci.
[d] 10. defin.

SCHOLIVM.

HOC etiam modo Euclides theorema hoc potuiſſet proponere.

SI a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.

CVM enim AB, AC, ſint potentia incommenſurabiles, quæ faciunt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; erit compoſita ex ipſis Irrationalis, quæ nominatur Rationale ac Medium potens, cuius maius nomen eſt AB, minus autem AC. Auferatur igitur minus nomen AC, a maiori AB, vt BC, cum Rationali Medium totum efficiens relinquatur.

[e] 41. deci.

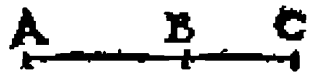
THEOR.

THEOR. 61. PROPOS. 79.

78. 73.

SI a recta recta auferatur potentia incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; & quod sub ipsis continetur, Medium, incommensurabileque composito ex quadratis ipsarum: Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR ex recta AB, recta AC, potentia ipsi AB, incommensurabilis; Sitque tam compositũ ex ipsarum quadratis, quam rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis. Dico reliquam BC, esse Irrationalem. [a] Quoniam enim compositum ex quadratis rectarum AB, AC, æquale est rectangulo bis sub AB, AC, vna cum quadrato ex BC, superabit compositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium ponitur, rectangulum bis sub AB, AC, quod ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium etiam est, (cum Medio, quod sub AB, AC, continetur, sit commensurabile) quadrato ex BC. [b] Medium autem non superat Medium Rationali. Non ergo quadratum ex BC, Rationale est. Ergo Irrationale, & recta ipsa BC, Irrationalis. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiẽs, quia eius quadratum cum rectangulo bis sub AB, AC, quod Medium est, facit totum cõpositum ex quadratis rectarum AB, AC, quod Medium etiam est. Si igitur a recta recta auferatur, &c. Quod ostendendum erat.



[a] 27. sec.

[b] 27. dec.

SCHO-

SCHOLIVM.

IN hunc modum proponi quoque potuisset hoc theorema.

SI a maiori nomine eius, quæ bina Media potest, minus nomen auferatur; Reliqua Irrationalis est. Vocetur autem cum Medio Mediũ totum efficiens.

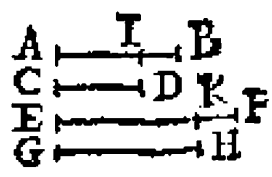
QVONIAM cum AB, AC, sint potentia incommensurabiles, faciantque & compositum ex ipsarum quadratis Medium, & rectangulum sub ipsis Medium, incommensurabileq; composito ex quadratis ipsarum; [a] *erit composita ex illis Irrationalis, quæ bina Media potens dicitur, cuius maius nomen AB, & minus AC. Auferatur igitur minus nomen AC, ex maiori AB, vt relinquatur BC, cum Medio Medium totum efficiens.*

[a] *42. deci.*

LEMMA.

SI idem excessus sit inter primam magnitudinem, & secundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam; erit & vicissim idem excessus inter primam magnitudinem, & tertiam, qui inter secũdam magnitudinem & quartam.

SINT quatuor magnitudines AB, CD, EF, GH, sitq; IB, excessus inter AB, CD, æqualis excessui KF, inter EF, GH. Dico eundem esse excessum inter AB, EF, qui est inter CD, GH. Quoniã. n. IB, excessus est inter AB, & CD; erit AI, ipsi CD, æqualis. Eodem modo æqualis erit EK, ipsi GH. Idem igitur excessus erit inter AI, & EK, qui



EK, qui inter CD, & GH; cum hæ magnitudines illis ſint æquales, ſingulæ ſingulis. Eſt autem totorum AB, EF, ex pronunciato 16. lib. 1. idem exceſſus, qui inter AI, EK; quod IB, KF, æquales ponantur. Igitur idem quoque exceſſus erit inter AB, & EF, qui inter CD, & GH. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

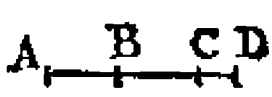
EX his conſtat, quatuor magnitudines Arithmeticam Analogiam habentes, habere quoque viciſſim Arithmeticam Analogiam. quoniam huiuſmodi Analogia conſiſtit in eodem exceſſu, quem oſtendimus eundem eſſe inter primam, & tertiam magnitudines, qui inter ſecundam & quartam magnitudines reperitur, ſi idem ſit exceſſus inter primam magnitudinem, & ſecundam, qui inter tertiam magnitudinem, & quartam, hoc eſt, ſi quatuor magnitudines Analogiam Arithmeticam habeant.

THEOR. 62. PROPOS. 80.

79.

APOTOMAE vna tantũ congruit recta linea Rationalis potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti. 74.

SIT Apotome AB; congruens autem ei Rationalis BC, potentia ſolum toti AC, commenſurabilis. Dico ipſi AB, aliam rationalẽ non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis. Si enim fieri poteſt. cõgruat alia Rationalis BD, ita vt BD ipſi AD, ſit potentia ſolum commenſurabilis. Et quia BC, Rationalis eſt; erit AC, illi ſolum potentia cõmenſurabilis,



ſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt AC, BC, potentia tantum commenſurabiles. Eodem modo erunt & AD, BD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles. Quoniam vero idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum bis ſub AC, BC, qui inter compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, & rectangulum bis ſub AD, BD;



(ſuperat enim compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, rectãgulum bis ſub AC, BC, quadrato ex AB;[a] quòd compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale ſit rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum quadrato ex AB. Et eodem modo compoſitũ ex quadratis rectarũ AD, BD, ſuperat rectangulum bis ſub AD, BD, quadrato eodẽ ex AB;[b] cum & compoſitum ex quadratis rectarũ AD, BD, æquale ſit rectangulo bis ſub AD, BD, vna cum quadrato ex AB.) erit quoque permutando, ex lemmate antecedenti, idem exceſſus inter compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectãgulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, DB. Eſt autem exceſſus inter illa cõpoſita, ſpatium Rationale, ex ſcholio propoſ. 27. huius lib. quod vtrũq; Rationale ſit. (Nam cum AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum cõmenſurabiles; erũt earum quadrata, Rationalia, & cõmenſurabilia.[c] Igitur & compoſitum ex ipſis vtriq; illorum commenſurabile eſt, atq; adeo & Rationale; ex 9. defin. Non aliter Rationale oſtẽdemus compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD.) Igitur & exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, ſpatium Rationale eſt.[d] Et quia rectangulum ſub AC, BC, Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus Medium eſt; erit ex corollario propoſitionis 24. huius lib & eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Eademque ratione Medium erit rectangulum bis ſub AD, BD.[e] Medium autem non ſuperat Medium Rationali. Igitur exceſſus inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis ſub AD, BD, Rationale ſpatium non eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB,

alia

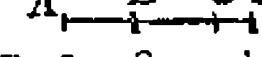
[a] 7. ſecun.
[b] 7. ſecun.
[c] 61. decim.
[d] 23. decim.
[e] 27. decim.

alia Rationalis non congruit, præter BC, quæ toti sit potentia tãtum commensurabilis. Apotomæ igitur vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 63. PROPOS. 81. 80. 75.

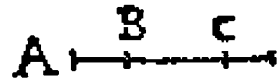
MEDIAE Apotomæ primæ vna tantum congruit recta linea Media, potentia solum commensurabilis existens toti, & cum tota Rationale continens.

SIT Mediæ Apotome prima AB; & ipsi congruat BC, *Media* toti AC, potentia solum commensurabilis, & rectangulum sub AC, BC, sit Rationale. Dico ipsi AB, aliam Mediam non congruere, quæ toti sit potentia tantum commensurabilis, contineatque cum tota Rationale. Si enim fieri potest, congruat alia BD, Media toti AD, potentia tantum commensurabilis, sitque rectangulum sub AD, BD, Rationale. *Et* quia BC, *Media* est potentia solum ipsi AC, commensurabilis;[a] erit & AC, Media, cum illi sit commensurabilis. Mediæ ergo sunt AC, BC, potentia tantum commensurabiles. Quoniã vero idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, CB, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD, vt in propos. præcedenti ostensum est: Est autem excessus inter hæc rectangula, ex scholio propositionis 27. huius lib. spatium Rationale; quod vtrũq; sit Rationale. (cum enim rectangulum sub AC, BC, ponatur Rationale; erit rectangulum bis sub AC, BC, illi commensurabile, Rationale. Atque eadẽ ratione *Rationale* erit rectangulum bis sub AD, BD.) Igitur & excessus inter compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & compositum ex quadratis rectarum AD, BD, spatium Rationale est. Et quoniam rectæ AC, BC, *Mediæ* sunt potentia solum commensurabiles; erunt & ipsarum quadra-



[a] 24. decim.

quadrata Media,& commenſurabilia., Igitur & compoſitum ex ipſis utrique ipſorum commenſurabile eſt, atq; adeo & Medium,ex coroll. propoſ 24. huius lib. Non aliter quoque Medium erit compoſitum ex quadratis rectarum AD, BD. [b] Medium autem non ſuperat Mediũ Rationali. Igitur ex cellus inter cõpoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, ſpatium Rationale nõ eſt. Sed & Rationale oſtenſum eſt. Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia Media non congruit, præter BC, quæ toti ſit potentia ſolum commenſurabilis, contineatq; cũ tota Rationale. Mediæ igitur Apotomæ primæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 16. deci.

[b] 27. deci.

81. 76.

THEOR. 64. PROPOS. 82.

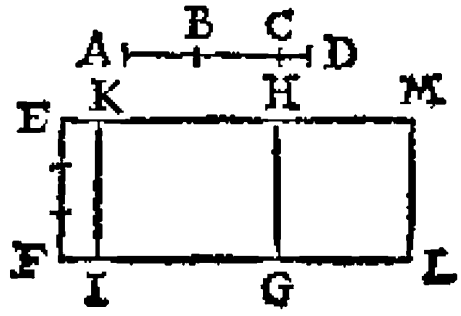
MEDIAE Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta linea Media potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.

SIT Mediæ Apotome ſecũda AB, cui congruat Media BC, toti AC, potentia tantum commenſurabilis, & rectangulũ ſub AC, BC, ſit medium. Dico ipſi AB, aliam mediam non congruere, quæ toti ſit potentia tantum commenſurabilis, contineatque cum tota Mediũ. Si enim fieri poteſt, cõgruat ipſi alia BD, media toti AD, potentia tantum commenſurabilis, ſitque rectangulum ſub AD, BD, Medium. Exponatur Rationalis EF, [c] ad quam applicetur rectangulum EG, æquale compoſito ex quadratis rectarum AC, BC, & ad eandem EF, aliud EI, applicetur æquale quadrato ex AB. Et deniq; aliud EL, æquale compoſito ex quadratis rectarum AD, BD. [d] Quoniam igitur compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cum

[c] 45. prim.

[d] 7. ſecun. 4.

cum quadrato ex AB; erit KG, æquale ei, quod bis continetur ſub AC, BC. Eodemque modo erit KL, æquale ei, quod bis continetur ſub AD, BD. Et quoniam AC, BC, Mediæ ſunt, & potentia commenſurabiles; (cum enim BC, Media ponatur, erit & AC, ipſi potẽtia cõmenſurabilis, *Media*) erunt & earũ quadrata *Media*, & cõmenſurabilia. [b] Ergo & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtriq; eorum; atque idcirco & Medium, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Igitur & EG, quod illi compoſito æquale eſt, Medium eſt; quod cum applicetur ad Rationalem EF, [c] erit EH, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quia rectangulum ſub AC, BC, Medium eſt; erit ex coroll. propoſ. 24. huius lib. & eius duplum, nempe KG, Medium: quod cũ applicetur ad Rationalem KI, [d] erit KH, Rationalis ipſi KI, hoc eſt, ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Et quia AC, BC, longitudine incommenſurabiles ſunt, eſtque vt AC, ad BC, ita quadratum ex AC, ad rectãgulum ſub AC, BC, vt oſtendimus lemmate 3. ad propoſ. 19. huius lib. [e] erit quadratum ex AC, incõmenſurabile rectãgulo ſub AC, BC. Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, hoc eſt, rectangulum EG. (cum enim rectæ AC, BC, ponantur potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata commenſurabilia [f]. Igitur & compoſitum ex ipſis commenſurabile eſt vtrique ipſorum, nempe quadrato ex AC.) & rectangulo ſub AC, BC, commenſurabile eſt eius duplum, videlicet KG. Igitur & EG, ipſi KG, incommenſurabile eſt, ex iis, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus. [g] Rectæ igitur EH, KH, eãdem habentes rationem cum EG, KG, longitudine incommẽſurabiles ſunt: Sed & Rationales ſunt oſtenſæ. Rationales ergo ſunt potẽtia tantum commenſurabiles. Quapropter cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia ſolum commenſura-



[a] 24. deci.
[b] 16. deci.
[c] 23. deci.
[d] 23. deci.
[e] 10. deci.
[f] 16. deci.
[g] 10. deci.

surabilis ipsi EH, [a] erit EK, Apotome, & illi congruens KH. Similiter demonstrabimus EK, Apotomen esse, & illi congruentem KM. Non igitur Apotomæ vna tantũ congruit recta linea Rationalis potẽtia solum commen surabilis existens toti: quod est absurdum. Vnam enim tantum congruere, [b] demonstratum est. Igitur mediæ Apotomæ secundæ vna tantum congruit, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 74. decí.

[b] 80. decí.

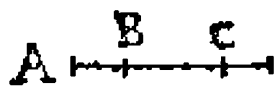
THEOR. 65. PROPOS. 83.

82.

77.

MINORI vna tantum congruit recta linea potẽtia incommensurabilis existens toti, & cum tota faciens compositum quidem ex ipsarum quadratis Rationale; quod autem sub ipsis continetur, Medium.

SIT Minor AB, & illi congruens BC, toti AC, potẽtia incõmensurabilis, faciẽsq; compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale, & rectangulum sub AC, BC, Medium. Dico ipsi AB, aliam non cõgruere, quæ eadem præstet. Sit enim, si fieri potest, alia congruens BD, toti AD, potentia incommensurabilis, faciensque compositum quidem ex quadratis rectarum AD, BD, Rationale, at rectangulum sub AD, BD, Medium. Quoniam igitur, vt in propos 80. demonstratum est, idem excessus est inter compositum ex quadratis rectarum AC, BC, & cõpositum ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectãgulum bis sub AC, BC, & rectangulum bis sub AD, BD: Est autem excessus inter illa composita, spatium Rationale, ex scholio propos. 27. huius libri; quod vtrũque Rationale ponatur. Igitur & excessus inter rectangulum bis sub AC, BC, & rectangulũ bis sub AD, BD, spatium



est

eſt Rationale, ſed & non Rationale eſt. Cũ enim rectangulum ſub AC, BC, ponatur Medium, erit quoque ex coroll. propoſ. 24. huius lib. eius duplum, nempe rectangulum bis ſub AC, BC, Medium. Similiterque *Medium* erit rectangulum bis ſub AD, BD. [a] Quare vnum non non ſuperabit alterum Rationali.) Quod eſt abſurdum. Ergo ipſi AB, alia recta præter BC, non congruit potentia toti incommenſurabilis, &c. Minori ergo vna tantũ congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] *27. decim.*

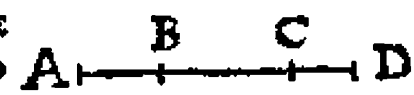
THEOR. 66. PROPOS. 84.

83. 78.

EI, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.

SIT recta cum Rationali *Medium* totum faciens AB, cui congruat recta BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, *Medium*, rectangulum vero ſub AC, BC, Rationale. Dico ipſi AB, aliam rectam non cõgruere, quę hæc eadem faciat.

Si enim fieri poteſt, congruat ipſi alia recta BD, toti AD, potentia incommenſurabilis, faciensq; compoſitum quidem ex quadratis rectarũ AD, BD, *Medium*, rectangulum vero ſub AD, BD, Rationale. Quoniam igitur vt in propoſ. 80. oſtenſum eſt, idem exceſſus eſt inter compoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, & compoſitũ ex quadratis rectarum AD, BD, qui inter rectangulum bis ſub AC, BC, & rectangulum bis



ſub AD, BD. Eſt autẽ exceſſus inter hæc rectangula, ſpatiũ Rationale, vt in propoſ. 81. demonſtrauimus. Igitur & exceſſus inter illa cõpoſita, ſpatiũ Rationale eſt: ſed & nõ Rationale eſt; cũ vtrumq; ſit Mediũ. [a] Medium.n. Medium non ſuperat Rationali. Quod eſt abſurdũ. Non ergo ipſi AB, alia recta, quam BC, congruet potentia toti incommenſurabilis, &c. Quare ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat demonſtrandum.

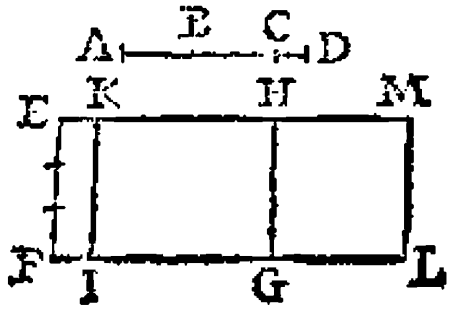
[a] 27. decim.

THEOR. 67. PROPOS. 85.

84. 79.

EI, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum cõgruit recta linea potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciẽs & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis continetur Medium, incommenſurabileq; cõpoſito ex ipſarum quadratis.

SIT recta AB, cum Medio Medium totum faciens: ipſi vero congruens BC, toti AC, potentia incommenſurabilis, faciensq; & compoſitum ex quadratis rectarũ AC, BC, Medium, & rectangulum ſub AC, BC, Mediũ, incommenſurabileq; compoſito ex quadratis rectarum AC, BC. Dico ipſi AB, aliã non congruere, quæ eadem hæc faciat. Si.n. fieri poteſt, cõgruat ipſi recta alia BD, toti AD, potẽtia incõmenſurabilis, ita vt & compoſitũ ex quadratis rectarũ AD, BD, Mediũ ſit, & rectãgulum ſub AD, BD, Medium quoque, ac incommenſurabile cõpoſito ex quadratis rectarum AD, BD. Conſtructis autem iiſdem, quæ in propoſ. 82. quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium eſt; erit etiam



FG,

EG, illi æquale, Medium. [a] Recta igitur EH, Rationalis est, ipsi EF, longitudine incommensurabilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Medium est; erit & eius duplum KG, Medium. [b] Igitur & recta KH, Rationalis est, longitudine ipsi EF, incommensurabilis. Et quoniã KG, commensurabile est rectangulo sub AC, BC, cum illud huius sit duplum; at rectangulum sub AC, BC, incommensurabile ponitur composito ex quadratis rectarum AC, BC; [c] erit quoque KG, eidem composito, hoc est, ipsi EG, incommensurabile; ac propterea rectæ EH, KH, eandem habentes cum EG, KG, rationem, [d] longitudine incommensurabiles sunt. Sed & ostensæ sunt Rationales. Rationales ergo sunt potentia solum commensurabiles. Quare cum ex Rationali EH, auferatur Rationalis KH, potentia solum commensurabilis ipsi EH; [e] erit EK, Apotome, & ei congruens KH. Non aliter ostendemus EK, esse Apotomen, & ei congruentem esse KM. Non igitur Apotomæ vna tantum recta congruit, &c. Quod est absurdum. [f] Vnam enim tantum congruere demonstratum est. Igitur ei, quæ cum Medio Medium totum facit, vna tantum congruit, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 23. deci.
[b] 23. deci.
[c] 14. deci.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 80. deci.

DEFINITIONES TERTIAE.

EXPOSITA Rationali, & Apotoma; si tota plus possit, quam congruens, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine commensurabilis,

I.

SI quidem tota expositæ Rationali sit longitudine commensurabilis; Vocetur Apotome prima.

II.

Si vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſecunda.

III.

QVOD ſi neque tota, neque congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome tertia.

RVRSVS ſi tota plus poſsit, quam cõgruens, quadrato rectæ lineæ ſibi longitudine incommenſurabilis,

IIII.

SI quidem tota expoſitæ Rationali ſit longiiudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quarta.

V.

SI vero congruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome quinta.

VI.

QVOD ſi neque tota, neque congruens

gruens expoſitæ Rationali ſit longitudine commenſurabilis; Vocetur Apotome ſexta.

SCHOLIVM.

NON aliter colligitur numerus harum ſex Apotomarũ, ac ſuperius numerus ſex linearum ex binis nominibus ſunt collectus. Sunt enim ſex hæ Apotomæ, rectæ lineæ, quæ relinquuntur poſt detractionem minorum nominum ex maioribus nominibus ſex linearum, quæ ex binis nominibus dicuntur, vt ex definitionibus eſt perſpicuum.

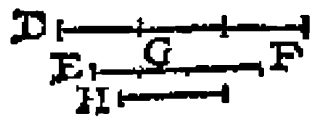
PROBL. 19. PROPOS. 86.

85.

INVENIRE primam Apotomen.

80.

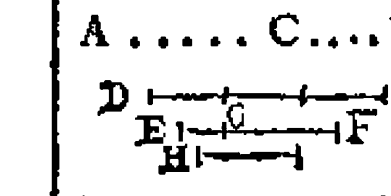
REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in ſcholio 2. propoſ. 29. huius libri docuimus, quorũ exceſſus AC, non ſit quadratus; ita vt AB, CB, proportionem quidem habeant, quam quadratus ad quadratũ, at AB, AC, non. Exponatur Rationalis quæpiam D, cui longitudine commenſurabilis ſit EF. Eritque EF, cũ cõmenſurabilis ſit Rationali D, Rationalis. Fiat deinde vt numerus AB, ad numerum AC, ita per coroll. propoſ. 6. huius lib. quadratum ex EF, ad quadratum ex GF. Dico EG, eſſe primam Apotomen. [a] Quoniam enim quadrata ex EF, GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, cõmenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ EF, GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis. Quia vero AB, AC, proportionem non habent, quam quadrati numeri; neq; quadrata ex EF, GF, proportionem habebunt, quam quadrati numeri. [b] Incommenſurabiles ergo ſunt longitudine rectæ



[a] 6. deci.

[b] 9. deci.

ctæ EF,GF. Rationales ergo ſunt EF,GF, potentia tantum commenſurabiles;, atque idcirco reliqua EG, Apotome eſt. Dico & primam eſſe. Poſsit enim recta EF, plus quã recta GF, quadrato H. Et quia eſt, vt numerus AB, ad numerũ AC, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex GF; erit per conuerſionẽ rõnis, vt AB,



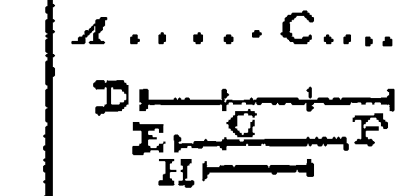
ad CB, ita quadratũ ex EF, ad quadratũ ex H. Habent autẽ AB, CB, proportionem, quam numeri quadrati. Igitur & quadrata ex EF, & H, proportionem habent, quam numeri quadrati; [b] Ac propterea rectæ EF, & H, longitudine commenſurabiles ſunt. Quoniam igitur tota EF, plus poteſt, quam cõgruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine commẽſurabilis; eſtque tota eadem EF, expoſitæ Rationali D, commenſurabilis longitudine; erit EG, ex defin. prima Apotome. Inuenimus ergo primam Apotomen. Quod faciendum erat.

86.
81.

PROBL. 20. PROPOS. 87.

INVENIRE ſecundã Apotomẽ.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propoſ. præcedenti; expoſitaq; Rationali D, ſumamatur ei longitudine commenſurabilis GF; eritque GF, Rationali D, commenſurabilis, Rationalis quoque. Fiat deinde vt numerus AC, ad



numerum AB, ita quadratum ex GF, ad quadratum ex EF, per coroll. propoſ. 6. huius libri. Dico EG, eſſe ſecundam Apotomen. [c] Quoniam enim quadrata ex GF, EF, proportionem habentia, quam numeri AC, AB, commenſurabilia ſunt; Erunt & rectæ GF, EF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo GF, ſit oſtenſa Rationalis, erit quoq; EF, Rationalis. Quia vero numeri BC, AB, atq; adeo & quadrata ex GF, EF, proportionem non habent, quam numeri

meri quadrati; a erunt GF, EF, longitudine incommensurabiles. Rationales ergo sunt GF, EF, potentia solum commensurabiles; b Ideoque EG, reliqua, Apotome est. Dico & secundam esse. Possit enim recta EF, plus quam GF, quadrato ex H. Qm ergo est vt AC, ad AB, ita quadratū ex GF, ad quadratū ex EF; & conuertēdo, vt AB, ad AC, ita quadratū ex EF, ad quadratū ex GF: Ostendemus iam, vt in antecedenti propos. rectam H, ipsi EF, longitudine esse commensurabilem. Quam ob rem cum tota EF, plus possit, quam congruens GF, quadrato rectæ H, sibi longitudine commensurabilis, sitque congruens GF, expositæ Rationali D, longitudine commensurabilis; erit EG, ex defin. secunda Apotome. Inuenimus ergo secundam Apotomen. Quod erat faciendum.

a 9. decī.

b 74 decī.

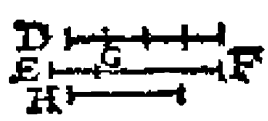
PROBL. 21. PROPOS. 88.

87.

82.

INVENIRE tertiam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris quadratis AB, CB, vt in propos. 86. sumatur alius numerus I, vt in propos. 51. huius lib. docuimus, qui ad neutrum ipsorum AB, AC, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. Exposita deinde Rationali D, fiat vt I, ad AB, ita quadratū ex D, ad quadratū ex EF, per coroll. propos. 6. huius libri. c Eruntque quadrata ex D, & EF, proportionē habentia, quam numeri I, & AB, commensurabilia; atque adeo & rectæ D, & EF, commensurabiles, saltem potentia. Existente ergo D, Rationali, erit & EF, Rationalis. Et quia numeri I, & AB, ac propterea quadrata ex D, & EF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; d erunt rectæ D, & EF, longitudine incommensurabiles. Rursus fiat vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF, ex eodem corollario



c 6. decī.

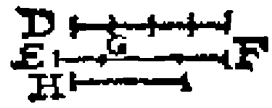
d 9. decī.

propoſ.6. huius lib. Dico EG, eſſe tertiam Apotomen.

a 6. deci. [a] Quoniam enim quadrata ex EF,GF, proportionem habentia, quam numeri AB, AC, commenſurabilia ſunt; erunt & rectæ EF,GF, commenſurabiles, ſaltem potentia. Cum ergo EF, oſtenſa ſit Rationalis, erit & GF, Rationalis, cum illi hæc ſit commenſurabilis, vt demonſtrauimus. Et quia AB, AC, atq; adeo & quadrata ex EF, GF, proportionem non habent, quam numeri quadrati; [b] Erunt rectæ EF,GF, longitudine incommenſurabiles. Rationales ergo ſunt EF,GF, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea cum ex EF, auferatur GF, potentia illi ſolum commenſurabilis; [c] reliqua EG, Apotome erit. Dico & tertiam eſſe. Quoniã.n. eſt vt I, ad AB, ita quadratum ex D, ad quadratũ ex EF; & vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratũ ex GF; erit ex æquo vt I, ad AC, ita quadratum ex D, ad quadratum ex GF: Non habent autem numeri I, & AC, proportionem, quã numeri quadrati. Neque igitur quadrata ex D, & GF, proportionem habebunt, quam numeri quadrati. [d] Sunt ergo rectæ D, & GF, longitudine incommenſurabiles. Igitur neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis eſt expoſitæ Rationali D. Poſsit iam EF, plus quam GF, quadrato rectæ H; Oſtendemusque, vt in propoſ. 86. rectam H, eſſe ipſi EF, longitudine commenſurabilem. Quapropter cum tota EF, plus poſsit quam congruens GF, quadrato rectæ H, longitudine ſibi commenſurabilis, & neutra ipſarum EF, GF, longitudine commenſurabilis ſit Rationali [e] D, expoſitæ; erit ex defin. EG, tertia Apotome. Inuenimus ergo tertiam Apotomen. Quod faciendum erat.

A . . . . . C . . . . B

I . . . . . .



b 9. deci.

c 74. deci.

d 9. deci.

e 6. deci.

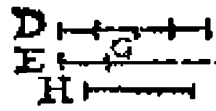
PROBL.

88.
83.

PROBL. 22. PROPOS. 89.

INVENIRE quartam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, ita vt AB, ex illis compoſitus ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum, per ea, quæ in ſcholio 3. propoſ. 29. huius lib. docuimus; exponatur Rationalis D, cui longitudine commẽ ſurabilis ſit EF; eritq; propterea & EF, Rationalis. Quod ſi reliqua fiant, quæ in propoſ. 86. oſtendemus, vt ibi, EG, eſſe Apotomen. Dico & quartam eſſe. Poſsit enim EF, plus quam GF, quadrato rectæ H. Et quia eſt vt AB, ad AC, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex GF; erit per conuerſionem rationis, vt AB, ad CB, ita quadratum ex EF, ad quadratum ex H. Cum ergo AB, & CB, proportionem non habeant, quam numeri quadrati; [a] erunt rectæ EF, & H, longitudine incommenſurabiles. Quoniã igitur tota EF, plus poteſt, quam congruens GF, quadrato rectæ H, ſibi longitudine incommenſurabilis, eſtque eadem tota EF, commenſurabilis longitudine Rationali D; erit ex defin. EG, quarta Apotome. Inuenimus ergo quartam Apotomen. Quod erat faciendum.



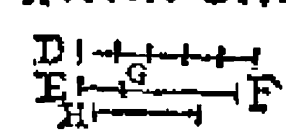
[a] 9. decimi.

89.
84.

THEOR. 23. PROPOS. 90.

INVENIRE quintam Apotomen.

REPERTIS duobus numeris AC, CB, vt in propoſ. præcedenti, fiat conſtructio, vt in propoſ. 87. hoc eſt, ſumatur GF, longitudine commenſurabilis Rationali D, &c. Oſtendemus ergo vt in propoſ. 87. EG, eſſe Apotomen. Dico & ſecundam



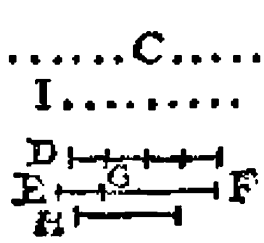
dam esse. Possit enim E F, plus quam G F, quadrato rectæ H. Et quia similiter, vt in propos. 86. ostendemus, per conuersionem rationis, esse vt A B, ad C B, ita quadratũ E F, ad quadratum ex H; erunt rursus, vt in propos. antecedenti, rectæ E F, & H, longitudine incommensurabilis; estque congruens G F, Rationali D, commensurabilis longitudine; erit ex defin. E G, quinta Apotome. Inuenimus ergo quintam Apotomen. Quod faciendum erat.

90. 85.

PROBL. 24. PROPOS. 91.

INVENIRE sextam Apotomen.

REPERTIS tribus numeris A C, C B, & I, vt in propos. 54. ita vt A B, ad neutrum ipsorum A C, C B; & I, ad neutrum ipsorum A B, A C, proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum: exponatur Rationalis D, & reliqua fiãt, vt in propos. 88. Ostendemus ergo similiter, vt ibi, D, & E F, longitudine incommensurabiles esse; & E G, Apotomen esse.



Dico & sextam esse. Nam vt in propos. 88. erunt D, & G F, longitudine quoque incommensurabiles; Atque adeo neutra ipsarum E F, G F, longitudine commensurabilis est expositæ Rationali D. Possit iam E F, plus quam G F, quadrato rectæ H, quam ostendemus, vt in propos. 89. longitudine incommensurabilem esse ipsi E F. Igitur cum tota E F, plus possit, quam congruens G F, quadrato rectæ H, sibi longitudine incommensurabilis, & neutra ipsarum E F, G F, longitudine sit commensurabilis Rationali D; erit ex defin. E G, sexta Apotome. Inuenimus ergo sextam Apotomen. Quod erat faciendum.

SCHO

SCHOLIVM.

SED & expeditius sex dictas Apotomas inueniemus hac ratione, vt Theon docet hoc loco.

SIT inuenienda exempli gratia, prima Apotome. [a] *Reperiatur prius ex binis nominibus prima AB, cuius maius nomen AC, & minus CB. Abscissa igitur ex AC, recta CD, quæ æqualis sit ipsi CB: Dico AD, esse primam Apotomen. Quoniã. n. AC, CB, Rationales sunt potentia tantũ cõmẽsurabiles; erunt etiã AC, DC, Rationales potentia tantum commensurabiles.* [b] *Est ergo AD, Apotome. Et quia AC, plus potest, quam CB, hoc est, quam DC, quadrato rectæ lineæ sibi longitudine cõmensurabilis: & est AC, Rationali expositæ longitudine commensurabilis, ex definitione eius, quæ ex binis nominibus prima dicitur; erit ex definitione Apotomæ primæ, AD. prima Apotome. Eadẽ ratione ex cæteris, quæ ex binis nominibus dicũtur, & alias Apotomas inueniemus, vt ex secunda secundam, ex tertia tertiam, ex quarta quartam, ex quinta quintam, & ex sexta sextã, si minora nomina ex maioribus auferamus.*



[a] 49. deci.

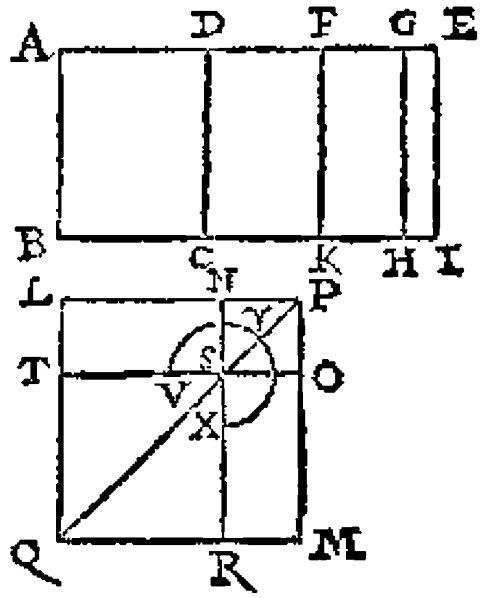
[b] 74. deci.

THEOR. 68. PROPOS. 92.

91. 86.

SI spatium contineatur sub Rationali, & Apotoma prima; Recta linea spatium potens Apotome est.

CONTINEATVR spatium AC, sub Rationali AB, & Apotoma prima AD. Dico rectam lineam, quæ potest spatium AC, Apotomen esse. Sit ipsi AD, congruens DE. Erunt igitur AE, DE, ex defin. Apotomæ primæ, Rationales potentia solum commẽsurabiles; & tota AE, longitudine commensurabilis Rationali AB; & denique eadem AE, tota plus poterit, quam



quam congruẽs DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & quadrato ex FE, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex DE, applicetur ad AE, rectangulũ æquale ſub AG, GE, deficiens figura quadrata, per lemma 2. propoſ. 17. huius lib. Et quia AE, plus poteſt, quã DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis:

[a] 18. *decim.* [a] eruntrectæ AG, GE, longitudine commenſurabiles;

[b] 16. *decim.* [b] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commẽſurabilis erit: Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine cõmenſurabilis. [c] Igitur & vtraq; AG, GE, ipſi AB, longitudine eſt cõmenſurabilis; atq; ex definitione 6. Rationalis. Quare ductis GH, EI, ipſi AB, parallelis, quæ ipſi

[c] 12. *decim.*

[d] 20. *decim.* BC, productæ occurant in H, I; [d] erit vtrumque rectangulum AH, GI, contentum ſub duabus rationalibus longitudine cõmenſurabilibus, Rationale. Rurſus quia vtraq; DF, FE, longitudine cõmenſurabilis eſt ipſi DE; & DE, longitudine incõmenſurabilis eſt Rationali AB; (Nã ſi cõmenſurabilis eſſet lõgitudine, cũ & AE, ſit eidem AB, longitudine commenſurabilis; [e] eſſent AE, DE, longitudine quoque commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponuntur enim ſolum potentia commẽſurabiles:)

[e] 12. *decim.*

[f] 14. *decim.* [f] erit etiam vtraque ipſarum DF, FE, ipſi AB, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam vtraq; DF, FE, Rationali DE, commenſurabilis, Rationalis eſt; Erunt propterea tam AB, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles. Quare ducta FK, ipſi AB, parallela, [g] erit vtrumque rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium.

[g] 23. *decim.*

[h] 14. *ſecun.* IAM vero ipſi AH, [h] fiat quadratum æquale LM, & ipſi GI, æquale fiat quadratum NO, communem habens

bens cum LM, angulum LPM. [a] Erunt igitur quadrata LM, NO, circa eandem diametrum, quæ ſit PQ. Perficiatur autem figura, vt vides. Quoniam igitur rectangulum ſub AG, GE, per conſtructionem, æquale eſt quadrato ex FE; [b] erunt tres rectæ AG, FE, GE, proportionales; [c] Ac propterea cum AH, FI, GI, eandem cum ipſis habeant rationem; erit FI, mediũ proportionale inter AH, GI, hoc eſt, inter quadrata LM, NO, illis æqualia. Eſt autem inter eadem LM, NO, per lemma propoſ. 14. huius lib. medium quoque proportionale LO. Igitur rectangula FI, LO, æqualia ſunt: [d] Sed ipſi FI, æquale eſt DK, & ipſi LO, æquale eſt MN. Eſt ergo totum DI, toti gnomini VYX, cum quadrato NO, æquale. Eſt autem & totum AI, per conſtructionem, æquale quadratis LM, NO, Igitur & reliquum AC, reliquo quadrato TR, eſt æquale; Ac propterea recta TS, poteſt ſpatium AC. Dico TS, Apotomen eſſe.

[a] 26. ſexti

[b] 17. ſexti

[c] 1. ſexti

[d] 36. primi

QVONIAM enim ſpatia AH, GI, oſtenſa ſunt Rationalia; & eis æqualia ſunt LM, NO, erunt quoq; quadrata LM, NO, Rationalia; atq; adeo & rectæ TO, SO, Rationales. Rurſus quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, illi æquale, Medium. Incommenſurabilia ergo ſunt LO, & NO, cum vnum ſit Irrationale, alterum vero Rationale. Igitur rectæ TO, SO, [e] eandem rationem habentes cum LO, NO; [f] longitudine incommenſurabiles ſunt; [g] Atque idcirco reliqua TS, Apotome eſt. Si ſpatium ergo contineatur ſub Rationali, & Apotoma prima, &c. Quod demonſtrandum erat.

[e] 1. ſexti

[f] 10. deci.

[g] 74. deci.

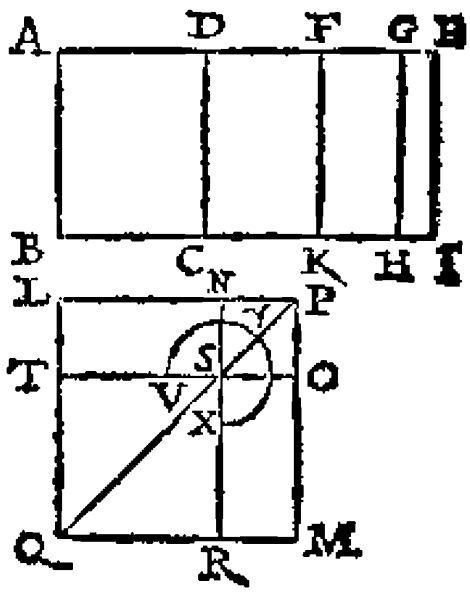
THEOR. 69. PROPOS. 93.

92. 87.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome prima.

CON-

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſecunda AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, Mediæ Apotomen eſſe primam. Sit ipſi AD, congruens recta DE. Erunt ergo AE, DE, ex definitione Apotomæ ſecundæ, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & congruens DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Secetur DE, bifariã in F, & reliqua omnia conſtruãtur, vt in propoſitione præcedenti. [a] Erunt quæ rurſus, vt in antecedenti propoſitione, AG, GE, longitudine commenſurabiles; [b] ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis. Eſt autem AE, Rationali AB, longitudine incommenſurabilis: (Si enim commenſurabilis eſſet ipſi AB, longitudine, cum DE, eidem AB ponatur longitudine commenſurabilis; [c] eſſent AE, DE, inter ſe quoque commenſurabiles longitudine. Quod eſt abſurdum, ponuntur enim potentia tantum commenſurabiles.) [d] Igitur & vtraque ipſarum AG, GE, longitudine incommenſurabilis eſt eidé AE. Eſt autem vtraque AG, GE, Rationali AE, commẽſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt tam AB, AG, quam AB, GE, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Atque idcirco rectangulum vtrumq; AH, GI, contentum ſub Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, Medium eſt. Rurſus quia vtraque DF, FE, ipſi DE, longitudine commenſurabilis eſt; & ponitur DE, Rationali AB, longitudine commenſurabilis; erit quoque, vt in ſcholio propoſitionis 12. huius lib. oſtendimus, eidem AB, Rationali longitudine commẽſurabilis vtraque DF, FE; atque adeo & Rationalis. [f] Vtrumque ergo rectangulum DK, FI, contentum ſub Rationalibus longitudine



[a] 18. decim.
[b] 16. decim.
[c] 12. decim.
[d] 14. decim.
[e] 22. decim.
[f] 20. decim.

gitudine commenſurabilibus, Rationale eſt. Iam vero, vt in præcedenti propoſ. demonſtrabimus rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, Mediæ Apotomen eſſe primá.

QVONIAM enim AG, GE, longitudine ſunt cõmenſurabiles, [a] erunt & AH, GI, eandem cum illis habentia rationem, commenſurabilia; atque adeo & LM, NO, quadrata illis æqualia, commenſurabilia erunt. Igitur & latera eorum nempe rectæ TO, SO, ſaltem potentia erunt commenſurabiles. Sunt autem & Mediæ, quod quadrata LM, NO, Mediis AH, GI, æqualia, (oſtenſa. n. ſunt AH, GI, Media eſſe,) Media ſint. Et quoniam FI, atque adeo ſibi æquale LO, Rationale eſt, propterea que Medio NO, incommenſurabile; [b] erunt rectæ TO, SO, eandem cum illis rationem habentes, longitudine incõmenſurabiles. Cum ergo & Mediæ ſint oſtenſæ, & commenſurabiles; erunt TO, SO, Mediæ potentia tantum commenſurabiles. Cum ergo contineant LO, quod Rationale eſt oſtenſum; [c] erit TS, Mediæ Apotome prima. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſecunda, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 10. deci.

[b] 11. deci.

[c] 75. deci.

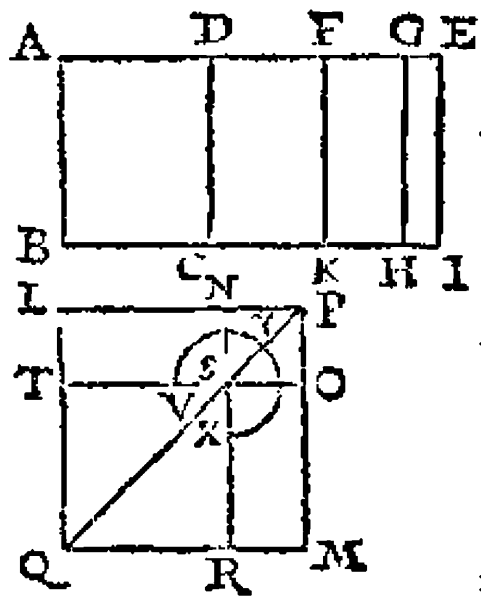
THEOR. 70. PROPOS. 94.

93. 88.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia; Recta linea ſpatium potens, Mediæ eſt Apotome ſecunda.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma tertia AD. Dico rectam, quæ ſpatium AC, poteſt, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam. Sit. n. ipſi AD, congruës DE. Erunt ergo, ex definitione Apotomæ tertiæ, AE, DE, Rationales potentia tantũ cõmenſurabiles, & neutra ipſarum AE, DE, longitudine commenſurabilis Rationali AB; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis.

ſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & cætera fiant, vt in propoſ. 92. eruntque rurſus, vt ibi, AG, GE, longitudine inter ſe commenſurabiles; [a] Ac propterea & vtraque toti AE, longitudine commenſurabilis erit. Eſt autem AE, poſita incommenſurabilis longitudine Rationali AB. [b] Igitur & vtraque AG, GE, eidem AB, longitudine erit incommenſurabilis. Cũ ergo vtraque AG, GE, Rationali AE, commenſurabilis, Rationalis ſit; erunt tam AB, AG, quã AB, GE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles; [c] Ac propterea vtrumque rectangulum AH, GI, Medium erit. Rurſus quia DE, longitudine ponitur incommenſurabilis Rationali AB; erit quoque vtraque DF, FE, ipſi DF, longitudine commenſurabilis exiſtens, [d] eidem AB longitudine incommenſurabilis. Cum ergo vtraque DF, FE, Rationali DE, cõmenſurabilis, ſit Rationalis; erunt tam AE, DF, quam AB, FE, Rationales potentia tantum commenſurabiles; [e] atque propterea vtrumque rectangulum DK, FI, Medium erit. Similiter iam demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Mediæ Apotomen ſecundam.



QVONIAM enim AH, GI, Media ſunt oſtenſa; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, Media; Ac propterea & rectæ TO, SO, Mediæ. Et quia AH, GI, eandem habentia rationem, quam AG, GE, quas oſtendimus commenſurabiles eſſe, commenſurabilia ſunt; Erunt & quadrata LM, NO, commenſurabilia. Igitur & rectæ TO, SO, commenſurabiles, ſaltem potentia. At vero quia AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles, hoc eſt, longitudine incommenſurabiles, eſtque ipſi AE, longitudine oſtenſa commenſurabilis GE, ipſi vero DE,

[a] 16. deci.
[b] 14. deci.
[c] 23. deci.
[d] 14. deci.
[e] 23. deci.
[f] 10. deci.

DE, commenſurabilis eſt longitudine FE; erunt ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. & GE, FE, longitudine incommenſurabiles; [a] ac propterea GI, FI, eandem rationem habentia, quam GE, FE, hoc eſt, illis æqualia NO, LO, incommenſurabilia. Quare TO, SO, eandem rationem habentes, quam LO, NO, longitudine incommenſurabiles ſunt. Oſtenſæ ſunt autem Mediæ, & commenſurabiles. Mediæ ergo ſunt TO, SO, potentia ſolum commenſurabiles. Et quoniam continent LO, Medium; (cum enim LO, æquale ſit ipſi FI, vt cõſtat ex propoſ. 92. quod Medium eſſe oſtẽdimus; erit & LO, Medium.) [b] erit TS, Mediæ Apotome ſecunda. Si ergo ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma tertia, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 18. deci.

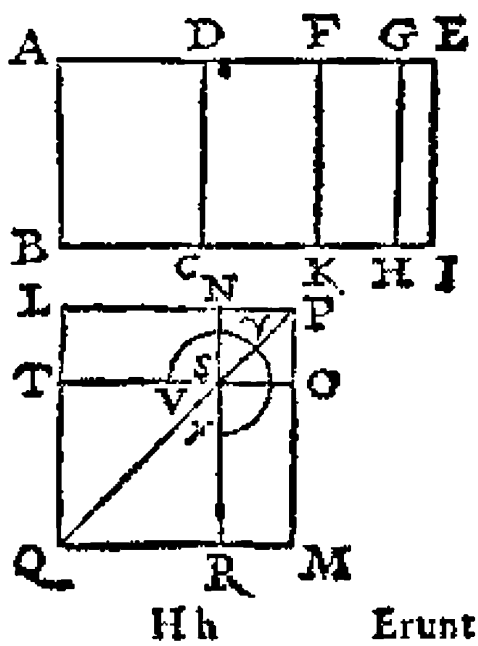
[b] 76. deci.

THEOR. 71. PROPOS. 95.

94. 89.

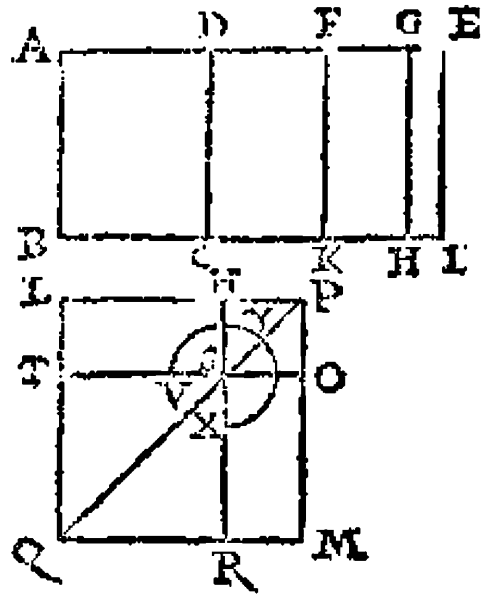
SI ſpatium continetur ſub Rationali, & Apotoma quarta; recta linea ſpatium potens Minor eſt.

CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma quarta AD. Dico rectam lineam, quę poteſt ſpatium AC, Minorem eſſe. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo AE, DE, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, ex definitione Apotomæ quartæ; & AE, longitudine commenſurabilis Rationali AB, & eadem AE, plus poterit, quã DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, biſariam in F, & reliqua oĩa fiant, vt prius.



Hh Erunt

a 29. deci. a Eruntergo AG, GE, incommenſurabiles longitudine, quandoquidem AE, plus poteſt, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; & ad AE, applicatum eſt rectangulũ ſub AG, GE, æquale quartæ parti quadrati ex DE, deficienſque figura quadrata. Et quia AE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; b erit rectangulum AI, Rationale. Rurſus quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; c erit DI, atque adeo & eius dimidium FI, Medium. Amplius cum AG, GE, ſint longitudine incommenſurabiles; d incommenſurabilia erunt AH, GI, eandem cum illis proportionem habentia. Iam vero ſimiliter demonſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe Minorem.



b 20. deci.

c 22. deci.

d 10. deci.

QVONIAM enim ex conſtructione, rectangulo AI, æquale eſt compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO: Eſt autem illud oſtẽſum Rationale; erit & cõpoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, Rationale. Itẽ quia FI, Medium eſt oſtenſum; erit & LO, cõtentum ſub TO, SO, illi æquale, Medium. Denique quoniam AH, GI, incommenſurabilia ſunt demonſtrata; erunt & quadrata LM, NO, illis æqualia, incommenſurabilia; Atq; adeo recta TO, SO, potentia incommenſurabiles. Qua propter cum TO, SO, potentia ſint incommenſurabiles, ſitque compoſitum ex quadratis ipſarum, Rationale: rectangulum vero ſub ipſis, Medium; e erit reliqua TS, Minor. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotome quarta, &c. Quod demonſtrandum erat.

e 77. deci.

95. THEOR. 72. PROPOS. 96.

90. SI ſpatium contineatur ſub Rationa

li,

li, & Apotoma quinta; Recta linea ſpatium potens eſt, quę cum Rationali Medium totum efficit.

CONTINEATVR ſpatium AC, (repetita figura proximè antecedentis propoſitionis) ſub Rationali AB, & Apotoma quinta AD. Dico rectam lineam, quæ ſpatium AC poteſt, eſſe eam, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Sit ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ quintæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & DE, Rationali AB, commenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F, & reliqua conſtruantur, vt prius. Erunt ergo rurſus, vt in antecedenti propoſ. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia AE, Rationalis longitudine incommenſurabilis eſt Rationali AB, vt in propoſ. 93. diximus; [a] erit rectangulum AI, Medium. Item quia DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine commenſurabilis; [b] erit DI, atque idcirco & eius dimidium FI, Rationale. Rurſus erũt, vt in præcedenti propoſ. AH, GI, incommenſurabilia; poteritq;, vt oſtenſum eſt in propoſ. 92. recta TS, ſpatiũ AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit.

[a] 22. deci.

[b] 20. deci.

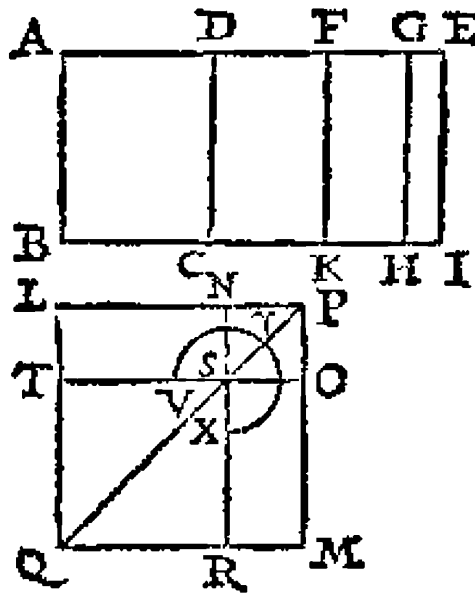
QVONIAM enim oſtenſum eſt AI, Medium eſſe; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarũ TO, SO, illi æquale, Medium. Item quia demõſtrauimus FI, Rationale eſſe; erit & LO, rectangulũ ſub TO, SO, contentum, cum illi ſit æquale, Rationale. Sunt autẽ & TO, SO, potentia incommenſurabiles, vt in propoſ. antecedenti eſt demonſtratum. Igitur cum TO, SO, potentia incommenſurabiles ſint, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; [c] erit reliqua TS, ea, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Quocirca ſi ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma quinta, &c. Quod erat demonſtrandum.

[c] 78. deci.

96. 91.

THEOR. 73. PROPOS. 97.

SI ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta; Recta linea ſpatium potens eſt, quæ cum Medio Medium totum efficit.



CONTINEATVR ſpatium AC, ſub Rationali AB, & Apotoma ſexta AD. Dico rectam, quæ poteſt ſpatium AC, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totũ efficit. Sit.n. ipſi AD, congruens DE. Erunt ergo ex definitione Apotomæ ſextæ, AE, DE, Rationales potentia tantum commenſurabiles, & neutra ipſarũ AE, DL, Rationali AB, cõmenſurabilis longitudine; Et denique AE, plus poterit, quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Secetur DE, bifariam in F. & reliqua conſtruantur, vt ſupra. Erunt ergo rurſus vt in propoſ. 95. AG, GE, longitudine incommenſurabiles. Et quia tam AE, quam DE, Rationalis eſt, & Rationali AB, longitudine incommenſurabilis; [a] erit tam AI, quam DI, atque adeo & huius dimidium FI, Medium. Eruntque vt in propoſ. 95. AH, GI, incommenſurabilia. Et quoniam AE, DE, potentia ſolum ſunt commenſurabiles; [b] Erunt AI, DI, eandem habentia cum illis proportionem, incommenſurabilia; Atque adeo cum DI, FI, commenſurabilia ſint, [c] erit FI, ipſi AI, incommenſurabile. Iam uero demõſtrabimus, vt in propoſ. 92. rectam TS, poſſe ſpatium AC. Dico TS, eſſe eam, quæ cum Medio Medium totum efficit.

[a] 22. deci.
[b] 10. deci.
[c] 14. deci.

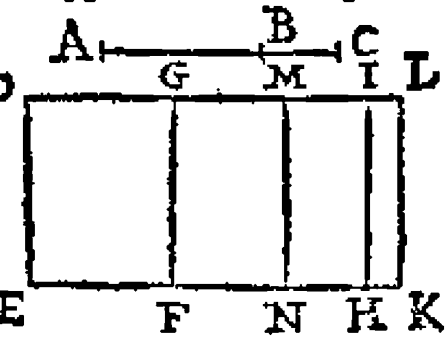
QVO-

QVONIAM enim AI, Medium oſtendimus; erit & compoſitum ex quadratis LM, NO, rectarum TO, SO, illi æquale, Medium. Itẽ quia FI, Mediũ oſtẽſum eſt; erit & LO, illi æquale, contentumque ſub TO, SO, Medium. Rurſus quoniam FI, ipſi AI, eſt incommenſurabile, vt oſtendimus; erit quoque LO, ſub TO, SO, contentum, incommenſurabile compoſito ex quadratis rectarũ TO, SO; propterea quod LO, ipſi FI, & compoſitum ex quadratis rectarum TO, SO, ipſi AI, eſt æquale. Deniq; TO, SO, potentia incommenſurabiles ſunt, vt in propoſ. 95. eſt demonſtratum. Quamobrem cum TO, SO, ſint potentia incommenſurabiles, & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum ſub ipſis Medium, & adhuc compoſito ex quadratis ipſarum incommenſurabile; [a] erit reliqua TS, ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Si igitur ſpatium contineatur ſub Rationali, & Apotoma ſexta, &c. Quod erat oſtendendum. [a] 79. decimi

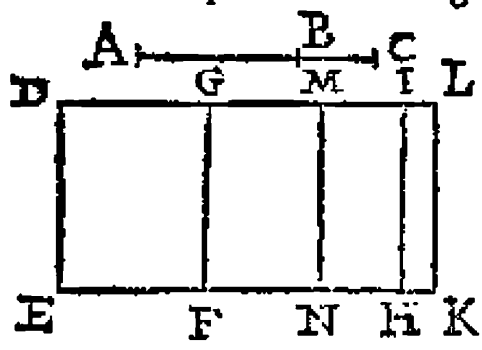
THEOR. 74. PROPOS. 98. 97. 92.

QVADRATVM Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam.

SIT Apotome AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Rationales potentia ſolum commenſurabiles: [b] & ad Rationalem DE, applicetur rectangulum DF, æquale quadrato ex AB, latitudiné faciens DG. Dico DG, eſſe Apotomen primã. Ad eandem. n. DE, ap applicetur rectangulũ DH, æquale quadrato ex AC; & ad IH, aliud IK, æquale quadrato ex BC; ita vt totũ tũ DK, æquale ſit compoſito ex quadratis rectarũ AC, BC. [b] 45. primi



a 7. secun. BC. a Et quoniam compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, æquale eſt rectangulo bis ſub AC, BC, vna cũ quadrato ex AB; ſi auferantur quadratũ ex AB, & rectangulum DF; relinquetur GK, rectãgulo bis ſub AC, BC, æquale; atque adeo diuiſa GL, biſariam in M, ductaq; MN, ipſi DE, parallela, erit MK, æquale rectangulo ſub AC, BC. Et quoniam AC, BC, Rationales ſunt; erunt quoq; quadrata ex AC, BC,



b 16. deci. Rationalia; ideoque commenſurabilia. b Cum ergo & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, vtrique ipſorum ſit commẽſurabile; erit & illud compoſitum, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale. Quod cum applicetur ad

c 21. deci. Rationalem DE, c erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia AC, BC, Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles; erit rectangulũ ſub ipſis, atque adeo & eius duplum GK, Medium. Quod

d 23. deci. cum applicetur ad Rationalem GF, d erit GL, Rationalis ipſi GF, hoc eſt, ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Et quoniam DK, Rationale, & GK, Medium, hoc

e 10. deci. eſt, Irrationale, incommenſurabilia ſunt; e erunt rectæ DL, GL, eandem habentes proportionem. quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Quare cum & Rationales ſint demonſtratæ; erunt DL, GL, Rationales

f 74. deci. potentia tantum commenſurabiles; f Ac propterea reliqua DG, Apotome erit. Dico & primam eſſe.

QVONIAM enim per lemma propoſ. 54. huius lib. rectangulum ſub AC, BC, hoc eſt, MK, medium eſt proportionale inter quadrata rectarũ AC, BC, hoc eſt, inter DH, IK; erunt DH, MK, IK, continue proportionalia; atque adeo & rectæ DI, ML, IL, eandem cum illis habentes proportionem, continue proportionales ſunt.

g 27. deci. g Quare rectangulum ſub DI, IL, æquale eſt quadrato ex ML, hoc eſt, quartæ parti quadrati ex GL. Et quoniam quadrata ex AC, BC, hoc eſt illis æqualia DH, IK, commenſurabilia ſunt,

h 10. deci. h erunt rectæ DI, IL, eandem cum illis ha-

lis habentes proportionem, longitudine commenſurabiles. Itaque cum duæ rectæ DL, GL, inæquales ſint, & ad maiorem DL, applicatum rectãgulum ſub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficienſq; figura quadrata; atque ſit oſtenſa DI, ipſi IL, longitudine commenſurabilis; [a] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis longitudine. Quare cum ſit oſtenſum DG, eſſe Apotomen, & totam DL, plus poſſe, quam GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, atque eandem totam commenſurabilem eſſe longitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome prima. Quadratum ergo Apotomæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen primam. Quod oſtendendum erat.

[a] 18. decimi.

THEOR. 75. PROPOS. 99. 98. 93.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatũ latitudinem facit Apotomen ſecundam.

SIT Mediæ Apotome prima AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles, contineantque Rationale: [b] Et ad Rationalẽ DE, quadrato ex AB, æquale applicetur rectangulum DF, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen ſecũdam eſſe. Conſtruantur. n. eadẽ, quæ in antecedenti propoſ. ita vt rurſus DH, IK, æqualia ſint quadratis ex AC, BC; & GK, æquale ei, quod ſub AC, BC, bis continetur; ac proinde MK, ei, quod ſub AC, BC, continetur ſemel. Quoniam igitur AC, BC, Mediæ ſunt potentia commenſurabiles; erunt & earum quadrata, hoc eſt, illis æqualia, DH, IK, Media, & commenſurabilia; [c] ac proinde & totum DK, vtrique illorum commenſurabile erit. Igitur & Medium. per coroll. propoſ. 24. huius lib. Cũ ergo DK, applicetur ad Rationalẽ DE, [d] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine incõmenſurabilis.

[b] 45. primi

[c] 16. decimi.

[d] 23. decimi.

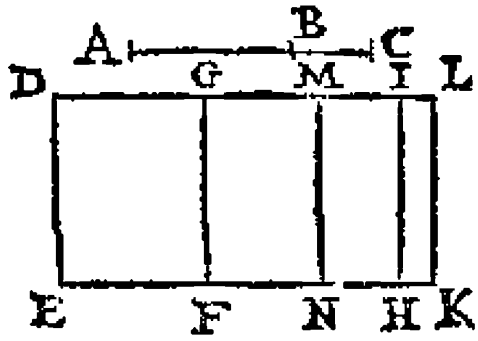
bilis. Rursus quia rectangulum sub AC, BC, Rationale ponitur, erit quoque eius duplum GK, Rationale. Quod
a 21. decim. cum applicetur ad Rationalem DE, a erit GL, Rationalis longitudine cõmensurabilis ipsi DE. Quia vero DK, Medium, id est, Irrationale, & GK, Rationale, incommẽ
b 16. decim. surabilia sunt; b erunt rectæ DL, GL, eandem habentes cum illis rationem, longitudine incommensurabiles. Cum ergo Rationales sint ostensæ, erunt DL, GL, Ra-
c 74. decim. tionales potentia tantum commensurabiles; c Ac propterea reliqua DG, Apotome est. Dico & secundam esse. Nam similiter, vt in præcedenti propos. demonstrabimus totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Quare cum cõgruens GL, ostensa sit longitudine commensurabilis Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome secunda. Quadratum ergo Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen secundã. Quod ostendendum erat.

99. 94.

THEOR. 76. PROPOS. 100.

QVADRATVM Mediæ Apotomæ secundæ ad Rationalem applicatũ, latitudinem facit Apotomen tertiam.

SIT Mediæ Apotome secũda AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint Mediæ potentia tantũ commen-
d 45. primi surabiles, contineantque Medium: d Et ad Rationalem DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudiné faciens DG. Dico DG, esse tertiam Apotomen. Eadem enim fiant, quæ supra. Ostẽdemus iã, vt in propos. præcedenti, DK, Medium esse,



e 23. decim. e atque adeo rectã DL, Rationalem ipsi DE, longitudine incommensurabilem. Et quia

quia rectangulum ſub AC,BC,Medium eſt,atque ob id, & eius duplum GK ; erit quoque GL, Rationalis ipſi DE, lõgitudine incommẽſurabilis. Quia vero AC,BC, longitudine ſunt incommenſurabiles, eſtque vt AC, ad BC,ita per lemma 3.propoſ.19.huius lib. quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC; [b] erit quadratum ex AC, incommenſurabile rectangulo ſub AC, BC. [c] Eſt autem quadrato ex AC, commenſurabile compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC ; quod quadrata ex rectis AC, BC, potentia commenſurabilibus deſcripta, commenſurabilia ſint ; rectangulo vero ſub AC, BC, commenſurabile eſt rectangulum bis ſub AC, BC. Igitur ex ſcholio propoſ. 14. huius lib. compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC,hoc eſt,DK, incommenſurabile eſt rectangulo bis ſub AC, BC, hoc eſt,ipſi GK ; [d] Atque adeo rectę DL,GL,eandem habẽtes rationem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles ſunt. Sunt autem oſtenſę & Rationales.Rationales ergo ſunt DL,GL, potentia ſolum commenſurabiles; [e] Ac proinde reliqua DG, Apotome eſt. Dico eſſe & tertiam. Similiter enim,vt in propoſ.98.demonſtrabimus DL, totam plus poſſe, quàm GL, congruentem, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Cum ergo neutra ipſarum DL,GL, Rationali DE, longitudine ſit cõmenſurabilis. vt demonſtratũ eſt;erit ex defin.DG,Apotome tertia.Quadratũ igitur Mediæ Apotomæ,ſecundę ad Rationalem applicatũ,&c.Quod erat oſtendendum.

[a] 23. deci.
[b] 15. deci.
[c] 16. deci.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.

THEOR. 77. PROPOS. 101.

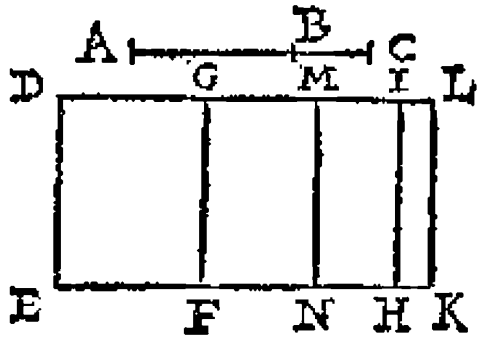
100.
95.

QVADRATVM Minoris ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quartam.

SIT Minor AB,& ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia incommenſurabiles ſint,facientesq; compoſitum quidem ex quadratis rectarum AC,BC,Rationale;

[a] 45. primi

nale; rectangulum vero ſub AC, BC, *Medium*: [a] & ad Rationalem DE, applicetur ſpatium DF, quadrato ex AB, æquale latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen eſſe quartam. Fiant enim omnia, vt in præcedentibus. Quoniã igitur compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, Rationale eſt; [b] erit DL, Rationalis ipſi DE, longitudine commenſurabilis. Item quia rectangulum ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium eſt; [c] erit GL, Rationalis ipſi DE, longitudine incommenſurabilis. Rurſus quoniam DK, Rationale, & GK, Irrationale, nempe Mediũ, incommenſurabilia ſunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipſis habentes rationem longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia tantum commenſurabiles; [e] Ac propterea reliqua DG, Apotome eſt. Dico & quartam eſſe. Quoniam enim AC, BC, potentia ſunt incommenſurabiles; Erunt etiam quadrata, hoc eſt, ipſis æqualia, DH, IK, incommenſurabilia; [f] Ac propterea rectæ DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Cum ergo rectangulum ſub DI, IL, æquale ſit quadrato ex ML, id eſt, quartæ parti quadrati ex GL, vt in propoſ. 98. eſt demonſtratum; [g] poterit DL, plus quam GL, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; quandoquidem ad DL, maiorem applicatum eſt rectangulum ſub DI, IL, æquale quartæ parti quadrati ex GL, minore, deficiens figura quadrata, diuidensq; maiorem DL, in partes DI, IL, longitudine incommenſurabiles. Itaque cum tota DL, plus poſſit quam congruens GI, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; ſitq; eadẽ tota DL, Rationali DE, longitudine oſtenſa commenſurabilis; erit ex defin. DG, Apotome quarta. Quadratũ igitur *Minoris* ad Rationalem applicatum, &c. Quod erat demonſtrandum.



[b] 21. deci.

[c] 23. deci.

[d] 30. deci.

[e] 74. deci.

[f] 10. deci.

[g] 19. deci.

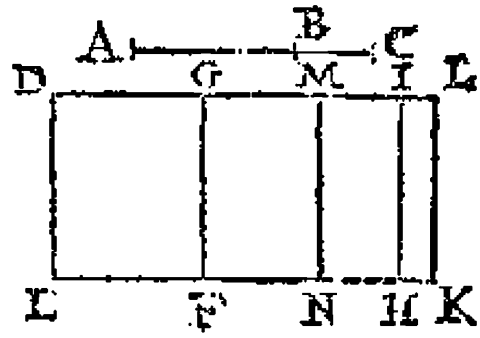
THEOR.

THEOR. 78. PROPOS. 102.

101. 96.

QVADRATVM eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen quintam.

SIT recta cum *Rationali* Medium totum efficiens AB, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommensurabiles, faciantq; compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; rectangulum vero sub iisdem AC, BC, Rationale: [a] Et ad Rationalē DE, applicetur DF, æquale quadrato ex AB, latitudinem faciens DG. Dico DG, Apotomen quintam esse. Construantur.n.eadē, quæ supra. Qm̄ igitur compositum ex quadratis rectarum AC, BC, atqueadeo & illi æquale DK, Medium est; [b] erit DL, *Rationalis* ipsi DE, longitudine incommensurabilis. Item quia rectangulum sub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Rationale est; [c] erit GL, Rationalis ipsi DE, longitudine commensurabilis. Et quia DK, Medium seu Irrationale, & GK, Rationale, incommensurabilia sunt; [d] erunt DL, GL, eandem cum ipsis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sunt autem & Rationales ostensæ. Rationales ergo sunt DL, GL, potentia solum commensurabiles; [e] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico & quintam esse. Eodem.n.modo, vt in antecedēti propos. demonstrabimus DL, totam plus posse quam GL, congruentem, quadrato sibi longitudine incommensurabilis. Quare cum congruens GL, demonstrata sit longitudine commensurabilis *Rationali* DE; erit ex defin.



[a] 45. primi

[b] 23. deci.

[c] 21. deci.

[d] 18. deci.

[e] 74. deci.

DG,

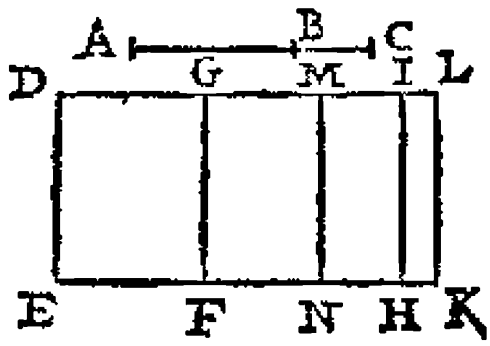
DG, Apotome quinta. Quadratum ergo eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, &c. Quod demonſtrandum erat.

102. THEOR. 79. PROPOS. 103.

97.

QVADRATVM eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, latitudinem facit Apotomen ſextam.

SIT recta cum Medio Medium totum efficiens AB, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, potentia ſint incommenſurabiles, faciantque & compoſitum ex quadratis rectarum AC, BC, Medium, & rectangulum ſub iiſdem AC, BC, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarũ:



[a] Et ad Rationalem DE, applicetur quadrato ex AB, ſpatium æquale DF, latitudinem faciẽs DG. Dico DG, eſſe ſextam Apotomen. Ead. n. fiant, quæ ſupra. Quoniã igitur tã compoſitũ ex quadratis rectarũ AC, BC, hoc eſt, illi æquale DK, quam rectangulũ ſub AC, BC, atque adeo & eius duplum GK, Medium eſt; [b] Erit tam DL, quam GK, Rationalis ipſis DE, longitudine incõmenſurabilis. Et quia rectangulum ſub AC, BC, incõmenſurabile eſt compoſito ex quadratis rectarum AC, BC; Et ſunt rectangulum ſub AC, BC, & eius duplum GK, commenſurabilia; [c] Erit & GK, eidem compoſito, hoc eſt, ipſi DK, incõmenſurabile; [d] propterea q; rectæ DL, GL, eandem habentes rationem, quam DK, GK, longitudine incommenſurabiles. Oſtenſæ ſunt autem & Rationales. Rationales ergo ſunt DL, GL, potentia ſolum

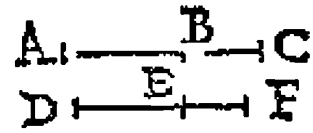
[a] 45. primi
[b] 23. deci.
[c] 14. deci.
[d] 10. deci.

lum commensurabiles; [a] Atq; idcirco reliqua DG, Apotome est. Dico esse & sextam. Ostendemus.n. similiter, vt propos. 101. totam DL, plus posse, quam congruentem GL, quadrato rectæ sibi longitudine incommmensurabilis. Cum igitur neutra ipsarum DL, GL, commẽsurabilis sit lõgitudine Rationali DE; erit ex defin. DG, Apotome sexta. Quadratum ergo eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, &c. Quod erat ostendendum. [a] 74. deci.

THEOR. 80. PROPOS. 104. 103. 98.

RECTA linea Apotomæ longitudine commensurabilis; & ipsa Apotome est, atque ordine eadem.

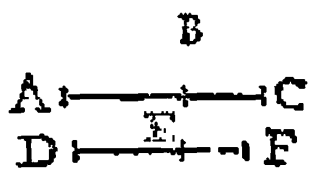
SIT Apotome AB, & ipsi congruẽs BC, ita vt AC, BC, sint Rationales potentia solum commensurabiles. Sit autem ipsi AB, longitudine commensurabilis DE. Dico & DE, Apotomen esse, atq; ordine eandẽ ipsi AB. [b] Fiat enim vt AB, ad DE, ita BC, ad EF. [c] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, vel vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, longitudine ponuntur commensurabiles; [d] Erunt quoque AC, DF, necnon & BC, EF, commensurabiles longitudine. Et quia AC, BC, sunt Rationales, erunt etiam illis commensurabiles DF, EF, Rationales. Rursus quia est vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando, vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: & sunt AC, BC, potentia solum commensurabiles; erunt quoq; ex iis, quæ ad propos. 10. huius libri demonstrauimus, DF, EF, potentia tantum commensurabiles. Quare cum & Rationales sint ostensæ, [e] reliqua DE, Apotome est. Dico & ipsi AB, ordine eandem esse. Posit enim primum AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine commẽ surabilis. Quo posito, [f] poterit & DF, plus quam EF, qua



[b] 12. sexti
[c] 12. quin.
[d] 10. deci.
[e] 74. deci.
[f] 11. deci.

quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis. Si igitur AC, longitudine sit commẽsurabilis Rationali expositæ, vt AB, sit Apotome prima; [a] erit quoque DF, longitudine commensurabilis Rationali expositæ, cum tam Rationalis expositа, quam DF, eidem AC, sit longitudine commensurabilis Igitur ex defin. erit quoque DE, Apotome prima, nempe ordine eadem ipsi AB. Si vero BC, sit longitudine commẽsurabilis Rationali; erit eodem modo EF, Rationali longitudine commensurabilis; Atque adeo vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome secunda. Si denique neutra ipsarum AC, BC, commensurabilis sit longitudine expositæ Rationali; [b] erit quoque neutra ipsarum DF, EF, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Quare vtraque AB, DE, ex defin. erit Apotome tertia.

[a] 13. decim.



[b] 14. decim.

POSSIT iam AC, plus quam BC, quadrato rectæ sibi longitudine incommẽsurabilis Quo posito, [c] poterit & DF, plus quam EF, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis. Quare vt prius, ostendemus DE, esse Apotomen quartam, quintam, vel sextam, &c. Recta ergo linea Apotomæ longitudine commensurabilis, &c. Quod ostendendum erat.

[c] 15. decim.

SCHOLIVM.

IDEM hic dicemus de Apotome, quod ad propos. 67. huius lib. de lineis ex binis nominibus scripsimus. Nimirum, si recta DE, commensurabilis sit ipsi AB, potentia tantum, eodem modo demonstrari posse, (si loco vocis: longitudine commensurabilis: vtamur voce: potentia tantum commensurabilis:) & DE, Apotomen esse: At non posse inferri, illam esse ordine eadem ipsi AB. Non enim sequitur, si tota AC, longitudine sit commensurabilis Rationali expositæ, & DF, eidem esse commensurabilem longitudine, propterea quod non vtraque, nempe Rationalis expositа, & LF, eidem AC, longitudine commensurabilis est; sed Rationalis quidem commensurabilis

rabilis longitudine; At vero DF, potentia tantum ex hypotheſi. Immo vero, ſi AB, ſit Apotome prima, ſecunda, quarta, vel quinta, fieri nullo modo poteſt, vt DE, illi potentia tã tum commenſurabilis, ſit Apotome eadem ordine.

SIT enim AB, prima Apotome, ſecũda, quarta, vel quinta, eique congruens BC; & ſit DE, ipſi AE, potentia tantum commenſurabilis, quam quidem, vt in theoremate, oſtendemus Apotomen eſſe, eique congruentem EF; & partes AB, BC, ad partes DE, EF, eandem proportionem habere cum totis AC, DF. Dico nulla ratione DE, Apotomen eſſe ordine eandem ipſi AE. Nam ſi fieri poteſt, ſit vtraque Apotome prima. Quo poſito, erit tam AC, tota, quam tota DF, ex definitione Apotome prima, Rationali expoſitæ commenſurabilis longitudine; [a] atque adeo & inter ſe longitudine commenſurabiles erunt AC, & DF. Quare cum ſit vt AC, ad DF, ita AB, ad DE; [b] erunt quoque AB, DE, longitudine commenſurabiles. Quod eſt abſurdum. ponitur enim DE, ipſi AB, potentia ſolum commenſurabilis. Non ergo vtraque AB, DE, Apotome prima eſt. Eodem modo neque quarta Apotome erit. Sed neque ſecunda, vel quinta. Eſſet enim vtraque congruens BC, EF, ex defin. longitudine commenſurabilis Rationali expoſitæ, atque adeo & ipſæ inter ſe. Quocirca & AB, DE, inter ſe longitudine forent commenſurabiles. quod non ponitur.

SEMPER tamen verum eſt, ſi AB, eſt Apotome primæ, vel ſecundæ, vel tertiæ, rectã DE, quæ ipſi AB, potentia ſolũ eſt cõmenſurabilis, eſſe quoq; vnã ex illis tribus, licet ordine non eadẽ ſit. Nã hoc poſito, poterit AC, plus q̃ BC, quadrato rectæ ſibi lõgitudine commẽſurabilis. Cũ ergo ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [c] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ lõgitudine ſibi cõmenſurabilis. Quare ex defin. erit DE, Apotome prima, vel ſecũda, vel tertia. Eodẽ modo ſi AB, eſt Apotome quartæ, vel quintæ, vel ſextæ, ita vt AC, plus poſſit, q̃ BC, quadrato rectæ ſibi lõgitudine incõmenſurabilis; erit quoq; DE, Apotome quartæ, vel quintæ, vel ſextæ, quãuis ordine nõ eadẽ ipſi AB: quia rurſus, cũ ſit vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, [d] poterit quoq; DF, plus quam EF, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. Quare ex defin. erit AB, Apotome quartæ, vel quintæ, vel ſextæ.

[a] 12. deci.
[b] 10. deci.
[c] 15. deci.
[d] 15 deci.

I iij

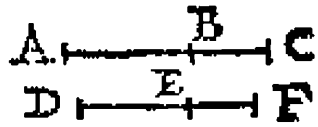
IN ſequentibus autem quatuor propoſitionibus neceſſario erit DE, eadem ordine ipſi AB, licet potentia ſolum illi fuerit commenſurabilis.

104. 99.

THEOR. 81. PROPOS. 105.

RECTA linea Mediæ Apotomæ commenſurabilis; & ipſa Mediæ Apotome eſt, atque ordine erit.

SIT Mediæ Apotome quæcunque A B, eique congruens B C, ita vt A C, BC, ſint Mediæ potentia ſolum commenſurabiles: Sit autem ipſi AB, commenſurabilis DE, ſiue lõgitudine & potẽtia, ſiue potẽtia tm̃. Dico & DE, Mediæ Apotomẽ eſſe, & ipſi A B, ordine eandem.



[a] 22. ſexti
[b] 12. quin.

Fiat.n. vt A B, ad D E, ita BC, ad EF. [b] Erit ergo tota AC, ad totam DF, vt AB, ad DE, & vt BC, ad EF. Quoniam igitur AB, DE, commenſurabiles ponuntur vel longitudine & potentia, vel potentia tantum; [c] erunt quoque BC, EF, & AC, DF, eodẽ modo commenſurabiles. Et quia AC, BC, Mediæ ſunt, [d] erunt quoque DF, EF, illis commenſurabiles, Mediæ. Rurſus, quia eſt vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF: Sunt autẽ AC, BC, potentia ſolum commenſurabiles, erunt etiam, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. DF, EF, ſolum potentia commenſurabiles. Quare cum DF, EF, Mediæ ſint oſtenſæ; [e] erit reliqua DE, Mediæ Apotome. Dico & eandem eſſe ordine ipſi AB. Quoniã.n. eſt AC, ad BC, ita DF, ad EF; & vt AC, ad BC, ita eſt quadratum ex A C, ad rectangulum ſub AC, BC, ex lemmate 3. propoſ. 19. huius lib. & vt DF, ad EF, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, EF; erit quoque vt quadratum ex AC, ad rectangulum ſub AC, BC, ita quadratum ex DF, ad rectangulum ſub DF, E F; Et permutando vt quadratum ex AC,

[c] 10. deci.
[d] 24. deci.
[e] 75. vel 76. decimi.

ex AC, ad quadratum ex DF, ita rectangulum sub AC, BC, ad rectangulum sub DF, EF. Igitur cum quadratū ex AC, commensurabile sit quadrato ex DF, quod rectæ AC, DF, ostensæ sint cōmensurabiles; [a] erit & rectangulum sub AC, BC, rectangulo sub DF, EF, commensurabile. Quare si rectangulum sub AC, BC, sit Rationale, ita vt AB, sit Medię Apotome prima; Erit etiam rectangulum sub DF, EF, Rationale, cum illi sit commensurabile; [b] atque adeo & DE, Mediæ Apotome prima erit. Si vero rectangulum sub AC, BC, sit Medium, ita vt AB, sit Mediæ Apotome secunda; erit quoq; rectangulum sub DF, EF, ei commensurabile, Medium ex coroll propos. 24. huius lib. [c] Ac propterea & DE, Mediæ Apotome secūda erit. Recta ergo linea Mediæ Apotomæ commensurabilis, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 10. deci.

[b] 75. deci

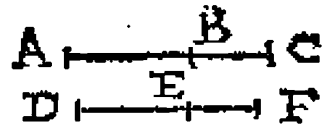
[c] 76. deci.

THEOR. 82. PROPOS. 106.

105. 116. 100.

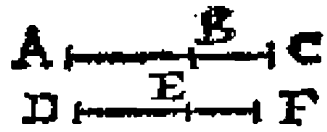
RECTA linea Minori commensurabilis; & ipsa Minor est.

SIT Minor AB, ipsique congruens BC, ita vt AC, BC, potentia sint incommēsurabiles, facientesque compositum quidē ex quadratis rectarum AC, BC, Rationale; rectangulū vero sub iisdē AC, BC, Medium. Sit autē DE, ipsi AB, cōmensurabilis siue lōgitudine & potētia, siue potētia tantū. Dico & DE, Minorē esse. Fiant. n. eadem, quæ supra, ita vt rursus AB, BC, ad DE, EF, candē habeāt rationem, quam AC, ad DF. Erunt ergo rursus, vt in antecedenti propos. DF, EF, ipsis AC, BC, commensurabiles siue longitudine & potentia, siue potētia tantum. Et quoniā est, vt AC, ad DF, ita BC, ad EF; & permutando vt AC, ad BC, ita DF, ad EF; [d] erit vt quadratū ex AC, ad quadratū ex BC, ita quadratū ex DF, ad quadratum ex EF; & cōponendo vt cōpositum ex quadratis rectarū AC, BC, ad quadratū ex BC, ita compositū ex quadra-



[d] 22. sexti

tis rectarum DF, EF, ad quadratum ex EF; & permutando vt compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ad cõpositum ex quadratis rectarum DF, EF, ita quadratum ex BC, ad quadratum ex EF. Est autem quadratũ ex BC, commẽsurabile quadrato ex EF; quod rectas BC, EF, ostenderimus commensurabiles esse. [a] Igitur & compositum ex quadratis rectarum AC, BC, compositi ex quadratis rectarum DF, EF, commensurabile est. Est autem compositum ex quadratis rectarum AC, BC, ex hypothesi, Rationale. Igitur & cõpositum ex quadratis rectarum DF, EF, ex 9. desin. Rationale est. Rursus quoniam, vt in antecedenti propos. demonstrabimus rectangulum sub AC, BC, rectãgulo sub DF, EF, esse commensurabile: ponitur autem rectangulum sub AC, BC, Medium; Erit quoque rectãgulum sub DF, EF, ex coroll. propos. 24. huius lib. Medium. Et quia est vt AC, ad BC, ita DF, ad EF, suntq. AC, BC, potentia incommensurabiles; [b] erunt etiam DF, EF, potentia incommensurabiles. Quam ob rem cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, faciantque compositum quidem ex quadratis rectarũ DF, EF, Rationale, rectangulum vero sub ijsdem DF, EF, Medium; [c] erit DE, Minor. Recta ergo linea Minori commensurabilis, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 10. deci.

[b] 11. deci.

[c] 77. deci.

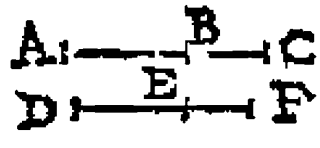
PROBL. 83. PROPOS. 107.

106. 117. 101.

RECTA linea commẽsurabilis ei, quæ cum Rationali Medium totum efficit; & ipsa cum Rationali Medium totũ efficiens est.

SIT recta AB, cum Rationali Mediũ totũ efficiens, & ipsi congruens BC, ita vt AC, BC, sint potentia incommensurabiles, facientesque compositum quidem ex quadratis rectarum AC, BC, Medium; at rectangulum sub

ſub AC,BC, Rationale: Sit autẽ DE, ipſi AB, commenſurabilis quocunque modo. Dico & DE, eſſe, quæ cum Rationali Medium totum efficit, Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, oſtendemus vt in antecedẽti propoſ. compoſitum ex quadratis rectarum AC,BC, commenſurabile eſſe compoſito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud ponatur Medium, erit & hoc, ex coroll. propoſ. 24. huius lib. Medium. Rurſus vt in propoſ. 105. demonſtrabimus rectangulum ſub AC,BC, commenſurabile eſſe rectangulo ſub DF,EF. Cum ergo illud Rationale ponatur, erit & hoc Rationale, ex defin. 9. Sunt deniq; eodẽ modo, vt in præcedenti propoſ. eſt probatum, rectæ DF, EF, potẽtia incõmenſurabiles. Igitur cũ DF, EF, incommenſurabiles ſint potentia, faciantque compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium, rectangulum vero ſub ipſis, Rationale; erit DE, quæ cum Rationali Medium, &c. Quod demonſtrandum erat.



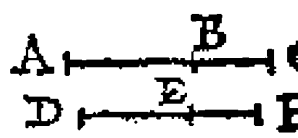
*78. dec.

THEOR. 84. PROPOS. 108.

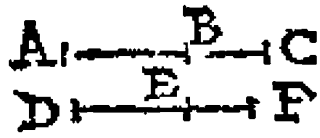
107.
102.

RECTA linea commẽſurabilis ei, quæ cum Medio Medium totum efficit; & ipſa cum Medio Medium totum efficiens eſt.

SIT recta AB, cum Medio Medium totũ efficiens, & ipſi congruens BC, ita vt AC, BC, ſint potentia incõmenſurabiles, facientesque compoſitum ex quadratis ipſarum Medium, & rectãgulum ſub ipſis Medium quoq;, & adhuc incommenſurabile compoſito ex ipſarum quadratis: Sit autẽ DE, ipſi AB, quomodolibet commenſurabilis. Dico & DE, eſſe, quæ cum Medio Medium totum efficit. Conſtructis enim iiſdem, quæ ſupra, probabimus



similiter, vt in propos. 106. compositum ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile esse composito ex quadratis rectarum DF, EF. Cum ergo illud Medium ponatur, erit & hoc ex coroll. propos. 24. huius lib. Mediũ.



Rursus vt in propos. 105. ostendemus, rectangulum sub AC, BC, commensurabile esse rectangulo sub DF, EF. Cum ergo illud sit Medium, erit & hoc Medium, ex eodem coroll. Item vt in propos. 106. erunt quoque DF, EF, potentia incommensurabiles. Postremo quia composito ex quadratis rectarum AC, BC, commensurabile est compositum ex quadratis rectarum DF, EF, vt dictum est; & rectangulo sub AC, BC, commensurabile rectangulũ sub DF, EF: Sunt autem compositũ ex quadratis rectarum AC, BC, & rectangulum sub AC, BC, per hypothesin, incommensurabilia; erunt quoque ex scholio propos. 14. huius lib. compositum ex quadratis rectarum DF, EF, incommẽsurabilia. Quocirca cum DF, EF, potentia sint incommensurabiles, & compositum ex ipsarum quadratis, Medium; necnon & rectangulum sub ipsis, Medium; incommensurabileque composito ex ipsarum quadratis; [a] erit DE, quæ cum Medio Medium totum efficit. Recta igitur linea commensurabilis ei, quæ cum Medio, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 79. deci.

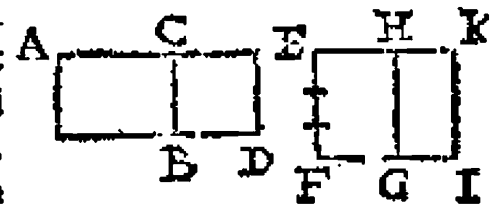
108. 103. THEOR. 85. PROPOS. 109.

MEDIO à Rationali detracto; Recta linea, quæ reliquum spatium potest, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor.

DETRAHATVR a Rationali *AD*, Medium *CD*. Dico rectam, quæ potest spatium reliquum *AB*, esse vel Apotomen, vel Minorẽ. Exponatur. n. Rationalis *EF*, [b] ad quam applicetur rectangulum *EG*, æquale ipsi *AB*, &

[b] 44. primi

AB, & ad GH, aliud HL, æquale ipſi CD, ita vt totum EI, toti AD, ſit æquale. Quoniam igitur EI, æquale Rationali AD, Rationale eſt; [a] erit EK, Rationalis, Rationali EF, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia HI, Medio CD, æquale Medium eſt, [b] erit HK, Rationalis, ipſi EF, lõgitudine incõmenſurabilis. Itaque cum EK, quidem ſit longitudine cõmenſurabilis ipſi EF; at HK, eidem EF, longitudine incõmenſurabilis, [c] erunt EK, HK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia tantum commenſurabiles: [d] propterea quæ reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si plus põt EK, quam HK quadrato rectæ lineæ commenſurabilis ſibi longitudine, cum tota EK, oſtenſa quoque ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome prima. Quare recta potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma prima EH, hoc eſt, ſpatium AB, ſibi æquale, [e] Apotome eſt. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectę ſibi longitudine incommenſurabilis, cum tota EK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit ex definitione EH, Apotome quarta. Quapropter recta potẽs ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma quarta EH, hoc eſt, ſpatium AB, illi æquale, [f] Minor eſt. Medio ergo a Rationali detracto, &c. Quod oſtendendum erat.

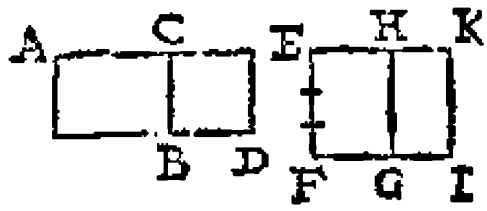


[a] 21. deci.
[b] 23. deci.
[c] 13. deci.
[d] 74. deci.
[e] 92. deci.
[f] 95. quin.

THEOR. 86. PROPOS. 110. 109. 104.

RATIONALI a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel Mediæ Apotome prima, vel cum Rationali Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Rationale CD. Dico rectam, quæ reliquum ſpatium AB, poteſt, eſſe vel Mediæ Apotomen primam, vel eam, quæ cum Rationali Medium totum efficit. Eadem. n. conſtruatur, quæ ſupra. Et quia EI, Medio AD, æquale, Medium eſt; [a] erit EK, Rationalis ipſi EF, longitudine incommenſurabilis. Item quia HI, æquale Rationali CD, Rationale eſt; [b] erit HK, Rationalis ipſi EF, longitudine commenſurabilis. Itaque cum HK, quidem ipſi EF, ſit commenſurabilis longitudine, at EK, eidem EF, longitudine incommenſurabilis; [c] erunt HK, EK, longitudine incommenſurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo ſunt potentia ſolum commenſurabiles; [d] Ac proinde reliqua EH, Apotome eſt, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi lõgitudine commenſurabilis, aut incommenſurabilis. Si EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, cum congruens HK, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis Rationali EF; erit ex defin. EH, Apotome ſecunda. Recta igitur potens ſpatium EG, contentum ſub Rationali EF, & Apotoma ſecunda EH, hoc eſt, ſpatiũ AB, illi æquale, [e] Mediæ eſt Apotome prima. Si vero EK, plus poteſt, quam HK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, cum congruens HK, ſit oſtenſa commenſurabilis longitudine Rationali EF; erit EH, Apotome quinta, ex defin. Recta igitur potens ſpatium EG, contẽtum ſub Rationali EF, & Apotoma quinta EH, hoc eſt ſpatiũ illi æquale AB, [f] eſt ea, quæ cum Rationali Mediũ totum efficit. Quam ob rem Rationali a Medio detracto, &c. Quod oſtendendum erat.



a 23. decim.
b 21. decim.
c 13. decim.
d 74. primi
e 33. decim.

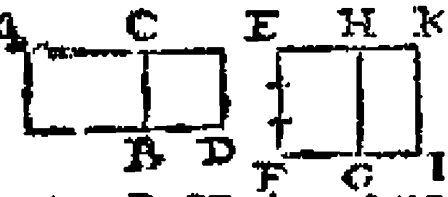
THEOR. 87. PROPOS. 111.

110.
105.

MEDIO a Medio detracto, quod incom-

sit incommensurabile toti; reliquæ duæ Irrationales sunt, vel Mediæ Apotome secunda, vel cum Medio Medium totum efficiens.

DETRAHATVR a Medio AD, Medium CD, quod incommensurabile sit toti AD. Dico rectam, quæ reliquum spatium AB, potest, esse vel Mediæ Apotomẽ secundam, vel eam, quæ cum Medio Medium totum efficit. Cõstructis enim iisdẽ, quæ supra; quoniã EI, HI, Mediis AD, CD, æqualia[c] Media sunt; erũt EK, HK, Rationales ipsi EF, longitudine incommensurabiles. Et quia AD, CD, hoc est, EI, HI, ponuntur incommensurabilia; [b] erunt EK, HK, eandem cum illis habentes rationem, longitudine incommensurabiles. Sed & Rationales. Rationales ergo sunt potentia tantũ cõmensurabiles; [c] Ac propterea reliqua FH, Apotome est, & ei congruens HK. Aut igitur EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis, aut incommensurabilis. Si plus potest EK, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine commẽsurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, longitudine commensurabilis sit ostensa; erit ex defin. EH, Apotome tertia. Quocirca recta potens spatiũ EG, contentũ sub Rationali EF, & Apotoma tertia EH, hoc est, spatium AB, illi æquale; [d] Mediæ Apotome est secunda. Si vero EK, plus potest, quam HK, quadrato rectæ sibi longitudine incommensurabilis, cum neutra ipsarum EK, HK, Rationali EF, sit longitudine commensurabilis, vt demonstrauimus; erit ex defin. EH, Apotome sexta. Quam ob rem recta potens spatium EG, contentum sub Rationali EF, & Apotoma sexta EH, hoc est, spatium AB, illi æquale, [e] est ea, quæ cum Medio Medium totum efficit. Medio ergo a Medio detracto, &c. Quod demonstrandum erat.



[a] 23. decim.

[b] 10. decim.

[c] 74. decim.

[d] 94. decim.

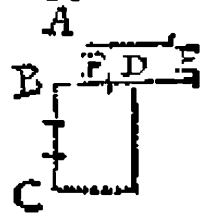
[e] 97. decim.

111. 106.

THEOR. 88. PROPOS. 112.

APOTOME non eſt eadem, quæ ex binis nominibus.

SIT Apotóme A, quæcunque. Dico A, non eſſe eandem, quæ ex binis nominibus. Sit enim, ſi fieri poteſt, A, aliqua ex binis nominibus. Expoſita autẽ Rõnali BC, [a] applicetur ad BC, rectangulum CD, æquale quadrato ex A. Quoniã igitur A, Apotome eſt; [b] erit latitudo BD, Apotome prima. Sit ergo ei congruens DE. Erunt igitur ex defin. Apotomæ primæ BE, DE, Rationales potentia tantum cõmenſurabiles, poteritq; BE, plus quam DE, quadrato rectæ ſibi longitudine [c] commenſurabilis, & ipſa BE, Rationali BC, commenſurabilis erit lõgitudine. Rurſus quia A, ponitur eſſe quoque ex binis nominibus; [c] erit latitudo eadem BD, ex binis nominibus prima. Sit ergo maius ipſius nomẽ BF. Erunt igitur ex defin. eius, quę ex binis nominibus prima eſt, BF, FD, Rationales potentia ſolum commenſurabiles, poteritque BF, plus quam FD, quadrato rectæ commenſurabilis ſibi longitudine, & ipſa BF, Rationali BC, lõgitudine commenſurabilis erit. Itaque cum tam BE, quàm BF, longitudine ſit commenſurabilis eidem BC; [d] erunt quoque BE, BF, inter ſe commenſurabiles longitudine. Igitur cum tota BE, ſit longitudine commẽſurabilis parti BF, erit & eadem BE, reliquę parti FE, longitudine commenſurabilis, ex coroll. propoſ. 16. huius libri; Atque adeo cum BE, Rationalis ſit, & FE, Rationalis erit. Quoniam vero duarum linearum BE, FE, longitudine commenſurabilium, ipſa BE, longitudine incommenſurabilis eſt ipſi DE; (quod BE, DE, Rationales ſint potentia ſolum commenſurabiles), [e] erit quoque altera FE, eidem DE, incommenſurabilis longitudine. Sed & vtraque FE, DE, Rationalis eſt oſtenſa. Rationales ergo ſunt FE, DE, potentia ſolum



[a] 45. primi
[b] 98. deci.
[c] 61. deci.
[d] 12. deci.
[e] 14. deci.

ſolum commenſurabiles. Quare reliqua FD, a Apotome eſt; Atque adeo Irrationalis. Oſtenſa eſt autem & Rationalis. Quod eſt abſurdum. Non ergo A, Apotome exiſtens eadem eſt, quæ ex binis nominibus. Quod demonſtrandum erat. a 74. deci.

COROLLARIVM.

EX demonſtratis quoque facile colligere licebit, Apotomen, & cæteras ipſam conſequentes Irrationales lineas, neque Mediæ, neque inter ſe eaſdem.

QVADRATVM enim Mediæ ad Rationalem lineam applicatum, b *latitudinem efficit Rationalem, ipſi Rationali longitudine incommenſurabilem.* b 23. deci.

AT quadratum Apotomæ ad Rationalem applicatum, c *latitudinem efficit Apotomen primam.* c 98. deci.

ET quadratum Mediæ Apotomæ primæ ad Rationalem applicatum, d *latitudinem efficit Apotomen ſecundam.* d 99. deci.

QVADRATVM vero Mediæ Apotomæ ſecundæ ad Rationalem applicatum, e *latitudinem efficit Apotomen tertiam.* e 100. deci.

QVADRATVM deinde Minoris ad Rationalem applicatum, f *latitudinem efficit Apotomen quartam.* f 101. deci.

AT vero quadratum eius, quæ cum Rationali Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, g *latitudinem efficit Apotomen quintam.* g 102. deci.

QVADRATVM denique eius, quæ cum Medio Medium totum efficit, ad Rationalem applicatum, h *latitudinem efficit Apotomen ſextam.* h 103. deci.

ITAQVE cum hæ latitudines differant & a latitudine Mediæ, & inter ſe; a latitudine quidem Mediæ, quod hæc Rationalis ſit, illæ vero Irrationales; inter

inter ſe autem, quod ordine non ſint eadẽ Apotomæ: Manifeſtum eſt, Apotomen, & reliquas Irrationales ipſam conſequentes, & a Media, & inter ſe ſe differre.

QVONIAM vero in hoc theoremate demonſtrauimus, Apotomen eandem non eſſe, quæ ex binis nominibus: Et quadrata Apotomæ, & caterarum quinque Irrationalium eam conſequentium, ad Rationalem applicata, latitudines efficiunt Apotomen primam, ſecundam, tertiam, quartam, quintam, & ſextam: At uero quadrata eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarũ quinque Irrationaliũ, quæ ipſam ſequũtur, ad Rationalẽ applicata, latitudines efficiũt ex binis nominibus primam, ſecundã, tertiam, quartam, quintã, ac ſextam; liquido conſtat, latitudines Apotomæ, & aliarum Irrationalium, quæ poſt ipſam, eaſdem non eſſe latitudinibus eius, quæ ex binis nominibus, & reliquarum poſt ipſam Irrationalium; quandoquidem nulla Apotome eadem eſt, quæ ex binis nominibus aliqua. Igitur & Apotome, & quæ ipſam ſequuntur, differunt ab ea, quæ ex binis nominibus, & quæ poſt ipſam. Quam ob rem cum & tam illæ, quam hæ a Media differant; efficitur, Rationali quapiam expoſita tredecim numero eſſe lineas Irrationales inter ſe ſe differentes, de quibus hactenus diſputauimus; Hæ ſcilicet.

1. Media.
2. Ex binis nominibus, cuius ſex ſunt ſpecies inuentæ.
3. Ex binis Medijs prima.

4. Ex

4. Ex binis Medijs ſecunda.

5. Maior.

6. Rationale ac Medium potens.

7. Bina Media potens.

8. Apotome, cuius etiam ſpecies ſex ſunt repertæ.

9. Mediæ Apotome prima.

10. Mediæ Apotome ſecunda.

11. Minor.

12. Cum Rationali Medium totum efficiens.

13. Cum Medio Medium totum efficiens.

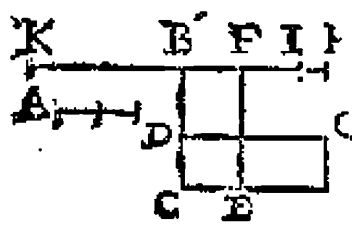
112. 0.

THEOR. 89. PROPOS. 113.

QVADRATVM Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, applicatum, latitudinem facit Apotomen, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus,

& in eadem proportione; & adhuc Apotome, quæ fit, eundem habet ordinem, quem ea, quæ eſt ex binis nominibus.

SIT Rationalis *A*, & ex binis nominibus BC, cuius maius nomen BD;[a] & ad BC, applicetur rectangulum *BE*, æquale quadrato ex *A*, latitudinem faciens EF. Dico BF, eſſe *A*potomen, cuius nomina, hoc eſt, tota linea, & ipſi congruens, commenſurabilia ſunt nominibus BD, DC, ipſius BC, ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc *A*potomē BF, eſſe ordine eandem ipſi BC, ex binis nominibus.[b] *A*pplicetur enim rurſus ad DC, minus nomen, rectangulum CG, æquale eidem quadrato ex A; atque adeo rectangulo BE, latitudinem faciens DG; ſitque ipſi DG, æqualis BH. Et quoniam æqualia ſunt BE, CG; [c] erit vt BC, ad DC, ita DG, hoc eſt, ſibi æqualis BH, ad BF. Et diuidendo vt BD, ad DC, ita HF, ad FB: Eſt autem BD, maior, quam DC. Igitur & HF, maior eſt, quam FB. Ponatur FI, ipſi FB, æqualis; [d] & fiat vt HI, ad IF, ita FB, ad BK. Erit ergo componendo vt HF, ad IF, hoc eſt, ad ſibi æqualē BF, ita FK, ad BK. Oſtenſum eſt autem eſſe vt HF, ad BF, ita BD, ad DC. Igitur erit quoque vt BD, ad DC, ita FK, ad BK. At BD, DC, (cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus) Rationales ſunt potentia tantum commenſurabiles. [e] Igitur & FK, BK, potentia ſolum commenſurabiles ſunt.



RVRSVS quia eſt vt IF, ad BF, ita FK, ad BK, (erūt quoque HF, FK, antecedentes ſimul, nempe tota HK, ad BF, & BK, conſequentes ſimul, hoc eſt, ad totam FK, vt FK, ad BK. Ac propterea FK, media proportionalis eſt inter HK, BK. Quare vt HK, prima ad BK, tertiam, ita erit, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. quadratum ex HK, prima ad quadratum ex FK, ſecunda. Quia vero CG, cum Rationale ſit, (eſt enim quadrato Rationalis A, æquale) ad Rationalem DC, applicatum, [g] facit DG, latitudinem

[a] 45. primi
[b] 45. primi
[c] 14. vel 16. ſexti.
[d] 12. ſexti.
[e] 10. deci.
[f] 12. quinti
[g] 21. deci.

dinem Rationalem, ipſi DC, longitudine commenſurabilem; Erit quoque HB, ipſi DG, æqualis, Rationalis & longitudine cõmenſurabilis ipſi DC. Et quoniam oſtenſum eſt, eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK: Vt autem FK, ad BK, ita HK, ad FK; erit quoque vt BD, ad DC, ita HK, ad FK. [a] Igitur vt quadratum ex BD, ad quadratum ex DC, ita quadratum ex HK, ad quadratum ex FK. At quadratum ex BD, commenſurabile eſt quadrato ex DC, (quod rectæ BD, DC, ſint Rationales potentia commenſurabiles, cum ſint nomina ipſius BC, ex binis nominibus.) [b] Commenſurabile igitur erit quoque quadratum ex HK, quadrato ex FK. Sed fuit vt quadratum ex HK, ad quadratũ ex FK, ita recta HK, ad BK. [c] Igitur longitudine commenſurabilis eſt HK, ipſi BK; atque adeo & reliquæ BH, ex coroll. propoſ. 16. huius lib. Oſtenſa eſt autem BH, Rationalis. Igitur & HK, illi commenſurabilis, Rationalis eſt; ac propterea & BK, ipſi HK, commenſurabilis, Rationalis exiſtit. Cũ ergo oſtenſa ſit FK, ipſi BK, potentia ſolum commenſurabilis, erit quoque FK, Rationalis. Quare cum FK, BK, Rationales ſint, & potentia tantum oſtenſæ commenſurabiles, [d] erit reliqua BF, Apotome, & ei congruens BK. Quod eſt primum.

[a] 22. ſexti

[b] 10. deci.

[c] 10. deci.

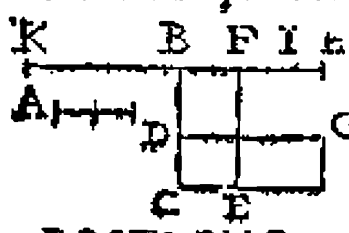
[d] 74. deci.

QVONIAM vero oſtenſum eſt eſſe rectam HK, totam parti BK, longitudine commenſurabilem, [e] erunt propterea & BK, BH, longitudine inter ſe commenſurabiles. Cum ergo BH, oſtenſa ſit longitudine commenſurabilis ipſi DC; erit quoque BK, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. eidem DC, longitudine commenſurabilis. Rurſus quia demonſtratum eſt eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; & permutando vt BD, ad FK, ita DC, ad BK: Sunt autem modo DC, BK, oſtenſæ longitudine commenſurabiles; [f] Erunt quoque BD, FK, commenſurabiles longitudine. Itaque cum FK, ipſi BD, & BK, ipſi DC, longitudine ſit commenſurabilis, erunt ipſius Apotomæ BF, nomina FK, BK, nominibus BD, DC, ipſius BC, ex binis nominibus, longitudine commenſurabilia. Quod eſt ſecundum.

[e] 16. deci.

[f] 11. deci.

ITEM



ITEM quia demonſtrauimus eſſe vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; erũt idcirco Apotomę nomina FK, BK, in eadem ratione cum BD, DC, nominibus ipſius BC, quæ eſt ex binis nominibus. Quod eſt tertium.

POSTREMO vel BD, plus poteſt, quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incõmenſurabilis. Si plus poteſt BD, quã DC, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis; cum ſit vt BD, ad DC, ita FK, ad BK; [a] poterit quoque FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine commẽſurabilis; Et ſi BD, plus poteſt quam DC, quadrato rectæ ſibi longitudine incõmenſurabilis; poterit & FK, plus quam BK, quadrato rectæ ſibi longitudine incommẽſurabilis. Et ſi quidẽ BD, expoſitæ Rationali fuerit longitudine commẽſurabilis; erit & FK, quæ longitudine oſtenſa eſt commenſurabilis ipſi BD, commenſurabilis longitudine eidem Rationali, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 12. huius lib. demonſtrauimus. Si vero DC, ſit Rationali commẽſurabilis lõgitudine; erit & eadem ratione BK, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si denique neutra ipſarum BD, DC, ſit Rationali longitudine commenſurabilis; [b] erit quoque neutra ipſarum FK, BK, commenſurabilis longitudine Rationali. Igitur eadem ordine eſt Apotome BF, ipſi BC, ex binis nominibus, vt conſtat ex definitionibus ſecundis, atque tertijs. Quod eſt quartum. Quadratum ergo Rationalis ad eam, quæ ex binis nominibus, &c. Quod demonſtrandum erat.

[a] 55. decij

[b] 54. decij

113. 9.

THEOR. 90. PROPOS. 114.

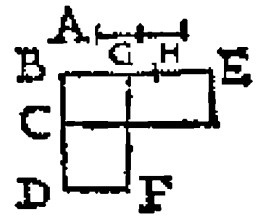
QVADRATVM Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadẽ proportione;

&

& adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eũdem habet ordinẽ, quem ipſa Apotome.

SIT Rationalis *A*, & *A*potome B C, cui congruat C D, [a] & ad B C, applicetur rectangulum Ç E, æquale quadrato ex *A*, latitudinẽ faciens BE.

[a] 45. primi



Dico BE, eſſe ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt nominibus BD, CD, Apotomæ BC. & in eadem proportione; & adhuc ipſam BE, ex binis nominibus, eſſe ipſi BC, Apotomæ ordine eandem. [b] *A*pplicetur enim rurſus ad BD, totam, rectangulum B F, æquale eidem quadrato ex A, hoc eſt, ipſi C E, latitudinem faciens BG. Et quoniam B F, C E, æqualia ſunt; [c] erit vt BE, ad BG, ita BD, ad BC; & per conuerſionem rationis, vt BE, ad GE, ita B D, ad C D. Secetur quoque E G, ad H, ſecundum proportionem B E, ad G E, ex ijs, quæ in ſchol, propoſ. 10. lib. 6. conſcripſimus; vt ſit EH, ad HG, quemadmodum BE, ad GE. Quia igitur eſt vt BE, tota ad GE, totam, ita EH, ex BE, ablata ad HG, ex GE, ablatam; erit quoque BH, reliqua ipſius BE; ad HE, reliquã ipſius GE, vt tota BE, ad totam GE: Erat autem vt BE, ad G E; ita EH, ad HG. Erit igitur quoque vt BH, ad HE, ita EH, ad GH; atque adeo HE, media proportionalis eſt inter BH, GH. Quare erit vt BH, prima ad GH, tertiam, ita quadratum ex BH, prima ad quadratum ex HE, ſecunda, per coroll. propoſ. 20. lib. 6. Quia vero fuit vt BD, ad CD, ita BE, ad GE, hoc eſt, BH, ad HE: & ſunt BD, CD, cum ſint nomina *A*potomæ BC, Rationales potentia tantum commenſurabiles, [d] Erunt quoque BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; Ac propterea quadrata ex BH, HE, commenſurabilia. Igitur rectę BH, GH, eandem habentes rationem cum quadratis ex BH, HE, vt demonſtrauimus, [e] lõgitudine ſunt commenſurabiles; *A*c propterea tota BH, longitudine commenſurabilis exiſtens parti G H, commenſurabilis quoque longitudine erit parti reliquæ B G, ex coroll. propoſ.

[b] 45. primi

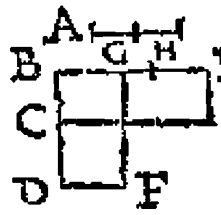
[c] 14. vel 16. ſexti.

[d] 10. deci.

[e] 10. deci.

propoſ. 16. huius lib. At vero cum BD, Rationalis ſit, nempe maius nomen Apotomæ BC; & rectangulum BF, quadrato ex Rationali linea A, æquale, Rationale; erit latitudo BG, Rationalis commenſurabilis longitudine ipſi BD. Igitur ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. & BH, eidem BD, Rõnali commẽſurabilis eſt longitudine, atque adeo Rationalis exiſtit; quandoquidem BH, BG, longitudine commenſurabiles ſunt oſtenſæ. Quia vero BH, HE, oſtenſę ſunt commenſurabiles potentia tantũ, & BH, Rationalis; erit quoque HE, illi commenſurabilis, Rationalis. Rationales ergo ſunt BH, HE, potentia ſolum commenſurabiles; [b] Ac propterea BE, ex binis nominibus eſt. Quod eſt primum.

[a] 21. deci.



[b] 37. deci.

QVONIAM vero oſtendimus eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD; atq; adeo permutãdo BH, ad BD, vt HE, ad CD; Oſtenſa eſt autem BH, ipſi BD, longitudine commenſurabilis; [c] erit quoque HE, ipſi CD, commenſurabilis longitudine. Quare BH, HE, nomina ipſius BE, ex binis nominibus, commenſurabilia ſunt longitudine nominibus BD, CD, Apotomæ BC. Quod eſt ſecundum.

[c] 10. deci.

IMMO & in eadem proportione, cum demonſtratum ſit eſſe BH, ad HE, vt BD, ad CD. Quod eſt tertiũ.

POSTREMO vel BD, plus poteſt quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. Si plus poteſt quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, [d] poterit quoque BH, plus quam HE, quadrato rectæ ſibi commenſurabilis lõgitudine: Et ſi BD, plus poteſt, quam CD, quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis; poterit etiam BH, plus quam HE, quadrato rectæ longitudine ſibi incommenſurabilis. Et ſi quidem BD, Rationali expoſitæ longitudine ſit commenſurabilis; erit quoque BH, commenſurabilis exiſtens longitudine ipſi BD, eidem Rationali longitudine commenſurabilis, ex ſcholio propoſ. 12. huius lib. Si vero CD, longitudine ſit commenſurabilis Rationali; erit & eadem ratione HE, eidem Rationali longitudine commenſurabilis. Si vero neutra ipſarum BD, CD, commenſurabilis ſit longitudine

[d] 15. deci.

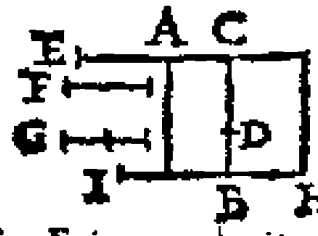
dine Rationali expositæ; a erit quoq; neutra ipsarũ BH, HE, eidem Rationali longitudine commensurabilis. Igitur ex secundis, atque tertijs definitionibus, ipsa BE. ex binis nominibus, ordine eadem est ipsi Apotomæ BC. Quod est quartum. Quadratum ergo Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione, &c. Quod erat demonstrandum.

a 14. decimi.

THEOR. 91. PROPOS. 115. 114. O.

SI spatiũ cõtineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis.

CONTINEATVR spatiũ AB, sub Apotoma AC, & sub CB, ex binis nominibus, cuius nomina CD, DB, cõmensurabilia sint nominibus CE, AE, Apotomæ AC; & in eadem ratione, nempe CD, ad DB, vt CE, ad AE. Posit autem recta F, spatiũ AB. Dico F, esse Rationalem. Exposita enim Rõnali G, b applicetur ad CB, quæ ex binis nominibus, rectangulum CH, æquale quadrato ex G. c Erit ergo latitudo BH. Apotome, cuius nomina HI, BI, longitudine commensurabilia sunt nominibus CD, DB, & in eadem ratione, nimirum HI, ad BI, vt CD, ad DB; atque adeo vt CE, ad AE, & permutando, vt tota HI, ad totam CE, ita ablata BI, ad ablatam AE. d Erit ergo & reliqua BH, ad reliquam AC, vt tota HI, ad totam CE: e Commensurabilis autem est longitudine HI, ipsi CE, quod vtraque



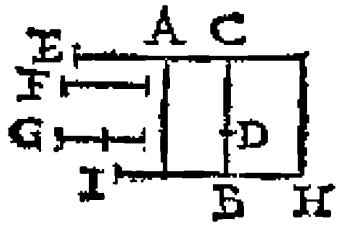
b 45. primi

c 113. decimi.

d 19. quint.

e 12. decim.

III, CE, commensurabilis fuerit longitudine ipsi CD.



[a] Igitur & BH, ipsi AC, longitudine est commensurabilis; [b] Atque idcirco & HC, ipsi BA, commensurabile erit, [c] cum sit vt HB, ad AC, ita HC, ad BA: Sed HC, quadrato Rationalis G, æquale, Rationale est. Igitur & BA, illi cõmensurabile, Rationale erit, propterea q; & recta F, ipsum BA, potens, Rationalis erit. Quapropter si spatium contineatur sub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina cõmensurabilia sunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta linea spatium potens, est Rationalis. Quod erat demõstrandum.

[a] 10. decim.
[b] 10. decim.
[c] 1. sexti.

COROLLARIVM.

EX hoc manifestum est, fieri posse, vt spatium Rationale contineatur sub duabus rectis Irrationalibus. Nam spatium AB, contentum sub AC, CB, Apotoma, & ex binis nominibus, quæ Irrationales sunt, ostensum est Rationale esse.

SCHOLIVM.

IN proximis autem tribus propositionibus intelligenda sunt nomina Apotomæ nominibus eius, quæ ex binis nominibus, commensurabilia esse longitudine. In prioribus enim duabus, lõgitudine ostensa sunt esse cõmensurabilia; In posteriori vero, nempe in hac 115. nihil colligetur, si nomina CD, DB, nominibus CE, AE, potentia tantum commensurabilia ponantur. Id quod facile ex demonstrationibus harum trium propositionum apparet.

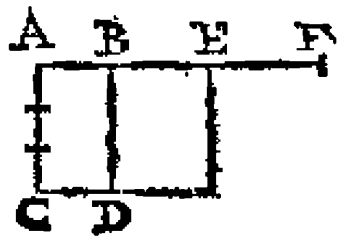
AME-

THEOR. 92. PROPOS. 116.

115. 107.

A MEDIA infinitæ Irrationales fiunt, et nulla alicui antecedentium eſt eadem.

SIT Media AB. Dico ex illa fieri Irrationales infinitas, quarum nulla eadem ſit alicui illarum tredecim antecedentium, de quibus in coroll. propoſ. 112. huius lib. Expoſita enim Rationali AC, cõtineatur ſub AB, Media, & Rationali AC, ſpatium AD. Eſt ergo AD, ſpatium ſub Rationali AC, & Irrationali AB, contentũ, Irrationale, ex lemmate propoſ. 38. huius lib. Poſsit ipſum recta BE, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico BE, non eſſe eandem alicui tredecim illarum, quas in coroll. propoſ. 112. huius lib. collegimus. Nam cum quadratum Mediæ ad Rationalem AC, applicatum, a latitudinem faciat Rationalem ipſi AC, longitudine incommenſurabilem: Et quadrata reliquarũ duodecim Irrationaliũ, ad eandem Rationalem AC, applicata, faciant latitudines vel ex binis nominibus, vel Apotomas, vt conſtat ex propoſ. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99. 100. 101. 102. & 103. huius lib. At vero quadratum huius Irrationalis BE, ad candẽ Rationalem AC, applicatum, faciat AB, latitudinem Mediam; perſpicuum eſt, Irrationalem BE, ab omnibus illis tredecim differre; quandoquidem eius quadratum ad Rationalem lineam applicatum, latitudinem faciat differentem a latitudinibus, quas quadrata illarũ tredecim linearum ad eandem Rationalem applicata efficiunt.



a 23. deci.

QVOD ſi cõpleatur rectãgulum DE; erit & hoc cõtentũ ſub Rationali BD, & Irrationali BE, Irrationale, ex dicto lẽmate propoſ. 38. Poſsit ergo ipſum recta EF, quæ ex defin. 11. Irrationalis erit. Dico rurſus EF, nõ eſſe

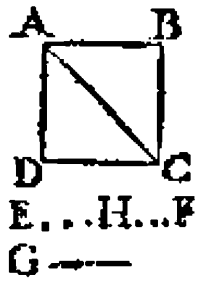
eandem alicui illarum tredecim, vel etiam ipſi BE. Hoc autem manifeſtum eſt, cum quadratum ipſius EF, ad Rationalem applicatum, latitudinem faciat BE. At quadrata illarum tredecim, & quadratum etiam ipſius BE, latitudines faciant, ſi ad eandem Rationalem applicentur, differentes a BE, vt demonſtratum eſt. Eodem modo & aliæ Irrationales infinitæ inuenientur & inter ſe, & a diſtis differentes. Quocirca a Media infinitæ Irrationales fiunt, &c. Quod demonſtrandum erat.

118. 7.

THEOR. 93. PROPOS. 117.

PROPOSITVM ſit nobis oſtendere, in quadratis figuris diametrum lateri incommenſurabilem eſſe longitudine.

SIT quadratum ABCD, in quo diameter AC. Dico diametrum AC, longitudine incommenſurabilem eſſe lateri AB. Si enim non eſt incommenſurabilis, commenſurabilis erit longitudine; [a] ac propterea AC, AB, proportionem habebunt, quam numerus ad numerum. Habeat AC, ad AB, proportionem, quam numerus EF, ad numerum G; ſintque numeri EF, & G, minimi omnium eandem proportionem habentium. Quoniam ergo eſt vt AC, ad AB, ita numerus EF, ad numerum G; Erit quoque vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, ([b] Cum enim quadrata habeant ſuorum laterum proportionem duplicatam; latera autem æquales habeant proportiones; erunt proportiones quadratorum æquales etiam, cum ſint æqualium duplicatæ.) Sed quadratum ex AC, duplum eſt quadrati ex AB per ea, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. oſtendimus. Igitur & quadratus numerus ex EF, duplus erit quadrati numeri ex G; Ac propterea quadratus numerus



a 1. decimi.

b 20. ſexti, & 11. octaui.

merus ex EF, cum dimidium habeat, atque adeo bifariã posſit diuidi, par erit, ex defin. Igitur & ipſe EF, illum producens, par erit. (Si namque impar eſſet, cum ſe ipſum multiplicans producat ſuum quadratum, eſſet & quadratus ipſe impar; [a] eo quod impar imparem multiplicans imparem procreat. Quod eſt abſurdum. oſtenſus eſt enim par.) Quia vero EF, & G, in ſua proportione minimi, [b] inter ſe primi ſunt; & EF, oſtenſus eſt par, erit G, impar. (Si enim par etiam eſſet, metiretur vtrumque EF, & G, binarius; atque adeo non eſſent inter ſe primi. Quod eſt abſurdum.) Diuidatur iam par numerus EF, bifariam in H. Quia igtur numerus EF, duplus eſt numeri EH; [c] & quadrati habẽt proportionẽ laterum duplicatam; erit quadratus ex EF, quadruplus quadrati ex EH. (Quadrupla enim proportio duplicata eſt proportionis duplæ, vt in his numeris apparet, 4. 2. 1.) Itaque cum quadratus ex EF, duplus ſit quadrati ex G; & quadruplus quadrati ex EH; qualium partiũ 4. eſt quadratus ex EF, taliũ 2. erit quadratus ex G; & taliũ 1. quadratus ex EH. Quadratus igitur ex G, duplus eſt quadrati ex EH, cum illius ad hunc proportio ſit, quæ 2. ad 1. ac proinde, vt ſupra de numero EF, diximus, erit quadratus ex G, dimidium habens par, & ipſe quoque G, par. Sed & impar eſt oſtenſus. quod eſt abſurdum. Non ergo longitudine commenſurabilis eſt diameter AC, lateri AB. Igitur incommenſurabilis longitudine.

[a] 29. noni

[b] 24. ſepti.

[c] 11. octaui

ALITER. Sit ſi poteſt fieri, diameter AC, commenſurabilis longitudine lateri AB; habeantque AC, AB, proportionem, quam numeri EF, & G, qui minimi ſint in ſua proportione; atque adeo inter ſe primi. Non erit igitur G, vnitas. (Cum enim quadratum ex AC, duplum ſit quadrati ex AB; ſit autem vt quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, ita quadratus numerus ex EF, ad quadratum numerum ex G, vt in priori demonſtratione diximus; erit quoque quadratus ex EF, duplus quadrati ex G. Si ergo G, eſt vnitas, atque adeo & quadratus ex ea, vnitas; erit quadratus ex EF, binarius. Quod eſt abſurdum.) Ergo numerus. Et quia, vt iam eſt demonſtratum, quadratus ex EF, duplus eſt quadrati

[a] 14. octaui ex G; metietur quadratus ex G, quadratum ex EF; [a] ac propterea & G, latus metietur latus EF. Cũ ergo & G, ſe ipſum metiatur; erunt numeri EF, & G, inter ſe compoſiti, habentes menſuram communem, numerum G: Sed & inter ſe primi ſunt. Quod eſt abſurdum. Non ergo commenſurabilis eſt diameter AC, longitudine lateri AB. Quare oſtendimus, in quadratis figuris diametrum lateri incommẽſurabilem eſſe longitudine. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

SED & affirmatiue hoc idem theorema demonſtrabimus, hac modo. Quoniam ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 47. lib. 1 demonſtrata a nobis ſunt, quadratum diametri duplum eſt quadrati ex latere deſcripti; habebit quadratum ex diametro ad quadratum ex latere proportionem, 2. ad 1. vel 4. ad 2. vel 8. ad 4. &c. Et quia ſumptis in proportione dupla quotcunque numeris ab vnitate 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c. [b] *ſolum tertius ab vnitate quadratus eſt, & cæteri omnes vnum intermittentes; quod primus ab vnitate, nempe 2. quadratus non ſit; erunt ſolum hi numeri 4. 16. 64. quadrati; reliqui vero 2. 8. 32. non quadrati. Quare cum 4. quadratus ſit, & 2. non quadratus, non habebit 4. ad* [c] *2. proportionem, quam quadratus ad quadratum; (*[c] *alias & 2. quadratus eſſet.) ac propterea neque quadratum ex diametro ad quadratum lateris proportionem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.* [d] *Incommenſurabilis ergo eſt diameter longitudine ipſi lateri. Quod eſt propoſitum.*

[b] 10. noni

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

[c] 24. octaui

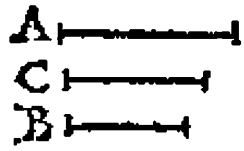
[d] 9. decimi

HOC etiam theorema aliter demonſtrauimus ad finem defin. 8. lib. 5. & in ſcholio propoſ. 8. lib. 8. & in ſcholio propoſ. 9. huius libri.

CAETERVM in exemplaribus Græcis reperitur hoc loco appendix quædam, cuius intelligentia ex ſequentibus Stereometricis libris pendet, vt merito omitti poſſet. Verum quia in ea continetur doctrina non contemnenda ad commenſuralitatem omnium magnitudinum, & incommenſurabilitatem pertinent; viſum eſt, eam paucis explicare, aſſignando more noſtro

noſtro ſolito in margine loca Stereometriæ, quæ ad demonſtrationem eorum, quæ hic dicuntur, neceſſaria ſunt. Eſt igitur appendix hæc.

INVENTIS lineis rectis longitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quamplurimæ magnitudines, planæ ſcilicet, atque ſolidæ incommenſurabiles inter ſe. Sint enim rectæ A, B, longitudine inter ſe incommenſurabiles, inter quas media proportionalis ſit C. Quoniam igitur ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt A, ad B, ita eſt figura rectilinea quæuis ſuper A, conſtituta ad figuram rectilineam ſibi ſimilem, ſimiliterque poſitam ſuper C; & ſunt A, & B, longitudine incommenſurabiles; [a] erunt rectilineæ illæ figuræ ſuper A, & C, incommenſurabiles.



[a] 10. deci.

RVRSVS [b] quoniam circuli, quorum diametri A, C, proportionem habent, quam quadrata ex A, & C, deſcripta: Quadrata autem hæc, cum ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque poſitæ, proportionem habent, quam rectæ A, & B, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. [c] Habebunt quoque circuli diametrorum A, C, eandem proportionem, quam rectæ A, B: Sed rectæ A, B, incommenſurabiles ſunt longitudine. [d] Igitur & circuli diametrorum A, C, incommenſurabiles ſunt.

[b] 2. duodecimi

[c] 11. quinti

[d] 10. deci.

IAM vero ſi conſtituantur ſolida, nempe pyramides, vel priſmata eiuſdem altitudinis, quorum baſes ſint figuræ rectilineæ ſimiles, ſimiliterque deſcriptæ ſuper A, C, [e] habebunt pyramides, atque priſmata eandem proportionem, quam baſes, hoc eſt, quam rectilineæ illæ figuræ. Quare cum rectilineæ illæ figuræ incommenſurabiles ſint, vt modo eſt demonſtratum; [f] incommenſurabilia etiam erunt ipſa ſolida, nimirum pyramides, & priſmata.

[e] 5. 6. vel 7. duodecimi.

[f] 10. deci.

QVOD ſi coni, vel cylindri æque alti fabricentur, quorum baſes circuli ſint diametrorum A, C, [g] habebunt huiuſmodi coni, & cylindri eandem proportionem cum baſibus, hoc eſt, cum illis circulis. Cum ergo circuli oſtenſi ſint incommenſurabiles, [h] Erunt quoque incommenſurabiles dicti coni, & cylindri. Inuenta ſunt igitur non ſolum lineæ, & ſuperficies incommenſurabiles, verum etiam & corpora, ſiue ſolida incommenſurabilia. Quod eſt propoſitum.

[g] 11. duodecimi.

[h] 10. deci.

EADEM autem ratione, ſi rectæ A, & B, longitudine commenſurabiles ſint, [a] oſtendemus earum figuras rectilineas ſimiles, ſimiliterque deſcriptas, necnon & ipſarum circulos, commenſurabiles eſſe, [b] atque adeo & earundem pyramides, & priſmata; ac denique conos, & cylindros; ſi modo eandem habeant altitudinem, vt perſpicuum eſt.

[a] 10. decimi.

[b] 5. 6. 7. & 11. duodecimi.

FINIS ELEMENTI DECIMI.

* * *

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM VNDECIMVM.

Et Solidorum primum.

DEFINITIONES.

I.

SOLIDVM eſt, quod longitudinem, latitudinem, & craſſitudinem habet.

POSTQVAM *Euclides in prioribus ſex libris abunde de ea Geometriæ parte diſſeruit, quæ circa plana verſatur, ſibiq; nomen Geometriæ, tanquam proprium, vſurpauit; In ſubſequentibus vero tribus diligenter ea de paſſionibus numerorum docuit, quæ neceſſaria videbantur ad intelligendam doctrinam linearũ commenſurabilium, atq; incommenſurabilium, quas idcirco luculentiſsime in libro decimo deinde expoſuit, vt conſtructio, atque natura quinque corporum regularium, de quibus in poſtremis tribus libris, nimirum in 13. 14 & 15. ſubtiliſsime diſſeritur, perfectius poſſet cognoſci? Nunc tandem aggreditur in hoc libro vndecimo eam partem Geometriæ, quæ corpora, ſiue ſolida conſiderat, proprioque vocabulo Stereometria eſt appellata.*

EXPLICAT autem prius, more ſuo, voces ad eam rem perneceſſarias, quarum prima eſt: Solidum, ſiue corpus: nempe tertium genus quantitatis. Docet igitur eam quantitatem, quæ præter longitudinem latitudinemque ſortita eſt craſſitudinem, ſeu profunditatem, ita vt tres dimenſiones poſſideat, vnam quidem ſecundum longitudinem, aliam vero ſecundum latitudinem, & tertiam ſecundum profunditatem, ſeu craſſitudinem, altitudinemve, appellari ſolidum, ſiue corpus; quemadmodum quantitas longitudinem tantũ habens, linea; quæ vero longitudini latitudinem adiicit, ſuperficies vocatur, vt in primo lib. diximus.

PORRO quemadmodum Mathematici, vt recte intelligamus lineam, præcipiunt, vt imaginemur punctum aliquod e loco in locum moueri; hoc enim deſcribit veſtigium quoddam longum tantum, hoc eſt, lineam, propterea quod punctum omnis ſit magnitudinis expers; vt autem percipiamus ſuperficiem, monent, vt intelligamus lineam aliquam in tranſuerſum moueri; hæc enim deſcribet veſtigiũ longum & latum duntaxat; longum quidem propter longitudinem lineæ, latum vero propter motum illum, qui in tranſuerſum eſt factus; carens autem profunditate, quod & linea illius ſit expers: Ita quoque, vt nobis ob oculos ponant corpus, ſeu ſolidum, hoc eſt, quantitatem trina dimenſione præditum, conſulunt, vt concipiamus ſuperficiem aliquam æqualiter eleuari, ſiue in tranſuerſum moueri; hac enim ratione deſcribetur veſtigium quoddam longum, latum, atq; profundum; longum quidem & latum, ob ſuperficiem, quæ longa & lata exiſtit; profundum vero ſeu craſſum, propter eleuationem illam, ſeu motum ſuperficiei. Hæc ergo quantitas, ſolidum ſiue corpus vocatur. Neque vero alia quantitas quarta diſtincta a linea, ſuperficie, & corpore reperiri poteſt, propterea quod triplex tantum dimenſio poſſit aſſignari, vt perſpicue in commentariis, quos in ſpheram Ioannis de Sacro Boſco conſcripſimus, a nobis fuit demonſtratum ex Ptolemæo in libello de Analemmate.

SOLI-

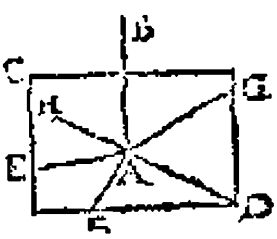
II.

SOLIDI autem extremum, eſt ſuperficies.

QVEMADMODVM linea finita in extremitatibus puncta, ſuperficies vero lineas recipit, vt in 1. lib. docuit, ita nunc aut Solidi finiti extremũ eſſe ſuperficiem. Cum enim ſolidum, ſiue corpus efficiatur ex illo motu imaginario ſuperficiei; perſpicuum eſt extremas partes illius eſſe ſuperficies.

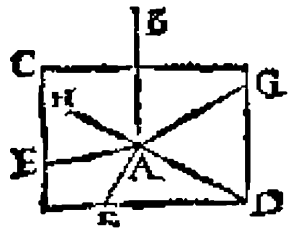
III.

LINEA recta eſt ad planum recta, cum ad rectas omnes lineas, a quibus illa tangitur, quæque in propoſito ſunt plano, rectos angulos efficit.

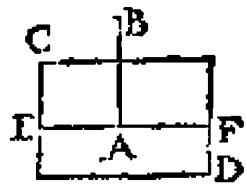
VT linea recta AB, plano CD, inſiſtens, ita vt B, punctum ſit in ſublimi extra planum CD, at punctum A, in ipſo plano, tum demum dicetur recta ſeu perpẽdicularis ad planum CD, cum rectos effecerit angulos cum lineis AE, AF, AD, AG, & cum omnibus aliis, quæ in eodem exiſtentes plano ipſam tangunt in  *puncto A. Hac enim ratione fiet, vt AB, æqualiter inſiſtat plano CD, & nõ magis in vnam partem, quam in aliam inclinet. Nam producta recta DA, ad H, cum angulus BAD, ponatur rectus, erit quoque ei deinceps BAH, rectus, ideoq; illi æqualis. Eadẽq; ratione protracta qualibet linea in plano CD, faciet AB, cum illa duos angulos æquales. Ac propterea æquabiliter ipſi plano inſiſtet. Quod ſi fieri poſſet, vt AB, cum vna linea ex A, in plano CD, ducta*

non

non efficeret angulum rectum, etiamſi cum aliis omnibus rectum angulum conſtitueret, non diceretur A B, recta ad planum C D. Itaque quando conceditur linea aliqua ad planũ recta, concedendum quoque erit, eam cum omnibus in eode plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos conſtituere angulos. Et e contrario, vt recte cõcludatur, lineam quampiam eſſe ad planum datum rectam, demonſtrãdum erit prius, eam cum omnibus in eodem plano ductis, quæ ipſam tangunt, rectos angulos conficere.



VT autem recta quæpiam plano cuicunque inſiſtens rectos conſtituat angulos cum omnibus rectis in eodem plano ductis, ipſamque tangentibus, ſatis eſt, vt cum duabus non efficientibus lineam vnam, ſed ſe mutuo ſecantibus, ſi producantur, rectos angulos conficiat. Nam ex hoc recte colligitur, eã cum omnibus aliis rectos quoque angulos efficere, vt perſpicuum fiet ex propoſ. 4. huius lib. Dixi: cum duabus non efficientibus lineam vnam: quia ſi duæ linea componant vnam rectam lineam, non neceſſario efficitur, lineam, quæ cum ipſis rectos angulos conſtituit, cum omnibus aliis rectos conficere angulos. Recta enim A B, inſiſtat plano C D, efficiatq; rectos angulos cum duabus in eodem plano ductis A E, A F, quæ rectam vnam lineã componant. Dico A B, non propterea cum omnibus aliis rectos angulos conſtituere; atq; idcirco non eſſe rectã ad planũ C D. Hoc autem perſpicuum eſt, cum A B, circa E F, veluti axem, circumuerti queat, ita vt punctum B, modo ſit plano propinquius, modo ab eodem remotius; nihilominus tamen ipſa cum E F, ſemper eoſdem rectos angulos, & æquales conficiat. Quod ſi eadem A B, cum duabus angulum componentibus, quales ſunt A G, A D, in priori figura, rectos conſtituat angulos, tum demum cũ omnibus aliis rectos angulos efficiet, vt diximus. Id quod dilucide demonſtratur propoſ. 4. huius lib.

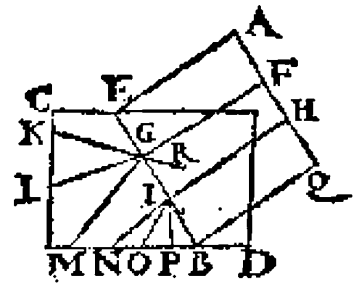


PLA-

IIII.

PLANVM ad planum rectum eſt, cum rectæ lineæ, quæ communi planorũ ſectioni ad rectos angulos in vno planorum ducũtur, alteri plano ad rectos ſunt angulos.

INSISTAT planum AB, plano CD, ita vt linea AQ, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planũ ſubiectum CD, at EB, in ipſo eodẽ plano: Sit autẽ horum planorum communis ſectio EB, qua, vt demonſtrabitur propoſ. 3. huius lib. recta erit linea. In hac autem ſumptis quotcunque punctis G, I; ex ipſis in plano AB, ducãtur GF, IH, perpendiculares ad communem ſectionem EB. Si igitur lineæ FG, HI, ad planum alterum CD, rectæ fuerint, hoc eſt, rectos angulos effecerint cum lineis GK, GL, GM; IN, IO, IP, & cum aliis omnibus in plano CD, a pũctis G, & I, ductis; dicetur planum AB, ad planum CD, rectum; quia hoc modo non magis in vnam partem inclinabit, quam in alteram, ſed æquabiliter illi inſiſtet. Si enim KG, producatur ad R, cum angulus FGK, ponatur rectus; erit & angulus ei deinceps FGR, rectus; ideoque illi æqualis. Eademque ratione, protracta qualibet alia linea in plano CD, fient vtrobique a lineis FG, HI, anguli æquales. Quare planum AB, æquabiliter plano CD, inſiſtet. Quotieſcunque igitur planum aliquod rectum eſſe cõceditur ad planum aliud, concedendum quoque erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem deductas, rectas quoque eſſe ad alterum planum. Et contra, vt colligatur planum quodpiam ad aliud eſſe rectum, oſtendendum prius erit, lineas perpendiculares in vno eorum ad communem ſectionem ductas, rectas eſſe ad reliquum planum.

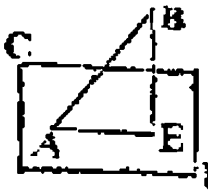


RE-

V.

RECTAE lineæ ad planum inclinatio eſt, cum a ſublimi termino rectæ illius lineæ ad planũ deducta fuerit perpendicularis, atque a pũcto, quod perpendicularis in ipſo plano fecerit, ad propoſitæ illius lineæ extremum, quod in eodẽ eſt plano, altera recta linea fuerit adiuncta; eſt, inquam, angulus acutus inſiſtente linea, & adiuncta compreprehenſus.

INSISTAT recta AB, plano CD, non ad angulos rectos, ſed inclinata, ita vt punctum B, ſit extra planum in ſublimi, punctum vero A, in plano. Deinde ex B, termino ſublimi rectæ AB, intelligatur ad idem planum deducta perpẽdicularis BE, faciens in plano punctum E; atque ab E, ad A, adiungatur recta EA; eritque neceſſario angulus BAE, acutus, [a] *cum in triangulo ABE, duo anguli BAE, BEA, duobus ſint rectis minores, & angulus BEA, rectus. Angulus igitur acutus BAE, comprehenſus linea inſiſtente AB, & adiuncta AE, dicitur inclinatio rectæ AB, ad dictum planum CD; Ita vt tanta dicatur eſſe inclinatio lineæ AB, ad planum CD, quantus eſt dictus angulus acutus BAE.*



[a] *17. primi*

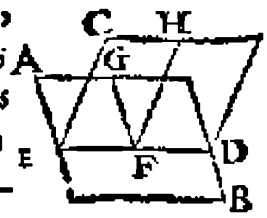
VI.

PLANI ad planum inclinatio, eſt angulus acutus rectis lineis contentus,

qua

quæ in vtroque planorum ad idem communis sectionis punctum ductæ, rectos cum sectione angulos efficiunt.

PLANO naq; AE, insistat planũ CD, ita vt pars ad C, sit in sublimi extra planum AB, & pars ad D, in ipso plano AB, sitq; CD, inclinatum ad AB; & communis eorum sectio sit DE. Si igitur ad DE, communem sectionem ex eius pũcto F, duæ perpendiculares ducantur; FG, quidem in plano AB, & FH, in plano CD; dicetur angulus acutus GFH, dictis rectis comprehensus, inclinatio plani CD, ad planum AB, ita vt tanta esse dicatur inclinatio plani ad planum, quantus est dictus angulus acutus.



INTERDVM Geometræ angulum GFH, dicunt angulum inclinationis plani CD, ad planum AB, siue is acutus sit, siue rectus, obtusus ve: quamquam proprie solum angulus acutus inclinationem vnius plani ad alterum ostendat, vt Euclides docet hoc loco: Rectus enim indicat potius æquabilem eleuationem vnius plani supra aliud, quam inclinationem vnius ad alterum; obtusus vero recessum quodammodo vnius ab altero. Verumtamen quia quilibet horum angulorum commonstrat situm, seu eleuationem vnius plani supra alterum, generaliter dici consueuit a plerisque angulus inclinationis omnis ille, qui comprehenditur duabus rectis lineis, quæ in vtroque plano ad aliquod vnum punctum communis illorum sectionis ducuntur perpendiculares, cuiusmodi est angulus GFH, siue is rectus sit, siue acutus, siue obtusus.

VII.

PLANVM ad planum similiter inclinatum esse dicitur, atque alterum ad alterum, cum dicti inclinationum anguli inter se fuerint æquales.

NON

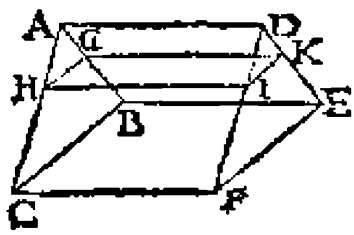
NON obſcura eſt hæc definitio, præcedenti bene intellecta. Vnde planum ad planum magis inclinatum eſſe dicetur, cuius angulus inclinationis minor extiterit, atque adeo a tecto magis receſſerit.

VIII.

PARALLELA plana ſunt, quæ inter ſe non conueniunt.

INTELLIGE, in quamcunque partem, etiam infinite, producantur, hoc eſt, ſiue ad dexteram, ſiue ad ſiniſtrã, & ſiue ſurſum, ſiue deorſum, &c. Sunt enim quædam plana quæ nec ad dexteram, nec ad ſiniſtram producta conueniunt; nec tamen ob id parallela ſunt dicenda; quia nimirum vel ſurſum, vel deorſum protracta, tandem coeunt. Nam ſi ſumatur tectum aliquod, cuius faſtigium intelligatur abſciſſum; remanentia duo plana non conuenient, quamuis producantur infinite ad dexteram, & ad ſiniſtram. Sed tamen quia ſurſum protenſa coeunt, nimirum in ipſo faſtigio, idcirco non dicentur parallela.

SIT enim tectum quodpiam ABCDEF, contentum duobus planis ABED, ACFD, cuius baſis BCFE; auferaturque faſtigium AGHDKI. Quo facto, perſpicuum eſt, reliqua plana GBEK, HCFI, non conuenire inter ſe, ſi ad partes GB, HC, vel ad partes KE, IF, producantur; nec tamen idcirco parallela dicentur, cũ producta ad partes GH, KI, conueniant in faſtigio AD. Vt igitur plana aliqua dicantur parallela, neceſſe eſt, vt in nullam partem producta inter ſe conueniant. Sicut autem lineæ in eodem plano exiſtentes, ad duas duntaxat partes produci poſſunt, nempe ad ſiniſtram, & ad dexteram; ita duo plana in quatuor partes intelligi poſſunt protracta, nempe ſiniſtrorſum, dextrorſum, ſurſum, atque deorſum. Itaque duo plana quæcunque, vel ſunt parallela, vel ad aliquam partem producta coeunt; lineæ vero re-



ro recta, vel ſunt parallela, vel ad alteram partem protracta conueniunt, ſi nimirum in eodem exiſtant plano, vel tandē nec ſint parallela, neq; vnquam conueniunt, ſi videlicet in diuerſis ſint planis, & in tranſuerſum poſita. Vnde in definitione linearum parallelarum in 1. lib. additum fuit: quæ cum in eodem ſint plano: Hic autem ſimpliciter dicitur: quæ vnquam conueniunt.

IX.

SIMILES ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

POTVISSET Euclides ſimiles figuras ſolidas definire per angulos æquales, & proportionalitatem laterum circa æquales angulos, vti fecit in figuris planis ſimilibus definiendis: Satius tamen eſſe iudicauit, vt breuitati conſulens eas ex ſimilibus planis multitudine æqualibus deſcriberet; præſertim quod ex ſimilitudine planorum ſtatim cõſequatur & angulorum ſolidorum æqualitas, vt ex defin. 11. patebit, cum illos conſtituant anguli plani & multitudine, & magnitudine æquales; & proportionalitas laterum circum angulos æquales, propter planorum ſimilitudinem.

X.

AEQVALES, & ſimiles ſolidæ figuræ ſunt, quæ ſimilibus planis, multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

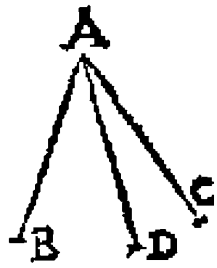
QVOD ſi plana ſimilia, quibus corpora ſimilia ex præcedenti definitione circumſcribuntur, fuerint æqualia, ſingula ſingulis, dicentur eiuſmodi figuræ ſolidæ non ſolum ſimiles,

verum etiam æquales. Nam ſi animo concipiantur ſeſe penetrare mutuo huiuſmodi ſolida, neutrum alterũ excedet, propter æqualitatem, ac ſimilitudinem planorum. Ex ſimilitudine enim planorum infertur angulorum ſolidorum æqualitas, vt in præcedenti definitione docuimus; ex eorundem vero æqualitate, laterum proportionalium æqualitas, vt in lemmate propoſ. 22. lib. 6. demonſtrauimus. Quare ſolida illa omni ex parte ſibi mutuo congruent; ac propterea inter ſeſe exiſtent æqualia.

XI.

SOLIDVS angulus eſt plurium, quam duarum linearum, quæ ſe mutuo contingant, nec in eadem ſint ſuperficie, ad omnes lineas inclinatio.

DVAE lineæ in eodem exiſtentes plano, quæ non in directum iacentes ad vnum punctum conueniunt, efficiunt angulum planũ, vt lib. 1. expoſuimus, qualis eſt angulus BAC, cõtentus duabus lineis AB, AC, in eodem plano conſtitutis. Si igitur accedat tertia quædã linea AD, quæ non in eodem cum illis plano exiſtat, ſed punctum D, ſit in ſublimi extra illarum planum, efficietur ad punctum A, angulus ſolidus, ſiue corporeus. Idem contingeret, ſi quarta linea, vel quinta, vel denique plures adiungerentur, licet anguli quantitas variaretur. Dixit autem Euclides, lineas angulum ſolidum conſtituentes non debere in eadem ſuperficie exiſtere, quoniam videlicet, ſi tres lineæ AB, AC, AD, in eadem conſiſterent ſuperficie, non efficeretur angulus ſolidus ad punctum A, ſed planus duntaxat ex duobus planis BAD, DAC, compoſitus. Quod ſi AD, ſit in ſublimi, hoc eſt, extra planum, in quo ſunt AB, AC, iam non componetur angulus planus totus ex BAD, DAC; immo circa punctum A, tres plani conſiſtent anguli BAD, DAC, CAB, qui, vt mox dicetur, ſolidum



lidum conſtituunt angulum. Idem dices, ſi plures fuerint lineæ, & idcirco plures quoque anguli plani.

ALITER.

SOLIDVS angulus eſt, qui pluribus, quam duobus planis angulis in eodem non conſiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

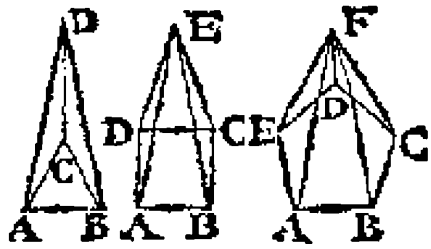
HÆC definitio ſecunda anguli ſolidi facilis eſt, præcedenti recte intellecta. Cum enim ſaltem tres lineæ in eodem non exiſtentes plano neceſſariæ ſint ad anguli ſolidi conſtitutionem, perſpicuum eſt, cum minimum tres planos angulos requiri, vt angulus ſolidus efficiatur, vt ex ſuperiori figura apparet. Angulus enim BAD, in plano eſt, in quo rectæ AB, AD; & angulus DAC, in plano, in quo rectæ AD, AC; angulus denique CAB, in plano, in quo rectæ AC, AB; atque ita ex ipſis angulus ſolidus ad punctum A, conſtituitur. Quod ſi tres, vel plures anguli plani ad vnum punctum conſiſtant, in eodem tamen plano, non conſtituetur ex ipſis angulus, ſed totus quidam angulus planus, vt ſupra diximus de lineis in eadem ſuperficie exiſtentibus. Neque vero ſatis ſunt duo anguli plani ad conſtituendum angulum ſolidum, etiamſi in diuerſis ſint planis. Hiabit enim ſemper ex altera parte. Vnde neceſſe eſt, vt tertia ſaltem ſuperficies accedat, in qua tertius angulus planus conſiſtat. Anguli porro ſolidi exemplum clariſſimum nobis præbent duo parietes cum pauimento domus, vel laqueari, ad vnum punctum conuenientes. In eo enim puncto, in quo coeunt, conſtituitur angulus ſolidus ex tribus angulis planis. Vbi manifeſtum eſt, ſi vna earum ſuperficierum tollatur, deſtrui angulum ſolidum, remanereque tantum duas ſuperficies ad inuicem inclinatas, & hiantes.

EX his vero perſpicuũ cuiuis erit, illos angulos ſolidos inter ſe eſſe æquales, qui continentur angulis planis & multitu-

dine, & magnitudine æqualibus. Nam huiuſmodi anguli ſibi mutuo congruent, ſi ſe ſe penetrare intelligantur. Quemadmodum autem in 1. lib. Euclides ex omnibus angulis planis ſolum rectilineum aſſumpſit, ita hic ex omnibus eum duntaxat definit, quem plures lineæ rectæ quam duæ, vel plures anguli plani rectilinei comprehendunt. Non enim comprehenditur hac defin. angulus coni, qui vnica ſuperficie curua continetur; neque is, qui continetur duabus ſuperficiebus, vna quidem plana, altera vero curua; qualis eſt, qui fit, ſi conus per verticem ſecetur.

XII.

PYRAMIS eſt figura ſolida, quæ planis continetur, ab vno plano ad vnũ punctum conſtituta.



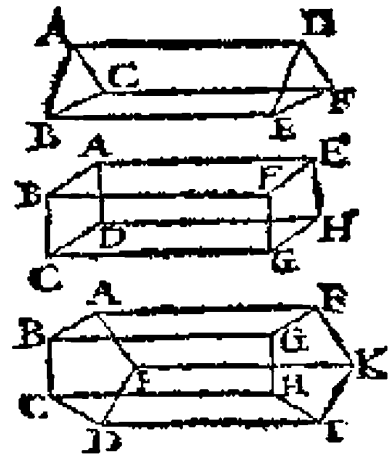
VIDELICET figura ſolida a planis ABC, ABCD, ABCDE, ad puncta D, E, F, conſtituta appellantur pyramides. Perſpicuum autẽ eſt, omnia plana, quibus pyramis continetur eſſe triangula, cum omnia ad vnum punctum tendant; excepto plano, a quo omnia tendunt, quodque puncto illi eſt oppoſitũ: Hoc enim poteſt eſſe vel triangulum, vel quadrangulum, vel pentagonum, &c. a quo quidem tota pyramis denominationem ſumit; vt videlicet dicatur pyramis triangula, quadrãgula, pentagona, hexagona, &c. Tot enim triangulis quælibet pyramis comprehenditur, quot angulos, ſeu latera planum dictum continet. Vnde & planum huiuſmodi, baſis pyramidis nuncupari ſolet. Vt pyramidis triangularis, præter baſin, triangula ſunt ABD, ACD, BCD: Quadrangula vero ABE, ADE, BCE, CDE: Pentagona denique ABF, AEF, BCF, CDF, EDF.

PRI-

XIII.

PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum aduerſa duo ſunt & æqualia & ſimilia, et parallela, alia vero parallelogramma.

FIGVRÆ ſcilicet ſolidæ, quarum plana aduerſa & æqualia, & ſimilia, et parallela ſunt triãgula ABC, DEF: vel quadrangula ABCD, EFGH: vel pentagona ABCDE, FGHIK, &c. Parallelogrãma vero ACFD, ABED, CBEF: vel ABFE, ADHE, CDHG, CBFG: vel ABGF, AEKF, DEKI, DCHI, BCHG; dicuntur priſmata. Itaque priſma nil aliud erit, quã columna quadam laterata æqualis craſſitudinis, cuius baſes oppoſitæ



ſunt æquales, ſimiles, & parallelæ, ſiue hæ ſint triangula, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Vnde tot parallelogrãma continebit priſma quodlibet, quot latera, ſiue anguli, in vno quoq; oppoſitorũ planorũ reperiuntur, vt figuræ indicãt.

EX his manifeſtum eſt, quantum hallucinẽtur ij, inter quos eſt & Campanus, qui priſma intelligunt eſſe eam figuram ſolidam duntaxat, cuius duo plana aduerſa parallela, æqualia, ſimiliaque, triangula ſunt, reliqua vero tria parallelogramma. Quam quidem figuram ſolidam Campanus vocat Corpus ſerratile. Cum enim hæc figura ſit ſolum vna ſpecies priſmatis, definitio autem tradita infinita alia genera priſmatis amplectatur, vt cõſtat, præſertim quod plurimæ demonſtrationes in hoc lib & 12. ſequenti, ex æquo omnibus priſmatibus conueniunt; perſpicuum eſt eos hallucinari, qui vnum tantum priſmatis genus ex hac defin. colligunt. Sum-

pſertũ autem fortaſſe hi auctores occaſionẽ errãdi, quod Euclides & in propoſ. vltima huius lib. et in 3. 4. & 5. propoſ. lib. 12. ſolum de eo priſmate loquatur, quod duo aduerſa plana habet triangula. Non autem animaduerterunt, ſeptimam propoſitionem lib 12. illis aduerſari, in qua Euclides loquens de priſmate, mentionem facit duorum triangulorum oppoſitorum, eo quod tali priſmati ſolum demonſtratio illa conuenit. Quod ſi ſola ea figura, vt ipſi volunt, priſma appellaretur ab Euclide, fruſtra dixiſſet: Omne priſma trigonam habens baſin, &c. cum nullum aliud priſma daretur. Imo in corollario dictæ propoſitionis ſeptimæ infert Theon, Pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis eãdem cum illa baſin habentis, & altitudinem æqualem, licet duo plana priſmatis aduerſa non ſint triangula, ſed alia quauis rectilinea, æqualia tamen & ſimilia, vt vult definitio. Ex quo loco luce clarius colligitur, infinita eſſe priſmatum genera ſecũdum Theonem, atque adeo ſecundum Euclidẽ, cum communi omnium ſententia demonſtrationes Theoni aſcriptæ, ſint Euclidis. Accedit etiã, quod a Theone in demonſtratione propoſitionis 10. lib. 12. apertiſſime appellantur priſmata omnia ſolida, quæ habent duo plana aduerſa & æqualia & ſimilia, ſiue ea ſint triangula, & quadrata, ſiue multangula, reliqua vero parallelogramma.

XIIII.

SPHAERA eſt, quando, ſemicirculi, manente diametro, circumductus ſemicirculus in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumaſſumpta figura.

SICVT linea recta circa alterum eius extremum quieſcens reuoluta deſcribit circulum; ita & ſemicirculus circa alterum eius extremum, nempe circa diametrum, circumductus figuram deſcribit, quam Geometræ ſphæram appellant. Vnde quemadmodum in circulo punctum aſſignatur, extremum

mum videlicet illud quieſcens, a quo omnes lineæ rectæ in peripheriã cadentes ſunt æquales; propterea quod omnes æquales exiſtant illi lineæ circumuolutæ : Ita quoque in ſphæra punctum reperitur, nempe medium diametri quieſcentis, hoc eſt, centrum ſemicirculi circumducti, a quo omnes rectæ cadentes in peripheriam ſunt æquales; eo quod omnes ſunt ſemidiametro dicti ſemicirculi æquales. Quapropter ad ſimilitudinẽ definitionis circuli, ſphæra definiri poterit hoc etiã modo.

SPHAERA eſt figura ſolida, vna ſuperficie comprehenſa, ad quam ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt poſita, cadentes omnes rectæ lineæ inter ſe ſunt æquales.

CICERO in libro de vniuerſitate de mundo loquens eleganter hanc definitionem expreſſit his verbis. Ergo globoſus eſt fabricatus, quod σφαιροειδὲς Græci vocant, cuius omnis extremitas partibus a medio radiis attingitur.

XV.

AXIS autem ſphæræ, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam ſemicirculus conuertitur.

XVI.

CENTRVM ſphæræ eſt idem, quod & ſemicirculi.

XVII.

DIAMETER autem ſphæræ, eſt recta quædam linea per centrum ducta, & vtrinque a ſphæræ ſuperficie terminata.

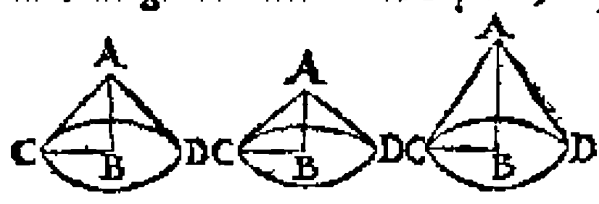
HÆ tres definitiones non egent expositione; dummodo hoc solum notetur, omnẽ diametrum sphæræ posse esse axem, si nimirum circum eam sphæra reuoluatur. Vnde quia in descriptione sphæræ circa diametrum semicirculi factus est motus ipsius sphæræ; propterea eam solam Euclides axem sphæræ nominauit.

XVIII.

CONVS est, quando rectanguli trianguli manente vno latere eorum, quæ circa rectùm angulum, circumductum triangulum in se ipsum rursus reuoluitur, vnde moueri cæperat, circumassumpta figura.

ATQVE si quiescens recta linea æqualis sit reliquæ, quæ circa rectum angulum cõuertitur, Orthogonius erit conus: Si vero minor, Amblygonius: Si vero maior, Oxygonius.

VT si triangulum rectangulum ABC, circa latus quiescens AB, quod est circum rectum angulum, circumducatur, donec integram reuolutionẽ expleat, describetur solida quædam figura, quæ continetur duabus superficiebus, circulari vna, ac plana, quam BC, latus alterum circa angulum rectum, suo motu describit; & curua alia, eaque conuexa, quam latus AC, recto angulo oppositum delineat. Hæc igitur figura solida, conus nuncupatur. Campanus autem pyramidem rotundam appellat.



QVOD

QVOD ſi latus quieſcens AB, æquale fuerit circumducto BC, vt in prima figura, dicetur conus deſcriptus Orthogonius, ſeu rectangulus, quia videlicet angulus prope verticem A, rectus eſt. Cum enim latera AB, BC, ponantur æqualia; [a] erunt & anguli BAC, BCA, æquales; qui cum æquiualeant vni recto, eo quod ABC, rectus eſt; erit angulus BAC, ſemirectus. Eodemque modo angulus BAD, ex parte oppoſita ſemirectus erit. Quare totus angulus CAD, rectus erit. Si vero quieſcens latus AB, minus fuerit circumducto BC, vt in ſecunda figura, vocabitur deſcriptus conus Amblygonius, ſeu obtuſangulus; quoniam ſcilicet angulus ad verticem A, obtuſus exiſtit. Cum enim BC, latus latere AB, ſit maius; [b] erit angulus BAC, maior angulo BCA. Quare cum hi duo æquipolleant vni recto, propterea quod angulus ABC, ponitur rectus, erit BAC, ſemirecto maior. Similiter BAD, maior erit ſemirecto; atq; adeo totus CAD, recto maior erit. Si denique quieſcẽs latus AB, maius fuerit circũducto BC, vt in tertia figura, appellabitur conus deſcriptus Oxygonius, ſeu acutangulus; quia nimirum angulus ad verticem A, acutus eſt. Cum.n. latus AB, maius ſit latere BC, [c] erit & angulus BCA, angulo BAC, maior. Quapropter cum hi duo vni recto æquiualeant, quod angulus ABC, rectus ponatur, erit BCA, ſemirecto maior, ideoque reliquus BAC, ſemirecto minor. Non ſecus oſtendetur angulus BAD, minor eſſe ſemirecto. Igitur totus CAD, recto erit minor.

[a] 5. primi

[b] 18. primi

[c] 18. primi

XIX.

AXIS autem coni, eſt quieſcens illa linea, circa quam triangulum vertitur.

VT in quolibet cono ſuperius deſcripto axis eſt recta quieſcens AB.

BASIS

XX.

BASIS vero coni eſt circulus, qui a circumducta linea recta deſcribitur.

NIMIRVM circulus, qui deſcribitur ab altero latere circa rectum angulum, quale eſt B C, in ſuperioribus conis. Itaque huius circuli ſemidiameter eſt ipſum latus circumductum.

QVONIAM vero Euclides ſolum definiuit conum rectum, cuius videlicet axis rectus eſt ad baſin; Non autem inclinatum, cuius axis ab baſim rectus non eſt; placuit ex Apollonio Pergæo adducere generalem coni deſcriptionẽ, quæ & rectum, & inclinatum comprehendat; propterea quod in 12.lib. eadem fere demonſtrari poſſunt de cono inclinato, quæ Euclides de recto cono oſtendit, vt ibi docebimus. Ita igitur ſcribit Apollonius ad initium conicorum elementorum.

SI ab aliquo puncto ad circumferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in vtramque partem producatur; & manente puncto, conuertatur circa circuli circumferentiam, quouſque ad eum locum redeat, a quo cæpit moueri: Superficiem a recta linea deſcriptam, conſtantemque ex duabus ſuperficiebus ad verticem inter ſe ſe aptatis, quarum vtraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infinitum producta, voco conicam ſuperficiem.

VERTICEM ipſius, manens punctum.

AXEM, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur.

CONVM autem voco figuram contentã circulo,

circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circumferentiam interijcitur.

VERTICEM coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt.

AXEM, rectam lineam, quæ a vertice ad circuli centrum producitur.

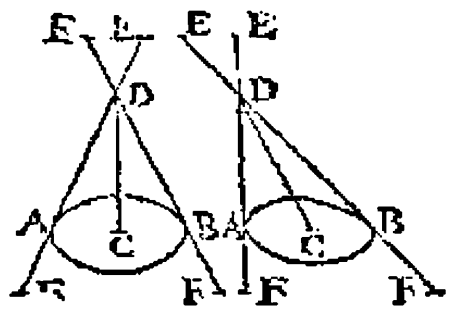
BASIM, circulum ipſum.

CONORVM, Rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus.

SCALENOS vero, qui non ad rectos angulos ipſis baſibus axes habent.

HÆC autem omnia ita explicat Eutocius in commentarijs, quos in Apollonium ſcripſit.

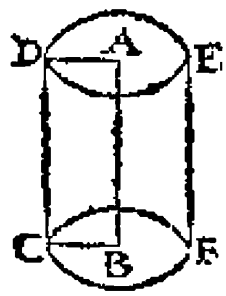
SIT circulus AB, cuius centrum C, & punctum aliquod ſublime D; iunctaque DB, in infinitum ex vtraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea DB, feratur eouſque in circuli AB, circumferentia, quouſq; punctum B, rurſus in eum locum reſtituatur, a quo capit moueri: deſcribet ſuperficiem quãdam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus ad D, punctum ſe ſe tangentibus. Eam vocat Apollonius conicam ſuperficiem, quæ & augetur in infinitum, cum recta linea DB, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Verticem ſuperficiei dicit punctum D. Axem, rectam DC. Conum vero appellat figuram contentam circulo AB, & ea ſuperficie, quam DB, ſola deſcribit. Coni verticem, punctum D. Axem DC. Baſim AB, circulum. Quod ſi DC, ad circulum fuerit perpendicularis, Rectum vocat conum: Sin minus, Scalenum.



XXI.

CYLINDRVS eſt, quando rectã guli parallelogrãmi manente vno latere eorum, quæ circa rectum angulum, circumductum parallelogramum in ſe ipſum rurſus reuoluitur, vnde cæperat moueri, circumaſſumpta figura.

VELVTI ſi rectangulum parallelogrammũ ABCD, circa latus quieſcens AB, circumuoluatur, donec integram expleat reuolutionem, appellabitur figura deſcripta cylindrus, quæ quidem tribus ſuperficiebus continetur, duabus videlicet planis circularibus, quas latera AD, BC, deſcribunt; & altera curua, eaque conuexa, quam latus CD, deſcribit, inſtar columnæ alicuius rotundæ. Vnde factum eſt, vt Campanus cylindrum appellauerit columnam rotundam.



XXII.

AXIS autem cylindri, eſt quieſcens illa recta linea, circum quam parallelogrammum conuertitur.

NEMPE recta AB, in ſuperiori figura, dicetur axis cylindri.

XXIII.

BASES vero cylindri ſunt circuli a duobus aduerſis lateribus, quę circumaguntur, deſcripti.

QV·A-

QVALES sunt circuli a lateribus AD, BC, oppositè descripti.

EVCLIDES porrò solum cylindrum rectum hoc loco definit, cuius videlicet axis rectus est ad vtramque basim; atque de hoc solum in lib. 12. est disputaturus. Cum igitur nos eadem fere theoremata, ex alijs Geometris simus proposituri in eodem 12. lib. de cylindro inclinato, quæ Euclides de cylindro recto demonstrauit, visum est prius ex Sereno Antinsensi definire cylindrum vniuersè, vt complectitur tam rectum, quam inclinatum. Sic igitur scribit Serenus ad initium primi libri de sectione cylindri.

SI duorum circulorum æqualium, & æquidistantium diametri semper interse æquidistantes & ipsæ in circulorum planis circa manens centrum circumferantur, & simul circumferatur recta linea diametrorũ terminos ex eadem parte conuungens, quousque rursus in eum locum restituatur, a quo moueri cæpit: Superficies, quæ a circumlata recta linea describitur, cylindrica superficies vocetur; quæ quidem & in infinitum augeri potest, linea ipsa describente in infinitum producta.

CYLINDRVS est figura, quæ circulis æquidistantibus, & cylindrica superficie inter ipsos interiecta continetur.

CYLINDRI bases sunt circuli ipsi.

AXIS, recta linea, quæ per circulorum centra ducitur.

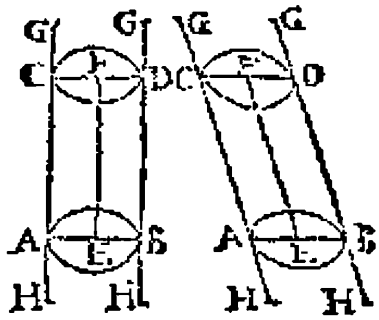
LATVS autem cylindri, linea, quæ cum recta sit, & in superficie ipsius cylindri, bases vtrasque contingit; quam & circumlatam, cylyndri superficiem describere antea diximus.

CYLINDRORVM, Recti quidem dicantur,

cantur, qui axem habent ad rectos angulos exi ſtentem ipſis baſibus.

SCALENI autem, qui non ad rectos angulos exiſtentem ipſis baſibus axem habent.

SINT duo circuli æquales, & æquidiſtantes AB, CD, quorum centra E, F, & diametri æquidiſtantes quoque AB, CD: Iunctaque recta AC, in infinitũ ex vtraque parte producatur ad puncta G, H. Si igitur diametri AB, CD, circa cẽtra E, F, in planis circulorũ ſemper æquidiſtãtes, vna cum recta AC, circumducantur, donec ad eum locum reſtituantur, vnde moueri cæperunt; deſcribetur a linea AC, ſuperficies quædam rotunda, quam Serenus cylindricam vocat; quæ & augetur in infinitum, cum recta AC, ipſam deſcribens in infinitum producitur. Cylindrum vero appellat figuram ABDC, circulis AB, CD, & cylindrica ſuperficie inter ipſos interiecta, quam videlicet ſola AC, deſcribit, comprehenſam. Baſes cylindri dicit eſſe circulos AB, CD. Axem, rectã EF, quæ circulorum centra coniungit. Latus cylindri, rectam AC. Quod ſi axis EF, perpendicularis fuerit ad baſes, rectum vocat cylindrum: Sin minus, Scalenum.

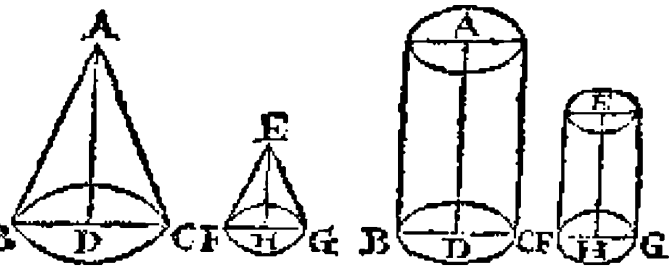


XXIIII.

SIMILES coni & cylindri ſunt, quorum & axes, & baſium diametri proportionales ſunt.

RECTE Euclides ſimilitudinem conorum, atque cylindrorũ ab eorum axibus, & baſium diametris ſumit. Diametri enim baſium indicant conos & cylindros ſecundũ duas dimen-

dimenſiones eſſe ſimiles, longitudinem ſcilicet ac latitudinẽ Axes vero eoſdem ſecundum profunditatem, ſeu altitudinẽ ſimiles eſſe demonſtrãt. Sint enim duo coni ABC, EFG; Item duo cylindri; in conis aũt axes AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit, vt axis AD, ad axem EH, ita BC, diameter baſis ad FG, diametrum baſis, dicentur tam coni, quam cylindri ſimiles inter ſe; quia videlicet hac ratione tam ſecundum longitudinem & latitudinem ſimiles ſunt, quam ſecundum profunditatem, vt diximus, nempe omnes eorum tres dimenſiones proportionales ſunt: Vel etiam, quia triangula ADB, EHF, ex quorum reuolutione deſcripti ſunt coni, nec non rectangula AB, EF, quorum conuerſiones cylindros effecerunt, hac ratione ſimilia inter ſe erunt. Cum enim ſit vt AD, ad EH, ita BC, ad FG; Sit autem vt BC, ad FG, [a] ita dimidia BD, ad dimidiã FH; erit quoque vt AD, ad EH, ita DB, ad HF: & permutando vt AD, ad DB, ita EH, ad HF. Quare tam in triangulis, quam in rectangulis latera, circũ æquales angulos, nempe rectos, proportionalia ſunt; ac propterea & triangula, & rectãgula ſimilia inter ſe erunt: Triangula quidem, [b] propterea quod triangula vnum angulum vni angulo habentia æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia, æquiangula ſunt, [c] ideoque latera omnia circa angulos æquales habent proportionalia, atque adeo inter ſe ſimilia exiſtunt: Rectangula vero, [d] eo quod reliqua duo latera duobus lateribus AD, DB, ſunt æqualia, oppoſita oppoſitis, ac propterea eandem cum his proportionem habent.



QVOD ſi coni, vel cylindri fuerint inclinati, (de rectis enim duntaxat Euclides verba fecit) dicentur ij tum demum ſimiles, quando eorum axes, & diametri baſium erunt proportionales, angulique inclinationum, quos axes efficiunt, æquales: qui quidem anguli accipiendi ſunt, vt in definitione quinta dictum eſt. Sint enim coni inclinati, ſimiliter & cylindri

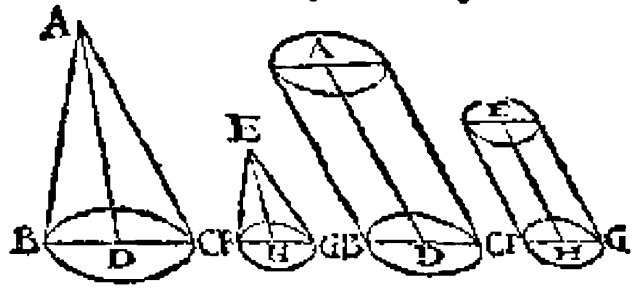
[a] 15. quinti

[b] 6. ſexti

[c] 5. ſexti.

[d] 34. primi

cylindri ABC, EFG: In conis autem axes ſint AD, EH, & baſium diametri BC, FG; ſimiliter & in cylindris. Itaque ſi fuerit tam in conis, quam in cylindris, vt AD, ad EH, ita BC, ad FG, extiterint q; anguli inclinationũ ADB, EHF, tã in conis, quam in cylindris, æquales inter ſe; dicẽtur & coni inter ſe, & cylindri quoque inter ſe ſe ſimiles; quoniam nimirum hac ratione & tres eorum dimenſiones ſunt proportionales, vt ſupra diximus, & rurſus tam triangula ADB, EHF, quam rectangula AB, EF, quorum conuerſiones conos, & cylindros effecerunt, inter ſe ſimilia ſunt, veluti in rectis conis, cylindriſque demonſtrauimus. Eſt enim prorſus eadem demonſtratio, cum anguli ADB, EHF, ponantur æquales, licet non ſint recti.



XXV.

CVBVS eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta.

XXVI.

TETRAEDVM eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

XXVII.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, et æquilateris contenta.

DO-

XXVIII.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

XIX.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida ſub viginti triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

HÆC ſunt quinque corpora, quæ regularia vocantur, quod omnia plana, quibus continentur, æqualia ſint, æquilatera, & æquiangula, vt ex eorum definitionibus conſtat. A nonnullis corpora Platonica dicuntur, propterea quod Plato in Tymæo quinque mundi corpora, quæ ſimplicia a philoſophis nuncupantur, nempe Cœlum, Ignem, Aerem, Aquam, atque Terram, quinque hiſce corporibus aſſimilat, vt in ſphæra Ioannis a ſacro boſco latius explicauimus. Horum omniũ conſtructio tradetur lib. 13. Cubi quidem propoſ. 15. Tetraedri vero propoſ. 13. Octaedri deinde propoſ. 14. Dodecaedri autẽ propoſ. 17. Icoſaedri denique propoſ. 16. Vbi planius perfectiuſq; definitiones horum corporum intelligentur. In plano enim difficillimum eſt, ea ita depingere, vt veram eorum effigiem, atq; formã quis intueatur. Trademus tamen proprijs in locis praxes admodũ faciles, quibus ea quilibet ſecundũ eorũ ſoliditatẽ poſſit conficere. Neque vero aliud corpus regulare præter quinq; illa dari poteſt, vt demõſtrabimus ad finẽ lib. 13.

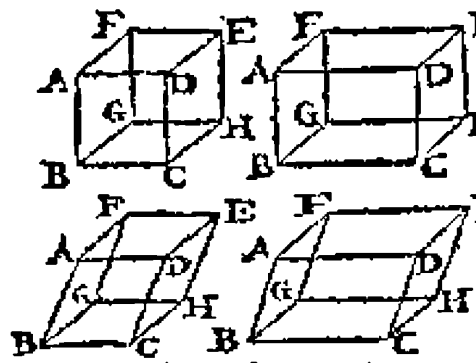
QVONIAM vero frequens hoc lib. 11. ſit mentio Parallelepipedi, & lib. 12. agitur de mutua inſcriptione, circumſcriptioneque corporum regularium; neceſſarium eſſe duximus, tribus definitionibus explicare, quidnam ſit Parallelepipedum,

lepipedum, quidque ſit figuram ſolidam in figura ſolida inſcribi, vel circa eandem deſcribi.

XXX.

PARALLELEPIPEDVM eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerſo, parallelę ſunt, contenta.

VELVTI ſolida figura comprehenſa ſex quadrilateris ABCD, DEFA, ABGF, FGHE, EDCH, HCBG, quarum oppoſita AC, FH; Itẽ DF, CG; Item AG, DH, ſunt parallela, nominantur parallelepipeda, quaſi parallelis planis comprehẽſa. quæ quidem plana parallela oppoſita, ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallelogramma, vt demonſtrabitur propoſ. 24. huius lib.



SVNT autem tot parallelepipedorum genera, quot parallelogrammorum. Si enim ſex parallelogramma fuerint æquilatera, & rectangula, hoc eſt, quadrata, dicetur parallelepipedum illud, cubus, reſpondebitque quadrato in planis figuris: Si autem ſex parallelogramma fuerint quidem rectangula, at non omnia æquilatera, ſed altera parte lõgiora, quãuis duo ſint æquilatera, appellabitur parallelepipedum altera parte longius. Quod ſi ſex parallelogramma extiterint, æquilatera quidem, ſed non omnia rectangula, quamuis duo ſint rectangula, vocabitur parallelepipedum illud, Rhombus. Si denique ſex parallelogramma neque rectãgula fuerint omnia, neque omnia æquilatera, quamuis duo ſint rectangula, & æquilatera, vel rectangula tantum, vel æquilatera tantum, fuerint tamen parallelogramma, quæ ex aduerſo, æqualia; parallelepipedum tale Rhomboides nuncupabitur. Cæterum quodcunque parallelepipedum vocari etiam poterit Priſma, vt ex definitione priſmatis conſtat.

SOLI-

XXXI.

SOLIDA figura in ſolida figura dicitur inſcribi, quando omnes anguli figuræ inſcriptæ conſtituuntur vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis figuræ, cui inſcribitur.

XXXII.

SOLIDA figura ſolidę figurę viciſſim circumſcribi dicitur, quando vel anguli, vel latera, vel denique plana figurę circumſcriptę tangunt omnes angulos figurę, circum quam deſcribitur.

NON eſt neceſſe, vt anguli interioris figuræ conſtituantur in omnibus vel angulis, vel lateribus, vel planis exterioris figuræ, cum interdum figura exterior plures, interdū paucíores angulos contineat, vel laterę, vel plana, quam interior: ſed ſatis eſt, vt omnes anguli figuræ interioris tangant vel aliquot angulos, uel aliquot laterę, vel denique aliquot plana exterioris figuræ; ita ut nullus angulus figuræ interioris intactus relinquatur uel ab angulis, uel a lateribus, uel denique a planis figuræ exterioris.

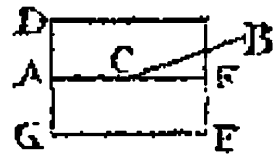
VERVM dua hę poſtremę definitiones planius percipientur ex lib. 15. in quo de inſcriptionibus, circumſcriptionibusque mutuis corporum regularium copioſe agetur.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

RECTAE lineæ pars quædā non eſt

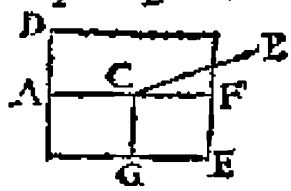
in ſubiecto plano, quædam vero in ſublimi.

SIT enim, ſi fieri poteſt, rectæ lineæ AB, pars quidē AC, in ſubiecto plano DE, pars vero CB, in ſublimi, ita vt omnia puncta partis AC, in plano DE, iaceant, puncta vero omnia partis CB, ſupra planum DE exiſtant, vel infra. Erit igitur in plano DE, ipſi AC, rectæ lineæ continua quædam recta linea in directum poſita, nempe CF. Quam obrem duæ rectæ AB, AF, commune habent ſegmentum AC, quod eſt abſurdum, vt in pronunciato 10. lib. 1. demonſtrauimus. Rectæ igitur lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædam uero in ſublimi. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

HÆC eſt communis demonſtratio interpretum. Sed fortaſſe dicet aliquis, in ea aliquid deſiderari, nēpe vt oſtendatur, rectæ AC, eſſe aliquam rectam in plano DE, in directū, & continuum poſitam. Qui enim concedit, rectæ AB, partem quidem AC, eſſe in plano DE, partem vero CB, in ſublimi, vtique negabit, rectæ AC, in plano DE, dari poſſe aliam rectam in continuum, & directum, quādoquidem rectam CB, in rectum & continuum poſitam eſſe fatetur ipſi AC. Verumtamen ei, qui ſic dubitat, reſpondendum eſt, rectam quamlibet finitam in quouis plano datam poſſe in eodem vlterius produci in rectum & continuum, cum plana ſuperficies ſit illa, qua ex aequali ſuas interiacet lineas, hoc eſt, quæ recte, & aequaliter ſemper extenditur, vt & lineæ recta. Quamobrem ſi AC, in plano DE, producatur vſque ad F, erit CF, recta rectæ AC, in cōtinuum & directum poſita. Verum demonſtremus iam id ipſum Geometrice, in plano videlicet DE, ipſi AC, dari poſſe aliam rectam, quæ cum ipſa vnam rectam lineam cōſtituat, quamuis quis dicat, AB, eſſe quoque rectam, eiuſque partem AC, in plano DE, partem vero CB, in ſublimi eſſe poſitam.



ſitam. Ducatur enim in plano DE, ipſi AC, perpẽdicularis CG; & in eodẽ plano ipſi CG, perpendicularis CF. Dico CF, eſſe ipſi AC, poſitam in continuũ & rectũ. Cũ enim AC, & FC, in eodem plano DE, cum recta CG, duos rectos angulos conſtituant ACG, FCG, ex conſtructione; [b] erunt AC, & FC, in directum & continuum poſitæ. Quamobrem etiamſi quis contendat, AB, eſſe rectam, cuius quidem pars AC, in plano DE, ſubiecto, pars autem CB, in ſublimi ſit conſtituta; tamen in eodem plano DE, erit alia recta, nempe CF, quæ cum AC, vnam rectam conſtituat lineam, atque adeo duæ rectæ AB, AF, ſegmentum commune habebunt AC. Quod eſt abſurdum.

[a] 11. primi

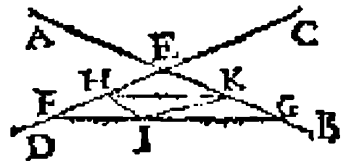
[b] 14. primi

HINC ſit omnes partes cuiuſuis rectæ lineæ, hoc eſt, totam rectam lineam, in vno exiſtere plano.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI duæ rectę lineæ ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum ōmne in vno eſt plano.

RECTAE lineæ AB, CD, ſe mutuo ſecent in E, & in EB, ED, ſumptis punctis F, & G, vtcumque, ducatur recta FG, vt fiat triangulum EFG. Dico triangulum EFG, in vno eſſe plano; Item rectas AB, CD, in vno quoq; plano exiſtere. Si enim trianguli EFG, pars quædam, nimirũ EHIG, in plano vno exiſtat, & pars quædam, nempe reliqua FHI, in ſublimi, vel contra; Exiſtent quoque rectarum EF, GF, partes quidem EH, GI, in vno plano, partes vero HF, IF, in ſublimi, vel contra. quod fieri nó poſſe, iam ſupra demonſtratum eſt. Quod ſi eiuſdem trianguli pars quidem EFIK, in vno plano credatur eſſe, pars autem GIK, in ſublimi, vel contra; erunt eadem ratione rectarum EG, FG, partes quidem EK, FI, in vno plano, partes vero KG, IG, in ſublimi, vel contra. Si denique eiuſdem trianguli pars quidem FHKG, in vno concedatur

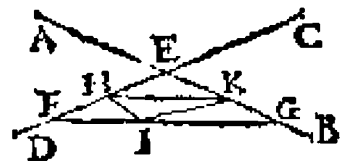


[c] 1. vndec.

tur esse plano, pars vero EHK, in sublimi, vel contra; erunt quoq; rectarum FE, GE, partes quidē FH, GK, in vno plano, partes autem HE, KE, in sublimi, vel cōtra. Quæ omnia absurda sunt,[a] vt est demonstratum. Quare triangulum EFG, in vno plano existit; eademque est ratio in omni alio triangulo.

[a] 1. vndec.

QVIA vero, in quo plano est triangulum EFG, in eodem existunt eius latera EF, EG: In quo autem sunt rectæ EF, EG.[b] in eodem sunt rectæ totæ CD, AB, ne partes quædā in plano, partes vero aliæ in sublimi dicantur esse; Erunt propterea rectæ AB, CD, in vno plano, in quo nimirum triangulū EFG, consistere demōstrauimus. Quocirca si duæ rectæ lineæ se mutuo secent, in vno sunt plano. Atque triangulum omne in vno est plano. Quod erat demonstrandum.

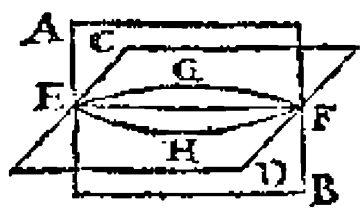


[b] 1. vndec.

3. THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta.

SECENT se mutuo plana AB, CD, sitq; communis eorum sectio EF. Dico EF, esse lineam rectā. Si enim non credatur esse recta, ducatur in plano AB, recta EGF, & in plano CD, recta EHF. Rectæ igitur EGF, EHF, cum eosdem habeant terminos E, & F, superficiem includent. Quod fieri non potest, vt in 14. pronunciato 1. lib. ostendimus. Communis ergo sectio EF, recta erit linea; Ac proinde si duo plana se mutuo secent, communis eorum sectio est linea recta. Quod erat ostendendum.



ALITER. Secent se rursus plana AB, CD, sintq; termini sectionis communis E, & F, puncta, quæ connectātur recta EF. Si igitur recta EF, in vtroque plano existit, cōstat propositum: Ipsa enim erit communis sectio.

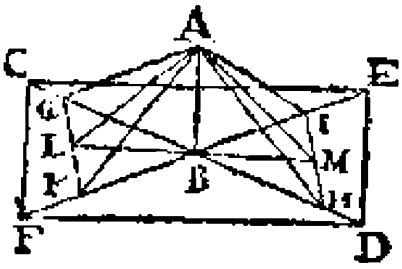
Si

Si vero EF, recta in neutro eorum dicatur esse, tunc si in alterutro eorum recta ducatur EGF, concludent rursus duæ rectæ EF, EGF, superficiem, cũ eosdem habeant terminos E, & F. Si denique recta EF, in altero tantũ plano esse credatur, tunc si in altero ducatur recta EGF; includent iterum duæ rectæ EF, EGF, superficiem. Quod est absurdum. Est ergo recta EF, in vtroque plano AB, CD; atque adeo communis eorum sectio est.

THEOR. 4. PROPOS. 4. 4.

SI recta linea rectis duabus lineis se mutuo secãtibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illa ducto etiã per ipsas plano ad angulos rectos erit.

RECTA linea AB, insistat duabus rectis CD, EF, ad rectos angulos in communi earum sectione B. Dico rectam AB, ad angulos quoque rectos esse plano, quod per ipsas ducitur, seu in quo existunt. Cũ enim se mutuo secent in B; [a] erunt ipsæ in vno plano, quod sit CEDF. [a] 2. undec.



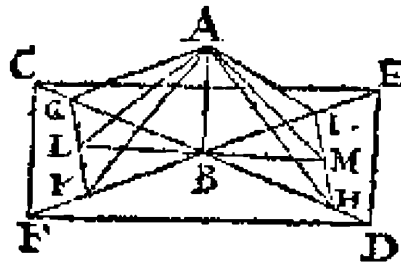
Sumãtur inter se æquales rectæ BG, BH; Item rectæ BI, BK; ducanturq; rectæ GK, HI; & in eodem plano per B, ducatur recta LM, secãs rectas GK, HI, in punctis L, & M. Demittantur quoque ex A, puncto in sublimi ad idem planum rectæ AG, AL, AK, AH, AM, AI. Quoniam igitur latera BG, BK, triãguli BGK, lateribus BH, BI, trianguli BHI, ex constructione sunt æqualia; [b] & anguli quoque ipsis contenti GBK, HBI, cum sint ad verticem B, oppositi, æquales: [c] Erunt bases GK, HI, inter se, & anguli BKG, BIH, inter se quoque æquales. [b] 15. primi [c] 4. primi.

RVRSVS [d] cum anguli KBL, IBM, ad verticem B, oppositi sint æquales; erũt duo anguli KBL, BKL, trianguli BKL, duobus angulis IBM, BIM, trianguli BIM, æquales; Sunt autem & latera BK, BI, quibus adiacent, [d] 15. primi

[a] 26. primi

æqualia, ex constructione. Igitur & reliqua latera KL, LB, reliquis lateribus IM, MB, æqualia erunt.

PRAETEREA cum latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sint lateribus AB, BH, trianguli ABH, ex cõstructione; & anguli ipsis contenti ABG ABH æquales, nempe recti ex hypothesi, [b] erunt & bases AG, AH, æquales. Similiargumento æquales erunt rectæ lineæ AI, AK.



[b] 4. primi.

AMPLIVS quia latera AI, IH, trianguli AIH, lateribus AK, KG, trianguli, AKG, æqualia sunt; & basis AH, basi AG, ex hactenus demonstratis; [c] erunt etiam anguli AIH, AKG, dictis lateribus comprehẽsi, æquales.

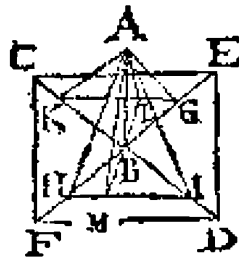
[c] 8. primi.

ITAQVE cum latera AK, KL, trianguli AKL, æqualia sint lateribus AI, IM, trianguli AIM; & anguli ipsis contenti AKL, AIM, æquales etiam, vt hactenus demonstrauimus; [d] erunt quoque bases AL, AM, æquales.

[d] 4. primi.

QVONIAM deniq; latera AB, BL, trianguli ABL. æqualia sunt lateribus AB, BM. trianguli ABM; & basis AL, basi AM, ex demonstratis; [e] erunt quoque anguli ABL, ABM, dictis lateribus comprehensi, æquales; qui cum sint deinceps, recti erunt, ex defin. 10. lib. 1. Quare recta AB, rectos angulos efficit cum recta LM, quæ in plano subiecto ipsam tangit in B: Eademq; ratione ostendetur, rectam AB, cum omnibus rectis, quæ in eodem plano ipsam tangent in B, angulos rectos constituere, etiamsi inter pũcta G, I, & K, H, ductæ sint, dummodo rectæ GI, KH, iungantur: vel certe literę disponantur, vt prius, quemadmodum in hac figura apparet, vbi eædem sunt literæ; & tamen LM, non ducitur à sinistra in dextrã, vt in priori figura, sed à superiori parte versus inferiorem. [f] Quocirca recta AB, plano CEDF, quod per rectas CD, EF, ducitur, ad rectos angulos erit, ex defin. 3. huius lib. Si recta igitur linea rectis duabus lineis se mutuo secantibus, &c. Quod demonstrandum erat.

[e] 8. primi.



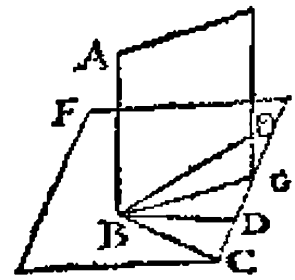
THEO-

THEOR. 5. PROPOS. 5.

5.

SI recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, in communi sectione ad rectos angulos insistat: Illæ tres rectæ in vno sunt plano.

INSISTAT recta linea AB, tribus rectis lineis BC, BD, BE, se tangentibus in B, ad rectos angulos in communi earum sectione, seu tactu B. Dico tres rectas BC, BD, BE, in vno plano esse. [a] Cũ enim quælibet duæ in vno sint plano, propterea quod productæ ad partes B, se mutuo secent in B; sint BC, BD, in plano FC; Et si fieri potest, recta BE, non ponatur in eodem plano, sed in sublimi. [b] Quoniam vero duæ rectæ AB, BE, in vno sunt plano, cum se mutuo secent in B; sint ambæ in plano AE. Et quia plana FC, AE, sibi mutuo occurrunt in B; necessario producta se mutuo secabunt. [c] Sit ergo eorum communis sectio recta BG. Quia vero recta AB, ad angulos rectos ponitur rectis BC, BD; [d] erit propterea & plano FC, p ipsas ducto ad rectos angulos; ac proinde ad rectos angulos erit rectæ BG, quæ ipsã in B, tangit, ex defin. 3. huius lib. Quare recti anguli ABE, ABG, existentes in plano AG, per rectas AB, BE, ducto æquales inter se erunt, pars & totum. Quod est absurdũ. Duabus igitur rectis BC, BD, in vno plano FC, existentibus, nõ erit BE, in sublimi, sed in eodem cum ipsis plano. Quocirca si recta linea rectis tribus lineis se mutuo tangentibus, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 2. undec.

[b] 2. undec.

[c] 3. undec.

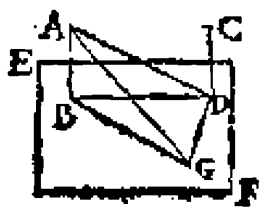
[d] 4. undec.

THEOR.

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI duæ rectæ lineæ eidem plano ad rectos sint angulos; Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SINT duæ rectæ lineæ AB, CD, eidem plano EF, ad angulos rectos in punctis B, & D. Dico illas esse parallelas. Ducta enim recta BD, in plano EF, erunt anguli ABD, CDB, recti, ex defin. 3. huius lib. Iam in eodem plano EF, ducatur DG, ad BD, perpendicularis, ponanturque æquales AB, DG. Connectâtur deinde rectæ BG, GA, AD. Quoniam igitur latera AB, BD, trianguli BAD, æqualia sunt lateribus GD, DB, trianguli GDB, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti ABD, GDB, æquales, nempe recti; [a] erunt bases æquales AD, GB. Rursus quia latera AB, BG, trianguli ABG, æqualia sunt lateribus GD, DA, trianguli GDA; Est autem & basis communis AG; [b] Erunt anguli ABG, GDA, æquales: Est autem ABG, rectus, ex defin. 3. huius lib. Igitur & GDA, rectus erit. Quoniam vero ex eadem defin. angulus quoque GDC, rectus est; erit recta GD, tribus rectis DB, DA, DC, ad angulos rectos. [c] Quare rectæ DB, DA, DC, in vno erunt plano: [d] Est autem AB, in eodem plano, in quo DB, DA. Recta igitur CD, in eodem erit cum AB, plano. Quocirca cum anguli interni ABD, CDB, sint recti, [e] erũt rectæ AB, CD, parallelę. Si duæ itaque rectæ lineę eidem plano ad rectos sint angulos, &c. Quod erat demonstrandum.



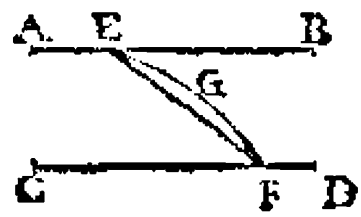
a 4. primi.
b 8. primi.
c 5. undec.
d 2. undec.
e 28. primi

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI duæ sint parallelæ rectæ lineę, in qua-

quarum vtraque ſumpta ſint quęlibet puncta : Illa linea, quæ ad hęc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano.

IN parallelis *AB*,CD. ſumantur vtcunque duo puncta E,& F,quæ recta connectantur EF. Dico rectam EF, in eodem eſſe plano, in quo, per definitionem parallelarum, ſunt parallelæ *AB*, *CD*. Si enim recta EF,non concedatur eſſe in eodem plano parallelarum, ſed extra: ſecet iam aliud planum ſuperficiem parallelarum per puncta E,& F, ſitque communis ſectio horum planorum EGF,quę recta linea erit. Duæ igitur rectæ *EF*, EGF, cum habeant eoſdem terminos E, & F, ſuperficiem claudent. Quod eſt abſurdum. Non ergo extra planum parallelarum AB,CD,erit recta EF. Quare ſi duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quælibet puncta: Illa linea, quæ ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. Quod erat demonſtrandum.



*5. undec.

SCHOLIVM.

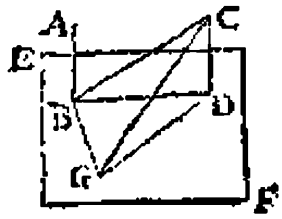
HÆC eadem propoſitio vera eſt, etiãſi duæ rectæ AB, CD, parallelæ non ſint, dummodo in eodem plano exiſtant, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SI duæ ſint parallelæ rectæ lineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit.

SINT

SINT parallelæ rectæ *AB*, *CD*; sitque *CD*, plano *EF*, ad angulos rectos: Dico & *AB*, eidem plano *EF*, esse ad rectos angulos. Ducta enim recta *BD*, in plano *EF*; erit per defin. 3. huius lib. angulus *CDB*, rectus: Sunt autem duo *CDB*, *ABD*, duobus rectis æquales. Igitur & *ABD*, rectus erit. Iam in plano *EF*, ducatur *BG*, perpendicularis ad *BD*; ponanturque æquales *BG*, *CD*. Coniungantur deinde rectæ *DG*, *GC*, *CB*. Quoniam igitur latera *CD*, *DB*, trianguli *CDB*, æqualia sunt lateribus *GB*, *BD*, trianguli *GBD*, ex constructione; & anguli quoque ipsis contenti, *CDB*, *GBD*, æquales, nimirum recti; [b] Erunt bases *CB*, *GD*, æquales. Rursus quia latera *CD*, *DG*, trianguli *CDG*, æqualia sunt lateribus *GB*, *BC*, trianguli *GBC*; & basis est communis *CG*; [c] Erunt anguli *CDG*, *GBC*, dictis lateribus comprehensi æquales. Est autem *CDG*, rectus ex defin. 3. huius lib. Igitur & *GBC*, rectus erit. Quare recta *GB*, duabus rectis *BD*, *BC*, se mutuo secantibus in *B*, (Si namque producerentur *DB*, *CB* secarent sese in *B*, ob angulum *CBD*.) ad rectos angulos existit; ac proinde ad rectos angulos erit plano per *BD*, *BC*, ducto: Est autem in hoc eodem plano recta *AB*, [e] propterea quod rectæ *BD*, *BC*, in eod[em] sunt plano, in quo parallelæ *AB*, *CD*; cum puncta *B*, *C*, *D* existant in parallelis *AB*, *CD*. Igitur & *GB*, recta rectæ *BA*, ad rectos erit angulos ex defin. 3. huius lib. Quare cum *AB*, recta sit ad rectas *BG*, *BD*; erit quoque *AB*, recta ad planum per *BG*, *BD*, ductum, hoc est, ad planum *EF*. Si duæ igitur sint parallelæ rectilineæ, quarum altera ad rectos cuidam plano sit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. Quod erat ostendendum.



a 29. primi

b 4. primi.

c 8. primi.

d 4. undec.

e 7. undec.

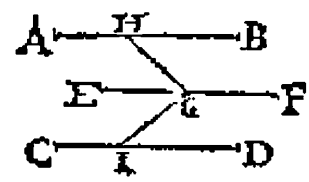
f 4. undec.

9. THEOR. 9. PROPOS. 9.

QVAE eidem rectæ lineæ sunt parallelæ,

rallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: Hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ.

SINT rectæ AB, CD, ipſi EF, parallelæ; non ſint autem in eodem cum EF, plano. Dico AB, CD, parallelas quoq; eſſe. Nam à quolibet puncto G, rectæ EF, ad ipſam EF, ducantur duæ perpendiculares; GH, quidem in plano parallelarũ AB, EF; at GI, in plano parallelarũ CD, EF. Quoniam igitur EG, recta eſt ad duas rectas GH, GI, ſe tangẽtes mutuo in G; [a] erit recta quoque ad planum per ipſas GH, GI, ductum. Quamobrem cum ſint parallelæ AB, EF; & EF, ſit recta ad planũ per GH, GI, ductum; [b] erit quoque AB, ad idem planum recta. Similiter cum ſint parallelæ CD, EF; ſit autem EF, recta ad planum per GH, HI, ductum; [c] erit etiam CD, recta ad idem planum; [d] Atque proinde rectæ AB, CD, cum rectæ ſint ad idem planum per GH, GI, ductum, parallelæ erunt. Quæ igitur eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cum illa plano: hæ quoque ſunt inter ſe parallelæ. Quod erat demonſtrandum.



[a] 4. vndec.
[b] 8. vndec.
[c] 8. vndec.
[d] 6. vndec.

SCHOLIVM.

DATA opera Euclidis voluit, duas rectas AB, CD, non eſſe in eodem plano cum recta EF, cui ſunt parallelæ. Nã ſi forent in eodem plano cum ipſa EF; eſſent AB, CD, inter ſe parallelæ, ex 30. propoſ. 1. lib. Superuacaneum ergo eſſet, hic idem demonſtrare.

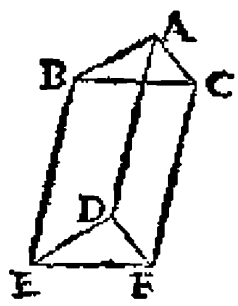
THEOR. 10. PROPOS. 10. 10.

SI duæ rectę lineę ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes

ſint

ſint parallelę, non autẽ in eodem plano: Illę angulos æquales comprehendent.

SINT rectæ AB, AC, ſe tangentes in A, parallelæ rectis DE, DF, ſe tangentibus in D; non ſint autem AB, AC, in eodem plano, in quo DE, DF. Dico angulos BAC, EDF, ab ipſis comprehenſos eſſe æquales. Ponãtur enim AB, DE, inter ſe æquales, & AC, DF, inter ſe; ducanturque rectæ BC, EF, BE, AD, CF. Quoniam igitur AB, DE, parallelæ ſunt & æquales; [a] erũt quoque BE, AD, parallelæ & æquales. Simili argumento parallelæ erũt & æquales CF, AD. Quare cum BE, CF, parallelæ & æquales ſint eidem AD; [b] erunt etiam BE, CF, inter ſe parallelæ, & æquales: [c] Ac propterea parallelæ & æquales erũt rectæ BC, EF. Quia ergo latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus DE, DF, trianguli DEF, ex conſtructione; & baſis BC, baſi EF, æqualis, vt modo demonſtrauimus; [d] Erunt & anguli BAC, EDF, dictis lateribus comprehẽſi, æquales. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat oſtendendum.



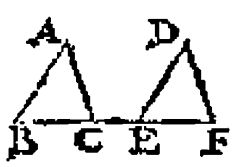
a 33. primi

b 9. vndec.
c 33. primi

d 8. primi.

SCHOLIVM.

CONCLVSIO huius theorematis vera etiam eſt, quãdo priores duæ lineæ in eodẽ ſunt plano cũ duabus poſterioribus. Sint enim quatuor lineæ AB, AC, DE, DF, in eodẽ plano, ſit ꝑ AB, ipſi DE, & AC, ipſi DF, parallela. Dico angulos BAC, EDF, eſſe æquales. Nam ponantur æquales AB, DE, & AC, DF; ducanturq; ꝑ recta BC, EF, quæ aut in vna recta linea erunt conſtituta, aut non. Sint prius in vna recta BF. Quoniã igitur parallelæ ſunt AB, DE; [e] æquales erũt anguli ABC, DEF, internus & externus. Similiter æquales erũt anguli ACB, DFE; Sũt enim & AC, DF, parallelæ. Quare duo anguli ABC, ACB, trianguli ABC,



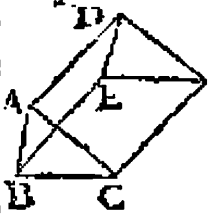
e 29. primi

æqua-

æquales ſunt duobus angulis DEF, DFE, trianguli DEF. [a] Igitur anguli quoque reliqui BAC, EDF, æquales erunt. Quod eſt propoſitum.

[a] 32. primi

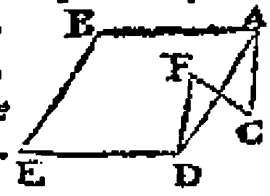
NON ſint iam BC, EF, in vna recta linea conſtituta. Ductis rectis AD, BE, CF, cum AB, DE, ſint parallelæ & æquales; [b] erunt & AD, BE, parallelæ & æquales. Eadem ratione AD, CF, parallelæ erunt & æquales, eo quod AC, DF, parallelæ ponuntur, & æquales. Quare & BE, CF, eidē AD, parallelæ exiſtētes & æquales, [c] inter ſe parallelæ erūt & æquales: [d] Ac proinde parallelæ & æquales quoq; erūt BC, EF. Itaq; cū duo latera AB, AC, triāguli ABC, æqualia ſint duobus lateribus DE, DF, triāguli DEF; & baſis BC, baſi EF, [e] erunt anguli BAC, EDF, contenti dictis lateribus, æquales. Quod eſt propoſitum.



[b] 33. primi
[c] 30. primi
[d] 33. primi
[e] 8. primi.

CAETERVM vt concluſio huius theorematis rectè ex data hypotheſi colligatur, neceſſe eſt, rectas lineas parallelas ita eſſe poſitas, (ſiue omnes ſint in eodē plano, ſiue non,) vt tres rectæ AD, BE, CF, nulla rōne ſe mutuo ſecent; vt ex prima et vltima figura apparet. Nā alias cōcluſio vera nō erit.

SVNT enim rectæ AB, AC, rectis DE, DF, parallelæ in hac figura; & tamen anguli BAC, EDF, quos comprehēdunt, non ſunt æquales, cum ille ſit acutus, hic vero obtuſus. Hoc autem ideo euenit, quod AD, CF, ſe mutuo ſecant. Vnde quamuis AC, DF, ſint parallelæ & æquales, non tamen propterea AD, CF, quæ eas coniungunt, parallelæ ſunt & æquales, propterea quod eas non coniungūt ad eaſdem partes, vt vult propoſ. 33. lib. 1. Quare demonſtratio huius theorematis locum non habet, deficiente hac conditione; quæ tamen in ſuperioribus figuris ſeruatur.

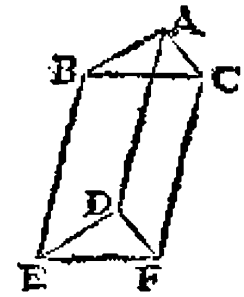


PORRO conuerſum quoque huius propoſ. nimirum: Si in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea vna vnius lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallelas ductæ: demonſtrabimus hoc modo. In planis parallelis ſint anguli æquales BAC, EDF, ſitque AB, ipſi DE, parallela, & AC, DF, ſint ad eaſdem

dem partes plani AE, per AB, DE, ducti. Dico AC, DF, parallelas quoque esse. hoc est, planum per AC, AD, ductum trā sire etiam per rectam DF. Si enim non sint parallelæ; [a] si ducatur in plano CD, per AC, AD, ducto recta alia per D, ipsi AC, parallela, [b] continebit hæc cum DE, angulum angulo BAC, æqualē, ac propterea & angulo EDF: atque ita pars & totū erunt æqualia. quod est absurdū. Recta ergo DF, ipsi AC, parallela est: atq; adeo planū per AC, AD, ductū trāsibit per rectā DF. quod est propositū.

[a] 31. primi

[b] 10. vnde.



II. PROBL. 1. PRPOS. 11.

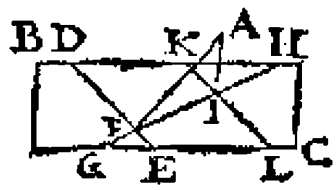
A dato puncto in sublimi, ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

SIT a puncto A, in sublimi ad subiectum planū BC, ducenda perpendicularis. Ducatur in plano BC, recta vtcunq; DE; [c] ad quam ex A, deducatur perpendicularis AF: Et in plano BC, per F, ad DE, perpendicularis ducatur GH; [c] ad quam ex A, perpendicularis demittatur AI. Dico AI, esse perpendicularem ad planum subiectum BC. [f] Ducta enim in plano BC, per I, ipsi DE, parallela KL; cum DF, ad rectos angulos sit duabus FA, FH, ex constructione, [g] ac proinde recta ad planum per FA, FH, ductum; [b] erit quoque KI, ad idem planum per FA, FH, ductum recta. [i] Quoniam vero AI, in eodem est cum rectis FA, FH, plano, tangitq; rectam KI, in I; erit per definitionem 3. huius lib. angulus KIA, rectus; atque adeo AI, ad rectos angulos erit duabus KI, IF. [k] Igitur AI, ad planum BC, recta erit. A dato ergo pūcto in sublimi, ad subiectū planū perpendicularem rectam lineam duximus. Quod faciendū erat.

[c] 12. primi

[a] 11. primi

[c] 12. primi



[f] 31. primi.

[g] 4. vnde.

[b] 8. vndec.

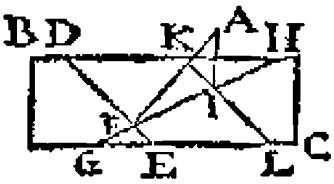
[i] 2. vndec.

[k] 4. vndec.

SCHO-

SCHOLIVM.

QVOD *si quando AI, ad GH, ducta perpendicularis cadat in punctum F, ita vt eadem sit, quæ AF, ad DE, ducta perpendicularis;* [a] *erit ipsa AF. ab initio ad DE, ducta perpendicularis ad subiectum planum BC, perpendicularis, cum perpendicularis sit ad vtramque DE, GH.*

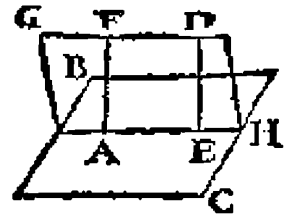


[a] *4. vnde.*

PROBL. 2. PROPOS. 12. 12.

DATO plano a puncto, quod in illo datum est, ad rectos angulos rectam lineam excitare.

SIT a dato puncto A, in plano BC, ducenda perpendicularis ad datum planum BC. [b] Ex quouis puncto D, in sublimi demittatur ad planum BC, perpendicularis DE, quæ si ceciderit in A, punctum, factum erit, quod proponitur: Si vero ceciderit in aliud punctum E; extensa recta per E, & A, [c] ducatur per A, ipsi DE, parallela AF, in plano GH, per DE, EA, ducto. Dico AF, rectam esse ad planum datũ BC. Cum enim DE, AF, parallelæ sint; & DE, recta ad planũ BC, ex constructione; [d] erit quoq; AF, ad idem planum BC, recta. Itaque dato plano, a puncto, quod in illo datum est, &c. Quod faciendum erat.



[b] *11. vnde.*

[c] *31. primi*

[d] *8. vndec.*

THEOR. 11. PROPOS. 13. 13.

DATO plano, a puncto, quod in illo datum est, duæ rectæ lineæ ad re-

ctos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes.

SIT datum planum AB. Dico a dato eius puncto C, ad eaſdem partes non poſſe educi duas perpendiculares ad planum AB. Ducantur enim, ſi poteſt fieri, duæ perpendiculares CD, CE, ad planum AB; & per CD, CE, [a] quæ in vno, eodemque plano ſunt, ducatur planum FG, ſecãs planum AB, per rectam lineam GH. Cum igitur EC, DC, rectæ ſint ad planum AB; erunt per defin. 3. huius lib. anguli ECG, DCG, recti, ac proinde æquales; pars & totum. Quod eſt abſurdum. Dato igitur plano, à puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ lineæ ad rectos angulos non excitabũtur, ad eaſdẽ partes. Quod erat demonſtrandum.

[a] 2. vndec.

ALITER. Ducantur, ſi fieri poteſt, ex C, ad planum AB, duæ perpẽdiculares CD, CE. Cum igitur duæ DC, EC, rectæ ſint ad idem planum AB; [b] erunt ipſæ inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto C. Quod eſt abſurdum.

[b] 6. vndec.

SCHOLIVM.

EODEM modo a puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ rectæ lineæ ad angulos rectos non demittentur. Ducantur enim ex A, puncto in ſublimi ad ſubiectum planum BC, ſi fieri poteſt, duæ perpendiculares AD, AE. Ducatur per AD, AE, [c] quæ in vno plano ſunt, planum FG, ſecans planum EC, per rectam GH. Cum igitur AD, AE, rectæ ſint ad planum BC, erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli ADE, AED, recti interni in triangulo ADE. Quod eſt abſurdum; [d] cum ſint duobus rectis minores quilibet duo anguli in triangulo quouis aſſumpti.

[c] 2. vndec.

[d] 17. primi.

ALITER. Si AD, AE, rectæ ſint ad planum BC; [e] ipſæ erunt inter ſe parallelæ, cum tamen conueniant in puncto A. Quod eſt abſurdum.

[e] 6. vndec.

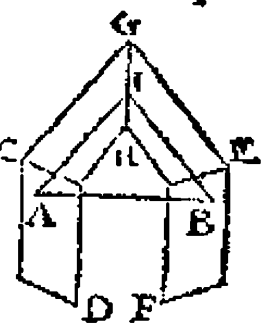
THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

14.

AD quæ plana, eadem recta linea recta est; illa sunt parallela.

SIT recta AB. ad plana CD, EF, recta. Dico parallela esse plana CD, EF. Si enim non credantur esse parallela, producta inter se conuenient. Conueniant ad partes C, E; [a] & faciant communem sectionem rectam lineã GH: In qua sumpto puncto vtcunque I, ducantur rectæ IA, IB, in planis GCD, GEF. Quia igitur AB, recta ponitur ad plana GCD, GEF; erunt per defin. 3. huius lib. duo anguli IAB, IBA, recti, in triangulo ABI. [b] Sed & minores duobus rectis sunt. Quod est absurdum. Igitur plana CD, EF, producta nunquam inter se conueniunt. Parellela ergo sunt. Ad quæ igitur plana, eadem recta linea recta est, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 3. vndec.

[b] 17. primi

SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrari poterit conuersum huius, videlicet.

SI fuerint duo plana parallela, recta linea, quæ ad vnum eorum recta fuerit, ad reliquum quoque recta erit.

SINT duo plana parallela AB, CD, ad quorum alterum AB, recta sit linea recta EF. Dico EF, rectam quoq; esse ad planum reliquum CD. Secet enim planum aliquod, nempe GK, plana AB, CD, per lineam rectam EF, incedens, faciatq; communes sectiones cum dictis planis rectas GH, IK:

eruntque anguli GEF, HEF, recti per defin. 3. huius lib. Ac proinde recti etiam erunt anguli IFE, KFE. (Si enim alter eorum, nempe IFE, dicatur acutus; erunt duo anguli GEF, IFE, duobus rectis minores. Quare rectæ EG, FI, ad partes G, I, conuenient, nimirum in puncto L; atque adeo & plana AB, CD, in quibus existunt, ad easdem partes conuenient ad punctum L; [a] *cum tota recta HGL, sit in uno plano, nempe in AB, producto; Item tota recta KIL, in uno quoque plano, nimirum in CD, protracto. Quod est absurdū, cum ponantur parallela. Recti ergo sunt anguli IFE, KFE.) Eodē modo si aliud planum videlicet MN, eadem plana secet per EF, faciens alias rectas, communes cum ipsis sectiones MO, PN; erunt anguli PFE, NFE, recti. Itaque cum EF, sit recta ad duas rectas IK, PN,* [b] *recta quoque erit EF, ad planū CD, per ipsas ductum. Quod est propositum.*

[a] 1 vndec.

[b] 4. vndec.

15. THEOR. 13. PROPOS. 15.

SI duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes, ad duas rectas se mutuo tangentes sint parallelæ, non in eodem consistentes plano: Parallela sunt, quę per illa ducuntur, plana.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, se tangentes in A, parallelæ duabus rectis lineis DE, DF, se tangentibus in D, existentibusq; in alio cum illis plano. Dico & plana BC, EF, per ipsas ducta, esse parallela. Ex A, enim deducatur ad planum EF, perpēdicularis AG, occurrēs plano EF, in puncto G [d] Deinde in plano EF, per G, ducantur GH, GI, ipsis DE, DF, parallelæ. Quoniam igitur rectæ AB, GH, parallelæ sunt ipsi DE; [e] erunt & AB, GH,



[c] 11. unde.

[d] 31. primi

[e] 9. vndec.

GH, inter ſe parallelæ; [a] Ac proinde anguli BAG, AGH, duobus rectis æquales: Eſt autem AGH, rectus ex defin. 3. huius lib. Rectus ergo erit & angulus BAG. Simili argumento concludes, angulum CAG, rectum eſſe. Itaque cum recta GA ſit recta duabus AB, AC; [b] recta quoque erit GA, ad planum BC, per ipſas ductum. Eſt autem & recta ad planum EF, ex conſtructione. [c] Igitur parallela ſunt plana BC, EF. Si ergo duæ rectæ lineæ ſe mutuo tangentes, &c. Quod erat demonſtrandũ.

[a] 29. primi
[b] 4. undec.
[c] 14. unde.

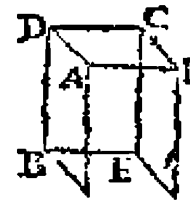
SCHOLIVM.

QVOD ſi perpendicularis ex A, ad planum EF, ducta cadat in ipſum met punctum D, concludetur idem, hoc excepto, quod in plano EF, non ſint ducendæ aliæ parallelæ. Vt ſi lineæ GH, GI, ponantur parallelæ rectis AB, AC, ita vt AG, ad planum HI, per GH, GI, ductum perpẽdicularis, cadat in G; oſtendemus, vt prius, GA, eſſe rectam ad planum BC, per rectas AB, AC, ductũ, &c.

EX hoc theoremate non difficile erit problema ſubſequens. Videlicet.

DATO plano, per datum punctum, quod in eo non eſt, parallelum planum ducere.

DATVM planum ſit AB, punctumque extra ipſum ſit C, per quod ducendum ſit planum plano AB, parallelum. In plano AB, ducantur vtcunq; duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, puncto, a quo ad C, recta ducatur DC. Deinde in plano BC, per rectas DB, DC, ducto, [d] agatur CE, ipſi DB, parallela; Et in plano AC, per rectas DA, DC, ducto fiat quoque CF, ipſi DA, parallela. Dico planum EF, per rectas CE, CF, ductum, parallelum eſſe plano dato AB. Cum enim duæ rectæ DB, DA, ſe tangentes in D, duabus rectis CE, CF, ſe tangentibus in C, exiſtentibusq; in alio cũ illis plano parallelæ ſint; [e] parallela erunt plana AB, EF, per ipſas ducta. Quod eſt propoſitum.

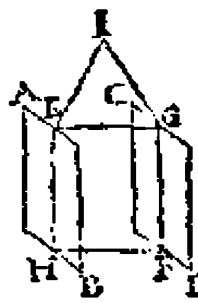


[d] 31. primi
[e] 15. unde.

16. THEOR. 14. PROPOS. 16.

SI duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SECENTVR plana AB, CD, parallela plano EF, per rectas EH, GF. Dico communes sectiones eorum EH, GF, esse lineas parallelas. Si enim non sunt parallelæ productæ inter se conuenient, cum sint in plano EF, secante. Conueniant igitur in puncto I. Quia ergo tota recta HEI, in vno est plano, nimirum in AB, producto; Item tota recta FGI, in vno quoque est plano, videlicet in CD, producto; conuenient etiam plana AB, CD, producta ad I. Quod est absurdum, cum ponantur parallela. Sunt igitur rectæ EH, GF, parallelæ. Quare si duo plana parallela plano quopiam secentur, &c. Quod erat demonstrandum.



a 7. undec.

SCHOLIVM.

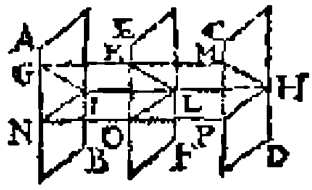
HOC theorema nulla ratione potest conuerti. Quamuis enim communes sectiones planorum parallelorum facta ab alio plano secante sint parallelæ, vt hic demonstratum est; Nō tamen omnia illa plana, quorum communes sectiones factæ ab alio plano secante sunt parallelæ, parallela sunt, cum per duas lineas rectas parallelas infinita plana possint duci, quorum duo tantum sunt parallela, alia vero omnia in aliquam partem producta conueniunt.

PORRO ex hoc theoremate colligimus aliud simile theoremati 30. lib. 1.

QVAE eidem plano parallela, & inter se sunt parallela.

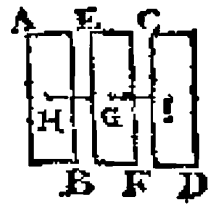
SINT

SINT duo plana AB, CD, plano EF, parallela. Dico & AB, GD, parallela esse. Secentur enim omnia tria plana plano GH, sintque communes eorum sectiones rectæ GI, KL, MH. Secentur rursus alio plano NH, sintque communes eorum sectiones rectæ NI, OL, PH, hac tamen lege, vt duo plana secantia GH, NH, se quoque mutuo secent, quorum sectio communis sit linea recta HI. Quia igitur parallela plana AB, EF, secantur plano GH, [a] erunt communes sectiones GI, KL, parallelæ. Eodem modo parallelæ erunt MH, KL; [b] atque adeo parallelæ erunt inter se GI, MH. Non aliter ostendemus, parallelas esse NI, PH. Itaque cum IG, IN, se mutuo tangentes in I, parallelæ sint rectis HM, HP, se tangentibus in H, existentibusque in alio plano; [c] erunt plana AB, CD, per ipsas ductæ, parallela. Quod est propositum.



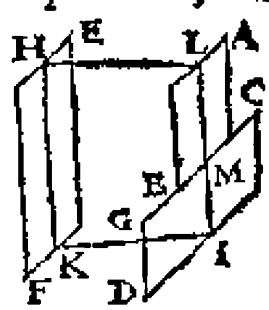
[a] 16. vnde.
[b] 9. vndec.
[c] 15. vnde.

ALITER. Sumatur in tertio plano EF, punctum quodlibet G, a quo in vtramque partem educatur ad planum EF, linea recta perpendicularis, occurrens plano AB, in puncto H, & plano CD, in puncto I. Quoniam igitur linea HG, recta est ad planum EF, recta quoque erit ad planum AB, sibi parallelum, per ea, quæ in scholio propositionis 14. huius lib. demonstrauimus. Eadem ratione GI, recta erit ad planum CD. Quamobrem cum recta HI, sit recta ad plana AB, CD; [d] parallela inter se erunt plana AB, CD. Quod est propositum.



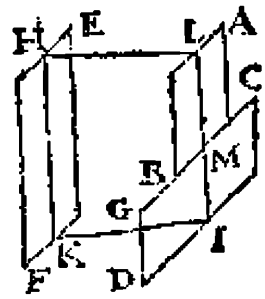
[d] 14. vnde.

QVOD si duo plana fuerint alteri plano parallela, non tantum inter se, sed conueniant, tunc idem efficient planum; quemadmodum duæ rectæ, quæ alteri rectæ sunt parallelæ, si conueniant, vnam rectam constituunt lineam, veluti ad propos. 30. lib. 1. demonstrauimus. Sint enim plana AB, CD, plano EF, parallela, conueniantque producta secundum rectam CG. Dico plana AB, CD, vnum planum constituere. Secet enim planum quodpiam HI, omnia tria



tria plana per lineas rectas H K, L M, M I. Quoniam igitur

a 16. vnde.



parallela sunt plana A B, E F; a *erunt & communes sectiones L M, H K, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt I M, H K. Quam ob rem cum rectæ L M, I M, parallelæ sint ipsi H K, existantque in eodem plano secante H I, & conueniant in M; ipsæ erunt in rectum & continuum positæ, per ea, quæ ad 30. propos. lib. 1. ostendimus. Ac proinde plana A B, C D, vnum*

b 1. vndec.

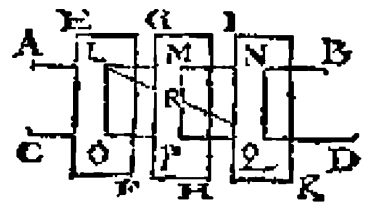
planum efficient; b *propterea quod recta L I, in vno iacent plano. Quod est propositum.*

I T A Q V E duo plana, quæ parallela sint alteri plano, vel inter se parallela erunt, vel certe, si producta conueniant, vnum planum conficient.

17. THEOR. 15. PROPOS. 17.

SI duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; In easdem rationes secabuntur.

RECTAE lineæ *A B*, CD, (siue eæ parallelæ sint, vt in figura, siue nõ, existẽtes tñ in eodẽ plano; siue in trãsuersum positæ, in diuersis existentes planis) secentur planis parallelis E F, G H, I K, in punctis L, M, N, O, P, Q. Dico eas secari proportionaliter, hoc est, segmenta earũ inter dicta plana intercepta esse proportionalia, vt quidem L M, ad M N, ita esse O P, ad P Q. Ducantur enim rectæ L O, N Q, in planis E F, I K, & coniungatur recta L Q, occurrens plano G H, in R, puncto, a quo ad puncta M, P, rectæ ducantur R M, R P, in eodem plano G H,



c 2. vndec.

c Eritque triangulum L N Q, in vno plano: similiter triangulum L O Q, in vno plano. Quoniam vero pla-

na

na parallela GI, IK, ſecantur plano trianguli LNQ, [a] erunt communes ſectiones eorum MR, NQ, parallelæ. Pari ratione parallelæ erunt RP, LO. [b] Quam ob rem erit vt LR, ad RQ, ita LM, ad MN; Item vt LR, ad RQ, ita OP, ad PQ; Ac proinde vt LM, ad MN, ita OP, ad PQ. Si igitur duæ rectæ lineæ parallelis planis ſecentur, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16 vnde
[b] 2. ſexti

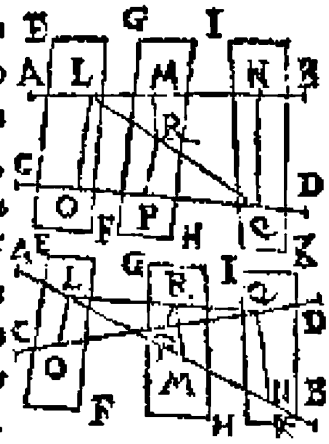
SCHOLIVM.

QVOD ſi datæ duæ rectæ AB, CD, ſint in vno eodēque plano, efficient duæ rectæ RM, RP, vnam lineam rectam, vt in ſuperiori figura apparet. Nam tunc planū per rectas AB, CD, ductum ſecabit tria plana parallela in punctis L, O, M, P, N, Q, & per rectas LO, MP, NQ, [c] quæ inter ſe parallelæ erunt, punctumq; R, in recta MP, exiſtet, cum ſit & in plano per rectas AB, CD, ducto (propter puncta L, Q, in eodem illo plano exiſtentia, vt in ſcholio propoſ. 7. huius lib. diximus) & in plano GH, atque adeo in MP, communi eorum planorum ſectione. Quare RM, RP, vnam rectam lineam MP, conſtituent, nimirum communem ſectionē planorum LOQN, GH.

[c] 16. vnde.

SI vero duæ rectæ AB, CD, non ſint in eodem plano, non efficient RM, RP, vnam rectam lineam, vt in hiſce duabus figuris apparet: quia [d] cum triangulum LOQ, ſit in vno plano, & triangulum LNQ, in vno etiam plano, quod ab illo diuerſum eſt, (Si namque duo illa triangula in vno eodemque plano exiſterent, eſſent duæ rectæ AB, CD, in eodē illo plano, quod ex ipſis conſtituitur, quod eſt cōtra hypotheſim.) erunt rectæ RM, RP, in diuerſis illis planis triangulorū; ac proinde vnam rectam non conſtituent: [e] alias in vno eſſent plano, quod eſt abſurdum.

[d] 2. vndec.



EADEM hæc propoſitio locum habet, ſi duæ rectæ AB, CD, in eodem plano exiſtentes, nō ſint parallelæ, vt in eiſdem hiſce duabus figuris apparet: ſed tunc MRP, ſemper erit vna linea recta, vt ad initium huius ſcholij demonſtratū eſt, quando AB, CD, in vno plano ponebantur. Eadem enim demonſtratio hic adhiberi poteſt.

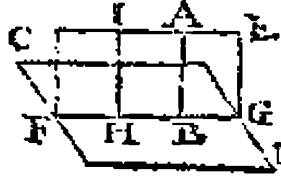
NON

NON ſecus, ſi plura plana parallela, quam tria, rectas AE, CD, ſecent, erunt earum partes proportionales, & communes ſectiones mediorum planorum & triangulorũ LOQ, LNQ, rectas lineas conſtituent. ſi recta AB, CD, in uno ſint plano, non rectas autem, ſi non ſint in uno plano: quemadmodum de rectis MR, RP, dictum eſt.

18. THEOR. 16. PROPOS. 18.

SI recta linea plano cuipiã ad rectos ſit angulos: Et omnia, quæ per ipſam, plana eidem plano ad rectos angulos erũt.

SIT recta AB, ad planum CD, recta. Dico omnia plana per rectam AB, ducta, eſſe recta ad idem planum CD. Ductum enim ſit per AB, planũ EF, ſecans planum CD, per rectam lineam FG. Sumpto deinde puncto H, vtcunque in recta FG, [a] ducatur in plano EF, ipſi AB, parallela HI. Quoniam igitur AB, IH, parallelæ ſunt, & AB, ponitur recta ad planum CD; [b] erit quoque IH, ad idem planum CD, recta: ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendicularis. Eadem ratione omnes lineæ, quæ in plano EF, ipſi AB, ducentur parallelę, erunt ad planum CD, rectæ; ac proinde per defin. 3. huius lib. ad communem ſectionem FG, perpendiculares. Quare rectum erit planum EF, ad planum CD, per defin. 4. huius libri. Similique argumento oſtendentur omnia alia plana per rectam AB, ducta, ad planum CD, eſſe recta. Si igitur recta linea plano cuipiã ad rectos ſit angulos, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 31. primi

[b] 18. und.

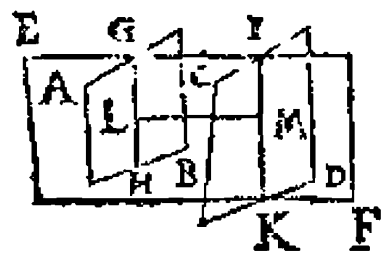
SCHOLIVM.

EX his aliud hoc theorema licebit demonſtrare. Videlicet.

DVO

DVO plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas, parallela sunt: Et duorum planorum parallelorum, si vnũ cuipiam plano ad rectos sit angulos, erit & alterum ad idem rectum.

SINT plana AB, CD, ad planum EF, recta, facientia sectiones GH, IK, parall-las. Dico ea parallela esse. In plano n. EF, ducatur ad GH, perpendicularis LM, quæ ex defin. 4. huius lib. ad planum AB, recta erit: a eademque perpendicularis erit ad IK; ac propterea ex defin. 4. huius lib. ad planum quoque CD, recta erit. Quia igitur LM, ad vtrumque planum AB, CD, recta est, ipsa parallela erunt.



a 29. primi

b 14. vnde.

SED iam parallela sint plana AB, CD; sitque AE, rectum ad planum EF. Dico & CD, rectum esse ad idem planum EF. Sint enim communes sectiones plani EF, & planorum AB, CD, rectæ GH, IK; c quæ parallelæ erunt. Ducta quoque in plano EF, ad rectam GH, linea perpendiculari LM; erit hæc, ex defin. 4. huius lib. ad AB, planum recta. Igitur ex scholio propos. 14. huius lib. eadem LM, ad planum CD, recta quoque erit. d Quare planum EF, per rectam LM, ductum ad planum CD, erit rectum; ideoque vicissim planum CD, ad planum EF, erit quoque rectum. Quod est propositum.

c 16. vnde.

d 18. primi

HINC etiam problema hoc absoluetur.

PER rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipsum planum sit rectũ.

SIT data recta FG, in plano CD, vt in figura huius propos. oporteatque per FG, planum ducere, quod ad planũ CD, rectum sit. Ex quouis puncto B, rectæ FG, e erigatur ad planum CD, perpendicularis BA, & per rectas AB, FG, planũ ducatur EF. f quod ad planum CD, rectum erit. Quod est propositum.

e 12. vnde.

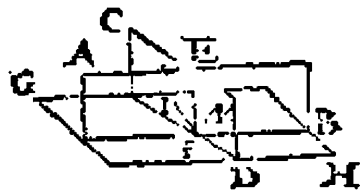
f 18. vnde.

THEOR.

19. # THEOR. 17. PROPOS. 19.

SI duo plana ſe mutuo ſecantia, plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit.

SINT duo plana AB, CD, ſe mutuo ſecantia per lineam rectam EF, ad planum GH, recta. Dico communem illorum ſectionem EF, rectam quoq; eſſe ad idem planum GH. Aut enim EF, ad BF, DF, communes ſectiones planorum AB, CD, cum plano GH, recta eſt, aut non. Si recta eſt EF, ad



[a] 4. undec. BF, DF, [a] recta quoque erit ad planum GH, quod per ipſas ducitur. Si vero EF, concedatur recta ad alterã rectarum BF, DF, tantum; ſit ea recta ad BF. Quoniam igitur planum AB, ad planum GH, ponitur rectum; erit EF, quæ in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, ducitur perpendicularis, ad planum GH, recta, ex 4. defi. huius lib. Idem concludes, ſi EF, concedatur recta ad DF. Erit enim & tunc EF, ad planum GH, recta ex defin. 4. huius lib. cũ perpendicularis ponatur ad DF, communem ſectionem plani CD, cum plano GH, ducaturque in plano CD, ad planum GH, recto. Si denique EF, ad neutram BF, DF, eſſe credatur recta; [b] ducatur ex F, in plano AB, ad BF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FI; Item in plano CD, ad DF, communem eius ſectionem cum plano GH, perpendicularis FK. Quoniã igitur planum AB, rectum ponitur ad planum GH, erit quoque perpendicularis IF, quæ in plano AB, ad BF, cõmunem eius ſectionem cum plano GH, ducitur, recta ad planum GH, ex 4. defin. huius lib. Eadẽ ratione erit KF, ad idem planum GH, recta; Ac proinde a puncto F, ad planum

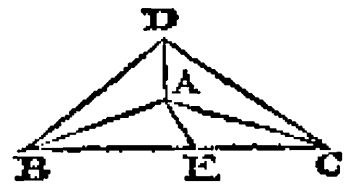
[b] 11. primi

planum GH, duæ perpendiculares ſunt excitatæ. Quod fieri non poſſe ſupra [a] demonſtratum eſt. Quare EF, recta erit ad planum GH. Si duo igitur plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, &c. Quod erat demonſtrandum. [a] 13. vnde.

THEOR. 18. PROPOS. 20. 20.

SI ſolidus angulus tribus angulis planis cõtineatur: Ex his duo quilibet vtut aſſumpti tertio ſunt maiores.

CONTINEATVR angulus ſolidus ad A, tribus angulis planis BAC, CAD, DAB. Dico quoslibet duos reliquo eſſe maiores. Si enim omnes tres ſint æquales, perſpicuũ eſt, quoſuis duos maiores eſſe reliquo: Si vero duo tantũ ſint æquales, & tertius vtrouis minor, conſtat quoque quoslibet duos reliquo maiores eſſe. Quod ſi vnus, videlicet BAC, ſit maximus, reliqui autem ſiue æquales, ſiue inæquales, manifeſtum etiam eſt, quemlibet horum cum maximo illo BAC, reliquo eſſe maiorem. Dico iã hoc angulo maximo BAC, maiores quoque eſſe angulos duos BAD, DAC. In plano enim per AB, AC, ducto [b] fiat angulus BAE, angulo BAD, æqualis; & recta AE, æqualis rectę AD. Deinde in eodem plano per E, extendatur recta BC, ſecans rectas AB, AC, in B, & C; coniungunturque rectæ BD, DC. Quoniam igitur latera AD, AB, trianguli BAD, æqualia ſunt lateribus AE, AB, trianguli BAE; & anguli quoque ipſis contenti, per conſtructionem, æquales; [c] erunt baſes BD, BE, æquales. [d] Quia vero latera DB, DC, maiora ſunt latere BC; ſi demantur æquales rectæ BD, BE, relinquetur recta CD, maior quam CE. Cùm igitur latera AD, AC, triãguli DAC, æqualia ſint lateribus AE, AC, trianguli EAC; & baſis CD, maior baſe CE;



[b] 23. primi.
[c] 4. primi.
[d] 24. primi.

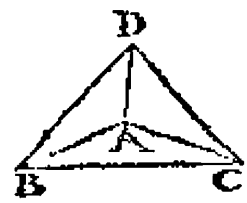
[a] 25. primi

se CE; a erit angulus CAD, angulo CAE, maior. Additis ergo æqualibus angulis BAD, BAE, erunt duo anguli CAD, BAD, maiores duobus angulis CAE, BAE, hoc est, toto angulo BAC, qui maximus omnium ponebatur. Ac proinde duo quilibet multo maiores erunt reliquo non maximo. Quocirca si solidus angulus tribus angulis planis contineatur, &c. Quod erat ostendendum.

21. THEOR. 19. PROPOS. 21.

OMNIS solidus angulus sub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis continetur.

SIT angulus solidus A, contentus tribus planis angulis BAC, CAD, DAB. Dico hos tres angulos minores esse quatuor rectis. Ductis enim rectis BC, CD, DB,



erunt cõstituti tres anguli solidi B, C, D, quorum quilibet sub tribus angulis planis cõtinetur, nempe B, sub CBA, ABD, DBC. At C, sub BCA, ACD, DCB: D, vero sub CDA, ADB, BDC. [b] Quoniam vero duo anguli CBA, ABD, maiores sunt angulo CBD; similiterque duo anguli BCA, ACD, maiores angulo BCD; & duo anguli CDA ADB, maiores angulo CDB: erunt sex anguli CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, tribus angulis CBD, BCD, CDB, maiores. [c] Hi autem tres æquales sunt duobus rectis. Illi ergo sex duobus rectis erunt maiores. Cum igitur sex illi, una cum tribus ad A, æquales sint sex rectis propter triangula tria BAC, CAD, DAB, ([d] sunt enim anguli cuiuslibet trianguli duobus rectis æquales.) si auferantur sex illi duobus rectis maiores, relinquentur tres ad A, solidum angulum constituentes, quatuor rectis minores. Omnis ergo solidus angulus, &c. Quod erat demonstrandum.

[b] 20. vnde

[c] 32. primi

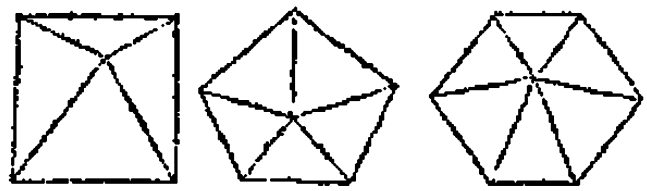
[d] 32. primi

SCHO-

SCHOLIVM.

QVONIAM hæc demonſtratio ab interpretibus accommodatur ſoli illi angulo ſolido, quem tres plani anguli cõſtituunt; idcirco nos eam ad omnes angulos ſolidos extendemus hoc modo.

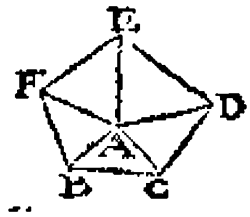
SIT angulus ſolidus quicunque contentus quotcunque angulis planis. Dico omnes illos eſſe quatuor rectis quoq; minores. Nam ſi omnibus angulis planis recta ſubtendantur ordine in eodẽ plano exiſtentes; cõſtituetur pyramis, cuius vertex datus angulus ſolidus, tot laterum, angulorumve, ſub quot angulis planis ſolidus angulus comprehenditur; ac proinde totidem triangula pyramidem ambient. Vnde omnes anguli horum triangulorũ, (a cum anguli cuiuslibet trianguli duobus ſint rectis æquales) bis tot rectis erunt æquales, quot angulos continet baſis: Sed omnes anguli baſis æquales ſunt quoque bis tot rectis, demptis quatuor, per ea, quæ ad 32. propoſ. 1. lib. demonſtrauimus ex Proclo. Igitur omnes anguli dictorum triangulorum ſuperabunt omnes angulos baſis, quatuor rectis. Quare cum omnes anguli horum triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (propterea, quod prope baſin conſtituantur anguli ſolidi, quorum quilibet tribus planis angulis cõtinetur, b & horũ quilibet duo reliquo, nempe eo, qui in baſi, ſint maiores) ſuperabunt omnes anguli horum triangulorum, angulos eorũdem prope baſin, minoribus quam quatuor rectis. Cum ergo omnes anguli omnium triangulorum ſuperent illos eorundem, qui prope baſin, angulis ſolidum angulum conſtituentibus; erunt anguli, qui angulum ſolidum componunt, quatuor rectis minores. Quod eſt propoſitum.



a 32. primi

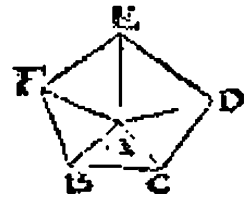
b 20. unde.

VERVM vt res melius percipiatur, ſit gratia exempli angulus ſolidus A, contentus quinque angulis planis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B, quibus ſubtendantur ordine recta B C, C D, D E, E F, F B,



item

ita vt conſtituatur ſyramis pentagona, habens videlicet baſin pentagonam, & in ambitu quinque triangula, tot videlicet, quot anguli plani componunt angulũ ſolidum A. [a] Quia vero omnes anguli quinque triangulorum EAC, CAD, DAE, EAF, FAB, æquales ſunt decem rectis: Anguli autem quinque baſis BCDEF, æquales ſunt ſex rectis, nempe minus quatuor, quam decem; ſuperabunt anguli triangulorum angulos baſis, quatuor rectis. Cum igitur decem anguli triangulorum prope baſin maiores ſint angulis baſis; (Cum enim angulus ſolidus B, tribus planis angulis ABC, ABF, CBF, contineatur; [b] erunt duo CBA, ABF, qui ſunt in triangulis, maiores angulo CBF, qui eſt in baſi: Eademque ratione maiores erunt reliqui anguli triangulorum prope baſin, reliquis angulis in baſi.) Maiores erunt anguli triangulorum iuxta baſin, ſex rectis. Reliqui igitur quinque angulum ſolidum A, conſtituentes, minores erunt quatuor rectis; quandoquidem hi cum illis æquales ſunt decem rectis, vt dictum eſt. Eadem demonſtratio adhibenda eſt in aliis omnibus angulis ſolidis.



[a] 23. primi

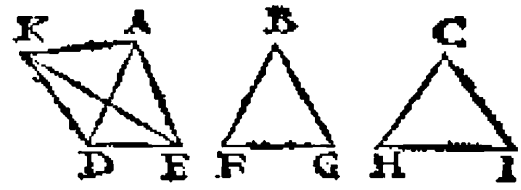
[b] 20. vnde.

THEOR. 20. PROPOS. 22.

SI fuerint tres anguli plani, quorum duo vt libet aſſumpti reliquo ſint maiores; comprehendant autem ipſos rectæ lineæ æquales: fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulum conſtituatur.

SINT tres anguli plani A, B, C, contenti rectis æqualibus AD, AE, BF, BG, CH, CI, hac tamen lege, vt duo quilibet reliquo ſint maiores. Dico ex tribus rectis DE, FG, HI, quæ rectas illas æquales connectunt, triangulum poſſe conſtitui; hoc eſt, trium rectarũ DE, FG,

FG, HI, quaslibet duas reliqua esse maiores, Nam hoc posito, [a] ex ipsis triangulum facile conficietur. Quod.n. duę DE, FG, maiores sint, quam HI, ita ostendetur. [b] Fiat angulus DAK, angulo B, æqualis, cadatque primũ AK, ad partes AD, ita vt fiat totus quidam angulus EAK, ex duobus EAD, DAK, compositus; quod quidem continget, quãdo duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt minores. Ponatur AK, ipsi AD, æqualis, connectanturque rectæ KD, KE. Quoniam igitur latera AK, AD, trianguli AKD, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [c] erunt & bases KD, FG, æquales. Rursus quia latera AK, AE, trianguli AKE, æqualia sunt lateribus CH, CI; & angulus EAK, maior angulo C; propterea qđ duo anguli DAE, & B, maiores ponuntur angulo C; [d] erit & basis EK, maior basi HI: [e] Sunt autem rectæ ED, DK, maiores recta EK. Igitur multo maiores erunt ED, DK. quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis rectæ FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



[a] 22. primi

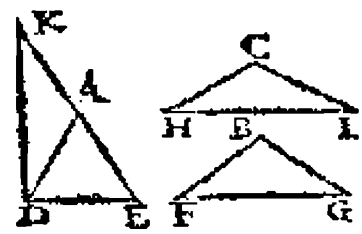
[b] 23. primi

[c] 4. primi.

[d] 24. primi

[e] 20. primi

CADAT deinde AK, in rectum & continuum ipsi AE; quod quidem accidet, quando duo anguli DAE, & B, duobus rectis sunt æquales. Ponaturque AK, ipsi AD, æqualis rursum, & connectatur recta KD. [f] Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. [g] Quoniam vero rectæ ED, DK, maiores sunt recta KE; & KE, æqualis est rectis CH, CI, ex hypothesi, & constructione; erunt quoque ED, DK, maiores duabus CH, CI: [h] Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo maiores erunt ED, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. Quod est propositum.



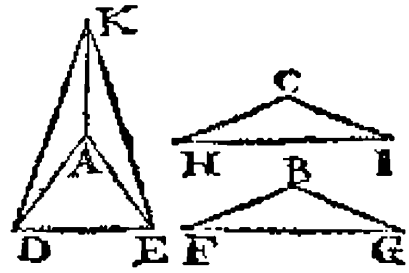
[f] 4. primi.

[g] 20. primi

[h] 20. primi

CADAT postremo AK, ad partes AE, ita vt nec

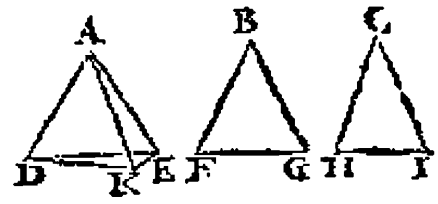
angulus totus componatur ex angulis EAD, DAK, nec recta sit EAK; quod demum eueniet, quando duo anguli



DAE, & B, dùobus rectis sunt maiores. Ponaturq; rursum AK, ipsi AD, æqualis, & ducantur rectæ KD, KE. [a] Erit igitur, vt prius, KD, ipsi FG, æqualis. [b] Quoniam vero duæ DE, DK, maiores sunt duabus AE, AK; & AE, AK, æquales duabus CH, CI, ex hypothesi & cõstructione; erunt quoque DE, DK, maiores quam CH, CI: [c] Hæ autem maiores sunt, quam HI. Igitur multo erunt maiores DE, DK, quam HI. Cum ergo DK, ostensa sit æqualis ipsi FG; erunt quoque DE, FG, maiores quam HI. quod est propositum. Eodem modo concludemus DE, HI, maiores esse, quam FG, si angulus DAK, angulo C, fiat æqualis; Item FG, HI, maiores, quam DE, si angulo C, ad FG, constituatur angulus æqualis, &c. [d] Quare ex tribus rectis DE, FG, HI, triangulum constitui potest. Si igitur fuerint tres anguli plani, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 4. primi.
[b] 21. primi
[c] 20. primi
[d] 22. primi

ALITER. Si tres anguli A, B, C, sunt æquales; [e] erunt quoque bases DE, FG, HI, æquales; Ac proinde quælibet duæ reliqua maiores. Si vero duo tantum anguli sunt æquales, & tertius minor; [f] erunt quoque duæ illorũ bases æquales, [g] & basis tertij vtraque minor: Quare rursus quælibet duæ maiores erunt reliqua. Quod si vnus eorum, nempe A, sit maximus, siue reliqui B, & C, sint inter se æquales, siue inæquales; [h] erit quoque basis DE, omniũ maxima. Quare DE, FG, maiores erunt quam HI: Item DE, HI, maiores, quã FG. Dico iam & rectas FG, HI, maiores esse recta DE, [i] Fiat enim angulus DAK, æqualis angulo B, ponaturque AK, ipsi AD, æqualis. Cadet ergo punctum K, infra DE; propterea quod per puncta D, K, E, transeat circumferentia circuli ex A, ad interuallum AD, descripta, ob æqualitem rectarum AD, AK, AE. Con-



[e] 4. primi.
[f] 4. primi.
[g] 24. primi
[h] 24. primi
[i] 23. primi

nectantur

nectantur deinde rectæ D K, K E. Quoniam igitur duo anguli B, & C, maiores ponuntur angulo DAE; & B, æqualis est angulo DAK, per constructionẽ; erit angulus C, maior reliquo angulo K A E. Et quia latera AD, AK, trianguli A D K, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG; & anguli ipsis contenti DAK, & B, æquales; [a] erit basis DK, basi FG, æqualis. Rursus quia latera CH, CI, trianguli CHI, æqualia sunt lateribus AK, AE, trianguli AKE; & angulus C, ostensus maior angulo KAE; [b] erit & basis HI, maior basi KE. Quare cum DK, ostensa sit æqualis ipsi FG: erunt FG, HI, maiores quam DK, KE: [c] Sed DK, KE maiores sunt, quam D E. Igitur multo maiores erunt F G, H I, quam D E, Quod est propositum.

[a] 4. primi.

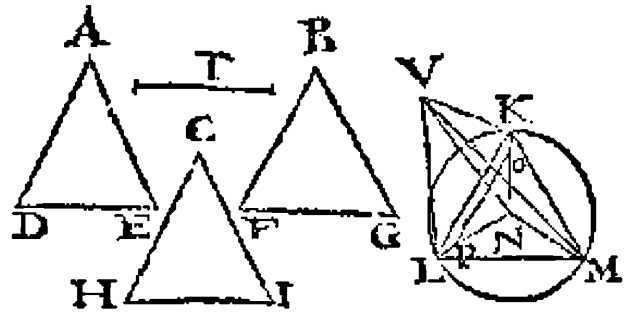
[b] 24. primi

[c] 20. primi

PROBL. 3. PROPOS. 23. 23.

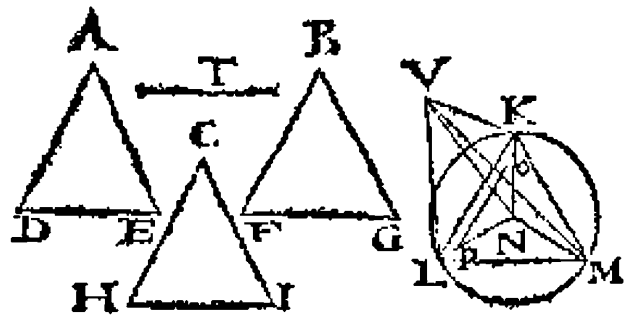
EX tribus angulis planis, quorũ duo quomodocunque assumpti reliquo sunt maiores, solidum angulum constituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

SINT tres anguli A, B, C, quatuor rectis minores, hac cõditione, vt qlibet duo sint maiores reliquo. Oportet iã ex tribus angulis A, B, C, angulũ solidũ cõficere, qui nimirũ contineat tribus angulis planis, qui dictis tribus angulis sint æquales. Ponãtur sex lineę angulos dictos cõprehendẽtes, nempe AD, AE, BF, BG, CH, CI, æquales; subtendãturq; bases DE, FG, HI. [d] Fieri ergo pót, vt ex DE, FG, HI, triangulũ cõ



[d] 22. vnde.

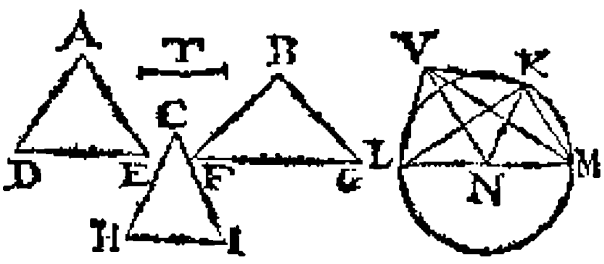
ſtituatur. Conſtituatur ex ipſis igitur triãgulum KLM, ſitque latus KL, rectæ DE; latus LM, rectę FG; & latus KM, rectæ HI, æquale.[a] Deſcribatur circa triangulum KLM, circulus, cuius centrũ N, a quo ducantur rectæ NK, NL, NM. Eritq; quęlibet rectarũ angulos planos cõprehendẽtium, nẽpe AD, AE, &c. maior qualibet ductarũ ex centro N. Quod ita oſtendetur. Cadat primo centrũ N, intra triangulum KLM; quod quidem fiet, quãdo triangulũ eſt oxygonium, vt ex coroll. propoſ. 5. lib. 4. cõſtat. Si igitur AD, AE, maiores nõ credãtur, quã NK, NL, erũt vel ęquales, vel minores. Sint ergo æquales. Qm̃ igitur latera AD, AE, trianguli ADE, æqualia ſunt lateribus NK, NL, triãguli NKL; & baſis DE, baſi KL, ęqualis: erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eodẽ argumẽto erit angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, æqualis. Cũ igitur tres anguli circa N, æquales ſint quatuor rectis ex coroll. propoſ. 15. lib. 1. erunt quoq; tres anguli A, B, C, quatuor rectis æquales. Quod eſt abſurdum. ponuntur. n. quatuor rectis minores. Non igitur æquales ſunt AD, AE, ipſis NK, NL. Dico quod neque minores. Si. n. minores ſint AD, AE, quã NK, NL, abſcindãtur NO, NP, ipſis AD, AE, æquales, ducaturq; recta OP. Quoniã igitur eſt vt NK, ad NO, ita NL, ad NP, cũ & antecedẽtia inter ſe, & cõſequẽtia ſint inter ſe æqualia; erũt latera NK, NL, triãguli NKL, ſecta proportionaliter; [c] ac proinde OP, ipſi KL, parallela erit.[d] Quare anguli NOP, NPO, angulis NKL, NLK, ęquales erũt, & triangulũ NOP, triãgulo NKL, æquiangulũ.[e] Igitur erit vt NK, ad KL, ita NO, ad OP. Eſt aũt NK, maior quã NO.[f] Igitur & KL, hoc eſt, DE, quę ęqualis eſt ipſi KL, maior erit, quã OP. Quocirca cũ latera AD, AE, triãguli ADE, ſint ęqualia lateribus NO, NP, triãguli NOP, & baſis DE, maior baſe OP,



[a] 5. quarti.
[b] 8. primi.
[c] 2. ſexti.
[d] 29. primi
[e] 4. ſexti.
[f] 14. quinti

se OP; a erit & angulus A, maior angulo ONP. Eadē ta- a 25. primi
tione angulus B, angulo LNM; & angulus C, angulo MNK, maior esse ostēdetur. Cū igitur tres anguli ad N, quatuor sint rectis æquales, ex coroll. ppos. 15. lib. 1. erūt tres anguli A, B C, maiores quatuor rectis. Qd̄ est absurdū. ponūtur. n quatuor rectis minores. Nō igit minores sūt AD, AE, q̄ NK, NL; sed neq; æquales. Igit maiores.

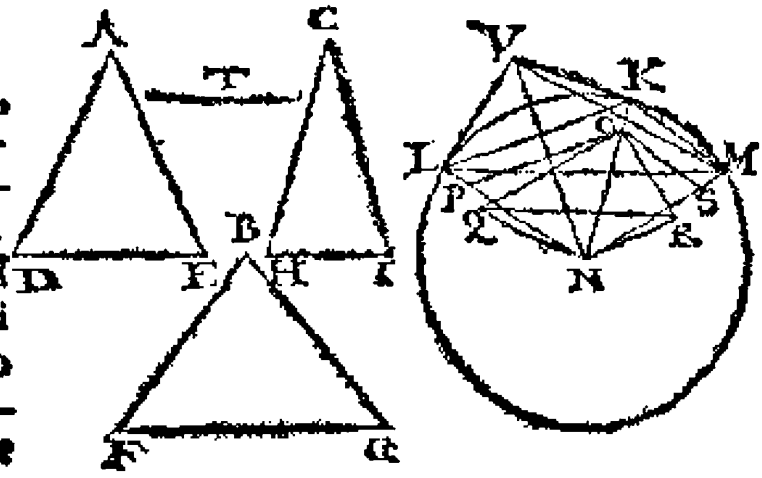
CADAT deinde centrū N, in latus LM; quod tū cō tinget, quādo triangulū KLM, angulū LKM, habuerit rectū, vt ex eodē coroll. propos. 5. lib. 4. manifestū est. Si igitur AD, AE, dicātur esse æquales ipsis NK, NL; erūt quoq; BF, BG, æquales eidē NK, NL. Cū ergo NK, æqualis sit ipsi NM; æquales erūt BF, BG, rectæ LM: Posita autē fuit LM, æqualis ipsi FG. Igitur BF, BG, æquales quoque sunt rectæ FG. b Sunt autē & maiores BF, BG, quā FG. Quod est absurdum. Non igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL. Quod si AD, AE, minores credātur, quam NK, NL; erūt quoque BF, BG, minores quam NK, NL. Cū ergo NK, æqualis sit ipsi NM; minores erunt BF, BG, quam recta LM: posita autem fuit LM, ipsi FG, æqualis. Igitur BF, BG, minores quoque sunt recta FG. Quod est absurdū, c cum sint maiores. Non ergo minores sunt AD, AE, quam NK, NL; sed neque æquales: Igitur maiores.



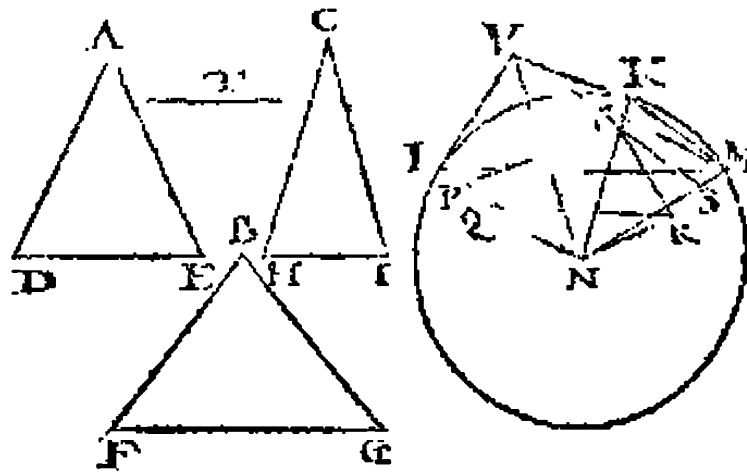
b 20. primi

c 20. primi

CADAT postremo centrū N, extra triāgulū KLM, infra latus LM, qd̄ demū accidet, quādo angulus LKM, fuerit



obtusus, vt ex coroll. dicto propos. 5. lib. 4. liquet. Si igitur dicatur AD, AE, esse æquales ipsis NK, NL; cum &
[a] 8. primi. basis DE, basi KL, ponatur æqualis; [a] erit angulus A, angulo KNL, æqualis. Eadem ratione angulus C, angulo KNM, æqualis erit. Quare totus angulus LMN, angulis A, & C, æqualis erit. Sed hi duo maiores sunt ex hypothesi, angulo B. Igitur & angulus LNM, angulo B, erit maior. Rursus quia latera NL, NM, trianguli NLM, æqualia sunt lateribus BF, BG, trianguli BFG, & basis
[b] 8. primi. LM, basi FG, æqualis; [b] erit angulus LNM, angulo B, æqualis: Sed & maiore ostendimus esse. Quod est absurdū. Nō igitur æquales sunt AD, AE, ipsis NK, NL.



Quod si AD, AE. credantur esse minores quā NK, NL; si abscindantur NO, NP, ipsis AD, AE, æquales, & ducatur recta OP; demonstrabitur, vt in primo casu, angulus A, maior angulo ONP; & eadem ratione angulus C,
[c] 23. primi maior angulo KNM. [c] Fiat angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, æqualis, ponanturq; NQ, NR, æquales ipsis AD, AE, & connectantur OQ, OR; cadetque OQ, infra OP, propterea quod per puncta O, P, Q, transeat circumferentia circuli ex N, ad interuallum NO, descripta, cum æquales sint rectæ NO, NP, NQ. [d] Quare cum angulus PON, æqualis
[d] 29. primi sit angulo LKN, externus interno; erit angulus QON, minor angulo LKN. Eadem ratione ostendetur angulus NOR, minor angulo NKM, si ducatur OS, parallela ipsi KM. Cadet enim similiter OR, infra OS. Igitur totus angulus LKM, toto angulo QOR, maior erit. Quoniam vero latera NO, NQ, trianguli NOQ, æqualia sunt lateribus AD, AE, trianguli ADE; Est autem

autem & angulus ONQ, angulo A, æqualis, per conſtructionem; [a] erit OQ, ipſi DE, hoc eſt, ipſi KL, æqualis. Eodem modo erit OR, ipſi KM, æqualis. Connexa iam recta QR, cum latera KL, KM, trianguli LKM, æqualia ſint lateribus OQ, OR, trianguli OQR; & angulus LKM, maior angulo QOR, vt oſtendimus: [b] erit baſis LM, hoc eſt, FG, maior baſe QR. Quoniam igitur latera BF, BG, trianguli BFG, æqualia ſũt lateribus NQ, NR, trianguli NQR; & baſis FG, maior baſe QR; [c] erit angulus B, maior angulo QNR. Rurſus quia angulus ONQ, angulo A; & angulus ONR, angulo C, factus eſt æqualis, erit angulus totus QNR, duobus A, & C, æqualis: Sed A, & C, maiores ponuntur angulo B. Igitur & angulus QNR, maior erit angulo B. Quod eſt abſurdum, cum B, oſtenſus ſit maior angulo QNR. Non ergo minores ſunt AD, AE, quam NK, NL; ſed neque æquales: Igitur maiores.

[a] 4. primi.

[b] 24. primi.

[c] 25. primi.

IAM vero, cum rectæ AD, AE, maiores ſint rectis NK, NL, vbicunque centrum N, exiſtat; poſsit recta AD, plus quam recta NK, quadrato lineæ T, per lemma propoſ. 14. lib. 10. ita vt quadratum rectæ AD, æquale ſit quadratis rectarum NK, & T. [d] Ex centro N, excitetur ad planum circuli KLM, perpendicularis NV, rectæ T, æqualis; connectanturq; rectæ KV, LV, MV. Quoniam igitur NV, recta eſt ad planum circuli KLM, recta quoque eadem erit, ex defin. 3. huius lib. ad rectas NK, NL, NM; [e] ac proinde quadratum rectæ VK, quadratis rectarum KN, NV, æquale erit. Cum ergo & quadratum rectæ AD, æquale ſit ex conſtructione, eiſdem quadratis rectarum KN, NV; æqualia erunt inter ſe quadrata rectarum VK, & AD. Ac propterea æquales erunt rectæ VK, AD. Rurſus quia latera VN, NK, trianguli VNK, æqualia ſunt lateribus VN, NL, trianguli VNL; & anguli ipſis contenti VNK, VNL, recti; [f] erit baſis VK, æqualis baſi VL; Atque eadem ratione rectæ VM. Quare tres rectæ VK, VL, VM, æquales ſunt inter ſe: Oſtenſa eſt autem recta VK, æqualis rectæ AD. Tres ergo rectæ VK, VL, VM, æquales ſunt rectæ AD, & ob id, rectis AE, BF, BG, CH, CI. Quamob-

[d] 12. unde.

[e] 47. primi.

[f] 4. primi.

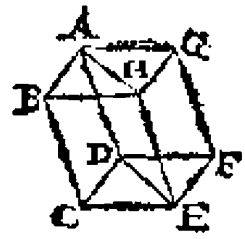
rem, cum latera VK, VL, triãguli VKL, æqualia ſint lateribus BD, AE, trianguli ADE; & baſis KL, baſi DE; [a] erit angulus KVL, angulo A, æqualis. Non ſecus demõſtrabimus, angulum LVM, angulo B; & angulũ KVM, angulo C, eſſe æqualem. Quare angulus ſolidus V, continetur tribus angulis planis KVL, LVM, MVK, qui æquales ſunt datis tribus angulis planis A, B, C. Ex tribus itaq; angulis planis, &c. Quod erat faciendum.

[a] 8. primi.

24. THEOR. 21. PROPOS. 24.

SI ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana, parallelogramma ſunt, ſimilia, & æqualia.

SIT parallelepipedum ABEF, (de hoc enim intelligenda eſt propoſitio) contentum, iuxta defin. 30. huius lib. ſex figuris quadrilateris AC, CF, FH, HA, AF, BE, quarum aduerſæ quælibet ſint parallelæ. Dico quæuis oppoſita plana eſſe parallelogramma, ſimilia, & æqualia. Cũ enim parallela plana BG, CF, ſecentur plano AC; [b] Erunt communes ſectiones AB, CD, parallelæ. Similiter cum plana parallela AF, BE, ſecentur plano AC; erunt communes ſectiones AD, BC, parallelæ; Ac proinde parallelogrammum eſt figura quadrilatera ABCD. Non aliter oſtendemus, reliquas figuras quadrilateras eſſe parallelogramma. Dico iam oppoſita parallelogramma eſſe ſimilia, & æqualia. Cum enim rectæ AB, BH, parallelæ ſint rectis DC, CE, & nõ in eodem plano, ſed in oppoſitis; [c] erunt anguli ABH, DCE, æquales; eodemque argumento reliqui anguli parallelogrammi BG, æquales erunt reliquis angulis parallelogrammi CF. [d] Quoniam veto AB, ipſi ipſi DC, in parallelogrammo AC; & BH, ipſi CE, in parallelogramo BE, æqualis eſt; erit vt AB, ad BH, ita DC, ad CE; Ac propterea



[b] 16. vnde.

[c] 10. vnde.

[d] 34. primi

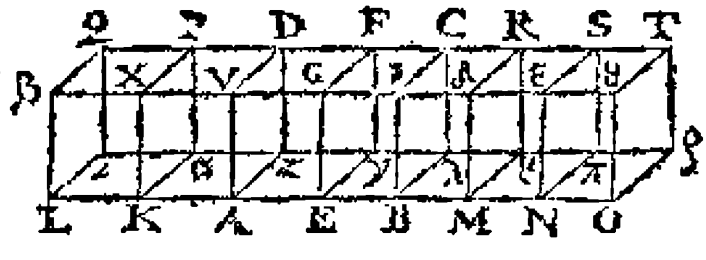
pterea vt BH, ad HG; ita CE, ad EF, &c. eadem de causa: Erunt latera parallelogrammorum BG, CF, circa angulos æquales, proportionalia; ac proinde parallelogramma ipsa similia. Ductis iam diametris AH, DE, [a] cum latera AB, BH, trianguli ABH, æqualia sint lateribus DC, CE, trianguli DCE; [b] & angulus ABH, angulo DCE, æqualis, vt ostensum est; [c] erunt triangula ABH, DCE, æqualia inter se. [d] Quare cum trianguia ABH, DCE, dimidia sint parallelogrammorũ BG, CF; erũt parallelogrãma BG, CF, inter se æqualia. Similiter demonstrabimus similia & æqualia esse parallelogrãma opposita AC, GE; & AF, BE. Si solidum ergo parallelis planis contineatur, aduersa illius plana, parallelogrãma sunt, similia, & æqualia. Quod erat demonstrandum.

[a] 34. primi
[b] 10. vnd.
[c] 4. primi.
[d] 34. primi.

THEOR. 22. PROPOS. 25. 25.

SI solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo: Erit quemadmodum basis ad basim, ita solidum ad solidum.

SECETVR parallelepipedum ABCD, plano EF, parallelo oppositis planis AD, BC. Dico vt est basis AG, ad basin BG, ita esse solidum AEFD, ad solidum BEFC. Intelligatur enim parallelepipedum AB-CD, productũ in vtram que partem



quantumlibet, sumanturque in AB, protracta quotcunque rectæ AK, KL, ipsi AE; & quotcunque rectæ BM, MN, NO, ipsi EB, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KP, LQ, MR, NS, OT, parallela

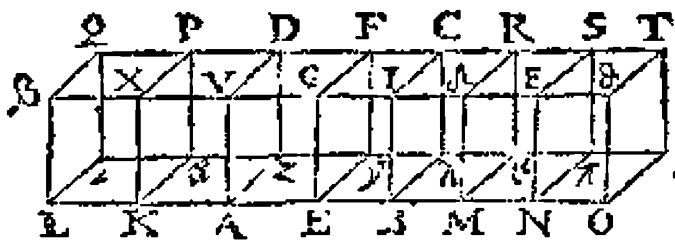
lela planis AD, EF, BC, per ſcholiũ ꝓpoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur ſolidum AEFD, cõtinetur planis parallelis ex hypotheſi; ipſum parallelepipedũ erit, ex definitione,[a] habebitq; plana oppoſita, parallelogrãma ſimilia, & æqualia. Eodẽ mõ erũt parallelepipeda AKPD, KLQP; EBCF, EMRC, MNSR, NOTS; ELQF, EOTF; habebunt plana oppoſita, parallelogrãmaq; ſimilia, & æqualia. Quoniam vero parallelogrãma AG, KV, LX, cũ ſint ſuper æquales baſes AE, AK, KL, æqualia ſunt; & ſimilia quoq;,[b] cũ anguli vnius ſint æquales angulis aliorum, & latera circa angulos vnius æqualia lateribus circa angulos aliorum, ideoq; proportionalia. Eademque ratione æqualia, & ſimilia ſunt parallelogrãma AY, KZ, Lα. Cũ igitur æqualia quoq; ſint, & ſimilia parallelogrãma AD, KP, LQ: Erunt tria plana AG, AY, AD, ſolidi AEFD, æqualia, & ſimilia tribus planis KV, KZ, KP, ſolidi AKPD; & tribus planis LX, Lα, LQ, ſolidi KLQP: [d] Sũt autẽ tria in vnoquoq; ſolido æqualia, & ſimilia tribus reliquis oppoſitis in eodẽ, nẽpe AG, ipſi ZF; & AY, ipſi VF; & AD, ipſi EB. &c. Igitur per defin. 10. huius lib. æqualia ſunt ſolida AEFD, AKPD, KLQP. Eodem argumento æqualia oſtendentur ſolida EBCF, EMRC, MNSR, NOTS.

[a] 24. vnde.

[b] 36. primi

[c] 29. primi

[d] 24. vnde.



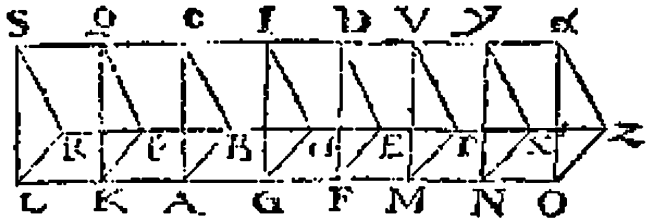
Quare quam multiplex eſt baſis LG, baſis AG, tam multiplex erit ſolidum LEFQ, ſolidi AEFD; Et quam multiplex eſt baſis OG, baſis BG, tam multiplex erit ſolidum OEFT, ſolidi BEFC. Quoniam vero ſi baſis LG (multiplex baſis AG, primæ magnitudinis,) æqualis eſt baſi OG, (multiplici baſis BC, ſecundæ magnitudinis,) æquale quoque eſt ſolidum LEFQ, (multiplex ſolidi AEFD, tertiæ magnitudinis) ſolido OEFT, (multiplici ſolidi BEFC, quartæ magnitudinis,) propterea quod baſibus LG, OG, æqualibus exiſtẽtibus, æqualia quoque ſunt & ſimilia ſex parallelogrãma ſolidi LEFQ, ſex parallelogrammis ſolidi OEFT:

Si

Si autem baſis maior eſt baſe, ſolidũ quoq; ſolido maius eſt; & ſi minor, minus; in quacũq; hoc fiat multiplicatione: Erit per defin. 6. lib. 5. vt baſis AG, prima magnitudo, ad baſin BG ſecundam magnitudinẽ, ita ſolidũ AEFD, tertia magnitudo, ad ſolidũ BEFC, quartam magnitudinem. Eadẽ ratione demonſtrabitur eſſe ſolidũ ad ſolidũ, vt eſt baſis DY, ad baſin CY; & vt baſis AY, ad baſin BY; & vt baſis DG, ad baſin CG. Si ſolidũ igitur parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

HAEC propoſitio accommodari etiã poteſt omni priſmati. Nam ſi priſma quodcunque plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. Sit enim primo priſma ABCDEF, cuius plana aduerſa ſint triangula ABC, DEF; ſecenturq; plano GHI, aduerſis planis parallelo. Dico vt eſt baſis AI, ad baſin FI, ita eſſe ſolidum ABCIHG, ad ſolidum FEDIHG. Intelligatur enim priſma ABCDEF, in vtramq; partem quantumlibet productũ,



& ex AF, protracta vtrinque capiãtur quotcũque rectæ AK, KL, ipſi AG; & quotcũq; rectæ FM, MN, NO, ipſi FG, æquales. Deinde per puncta K, L, M, N, O, ducantur plana KPQ, LRS; MTV, NXY, OZa, parallela planis ABC, GHI, FED, per ſcholium propoſ. 15. huius lib. Quoniam igitur plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AI; [a] erunt communes ſectiones AC, GI, parallelæ: Sunt autem & AG, CI, parallelæ ex hypotheſi, ob parallelogrammum AD. Igitur parallelogrammum eſt AI. Rurſus quia plana parallela ABC, GHI, ſecantur plano AH; [b] erunt communes ſectiones AB, GH, parallelæ: Sunt autem & AG, BH, parallelæ, ob parallelogrammum AE. Igitur parallelogrammum eſt AH. Eodem modo parallelogrammũ oſtẽdetur CH. Quoniam vero latera AC, AB, trianguli ABC, æqualia ſunt lateribus

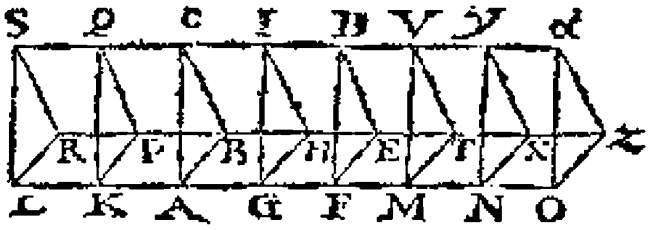
[a] 16. vnde.

[b] 16. vnde.

[a] 34. primi
[b] 10. unde.

teribus GI, GH, trianguli GHI; [a] cum AC, ipsi GI, & AB, ipsi GH, sit æquale; [b] & anguli CAB, IGH, sunt quoque æquales, eò quod rectæ CA, AB, parallelæ sũt rectis IG, GH,

[c] 4. primi.



& non in eodẽ plano: Erunt triangula ABC, GHI, æqualia inter se, & æquiangula; [d] Quare

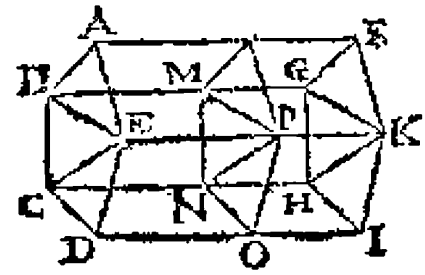
[d] 4. sexti

latera circum æquales angulos proportionalia habebunt; Atque idcirco similia erunt. Igitur solidum ABCIHG, contentum duobus planis oppositis ABC, GHI, æqualibus & similibus, atque parallelogrammis AI, IB, BG, prisma est. Eadẽ arte prismata erunt ABCQPK, KPQSRL, FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZO, LRSIHG, OZαIHG. Quoniã vero parallelogramma AI, KC, LQ, æqualia sunt & similia; necnon AH, KB, LP; & CH, QB, SP; erunt omnia plana prismatis ABCIHG, æqualia & similia omnibus planis prismatis ABCQPK, KPQSRL. Quare, per defin. 10. huius lib. æqualia erunt prismata ABCIHG, ABCQPK, KPQSRL. Eadem ratione æqualia erunt prismata FEDIHG, FEDVTM, MTVYXN, NXYαZD. Quare quam multiplex est basis LI, basis AI, tam multiplex erit prisma LRSIHG, prismatis ABCIHG; & quam multiplex est basis OI, basis FI, tam multiplex erit prisma PZαIHG, prismatis FEDIHG. Qua vero si basis LI, (multiplex basis AI, primæ magnitudinis) æqualis est basi OI, (multiplici basis FI, secundæ magnitudinis,) æquale quoque est prisma LRSIHG, (multiplex prismatis ABCIHG, tertiæ magnitudinis,) prismati OZαIHG, (multiplici prismatis FEDIHG, quartæ magnitudinis,) propterea quod basibus LI, OI, existentibus æqualibus, æqualia quoque sunt & similia omnia plana prismatis LRSIHG, omnibus planis prismatis OZαIHG: Si autem basis LI, maior est basi OI, prisma quoque prismate maius est; & si minor, minus, in quacunque multiplicatione hoc fiat: Erit, per defin. 6. lib. 5. vt basis AI, prima magnitudo ad basin FI, secundam magnitudinẽ, ita prisma ABCIHG, tertia magnitudo ad prisma FEDIHG, quar-

tam

tam magnitudinem. Eodem modo oſtendetur eſſe priſma ad priſma, vt eſt baſis AH, ad baſin FH: & vt baſis GH, ad baſin DH. Quod eſt propoſitum.

SIT deinde priſma ABCDEFGHIK, cuius oppoſita plana ſint polygona, nempe pentagona, ſecetur que plano LMNOP. Dico rurſus vt eſt baſis CM, ad baſin NG, ita eſſe ſolidum ABCDELMNOP, ad ſolidum LMNOPFGHIK. Si enim plana oppoſita parallela reſoluantur in triangula, erit quoq; priſma in totidem priſmata, quorum plana oppoſita ſunt triãgula, reſolutum. Quare erit vt baſis BP, ad baſin MK, ita priſma ABEPML, ad priſma LMPKGF, per ea, quæ demonſtrata ſunt. Eodem modo erit vt baſis CP, ad baſin NK, ita priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH; & priſma CDEPNO, ad priſma NOPKHI. [a] Vt autem BP, ad MK, & CP, ad NK, ita eſt recta EP, ad rectam PK, hoc eſt, vt CN, ad NH; & vt CN, ad NH, ita eſt CM, ad NG. Igitur priſmata ABEPML, BCEPMN, CDEPNO, ad priſmata LMPKGF, MNPKGH, NOPKHI, eandem habent proportionem ei, quam habet CM, ad NG; ac proinde eandẽ inter ſe. [b] Vt autem vnũ ad vnũ, ita ſe habent omnia ad omnia. Igitur erit vt priſma BCEPMN, ad priſma MNPKGH, hoc eſt, vt baſis CM, ad baſin NG; ita priſma ABCDELMNOP, ex tribus compoſitum ad priſma LMNOPFGHIK, ex tribus conflatum. Quod eſt propoſitum. Eadem prorſus erit demonſtratio in quocunque alio priſmate.



POTEST tamen hoc idem in omni priſmate oſtẽdi. Demonſtratione, qua vſi ſumus in priſmate habente plana oppoſita, triangula ſimilia. Si enim eadem fiat conſtructio, producto priſmate in vtramque partem, erunt omnia plana parallela ſecantia, inter ſe æqualia, & ſimilia; [c] propterea quod latera eorum ſunt parallela, nempe communes ſectiones parallelorum planorũ; [d] ac proinde angulos æquales cõprehendũt, &c. Vnde, vt prius, oſtendentur priſmata ex vna parte inter ſe æqualia, necnon & priſmata ex altera parte, &c.

COROL.

[a] 1. ſexti.

[b] 12. quin.

[c] 16. vnde.

[d] 10. vnde.

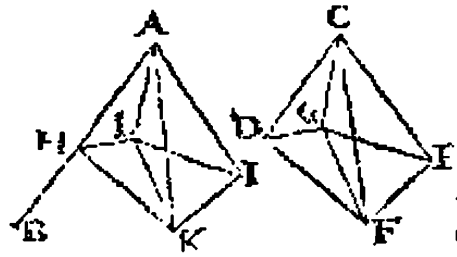
COROLLARIVM.

EX his infertur, ſi priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectionem eſſe figuram æqualem & ſimilem plano: oppoſitis: Velut demonſtratam eſt, in priori priſmate, triangulum G H I, æquale eſſe & ſimile triangulo A B C, atque adeo triangulo D E F. Eadem enim in omnibus eſt demonſtratio. Idem dices de parallelepipedo.

26. PROBL. 4. PROPOS. 26.

AD datam rectam lineam, eiuſque punctum angulum ſolidum conſtituere ſolido angulo dato æqualem.

SIT ad punctum A, in data recta AB, conſtituendus angulus ſolidus æqualis angulo ſolido C, contento tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, non in eodem plano exiſtentibus. [a] Ducatur ex F, ad planũ per CD, CE, ductum perpendicularis F G; connectanturq; rectæ D F, DG, EF, EG, CG. Deinde abſcindatur AH, æqualis ipſi CD, [b] fiatque angulus HAI, angulo DCE, æqualis; & recta AI, rectæ CE, æqualis. Rurſus in plano per AH, AI, ductũ cõſtituatur angulus HAL, æqualis angulo DCG, qui in plano p CD, CE, ducto exiſtit; & recta AL, rectæ CG, æqualis. [c] Ex L, vero ad planũ, in quo sũt tres AH, AL, AI, erigatur perpendicularis LA, quæ ipſi F G, æqualis ponatur, & coniungatur recta K A. Dico angulũ ſolidũ A, contentum tribus planis angulis HAI, HAK, KAI, æqualem eſſe dato angulo ſolido C. Connexis.n. rectis HK, HL, IK, IL; cũ latera AH, AL, triãguli AHL,



a 11. unde.

b 23. primi

c 12. unde.

AHL, æqualia ſint lateribus CD, CG, triãguli CDG, & anguli HAL, DCG, æquales, per conſtructionem; a Erũt baſes HL, DG, æquales. Rurſus quia ablatis angulis æqualibus HAL, DCG, ab æqualibus HAI, DCE, reliqui æquales ſunt LAI, GCE: Cum igitur & latera AL, AI, trianguli ALI, æqualia ſint lateribus CG, CE, trianguli CGE, per conſtructionem; b æquales quoque erunt LI, GE. Quia igitur latera LH, LK, æqualia ſunt lateribus GD, GF; & anguli HLK, DGF, recti, ex defin. 3. huius lib. c erũt & baſes HK, DF, æquales. Quare cũ & latera AH, AK, triãguli AHK, ſint æqualia lateribus CD, CF, triãguli CDF, ex cõſtructione. (cũ. n. AL, LK, latera lateribus CG, GF, æqualia ſint ex conſtructione, comprehendantque angulos æquales, nimirum rectos ex defin. 3. huius lib. d erunt baſes AK, CF, æquales.) e Erunt quoque anguli HAK, DCF, æquales. Denique quia latera LI, LK, ſunt æqualia lateribus GE, GF; & anguli ILK, EGF, recti, ex defin. 3. huius lib. f Erunt baſes IK, EF, æquales: Cũ igitur & latera AI, AK, triãguli AIK, lateribus CE, CF, trianguli CEF, ſint æqualia ex conſtructione; g Erunt quoque anguli IAK, ECF, æquales. Sunt ergo tres anguli plani HAI, HAK, KAI, ſolidũ angulum A, componẽtes, æquales tribus angulis planis DCE, DCF, FCE, angulum ſolidum C, componentibus; Atq; proinde ſolidus angulus A, ſolido angulo C, æqualis. Ad datam itaque rectam lineam, eiuſque punctum, angulum ſolidum conſtituimus ſolido angulo dato æqualem. Quod erat faciendum.

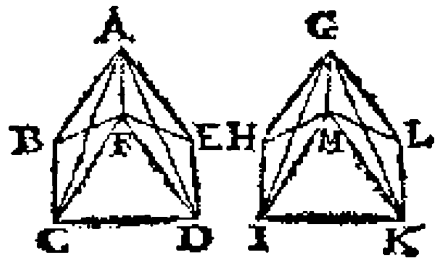
a 4. primi.
b 4. primi.
c 4. primi.
d 4. primi.
e 8. primi.
f 4. primi.
g 4. primi.

SCHOLIVM.

QVOD ſi angulus ſolidus datus contineatur pluribus angulis planis, quam tribus, ſubtendendæ erunt omnibus angulis planis rectæ in vno eodemq; exiſtentes plano (in eo ſcilicet, quod omnes rectas lineas planorum angulorum ſecet) ita vt figuram planam polygonam conſtituant, pyramisq; quædam multilatera efficiatur. Si enim figuræ polygona in triangula reſoluatur, habebuntur tot pyramides triſatera, quot triangula

triangula in figura polygona continentur. Si igitur angulis solidis omnium pyramidum triangularium æquales solidi anguli constituantur quorum quilibet tribus angulis planis continetur; constitutus erit totus angulus solidus toti angulo solido æqualis.

VT si angulo solido A, contento quinque angulis planis BAC, CAD, DAE, EAF, FAB, *constituendus sit solidus angulus æqualis, subtendendæ sunt angulis planis rectæ* BC, CD, DE, EF, FB, *vt fiat pentagonum* BCDEF, *quod in tria triangula resoluatur* BCF, FCD DEF. *Deinde solido angulo A, contento tribus planis angulis* BAC, CAF, FAB, *constituendus solidus angulus æqualis G, contentus tribus angulis planis HGI, IGM, MGH Et solido angulo A, contento tribus planis angulis* CAF, FAD, DAC, *æqualis solidus angulus G, contentus tribus angulis planis IGM, MGK, KGI. Et denique angulo solido A, contento tribus angulis planis* DAE, EAF, FAD, *æqualis solidus angulus G, contentus tribus planis angulis KGL, LGM, MGK. Ita enim fiet totus angulus solidus G, toti angulo solido A, æqualis. Atque in hunc modum cuilibet angulo solido æqualis angulus solidus constituetur.*



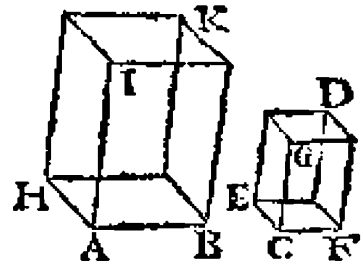
27. PROBL. 5. PROPOS. 27.

A DATA recta linea, dato solido parallelepipedo simile & similiter positum solidum parallelepipedum describere.

SIT a data recta AB, describendum parallelepipedum simile, similiterque positum patallelepipedo CD. [a] Fiat ad rectam AB, eiusque punctum A, angulus solidus æqualis angulo solido C, ita vt tres anguli plani HAI, IAB, BAH, æquales sint tribus angulis planis ECG, GCF,

[a] 26. vnde.

GCF, FCE. Deinde vt eſt CF, ad CG, ſic fiat AB, ad AI, & vt CG, ad CE, ita AI, ad AH; eritque ex æquo, vt CF, ad CE, ita AB, ad AH. [a] 12. ſexti.



Poſt hæc, perficiatur parallelepipedum AK, complctis nimirum parallelogrammis BH, HI, IB, & per I, B, H, ductis planis IK, BK, HK, quæ parallela ſint parallelogrãmis BH, HI, IB. Dico parallelepipedum AK, parallelepipedo CD, ſimile eſſe ſimiliterq; poſitum. Cum enim anguli BAH, FCE, ſint æquales, & latera circa ipſos proportionalia, nempe vt BA, ad AH, ita FC, ad CE, ex conſtructione; erunt parallelogramma HB, EF, ſimilia, ſimiliterq; poſita. Eadem ratione ſimilia erunt, ſimiliterq; poſita parallelogramma HI, EG; & IB, GF. Tria igitur plana BH, HI, IB, ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita tribus planis FE, EG, GF, ſolidi CD. [b] Sunt autem tria cuiuslibet æqualia & ſimilia tribus reliquis oppoſitis. Quare ſex plana ſolidi AK, ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita ſex planis ſolidi CD; Ac proinde ex defin. 9. huius lib. ſimilia ſunt, ſimiliterq; poſita, ſolida AK, CD. A data ergo recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile, & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcripſimus. Quod erat faciendum. [b] 24. vnde.

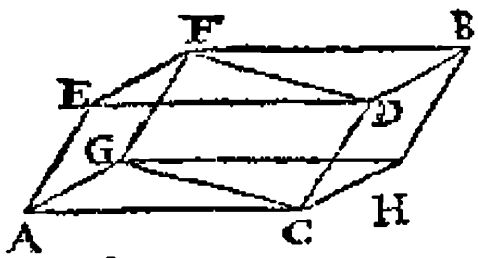
THEOR. 23. PROPOS. 28. 28.

SI ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum: Bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

SIT parallelepipedum AB, in quo plana oppoſita ſint AH, EB, quorum diagonij, ſeu diametri, ſint rectæ lineæ CG, DF. Quoniam igitur vtraque CD, GF, parallela eſt, [c] & æqualis ipſi AE, cum ſint parallelogramma [c] 34. primi

[a] 9. vndec. [b] 33. primi

CE, GE; [a] erunt & inter ſe parallelæ, & æquales CD, GF. [b] Ac proinde, quæ ipſas coniungunt CG, DF, parallelæ erũt, & æquales, ideoque in vno plano. Dico planum, quod per CG, DF, ducitur, ſecare bifariam parallelepipedum AB. Cum enim plana AH, EB, ſint parallelogramma æqualia, & ſimilia; erunt & eorum dimidia, nimirum triangula AGC, GCH; EFD, FDB, æqualia inter ſe: Sunt autem & latera circa angulos æquales GAC, CHG; FED, DBF, proportionalia. [d] Igitur ſimilia quoque erunt dicta triangula. [e] Cum igitur & parallelogrammum AF, æquale ſit & ſimile parallelogrammo CB; & AD, ipſi GB; & CF, commune: Erunt duo triangula AGC, EFD, & parallelogramma AF, AD, CF, priſmatis ACGFED, æqualia & ſimilia duobus triangulis HCG, BDF, & parallelogrammis CE, BG, CF, priſmatis HGCDBF; propterea quæ priſmata æqualia erunt, ex defin. 10. huius lib. Quæ cum componant parallelepipedum AB, ſectum erit parallelepipedum AB, bifariam. Itaque ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur, &c. Quod erat demonſtrandum.



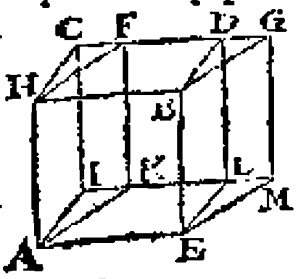
[d] 16. ſexti. [e] 24. vnde.

29. THEOR. 24. PROPOS. 29.

SOLIDA parallelepipeda ſuper eãdem baſin conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineæ in ijſdem collocantur rectis lineis: ſunt inter ſe æqualia.

SVPER baſin AB, in eadem altitudine, hoc eſt, inter eadem plana parallela, ſint conſtituta duo parallelepipeda ACDE, AFGE, quorum inſiſtentes lineæ ex quatuor angulis baſis exeuntes in ijſdem collocentur lineis,

neis, nempe AI, AK, EL, EM, in recta IM; & HC, HF, BD, BG, in recta CG. Dico parallelepipeda ACDE, AFGE, esse inter se æqualia.



[a] Cum enim æqualia sint parallelogramma AL, AM, super eadem basi AE, & in eisde n parallelis constituta; erunt, ablato cõmuni trapezio AELK, æqualia quoq; triangula AIK, ELM. [b] Quoniam vero omnia latera triãguli AIK, æqualia sunt omnibus lateribus trianguli HCF; erit triangulum AIK, triangulo HCF, æquiangulum, & æquale, per ea, quæ ad 8. propos. lib. 1. ostendimus; [c] Ac propterea latera circa æquales angulos habebunt proportionalia, ideoque inter se erunt similia. Eadem ratione triangulum ELM, triangulo BDG, æquale erit & simile. [d] Rursus parallelogrammum AC, æquale est, & simile parallelogrammo ED; & eadem ratione parallelogrammum AF, parallelogrammo EG; [e] Sed & IF, ipsi LG, cum bases IK, LM, sint æquales ([f] Nam cum rectæ IL, KM, æquales sint ipsi AE, erunt quoq; inter se æquales; quare cõmuni dempta KL, æquales erunt IK, LM.) Erũt ergo omnia plana prismatis AIKFCH, æqualia & similia omnibus planis prismatis ELMGDB. Igitur ex defin. 10. huius lib. æqualia erũt dicta prismata; Ac propterea addito communi solido AHFKLDBE, æqualia fient parallelepipeda super eandem basin, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 31. primi

[b] 34. primi

[c] 4. sexti.

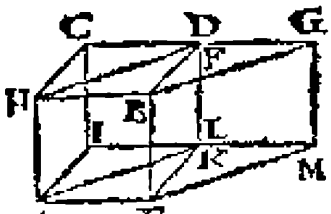
[d] 24. unde.

[e] 36. primi

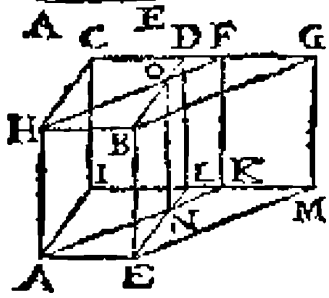
SCHOLIVM.

HAEC propositio persimilis est propositioni 35. lib. 1. Quod enim ibi de parallelogrammis, hoc de parallelepipedis demonstratur hoc loco, eisdem fere medijs, dummodo loco triangulorum assumantur prismata, vt ex demonstratione liquet. Vnde reliqui duo casus, quando nimirum punctum K, in punctum L, cadit, vel vltra L, eodem modo demonstrabuntur, vt in his figuris apparet. Nam in secundo casu, si ex parallelogrammis aqualibus AL, AM, auferatur triangulum commune ALE, erunt reliqua triangula AIK,

ELM, æqualia. Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB. Addito ergo prismate communi AKEBHD, æqualia fient parallelepipeda ACDE, AFGE.



IN, tertio vero casu, si ex parallelogrammis æqualibus AL, AM, dematur triangulum commune ANE, erũt reliqua trapezia AILN, NKME, æqualia; quibus si addatur triangulum commune KLN, tota triangula AIK, ELM, æqualia fient. Vnde, vt prius, æqualia erunt prismata AIKFCH, ELMGDB; a quibus si auferatur prisma commune KLNODF; (Nam communis sectio planorum AF, DE, est recta NO.) remanebit solidum cõprehensum planis AILN, NOHA, AICH, HCDO, CDLI, DLNO, æquale solido contento planis ENKM, MKFG, GFOB, FKNO, BGME, EBON. Si igitur addatur vtrique prisma commune AENOBH; fient parallelepipeda ACDE, AFGE, inter se æqualia.

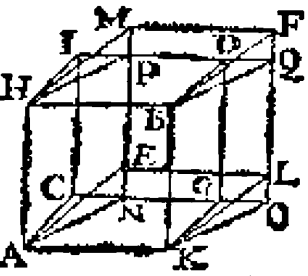


30. ## THEOR. 25. PROPOS. 30.

SOLIDA parallelepipeda super eandem basin constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis: inter se sunt æqualia.

SVPER basin AB, in eadem altitudine, hoc est, inter eadem plana parallela, sint constituta parallelepipeda AIDK, AMFK, quorum insistentes lineæ ex quatuor angulis basis exeuntes AC, AE, KG, KL; HI, HM, BD, BF, non sint in eisdem rectis, hoc est, neq; CI, GD, protractæ transeant per puncta M, E, F, L, neque CG, ID, productæ, &c. Dico parallelepipeda AIDK, AMFK, esse æqualia.

æqualia. Cum enim plana CD, EF, oppoſita baſi AB, ſint in eodem plano, ob eandem altitudinem parallelepipedorum; producantur in eo plano rectæ C G, I D, quarum CG, ſecet EM, LF, protractas in punctis N, O; Et ID, eaſdem in punctis P, Q; adiungantur q; rectæ AN, KO, HP, BQ. Quia igitur rectæ PQ, MF, ſunt æquales, cum opponãtur in parallelogrammo FP; & MF, ipſi HB, eſt æqualis; erunt & PQ, HB, æquales: Sunt autem & parallelæ, propter parallelogrammũ HIDB. Igitur & HP, BQ, parallelæ ſunt & æquales, ideoque parallelogrammum eſt HPQB. Eadem ratione parallelogrãma erunt HPNA, ANOK, KOQB: Eſt autem & pallelogrammum NOQP. Igitur parallelepipedum eſt APQK. Quamobrem parallelepipedum AIDK, æquale eſt parallelepipedo APQK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem CO, IQ. Eodem modo eidem parallelepipedo APQK, æquale erit parallelepipedum AMFK, cum vtriuſque eadem ſit baſis AB, & inſiſtentes lineæ ſint in rectis eiſdem NM, OF. Quare parallelepipeda AIDK, AMFK, inter ſe ſunt æqualia. Solida igitur parallelepipeda ſuper eandem baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.



a 34. primi

b 33. primi

c 29. vnde.

SCHOLIVM.

CONVERTETVR hæc propoſitio, atque præcedens, in hunc modum.

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſin, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine.

NAM ſi vnũ dicatur altius; ſi ab eo abſcindatur parallelepipedum in eadem cum reliquo altitudine; erunt æqualia

abſciſſum, & reliquum. [a] *Cum igitur & totũ huic reliquo ponatur æquale; æquale erit abſciſſum toti. quod eſt abſurdum.*

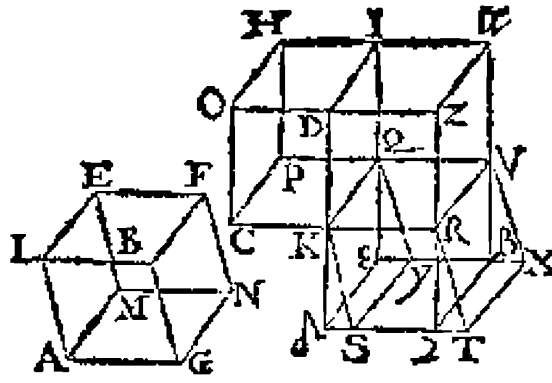
[a] 19. vel 30. vndec.

THEOR. 26. PROPOS. 31.

31. 32.

SOLIDA parallelepipeda ſuper æquales baſes conſtituta, & in eadem altitudine: æqualia ſunt inter ſe.

SVPER æquales baſes AB, CD, in eadẽ altitudine ſint conſtituta parallelepipeda AEFG, CHIK. Dico hęc parallelepipeda eſſe ęqualia inter ſe. Sint enim primum inſiſtentes lineæ AM, GN, LE, BF, ad baſin AB; & inſiſtentes CP, KQ, OH, DI, ad baſin CD. perpendiculares. Quo poſito, erunt omnes dictę perpendiculares inter ſe ęquales, propter eandem parallelepipedorum altitudinẽ. Producatur CK, in rectum, ſitque KR, ęqualis ipſi LB, & fiat angulus RKS, in plano OK, extenſo ęqualis angulo BLA, ponaturq; KS, ęqualis ipſi LA; & perficiatur parallelogrammum KT, ſuper quod, ad altitudinem perpendicularis KQ, conſtruatur parallelepipedum QSTV. Quoniam igitur latera KR, KS, ęqualia ſunt lateribus LB, LA, & anguli RKS, BLA, æquales; erunt parallelogramma KT, LG, ęqualia & ſimilia. Rurſus quia latera KQ, KS, ęqualia ſunt lateribus LE, LA; & anguli QKS, ELA, recti, per defin. 3. huius lib. eo quod KQ, LE, rectę ponantur ad plana KT, LG; erunt & parallelogrãma QS, EA, ęqualia & ſimilia. Eodem modo cũ latera KR, KQ, ęqualia ſint lateribus LB, LE, & anguli QKR, ELB, recti, ex eadem defin. 3. huius lib. erunt quoque parallelogramma KV, LF, ęqualia & ſimilia. [b] Quare cum tria plana KT, QS, KV, parallelepipedi QSTV, ęqualia ſint & ſimilia tribus planis LG,



[b] 24. vnde.

EA,

EA, LF, parallelepipedi AEFG; [a] tam autem illa, quam hæc æqualia sint & similia tribus reliquis oppositis: Erunt, per defin. 10. huius lib. parallelepipeda QSTV, EAGF, inter se æqualia. [a 24. unde.]

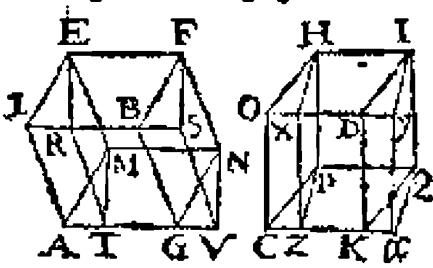
CONVENIANT rectæ DK, TS, productæ in δ; & IQ, XY, in ε, compleaturque parallelepipedum Qδγ V. Item HI, βV, protractæ conueniant in α; & OD, γR, in Z, perficiaturque parallelepipedum IKRα. Quoniam igitur parallelepipeda QSTV, Qδγ V, eandem habent basin KV, suntque in eadem altitudine, nempe inter eadem plana parallela KV, δX, & insistentes ipsorum lineæ KS, Kδ, RT, Rγ; QY, Qε, VX, Vβ, collocantur in eisdem rectis δT, εX; [b] ipsa inter se æqualia erunt. Est autem parallelepipedum QSTV, parallelepipedo EAGF, æquale: Igitur eidem parallelepipedo EAGF, æquale erit parallelepipedum Qδγ V. [b 29. unde.]

[c] QVONIAM vero parallelogrāma KT, Kγ, æqualia sunt inter se; & KΓ, æquale est ipsi LG, erit & Kγ. ipsi LG, hoc est, ipsi CD, æquale; cum bases LG, CD, ponantur æquales. [d] Quare erit, vt CD, ad DR, ita Kγ, ad DR: [e] Vt autem CD, basis ad basin DR, ita est solidum CHIK, ad solidum KIαR; cū parallelepipedū CHαR, secetur plano IK, planis oppositis CH, αR, parallelo: Et eadem ratione vt Kγ, ad DR, ita est solidū Qδγ V, ad solidum IKRα; cum & parallelepipedum Iδγα, secetur plano KV, oppositis planis Dα, δβ, parallelo. [f] Igitur æqualia erunt parallelepipeda CHIK, Qδγ V; cum eandem habeant proportionem ad idem solidum IKRα. Quare cum parallelepipedū Qδγ V, sit ostensum æquale parallelepipedo AEFG: æqualia quoque erunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Quod est propositum. [c 35. primi] [d 7 quin.] [e 25. unde.] [f 9. quinti.]

SINT iam neque insistētes lineæ AM, GN, LE, BF, ad basin AB; neque CP, KQ, OH, DI, ad basin CD, perpendiculares: [g] Et a punctis E, F, M, N, demittantur ER, FS, MT, NV, ad planum, in quo basis AB, perpendiculares; Item a punctis, H, I, P, Q, ad planum, in quo basis CD, perpendiculares HX, IY, PZ, Qα. Erunt autem omnes hæ perpēdiculares inter se æquales, cū sint altitudines dictorum parallelepipedorū æquales. Ducantur rectæ [g 11. unde.]

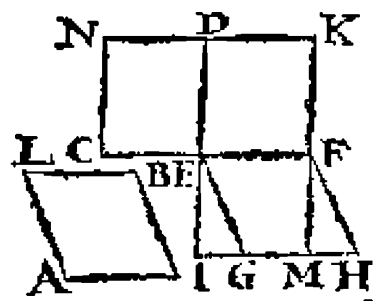
ctæ RS, SV, VT, TR: Item rectæ XY, Yα, αZ, ZX, vt fiant parallelepipeda ETVF, HZαI, quæ cum sint eiusdem altitudinis, habeantque insistentes lineas perpendiculares, erunt inter se æqualia, vt ostensum est. [a] Sed parallelepipedum ETVF, æquale est parallelepipedo AEFG, cum hoc eandem cum illo habeat basin EN, eandemque altitudinem; Et parallelepipedum HZαI, æquale est eadem ratione parallelepipedo CHIK, cum hoc eandem cum illo basin HQ, eandemque altitudinem possideat. Igitur & inter se æqualia sunt parallelepipeda AEFG, CHIK. Idemque ostendetur, si vnius parallelepipedi insistentes lineæ sint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quocirca solida parallelepipeda super æquales bases constituta, &c. Quod demonstrandum erat.

[a] 29. vel 30 vndec.



SCHOLIVM.

POTEST cum Campano expeditius fortasse demonstrari, duo parallelepipeda super æquales bases constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases sunt perpendiculares, inter se esse æqualia; Nimirum ex solis basibus, sine constructione tot parallelepipedorum, quamuis eadem sit demonstratio illius, quæ nostra. Sint enim duæ bases æquales, nempe duo parallelogramma AB, CD. Dico parallelepipeda super ipsas constituta, in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ ad bases AB, CD, sunt perpendiculares, inter se esse æqualia. Protrahantur enim duo latera DE, CE, ad partes E. Deinde fiat angulus FEG, æqualis angulo L; & recta EF, rectæ LB; & recta EG, rectæ LA, ponatur æqualis; perficiaturque parallelogrammum EH, quod æquale erit, & simile parallelogrammo AB. Conueniat autem HG, producta cum DE, producta in I, & compleatur paralle-



parallelogrammum IK. Iam vero intelligantur ſuper baſes EH, IF, EK, *conſtituta parallelepipeda eiuſdem altitudinis cum parallelepipedis ſuper* AB, CD, *conſtructis; ſintque inſiſtentes lineæ perpendiculares ad dictas baſes. Perſpicuum eſt igitur, ſolidum ſuper* EH, *æquale eſſe ac ſimile ſolido ſuper* AB, *ex defin.* 10. *huius lib. cum plana illius æqualia ſint & ſimilia planis huius, per conſtructionem:* [a] *Sunt autem & æqualia parallelepipeda ſuper* EH, IF, *cum habeant baſin eandem, cuius infimum latus* EF, *erectam ſuper planũ* IK; *Item plana baſi oppoſita, quorum latera infima* GH, IM, *in eodem plano, cuius infimum latus* IH; *atque inſiſtentes lineas* EG, FH, EI, FM, *&c. in eiſdem rectis lineis* IH, *&c. Igitur æquale erit parallelepipedum ſuper* IF, *parallelepipedo ſuper* AB. [b] *Quoniam vero parallelogramma* EH, IF, *æqualia ſunt; &* EH, *æquale eſt ipſi* CD: *æqualia erunt* IF, CD. [c] *Erit igitur, vt* IF, *ad* EK, *ita* CD, *ad* EK: [d] *Eſt autem vt* IF, *ad* EK, *ita ſolidum ſuper* IF, *ad ſolidum ſuper* EK, *quod ſolidum ſuper* IK, *ſecetur plano ſuper* EF, *erecto parallelo planis ſuper* DK, IM, *erectis. Et eadem ratione, vt* CD, *ad* EK, *ita ſolidum ſuper* CD, *ad ſolidum ſuper* EK, *cum ſolidum ſuper* CK, *ſecetur plano ſuper* DE, *erecto parallelo planis ſuper* CN, FK, *erectis. Quare erit vt ſolidum ſuper* IF, *ad ſolidum ſuper* EK, *ita ſolidum ſuper* CD, *ad ſolidum ſuper* EK; [e] *Ac proinde æqualia erunt parallelepipeda ſuper* IF, *&* CD. *Oſtenſum eſt autem parallelepipedum ſuper* IF, *æquale parallelepipedo ſuper* AB. *Æqualia ergo erunt & parallelepipeda ſuper* AB, CD. *Quod eſt propoſitum.*

[a] *29. vnde.*

[b] *35. primi*

[c] *7. quinti.*

[d] *21. vnde.*

[e] *9. quinti.*

CONVERTETVR *quoque hæc propoſ. 31. in hunc modum.*

SOLIDA parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſin:

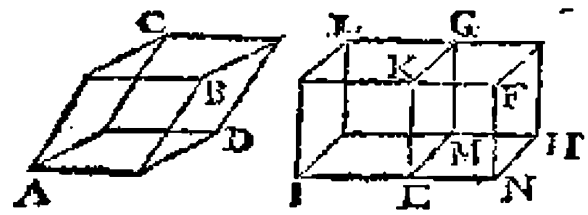
SI enim vnum altero credatur altius, si ab eo abscindatur parallelepipedum in eadem cum altero altitudine,
[a] *31. unde.* *sient aqualia abscissum, & alterum. Cum ergo & totum ponatur aquale alteri; aquale erit abscissum toti. Quod est absurdum.*

QVOD si in eadem sint altitudine, & basis vnius credatur maior base alterius, si ab ea abscindatur basis aqualis alteri, & super abscissam intelligatur parallelepipedum eiusdem altitudinis, demonstrabimus eodem modo, partem toti esse aqualem. Quod est absurdum.

33. ## THEOR. 27. PROPOS. 32.

SOLIDA parallelepipeda sub eadem altitudine; inter se sunt, vt bases.

SINT duo parallelepipeda ABCD, EFGH, eiusdem altitudines super bases AB, EF. Dico esse solidum
[b] *45. primi* ad solidum, vt est basis ad basin. [b] Super rectam enim EK, constituatur parallelogrammum IK, æquale parallelogrammo AB, in angulo IEK, qui sit æqualis angulo ENF. Constituent autem parallelogramma EF, IK, totum parallelogrammum vtrum FI, vt in 45. propos. lib. 1. demonstratum est. Si igitur alia plana parallelepipedi EFGH, producantur ad partes EG, perficiaturq; totũ vnũ parallelepipedũ IFLH:
[c] *31. unde.* erunt parallelepipeda ABCD, IKLM, æqualia, cũ habeãt æquales bases, per constructionẽ AB, IK; &
47. primi eandẽ altitudinẽ, ex hypothesi. [d] Quare erit vt solidum IKLM, ad solidũ EFGH, ita solidum ABCD, ad
[e] *25. unde.* solidum EFGH: [e] Est autem solidum IKLM, ad solidum EFGH, vt basis IK, hoc est, illi æqualis basis AB, ad basin EF. Igitur & solidũ ABCD, erit ad solidũ EFGH, vt ba-



vt baſis AB, ad baſin EF. Solida ergo parallelepipeda ſub eadem altitudine inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

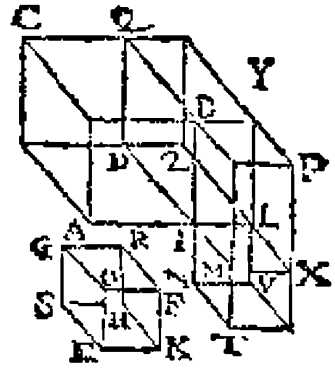
CONVERSO modo, ſi ſolida parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. Si enim non eadē credatur altitudo; ex maiori abſcindatur minori æqualis, & ducatur planum baſi parallelum; [a] *eritq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum abſciſſum: ſed ſic quoque erat ad totum.* [b] *Abſciſſum ergo æquale eſt toti. Quod eſt abſurdum.*

[a] 32. vndec.
[b] 9 quin.

THEOR. 28. PROPOS. 33. 36.

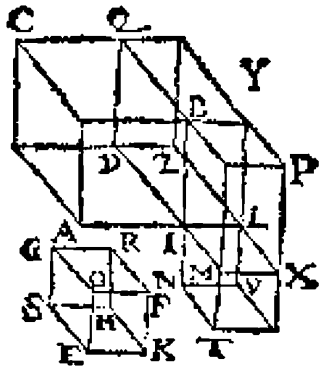
SIMILIA ſolida parallelepipeda, inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterum.

SINT ſimilia parallelepipeda ABCD, EFGH, ſuper baſes ſimiles AB, EF, in quibus latera homologa ſint AI, EK. *Dico* proportionē parallelepipedi ABC*D*, ad parallelepipedum EFGH, eſſe triplicatam proportionis laterum homologorum *A*I, EK. Producatur enim AI, ad L, & ſit IL, æqualis ipſi EK, vel GR; Item *D*I, ad M, & ſit IM, æqualis ipſi HK, vel GO; Item BI, ad N, & ſit IN, æqualis ipſi *K*F, vel GS. Deinde cōpletis parallelogrammis L*M*, LN, IT, perficiatur parallelepipedum TXIV. Quoniam vero latera IL, IM, æqualia ſint lateribus GR, GO; & anguli cōtenti æquales, cū angulus LIM, ſit æqualis angulo AI*D*, qui ob ſimilitudinem parallelepipedorum æqualis



[c] 15. primi

æqualis eſt angulo EKH, ſeu RGO; erunt parallelogrâ ma IX, GF, ſimilia & æqualia. Eadem ratione ſimilia erunt, & æqualia LN, RS; item IT, GE. Quare tria plana IX, LN, IT, parallelepipedi TXIV, ſimilia ſunt & æqua lia tribus planis GF, RS, GE, parallelepipedi EFGH: [a] Sunt autem tria cuiuſq; ſimilia & æqua lia tribus reliquis oppoſitis. Igitur æqualia ſunt & ſimilia paral lelepipeda TXIV, EFGH, ex defin. 10. huius lib. Rurſus com pletis parallelogrammis MB, BL, LM, perficiatur parallelepi pedum MPBL; Item completis parallelogrammis IY, DL, IQ, perficiatur parallelepipedum IYQZ. Quoniam igitur ob ſimilitudinem paral lelepipedorũ ABCD, EFGH, eſt vt AI, ad EK, hoc eſt, ad IL, ita DI, ad HK, hoc eſt, ad IM; & BI, ad FK, hoc eſt, ad IN. [b] Vt autem AI, ad IL, ita eſt parallelogrammum AD, ad DL; Et vt DI, ad IM, ita parallelogrammum DL, ad LM; & vt BI, ad IN, ita parallelogrammum BL, ad LN. Igitur erit vt AD, ad DL, ita DL, ad LM; & BL, ad LN. [c] Sed vt AD, baſis ad DL, baſin, ita eſt parallelepipedum ADCB, ad parallelepipedum DLYQ: & vt baſis DL, ad baſin LM, ita parallelepipedum DLYQ, ad parallelepipedũ LMBP; & vt baſis BL, ad baſin LN, ita parallelepipedũ LMBP, ad parallelepipedũ LNTX. Quare erit, vt parallelepipedũ ADCB, ad parallelepipedũ DLYQ, ita parallelepipedũ DLYQ ad parallelepipedũ LMBP, & parallelepipedum LMBP, ad parallelepipedũ LNTX. Ac proinde quatuor quantitates ſunt continue proportionales ADCB, DLYQ, LMBP, LNTX, ideoq; proportio primæ ADCB, ad quartã LNTX, hoc eſt, ad EFGH, erit triplicata proportionis primæ ADCB, ad ſecundam DLYQ, ex defin. 10. lib. 5. [d] Vt autem ADCB, ad DLYQ, ita eſt baſis AD, ad baſin DL; [e] Et vt AD, ad DL, ita eſt recta AI, ad IL, hoc eſt, ad EK. Igitur proportio parallelepipedi ADCB, ad parallelepipedum EFGH, eſt triplicata proportionis homologo-



[a] 24. vnde.
[b] 1. ſexti.
[c] 32. vnde.
[d] 32. vnde.
[e] 1. ſexti.

mologorum laterum, nimirum AI, ad EK. Quapropter similia solida parallelepipeda, inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum. Quod erat demonstrandum.

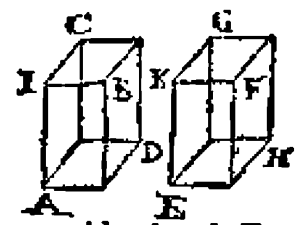
COROLLARIVM.

EX hoc perspicuum est, si fuerint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse parallelepipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. Quia tam parallelepipedum ad parallelepipedum, vt demonstratum est, quam prima linea ad quartam, ex definitione 10. lib. 5. habet proportionem triplicatam propertionis primæ lineæ ad secundam, nimirum laterũ homologorum.

THEOR. 29. PROPOS. 34. 34.35.

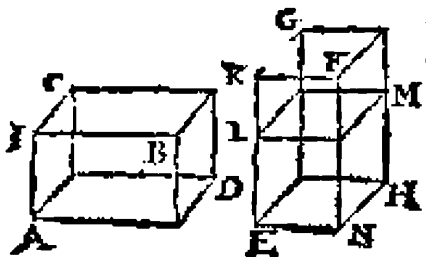
AEQVALIVM solidorum parallelepipedorũ bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines recipro cantur; Illa sunt æqualia.

SINT æqualia parallelepipeda ADCB, EHGF, super bases AD, EH. Dico bases AD, EH, & altitudines parallelepipedorum ADCB, EHGF, esse reciprocas, hoc est, esse vt AD, ad EH, ita altitudinem solidi EHGF, ad altitudinem ADCB. Sint enim primũ insistentes lineæ AI, EK, perpendiculares ad bases AD, EH, ita vt AI, EK, sint per defin. 4. lib. 6. altitudines parallelepipedorum. Si igitur altitudines AI, EK, sunt æqua-



æquales; cum & parallelepipeda æqualia ponantur; erunt & baſes AD, EH, æquales, per ea, quæ ad finem propoſ. 31. huius lib. oſtendimus. Quare erit, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI: Ac proinde baſes & altitudines ſunt reciprocæ.

QVOD ſi altitudines AI, EK, inæquales fuerint; ſit EK, maior, ex qua abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis; & per L, ducatur planum LM, parallelum baſi EH, per ſcholiũ propoſ. 15. huius lib. Quoniã igitur æqualia ſunt ſolida ADCB, EHGF; [a] erit vt ADCB, ad ſolidum EHML, ita EHGF, ad idem ſolidum EHML: [b] Vt autem ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita eſt baſis AD, ad baſin EH, cum æquales ponantur altitudines AI, EL; Et vt ſolidum EHGF, ad ſolidum EHML, ita eſt eadẽ ratione, baſis KN, ad baſin LN, cum hac ratione ſolida EHGF, EHML, eãdem habeant altitudinem, ſi nimirũ baſes ponantur KN, LN; erunt enim inter eadem plana parallela KN, GH. Igitur erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita baſis KN, ad baſin LN: Sed vt KN, ad LN, ita eſt recta EK, ad rectam EL, hoc eſt, ad AI, ipſi EL, æqualem. Quare erit vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes, & altitudines.



SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Si enim altitudines EK, AI, ſunt æquales; cum ſit baſis AD, ad baſin EH, vt altitudo EK, ad altitudinem AI, ex hypotheſi; erunt & baſes AD, EH, æquales. [d] Quare parallelepipeda ADCB, EHGF, cum æquales habeant baſes, & altitudinem eandem, inter ſe æqualia erunt.

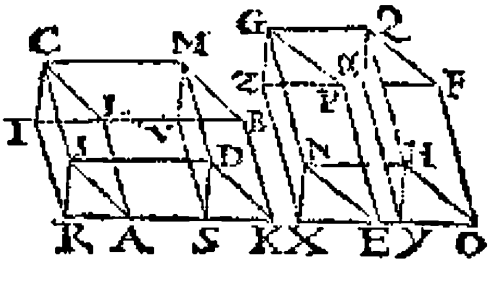
QVOD ſi altitudo EK, maior fuerit, abſcindatur EL, ipſi AI, æqualis, & per L, ducatur planum LM, parallelũ baſi EH. Quia igitur ex hypotheſi eſt, vt baſis AD, ad baſin EH, ita altitudo EK, ad altitudinem AI, hoc eſt, ad EL, ipſi AI, æqualem; [e] Vt autem baſis AD, ad baſin

[a] 7. quinti.
[b] 32. vnde.
[c] 1. ſexti.
[d] 31. vnde.
[e] 32. vnde.

baſin EH, ita eſt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, cum altitudines AI, EL, æquales ponantur; [a] Et vt EK, ad EL, ita eſt KN, ad LN; [b] Vt autem baſis KN, ad baſin LN, ita eſt ſolidum DHGF, ad ſolidum EHML, cũ ſolida EHGF, EHML, eandem habeant altitudinem, ſi baſes ponantur KN, LN; erũt enim hac ratione inter plana parallela KN, GH; [c] erit vt ſolidum ADCB, ad ſolidum EHML, ita ſolidum EHGF, ad idem ſolidum EHML; [c] ideoque æqualia erunt ſolida ADCB, EHGF.

[a] 1. ſexti.
[b] 34. vnd.
[c] 9. quinti.

SED proponantur iam parallelepipeda ABCD, EFGH, æqualia, quorum inſiſtẽtes lineæ AI, KD, BM, LC; EN, OH, FQ, PG, non ſint perpẽdiculares ad baſes AB, EF. Demittantur autẽ a punctis I, D, M, C, ad planũ baſis AB, perpendiculares IR, DS, MV, CT; itẽ a punctis N, H, Q, G, ad planum baſis EF, perpendiculares NX, HY, Qα, GZ; connectanturque rectæ RS, TV, RT, SV; XY, Zα, XZ, Yα: Eruntq; perpẽdiculares RI, XN, parallelepipedorũ altitudines, ex defin. 4. lib. 6. Dico rurſus, vt baſis AB, ad baſin EF, ita eſſe altitudinẽ XN, ad altitudinẽ RI. [d] Cũ enim æqualia ſint ſolida ABCD, EFGH, ex hypotheſi, ſit autem ABCD, æquale ſolido RVCD, quod habeant eandem baſin CD, eandemque altitudinem RI; & EFGH, eadẽ ratione, æquale ſolido Xα GH: Erunt & parallelepipeda RVCD, Xα GH, æqualia. Quare cum habeant inſiſtentes lineas perpendiculares ad baſes CD, GH, erit, vt iam demonſtratum eſt, vt baſis CD, ad baſin GH, hoc eſt, vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI. Ac propterea baſes & altitudines ſunt reciprocæ.



[d] 29. vel 30. vndec.

SINT iam baſes atque altitudines reciprocæ. Dico parallelepipeda eſſe æqualia. Conſtructa enim figura, vt prius; Cum ſit vt baſis AB, ad baſin EF, ita altitudo XN, ad altitudinem RI; [e] Sit autem AB, ipſi CD, & EF, ipſi GH, æqualis; erit quoque vt baſis CD, ſolidi RVCD, ad baſin

[e] 24. vnde.

basin GH, solidi XαGH, ita altitudo XN, ad altitudinē RI. Quare cum XN, RI, sint insistentes lineæ, perpendiculares ad bases CD, GH; erunt, vt iam ostensum est, æqualia parallelepipeda RVCD, XαGH. [a] Sunt autem hæc parallelepipeda parallelepipedis ABCD, EFGH, æqualis. Igitur æqualia quoque erunt parallelelepipeda ABCD, EFGH: Idemque ostendetur si insistentes lineæ vnius parallelepipedi fuerint perpendiculares ad basin, alterius vero non. Quam ob rem, Aequalium solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur, &c. Quod erat ostendendum.

[a] 29. vel 30 vndec.

SCHOLIVM.

OMNIA hæc, quæ demonstrata sunt in sex proximis propositionibus, nimirum 29. 30. 31. 32. 33. & 34. conueniunt quoque prismatis, quæ habent duo plana opposita triangularia, si prædictæ hypotheses seruentur. Nam si duobus prismatis eiusmodi eiusdem altitudinis, & super eandem basin, vel super æquales bases constitutis, apponantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur duo parallelepipeda eiusdem altitudinis, & super eandem, vel æquales bases existeneia, [b] *Quare æqualia erunt eiusmodi parallelepipeda; ac proinde & data prismata, eorum videlicet dimidia.*

[b] 29. 30. vel 31. vndec.

RVRSVS, si duobus prismatis prædictis eiusdem altitudinis, & super diuersas bases constitutis adiiciantur duo alia prismata illis æqualia & similia, conficientur iterum duo parallelepipeda eiusdem altitudinis. [c] *Quare erit parallelepipedum ad parallelepipedum, vt basis ad basin;* [d] *Atque adeo prisma ad prisma, nempe dimidium vnius parallelepipedi, ad dimidium alterius, vt eadem basis ad basin, si prismatum bases fuerint parallelogramma, vel certe vt triangulum ad triangulum, dimidium scilicet vnius basis ad dimidium alterius, si bases prismatum fuerint triangula.*

[c] 32. vnde.
[d] 15. quin.

PRAETEREA, si duobus prismatis præfatis similibus addãtur alia duo prismata illis æqualia & similia, constituentur duo parallelepipeda similia, [e] *quæ inter se habent proportionem triplicatam proportionis laterum homologorum.* [f] *Igitur & prismata, eorum nimirum dimidia, cum eandem habeant*

[e] 33. vnde.
[f] 15. quin.

habeant proportionem cum parallelepipedis, triportionem habebunt triplicatã proportionis eorundem laterum homologorum, quæquoque sunt latera homologa prismatum.

DENIQVE si dictis duobus prismatis æqualibus adiungantur alia duo prismata illis æqualia & similia, componentur duo parallelepipeda æqualia eorundem altitudinum cum prismatis. [a] *Quare cum bases, & altitudines parallelepipedorum sint reciprocæ; & bases prismatum eadem sint, vel certe triangula earum dimidia eandem habentia proportionem; Erunt quoque bases prismatum & eorum altitudines reciprocæ.*

[a] *34. vnde.*

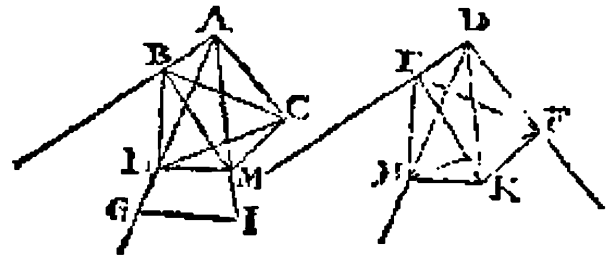
[b] *15. quin.*

THEOR. 30. PROPOS. 35. 37.

SI fuerint duo plani anguli æquales, quorũ verticibus sublimes rectæ lineæ insistant, quæ cum lineis primo positis angulos contineant æquales, vtrumque vtrique; In sublimibus autẽ lineis quælibet sumpta fuerint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpendiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primũ positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent.

SINT duo anguli plani æquales BAC, EDF, quorum verticibus A, & D, insistant extra ipsorum plana, sublimes rectæ lineæ AG, DH, ita vt angulus BAG, angulo EDH, & angulus CAG, angulo FDH, sit æqualis: a sumptis autem punctis G, H, in rectis AG, DH, demit

tantur ad plana, in quibus anguli BAC, EDF, exiſtunt perpendiculares GI, HK, incidentes in puncta I, K, & adiungantur rectę IA, KD. Dico angulos GAI, HDK, eſſe æquales inter ſe. Nã ſi AG, DH, ſunt inæquales, auferatur a maiori AG, ipſi DH, æqualis linea AL; & ex L, ad planum anguli BAC, perpendicularis demittatur LM. Quoniã igitur GI, LM, rectę ſunt ad planum anguli BAC; [a] ipſæ erunt parallelæ, atque adeo in eodem plano, nempe in plano trianguli AGI. Quare LM, cadet in rectam AI. Ducantur autem ex punctis M, K, ad rectas AB, AC, DE, DF, perpendiculares MB, MC, KE, KF; & connectantur rectę BC, BL, LC, EF, LH, HF. Et quia LM, recta eſt ad planum anguli BAC, ipſa rectum angulum efficiet cum recta AM, in eodem plano ducta per defin. 3. huius lib. [b] Quare quadratum rectæ AL, æquale erit quadratis rectarum AM, ML: [c] Eſt autem quadratum rectæ AM, æquale quadratis rectarum AC, CM, cum & angulus ACM, rectus ſit, ex conſtructione. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CM, ML: [d] At quadratis rectarum CM, ML, æquale eſt quadratum rectæ CL, cum angulus CML, rectus ſit per defin. 3. huius lib. Igitur quadratum rectę AL, æquale eſt quadratis rectarum AC, CL; [e] Ac proinde angulus ACL, rectus erit. [f] Rurſus quia quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AM, ML: [g] Eſt autem quadratum rectę AM, æquale quadratis rectarum AB, BM, cum angulus ABM, per conſtructionem, ſit rectus. Igitur quadratum rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BM, ML: [h] At quadratis rectarum BM, ML, æquale eſt quadratum rectæ BL, quod & angulus BML, ſit rectus ex defin. 3. huius lib. Quadratum ergo rectæ AL, æquale eſt quadratis rectarum AB, BL; [i] propterea que angulus ABL, erit rectus. Non aliter oſtendentur recti anguli DFH, DEH. Quoniam igitur anguli ABL, LAB,



a 6. vndec.
b 47. primi
c 47. primi
d 47. primi
e 48. primi
f 47. primi
g 47. primi
h 47. primi
i 48. primi

LAB, triāguli ABL, æquales ſunt angulis DEH, HDE, trianguli DEH; ſuntque latera AL, DH, æqualia; [a] Erūt & reliqua latera AB, BI, reliquis lateribus DE, EH, æqualia. Eodem argumento æquales erūt rectæ AC, CL, rectis DF, FH. Quare cū latera AB, AC, trianguli ABC, æqualia ſint lateribus DE, DF, trianguli DEF; & anguli contenti BAC, EDF, æquales ex hypotheſi; [b] erunt & baſes BC, EF, inter ſe, & anguli ABC, ACB, angulis DEF, DFE æquales: Sunt autem & toti anguli ABM, ACM, totis angulis DEK, DFK, æquales, cum omnes ſint recti. Igitur & reliqui anguli MBC, MCB, reliquis angulis KEF, KFE, æquales erunt; Ac propterea cum & latera BC, EF, ſint oſtenſa æqualia; [c] erunt latera BM, CM, lateribus EK, FK, æqualia. Quia igitur latera AC, CM, trianguli ACM, æqualia ſunt oſtenſa lateribus DF, FK, trianguli DFK; & anguli ACM, DFK, ſunt recti; [d] erunt & baſes AM, DK, inter ſe æquales. Cum autem æquales ſint oſtenſæ rectæ BL, EH, erunt etiam earum quadrata æqualia: [e] Quia vero quadratum rectæ BL, æquale eſt quadratis rectarum BM, ML; & quadratum rectæ EH, quadratis rectarum EK, KH, quod anguli BML, EKH, recti ſint, ex defin. 3. huius lib. Erunt & quadrata rectarum BM, ML, æqualia quadratis rectarū EK, KH. Ablatis ergo quadratis rectarum BM, EK, quæ æqualia ſunt, quod rectæ BM, EK, oſtenſæ ſint æquales; reliqua quadrata rectarum LM, HK, æqualia erunt, ac proinde rectæ LM, HK, æquales. Quam ob rem cum latera AL, AM, trianguli ALM, æqualia ſint lateribus DH, DK, trianguli DHK, & baſis LM, baſi HK, æqualis; [f] erunt & anguli LAM, HDK, æquales. Si igitur fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, &c. Quod oſtendendum erat.

[a] 26. primi.

[b] 4. primi.

[c] 26. primi

[d] 4. primi.

[e] 47. primi

[f] 8. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ æquales inſiſtāt, quæ cū lineis primo poſitis angulos contineāt æquales, vtrūque vtrique. Erunt a punctis extremis

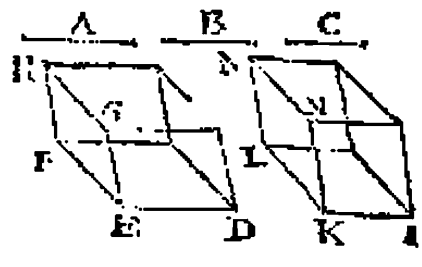
linearum ſublimium ad plana angulorum primo poſitorum demiſſæ perpendiculares inter ſe æquales. Nam propterea quod anguli plani BAC, EDF, ponuntur æquales, & ſublimes æquales AL, DH, conſtituunt angulos æquales LAB, HDE; Item LAC, HDF; demonſtratum fuit, demiſſas perpendiculares LM, HK, eſſe æquales.

38. ## THEOR. 31. PROPOS. 36.

SI tres rectæ lineæ proportionales fuerint: Quod ex his tribus fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, quod æquilaterum quidem ſit, æquiangulum vero prædicto.

SINT continue proportionales rectæ A, B, C. Conſtituaturque angulus ſolidus E, ex tribus angulis planis quibuſcunque *DEF*, DEG, FEG, ita vt recta *DE*, ipſi A; & EF, ipſi *B*; & EG, ipſi C, ſit æqualis. Completis autem parallelogrammis DF, FG, G*D*, perficiatur parallelepipedum DH; quod ſub tribus rectis A, B, C, dicitur contineri, aut ex ipſis fieri. [a] Deinde ad rectam I *K*, eiuſque punctum *K*, fiat ſolidus angulus *K*, æqualis ſolido angulo E, ex tribus angulis planis *IKL*, I*K*M, L*K*M, qui æquales ſint tribus D E F, *DE*G, FLG; ita vt rectę I*K*, *K* L, *K* M, æquales ſint mediæ lineæ B. Completis vero parallelogrammis IL, LM, MI, perficiatur parallelepipedum *I*N; quod contineri dicitur ſub linea *B*, ſeu ex ipſa deſcribi. Dico ſolidum DH, æquale eſſe ſolido IN. Cum enim ſit vt DE, ad I*K*,

[a] *26. vnde.*



ita

ta KM, ad EG, (quod DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis,) & anguli DEG, IKM, æquales: Erunt parallelogramma DG IM, æqualia, propterea quod latera habẽt circa æquales angulos reciproca. Quoniam vero anguli plani DEG, IKM, sunt æquales, quorũ verticibus insistunt sublimes lineæ æquales EF, KL, quæ æquales angulos cõprehendũt cũ lineis primo positis, ex constructione, vtrũq; vtrique; Erunt perpendiculares ex F, L, ad plana basium DG, IM, demissæ, si imirum altitudines parallelepipedorum DH, IN, si bases sint DG, IM, inter se æquales, per coroll propos. præcedentis. Quare parallelepipeda DH, IN, cum habeãt bases DG, IM, æquales, & æquales quoque altitudines, inter se æqualia erunt. Si tres igitur rectæ lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 14 sexti.

[b] 31. unde.

SCHOLIVM.

VICISSIM quoque, si parallelepipedum ex tribus lineis rectis descriptum, æquale fuerit parallelepipedo sibi æquiangulo a media linea descripto: erunt tres rectæ continue proportionales. Sit enim parallelepipedum DH, descriptum ex rectis A, B, C, vt dictum est, æquale sibi æquiangulo parallelepipedo IN, descripto a media B Dico tres A, B, C, esse continue proportionales. Nam velut prius, ostendentur eorum altitudines ex F, I, demissæ esse æquales. Quare cum & ipsa ponantur æqualia; erunt eorum bases DH, IM, æquales per ea, quæ ad finem propos. 31. huius l. b. demonstrauimus. Quæ bases cum angulos habeant æquales DEG, IKM, ex cõstructione; [c] habebunt latera circa illos æquales angulos reciproca; hoc est, vt DE, ad IK, ita KM, ad EG. Quapropter cũ DE, ipsi A; & IK, KM, ipsi B; & EG, ipsi C, sumpta sit æqualis; Erit quoque vt A, ad B, ita B, ad C. Quod est propositum.

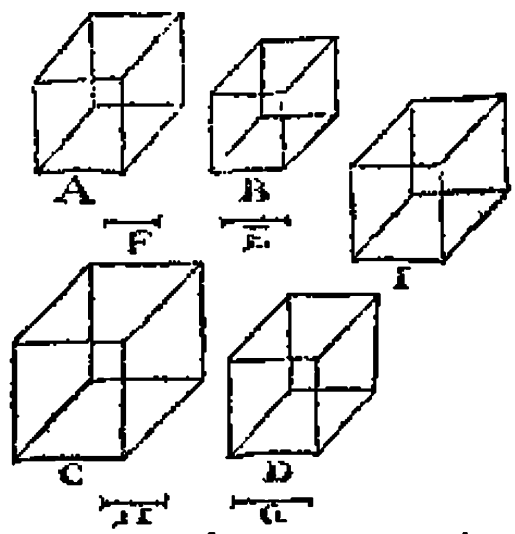
[c] 14. sexti.

PROBL. 32 PROPOS. 37. 39.

SI quatuor rectę lineæ proportionales fuerint: & solida parallelepipeda,

quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſoli da parallelepipeda, quæ & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia: Et ipſæ rectæ lineę proportionales erunt.

SINT quatuor rectę proportionales A, B, C, D; vt quidem A, ad B, ita C, ad D; conſtituanturque ſuper A, & B, duo parallelepipeda A, & b, ſimilia ſimiliterque deſcripta; item ſuper C, & D, alia duo C, & d, ſimilia ſimiliterque poſita, ſiue hæ ſint illis ſimilia, ſiue non. Dico eſſe quoque ſolida A, B, C, D, proportionalia; Vt quidem ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum C, ad ſolidum D. Inueniantur enim per ſcholium propoſ. 11. lib. 6. duabus rectis A, B, aliæ duę continue proportionales E, F; Item duabus C, D, aliæ G, H. Quoniam igitur ſunt quatuor lineę A, B, E, F, & quatuor lineę alię C, D, G, H, quę binæ in eadem ratione ſumuntur; erit ex æquo, vt A, ad F, ita C, ad H. Vt autem A, ad F, ita eſt ſolidum A, ad ſolidum B; Et vt C, ad H, ita ſolidũ C, ad ſolidum D, ex coroll. propoſ. 33. huius lib. Igitur erit vt ſolidum A, ad ſolidum B, ita ſolidum D, ad ſolidum D. Quod eſt propoſitum.



SINT iam e contrario ſolida A, B, C, D, proportionalia. Dico rectas A, B, C, D, eſſe quoque proportionales. Tribus enim rectis A, B, C, inueniatur quarta proportionalis I, [b] ſuper quam deſcribatur parallelepipedũ ipſi D, vel C, ſimile, ſimiliterque poſitum. Quoniam igitur

[a] 12. ſexti.
[b] 27. vnde.

tur est, vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam I; erit quoque, vt iam est ostensum, vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum I. Vt autem solidum A, ad solidum B, ita ponitur quoque solidum C, ad solidum D: Igitur erit vt solidum C, ad solidum I, ita idem solidum C, ad solidum D. [a] Atque idcirco æqualia erunt solida I, & D. Quę cum sint similia, similiterque descripta, continebuntur planis æqualibus, per defin. 10. huius lib. Sed plana æqualia, & similia habent latera homologa æqualia, per lemma propos. 22. lib. 6. Igitur rectæ I, & D, æquales sunt. Ac propterea erit, vt recta C, ad I, rectam, ita eadem C, ad rectam D. Posita est autem C, ad I, vt recta A, ad B. Quare erit vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Itaque si quatuor rectę lineæ proportionales fuerint, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 9. quinti.

BREVIVS tota hæc propositio demonstrabitur cum Theone, hoc modo. Ponatur primũ vt recta A, ad rectam B, ita recta C, ad rectam D. Dico esse quoque vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. [b] Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectę A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones solidi A, ad solidum B, & solidi C, ad solidum D, æquales; quandoquidem triplicatę sunt proportionum æqualium, nempe rectę A, ad rectam B, & rectę C, ad rectam D. Quod est primum. Rursus ponatur secundo esse vt solidum A, ad solidum B, ita solidum C, ad solidum D. Dico esse quoque, vt recta A, ad rectam B, ita rectam C, ad rectam D. [c] Cum enim sit proportio solidi A, ad solidum B, triplicata proportionis rectæ A, ad rectam B; Item proportio solidi C, ad solidum D, triplicata proportionis rectę C, ad rectam D: erunt proportiones rectarum A, ad B, & C, ad D, æquales; quandoquidem earum proportiones triplicatę, nimirum solidi A, ad solidum B; & solidi C, ad solidum D, æquales ponuntur. Quod est secundum.

[b] 33. vnde.

[c] 33. vnde.

SCHOLIVM.

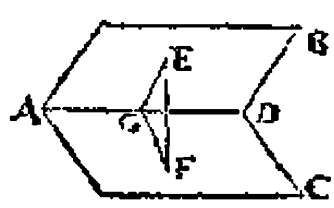
EODEM *modo, ſi fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda ſimilia ſimiliterque deſcripta ex eis, proportionalia, &c. Si enim media linea, eiuſque ſolidum ſumatur bis, habebuntur quatuor rectæ proportionales. Igitur & quatuor ſolida proportionalia, vt demonſtratum eſt. Cum igitur ſolidum ſecundæ lineæ æquale ſit ſolido tertiæ lineæ; & lineæ ſecundæ æqualis tertiæ lineæ; perſpicuum eſt, quod proponitur.*

TOTA vero hæc propoſitio conuenit etiam priſmatis, quorum duo plana aduerſa æqualia, ſint vel triangula, vel parallelogramma, vt Campanus ait. Nam additis priſmatis, quæ ſingula ſingulis ſint æqualia, exurgent parallelepipeda, [a] *quæ vt hic eſt demonſtratum, proportionalia erunt.* [a] *Cum igitur priſmata, eorum dimidia, eandem habeant cum ipſis proportionem; perſpicuum eſt, quod proponitur.*

[a] *15. quin.*

13. THEOR. 33. PROPOS. 38.

SI planum ad planum rectum fuerit; & ab aliquo puncto eorum, quæ in vno ſunt planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit: in communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis.



PLANVM n. AB, rectum ſit ad planum AC, ſitque eorum communis ſectio recta AD; Et ab E, puncto plani AB, ad planum AC, perpẽdicularis demittatur: quã dico cadere in communem ſectionẽ AD. Nam ſi fieri pôt, cadat extra ad punctum F, [b] & ab F, in plano AC, ducatur ad rectã AD, perpẽdicularis FG, connectaturq; recta EG,

[b] *12. primi*

FG, in plano AB. Quoniam igitur FG, perpendicularis eſt ad communem ſectionem AD; erit quoque perpendicularis ad planum AB, ex defin. 4. huius lib. atq; adeo & ad rectam GE, per 3. defin. huius lib. Eſt autem & EF, recta ad FG, per eandē 3. defin. Igitur in triangulo EFG, duo anguli EFG, EGF, recti ſunt. quod eſt abſurdum; [a] cum duobus rectis ſint minores. Perpendicularis ergo ex E, demiſſa ad planum AC, non extra communem ſectionem AD, cadet. ergo in ipſam cadat, neceſſe eſt. Quamobrem, ſi planum ad planum rectum fuerit, &c. Quod erat demonſtrandum. [a] 17. primi

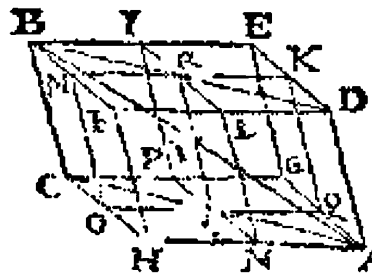
SCHOLIVM.

HÆC eſt demonſtratio Theonis. Nos tamen idem demonſtrabimus breuius, hoc modo. Si ex puncto E, dato in plano AB, demiſſa perpendicularis ad planum AC, non cadit in communem ſectionem AD, ſed in punctum F, extra ſectionē; [b] ducatur ex E, ad rectam AD, perpendicularis EG; quæ ex 4. defin. recta erit ad planum AC. Quare ex puncto E, extra planum AC, ductæ ſunt ad ipſum planum AC, duæ perpendiculares EF, FG. Quod fieri nequit, vt in ſcholio propoſ. 13. huius lib. demonſtrauimus. [b] 12. primi

THEOR. 34. PROPOS. 39. 40.

SI ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, planorum latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariam ſe mutuo ſecabunt.

SINT parallelepipedi AB, plana oppoſita AC, BD, quorum omnia latera bifariam ſecta ſint in punctis I, K, L, M, N, O, P, Q; per quę extēſa ſint duo plana IN, KO, quorum



quorum ſectio communis ſit recta RS: Ducatur item diameter AB Dico rectam RS,& diametrũ AB, ſe mutuo ſecare bifariam. Connexis enim rectis RB, RD, SA,SC; conſiderentur duo triangula AQS, COS. Quoniã igitur latera AQ, QS, trianguli AQS, æqualia ſunt lateribus CO, OS, trianguli COS; (Sunt enim AQ, CO, dimidia rectarum æqualium AG, CH; [a] & QS,OS,duabus æqualibus AN, HN, æquales, cum ſint parallelogramma AS,HS,) [b] & angulus AQS,æqualis alterno angulo COS: [c] Erunt & baſes AS, CS, æquales;& anguli ASQ,CSO, æquales. [d] Atqui anguli ASQ, ASO,æquales ſunt duobus rectis.Igitur & CSO, ASO, duobus ſunt rectis æquales: [e] Ac propterea AS, CS, vnã rectam lineam conſtituent. Eodem modo oſtendentur eſſe æquales BR, DR, & vnam ex eis componi lineam rectam.Rurſus quia vtraq; AD,BC,parallela eſt,& æqualis rectæ FH, ob parallelogramma AF, FC, [f] ipſæ quoq; inter ſe parallelæ erunt, & æquales. [g] Quare & rectæ AC,BD, earum extrema coniungentes, parallelæ ſunt & æquales;Ac proinde ipſarum dimidiæ AS,BR, æquales ſunt.Quia vero AC, BD, parallelæ ſunt; [h] erunt rectæ AB,RS,in eodem cum ipſis plano, ideoque ſe mutuo ſecabunt,in puncto uidelicet T. Cum autem duo anguli AST,ATS,trianguli AST,æquales ſint duobus angulis BRT,BTR, trianguli BRT; & latus AS, lateri BR: [k] Erunt reliqua latera TA, TS, reliquis lateribus TB, TR,æqualia; Ac propterea AB,RS, ſe mutuo ſecant bifariam in T.Si igitur ſolidi parallelepipedi eorum, quæ ex aduerſo, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 34. primi
[b] 29. primi
[c] 4. primi
[d] 13. primi
[e] 14. primi
[f] 9. vndec.
[g] 33. primi
7. vndec
[h] 29. & 15. primi.
[k] 26. primi

COROLLARIVM.

HINC efficitur, in omni parallelepipedo diametros omnes ſe mutuo bifariam ſecare in vno puncto. nimirum in puncto T, in quo bifariam diuidunt, vt hic demonſtratum eſt, rectam RS.

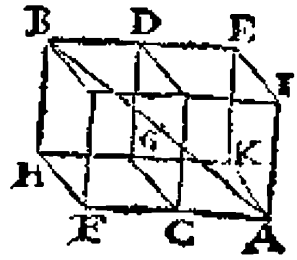
HIVIC

SCHOLIVM.

HVIC theoremati addi potest aliud non dissimile illi, quod ad propos. 34 primi lib. demonstrauimus, videlicet.

SI solidum parallelepipedum plano secetur per centrum: bifariam secabitur solidum ab ipso plano. Et si solidum parallelepipedum plano secetur bifariam: per centrum transibit ipsum planum.

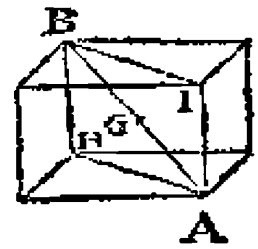
SECETVR parallelepipedum AB, plano CD, per centrum, hoc est, per punctum medium diametri AB, quod sit G. Dico parallelepipedum bifariam secari. Sit enim primo planum CD, oppositis planis AE, BF, parallelum. [a] *Et quia plana parallela BF, DC, EA, secant rectas quascunque proportionaliter; secatur autem BA, bifariam in G; secabuntur quoque latera aduersorum planorum AH, BI, atque adeo & bases AH, BI, bifariam.* [b] *Cum igitur sit vt basis KC, ad basim CH; ita solidum AD, ad solidum CB; erit parallelepipedum AB, sectum bifariam plano CD, per centrum G, ducto.*



[a] 17. vnde.

[b] 25. vnde.

TRANSEAT secundo planum secans AIBH, per diametros BI, AH, planorum oppositorum; quoniam & sic secatur parallelipipedum per centrum G, immo per totam diametrum AB; [c] *cum AB, in plano sit parallelarum AH, BI.* [d] *Demonstratum autem est antea, parallelepipedum secari plano per diametros oppositorum planorum ducto bifariam.*

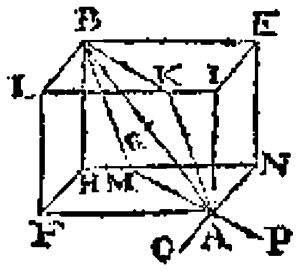


[c] 7. vndec.

[d] 28. vnde.

TERTIO planum secans AKBM, neque sit aduersis planis parallelum, neque per diametros oppositorum planorum ductum, sed tantum per angulos A, & B, planorum AH, BI. Quoniam igitur plana parallela AH, BI, secantur plano AKBM; [e] *erunt communes sectiones AM, BK,*

[e] 16 vnde.

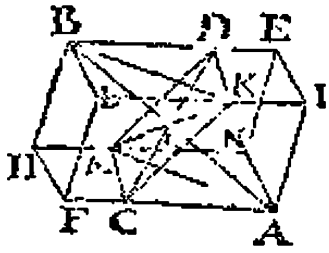


BK, *parallela. Similiter parallela erunt* AK, BM, *cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum* AL, BN, *facta a plano* AKBM. *Quare parallelogrammum eſt* AKBM; [a] *ideoq; tam recta* AK, BM, *quam recta* AM, BK, *inter ſe erunt æquales. Quia ergo latera* EK, BL, *trianguli* BKL, *æqualia ſunt lateribus* AM, AN, *trianguli* AMN; *& angulus* KBL, *angulo* MAN, *æqualis. Productis enim* NA, MA, *ad* O, P, *erunt* AO, AP, *rectis* BL, BK, *parallelis;* [b] *ac proinde æquales anguli erunt* OAP, LBK. [c] *Cum igitur* OAP, *æqualis ſit angulo* MAN; *æquales quoque erunt anguli* KBL, MAN.) [d] *Erunt baſes* KL, MN, *inter ſe, & anguli* BKL, BLK, *angulis* AMN, ANM, *æquales, & tres anguli tribus angulis æquale. Quare & ſimilia erunt trianguli* BKL, AMN, [e] *cum latera habeant circa æquales angulos proportionalia. Quoniam vero recta* KL, *rectæ* MN; *& anguli* EKL, *angulo* AMN; *& angulus* KBL, *angulo* MAN, *eſt æqualis, ut oſtendimus; erit & reliqua* IK, *reliquæ* HM; *& reliquus angulus* BKI, *reliquo* AMH; *& reliquus* KFE, *reliquo* MAF, *æqualis (Eſt enim tota* LI, *totæ* NH, *æqualis, & tam anguli* BKL, BKI, *quam anguli* AMN, AMH, *duobus rectis æquales; & totus angulus* LBE, *toti angulo* NAF, *æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum* LE, FN.) *Sunt autem & latera* BE, EI, *lateribus* AF, FH, *æqualia; & anguli* BEI, EIK, *angulis* AFH, FHM, *ob parallelogramma* LE, FN. *Igitur quadrilaterum* LKIE, *& æquilaterum, & æquiangulum eſt quadrilatero* AMHF, *ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula ſingulis conveniant, latera nimirum lateribus, & anguli angulis. Eodem modo æqualia erunt & ſimilia triangula* BHM, AIK; *& quadrilatera* AKLF, BMNE; *cum inter ſe ſint & æquilatera & æquiangula. Quapropter ſolidum contentum planis* AKLF, FHMA, AKBM, MHB, BKL, LBHF, *æquale erit ſolido contento planis* BMNE, EIKB, EMAK, KIA, AMN, NAIL, *per* 10. *defin. huius libri, cum his planis illa ſint ſimilia & æqualia, ut demonſtratum eſt. Parallelepipedum ergo* AB, *ſectum eſt plano* AKBM, *per centrum* G, *biſariam*.

[a] 34. primi
[b] 10. unde.
[c] 15. primi
[d] 4. primi
[e] 4. ſexti

PO-

POSTREMO planum ſecet CD, neque aduerſis planis parallelum ſit, neque per diametros planorum oppoſitorum, neque per vllos angulos eorum ductum, ſed tangat ſecetque plana oppoſita AH BI. Oſtendemus autem, vt prius, planum ſecans CD, eſſe parallelogrammum, & iam rectas CK, DM, quæ rectas CM, DK, eſſe æquales. Ducantur in parallelogrammo CD, diametri CD, KM; cõnectanturq; recta AM, BK, quæ parallela erunt, cum ſint communes ſectiones planorum parallelorum AH, BI, facta a plano per rectas AB, KM, ducto. Quoniam igitur AF, BE, parallelæ ipſi LI, ob parallelogramma AL, LE, [b] inter ſe ſunt parallelæ; [c] Erunt AB, CD, in eodem cum illis plano; ac propterea ſi mutuo ſecabunt in cẽtro G. In ſolo enim centro G, recta AB, per hypotheſim, ſecat planum CD, in quo exiſtit recta CD. Simili argumento, cũ AM, BK, ſint oſtenſa parallelæ; erunt AB, MK, in eodem cum illis plano, ſeque mutuo ſecabunt in centro G. Quare diametri CD, KM, per centrum G, tranſibunt, ibique ſe mutuo ſecabunt; atque adeo biſariam, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 1. oſtẽdimus. Quia ergo latera BG, GD, trianguli BGD, æqualia ſunt lateribus AG, GC, trianguli AGC, [d] & angulus BGD, æqualis angulo AGC; [e] Erit & baſis BD, æqualis baſi AC. Eodem argumento æquales erunt rectæ BK, AM. Quocirca cum tria latera BD, DK, KB, trianguli BDK, æqualia ſint tribus lateribus AC, CM, MA, trianguli ACM; Erunt, per ea, quæ ad propoſ. 8. lib. 1. docuimus, anguli illius angulis huius æquales: Eſt autem totus DBI, toti CAN, æqualis, ob ſimilitudinem parallelogrammorum BI, AH. Igitur & reliquus KBL, reliquo MAN, erit æqualis. Quoniã igitur latera BK, BL, trianguli BKL, æqualia ſunt lateribus AM, AN, trianguli AMN; & angulus KBL, angulo MAN, æqualis; [f] Erit & baſis KL, baſi MN; & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si igitur æqualibus angulis BKL, AMN, æquales addantur anguli BKD, AMC, fient toti anguli DKL, CMN, æquales. Quare quadrilaterum BDKL, quadrilatero ACMN, & æquilaterum eſt, & æquiangulum; Ac propterea æquale & ſimile, cum ſingula cuique-



[a] 16. vnde

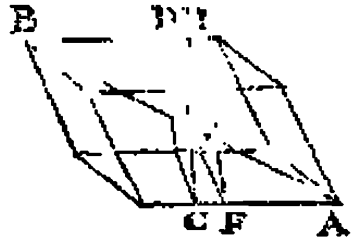
[b] 9. vndec.
[c] 7. vndec.

[d] 15. primi
[e] 4. primi

[f] 34. primi

conueniant singulis, nempe latera lateribus, & anguli angulis. Rursus quia tota LI, toti NH, est æqualis, erit & reliqua IK, reliquæ HM, æqualis. Eademque ratione reliqua DE, reliquæ CF, æqualis erit; Ac propterea quadrilaterũ DLIK, æquilaterum est quadrilatero CFHM. Sed & æquiangulum; cum anguli DEI, LIK, æquales sint angulis CFH, FHM, propter similitudinem parallelogrammorum EI, AH, & anguli EDK, IKD, angulis FCM, HMC, æquales, quod æquales ostensi sint eorum anguli alterni LKD, KDK, angulis NMC, ACM. Igitur quadrilatera DLIK, CFHM, æqualia sunt & similia. Non aliter ostendemus, æqualia esse & similia quadrilatera ACKJ, BDMH; item DENM, CFLK, tum & latera lateribus, & anguli angulis conuenire, vt perspicuum est. Quamobrem solidum contentum planis CKLF, FHMC, CKDM, MHBD, DKLB, BHFL, per 10. d. fin. huius lib. æquale est solido contento planis DMNE, LIKD, DMCK, KIAC, CMNA, AIEN; cum hisce illa sint demonstrata & æqualia & similia. Parallelepipedum igitur AB, sectum est per centrum G, plano CD, bifariam.

SED secetur iam parallelepipedum AB, plano CD, bifariam. Dico planum CD, per centrum parallelepipedi transire, hoc est, punctum G, in quo planum CD, secat diametrum AB, diuidere diametrum AB, bifariam. Si enim diameter AB, in G, non diuiditur bifariam, diuidatur bifariam in E, vt sit E, centrum parallelepipedi. Si igitur per E, ducatur planum FH, plano CD, parallelum, secabitur parallelepipedum AB, bifariã plano FH, vt demonstratum est. Ponitur autem & bifariam secari plano CD; Igitur solida CB, FB, cum sint dimidia parallelepipedi AB, inter se æqualia sunt, pars & totum. Quod est absurdũ.



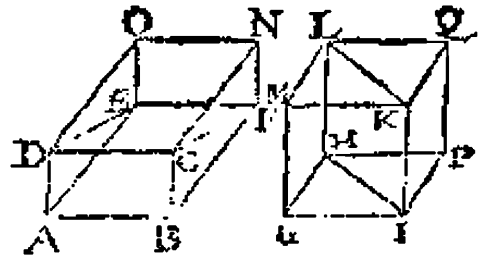
Non ergo aliud punctum, præter G, diuidet diametrum AB, bifariam; Ac proinde G, centrum erit parallelepipedi.

Quod demonstrandum erat.

THEOR. 35. PROPOS. 40. 41.

SI fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, quorum hoc quidem habeat baſin, parallelogrammum; illud vero, triãgulum; duplum autem fuerit parallelogrammum trianguli: Aequalia erunt ipſa priſmata.

SINT duo priſmata æqualis altitudinis ABCDEF, GHIKLM, quorum illud baſin habeat parallelogrammum ABCD, hoc vero, triangulum GHI; ſitque parallelogrammum AC, trianguli GHI duplum. Dico hæc priſmata eſſe æqualia. Perficiantur enim parallelepipeda AN. GQ; Quod quidem fiet, ſi plana triangulorum extendantur, perficianturq; parallelogramma BN, AO; GP, MQ. Si enim connectantur rectæ NO, PQ, conſtituta erunt duo parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis cum priſmatis. Nam plana horum ſolidorum oppoſita eſſe parallela, facile colligetur ex propoſ. 15. huius lib.



[a] Quoniam igitur parallelogrammum GP, duplum eſt trianguli GHI; Ponitur autem & parallelogrammum AC, eiuſdem trianguli GHI, duplum: æqualia erunt parallelogramma AC, GP. [b] Quare parallelepipeda AN, GQ, eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes AC, GP, inter ſe ſunt æqualia; Atque propterea eorum dimidia, ſcilicet priſmata ABCDEF, GHIKLM, (nã parallelepipeda AN, GQ, per diametros CF, DE, HL, IK, planorum aduerſorum ſecantur bifariam, in bina ſcilicet priſmata) æqualia quoque ſunt inter ſe. Itaque ſi fuerint duo priſmata æqualis altitudinis, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 34. primi

[b] 31. vnde.

[c] 3 2. vnde.

PER

SCHOLIVM.

PERSPICVVM autem eſt ex demonſtratione, propoſitionem hanc intelligi de illis duntaxat priſmatis, quæ duo triangula habent oppoſita; cum imperet parallelepipeda complere; quod fieri non poſſet, ſi priſma ſuper parallelogrammum ABCD, conſtitutum non haberet duo triangula, nempe ADE, BCF. Eſſet enim iam parallelepipedum completum.

FINIS ELEMENTI VNDECIMI.

EVCLIDIS ELEMENTVM DVODECIMVM.

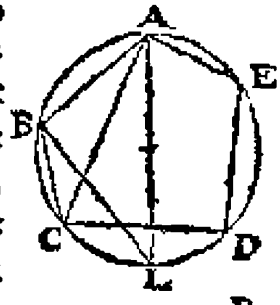
Et Solidorum ſecundum.

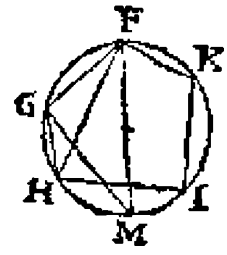
THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

QVAE in circulis polygona ſimilia; inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata.

SINT duo polygona ſimilia ABCDE, FGHIK, deſcripta in circulis, quorũ diametri AL, FM. Dico ita eſſe polygonum ABCDE, ad polygonum FGHIK, vt quadratum diametri AL, ad quadratum diametri FM. Subtendantur enim angulis æqualibus ABC, FGH, rectæ AC, FH, & cõnectantur rectæ BL, GM. Quoniam igitur ob ſimilitudinem polygonorum eſt vt AB, ad BC, ita FG, ad GH; [a] erunt triangula ABC, FGH, æquiangula, cum circa angulos æquales ABC, FGH, habeant latera proportionalia: [b] Eſt autẽ angulus ALB, angulo ACB; & angulus FMG, angulo FHG, æqua

[a] 6. ſexti





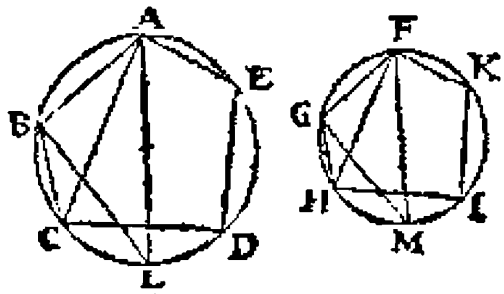
[b] 21. tertij.

lis. Igitur & anguli ALB, FMG, æquales erunt. Cũ ergo
[a] 31. tertij & anguli ABL, FGM, æquales sint, [a] nempe recti in semi
[b] 32. primi circulis existentes; [b] erunt & reliqui BAL, GFM, æqua-
[c] 4. sexti. les. [c] Quare erit vt AL, ad AB, ita FM, ad FG; & permu-
[d] 22. sexti tando, vt AL, ad FM, ita AB, ad FG. [d] Igitur est vt qua-
dratum ex AL, ad quadratum ex FM, ita polygonum ABCDE, super AB, ad polygonum FGHIK, super FG; cum tam quadrata, quam polygona sint figuræ similes, similiterque descriptæ. Quæ itaque in circulis polygona similia; inter se sunt, vt a diametris quadrata. Quod erat demonstrandum.

2. THEOR. 2. PROPOS. 2

CIRCVLI inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata.

SINT duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico esse, vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulum ABCD, ad circulũ EFGH. Si enim res non ita se habet; Sit vt quadratum diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad aliquam magnitudinem, nempe ad I, quæ vel minor erit, vel maior circulo EFGK. Si enim esset æqualis, [e] haberet circulus ABCD, ad circulum EFGH, & ad I, eandem proportionem; ac propterea esset circulus ABCD, ad circulum EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, quod non conceditur. Sit ergo primum I, minor, quam circulus EFGH, magnitudine scilicet K, ita vt circulus EFGH, æqualis sit magnitudinibus I, & K, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH; quod quia dimidium est quadrati circa eundem circulum descripti, vt ad propos. 9. lib. 4. ostendimus, maius erit, quam dimidium circuli EFGH. Secentur bifariam peripheriæ EF, FG, GH, HE, in punctis L, M, N, O, adiunganturque rectę LE, LF, MF, MG, NG, NH, OH, OE. Ducatur per



[e] 7. quinti.

L, recta

L. recta TV, tangens circulum in L, quæ parallela erit ipſi EF vt ad propoſ. 17. lib. 3. oſtendimus, occurratq; rectis HE, GF, productis in T, & V. [a] Quia ergo triangulum ELF, dimidium eſt parallelogrammi TEFV; maius erit triangulum ELF, quam dimidium ſegmenti circuli ELF. Eadem ratione erunt reliqua triangula maiora, quam dimidia ſegmentorum, in quibus ſunt. Omnia igitur triangula ſimul maiora ſunt, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ EL, LF, &c. ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodem modo triangula, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidium omnium ſegmentorum ſimul, in quibus ſunt; & ſic deinceps. Quoniam vero, ſi a circulo EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe quadratum EFG*il*; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nempe triangula *E L* F, FMG, &c. atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [b] relinquitur tandem minor magnitudo, quam K, exceſſus inter circulum EFGH, & magnitudinem I. Sint iam circuli ſegmenta relicta EL, LF, FM, &c. ſimul ſumpta minora, quam magnitudo K. Cum igitur circulus EFG*H*, æqualis ponatur magnitudinibus I, & K, ſimul; ſi ex circulo detrahantur dicta ſegmenta, & ex I, & *K*, ipſa magnitudo K, quæ maior eſt præfatis circuli ſegmentis; erit reliquum polygonum ELFMGNHO, maius reliqua magnitudine I. Inſcribatur in circulo ABCD, polygonum APBQCRDS, ſimile polygono ELFMGNHO. Quod quidem facile fiet, ſi ſemicirculi ABC, ADC, bifariam ſecentur in B, & D; & rurſus circũferentiæ *AB*, BC, CD, DA, bifariã in P, Q, R, S; & ſic deinceps, donec in tot partes æquales diuiſa ſit circumferentia ABCD, in quot diſtributa eſt circumferentia EFGH. Nam iunctis rectis AP, PB, BQ, &c. erit figura inſcripta ſimilis figuræ ELFMGNHO, vt patet. [c] Quoniam igitur eſt polygonum APBQCRDS, ad polygonum ELFMGNHO, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EH, hoc eſt, per hypotheſim, vt circulus ABCD, ad I: Eſt autem polygonũ APBQCRDS, minus circulo

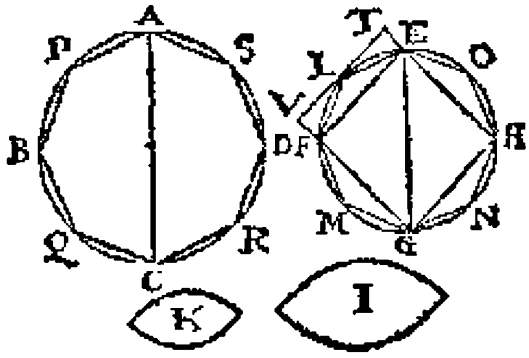
[a] 41. primi

[b] 1. decimi

[c] 2. duodec.

ABCD. Igitur & polygonum ELFMGNHO, minus erit quam I. Oſtenſum autem eſt & maius. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo I, circulo EFGH.

QVAMQVAM autem in figura confertur maior circulus cum minore; eodem tamen modo demõſtrabimus, minorem circulum EFGH, non poſſe ad magnitudinem, quæ minor ſit, quàm maior circulus ABCD, habere eandem proportionẽ, quã habet quadratum diametri minoris EG, ad quadratum maioris diametri AC; Ita vt generaliter & uniuerſe demonſtratum ſit, nunquam quadratũ diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere poſſe proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem poſteriore circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor.



SIT deinde magnitudo I, maior circulo EFGH. Cũ ergo ponatur circulus ABCD, ad I, eſſe vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG; erit & conuertendo I, ad circulum ABCD, vt quadratum diametri EG, ad quadratum diametri AC. Ponatur vt I, ad circulum ABCD, ita circulus EFGH, ad magnitudinẽ aliquam, nempe ad K. Et quia I, maior ponitur circulo EFGH, maior quoque erit circulus ABCD, magnitudine K. Quare erit vt quadratum diametri EG, ad quadratũ diametri AC, ita circulus EFGH, ad magnitudinem K, quæ minor eſt circulo ABCD. Quod eſt abſurdũ. Oſtenſum enim eſt iam in priori parte generaliter, non poſſe eſſe vt quadratum diametri ad quadratum diametri, ita circulum ad magnitudinem circulo minorem: ſiue prior circulus maior ſit poſteriore, ſiue minor. Quamuis autẽ circulus ABCD, maior eſt, & EFGH, minor; eadem tamen ratione oſtendemus, quadratum diametri circuli EFGH, ad quadratũ diametri circuli, ABCD, nõ poſſe habere

a 14. quin.

b 14. quinti

habere eandem proportionem, quam habet circulus EFGH, ad magnitudinem circulo ABCD, maiorem: quia eodem modo probabimus, (si illud concedatur) quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG, eandem habere proportionem, quam habet circulus ABCD, ad magnitudinem circulo EFGH, minorem. quod falsum esse iam in priori parte generaliter demonstratum est: Ita vt generaliter & vniuersè quoque demonstratum sit, nunquam quadratum diametri alicuius circuli ad quadratum diametri alterius circuli eandem habere posse proportionem, quam habet prior circulus ad magnitudinem posteriore circulo maiorem: siue prior circulus maior sit posteriore, siue minor. Non ergo maior est magnitudo I, circulo EFGH: Sed neque minor est ostensa. æqualis igitur est. Quare cum ponatur, vt quadratũ diametri AC, ad quadratũ diametri EG, ita circulus ABCD, ad I; sit autẽ vt circulus ABCD, ad I, ita idẽ circulus ABCD, ad circulum EFGH, qui æqualis est magnitudini I; Erit quoque vt quadratũ diametri AC, ad quadratum diametri EG, ita circulus ABCD, ad circulum EFGH, siue circulus ABCD, circulo EFGH, maior sit, siue minor. Circuli igitur inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. Quod erat ostendendum. 17. quinti

COROLLARIVM.

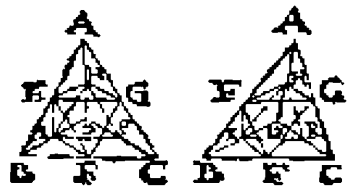
HINC fit, ita esse circulum ad circulum, vt polygonum in illo descriptum ad polygonum simile in hoc descriptũ. Quoniam tam circulus ad circulum, quam polygonum ad polygonum est, vt quadratum diametri ad quadratũ diametri, veluti demonstratum est.

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

OMNIS pyramis triangularem habens basim, diuiditur in duas pyramides æquales, & similes inter se, trian-

gulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis.

SIT pyramis, cuius baſis triangulum ABC, vertex D. Secentur omnia eius latera bifariã in E, F, G, H, I, K, connectanturque rectæ EF, FG, GE, HI, IK, KH, HE, EI, IF. Diuiſa itaque eſt pyramis in duas pyramides AEGH, HIKD, quarum baſes triangula AEG, HIK, & vertices H, D; nec non in duo ſolida EBFGHI, CFGHIK, quæ mox oſtendemus eſſe priſmata, quorum illius baſis eſt parallelogrammũ EBFG, & triangula oppoſita EHG, BIF; huius uero baſis eſt triangulum CFG, cui opponitur triangulum KIH, habentque hæc priſmata terminum communem, parallelogrammum FGHI; & cum duabus illis pyramidibus componunt totam pyramidem, vt conſtat, ſi recte concipiatur pyramidis vertex D, in ſublimi, necnon eius triangula circumiacentia. Dico igitur duas illas pyramides eſſe æquales, & ſimiles inter ſe, & ſimiles toti; Item duo hæc priſmata eſſe inter ſe æqualia, & maiora dimidio totius pyramidis. Cum enim latera AD, BD, trianguli ADB, ſecta ſint bifariam, ac proinde proportionaliter; [a] erunt HI, AB, parallelæ. Eadem ratione parallelæ erunt IK, BC; & HK, AC; & EG, BC; & EF, AC; & FG, AB; & EH, BD; & EI, AD; & IF, DC; & HG, DC. [b] Sunt autẽ & rectæ FG, HI, cum parallelæ ſint ipſi AB, inter ſe parallelæ; Atque eadem ratione parallelæ ſunt GH, FI, cũ ſint parallelæ ipſi DC. Quare parallelogramma ſunt AEIH, HEBI, IDHE, EBFG, GHKC, CKIF, FGHI. Quoniam vero rectæ HE, HG, rectis DB, DC, ſunt parallelæ; [c] erũt anguli EHG, BDC, æquales: Ac eadẽ rõne æquales erũt anguli HEG, DBC; & HGE, DCB. [d] Proportionalia igitur ſunt latera trianguli HEG, lateribus trianguli DBC, circa æquales angulos; ac proinde ſimile eſt trian-



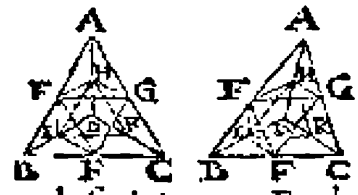
[a] 2. ſexti.
[b] 9. vndec.
[c] 10. vndec.
[d] 4 ſexti.

triangulum HEG, triangulo DBC. Sunt autem & triangula HAE, HAG, AEG, triangulis DAB, DAC, ABC, similia per coroll. propo. 4. lib. 6. Pyramis ergo AEGH. pyramidi ABCD, similis est, per defin. 9. huius lib. Rursus quia rectæ HI, HK, rectis AB, AC, sunt parallelæ; [a] erunt anguli IHK, BAC, æquales. Eadé ratione æquales erunt anguli HIK, ABC; & HKI; ACB. [b] Quare latera trianguli HIK, lateribus triãguli ABC, circa æquales angulos sunt proportionalia; ac propterea triangulum HIK, triangulo ABC, simile est: Sunt autem & triãgula DHI, DIK, DKH. triangulis DAB, DBC, DCA, similia, per idem coroll. propos. 4. lib. 6. Pyramis ergo HIKD, similis est quoque eidem pyramidi ABCD, per defin. 9. huius lib. Quoniam autẽ triangula AHE, HDI, similia sunt triangulo ADB, vt ostensum est ex coroll. propos. 4. lib. 6. [c] ipsa quoque inter se similia erunt. Cum igitur sint super rectas æquales AH, HD, constituta; ipsa erunt æqualia, per lemma propos. 12. lib. 6. Simili argumento æqualia erunt & similia triangula AHG, HDK, cum similia sint ostensa triangulo ADC, & constituta super æquales rectas AH, HD. Pari ratione æqualia, & similia erunt triangula AEG, IHK, cũ similia sint ostensa triangulo ABC, & super rectas posita AF, HI, [d] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum AEIH. Non secus æqualia erunt & similia triangula EHG, IDK, cum sint ostensa similia triangulo BDC, & habeant rectas HE, DI, [e] quæ æquales sunt, ob parallelogrammum HEID. Pyramides igitur AEGH, HIKD, æquales sunt & similes, per 10. defin. huius lib. quandoquidem omnia triangula vnius æqualia sunt & similia omnibus triangulis alterius, vt demonstratum est.

[a] 10. vnde.
[b] 4. sexti.
[c] 21. sexti.
[d] 34. primi.
[e] 34. primi

RVRSVS, [f] quia rectæ EH, HG, GE, æquales sunt, & parallelæ rectis BI, IF, FB, ob parallelogramma EHIB, FGHI, BFGE; erunt triangula EHG, BIF, æquiangula inter se, & æqualia, per coroll. propos. 8. lib. 1. Ac propterea & similia: [g] Sunt autem & parallelæ; cum EH, HG, per quas ducitur planum EHG, parallelæ sint rectis BI, IF, per quas planum BIF, ducitur. Igitur solidum BIFGHE, contentũ duobus triãgulis EHG, BIF,

[f] 34. primi.
[g] 15. vnde.



ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; & tribus parallelogrammis EGFB, BEHI, IFGH, priſma eſt, ex definitione. Eodem modo priſma oſtendetur ſolidum CFGHIK. [a] Cum enim rectæ FC, CG, GF, æquales ſint. & parallelæ rectis IK, KH, HI, ob parallelogrammа CFIK, CGHK, FGHI; erunt triangula CFG, HIK, æqualia, & æquiangula inter ſe, ac propterea ſimilia: [b] Sunt autem & parallela, quod rectę CF, CG, per quas ducitur planum CFG, parallelæ ſint rectis KI, KH, per quas planum KIH, ducitur. Igitur ſolidum CFGHIK, contentum duobus triangulis CFG, KIH, ex aduerſo æqualibus & ſimilibus, & parallelis; atque tribus parallelogrammis CFIK, KHGC, IFGH, priſma eſt. Quoniam vero priſmata EBFGHI, CFGHIK, ſunt eiuſdem altitudinis, nempe inter plana parallela BCGE, HIK; & parallelogrammum EBFG, baſis illius, duplum eſt trianguli CFG, baſis huius, per ſcholium propoſ. 41. lib. 1. [c] Ipſa inter ſe æqualia erunt.

[a] 34. primi

[b] 15. unde.

[c] 40. unde.

DENIQVE quia priſma EBFGHI, maius eſt pyramide EBFI, totum parte; Eſt autem pyramis EBFI, æqualis & ſimilis pyramidi AEGH, necnõ pyramidi HIKD, vt perſpicuum eſt ex æqualitate & ſimilitudine triangulorum: Maiora erunt priſmata EBFGHI, CFGHIK, pyramidibus AEGH, HIKD. Ac proinde illa quidem dimidium pyramidis ABCD, excedent, hæ vero a dimidio eiuſdem deficient. Quando enim totum in duas partes inæquales ſecatur, maior dimidium eius ſuperat, minor vero a dimidio deficit. Omnis igitur pyramis triangularem habens baſin, &c. Quod erat oſtendendum.

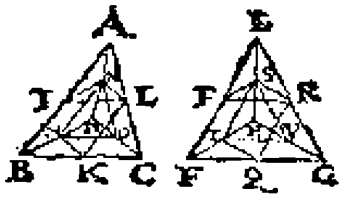
4. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI fuerint duæ pyramides eiuſdem altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarum vtraq; diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles to

ti; &

ti;& in duo priſmata æqualia;Ac eodem modo diuiſa ſit vtraq; pyramidum, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idque ſemper fiat; erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim,ita et omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia.

SINT duæ pyramides ABCD,EFGH,eiuſdem altitudinis, quarum latera biſariam diuidantur in punctis I, K,L, M, N,O;P,Q,R,S,T, V,connectanturque rectæ IL, LK, KN,NO, OM, MN, LM, MI; PR,RQ,QT, TV, VS, ST, RS, SP, ita vt pyramis vtraque ſecta ſit in binas pyramides æquales inter ſe,& ſimiles toti, nimirũ in AILM, MNOD; EPRS,STVH; & in bina priſmata æqualia IBKLMN, CKLMNO, PFQRST; GQRSTV; vt vult propoſitio præcedens: eodemque modo intelligãtur eſſe diuiſæ pyramides factæ AILM, MNOD; EPRS,STVH;& ſic deinceps. Di



co ita eſſe omnia priſmata facta in pyramide ABCD,ad omnia priſmata genetata in pyramide EFGH, illis multitudine æqualia,vt eſt baſis ABC, ad baſin EFG. Cum enim ſit vt BG,ad CK,ita FG,ad GQ, eo quod vtraq; linea diuiſa eſt biſariam; ſint autem triangula ABC, LKC, ſimilia ſimiliterque poſita; Item triangula EFG, RQG, ex coroll.propoſ. 4.lib. 6. [a] Erit quoque vt triangulum ABC,ad triangulum LKC, ita triangulũ EFG, ad triangulum RQG. Et permutãdo,vt ABC, ad EFG, ita LKC,ad RQG. Vt autem LKC,ad RQG,ita eſt priſma CKLMNO,ad priſma GQRSTV, vt mox oſtendemus,atque adeo ita priſma IBKLMN,ad priſma PFQRST, cum hæc illis ſint æqualia:Et vt vnum priſma, videlicet

[a] 22.ſexti.

delicet IBKLMN, ad vnum prisma PFQRST.[a] ita sunt duo prismata IBKLMN, CKLMNO, ad duo prismata PFQRST, GQRSTV. Igitur erũt quoq;, vt basis ABC, ad basin EFG, ita duo prismata in pyramide ABCD, ad duo prismata in pyramide EFGH. Simili argumento ostendemus, ita esse bina prismata in pyramidibus AILM, MNOD, factis in pyramide ABCD, ad bina prismata in pyramidibus EPRS, STVH, factis in pyramide EFGH, vt sunt bases AIL, MNO, illarum pyramidum ad bases EPR, STV, harum pyramidum; & sic deinceps eadem semper facta diuisione. Sed vt illæ bases ad has, ita est LKC, basis quæ illis est æqualis & similis, ad basin RQS, quæ his est æqualis, & similis, vt in præcedẽti est demonstratum, hoc est, ita est basis ABC, ad basin EFG. Igitur erũt quoq;, vt basis ABC, ad basin EFG, ita prismata cuiuslibet pyramidis factæ in pyramide ABCD ad prismata cuiuslibet pyramidis factę in pyramide LFGH: Ac propterea erunt quoque, vt prismata pyramidis ABCD, ad prismata pyramidis EFGH, ita prismata tam pyramidis AILM, ad prismata pyramidis EPRS, quam prismata pyramidis MNOD, ad prismata pyramidis STVH; & ita deinceps. Quare cũ sint, vt duo prismata pyramidis ABCD, ad duo prismata pyramidis EFGH, [b] ita omnia prismata in pyramidibus ABCD, AILM, MNOD, &c. simul ad omnia prismata in pyramidibus EFGH, EPRS, STVH, &c. simul, si hæc illis multitudine sint æqualia; Erunt quoque, vt basis ABC, ad basin EFG, ita omnia prismata in pyramide ABCD, ad omnia prismata in pyramide EFGH. Quocirca si fuerint duæ pyramides eiusdem altitudinis, triangulares habentes bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 12. quin.

[b] 12. quin.

LEMMA.

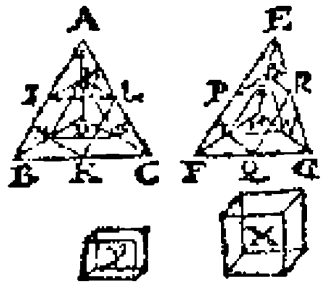
QVOD autem sit LKC, ad RQG, ita prisma CKLMNO, ad prisma GQRSTV, ita ostẽdemus. Intelligan

telligantur ex verticibus D, H, ad baſis ABC, EFG demiſſæ perpendiculares, quæ erunt altitudines æquales pyramidum ABCD, EFGH. Quoniam igitur plana parallela AEC, MNO, ſecant duas rectas, nempe DC, & perpendicularem ex D, demiſſam proportionaliter; ſecatur autem DC, bifariam in O; ſecabitur quoque perpendicularis ex D, demiſſa bifariam in puncto, cui planum MNO, occurrit. Eadem ratione perpendicularis ex H, demiſſa bifariam ſecabitur a plano STV. Quare cum totæ perpendiculares ponantur æquales, erunt & dimidiæ, nempe priſmatum altitudines, æquales; Ac proinde priſmata CKLMNO, GQRSTV, cum habeant altitudines æquales, inter ſe erunt, vt baſes LKC, RQG, per ea, quæ ad propoſ. 34. lib. 11. demonſtrauimus. [a] 17. vnde.

THEOR. 5. PROPOS. 5. 5.

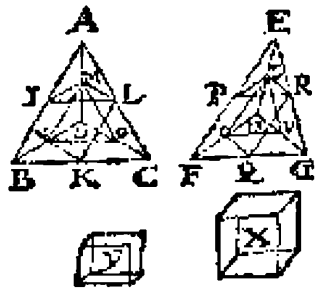
SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides eiuſdem altitudinis ABCD, EFGH, quarum baſes triangula ABC, EFG. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin Si enim nõ ita ſit, ponatur vt baſis A B C, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; quod vel minus erit, vel maius pyramide EFGH. Sit primo minus, magnitudine Y. Diuidatur pyramis EFGH, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, iuxta propoſ. 5. huius lib. Rurſus eodẽ modõ factæ pyramides in pyramide EFGH, in binas pyramides æquales, & in bina priſmata æqualia,



æqualia, & ſic deinceps. Quoniam igitur, ſi a pyramide EFGH, auferatur plus quam dimidium, nempe duo priſmata PFQRST, GQRSTV, quæ maiora ſunt dimidio pyramidis EFGH: Item a reliquis pyramidibus EPRS, STVH, plus quam dimidium, earum ſcilicet priſmata, & ſic deinceps; b relinquetur tãdem minor magnitudo quam Y, exceſſus pyramidis EFGH, ſupra ſolidum X. Sit ergo iam relicta magnitudo minor. Cum autem pyramis EFGH, æqualis ponatur ſolidis X, Y; erunt reliqua priſmata in pyramide EFGH, maiora ſolido X. Diuidatur pyramis ABCD, in duas pyramides æquales, & duo priſmata æqualia, & eodem modo factæ pyramides AILM, MNOD, in binas pyramides æquales, & bina priſmata æqualia; Atque hoc toties fiat, quoties id factum fuit in pyramide EFGH. c Quoniam igitur ſunt omnia priſmata in pyramide ABCD, ad omnia priſmata numero æqualia in pyramide EFGH, vt baſis ABC, ad baſin EFG, hoc eſt, vt pyramis ABCD, ad ſolidum X: Sunt autem omnia priſmata in pyramide ABCD, minora, quam tota pyramis ABCD; d erunt quoque omnia priſmata in pyramide EFGH, minora quam ſolidũ X. Oſtenſa vero ſunt & maiora. Quod eſt abſurdum. Non ergo minus eſt ſolidum X, pyramide EFGH.

a 3. duode.



b 5. decī.

c 4. duode.

d 14. quin.

SIT deinde ſolidum X, pyramide EFGH, maius. Quoniam igitur ponitur pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt baſis ABC, ad baſin EFG; Erit conuertendo ſolidum X, ad pyramidem ABCD, vt baſis EFG, ad baſin ABC. Ponatur, vt ſolidum X, ad pyramidem ABCD, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y. Et quia ſolidum X, maius ponit pyramide EFGH; e erit & pyramis ABCD, maior ſolido Y. Quare erit, vt baſis EFG, ad baſin ABC, ita pyramis EFGH, ad ſolidum Y, quod minus eſt pyramide ABCD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe, vt eſt baſis ad baſin, ita pyramidem ad ſolidum pyramide minus. Non ergo maius eſt ſolidum

e 14. quin.

dum X, pyramide EFGH; ſed neque minus eſt oſtenſum. Igitur æquale eſt. Quare cum ponatur vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad ſolidum X; [a] Sit autẽ pyramis ABCD, ad ſolidum X, vt ad pyramidẽ EFGH, ſolido X, æqualem: Erit quoque vt baſis ABC, ad baſin EFG, ita pyramis ABCD, ad pyramidem EFGH. Sub eadem ergo altitudine exiſtentes pyramides, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 7. quinti.

SCHOLIVM.

CONVERSO modo, ſi pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. Si enim vnius altitudo maior credatur, abſcindatur ab ea æqualis minori, & a puncto abſciſionis ad omnes angulos baſis ducantur rectæ lineæ; Eritq; vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidem modo conſtitutam: Sed ſic quoque erat ad totam pyramidem. [b] Pyramis ergo conſtituta æqualis erit toti pyramidi, pars toti. Quod eſt abſurdum.

[b] 9. quinti.

COROLLARIVM.

HINC ſit, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares conſtitutas, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandẽ proportionem habent cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

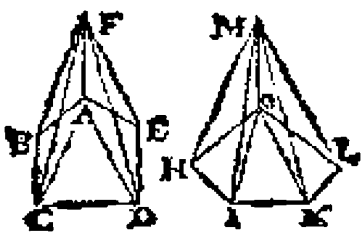
ITEM ſequitur, e conuerſo pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, eandem habere altitudinem. Et pyramides triangulares æquales eandemque habentes altitudinem, baſes habere æquales, ſi non eandem habuerint. Quæ quidem duo ex prima parte corollarij eodem argumento oſtendemus, quo in conuerſo propoſ. 30. & 31. lib. 11. demonſtrando vſi ſumus: ſi tam in altitudine, quam in baſi abſciſſa conſtituatur alia pyramis, &c.

THE-

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SVB eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes.

SINT pyramides ABCDEF, GHIKLM, quarũ baſes polygonæ ABCDE, GHIKL, latera multitudine æqualia habentes. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſolutis enim baſibus in triangula numero æqualia; erit quælibet pyramis in totidem pyramides triãgulares diuiſa. [a] Quia vero eſt, vt baſis ABC, ad baſin ACD, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ACDF; erit componendo vt baſis ABCD, ad baſin ACD, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ACDF: Sed rurſus eſt vt baſis ACD, ad baſin ADE, ita pyramis ACDF, ad pyramidem ADEF. Igitur ex æquo vt baſis ABCD, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDF, ad pyramidem ADEF. Componendo ergo erit vt baſis ABCDE, ad baſin ADE, ita pyramis ABCDFF, ad pyramidem ADEF. Simili argumento erit vt baſis GHIKL, ad baſin GKL, ita pyramis GHIKLM, ad pyramidem GKLM; & conuertendo vt baſis GKL, ad baſin GHIKL, ita pyramis GKLM, ad pyramidẽ GHIKLM. [c] Rurſus quoniam eſt, vt baſis ADE, ad baſin GKL, ita pyramis ADEF, ad pyramidem GKLM; Erunt quatuor baſes ABCDE, ADE, GKL, GHIKL, in eiſdem proportionibus cũ quatuor pyramidibus ABCDEF, ADEF, GKLM, GHIKLM, vt in hac formula vides, manifeſtumque eſt ex demonſtratione. Quare ex æquo



ABCDE	ABCDEF
ADE.	ADEF.
GKL.	GKLM.
GHIKL	GHIKLM

[a] 5. duode.

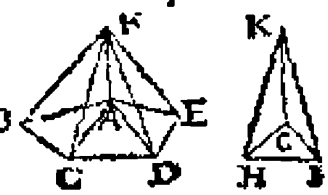
[b] 5. duode.

[c] 5. duode.

æquo, erit vt baſis ad ABCDE, baſin GHIKL, ita pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM: ac propterea, ſub eadem altitudine exiſtẽtes pyramides, &c. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS huius propoſitionis demonſtratio de illis duntaxat pyramidibus eiuſdem altitudinis loquatur, ſecundum interpretes, quorum baſes polygona latera habent multitudine æqualia; facile tamen idem etiam demonſtrabimus de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vnius baſis plura continet latera, quam baſis alterius. Sint enim primũ duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIK, quarum illius baſis ſit polygona, nempe pentagona, huius vero triangularis. Dico eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim pentagono in triangula, erit & pyramis in pyramides numero æquales diuiſa. [a] *Quoniam vero eſt, vt baſis ABC, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem; & eodem modo, vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſim GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem:* [b] *Erit vt baſis ABCD, primæ quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIK, quartam quantitatem, vt modo eſt oſtenſum:* [c] *& vt baſis ADE, quinta quantitas, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas ad pyramidem GHIK, quartam quantitatẽ;* [d] *Erit etiã baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHI, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIK,*



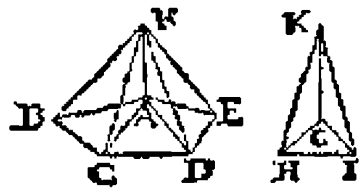
[a] 5. duodec.

[b] 24. quin.

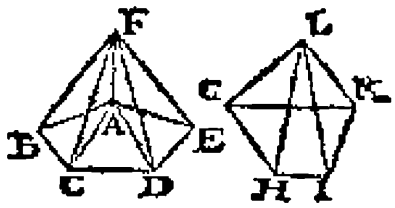
[c] 5. duodec.

[d] 24. quin.

GHIK, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Eodem modo ſemper procedendum eſt, ſi plura fuerint triangula in baſi polygona. Cum autem, vt demonſtratum eſt, ſit vt baſis polygona ABCDE, ad baſin triangularem GHI, ita pyramis ARCDEF, ad pyramidem GHIK; Erit quoque conuertendo, vt baſis GHI, ad baſin ABCDE, ita pyramis GHIK, ad pyramidem ABCDEF. Quã ob rem duæ pyramides qualibet, quarũ vnius baſis eſt polygona, alterius triangularis, ſuis baſibus ſunt proportionales, vndecunque incipias. Quamuis enim demonſtratio incipiat a polygono, eiusque pyramide, vt ex demonſtratione conſtat, tamen conuertendo licebit initium quoque ſumere a triangulo, eiuſque pyramide, vt dictum eſt.



SED iam ſint duæ pyramides eiuſdem altitudinis ABCDEF, GHIKL, quarum baſes ſint polygona, ſintq; plura latera in vna baſe, quam in altera. Dico rurſus eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt baſis ad baſin. Reſoluto enim polygono ABCDE, in triangula ABC, ACD, ADE, erit pyramis eius in totidem diuiſa pyramides. Quia vero, vt iam eſt demonſtratũ, eſt vt baſis ABC, triangularis prima quantitas, ad baſin GHIK, polygonam, ſecundam quantitatem; ita pyramis ABCF, tertia quantitas ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; & vt baſis ACD, quinta quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ACDF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem; [a] Erit etiam vt baſis ABCD, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Rurſus quia eſt, vt baſis ABCD, prima quantitas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDF, tertia quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt proxime demonſtratum eſt; Et eſt quoque, vt baſis ADE, quinta quantitas



[a] 24. quin.

titas, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ADEF, ſexta quantitas, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem, vt ante eſt oſtenſum; Erit etiam vt baſis ABCDE, prima quantitas cum quinta, ad baſin GHIK, ſecundam quantitatem, ita pyramis ABCDEF, tertia quantitas cum ſexta, ad pyramidem GHIKL, quartam quantitatem. Quod eſt propoſitum. Non aliter procedendum erit, ſi plura triangula fuerint in baſi ABCDE. [b] 24. quin.

HANC autem propoſitionem 6. & ea, quæ in hoc ſcholio demonſtrata ſunt, conuertemus hoc modo.

PYRAMIDES quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes; eandem habent altitudinem.

QVOD non ſecus oſtendemus, ac ea, quæ in ſcholio propoſ. 5. huius lib. diximus, oſtenſa ſunt.

COROLLARIVM.

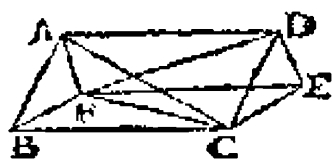
PERSPICVVM quoque inde efficitur, pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes multangulas, vel eandẽ cõſtitutas, eſſe inter ſe æquales; cum eandẽ habeant proportionem cum baſibus, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

RVRSVS cõtra fit, pyramides multangulas æquales, & ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem conſtructas, eandem habere altitudinem. Et pyramides multangulas æquales, eandemque habentes altitudinem, æquales habere baſes, ſi non habuerint eandem. Hæc autem duo demonſtrabuntur, vt in coroll. propoſ. 5. huius lib. diximus.

THEOR. 7. PROPOS. 7. 6.

OMNE priſma triangularem habens baſim, diuiditur in tres pyramides æqua

les interſe, triangulares baſes habentes.

SIT priſma ABCDEF, cuius duo trianguia oppoſita, æqualia, ac ſimilia ABF, DCE. Dico ipſum priſma ſecari in tres pyramides triangulares inter ſe æquales. Ducantur.n. in tribus parallelogrammis tres diametri, nẽpe
[a] 34. primi AC, in ABCD; CF, in BCEF; FD, in ADEF. Quoniam igitur triangula ABC, ADC, æ-
[b] 5. duode. 

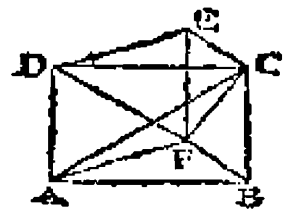
qualia ſunt; eſtq; vt baſis ABC, ad baſin ADC, ita pyramis ABCF, ad pyramidem ADCF, cum hæ pyramides eandem habeant altitudinem, nempe perpendicularem ex F, vertice ad planũ ABCD, demiſſam; Erunt & pyramides ABCF, ADCF, inter ſe æquales. Eadem ratione æquales erũt pyramides ADFC, EFDC, ſuper æquales baſes ADF, EFD, conſtitutę, & ſub eadem altitudine, nempe perpẽdiculari a vertice C, ad planum ADEF, demiſſa. Eſt autem pyramis ADCF, eadem pyramidi ADFC, cum illa contineatur quatuor planis, nempe baſi ADC, & triangulis ADF, ACF, DCF; hæc vero eiſdem quatuor planis, nimirum baſi ADF, & triãgulis ADC, ACF, DCF. Igitur tres pyramides ABCF, ADCF, EFDC, ſeu CDEF, (quæ eadem eſt pyramidi EFDC, cum tam EFDC, quam CDEF, contineatur planis CDE, EFD, DCF, FCE, totum priſma componẽtes, vt perſpicuum eſt) æquales ſunt inter ſe; Ac propterea priſma ABCDEF; in tres pyramides æquales eſt diuiſum. Quocirca omne priſma triangularem habens baſin, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

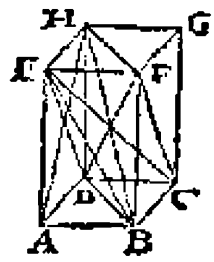
HINC colligitur, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem: Siue priſma quodlibet triplum eſſe pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſin, & altitudinem.

SIT

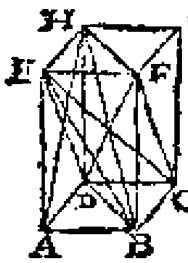
SIT enim primum pyramis ABEC, triangularem habens baſin ABF; & priſma ABCDEF: ſub eadem altitudine eandem habens baſin triangularem ABF. Dico pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis. Namſi ducatur recta DF, erit priſma diuiſum in tres pyramides aquales ABCF, ADCF, CDEF; vt demonſtratum eſt; Ac propterea pyramis ABCF, hoc eſt, pyramis ABFC, (cum hac illi ſit aqualis, imme eadem, quod eiſdem planis cõprehedatur ABF, FCA, ABC, CEF,) tertia pars erit priſmatis ABCDEF. Cum igitur pyramis ABEC, aqualis ſit cuicunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eãdem baſin ABF, conſtituta, ex coroll. propoſ. 5. huius lib. manifeſtum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partem priſmatis, quod eandem cum illa habet baſin triangularem, & altitudinem; ac propterea priſma e contrario eſſe pyramidis triplum. a 7. duode.



SIT deinde pyramis ABCDE, cuius baſis rectilineum quodcunque ABCD, quotlibet laterum; & priſma ABCDEFGH, ſub eadem altitudine eandem habens baſim. Dico rurſus pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Reſoluta enim baſi ABCD, & plano oppoſito EFGH, in triangula numero aqualia ADB, BCD; EHF, FGH; erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares diuiſum. Ductis ergo rectis AH, BH; DF, CF; erit, vt demonſtratum eſt, pyramis ADBH, tertia pars priſmatis ABFEHD; Item pyramis BCDF, tertia pars priſmatis CDHGFB. Quare erit, vt pyramis ADBH, ad priſma ABFEHD, ita pyramis BCDF, ad priſma CDHGFB; b Ac propterea vt vna pyramis ad ſuum priſma, ita omnes pyramides ad omnia priſmata, hoc eſt, ad priſma ABCDEFGH. Igitur pyramides ADBH, BCDF, ſimul tertiam partem conſtituent priſmatis ABCDEFGH. Sunt autem pyramides ADBH, BCDF, aquales pyramidi ABCDE; propterea quod pyramides ADBH, ADBE, ſuper eandem baſin, & ſub ead altitudine, nimirum inter plana parallela, ſunt aquales, ex coroll. b 12. quin.



propoſ. 5. huius lib. Eademque ratione æquales ſunt pyramides BCDF, BCDE, *ſuper eandem baſim, & ſub eadem altitudine. Quapropter cum pyramides* ADFE, BCDE, *componant totam pyramidem* ABCDE; *erit & pyramis* ABCDE, *tertia pars priſmatis* ABCDEFGH. *Cum igitur pyramis* ABCDE, *æqualis ſit cui cunque alteri pyramidi ſub eadem altitudine, & ſuper eandem baſim* ABCD, *conſtitutæ, per coroll propoſ. 5. huius lib. perſpicuum eſt, quamlibet pyramidem eſſe tertiam partẽ priſmatis, quod eandem cum illa habet baſim multilateram, eandemque altitudinem.*



QVOD ſi baſis pyramidis, ac priſmatis plura habeat latera, eodem modo oſtendetur, pyramidem eſſe priſmatis partem tertiam. Nam diuiſis polygonis in triangula, ſectum erit priſma in totidem priſmata baſes habentia triangulares. Vnde ſingulæ pyramides triangulares horũ priſmatum erunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum. Cum igitur omnes hæ pyramides æquales ſint pyramidi baſim habenti polygonum priſmatis propoſiti, conſtat propoſitum.

EODEM modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habẽtis baſem baſi, & altitudinem altitudini pyramidis æqualem. Nam eiuſmodi pyramis æqualis eſt pyramidi illi, quæ eãdem cum priſmate habet & baſem, & altitudinem, per coroll. propoſ. 6. huius lib. Quam quidem iam oſtendimus tertiam eſſe priſmatis partem.

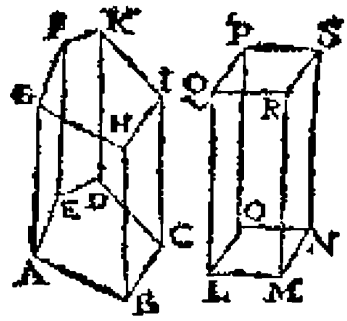
SCHOLIVM. I.

EX dictis facile demonſtrabimus hanc propoſitionem, videlicet.

SVB eadem altitudine exiſtentia priſmata, quaſcumque habeant baſes; inter ſe ſunt, vt baſes.

QVAMVIS enim hoc demonſtratum ſit in lib. 11. de priſma-

priſmatis, quorum duo plana oppoſita, parallela, & æqualia, ſunt triangula. licet eorũ baſis ſint parallelogramma, vertices vero lineæ rectæ; necnon de parallelepipedis, quæ nomine priſmatum contineri diximus: Nunc tamen idipſum demonſtrabimus vniuerſe de omnibus priſmatis, quorum duo plana aduerſa, ſiue baſes, ſunt polygona, quamuis plura latera, ſeu anguli in vnius baſe reperiantur, quam in baſe alterius. Sint igitur duo priſmata eiuſdem altitudinis ABCDEFGHIK, LMNOPQRS, quorum baſes ſint figuræ multilateræ. Dico vt eſt baſis ABCDE, ad baſim LMNO, ita eſſe priſma ad priſma. Si enim ex omnibus angulis vtriuſque baſis ad vnum punctum ſuperioris plani, quod baſi opponitur, lineæ rectæ ducantur, conſurgent duæ pyramides ſub eadem altitudine cum priſmatis habentes eaſdem baſes: Ac proinde per coroll. prædictum, quælibet pyramis tertia pars erit ſui priſmatis. [a] Quam ob rem erit, vt pyramis ad pyramidem, ita priſma ad priſma: Sed pyramis ad pyramidem eſt, vt baſis ad baſin, vt oſtenſum eſt propoſ. 6. eiuſque ſcholio. Igitur erit quoque vt baſis ad baſin, ita priſma ad priſma. Quod eſt propoſitum.



[a] 15. quin.

CONVERSO modo, ſi priſmata quarumcunque baſium inter ſe ſint, vt baſes, ipſa erunt ſub eadem altitudine. Quod quidem eodem modo oſtendemus, quo ſcholium propoſ. 5. demonſtratum eſt.

COROLLARIVM. II.

VNDE priſmata eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes quaſcunque, inter ſe ſunt æqualia. Quia nimirum eandem habent proportionem, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

ECONTRARIO, Priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eandem, in eadem ſunt altitudi-

ne. Et prismata æqualia eiusdem altitudinis, bases habent æquales, si non habuerint eandem. Quod quidem non aliter ostendes, ac conuersum propos 31. lib. 11. fuit demonstratum.

SCHOLIVM II.

CAETERVM tam ea, quæ in priori corollario quam illa, quæ in scholio proximo demonstrata sunt, intelligunt tantummodo de prismatis, quæ in vertice habent planum a basi parallelum, æqualia, & similia. Quod dixerim, ne hallucineris in prismate constante duobus triangulis parallelis, æqualibus, & similibus, & tribus parallelogrammis, quod videlicet Campanus cum alijs putat tantummodo prisma dici ab Euclide, vt in defin. prismatis diximus. Nam si in huiusmodi prismate intelligatur quidem basis vnum illorum triangulorum, erit necessario pyramis eiusdem altitudinis, eandemque habens basim, tertia paris ipsius prismatis, vt in corollario 1. demõstratum est. Item ipsum prisma ad quodlibet aliud prisma proportionem habebit, quam basis ad basin, vt in scholio ostendimus. At vero si in prismate tali basis cõcipiatur vnũ parallelogramorum, ita vt in vertice sit linea recta, non erit pyramis eandem habens basim, eandemque altitudinem, tertia eius pars, sed dua tertiæ partes, hoc est, prisma ad pyramidem proportionem habebit sesquialteram, quam videlicet habent 3. ad 2. Si enim huic prismati addatur aliud æquale & simile, vt parallelepipedum efficiatur, erit pyramis tertia pars constituti parallelepipedi, ex corollario prædicto, cum parallelepipedum sit prisma eandem & altitudinem, & basin habens cum pyramide. Quare si pyramis ponatur 2. erit parallelepipedum 6. Ablato ergo dimidio, erit reliquum prisma propositum 3. Ac propterea ad pyramidem proportionem habebit, quam 3. ad 2. nimirum sesquialterã. Ex quo efficitur, pyramidem super dimidium parallelogrammum constitutam, quæ eandem cum tali prismate habeat altitudinem, cum sit dimidium prioris pyramidis, esse tertiã partem prismatis. Quæ cum ita sint, non habebit tale prisma ita constitutum ad aliud prisma eiusdem altitudinis, eandem proportionem, quam basis ad basin, nisi hoc aliud prisma in

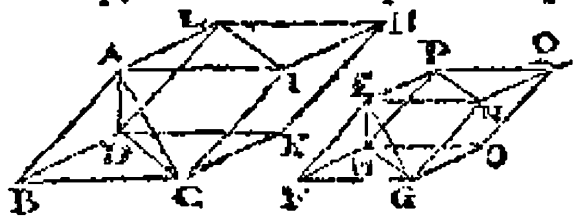
vertice

vertice lineam rectam habeat quoque, & basin parallelogrammum. Itaque eti, ſicuti oſtendimus in ſcholio, intelligenda ſunt de priſmatis eiuſdem altitudinis, quorũ vertices vel lineæ rectæ ſunt, & baſes parallelogramma, vel certe, quæ in verticibus plana habeant baſibus parallela, æqualia atque ſimilia. Hac enim ratione, ſi vertices priſmatum fuerint lineæ rectæ, erunt pyramides in eiſdem baſibus, eiuſdemque altitudinis, duæ tertiæ partes priſmatum, vt modo demonſtrauimus. Quare eandem habebunt rationẽ, quam priſmata, &c.

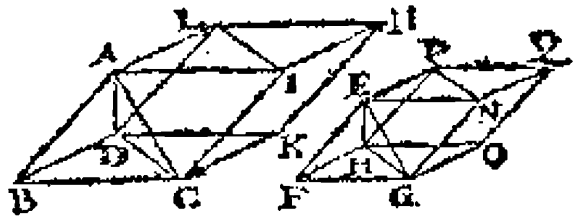
THEOR. 8. PROPOS. 8. 8.

SIMILES pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorum laterum ratione.

SINT pyramides ſimiles triangulares ABCD, EFGH, ita vt baſes ABC, EFG, ſint ſimiles, & reliqua triangula vnius ſimilia reliquis triãgulis alterius. Dico proportionẽ pyramidũ eſſe triplicatam proportionis, quam habent latera homologa, nempe BC, FG. Extendantur enim plana triangulorum ABC, CBD, DAB, perficianturq; parallelogramma BI, BK, BL. Deinde ducantur LM, IM, rectis AI, AL, parallelæ & æquales, cõuenientes in M, connectaturque recta KM. Erit igitur cõpletũ parallelepipedum BM, eiuſdem cum pyramide altitudinis; cũ plana ſolidi FM, ſint parallela, vt facile colligitur ex propoſ. 15. lib. 11. Rurſus eodẽ modo perficiatur parallelepipedũ FQ. Quoniã igitur ob ſimilitudinẽ pyramidũ, anguli plani ABC, EFG, ſunt æquales, eſtq; vt AB, ad BC, ita EF, ad FG; erunt parallelogramma BI, FN, ſimilia. Eodẽ modo cũ anguli ABD, EFH, ſint æquales, ſitq; vt AB, ad BD, ita EF, ad FH; Itẽ anguli DBC, HFG, æquales, & vt DB, ad BC, ita HF, ad FG; erũt & parallelogramma BL, BK, parallelogrãma FP, FO, ſimilia. [a] Sed tam tria BI, BK, BL, parallelepi-



[a] 24. vnde.



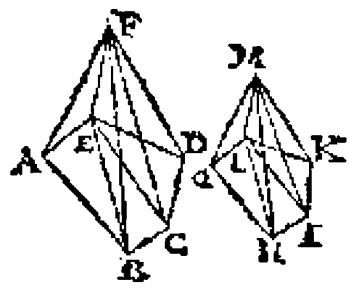
pedi BM, reliquis tribus oppositis DM, AM, CM; quam tria FN, FO, FP, parallelepipedi FQ, reliquis oppositis tribus HQ, EQ, GQ, sunt æqualia, & similia. Igitur sex plana circumscribentia solidum BM, similia sunt sex planis solidum FQ, ambientibus; Ac propterea ex defin. 9. lib. 11. similia sunt parallelepipeda BM FQ. Quoniam vero ductis rectis LI, PN, [b] prismata BCILA, HFGNPE, habent eandem proportionem, quam parallelepipeda BM, FQ, eorum dupla; & pyramides ABCD, EFGH, eandem, quam prismata dicta, earum tripla; [c] habebunt quoque pyramides eandem proportionem, quam parallelepipeda. [d] Cum igitur proportio parallelepipedi BM, ad parallelepipedum FQ, sit triplicata proportionis homologorum laterum BC, FG; erit quoque proportio pyramidis ABCD, ad pyramidem EFGH, proportionis BC, ad FG, triplicata. Similes itaque pyramides, quæ triangulares habent bases, &c. Quod erat demonstrandum.

[a] 24. vnde.
[b] 15. quinti
[c] 11. quin
[d] 33. vnde.

COROLLARIVM.

EX hoc quoque est manifestum, similes pyramides, quarum bases plura latera, quam tria, continent, habere proportionem homologorum laterum triplicatam.

SINT pyramides similes, quarum bases rectilinea similia plurium laterum ABCDE, GHIKL. Dico proportionem pyramidum esse triplicatam proportionis, quam habent latera homologa AB, GH. Nam si ex angulis E, L, ducantur ad angulos oppositos recta EB, EC; LH, LI, [e] diuisa erunt bases similes in triangula numero æqualia, & similia; nimirum triangula ABE, EBC, CDE, similia erunt triangulis



[e] 20. sexti

triangulis GHL, LKI, IKL. Quoniam ergo ob pyramidum similitudinem, triangula AEF, GLM, similia sunt, & angulus FEA, angulo MLG, æqualis; erit vt FE, ad EA, ita ML, ad LG: Vt autem EA, ad EB, ita LG, ad LH, propter similitudinem triangulorum AEB, GLH. Igitur ex æquo erit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH. Rursus quia est vt EB, ad BA, ita LH, ad HG, ob triangula similia ABE, GHL; Et vt BA, ad BF, ita HG, ad HM, cum ob pyramidum similitudinem similia sint triangula ABF, GHM: Erit quoque ex æquo, vt EB, ad BF, ita LH, ad HM; Ac propterea cum sit, vt FE, ad EB, ita ML, ad LH; & vt EB, ad BF, ita LH, ad HM, erit etiam ex æquo, vt FE, ad FB, ita ML, ad MH. [a] Quare æquiangula, atq; adeo & similia sunt triangula FEB, MLH. Sunt autem & triangula FEA, FAB, ABE, triangulis MLG, MGH, GHL, similia. Igitur pyramides ABEF, GHLM, ex defin. 9. lib. 11. similes sunt. Eadem ratione similes erunt pyramides EBCF, LHIM; Item CDEF, IKLM. [b] Quapropter, vt demonstratum est, pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, singula ad singulas, triplicatam proportionem habebunt laterum homologorũ AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, singulorum ad singula. Cũ igitur AB, BC, CD, ad GH, HI, IK, habeãt vnã et eandem proportionem, ob similitudinem basium ABCDE, GHIKL; habebunt quoque pyramides ABEF, EBCF, CDEF, ad pyramides GHLM, LHIM, IKLM, vnã eandemq; proportionem, triplicatam scilicet illius; [c] Atque idcirco erit, vt una pyramis ABEF, ad unam pyramidem GHLM, ita omnes pyramides, nempe pyramis ABCDEF, ad omnes pyramides, nimirum ad pyramidem GHIKLM. Quam ob rem, [d] cũ pyramis ABEF, ad pyramidẽ GHLM, habeat triplicatam proportionem homologorum laterum AB, GH; habebit quoque pyramis ABCDEF, ad pyramidem GHIKLM, triplicatam proportionem eorundem laterum homologorum AB, GH. Quod est propositum.

a 5. sexti

b 8. duodec.

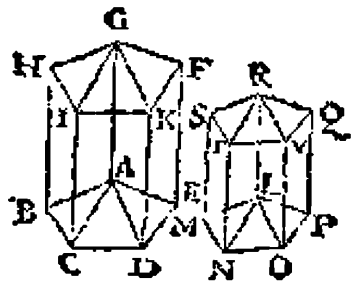
c 12. quinti

d 8. duodec.

SCHOLIVM.

EADEM ratione prismata similia habebunt triplicatã proportionem homologorum laterum. Sint enim duo prismata similia ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV. Dico eorum propor-

proportionem esse triplicatam proportionis homologorum laterum. Na si ex angulis A, & T, ducantur rectæ AC, AD; LN, LO, a erunt, vt de pyramidibus dictum est, triangula ABC, CAD, DEA, triangulis LMN, NLO, OIL, similia. Similiter, si ex angulis G, & R, ducantur rectæ GI, GK; RT, RV, erunt triangula GHI, IGK, KFG, & triangulis RST, TRV, VQR, & triangulis ante dictis, similia, cum omnia plana prismatum opposita similia existant, per definitionem prismatis. Quoniam uero ob similitudinem prismatum, parallelogramma CH, NS, similia sunt, erit vt IC, ad CB, ita TN, ad NM: Vt autem CB, ad CA, ita quoque est NM, ad NL, ob similitudinem triangulorum BCA, MNL. Igitur ex æquo erit vt IC, ad CA, ita TN, ad NL. Rursus quoniam angulus solidus N, æqualis est solido angulo C, ob similitudinem prismatum; si ille huic superponatur, omnia inter se conuenient, nimirum angulus MNO, angulo ECD, & angulus TNM, angulo ICE, & angulus TNO, angulo ICD: Conuenit autem & recta NL, rectæ CA, eo quod anguli MNL, BCA, sint æquales. Igitur anguli ICA, TNL, æquales sunt; Ac propterea cum latera circa ipsos ostensa sint esse proportionalia, erunt parallelogramma CG, NR, similia. Atqui & parallelogramma CH, HA, parallelogrammis NS, SL; & triangula ABC, GHI, triangulis LMN, RST, similia sunt. Igitur prismata ABCIGH, LMNTRS, similia sũt, ex defin. solidorum similium. Non aliter ostendentur esse similia prismata CDAGIK, NOLRTV; nec non prismata AEDKGF, IPOVRQ. Quatropter prismata ABCIGH, CDAGIK, AEDKGF, ad prismata LMNTRS, NOLRTV, LPOVRQ, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 34. lib. 11. triplicatam habent proportionem, singula ad singula, laterũ homologorum BC, CD, DE, ad MN, NO, OP, singulorum ad singula. Ac propterea eodem modo demonstrabimus, prismata ABCDEFGHIK, LMNOPQRSTV, proportionem habere homologorum laterum BC, MN, triplicatam, quo paulo ante usi sumus ad idem demonstrandum in pyramidibus multangulis.



20. sexti

EX

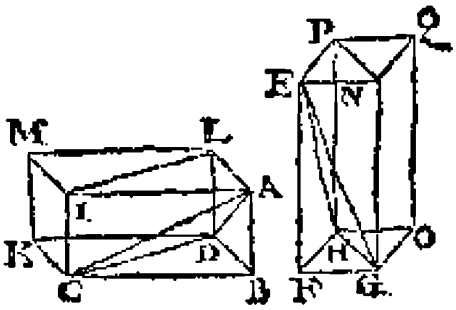
EX quibus omnibus colligitur, pyramides multangulas similes dividi in pyramides triangulares similes, & numero æquales, & homologas totis. Hoc enim manifestum est ex demonstratione præcedentis coroll.

EODEM modo infertur, prismata multangula similia diuidi in prismata similia triangulares bases habentia, & numero æqualia, & homologa totis. Vt apparet ex huius scholij demonstratione.

THEOR. 9. PROPOS. 9. 7.

AEQVALIVM pyramidum, & triangulares bases habentium, reciprocantur bases & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares bases habentium reciprocantur bases & altitudines; illæ sunt æquales.

SINT æquales pyramides triangulares ABCD, EFGH. Dico earum bases ABC, EFG, & altitudines esse reciprocas, hoc est, esse vt ABC, ad EFG, ita altitudinẽ pyramidis EFGH, ad altitudinẽ pyramidis ABCD. Si.n. perficiantur, vt in precedẽti propos. dictũ est, parallelepipeda BM, FQ, earundem altitudinum cum pyramidibus, connectanturque rectæ LI, PN; erunt prismata DBCILA, HFGNPE, cum sint tripla pyramidum, quæ æquales ponuntur, inter se æqualia; Ac proinde parallelepipeda BM, FQ, cum sint prismatum dupla, æqualia quoque erunt. Quare bases eorum & altitudines reciprocabuntur, hoc est, erit vt basis BI, ad basin FN, ita altitudo solidi FQ, ad altitudinẽ solidi BM: Vt autẽ basis BI, ad basim FN, ita est triangulũ ABC, ad triãgulũ EFG. Igit̃ erit quoq; vt basis ABC, ad basin EFG, ita altitudo pyramidis EFGH, ad altitudinem pyramidis ABCD, cum altitudines pyramidum eędem



a 34. vnde.

b 15. quin.

dem ſint, quæ parallelepipedorum; Ac propterea baſes, & altitudines pyramidum æqualium reciprocantur.

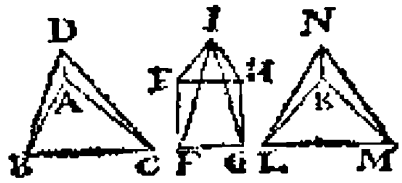
SINT iam baſes & altitudines reciprocæ. Dico pyramides eſſe æquales. Conſtructa enim figura, vt prius; cũ ſit vt AEC, ad EFG, ita parallelogrammum BI, ad parallelogrammum FN; ſintque eędem altitudines parallelepipedorum, & pyramidum; erunt quoque baſes parallelepipedorum & altitudines eorunde reciprocæ; [b] Ac propterea inter ſe æqualia erunt parallelepipeda BM, FQ. Quare & priſmata DBCILA, HFGNIE, eorum dimidia, æqualia erunt: Atque propterea pyramides quoque, priſmatum tertiæ partes, æquales erunt. Aequalium igitur pyramidum, & triangulares baſes habentium, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 15. quinti

[b] 34. unde.

SCHOLIVM.

EADEM ratione Aequalium pyramidum, quarum baſes non ſint triangulares, reciprocantur baſes atque altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentiũ reciprocatur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. Sint enim primum duæ pyramides æquales, quarum quidem ABCD, baſin habeat triangularem; at vero EFGHI, non triangularem. Fiat baſi non triangulari EFGH, æquale triangulum KLM. Quod quidem fiet, ſi baſis multilatera reuocetur ad parallelogrammum, per propoſ. 45. lib. 1. Nam hoc parallelogrammum factile ad triangulum reducetur, per ea, quæ demoſtranimus ad propoſ. 42. lib. 1. Deinde ſuper KLM, fiat pyramis KLMN, eiuſdem altitudinis cũ pyramide EFGHI. Quoniam ergo pyramides EFGHI, KLMN, æquales habent baſes, & eandem altitudinem; ipſæ erunt æquales, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 6. huius lib. oſtendimus: Ponitur autem pyramis EFGHI, æqualis pyramidi ABCD. Igitur & pyramis KLMN, pyramidi ABCD, æqualis erit. Quamobrem, cum habeant pyramides ABCD, KLMN, baſes triangulares; [c] *erit vt baſis ABC, ad baſin KLM, hoc eſt, ad huic æqualem baſin EFGH, ita altitudo pyra-*



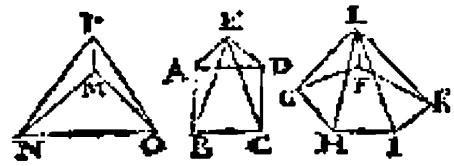
[c] 8. duodec.

pyramidis KLMN, hoc eſt, altitudo pyramidis EFGH, (ponuntur enim hæ altitudines æquales) ad altitudinem pyramidis ABCD. Ac proinde pyramidum ABCD, EFGHI, æqualium baſes & altitudines reciprocantur.

SED reciprocentur iam harum pyramidum baſes atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtructa enim figura eodem modo; cum baſis KLM, æqualis ſit baſi EFGH, & altitudo pyramidis KLMN, eadem, quæ pyramidis EFGHI; ponatur autem eſſe vt ABC, ad EFGH, ita altitudo pyramidis EFGHI, ad pyramidis ABCD, altitudinem, erit quoque vt baſis ABC, ad baſim KLM, ita altitudo pyramidis KLMN, ad altitudinem pyramidis ABCD. [a] *Quamobrem æquales ſunt pyramides ABCD, KLMN. Cum ergo pyramis KLMN, æqualis ſit pyramidi EFGHI, per ea, quæ oſtenſa ſunt in ſcholio propoſ. 6. huius lib. Erit & pyramis ABCD, pyramidi EFGHI, æqualis. Quod eſt propoſitum.*

[a] 9. huius.

SINT deinde pyramides æquales ABCDE, FGHIKL, quarum baſes ſint multãgulæ. Fiat rurſus triangulũ MNO, æquale baſi ABCD, & pyramis MNOP, eiuſdem altitudinis cum pyramide ABCDE: Eritque ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. pyramis MNOP, æqualis pyramidi ABCDE: Sed hæc æqualis ponitur pyramidi FGHIKL. Igitur & pyramis MNOP, æqualis eſt pyramidi FGHIKL. Quare, vt nũc demonſtrauimus, erit vt baſis MNO, hoc eſt, baſis ABCD, ſibi æqualis, ad baſim FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP, hoc eſt, ad altitudinem pyramidis ABCDE; (ponuntur enim hæ altitudines æquales.) Ac propterea pyramidum æqualium ABCDE, FGHIKL, baſes & altitudines reciprocantur.



SED reciprocentur iam baſes harum pyramidum atque altitudines. Dico ipſas eſſe æquales. Conſtituta enim eodem modo figura, cum baſis MNO; æqualis ſit baſi ABCD, & altitudo pyramidis MNOP, eadem quæ pyramidis ABCDE; ponatur autem vt ABCD, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis ABCDE; Erit quoque vt MNO, ad FGHIK, ita altitudo pyramidis FGHIKL, ad altitudinem pyramidis MNOP. Quare vt ante oſtea

oſtendimus, æquales erunt pyramides MNOP, FGH KL: Eſt autem pyramis MNOP, pyramidi ABCDE, æqualis, ex ſcholio propoſ. 6. huius lib. Igitur & pyramis AbCDE, pyramidi FGHIKL, æqualis erit. Quod eſt propoſitum.

OMNIA hæc facile quoque demonſtrabuntur conuenire priſmatis quibuſcunque. Nam ſi priſmata fuerint æqualia, erunt & eorum pyramides earundem altitudinum cum ipſis, & ſuper eaſdem baſes, æquales; cum ſint eorum tertiæ partes, ex coroll. propoſ. 7. huius lib. Vel certe duæ tertiæ, ſi nimirum priſmatum baſes fuerint parallelogramma, & eorum vertices, lineæ rectæ, vt in ſcholio eiuſdē propoſ. oſtenſum eſt. Quare, vt modo demonſtrauimus, baſes harum pyramidum atq; altitudines reciprocantur. Cum ergo hæ baſes & altitudines eædem ſint, quæ priſmatum; reciprocabuntur quoque baſes priſmatum atque altitudines.

RVRSVS, ſi priſmatum baſes, & altitudines reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes, & altitudines pyramidum eaſdem baſes & altitudines cum priſmatis habentium. Quare, vt demonſtratum eſt, pyramides æquales ſunt; Ac propterea priſmata, cum earum ſint tripla, vel certe ſeſquialtera, æqualia quoque ſunt. Quod eſt propoſitum.

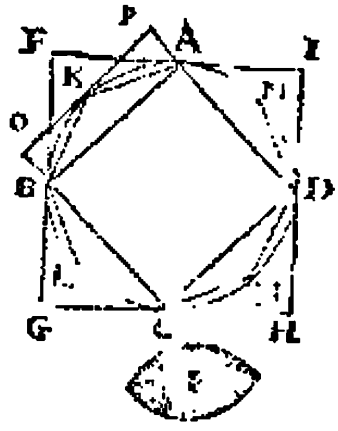
9.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

OMNIS conus tertia pars eſt cylindri eandem cum ipſo baſin habentis, & altitudinem æqualem.

HABEANT conus & cylindrus baſin eandem circulum ABCD, & altitudinem eandem. Dico conum cylindri eſſe tertiam partem. Si enim conus non credatur eſſe tertia pars cylindri, non erit cylindrus coni triplus, ſed vel maior, vel minor triplo coni. Sit primum maior quã triplus coni, magnitudine E, ita vt cylindrus ſit æqualis triplo coni & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur in circulo quadratũ ABCD, & circa eũdem, quadratum FGHI; intelligaturque ſuper hæc quadrata ſub altitudine coni, & cylindri, erecta duo parallelepipeda.

Quo-



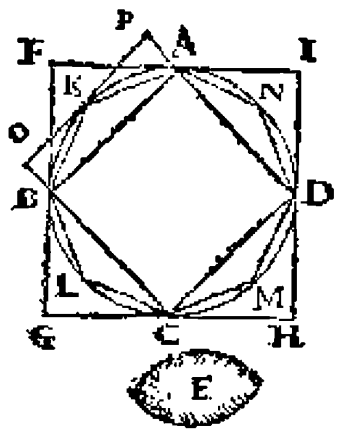
Quon am igitur quadratum AB. CD, dimidiũ eſt quadrati FGHI, vt a d propoſ. 9. lib. 4. oſtendimus; eſq; vt baſis ad baſin, ita parallelepipedum ad parallelepipedum eiuſde altitudinis; Erit & parallelepipedum baſis ABCD, dimidiũ parallelepipedi baſis FGHI, Ac proinde parallelepipedum baſis ABCD, maius eſt, quam dimidium cylindri, cuius baſis circulus ABCD. Secentur bifariam peripheriæ AB, BC, CD, DA, in punctis K, L, M, N, adiungunturque rectæ KA, KB, LB, LC, MC, MD, ND, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit ipſi AB, vt ad propoſ. 17. lib. 3 oſtendimus, occurratque rectis DA, CB productis in P, & O; & ſuper AKB, ABOP, intelligantur priſmata ſub altitudine coni & cylindri. Qua ergo triangulum AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP; erit quoque priſma baſis AKB, dimidium priſmatis, ſeu parallelepipedi baſis ABOP: cum ſit priſma ad priſma, vt baſis ad baſim, quemadmodum ad propoſ. 7. huius lib. demonſtrauimus; Ac propterea priſma baſis AKB, maius erit, quam dimidium ſegmenti cylindri, cuius baſis figura cõtenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erunt priſmata, quorum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem, quæ coni & cylindri, maiora, quam dimidia ſegmentorum cylindri, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnia igitur hæc priſmata ſimul maiora ſunt, quam dimidia omnium ſegmentorum cylindri ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, &c. ſecentur bifariã, & adiungantur rectæ lineæ, conſtituentur eodẽ modo priſmata eiuſdẽ altitudinis cũ cono, & cylindro, quæ maiora erunt ſimul, quam dimidia omniũ ſegmentorũ cylindri ſimul, quorum baſes circuli ſegmẽta, & ſic deinceps. Quoniã uero ſi a cylindro, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe parallelepipedum baſis ABCD; & a reliquis ſegmentis plus quam dimidium, nimirum priſmata baſium AKB, BLC,

a 32. vnd.

b 41. prin.

a 1. decim

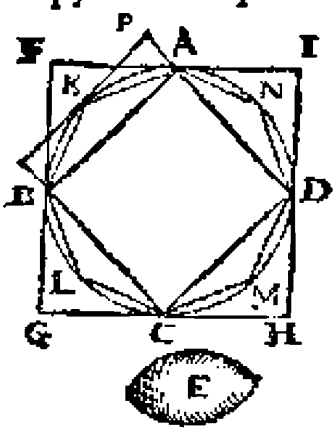
BLC,&c.atq; in hunc modum ſemper fiat detractio; relinquitur tandem minor magnitudo, quam E, exceſſus cylindri ſupra triplum coni: Sint iam ſegmẽta cylindri relicta baſium AK,KB,BL, &c. (quę quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta, minora quam E. Cum igitur cylindrus æqualis ponatur triplo coni & magnitudini E, ſimul; Si ex cylindro auferantur ſegmenta dicta, & ex triplo coni vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior eſt dictis cylindri ſegmentis, erit reliquum priſma baſis multangulę AKBLCMDN, eandem habẽs altitudinem cum cono, & cylindro, mãius quam reliquum triplum coni; ideoq; conus minor erit, quam tertia pars priſmatis. Quare cum dicti priſmatis ſit tertia pars pyramis, cuius eadẽ cum ipſo baſis & altitudo, ex co roll. propoſ. 7. huius lib. Erit conus minor dicta pyramide, totum parte. Quod eſt abſurdum. Non igitur maior eſt cylindrus triplo coni.



SIT deinde cylindrus minor triplo coni, ac proinde conus maior quam tertia pars cylindri. Sit ergo conus maior quam tertia pars cylindri, magnitudine E; ita vt conus æqualis ſit tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul. Inſcribatur rurſus in circulo quadratum ABCD, & circa eundem, quadratum FGHI; intelligantur q; ſuper hæc quadrata, pyramides ſub altitudine coni & cylindri. Quoniam igitur quadratum ABCD, dimidium eſt quadrati FGHI, vt ad propoſ. 9. lib. 4. demonſtrauimus, b eſtque vt baſis ad baſin, ita pyramis ad pyramidẽ eiuſdem altitudinis; Erit quoque pyramis ſuper ABCD, dimidium pyramidis ſuper baſin FGHI; ac proinde pyramis ſuper baſin ABCD, maior erit dimidio coni, cuius baſis circulus ABCD. Secẽtur peripheriæ AB, BC, CD, DA, biſariam in K, L, M, N, adiunganturq; rectæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA. Ducatur quoque per K, recta OP, tangens circulum in K, quæ parallela erit

b 6. 4uodec.

erit ipſi AB, vt ad propoſ 27. lib. 3. demonſtrauimus, occurratque rectis DA, CB, productis in P, & O, & ſuper AKB, ABOP, intelligãtur pyramides ſub altitudine coni & cylindri. [a] Quia ergo triangulũ AKB, dimidium eſt parallelogrammi ABOP, erit quoque pyramis ſuper baſin AKB, dimidium pyramidis ſuper baſin ABOP, [b] cũ pyramides habeant proportionem eandem, quam baſes; ac proinde pyramis ſuper baſin AKB, maior erit dimidio ſegmenti coni, cuius baſis figura contenta linea recta AB, & peripheria AKB. Eadem ratione erũt pyramides, quarum baſes reliqua triangula BLC, CMD, DNA, & altitudo eadem cum cono & cylindro, maiores quam dimidia ſegmentorum coni, quorum baſes circuli ſegmenta. Omnes igitur hæ pyramides ſimul maiores ſunt, quã dimidia omnium ſegmentorum coni ſimul. Quod ſi rurſus peripheriæ AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſecentur bifariam, & adiungantur rectæ lineæ in eodem circulo, conſtituentur eodem modo pyramides eiuſdem altitudinis cum cono & cylindro, quæ maiores erunt ſimul, quã dimidia omniũ ſegmentorum coni ſimul, quorũ baſes circuli ſegmenta; & ſic deinceps. Quoniam vero ſi a cono, cuius baſis circulus ABCD, auferatur plus quam dimidium, nempe pyramis ſuper baſin ABCD, quam maiorem eſſe oſtendimus, quam dimidium coni, cuius baſis eſt circulus ABCD; & a reliquis ſegmẽtis plus quam dimidium, nimirum pyramides baſium AKB, BLC, CMD, DNA; atque in hunc modum ſemper fiat detractio; [c] relinquitur tãdem minor magnitudo, quam E, exceſſus coni ſupra tertiam partem cylindri: Sint iam ſegmenta coni relicta baſium AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, (quæ quidem baſes ſunt circuli ſegmenta,) ſimul ſumpta minora, quam E. Cum igitur conus æqualis ponatur tertiæ parti cylindri, & magnitudini E, ſimul; ſi ex cono detrahãtur ſegmẽta prædicta, & ex tertia parte cylindri vna cum magnitudine E, ipſa magnitudo E, quæ maior



[a] 41. primi.
[b] 6. duode.
[c] 2. decimi

eſt, præfatis coni ſegmentis; erit reliqua pyramis, cuius baſis polygonum AKBLCMDN, eandem habens altitudinem cũ cono & cylindro, maior quã tertia pars cylindri reliqua; ac proinde triplum dictæ pyramidis maius erit cylindro. Quocirca, cũ priſma eandẽ habens baſim cum dicta pyramide, eandemq; altitudinem cũ cono & cylindro, triplum ſit ipſius pyramidis, vt ſupra in corollario propoſitionis ſeptimæ huius libri a nobis eſt demonſtratum, erit huiuſcemodi priſma maius cylindro, pars toto. Quod eſt abſurdum, Non ergo cylindrus minor eſt triplo coni: Sed neque maior triplo eſt oſtenſus. Igitur æqualis eſt triplo coni, propterea q; conus tertia pars eſt cylindri. Omnis igitur conus tertia pars eſt cylindri, eandem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

QVAMVIS propoſitio hæc ſolum intelligatur de conis & cylindris rectis, cum hos dilucide definierit Euclides lib. 11. omnibus tamen conis & cylindris tam rectis, quam ſcalenis conuenit, vt perſpicuum eſt eius demonſtrationem diligenter intuenti. Itaque propoſitio vniuerſe ita proponi poterit.

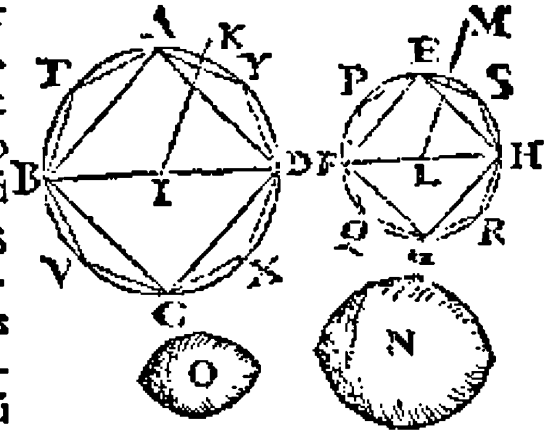
OMNIS conus, ſiue rectus, ſiue ſcalenus, tertia pars eſt cuiuſlibet cylindri ſiue recti, ſiue ſcaleni, eandem cum ipſo & baſim & altitudinem habentis, licet non ſit idem axis coni & cylindri.

11. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SVB eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt vt baſes.

SINT ſub eadem altitudine coni & cylindri, quorũ baſes circuli ABCD, EFGH, altitudines vero æquales IK, LM. Dico vt eſt baſis ad baſim, ita eſſe conum ad conum, &

num, & cylindrum ad cylindru. Si enim hoc non creditur, sit vt basis ABCD, ad basim EFGH, ita conus ABCDK, ad aliquam magnitudinem, nempe ad N, quæ vel maior erit, vel minor cono EFGHM. Si n. esset æqualis, haberet conus ABCDK, ad conum EFGHM, & ad N, proportionẽ eandẽ; ac propterea esset conus ad conum, vt basis ad basin: quod non cõceditur. Sit ergo primũ N, minor quam conus EFGHM, magnitudine O, ita vt conus EFGHM, æqualis sit magnitudinibus N. & O, simul. Inscribatur in circulo EFGH, quadratum EFGH, diuidanturque peripheriæ EF, FG, GH, HE, bifariam in P, Q, R, S, & adiungantur rectæ EP, PF, FQ, &c. Quoniam igitur si ex cono EFGHM, detrahatur pyramis super basin EFGH, eiusdem altitudinis, & a reliquis segmentis auferantur pyramides eiusdem altitudinis basium EPF, FQG, &c. atque in hunc modum semper fiat detractio, semper plus dimidio subtrahitur, vt in posteriore parte præcedẽtis propositionis ostensum est; [b] relinquetur tandem minor magnitudo, quam O, excessus coni EFGHM, super N. Sint ergo iam segmenta coni relicta basium EP, PF, FQ, &c. (quæ quidẽ bases sunt circuli segmenta) simul sumpta, minora quam O. Cum igitur conus EFGHM, ponatur æqualis magnitudinibus N, & O, simul; si ex cono detrahantur dicta coni segmenta, & ex N, & O, ipsa magnitudo O, quæ prædicti coni segmẽtis maior est, erit reliqua pyramis, cuius basis polygonũ EPFQGRHS, eiusdẽ altitudinis cũ cono, maior quã N, reliqua magnitudo. Inscribatur in circulo ABCD, polygonũ ATBVCXDY, simile polygono EPFQGRHS, vt in propos. 2, huius lib. docuimus, ducanturq; circulorũ diametri BD, FH. Qm igit per coroll. ppos. 2. huius lib. est vt circulus ABCD, ad circulũ EFGH, ita polygonũ ATBVCXDY, ad polygonum



[a] 7. quinti.

[b] 1. decimi

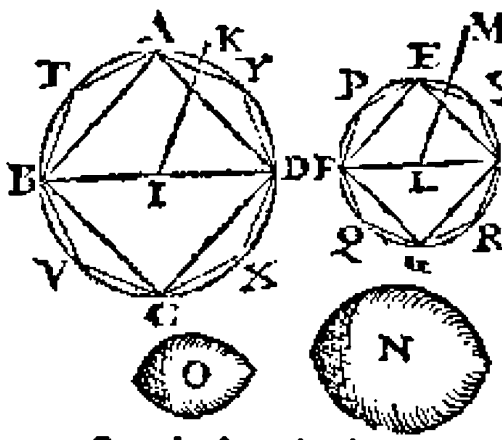
gonum EPFQGRHS: Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita ponitur conus ABCDK, ad magnitudinem N, [a] & vt polygonum, ad polygonum, ita eſt pyramis ad pyramidem eiuſdem altitudinis cum conus; Erit quoque vt pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidē EPFQGRHSM, vt conus ABCDK, ad N. Cum igitur pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto, [b] erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quā N: Oſtēſa autem fuit & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

[a] 6. duodec.

[b] 14. quinti

SIT ſecundo N, maior cono EFGHM. Cum igitur ponatur vt circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita conus ABCDK, ad N; Erit & conuertendo vt circulus EFGH, ad circulum ABCD, ita N, ad conum ABCDK. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinē O. Et quia N, maior ponitur cono EFGHM; maior quoque erit conus ABCDK, quam O. Quare erit vt circulus EFGH ad circulum ABCD, ita conus EFGHM, ad magnitudinem O, quæ minor eſt cono ABCDK. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt iam, non poſſe eſſe conum ad magnitudinem minorem alio cono, vt eſt baſis illius coni ad baſin huius coni. Non ergo maior eſt N, magnitudo cono EFGHM; Sed neque minor eſt oſtenſa; Aequalis igitur eſt. Quapropter cum ponatur, vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad N; [d] Sit autem, vt conus ABCDK, ad N, ita idē conus ABCDK, ad conum EFGHM; erit quoque vt baſis ABCD, ad baſin EFGH, ita conus ABCDK, ad conum EFGHM.

[c] 14. quin.



[d] 7. quinti

[e] 15. quin.

[e] QVONIAM autem, vt conus ABCDK, ad conum EFGHM, ita eſt cylindrus ABCDK, (qui triplus eſt coni ABCDK;) ad cylindrum EFGHM; (qui triplus eſt coni EFGHM) Erit quoque vt baſis ABCD, ad baſin EFGH,

EFGH, ita cylindrus ABCDK, ad cylindrũ EFGHM. Quod tamen eodem modo confirmari poteſt, quo vſi ſumus in conis, ſi loco conorum, & pyramidum, cylindri, & priſmata ſub eadem ergo altitudine exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

PERSPICVVM quoque eſt, hanc propoſitionem, quam Euclides de conis, & cylindris ſolis rectis propoſuit, ob rationem ſuperius traditam, extendi etiam poſſe ad conos, & cylindros ſcalenos, vt eius demonſtratio manifeſte indicat, ita vt propoſitio vnius ſe proponatur in hunc modum.

SVNT eadem altitudine exiſtentes coni & cylindri, ſiue ambo recti ſint, ſiue ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus; inter ſe proportionem habent, quam baſes.

CONVERTITVR hæc propoſitio quoque hoc modo.

SI coni & cylindri inter ſe ſint, vt baſes; ipſi ſub eadem altitudine erunt.

QVOD quidem demonſtrabis eo modo, quo conuerſum propoſ. 32. lib. 11. oſtendimus.

COROLLARIVM.

HINC fit, conos & cylindros eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes conſtitutos, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, eſſe inter ſe æquales; propterea quod eandem proportionem habent, quam baſes, quæ æquales ponuntur, vel certe vna & eadem.

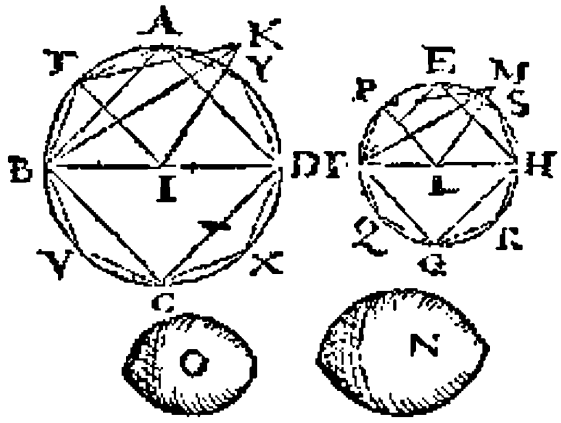
ITEM ſequitur, conos & cylindros æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, in eadem eſſe altitudine: Et conos & cylindros æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes eſſe, ſi nõ habuerint eandem. Quod oſtendemus non aliter, ac conuerſum propoſ. 31. lib. 11. demonſtratum fuit.

10.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

SIMILES coni,& cylindri, in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus.

SINT ſimiles coni,& cylindri,quorum baſes circuli ABCD,EFGH,axes vero LK, LM, & diametri baſium BD,FH. Dico conum ad conum, & cylindrum ad cylindrum, habere proportionem triplicatã diametri ad diametrum.Si enim hoc non creditur,habeat conus ABCDK,ad aliquam magnitudinem N, proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH. Eritque N, vel minor, vel maior cono EFGHM. Si enim eſſet æqualis, [a] haberet conus ABCDK, ad conũ EFGHM, & ad N, proportionem eãdem; Ac proinde proportio coni ABCDK, ad conũ EFGHM, eſſet quoq; triplicata proportionis diametri BD, ad diametrum FH;quod non conceditur.Sit ergo primum N, minor,quam conus EFGHM. magnitudine O; Fiatque eadẽ prorſus conſtructio figuræ,quæ in præcedenti propoſitione,ita vt rurſus pyramis EPFQGRHSM, maior oſtendatur, quam N. Ducantur deinde rectæ KB, KT, MF,MP,vt habeãtur duo triangula BKT,EMP, pyramidum ATBVCXDYK,EPFQGRHSM;& connectantur rectæ TI,PL. Quoniam igitur coni ABCDK,EFGHM,ſimiles ponuntur,erit,ex 24.defin.lib.11.vt diameter BD, ad diametrum FH, ac propterea vt ſemidiameter BI,ad ſemidiametrum FL,ita axis IK,ad axem LM; Ac permutãdo vt BI,ad IK, ita FL, ad LM.Cum igitur anguli BIK,FLM,recti ſint,ex defin.3.lib.11.quod coni recti ponantur,propterea que axes recti ad eorum baſes; [c] Erunt triangula BIK, FLM,æquiangula; [d] Ac propterea



[a] 7. quinti

[b] 11. quinti

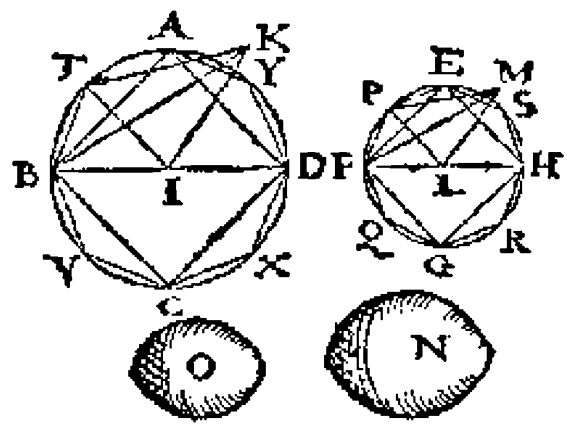
[c] 6. ſexti.

[d] 4. ſexti

rea vt KB, ad BI, ita erit MF, ad FL. Vt autē BI, ad BT, ita FL, ad FP, ob ſimilitudinē triangulorum BIT, FLP. (Cum enim anguli BIT, FLP, inſiſtentes ſimilibus arcubus BT, FP, ſint æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtēſum eſt; ſitq; vt BI, ad IT, ita FL, ad LP, ob æqualitatē tam linearū BI, IT, quam FL, LP; [a] erunt triangula BIT, FLP, ſimilia.) Igitur ex æquo, vt KB, ad BT, ita MF, ad FP. Rurſus qa latera KI, IB, triāguli KIB, æqualia ſūt lateribus KI, IT, triāguli KIT, & anguli dictis lateribus cōprehēſi, recti, ex defin 3. lib. 11. cū axis IK, rectus ponatur ad circulū ABCD, [b] erūt baſes KB, KT, æquales. Eodē modo æquales erūt rectæ MF, MP; Ac propterea rectæ KB, KT, rectis MF, MP, proportionales erunt. cū vtrobiq; ſit proportio æqualitatis. [c] Qm̄ vero vt KB, ad BT, ita KT, ad eandē BT; Itē vt MF, ad FP, ita MP, ad eandē FP: Erat aūt vt KB, ad BT, ita MF, ad FP; Erit quoque vt KT, ad BT, ita MP, ad FP; Et cōuertēdo vt BT, ad TK, ita FP, ad PM. Quare cū ſit vt TK, ad KB, ita PN, ad MF; & vt KB, ad BT, ita MF, ad FP, Et vt BT, ad TK, ita FP, ad PM, veluti oſtenſum eſt; habebūt triāgula BKT, FMP, latera pportionalia, [d] ideoq; æquiāgula erūt; Ac proinde ſimilia, ex definitione. Non aliter oſtendētur reliqua triangula ambiētia pyramides ATBVCXDYK, EPFQGRHSM, inter ſe ſimilia eſſe: Quæ cū ſint multitudine æqualia, erūt dictæ pyramides ſimiles, ex defin. 9. lib. 11. Quocirca in triplicata proportione erunt homologorum laterum BT, FP, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Vt autē BT, ad FP, ita eſt BI, ad FL, ob ſimilitudinē triangulorum BIT, FLP; [e] Et vt BI, ad FL, ita BD, ad FH. Igitur pyramis ad pyramidē habebit quoque proportionem triplicatam diametrorum BD, FH: Ponebatur autem & proportio coni ABCDK, ad N, earundem diametrorum triplicata. Igitur erit vt pyramis ATBVCXDYK; ad pyramidem EPFQGRHSM, ita conus ABCDK, ad N. Quare cum pyramis ATBVCXDYK, minor ſit cono ABCDK, pars toto; erit & pyramis EPFQGRHSM, minor quam N. Oſtenſa autem eſt & maior. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt magnitudo N, cono EFGHM.

[a] 6. ſexti.
[b] 4. primi
[c] 7. quinti
[d] 6. ſexti.
[e] 11. quinti
[f] 14. quinti

SIT deinde N, maior cono EFGHM. Cum ergo ponatur conus ABCDK, ad N, habere proportionem triplicatam diametri BD, ad diametrum FH; Habeat autẽ & pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM, triplicatam proportionem earundem diametrorum, vt proxime oſtendimus: Erit vt conus ABCDK, ad N, ita pyramis ATBVCXDYK, ad pyramidem EPFQGRHSM; & conuertendo vt N, ad conum ABCDK, ita pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK. Quare cum ex coroll. propoſ. 8. huius lib. pyramis EPFQGRHSM, ad pyramidem ATBVCXDYK, habeat proportionem triplicatam homologorum laterũ PF, ad TB, hoc eſt, diametri FH, ad diametrum BD; habebit quoq; N, ad conum ABCDK, proportionem triplicatã diametri FH, ad diametrum BD. Ponatur vt N, ad conum ABCDK, ita conus EFGHM, ad magnitudinẽ O. Habebit igitur & conus EFGHM, ad O, proportionem triplicatam diametri FH, ad diametrum BD. Et quia N, maior ponitur quam conus EFGHM,[a] erit quoq; conus ABCDK, maior quã O. Quapropter conus EFGHM, ad magnitudinẽ O, minorem cono ABCDK, proportionẽ habet triplicatam diametri FH ad diametrũ BD. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt, non poſſe conũ ad magnitudinẽ alio cono minorẽ, proportionẽ habere triplicatã eius, quã habent baſiũ diametri. Non ergo maior eſt magnitudo N, cono EFGHM: Sed neque minor eſt oſtenſa. Aequalis igitur eſt;[b] ac proinde conus ABCDK, eandẽ habet proportionẽ ad conũ EFGHM, & ad N. Cũ ergo ponatur conus ABCDK, ad N, in triplicata proportione diametrorũ BD, & FH; erit quoq; conus ABCDK, ad conũ EFGHM, in earundẽ diametrorũ, pportione triplicata.



[a] 14. quin

[b] 7. quinti.

[c] 15. quin.

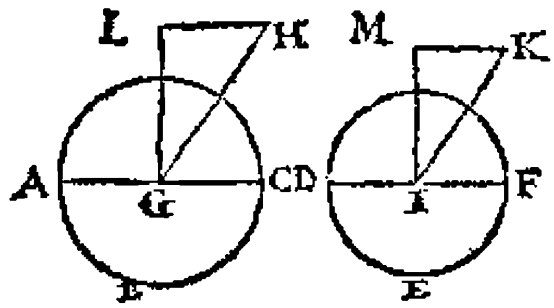
[c] QVONIAM vero, quam proportionem habent coni, can-

ni, eandem quoque obtinent cylindri, eorum tripli; habebit quoq; cylindrus ad cylindrum proportionē diametrorum in baſibus triplicatam. Quod tamen eodem modo demonſtrabitur, quo vſi ſumus in conis, ſi modo loco conorum, & pyramidum aſſumantur cylindri, atque priſmata. Similes igitur coni, & cylindri in triplicata ratione ſunt diametrorum, quæ in baſibus. Quod oſtendendum erat.

SCHOLIVM.

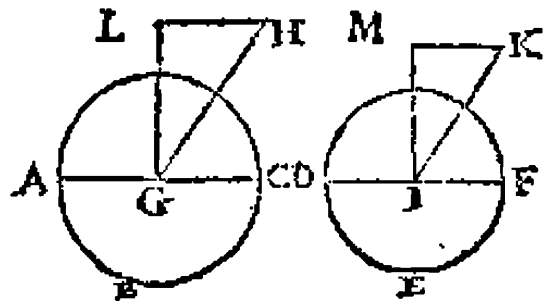
QVOD ſi maior conus, & cylindrus cum minore conferatur, perſpicuum eſt, in ſecunda parte huius propoſ. Euclidem aſſumere, demonſtratum eſſe propoſ. 8, huius lib. minorem pyramidem ad maiorem habere proportionem laterū homologorum triplicatam. Id quod ad deſin. 10. lib. 5. monuimus contra Federicum Commandinum, & alios, qui putant referri ſemper debere maiorem quantitatem ad minorem, vt habeatur proportio duplicata, triplicata, &c.

HÆC porro propoſitio, quamuis etiam extendatur ad ſimiles conos & cylindros ſcalenos: tamen hic demonſtratur in ſolis rectis conis & cylindris ſimilibus, cum in demonſtratione aſſumantur axes recti ad baſes. Quocirca eam hac ratione oſtendemus in ſimilibus conis & cylindris ſcalenis. Sint ſimiles coni, & cylindri ſcaleni, quorum baſes circuli ABC, DEF, axes vero GH, IK, & diametri baſiū AC, DF. Dico tam conum ad conum, quam cylindrum ad cylindrum habere proportionem diametri ad diametrum triplicatā. Intelligantur enim ſuper eaſdem baſes duo coni, & cylindri recti earundem cum ſcalenis altitudinum, quorum axes GL, IM. Ducāturq; per rectas GH, GL; Item per IK, IM, plana ſecantia baſes lineis rectis AC, DF. Quoniam igitur axes GL, IM, recti ſunt baſibus ABC, DEF; [a] erunt & plana per GH, GL; & per IK, IM, ad eaſdem recta. [b] Ac propterea perpendiculares lineæ ex H, K, ad baſes demiſſæ cadent in AC, DF, communes ſectiones: & proinde erunt anguli



[a] 18. vnde.
[b] 38. vnde.

anguli CGH, FIK, anguli inclinationum, qui æquales inter se erunt, cũ coni & cylindri scaleni similes ponantur: Sunt autem & anguli CGL, FIM, æquales, nempe recti, ex defin.
a 32. primi 3. lib. 11. a Reliqui igitur HGL, KIM, æquales quoq; erunt. Quoniam vero coni ABCH, ABCL, ponuntur esse eiusdem altitudinis; erit recta HL, per axiũ vertices ducta ipsi AC,
b 29. primi parallela, b ideoque angulus L, rectus. Eodemque argumento rectus erit angulus M, cum & anguli CGL, FIM, recti sint. Non aliter & reliqui anguli H, K, æquales erunt, cum sint æquales eorum alterni anguli CGH, FIK. Triangula igitur GHL, IKM, æquiangula sunt; c atque idcirco



c 4 sexti. erit vt GL, ad GK, ita IK, ad IM; & permutando, vt GH, ad IK, ita GL, ad IM. Vt autem axis GH, ad axẽ IK, ita est AC, diameter ad DF, diametrum; quod coni & cylindri scaleni ponãtur similes. Igitur & GL, axis ad IM, axẽ erit, vt diameter AC, ad DF, diametrũ; Et proinde coni & cylin
d 12. quod. dri recti ABCL, DEFM, similes erũt, ex definitione. d Quàre proportionem habebunt diametrorum triplicatam. Quia vero tam conus & cylindrus ABCL, cono & cylindro ABCH, (cum eandem habeant basim, & altitudinem,) quam conus & cylindrus CEFM, cono & cylindro DEFK, (ob eandem rationem,) est æqualis, vt constat ex coroll. propos.
e 7. quint. 11. huius lib. e Erit vt conus & cylindrus ABCL, ad conum & cylindrum DEFM, ita conus & cylindrus ABCH, ad conum & cylindrum DEFK; ideoque proportio coni & cylindri ABCH, ad conum et cylindrũ DEFK, triplicata quoq; erit diametri AC, ad diametrum DF. Quod est propositum.

11. THEOR. 13. PROPOS. 13.

SI cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo: Erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

SE-

SECETVR cylindrus *ABCD*, plano GH, paralle lo aduerſis planis AB, CD, quod quidem ſecet axé *EF*, in I. Dico vt eſt cylindrus ABHG, ad cylindrũ GHCD, ita eſſe axem EI, ad axem IF. Intelligatur enim cylindrus ABCD, in vtramque partem, vna cum eius axe & rectangulo EC, ad cuius reuolutionem deſcriptus eſt cylindrus, protractus quantumlibet; Sumanturque in axe producto quotcunq; rectæ *EK*, KL, æquales ipſi EI; Itẽ quotcũque rectæ FM, MN, NO, æquales ipſi *FI*. Deinde per puncta I, K, L, *M*, N, O, ducantur rectę IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallelæ, & æquales rectis EB, FC; quæ quidem ad reuolutionem rectanguli EC, deſcribent circulos GH, PR, Q S, T*æ*, VZ, XY, parallelos & æquales circulis A B, C D, ob æqualitatem ſemidiametrorum, quæ ſemper inter ſe æquidiſtantes circunferuntur. Ac propterea cylindri erũt SP, PA, AH, HD, *D*T, TZ, ZX, ex definitione, componẽtes totum cylindrum SQXY. Quoniã vero tam cylindri SP, PA, AH, ſuper baſes æquales QS, PR, BA, & ſub altitudinibus æqualibus KL, EK, IE, æquales ſũt, quam cylindri XZ, ZT, TD, DH, ſuper æquales baſes XY, VZ, T*æ*, CD, & ſub altitudinibus æqualibus NO, MN, *F*M, IF, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit tam multiplex cylindrus SH, cylindri AH, quã multiplex eſt axis IL, ipſius axis IE; Itẽ tã multiplex cylindrus XG, cylindri CG, quam multiplex eſt axis IO, ipſius axis IF. Quoniam autem ſi axis IL, (multiplex IE, primæ magnitudinis) æqualis eſt axi IO, (multiplici axis IF, ſecundæ magnitudinis) æqualis quoque eſt cylindrus SH, (multiplex cylindri AH, tertiæ magnitudinis) cylindro XG, (multiplici cylindri CG, quartæ magnitudinis) vt ex propoſ. 11. huius lib. liquet. Si vero axis maior eſt axe, cylindrus quoque cylindro maior eſt; Et ſi minor, minor, in quacunq; hoc contingat multiplicatione: Erit, per defi. 6. lib. 5. ita axis IE, prima magnitudo ad axẽ I*F*, ſecundã magnitudinẽ, vt cylindrus AH, tertia magnitudo ad cylindrum CG, quartam magnitudinem. Si cylin



drus

drus igitur plano secetur aduersis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

ETSI hanc propositionem Euclides de solo cylindro recto demonstrat; tamen eius demonstrationem cylindro scaleno facile accommodabis, si modo adhibeas descriptionem cylindri scaleni sicut in demonstratione Euclidis assumpta fuit cylindri recti descriptio; ita vt quemadmodum in conis rectis rectangulum circa quiescens latus circumfertur, sic quoque in conis scalenis circumferantur semidiametri LS, KR, EA, &c. super aequidistates circa centra L, K, E, &c. vna cũ recta SY, semidiametros coniungente. Hac enim ratione semper cylindri describentur, vt constat ex iis, quæ scribit Serenus in lib. 1. de sectione cylindri.



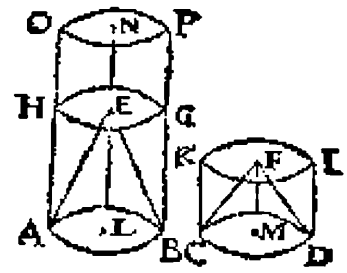
11.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

SVPER æqualibus basibus existentes coni, & cylindri; inter se sunt, vt altitudines.

SINT super bases æquales AB, CD, duo coni ABE, CDF, & duo cylindri ABGH, CDIK, quorum axes, seu altitudines (Nam in conis & cylindris rectis axes ipsi sunt altitudines) LE, MF. Dico esse conum ABE, ad conum CDF, & cylindrum ABGH, ad cylindrum CDIK, vt est altitudo LE, ad altitudinem MF. Extendatur enim cylindrus ABGH, ad partes GH, vna cum eius axe LE, & rectangulo AG; abscindaturq; axis EN,

E N, æqualis axi M F, & circa centrum N, intelligatur circulus O P, æqualis & parallelus circulo G H, vt fiat cylindrus G H O f eiuſdem altitudinis cum cylindro C D I K. Quoniam igitur cylindri H P, C I, cum habeant æquales baſes & altitudines, æquales ſunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.



[a] propterea q; e cylindrus A G, ad ipſos eandem habet proportionem. [b] Eſt autem cylindrus A G, ad cylindrum H P, vt axis, ſeu altitudo L E, ad axem, ſeu altitudinem E N, hoc eſt, ad altitudinem M F, ſibi æqualem. Igitur & cylindrus A G, ad cylindrum C I, erit quoque, vt altitudo L E, ad altitudinem M F.

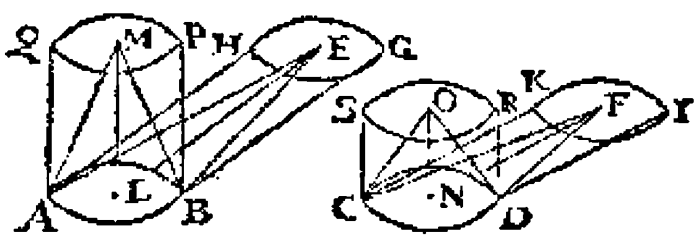
[a] 7. quinti
[b] 13. duod.

[c] QVIA vero coni A B E, C D F, ſunt tertiæ partes cylindrorum A G, C I; [d] ipſi habebunt eandem cum cylindris proportionem; Ac proinde erit quoque conus A B E, ad conum C D F, vt altitudo L E, ad altitudinem M F. Super æqualibus igitur baſibus exiſtentes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. Quod oſtendendum erat.

[c] 10. duod
[d] 15 quin.

SCHOLIVM.

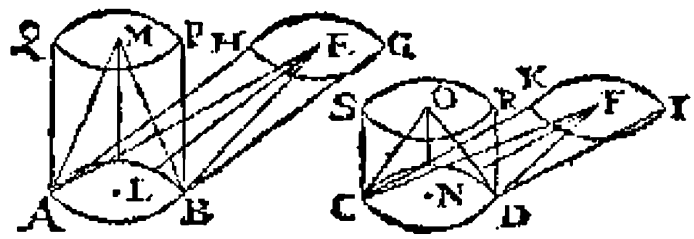
HOC idem conuenire conis ſcalenis, hoc modo demonſtrabimus. Sint ſuper baſes æquales A B, C D, coni A B E; C D F, et cylindri A B G H, C D I K, ſcaleni, quorum altitudines L M, N O. Dico conũ A B E, ad conum C D F, et cylindrum A B G H, ad cylindrum C D I K, eſſe, vt eſt altitudo L M, ad altitudinem N O. Super baſin enim A B, conſtruatur cylindrus rectus A B P Q, ſub altitudine L M; Item ſuper baſin C D, cylindrus C D R S, ſub altitudine N O. [e] *Quoniã igitur eſt cylindrus rectus A B P Q, ad*



[e] 14. duod.

ad cylindrum rectũ CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO: Est autẽ cylindro ABPQ, cylindrus ABGH: Itẽ cylindro CDRS, cylindrus CDIK, æqualis, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Erit quoque cylindrus ABGH, ad cylindrum CDIK, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

[a] 10. duod. [b] 15. quin. QVONIAM autem coni, [a] cum ſint tertiæ partes cylindrorum, [b] eandem habent proportionem, quam cylindri; Erit quoque conus ABL, ad conum CDF, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod tamen eodẽ argumento, quo vſi ſumus in cylindris, confirmare poteſt, vt perſpicuum eſt, ſi ſuper baſes AB, CD, fiant coni recti ABM, CDO, earundẽ altitudinum cum cylindris ABPQ, CDRS.

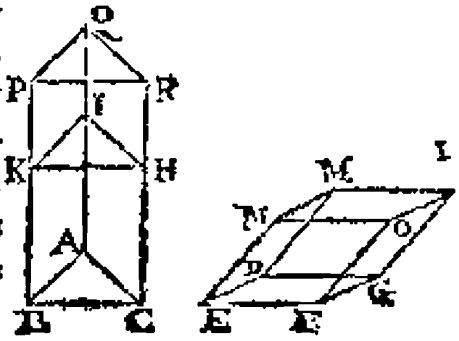


IDEM concludetur, quamuis vnus conorum, & cylindrorum, nempe conus ABE, & cylindrus ABGH, fuerit ſcalenus, alter vero, nimirum conus CDO, & cylindrus CDRS, rectus. Nam cum cylindrus ſcalenus ABGH, æqualis ſit cylindro recto ABPQ; ſit autẽ cylindrus rectus ABPQ, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO, vt Euclides demonſtrauit: Erit quoque cylindrus ſcalenus ABGK, ad cylindrum rectum CDRS, vt altitudo LM, ad altitudinem NO. Quod eſt propoſitum.

[c] 15. quin. [a] 16. duod. [c] QVONIAM vero coni eandem habent proportionẽ, quam cylindri, [a] cum illi horum ſint tertiæ partes; Erit etiã conus ſcalenus ABE, ad conum rectum CDO, vt altitudo LM, ad altitudinẽ NO. Quod nihilominus oſtendetur eadẽ ratione, qua vſi ſumus in cylindris, vt manifeſtum eſt.

EADEM quoque hæc propoſitio conuenit priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. Sint enim ſuper baſes æquales ABC, DEFG, priſmata ABCHIK, DEFGKMNO, & pyramides ſub eiſdem altitudinibus. Dico eſſe priſma ad priſma, & pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem. Sint namque inſiſtentes lineæ AI, CH, BK, priſmatis ABCHIK, ad baſim ABC, perpendi-

perpendiculares, ita vt BK, ſit altitudo priſmatis ABCHIK; Productis autem rectis AI, CH, BK, ſumantur IQ, HR, KP, æquales altitudini priſmatis EL; & ductis rectis PQ, QR, RP, compleatur priſma HIKPQR, eiuſdem altitudinis cum priſmate EL. Eruntq; priſmata HIKPQR, EL, cum habeant & baſes, & altitudines æquales, inter ſe æqualia, ex coroll. 2. propo. 7. huius lib. [a] Ac propterea priſma ABCHIK, ad vtrumq; eandem habebit proportionem. Quia vero ex ſcholio propo. 25. lib. 11. priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, eſt vt planum BI, ad planum KQ; [b] Et vt planum BI, ad planum KQ, ita eſt recta BK, ad KP; erit priſma ABCHIK, ad priſma HIKPQR, hoc eſt, ad priſma EL, vt BK, altitudo priſmatis ABCHIK, ad KP, altitudinem priſmatis HIKPQR, hoc eſt, priſmatis EL, Quod eſt propoſitum.



[a] 7. quinti.

[b] 1. ſexti.

QVOD ſi inſiſtentes lineæ AI, CH, BK nõ ſint perpendiculares ad baſin ABC, cõſtituendũ erit ſup baſin ABC, aliud priſma, cuius inſiſtentes ſint perpendiculares ad baſin, & æquales altitudini priſmatis ABCHIK. Nam eũ ex 2. coroll. propoſ. 7. huius lib. hæc duo priſmata eandem habentia altitudinẽ, et baſin, ſint æqualia, ſitq; priſma conſtituẽdũ ad priſma EL, vt illius altitudo ad huius altitudinẽ; erit et priſma ABCHIK, ad priſma EL, vt altitudo illius, ad altitudinẽ huius

QVONIAM vero pyramides eandẽ habent proportionem cum priſmatis, [c] quod illæ ſint horũ tertiæ partes: Perſpicuum eſt, ita quoque eſſe pyramidem ad pyramidem, vt eſt altitudo ad altitudinem.

[c] 15. quin. 7. duod.

EADEM prorſus eſt ratio habenda de parallelepipedis, cum parallelepipeda comprehendantur etiam nomine priſmatum, vt dictum eſt; atque ob id eadem illis demonſtratio poſſit accommodari.

HAEC omnia eodem fere modo demonſtrabuntur de conis, & cylindris, nec non de pyramidibus, & priſmatis eandem habentibus baſem.

OMNI

OMNIA quoq; hæc facile conuerti pſſunt hoc modo.

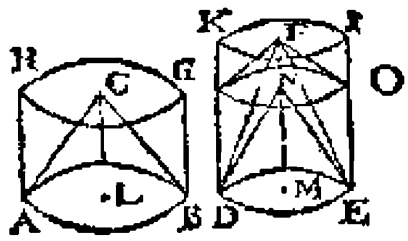
CONI & cylindri tam recti, quam ſcaleni; Item priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionem habentes eandem, quam altitudines, baſes habebunt æquales.

NAM alia pars æqualis foret toti, vt in converſo propoſ. 31. lib 11. oſtenſum eſt.

12. THEOR. 15. PROPOS. 15.

AEQVALIVM conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorũ reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales.

SINT æquales coni ABC, DEF, & æquales cylindri ABGH, DEIK, quorum baſes AB, DE; axes, altitudines ve LC, MF. Dico baſes & altitudines eſſe reciprocas, hoc eſt, eſſe vt AB, ad DE, ita MF, ad LC. In cylindris quidem ſic propoſitum oſtendetur. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum cylindri ponantur quoque æquales; erunt & baſes æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare erit vt baſis AB, ad baſin æqualem DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC. Ac proinde baſes atque altitudines ſunt reciprocæ.



QVOD ſi altitudines LC, MF, inæquales fuerint, ſit MF, maior, ex qua abſcindatur MN, ipſi LC, æqualis; & per N, ducatur planum ON, baſi DE, parallelum, vt

vt in ſcholio propoſ. 11. docuimus, vt fiant duo cylindri DO. OK. Quoniam igitur æquales ponuntur cylindri ABGH, DEIK; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO. [a] Eſt autem vt cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, ita baſis AB, ad baſin DE, cum æquales ſint altitudines: [c] Itē vt cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, cum baſes ſint æquales, immo vna & eadem DE. Igitur erit quoque vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem MN, hoc eſt, ad huic æqualem LC; Ac propterea reciprocæ ſunt baſes & altitudines.

[a] 7. quinti.
[b] 11. duod.
[c] 14. duod.

IN conis vero ita concludemus propoſitum. Si coni ABC, DEF, ſint æquales; erunt & cylindri ABGH, DEIK, æquales, [d] cum coni ſint cylindrorum tertiæ partes. Quare vt oſtenſum eſt, ex æqualitate cylindrorum ſequetur, baſes & altitudines eſſe reciprocas; Ac propterea, ex æqualitate conorum etiam ſequetur, baſes & altitudines reciprocas eſſe. Quod tamen eodem prorſus modo demōſtrari poteſt, quo vſi ſumus in cylindris, ſi modo ſub altitudinibus MN, NF conſtituātur duo coni, vt in figura.

[d] 10. duod.

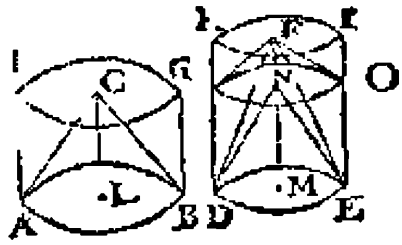
SED iam baſes atque altitudines reciprocentur. Dico conos & cylindros eſſe æquales. Quod quidē in cylindris confirmabitur hac ratione. Si altitudines LC, MF, ſint æquales, cum ſit vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem æqualem LC; erunt & baſes AB, DE, æquales: Ac propterea cylindri ſuper æquales baſes AB, DE, & ſub altitudinibus æqualibus LC, MF, æquales erunt, ex coroll. propoſ. 11. huius lib.

QVOD ſi altitudines fuerint inæquales, fiat conſtructio, vt prius. Quia igitur ponitur, vt baſis AB, ad baſin DE, ita altitudo MF, ad altitudinem LC, hoc eſt, ad huic æqualem MN; [e] Eſt autem vt baſis AB, ad baſin DE, ita cylindrus ABGH, ad cylindrum DO, cum altitudines ſint æquales: [f] Item vt altitudo MF, ad altitudinem MN, ita cylindrus DEIK, ad cylindrum DO, cum baſes ſint æquales; erit vt cylindrus ABGH, ad cylindrū DO, ita cylindrus DEIK, ad eundem cylindrum DO;

[e] 11. duod.
[f] 14. duod.

a 9. quinti

a ideoq; cylindrus ABGH, cylindro [illegible], æqualis erit. At vero in conis hæc [illegible]mo[illegible]atio. Si conorũ



ſB, DLE baſes & altitudines recip o étu, reciprocabũ tur quoq; baſes, & altitudines cylindrorum ABGH, DLIK, cũ eædem ſint baſes, altitudinesque conorum, & cylindrorum. Quam ob rem, vt oſtenſum fuit, cylindri, ideoque coni, eorum tertiæ partes, æquales erunt. Demonſtrari tamen poteſt eodem modo conos eſſe æquales quo oſtẽdimus cylindros æquales eſſe. Aequalium igitur conorum & cylindrorum reciprocãtur baſes & altitudines, &c. Quod erat demonſtrandũ.

SCHOLIVM.

NON difficile erit idẽ oſtendere de conis, & cylindris ſcalenis. Si enim æquales ſint coni & cylindri ſcaleni, erunt quoque recti eaſdem cum illis baſes, & altitudines habentes, æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. Quare vt oſtenſum eſt, baſes & altitudines reciprocabuntur. Quod ſi baſes, & altitudines conorum & cylindrorum ſcalenorum reciprocentur, reciprocabuntur quoque baſes & altitudines conorum & cylindrorum rectorum, ſi eædem ſint baſes, & altitudines rectorum & ſcalenorum. Quare, vt demonſtratum eſt, coni & cylindri recti æquales erunt; Ac propterea coni & cylindri ſcaleni, cum ſint rectis æquales, ex coroll. propoſ. 11. huius lib. inter ſe quoque erunt æquales.

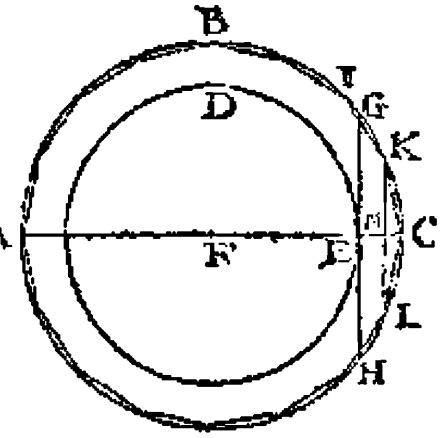
IDEM facile concludetur, licet vnus conorum & cylindrorum ſit rectus, & alter ſcalenus, vt perſpicuum eſt ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 14. huius lib. docuimus.

13. PROBL. 1. PROPOS. 16.

DVOBVS circulis circa idem centrum exiſtentibus, in maiori circulo polygonum

lygonum æquilaterum, & parium laterum inſcribere, quod non tangat minorem circulum.

SINT duo circuli ABC, DE, circa idē centrū F, oportcatq; in maiori ABC, inſcribere polygonū æquilaterū, cuius latera numero pari cōtinentur, nō tangens minorem DE. Extendatur per centrum F, recta AC, ſecās circulum DE, in E, puncto, & per E, ducatur GH, ad AC, perpendicularis, quæ tanget circulum DE, in E, ex coroll. propoſ. 16. lib 3. Quoniā igitur arcus AGC maior eſt arcu GC, ſi ex AGC, auferatur dimidium AB, & ex reſiduo BC, dimidium BI, & ex reſiduo IC, dimidium IK, & ſic deinceps; relinquetur tandem minor arcus quā CG. Sit igitur iā arcus CK, arcu CG, minor, & ſubtēdatur recta CK. Dico rectā CK, eſſe vnum latus polygoni inſcribendi. Si enim arcus BI, diuidatur in partes numero & magnitudine æquales partibus arcus CI; & quadrās AB, in totidē partes æquales diuidaſ, in quot diuiſus ē quadrans BC; necnō ſemicirculus AHC, in totidē partes, quot cōtinet ſemicirculus ABC; deinde oībus arcubus rectę lineę ſubtēdātur, quę æquales quidē erunt ipſi rectæ CK, eo quod arcus arcui CK, æquales ſubtendant: Deſcriptū erit polygonum in circulo ABC, & æquilaterum, & parium laterum. Quod quidē non tangere circulum minorem DE, ita oſtendetur. Ex K, ad AC, demittatur perpendicularis KL, ſecans ipſam AC, in M. Quōn igitur anguli GEM, KME, recti ſūnt; erūt rectę GH, KL parallelæ. Quare cū recta GH, tāgat circulū DE, in ſolo puncto E; recta KL, erit tota extra dictū circulū, nec vnquam ipſum continget, quod nunquā cum recta GH, cōueniat. Multo igitur minus recta CK, quæ longius a circulo DE, abeſt, quam KL, circulum DE, tanget. Ac



a 1. decimi

b 29. tertij.

c 28. primi

* 14. tertij. propterea neque alia latera polygoni inscripti, cũ æqualia sint lateri CK; ideoque æqualiter cum CK, a centro F distent, circulum DE, contingent. Duobus itaque circulis circa idem centrum existẽtibus, in maiori circulo, &c. quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

HINC est manifestum, si ab extremitate lateris polygoni inscripti, quod cum diametro conuenit, ad diametrum ducatur perpendicularis, hanc nullo modo circulum minorem posse contingere, sed totam extra ipsum cadere. Huiusmodi enim est linea KL, quæ cum ducatur ab extremo puncto K, lateris CK, cum diametro AC, conuenientis, ad AC, diametrum perpendicularis, ostensa est non tangere circulum DE.

14. PROBL. 2. PROPOS. 17.

DVABVS sphæris circa idem centrum existentibus, in maiori sphęra solidum polyedrum inscribere, quod non tangat minoris sphæræ superficiem.

SINT duæ spheræ ABCD, EFGH, circa idem centrum I, oporteatque in maiori ABCD, inscribere solidũ polyedrum, seu multilaterum, quod non tangat minorẽ sphæram EFGH. Secentur ambæ sphæræ plano aliquo per centrum, sintq; communes sectiones factæ in sphęris plana ABCD, EFGH, quæ circuli erunt, ex descriptione sphæræ, habentes idem centrum sphærarum I. Nam semicirculi, ad quorum circumuolutionem sphæræ describuntur, circumducti congruent sectionibus ABCD, EFGH. Quare dictæ sectiones circuli erunt. Vel certe, quia omnes

omnes lineæ rectę cadentes ex I, ad peripherias sectionũ sunt æquales, cum ducátur ex centro sphærarum ad earum superficiem; erunt ipsæ sectiones, circuli, ex definitione circuli. Ducátur in his circulis diametri AC, BD, se se in centro I secantes ad angulos rectos, vt sint quadrantes AB, BC CD, DA, &c. Deinde in maiori circulo ABCD, inscribatur polygonum non tangens minorem circulum EFGH. Quod quidẽ vt facilius omnia demonstrentur, in hunc modum efficiatur. Ex G, ad EG, ducatur perpendicularis Gγ, ad circumferentiam vsq; circuli ABCD, quæ circulũ EFGH, tanget in G, ex coroll. propos. 16. lib. 3. Et rectę Gγ, applicetur in circulo ABCD, recta æqualis Aε. Quia vero si arcui Cγ, intelligatur subtendi recta, vt fiat triangulum GCγ, latus Cγ, oppositũ maiori angulo, nẽpe recto, maius est latere Gγ, quod minori angulo opponitur, nimirum acuto; erit quoq; recta Cγ, maior recta Aε; ac proinde arcus Cγ, arcu Aε, maior erit, vt constat ex scholio propos. 28. lib. 3. Abscindatur ergo arcus Cδ, arcui Aε, æqualis. Quod si ex quadrante CD, dimidiũ auferatur DL, & ex reliquo CL, dimidiũ LK, & sic deinceps; relinquetur tandẽ arcus minor arcu Cδ, seu arcu Aε. Sit ergo iam arcus CK, minor; Eritq; recta CK, subtensa minor quam recta Aε, hoc est, quam Gγ, ex scholio propos. 29 lib. 3. Dico igitur, rectã CK, esse vnum latus polygoni æquilateri inscribendi. Nam cum recta subtendens arcum Cδ, minorem arcu Cγ, non tãgat circulum EFGH, vt ex demonstratione præcedentis propos. patet, multo minus recta CK subtendens arcum minorem arcu Cδ, eundem circulũ tanget. Rursus ducta diametro KN, erigatur ex centro I, ad plana circulorũ ABCD, EFGH, perpendicularis IO, occurrens superficiei sphæræ maioris in O; Et per rectas OI, AC, & OI, KN, plana ducantur, quæ ad circulum ABCD, recta erunt, efficientq; cõmunes sectiones, circulos, vt iam dictũ ẽ, quorũ semicirculi sint AOC, NOK. Quia vero anguli OIC, OIK, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. quadrantes erunt OC, OK; atq; adeo cum circuli ABCD, AOC, NOK, æquales sint, quod eorum diametri sint & sphæræ maioris diametri, erunt quoq; quadrantes CD,

a 16. duod.

b 1. quarti.

c 19. primi.

d 1. decimi

e 12. vnde.

f 18. vnde.

g schol. 22. tertij.

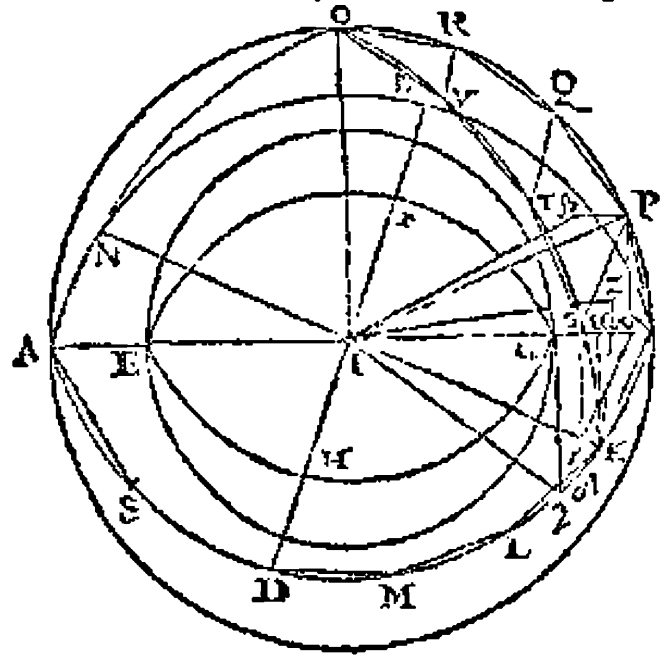
OC, OK, æquales. Si igitur arcus DL, in tot partes æquales diſtribuatur, in quot diuiſus fuit arcus CL; & quadrantes OC, OK, in arcus numero & magnitudine æquales arcubus quadrantis CD; Erunt rectæ his omnibus arcubus æqualibus ſubtenſæ, nimirum CK, KL, LM, MD; CP, PQ, QR, RO; KS, ST, TV, VO, æquales. Coniunctis autem rectis PS, QT, RV, demittantur ex P, & S, ad planum circuli ABCD, perpendiculares PX, SY, quæ in communes ſectiones AC, NK, cadent; eruntque inter ſe parallelæ.

a 29. tertij.

b 38. vnde.

c 6. vndec.

QVONIAM igitur triangulorum PCX, SKY, anguli PXC, SYK, recti ſunt, ex defin. 3. lib 11. & anguli PCX, SKY, æquales, quod & æquales ſint peripheriæ AOP, NOS, quibus inſiſtunt; (Nam ſi ex ſemicirculis AOC, NOK, æqualibus demantur arcus æquales CP, KS, reliqui arcus AOP, NOS, æquales quoq; erunt.) Erunt duo anguli PCX, PXC, triãguli PCX, æquales duobus angulis SKY, SYK, trianguli SKY: Sũt autẽ & latera PC, SK, rectis angulis oppoſita, æqualia. Igitur reliqua latera PX, XC, reliquis lateribus SY, YK, æqualia erunt. Quare cum rectæ PX, SY, æquales ſint & parallelæ; ſi connectatur recta XY; æquales quoque erunt & parallelæ PS, XY, inter ſeſe. At quia & rectæ CK, XY, parallelæ ſunt, quod latera IC, IK, proportionaliter ſecta ſint. (Si enim ex ſemidiametris IC, IK, æqualibus demãtur æquales rectæ CX, KY relinquãtur & IX, IY, æquales; Ac proinde erit, vt IX, ad XC, ita IY, ad YK.) Erũt parallelæ quoq; PS, CK, inter ſe, cum



d 27. tertij.

e 26. primi

f 33. primi

g 2. ſexti.

h 9. vndec.

ſe, cum vtraq; parallela ſit ipſi XY; a ideoque eas coniungentes rectæ CP, KS, in eodem cum ipſis plano exiſtent. Totũ igitur quadrilaterũ CKSP, in vno erit plano. Quod ſi ex Q, & T, demittantur ad planum circuli AB-CD, perpendiculares, & cõnectantur rectæ QC, TK, oſtẽdemus ſimiliter CK, QT, eſſe parallelas; atq; adeo ipſas PS, QT, inter ſe parallelas eſſe, cũ eidẽ CK, ſint parallelæ; totũq; quadrilaterũ PSTQ, in vno eſſe plano. Eadẽ ratione in vno erit plano qnadrilaterũ QTVR. b Eſt autẽ & triangulũ RVO, in vno plano. Si igitur eadẽ conſtructio exhibeatur ſuper reliqua latera KL, LM, MD, ductis ſcilicet quadrantibus OL, OM, OD; necnon in reliquis tribus quartis, ac reliquo hemiſphęrio, vt tota ſphęra maior repleatur quadrilateris, & triangulis, quæ ſimilia ſint prædictis inter quadrantes OC, OK, ſuper latus CK, cõſtructis; inſcriptũ erit in ſphęra maiori ſolidũ polyedrũ circumſcriptũ dictis quadrilateris, atq; triãgulis. Hoc ergo dico non tangere ſphæram minorem EFGH.

a 7. vndec.

b 2. vndec.

DVCATVR. n. ex I, ad planũ CKSP, perpẽdicularis IZ, connectanturque rectæ ZC, ZK. Quoniã igitur, ex defin. 3. lib. 11. anguli IZC, IZK, recti ſunt; c erit quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC, & quadratũ rectę IK, quadratis rectarum IZ, ZK, æquale. Cum ergo quadrata rectarum æqualium IC, IK, æqualia ſint, erunt & quadrata rectarũ IZ, ZC, quadratis rectarũ IZ, ZK, æqualia; Ac proinde dempto cõmuni quadrato IZ, reliqua quadrata rectarũ ZC, ZK, æqualia erunt, ideoq; & ipſę rectę ZC, ZK, æquales. Similiter oſtẽdemus rectas, q̃ ex Z, ad PS, ducẽtur, æquales eſſe & inter ſe, & rectis ZC, ZK. Quare circulus ex Z, ad interuallũ ZC, deſcriptus p quatuor pũcta C, K, S, P, trãſibit. Eadẽq; rõne circa reliqua quadrilatera PSEQ, QTVR, & triangulũ RVO, circulos deſcribi poſſe, demõſtrabimus. Qm̃ vero, vt poſtea oſtẽdemus, angulus CZK, obtuſus eſt; d erit quadratum rectę CK, maius quadratis rectarum ZC, ZK; ideoque cum hæc quadrata æqualia ſint, malus erit quadratum rectæ CK, duplo quadrati rectę ZC.

c 47. primi.

d 12. ſecun.

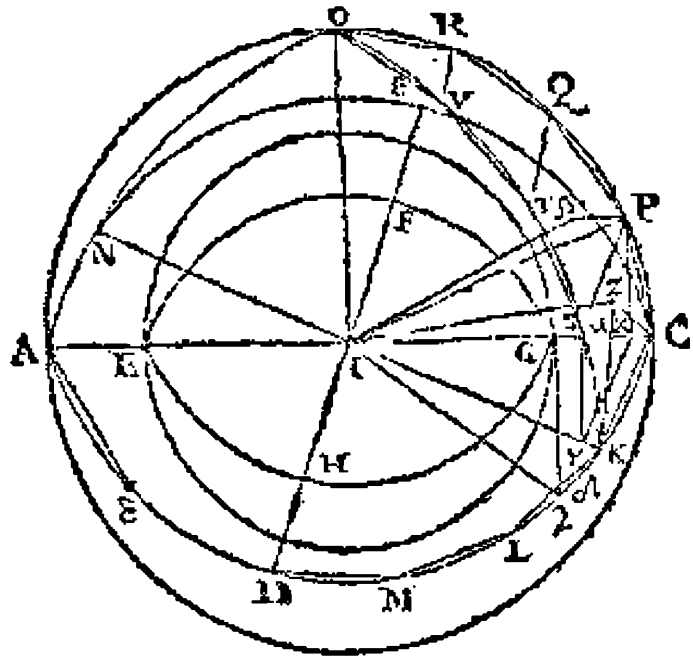
DVCATVR ex K, ad rectã AC, perpendicularis Kα. Cum igitur AC, dupla ſit ipſius AI, & Aα, maior ſit,

quã AI, erit AC, minor duplo ipſius Aα. Quã ob rẽ cum ſit, [a] vt AC, ad Aα, ita rectangulũ ſub AC, αC, ad rectangulũ ſub Aα, αC, quod baſes horum rectangulorum ſint AC, Aα, & eadẽ altitudo αC; erit quoq; rectãgulum ſub AC, αC, minus duplo rectanguli ſub Aα, αC. [b] Eſt autem rectangulũ ſub AC, αC, ęquale quadrato rectę CK; & rectangulũ ſub Aα, αC, æquale quadrato rectæ Kα; quod recta CK, inter AC, αC, ſit media proportionalis; & recta Kα, inter Aα, αC, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. (ſi enim connecteretur recta AK fieret triangulum rectangulum ACK.) Igitur & quadratum rectæ CK, minus erit duplo quadrati rectæ Kα. Ac propterea cum quadratum rectæ CK, oſtenſum ſit maius eſſe duplo quadrati rectæ ZC; erit quadratũ rectæ Kα, maius quadrato rectæ ZC.

[a] 2 ſexti.

[b] 17. ſexti.

[c] 47. primi



[c] Quoniã vero quadratũ rectæ IC, æquale eſt quadratis rectarũ IZ, ZC; & quadratũ rectæ IK, quadratis rectarum Iα, αK: Suntque ęqualia quadrata rectarũ ęqualiũ IC, IK; Erunt & quadrata rectarum IZ, ZC, ęqualia quadratis rectarũ Iα, αK. Si ergo ex his dematur quadratum maius, nempe rectę αK; & ex illis minus, videlicet rectę ZC, erit reliquum quadratũ rectę IZ, maius quadrato reliquo rectæ Iα; ideoque recta IZ, maior quam recta Iα. Quapropter cum punctum α, non tãgat ſphæram minorem EFGH, quod per coroll. propoſ. præcedentis recta Kα, tota ſit extra dictam ſphæram; multo minus punctum Z, longius diſtans, eandem ſphæram continget. Ac proinde cũ omnia alia puncta plani CKSP, longius abſint a ſphæra EFGH,

EFGH, quam punctum Z, vt mox oſtendemus, non tanget planum CKSP, ſphæram EFGH.

SED & expeditius ex ipſa fere conſtructione figuræ oſtendemus, planum CKSP, non tangere ſphæram minorem EFGH, ſi prius ducatur recta Iγ, hoc modo. Quoniam ex conſtructione oſtenſum fuit, rectam CK, minorem eſſe recta Cγ: Eſt autem CK, maior quam ZC, quod angulus CZK, obtuſus ſit, vt mox demonſtrabitur; Multo maior erit Gγ, quam ZC; Ac proinde quadratum rectæ Gγ, maius quadrato rectæ ZC. [b] Quia vero quadratum rectæ Iγ, æquale eſt quadratis rectarum IG, Gγ; & quadratum rectæ IC, quadratis rectarum IZ, ZC; ſunt autem quadrata rectarum Iγ, IC, æqualium æqualia; erunt & quadrata rectarum IG, Gγ, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia. Dempto ergo illinc quadrato rectæ Gγ, & hinc quadrato rectæ ZC; relinquetur quadratum rectæ IG, minus quadrato rectæ IZ; Ac propterea recta IG, minor, quam IZ. Quam ob rem, cum IG, ſit ſphæræ minoris EFGH, ſemidiameter; exiſtet punctum Z, extra eandem ſphæram; Et proinde, vt prius, planum CKSP, ſphæram EFGH, nequaquam continget.

[a] 19. primi

[b] 47. primi

DVCATVR rurſus ex I, ad planum PSTQ, perpendicularis Iβ, eritque β, centrum circuli circa PSTQ, deſcripti, vt demonſtratum eſt: Connexis autem rectis βP, IP, cum angulus IβP, rectus ſit, ex 3. defin. lib. 11. [c] erit quadratum rectæ IP, æquale quadratis rectarum Iβ, βP. Quia uero & quadratum rectæ IC, (quod æquale eſt quadrato rectæ IP, ob æqualitatem rectarum IC, IP,) æquale eſt quadratis rectarum IZ, ZC; erunt quadrata rectarum Iβ, βP, quadratis rectarum IZ, ZC, æqualia: Eſt aũt quadratum rectæ ZC, maius quadrato rectæ βP, quod & linea ZC, maior ſit, quam linea βP, vt poſtea oſtendemus. Reliquum igitur quadratum rectæ Iβ, reliquo quadrato rectæ IZ, maius erit; ideoque & linea Iβ, maior quam linea IZ: Ac proinde multo magis punctum β, extra ſphæram EFGH, exiſtet, quam punctum Z; propterea quæ multo minus planum PSTQ, quam CKSP, tanget ſphæ-

[c] 47. primi

ram

ram minorem E F G H. Eodem modo demonſtrabimus, quod neque reliqua plana ſphæram dictam contingere poſsint. Quocirca, duabus ſphæris circa idem centrum exiſtentibus, in maiori ſphæra ſolidum polyedrum inſcripſimus, quod non tangat minoris ſphæræ ſuperficiem. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

EX ijs, quæ demonſtrata ſunt, manifeſtum eſt, ſi in quauis alia ſphæra deſcribatur ſolidum polyedrum ſimile prædicto ſolido polyedro, proportionem polyedri in vna ſphæra ad polyedrum in altera ſphæra eſſe triplicatam eius, quam habent ſphærarum diametri. Nam ſi ex centris ſphærarum ad omnes angulos baſium dictorum polyedrorum rectæ lineæ ducantur, diſtribuentur polyedra in pyramides numero æquales, & ſimiles, quarum homologa latera ſunt ſemidiametri ſphærarum; vt conſtat, ſi intelligatur harum ſphærarum minor intra maiorem circa idem centrum deſcripta. Congruent enim ſibi mutuo lineæ rectæ ductæ a centris ad baſium angulos, ob ſimilitudinem baſium; Ac propterea pyramides efficientur ſimiles. Quare cum ſingulæ pyramides in vna ſphæra ad ſingulas pyramides illis ſimiles in altera ſphæra habeant proportionem triplicatam laterum homologorum, hoc eſt, ſemidiametrorum ſphærarum, vt conſtat ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Sint autem, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes pyramides, hoc eſt, ſolidum polyedrum ex ipſis compoſitum, ad omnes pyramides, id eſt, ad ſolidum polyedrum ex ipſis conſtitutum: Habebit quoque polyedrum vnius ſphæræ ad polyedrum alterius ſphæræ proportionem triplicatam ſemidiame-

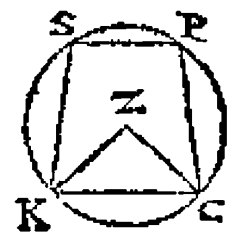
metrorum, atque adeo diametrorum ſphararum, [a] cum ſemidiametri atque diametri eandem habeant proportionem.

[a] 15. quinti

SCHOLIVM.

QVONIAM vero ne nimis longa demonſtratio fieret, nonnulla in ea aſſumpta fuerunt, vt vera; quæ tamen nondum ſunt demonſtrata; idcirco ea nunc breuiter a nobis erunt demonſtranda.

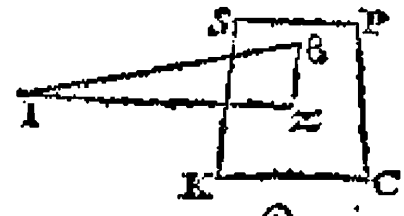
PRIMVM itaque oſtendendum eſt, angulum CZK, in quadrilatero CKSP, eſſe obtuſum. Quod vt commodius fiat, deſcribatur circa dictum quadrilaterum ex centro Z, circulus. Quoniam igitur in figura ſuperiori, eſt vt IK, ad KC, ita IY, ad YX, (quod per coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangula ICK, IXY, ſimilia ſunt.) Eſt autem IK, maior quam IY; [b] erit & KC, maior quam YX. Cum igitur YX, æqualis ſit oſtenſæ ipſi SP, erit quoque KC, maior quam SP; Ac propterea arcus CK, maior erit arcu SP, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3. [c] Quare cum arcus CP, KS, arcui CK, ſint æquales, quod & lineæ CP, KS, ipſi KC, lineæ ſint æquales demonſtratæ; (ſubtenduntur enim arcubus circulorum æqualibus, vt ex conſtructione figuræ ſuperioris conſtat) erunt quoque arcus CP, KS, arcu PS, maiores; Atq; idcirco quilibet arcuum CK, CP, KS, quadrantem circuli CKSP, excedet; atque adeo angulus CZK, obtuſus erit, nempe recto maior, cum angulo recto in centro ſubtendatur quadrans circuli, vt perſpicuum eſt ex ſcholio propoſ 27. lib. 3.



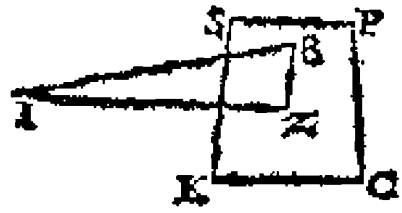
[b] 14 quin.

[c] 28. tertij

SECVNDO demonſtrandum eſt, omnia alia puncta quadrilateri CKSP, longius a centro I, abeſſe, quam punctum Z. Sumatur enim quodcunque aliud punctum θ, in quadrilatero CKSP, & adiungantur rectæ Iθ, Zθ.



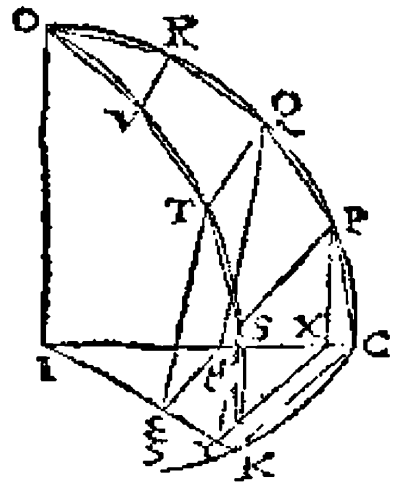
Quoniam



[a] 29. primi

Quoniã ergo angulus I Z β, *rectus est, ex defin. 3. lib. 11.* [a] *Erit latus illi oppositum* I β, *maius latere* I Z, *quod minori angulo* I β Z, *nimirũ acuto, opponitur; Ac propterea punctum* β, *longius a centro* I, *distat, quam punctum* Z. *Simili argumento concludemus, omnia alia puncta longius distare.*

TERTIO, *ac vltimo probandum est, rectam* Z C, *maiorem esse recta* β P. *Quod vt aptius fiat, demonstrandum prius erit, rectam* P S, *maiorem esse recta* Q T. *Describatur igitur pars superioris figurae, ea videlicet, quae continetur semidiametris* I C, I O, *& quadrantibus* O C, O K, *&c. Demittantur deinde ex* Q, *& T, ad planum circuli A B. C D, in quo est triangulum I C K, perpendiculares* Q μ, T ξ, [b] *quae in communes sectiones I C, I K, cadent,* [c] *erunt que inter se se parallelae, vt de rectis* P X, S Y, *dictum est. Quod si adiungatur recta* μ ξ, *erunt* Q T, μ ξ, *parallelae & aequales, quemadmodum ostensum fuit parallelas esse & aequales* P S, X Y. [d] *Quia vero* μ ξ, *ipsi* C K, *parallela est; quod latera* I C, I K, *praeterquam aliter sint sita in* μ, *& ξ, veluti diximus de recta* X Y; [e] *erunt quoque* μ ξ, X Y, *parallelae. Quare erit, ex coroll. propos. 4. lib. 6. vt* I Y, *ad* Y X, *ita* I ξ, *ad* ξ μ: *Est autem* I Y, *maior quam* I ξ. *Igitur & Y X, maior erit quam* ξ μ; *Ac proinde & P S, quae aequalis est ipsi X Y, maior erit quam* Q T, *quae aequalis est ipsi* ξ μ.



[b] 3 8. vnde.
[c] 6. vnde.
[d] 2. sexti
[e] 30. primi

HOC ergo demonstrato, describantur ex centris Z, β, *circa quadrilatera* C K S P, P S T Q, *circuli, egrediantur que e centris rectae* Z C, Z K, Z S, Z P; β P, β S, β T, β Q. *Si igitur* Z C, *non credatur maior, quam* β P, *erit vel aequalis, vel minor. Sit primum aequalis. Quia ergo latera* Z K, Z C, *aequalia*

lia ponuntur lateribus β S, β P, & baſis K C, maior eſt baſe P S; [a] erit angulus K Z C, maior angulo S β P: Eadem ratione maior erit angulus S Z P, angulo T β Q. At quoniam baſes K S, C P, baſibus S T, P Q, ſunt æquales; [b] erunt anguli K Z S, C Z P, angulis S β T, P β Q, æquales. Igitur quatuor anguli ad Z, maiores erunt quatuor angulis ad β: Sunt autem & æquales, cum tam hi, quam illi quatuor rectis ſint æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. quod eſt abſurdum. Non igitur æqualis eſt recta Z C, rectæ β P.

[a] 25. primi

[b] 8. primi

SIT deinde Z C, minor, quam β P. Et abſcindantur β π, β ρ, β ω, β φ, ipſis Z C, Z K, Z S, Z P, æquales, connectanturque rectæ π ρ, ρ ω, ω φ, φ π, [c] quæ parallelæ erunt rectis P S, S T, T Q, Q P, eo quod rectæ ex centris ſectæ ſint proportionaliter; ac proinde, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. erit vt β S, ad S P, ita β ρ, ad ρ π. Cum ergo β S, maior ſit quam β ρ, [d] erit & S P, maior quam ρ π. Eademque ratione maiores erunt S T, T Q, Q P, rectis ρ ω, ω φ, φ π; Ac propterea cum P S, minor ſit, quam C K, & S T, P Q, æquales rectis K S, C P; & T Q, minor quam P S, erunt rectæ ω ρ, ρ ω, ω φ, φ π, minores rectis C K, K S, S P, P C. Quare cum rectæ β π, β ρ, β ω, β φ, rectis Z C, Z K, Z S, Z P, ſint æquales; [e] erunt anguli ad Z, maiores angulis ad β: Sunt autem & æquales, quod tam illi, quam hi ſint quatuor rectis æquales, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 1. Quod eſt abſurdum. Non igitur minor eſt recta Z C, quam β P: Sed neque æqualis eſt oſtenſa; Maior igitur eſt. Quod erat oſtendendum.

[c] 2. ſexti

[d] 14. quin.

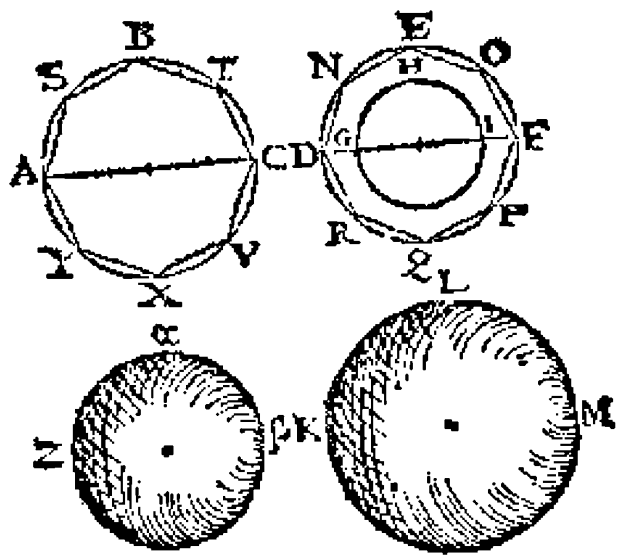
[e] 25. primi

THEOR. 16. PROPOS. 18. 15.

SPHAERAE inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum.

SINT

SINT duæ ſphæræ A B C, D E F, quarum diametri A C, D F. *Dico* ſphæram A B C, ad ſphæram D E F, habere proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F. Si enim hoc non concedatur, habebit ſphæra A B C, ad aliam ſphæram G H I, minorem, vel K L M, maiorem, quã D E F, triplicatam proportionem diametri A C, ad diametrum D F. Habeat primũ ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, minorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F; intelligaturque ſphæra G H I, concentrica ſphæræ D E F. [a] Inſcribatur in ſphæra maiori D E F, polyedrum D N E O F P Q R, non tangens minorem ſphæram G H I; Atque huic ſimile polyedrum A S B T C V X Y, inſcribatur in ſphæra A B C. Quoniam igitur ponitur proportio ſphæræ A B C, ad ſphæram G H I, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F: Eſt autem, per coroll. præcedentis propoſ. & proportio polyedri A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R, triplicata proportionis diametri A C, ad diametrum D F; Erit vt ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, ita polyedrum A S B T C V X Y, ad polyedrum D N E O F P Q R. Quare cum ſphæra A B C, maior ſit polyedro A S B T C V X Y, [b] erit & ſphæra G H I, maior polyedro D N E O F P Q R, pars toto. Quod eſt abſurdum. Non igitur habebit ſphæra A B C, ad ſphæram G H I, minorem ſphæra D E F, proportionem triplicatam diametri A C, ad diametrum D F.



[a] 17. duod.

[b] 14. quin.

HA-

HABEAT ſecundo ſphæra *ABC*, ad ſphæram *KLM*, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Cum igitur, ex coroll. præcedentis propoſ. & polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR, habeat proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF; Erit vt ſphæra ABC, ad ſphæram *KLM*, ita polyedrum ASBTCVXY, ad polyedrum DNEOFPQR: Et conuertendo, vt ſphæra KLM, ad ſpheram ABC, ita polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY: Eſt autem ex dicto coroll. præcedentis propoſitionis polyedrum DNEOFPQR, ad polyedrum ASBTCVXY, in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum AC. Igitur & ſphæra *KLM*, ad ſphæram *ABC*, erit in triplicata proportione diametri DF, ad diametrum *AC*. Ponatur vt ſphæra KLM, ad ſphæram ABC, ita ſphæra DEF, ad aliam ſphæram $Z\alpha\beta$. Habebit igitur & ſphæra *DEF*, ad ſphæram $Z\alpha\beta$, proportionem triplicatam diametri *DF*, ad diametrum *AC*. Et quia ſphæra *KLM*, maior ponitur, quam ſphæra DEF, erit quoque ſphæra ABC, maior, quam ſphæra $Z\alpha\beta$. Quapropter ſphæra DEF, ad ſphæram $Z\alpha\beta$, minorem ſphæra ABC, proportionem habet triplicatam diametri DF, ad diametrum AC. Quod eſt abſurdum. Oſtenſum enim eſt non poſſe ſphæram ad ſphæram alia ſphæra minorem, proportionem habere triplicatam diametrorum. Non ergo habebit ſphæra *ABC*, ad ſphæram KLM, maiorem ſphæra DEF, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sed neque ad minorem habet, vt demonſtratum eſt: Igitur habebit ad ſphæram *DEF*, proportionem triplicatam diametri AC, ad diametrum DF. Sphęræ itaq; inter ſe ſunt in triplicata ratione ſuarum diametrorum. Quod erat oſtendendum.

HINC

COROLLARIVM.

HINC fit, ita esse sphæram ad sphæram, vt polyedrum in illa descriptum ad polyedrum simile in hac descriptum. Quia tam sphæra ad sphæram, quam polyedrum ad polyedrum habet triplicatam diametrorum proportionem, vt demonstratum est.

FINIS ELEMENTI DVODECIMI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM TERTIVMDECIMVM.

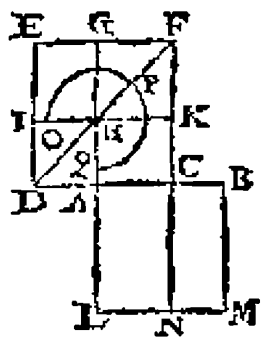
Et Solidorum tertium.

THEOR. 1. PROPOS. 1. 1.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; maius segmentum assumẽs dimidiam totius, quintuplum potest eius, quod a dimidia totius describitur, quadrati.

SECETVR recta *A B*, in *C*, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum *A C*. Producta autem *B A*, ad *D*, sit *A D*, dimidia totius *A B*. Dico quadratum rectæ *C D*, quintuplum esse quadrati rectæ *A D*. Describatur enim super *C D*, quadratum *C E*, in quo ducta diametro *D F*, ducatur *A G*, ipsi *D E*, parallela, secans diametrum in *H*, puncto, per quod ducatur *I K*, parallela ipsi *C D*. Producta deinde *G A*, perficiatur quadratum *A M*, protrahaturque *F C*, ad *N*. eruntque

ex coroll.propoſ.4. lib.2. AI, KG, quadrata rectarum AD, AC. [a] Quia ergo eſt vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulũ CM, ſub AB, CB, æquale ipſi KG, quadrato rectæ AC. Deinde cum ponatur AB, dupla ipſius AD, ſitque AL, ipſi AB; & AH, ipſi AD, æqualis; erit quoque AL, ipſius AH, dupla: [c] Eſt autẽ vt AL, ad AH, ita rectangulum AN, ad AK, rectangulum. Duplum igitur eſt AN, ipſius AK. [d] Quoniam autem AK, ipſi IG, eſt æquale; erit AN, æquale duobus AK, IG. Additis igitur æqualibus CM, KG; erit quadratum AM, gnomoni OPQ, æquale. Quare cum quadratum AM, quadruplum ſit quadrati AI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod linea AB, dupla ponatur lineę AD; erit & gnomon OPQ, eiuſdem quadrati AI, quadruplus; Ac propterea, ſi gnomoni OPQ, addatur ipſum quadratum AI, quintuplum efficietur quadratum CE, quadrati AI.



ALITER. Ex ſcholio propoſ.4. lib.2. quadratum rectæ AB, quadruplum eſt quadrati rectæ AD, quod linea AB, dupla lineæ AD, ponatur. [e] Eſt autem quadratum rectæ AB, æquale rectangulis ſub AB, AC, & ſub AB, BC, comprehenſis; Et rurſus, quod ſub AB, AC, æquale eſt ei, quod ſub AD, AC, bis; (ſicut enim AB, ipſius AD, eſt dupla, [f] ita quoque erit rectangulum ſub AB, AC, rectanguli ſub AD, AC, duplum, cum vtriuſq; rectanguli eadem ſit altitudo AC. Ac propterea rectangulum ſub AD, AC, bis ſumptum æquale erit rectangulo ſub AB, AC.) [g] Quod vero ſub AB, BC, æquale eſt quadrato rectæ AC, cum ſit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Igitur quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quadruplum quoque erit quadrati rectæ AD; Ac proinde quadrata rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis, quintupla erunt quadrati eiuſdem rectæ AD. [h] Quocirca cum quadratum rectæ CD, æquale ſit quadratis rectarum AC, AD, vna cum rectangulo ſub AD, AC, bis; Erit & quadratum



rectæ

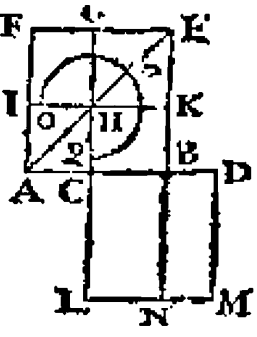
[a] 3. defin. ſexti.
[b] 17. ſexti.
[c] 1. ſexti
[d] 43. primi
[e] 2. ſecundi
[f] 1 ſexti.
[g] 17. ſexti
[h] 4. ſecun.

rectæ CD, quadrati rectæ AD, quintuplum. Si recta igitur linea secundum extremam & mediam rationem secetur, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 2.

SI recta linea suijpsius segmenti quintuplum possit; Duplæ prædicti segmenti extrema ac media ratione sectæ, maius segmentum reliqua pars est eius, quæ a principio, rectæ.

DIVISA sit recta AB, in C, positque quintuplum segmenti AC; sumatur autē ipsius AC, dupla CD, quę, vt post ostēdemus, maior erit reliquo segmento BC. Dico si CD, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse CB, reliquā partem prioris lineę. Describatur.n. I super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ex C, ducatur ipsi AF, parallela CG, secans diametrum in puncto H, per quod agatur IK, parallela ipsi AB. Producta deinde GC, perficiatur quadratum CM, protrahaturq; EB, ad N. Eruntque ex coroll. propos. 4. lib. 2. CI, KG, quadrata rectarum AC, CB. Quia igitur quadratum BF, quintuplū ponitur quadrati CI; Si tollatur quadratū CI, relinquetur gnomon OPQ, eiusdē quadrati CI, quadruplus: Est autē & quadratum CM, quadruplum quadrati CI, ex scholio propos. 4. lib. 2. quod recta CD, dupla sit rectæ AC. Igitur gnomon OPQ, quadrato CM, æqualis erit. Rursus quoniam CD, ponitur ipsius AC, dupla; estque LC, ipsi CD; & CH, ipsi AC, æqualis; erit & LC, ipsius CH, dupla. [a] Cum igitur sit vt LC, ad CH, ita rectāgulum LB, ad rectangulum CK; erit quoque illud huius duplum: [b] Est autem CK, ipsi HF, æquale. Aequale igitur est LB,



[a] 1. sexti

[b] 43. primi

ipſis CK, HF; Ac proinde & reliquum quadratum KG, reliquo rectangulo BM. Quoniam ergo ſunt tres rectæ CD, CB, BD; eſtque rectangulum BM, ſub CD, BD, comprehenſum æquale ipſi KG, quadrato rectæ CB; [a] Erit vt CD, ad CB, ita CB, ad BD. Quam ob rem, ex definitione, recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum CB.

[a] 17. ſexti

ALITER. Quoniam quadratum rectę AB, quintuplum ponitur quadrati rectæ AC; [b] eſtque quadratum rectæ AB, æquale quadratis rectarum CB, AC, vna cum rectangulo ſub AC, CB, bis; Erunt & quadrata rectarum CB, AC, una cum rectangulo ſub AC, CB, bis, quintuplum quadrati rectę AC. Dempto igitur quadrato rectę AC, relinquetur quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadruplum eiuſdem quadrati rectę AC: Eſt autem & quadratum rectę CD, eiuſdem quadrati rectę AC, quadruplum, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Aequale igitur eſt quadratum rectę CB, & rectangulum ſub AC, CB, bis, quadrato rectæ CD. Cum ergo rectangulum ſub AC, CB, bis, æquale ſit rectangulo ſub CD, CB; (ſicut enim recta CD, dupla eſt rectæ AC, [c] ita quoque duplum erit rectangulum ſub CD, CB, rectanguli ſub AC, CB; cum vtriuſque rectāguli eadem ſit altitudo CB; Ac propterea rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectangulo ſub AC, CB, bis.) Erit & quadratum rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, quadrato rectæ CD, æquale: [d] At quadratum rectæ CD, æquale eſt rectangulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD. Igitur quadratū rectæ CB, & rectangulum ſub CD, CB, æquale erit rectāngulis ſub CD, CB, & ſub CD, BD; Ac proinde dempto communi rectangulo ſub CD, CB, relinquetur quadratum rectæ CB, æquale rectāgulo ſub CD, BD; [e] eidoque erit vt CD, ad CB, ita CB, ad DB. Quare ex defin. recta CD, ſecta eſt in B, extrema ac media ratione, eſtque ſegmentum maius CB. Si igitur recta linea ſui ipſius ſegmenti quintuplū poſsit, &c. Quod erat demonſtrandum.



[b] 4 ſecundi

[c] 1. ſexti

[d] 3. ſecundi

[e] 17. ſexti

LEM

LEMMA.

QVOD autem recta CD, maior ſit neceſſario, quam CB, ita oſtendemus ex hypotheſi. Quia quadratum rectæ CD, quadruplum eſt, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadrati rectæ AC; Addito quadrato rectæ AC, erunt duo quadrata rectarum CD, AC, quintupla eiuſdem quadrati rectæ AC. Eſt autem quadratum rectæ AD, maius quadratis rectarum AC, CD,. cum æquale ſit quadratis rectarum AC, CD, vna cum rectangulo ſub AC, CD, bis. Igitur quadratum rectæ AD, maius quoque erit quintuplo quadrati rectæ AC; Ac propterea maius quadrato rectæ AB, quod quintuplum ponitur eiuſdem quadrati rectæ AC. Quare recta AD, maior erit, quam recta AB; ideoque dempta communi AC; maior erit reliqua CD, quam reliqua CB. Quod eſt propoſitum. . 4 ſecundi

THEOR. 3. PROPOS. 3. 3.

SI recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; minus ſegmentum aſſumens dimidiam maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati.

SECETVR recta A B, in C, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum *A* C, bifariam diuidatur in D. Dico quadratũ rectę BD, quintuplũ esse quadrati rectæ C D. Describatur. n. super A B, quadratum A E, in quo diameter B F. Deinde ex C, D, ducantur ipsis A F, B E, parallelæ CG, DH, secantes diametrum in *I*, *K*. punctis, per quæ agantur ipsis AB, EF, parallelæ LM, NO, quæ secẽt rectas CG, DH, in P, Q. Erunt q; ex coroll propos. 4. lib 2. LG, PQ, DO, quadrata rectarum *AC*, CD, BD. Quoniam igitur recta A C, dupla est rectæ C D, erit ex scholio eiusdem propos. quadratum LG, quadruplum quadrati P Q. Est autem rectangulum CE, æquale quadrato LG. (Nam cum sit vt *AB*, ad AC, ita AC, ad CB, [a] erit rectangulum sub A B, C B, nempe CE, æquale quadrato rectæ AC, nimirum ipsi LG.) Igitur & CE, quadruplũ erit quadrati PQ. Quia vero æqualia sunt quadrata N H, P Q, ob æqualitatem rectarum AD, CD; erunt earũ latera H *K*, *I*Q, æqualia; [b] ac proinde rectæ EO, OM, ipsis oppositæ æquales erunt. [c] Quare rectangula IO, Q E, æqualia erunt: [d] Est autem I O, ipsi I *D*, æquale. Ergo & QE, eidem I *D*, æquale erit; Ac proinde, addito communi rectangulo C O; totus gnomon RST, rectangulo CE, erit æqualis. Cum igitur CE, ostensum sit quadruplum quadrati P Q; erit etiam gnomon RST, eiusdem quadrati P Q, quadruplus: *Ac* propterea addito quadrato P Q, erit quadratum *D* O, ex recta BD, quintuplum quadrati P Q. ex recta *C* D.

[a] 17. sexti

[b] 34. primi
[c] 36. primi
[d] 43. primi

ALITER. Cum A C, diuisa sit bifariam in *D*, & ei addita CB; [e] erit rectangulum sub A B, B C, vna cum quadrato rectę CD, æquale quadrato rectæ BD. At rectangulum sub *AB*, BC, quadruplum est quadrati rectæ CD; (Nam cum sit, vt AB, ad *AC*, ita AC, ad *CB*; [f] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectę *A C*: quod cum, ex scholio propos. 4. lib 2. quadruplũ sit quadrati rectæ CD; erit & rectangulum sub AB, BC, quadruplum eiusdem quadrati rectę C D.) *Ac* propterea rectangulum sub *A* B, B C, vna cum quadrato rectæ *C D*.

[e] 6 secundi

[f] 17. sexti.

CD, quintuplum quadrati rectę CD. Igitur & quadratū rectę BD, quintuplum erit quadrati rectę CD. Si recta ergo linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, minus ſegmẽtum aſſumens dimidium maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

CONVERSVM huius theorematis demonſtrabimus quoque cum Campano ad hunc modum.

SI recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentum aſſumens dimidium maioris ſegmenti quintuplum poſsit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati; Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione.

SIT recta AB, diuiſa inæqualiter in C, cuius maius ſegmentum AC, biſariam ſectum ſit in D; ſitque quadratum rectæ BD, quintuplum quadrati rectæ CD. Dico rectam AB, diuiſam eſſe in C, extrema ac media ratione. Repetita enim figura priore huius propoſ. erit quadratum LG, rectæ AC, quadruplum quadrati PQ, rectæ CD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eſt autem & gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus. (cum enim quadratum DO, rectæ BD, quintuplum ponatur quadrati PQ, ex rectæ CD; dempto quadrato PQ, relinquetur gnomon RST, eiuſdem quadrati PQ, quadruplus.) Igitur gnomon RST, æqualis erit quadrato LG: At gnomoni RST, æquale eſt rectangulum CE, vt ſupra oſtenſum eſt. Ergo & quadrato LG, rectæ AC, æquale erit idẽ rectangulum CE, ſub AB, BC, comprehenſum: [a] *At proinde erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quocirca, ex definitione, ſecta erit AB, in C, extrema ac media ratione. Quod eſt propoſitum.* [a] 17. ſexti

ALITER. Cum AC, diuiſa ſit biſariam in D, & ei

addita CB; [a] *erit rectangulum ſub AB, BC, vna cum quadrato rectæ CD, æquale quadrato rectæ BD; Ac propterea cum quadratum ex rectalinea BD, deſcriptum quintuplum ponatur quadrati ex recta CD, deſcripti; erit & rectangulum ſub rectis lineis AB, bC, deſcriptum, vna cum quadrato rectæ CD, quintuplum eiuſdem quadrati rectæ CD. Quare ablato quadrato rectæ CD; rectangulum ſub AB, BC, quadruplum erit quadrati rectæ CD: Eſt autem eiuſdem quadrati rectæ CD, quadruplum quadratum rectæ AC, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Igitur quadrato rectæ AC, æquale eſt rectangulũ ſub AB, BC.* [b] *Quamobrẽ erit, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde ſecta AB, in C, extrema ac media ratione, ex definitione.*

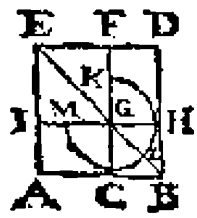
[a] 6. ſecundi

[b] 17. ſexti

5. THEOR. 4. PROPOS. 4.

SI recta linea ſecundnm extremam & mediam rationem ſecetur; Quod a tota, quodq; a minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla ſunt eius, quod a maiore ſegmento deſcribitur quadrati.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, ſitq; ſegmentũ maius AC, & minus CB. Dico quadrata rectarum AB, BC, ſimul tripla eſſe quadrati rectæ AC. Deſcribatur enim ſuper AB, quadratũ AD, in quo ducta diametro BE, ducatur ex C, ipſi BD, parallela CF, ſecans diametrum in puncto G, per quod agatur HI, parallela ipſi AB. Eruntq; CH, IF, quadrata rectarum BC, AC, ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. Quoniam igitur eſt, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [c] erit rectangulum ſub AB, BC, nempe AH, æquale ipſi IF, quadrato rectæ AC. Cum ergo AH, æquale ſit ipſi CD; erit gnomon KLM,



[c] 17. ſexti

KLM, vna cum quadrato CH, duplus quadrati IF; Ac proinde, addito quadrato IF, erit quadratum AD, rectæ AB, vna cum quadrato CH, rectę BC, eiusdem quadrati IF, rectæ AC, triplum.

ALITER. Quoniam est, vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [a] erit rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato rectæ AC; Atq; adeo rectangulum sub AB, BC, bis, vna cum quadrato rectæ AC, triplum quadrati rectæ AC. [b] Sunt autem quadrata rectarum AB, BC, simul æqualia quadrato rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis. Igitur & quadrata rectarũ AB, BC, tripla sunt quadrati rectæ AC. Quocirca si recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; Quod a tota, quodq; a minore segmento, simul vtraque quadrata, tripla sunt eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati. Quod erat demonstrandum.

[a] 17. sexti

[b] 7. secundi

SCHOLIVM.

CONVERSVM *etiam huius verum est, videlicet.*

SI recta linea inæqualiter secetur, fitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris segmenti, triplum quadrati ex maiore segmento descripti; Recta illa linea extrema ac media ratione secabitur.

SECTA sit recta AB, inæqualiter in C, ita vt quadratum totius AB, & quadratum minoris segmenti BC, vtraq; simul tripla sint quadrati maioris segmenti AC. Dico rectã AB, sectam esse extrema ac media ratione. Constructa enim figura, vt prius; cum quadrata AD, CH, tripla sint quadrati IF; dempto quadrato IF, erit gnomon KLM, vna cum quadrato CH, duplus eiusdem quadrati IF: Est autem gnomon KLM, vna cum quadrato CH, æqualis duobus rectangulis AH, CD. Igitur & rectangula AH, CD, dupla sunt quadrati IF; Ac propterea cum æqualia sint AH, & CD; erit AH, ipsi IF, æquale. Quapropter cum rectangulum AH, sub AB, BC, æquale sit quadrato IF, rectæ AC; [c] erit vt AB,

[c] 17. sexti

vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; Ac proinde AB, diuisa erit in C, extrema & media ratione.

ALITER. Cum quadrata rectarum AB, BC, tripla [a] *sint quadrati rectæ AC;* [a] *Sint vero quadrata rectarũ AB, BC, æqualia quadrato rectæ AC, & rectãgulo sub AB, BC, bis; erit & quadratum rectæ AC, vna cum rectangulo sub AB, BC, bis, triplũ quadrati rectæ AC. Dempto ergo quadrato rectæ AC, relinquetur rectãgulum sub AB, BC, bis duplum quadrati rectæ AC; Et proinde rectangulum sub AB, BC, semel, æquale quadrato rectæ AC.* [b] *Quare vt prius erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; ideoque AB, in C, secta erit extrema ac media ratione.*



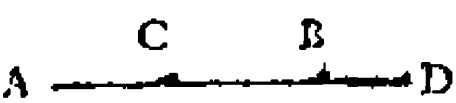
[a] 7. secun.

[b] 17. sexti.

EX Francisco Maurolyco demonstrabimus quoque theorema, quod sequitur.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, totâ lineæ assumens minus segmentum, quintuplum potest eius, quod a maiori segmento describitur quadrati. Et si recta linea inæqualiter secetur, totaque assumẽs minus segmentum possit quintuplũ eius, quod a maiori segmento describitur, quadrati: Recta illa linea secundum extremam & mediam rationem secta est.

SIT primum recta AB, secta in C, extrema ac media ratione, cui adiatur recta BD, minori segmento BC, æqualis. Dico quadratum ex AD, quintuplum esse quadrati ex AC, maiore segmẽto. [c] *Quoniam enim quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater contento, vna cum quadrato ex AC:* [d] *Rectangulum autem sub AB, BC, æquale est quadrato ex AC; (quod AB, AC, CB, sint continuæ proportionales.) erit rectangulum sub AB, BC, qua-*



[c] 8. secundi

[d] 17. sexti.

quater, quadruplum quadrati ex AC; atque adeo rectangulum sub AB, BC, quater vna cum quadrato ex AC, quintuplum quadrati ex AC. Igitur & quadratum ex AD, (quod æquale ostensum est rectangulo sub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC,) eiusdem quadrati ex AC, quintuplum erit. quod est propositum.

SIT deinde recta AB, secta inæqualiter in C, cui addatur recta BD, minori segmento BC, æqualis, sitque quadratũ ex AD, quadrati ex AC, maiori segmento quintuplum. Dico AB, in C, sectã esse extrema ac media ratione. Quonia.n. quadratum ex AD, æquale est rectangulo sub AB, BC, quater, vna cum quadrato ex AC; erit quoque rectangulum sub AC, BC, quater, vna cũ quadrato ex AC, quintuplũ quadrati ex AC; ac propterea rectangulum sub AB, BC, quater, quadruplũ quadrati ex AC: hoc est, rectangulum sub AB, BC, æquale quadrato ex AC. [b] *Igitur erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB: Ac proinde AB, in C, secta est extrema & media ratione. Quod est propositum.*

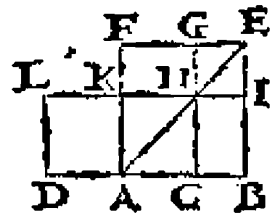
[a] *8. secundi*

[b] *17 sexti.*

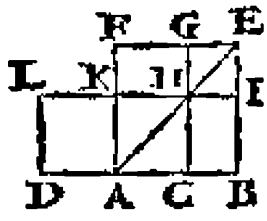
THEOR. 5. PROPOS. 5. 4.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur; apponaturque ei æqualis maiori segmento: Tota recta linea secũdum extremam & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ a principio recta linea.

SECETVR recta AB, in C, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC, & adiiciatur ei in rectum AD, æqualis maiori segmento AC. Dico rectam BD, secari in A, extrema ac media ratione, esseque maius segmentum AB. Describatur enim super AB, quadratum BF, in quo ducta diametro AE, ducatur ex C, ipsi BE, parallela CG, secans diametrum



metrum in H, puncto, per quod agatur ipſi *B*D, parallela I K, & ex D, dueatur ipſi A F, parallela *D* L, occurrens ipſi I K, productæ in L. Eruntque ex coroll. propoſ. 4. lib. 2. C K, I G, quadrata rectarum A C, B C. Quoniam igitur eſt vt A B, ad A C, ita A C, ad C *B*; [a] Erit rectangulum I F, contentum ſub A B, B C, æquale quadrato C K, rectæ A C. [b] Eſt autem C K, ipſi A L, æquale. Igitur I F, æquale erit ipſi A L; additoque communi B K, erit rectangulum B L, contentum ſub B D, D A, æquale quadrato B F, rectæ A B; [c] Ac proinde erit vt B D, ad A *B*, ita A B, ad D *A*. Quare B D, ſecatur in A, extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentum A B.

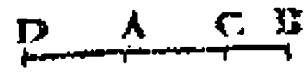


[a] 17. ſexti.

[b] 36. primi

[c] 17. ſexti

A L I T E R. Quoniam eſt vt A *B*, ad A C, hoc eſt, ad A D, ita A C, ad C B; Erit conuertendo vt D A, ad A B, ita B C, ad C A; & componendo vt D B, ad A B, ita A B, ad C A, hoc eſt, ad A D. Secta igitur eſt *B*D, in A, extrema ac media ratione. Itaque ſi recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, apponaturque ei æqualis maiori ſegmento: tota recta linea, &c. Quod erat demonſtrandum.



S C H O L I V M.

S I M I L I T E R cum Campano *& hoc demonſtrabimus.*

S I recta linea ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmentum minus; erit maius ſegmentum ſectum extrema ac media ratione, & maius ſegmẽtum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat.

RE-

RECTA enim linea BD, extrema ac media ratione secetur in A, cuius maius segmentum AB, minus autem segmẽtum AD; & ex maiori segmeto AB, detrahatur recta AC, æqualis minori segmento AD. Dico maius segmentum AB, diuisum esse in C, extrema ac media ratione, et maius segmẽtum esse rectam AC, quæ æqualis est minori segmento AD. Facta enim prioris figuræ constructione, cũ sit vt BD, ad AB, ita AB, ad AD; [a] *erit rectangulum BL, contentum sub BD, AD, æquale quadrato BF, rectæ AB; & ablato cõmuni BK, erit AL, æquale ipsi IF;* [b] *Est autem AL, ipsi CK, æquale. Æquale igitur est IF, contentum sub AB, CB, quadrato CK, rectæ AC;* [c] *Quare proinde erit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB. Quare AB, secta est in C, extrema ac media ratione, cuius segmentum maius est AC, minus vero segmentum recta CB. Quod est propositum.*

[a] 17. sexti.

[b] 36. primi

[c] 17. sexti.

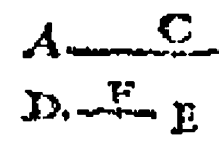
ALITER. Quoniam est vt tota BD, ad totam AB, ita AB, detracta ex BD, ad AD, hoc est, ad AC, detractam ex AB; [d] *erit quoque ita AD, reliqua ipsius BD, hoc est, AC, ad CB, reliquam ipsius AB, vt tota DB, ad totam AB, hoc est, vt AB, ad AC; Ac propterea diuisa erit AB, in C, extrema & media ratione.*

[d] 19. quin.

RVRSVS & hoc demonstrabimus, quod sequitur.

SI linea secetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris segmenti: Erit quoque dimidia totius diuisa extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit dimidium maioris segmenti totius lineæ.

DIVIDATVR enim AB, extrema ac media ratione in C, sitq; DE, dimidium totius, & DF, dimidium maioris segmenti AC. Dico DE, in F, secari extrema ac media ratione, maiusq; segmentum esse DF. Cum enim sit vt AB, tota ad DE totam, ita AC, ablata ad DF, ablatam, cum vtrobique sit proportio dupla; [e] *erit quoque reliqua CB, ad reliquam FE, vt tota ad totam:*



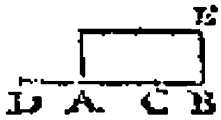
[e] 19. quin.

[a] 15. quin. *tam; Ac proinde & CB, dupla erit ipsius FE. Quoniam vero est, vt AB, ad AC, ita DE, dimidia illius, ad DF, dimidiam huius: Item vt AC, ad CB, ita DF, dimidia illius, ad FE, dimidiam huius; Est autem ex defin. linea secta extrema ac media ratione, AB, ad AC, vt AC, ad CB; erit quoque DE, ad DF, vt DF, ad FE; Ac proinde ex eadem defin. DE, secta erit in F, extrema ac media ratione. Quod est propositum.*

6. THEOR. 6. PROPOS. 6.

SI recta linea Rationalis extrema ac media ratione secetur; Vtrumque segmentorum Irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

SECETVR recta Rationalis AB, in C, extrema & media ratione Dico vtrumque segmentum AC, CB, esse lineam Irrationalem, quæ Apotome dicitur. Addatur enim maiori segmento AC, recta AD, æqualis dimidiæ totius AB. [b] Quoniam igitur quadratum rectæ CD, quintuplum est quadrati rectæ AD; habebit quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ AD, proportionem, quam numerus ad numerum. [c] Quare commẽsurabilia erunt quadrata rectarum CD, AD; propterea quæ ipsæ rectæ CD, AD, commensurabiles quoque existent, saltem potentia: Est autem AD, Rationalis, cum sit dimidia lineæ Rationalis AB. Igitur & CD, Rationalis erit. Quia vero quadrata rectarũ CD, AD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) [d] erunt rectæ CD, AD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex CD, Rationali detrahatur



[b] 1. tertiædec.

[c] 6. decim.

[d] 9. decimi

tur AD, Rationalis potentia tantum commensurabilis; [a] erit reliqua AC, Irrationalis, quę appellatur Apotome. [a] 74. deci.

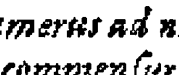
RVRSVS applicato ad AB, rectangulo AE, contento sub AE, CB; cum sit vt AB, ad AC, ita AC, ad CB; [b] erit rectangulum AE, equale quadrato rectę AC. Quā ob rem quadratum Apotomę AC, nimirum rectangulum AE, applicatum secundum lineam Rationalem Aω, [c] facit alterum latus BE, hoc est, rectam CB, illi equalem, Apotomen primam. Si recta ergo linea Rationalis extrema ac media ratione secetur, &c. Quod erat demonstrandum. [b] 17. sexti [c] 98. deci

SCHOLIVM.

SED & hoc theorema cum Campano ostendemus.

SI recta linea secundum extremam & mediam rationem secetur, sitque maius segmentum linea Rationalis; erit minus segmentum, Apotome.

SIT recta AB, extrema ac media ratione diuisa in C, sitque maius segmentum AC, linea Rationalis. Dico minus segmentum CB, esse Apotomen. Diuisa enim AC, bifariam in D; erit CD, dimidia ipsius Rationalis AC, Rationalis, cum sit ipsi AC, commensurabilis. [d] Quoniam autem quadratum rectæ BD, quintuplum est quadrati rectæ CD; habebunt quadrata rectarum BD, CD, proportionem, quam numerus ad numerum; [e] ac propterea commensurabilia existent. Quare & ipsæ rectæ BD, CD, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum igitur CD, sit rationalis, erit quoque BD, Rationalis. Quia vero quadrata rectarum BD, CD, non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt constat ex coroll. propos. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 5. ad 1. vel 25. ad 5.) erūt rectæ BD, CD, longitudine incommensurabiles; Ac proinde



[d] 3. tertij dec. [e] 6. deci.

Ratio-

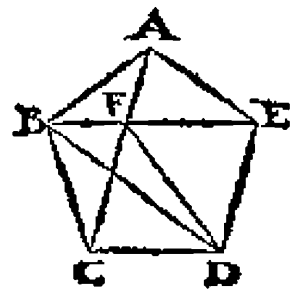
Rationali detrahatur CD, Rationalis potentia tantum commensurabilis, erit reliqua CB, Irrationalis, quæ vocatur Apotome.

[a] 74. deci.

7. THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI pentagoni æquilateri tres anguli, siue qui deinceps, siue qui nõ deinceps sint, æquales fuerint : AEquiangulum erit ipsum pentagonum.

SINT in pentagono æquilatero ABCDE, tres anguli, qui primum deinceps sint, æquales A, B, C. Dico ipsum pentagonum esse æquiangulum. Subtendantur enim dictis angulis æqualibus rectæ BE, AC, BD, & ex puncto F, vbi se interfecant rectæ BE, AC, recta ducatur FD.



Quoniam igitur latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; erunt & bases BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [c] Sunt autẽ & anguli BED, BDE, æquales, cum æqualia sint [b] Ostensa latera BE, BD; Toti igitur anguli AED CDE, æquales erunt. Rursus quia latera AB, AE, trianguli ABE, æqualia sunt lateribus BA, BC, trianguli BAC; & anguli quoq; ipsis contenti æquales, ex hypothesi: [d] Erit & basis BE, basi AC, æqualis, & anguli ABE, AEB, angulis BAC, BCA, æquales. Cum ergo æquales sint anguli ABE, BAC, trianguli ABF; [e] erunt quoque latera BF, AF, æqualia; Ac propterea si ipsa demantur ex rectis æqualibus BE, AC, erunt reliquæ lineæ FE, FC, æquales. Itaque cum latera FE, ED, trianguli FED, æqualia sint lateribus FC, CD, triãguli FCD; & basis communis FD; [f] erunt & anguli dictis lateribus contenti FED, FCD, æquales: Sunt autem & anguli

[b] 4. primi
[c] 5. primi
[d] 4. primi
[e] 6. primi
[f] 8. primi

AFB,

AEB, BCA, oſtenſi æquales. Aequales igitur ſunt toti anguli AED, BCD; Ac proinde cum angulo AED, oſtenſus ſit æqualis angulus CDE, & angulo BCD, æquales ponantur anguli ABC, BAE; erunt omnes anguli pentagoni æquales, ideoque æquiangulum erit ipſum pentagonum.

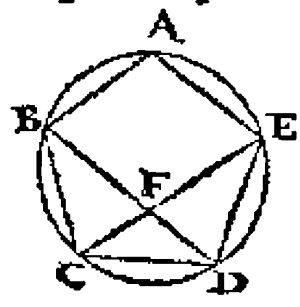
SINT ſecundo tres anguli non deinceps æquales A, C, D. Quoniam igitur latera AB, AE, triāguli ABE, æqualia ſunt lateribus CB, CD, trianguli CBD; & anguli quoque ipſis contenti, æquales, ex hypotheſi; [a] Erunt & baſes BE, BD, & anguli AEB, CDB, æquales; [b] Sunt autem & anguli BED, BDE, æquales, quod æqualia oſtenſa ſint latera BE, BD. Igitur toti anguli AED. CDE, æquales erunt. Quare cum æquales ponantur anguli BAE, CDE; erunt tres anguli deinceps æquales A, E, D; Ac proinde, vt iam demonſtratum eſt, pentagonum æquiangulum erit. Si pentagoni igitur æquilateri tres anguli, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 4. primi.
[b] 5. primi.

THEOR. 8. PROPOS. 8. 11.

SI pentagoni æquilateri, & æquiāguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant rectæ lineæ: hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri.

SVBTENDANTVR in pentagono æquilatero & æquiangulo ABCDE, duobus angulis, qui ſunt deinceps C, D, rectæ DB, CE, ſe mutuo ſecantes in F. Dico ipſas ſecari extrema ac media ratione, maioraque earum ſegmenta FB, FE, æqualia eſſe lateri cuilibet pētagoni. [c] De-



[c] 14. quar.

[a] 28 tertij.

[b] 4. primi

[c] 32. primi

[d] 33. sexti.

[e] 6. primi

[f] 27. tertij.

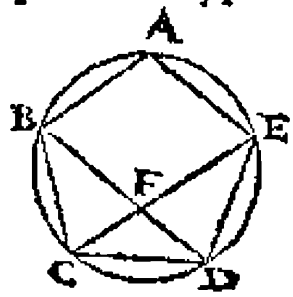
[g] 32. primi

[h] 4. sexti.

[i] 22. tertij.

[k] 28. primi

scripto enim circulo circa pentagonum; [a] erunt quinque arcus AB, BC, CD, DE, EA, æquales. Quia vero latera CD, CB, trianguli CDB, æqualia sunt lateribus DC, DE, trianguli DCE; & anguli quoque ipsis contenti æquales, ex hypothesi; [b] Erunt & bases DB, CE, & anguli CDB, DCE, æquales; Ac proinde cum in triangulo CDF, duo anguli FCD, FDC, sint æquales, [c] & ipsis æqualis sit externus angulus BFC: erit angulus BFC, duplus anguli DCE: [d] Est autem & angulus BCE, eiusdē anguli DCE, duplus, quod & arcus BAE, arcus DE, sit duplus. Igitur anguli BFC, BCF, æquales sunt; [e] Ideoque recta BF, lateri pentagoni BC, æqualis. [f] Quoniā autem anguli DBC, ECD, arcubus æqualibus insistētes æquales sunt; erunt duo anguli DBC, CDB, trianguli BCD, æquales duobus angulis DCF, FDC, trianguli CFD; [g] Ac proinde æquiangula erunt triangula BCD, CFD. [h] Quare erit vt BD, ad DC, hoc est, ad BF, æqualem ipsi DC, ita CD, hoc est, sibi æqualis BF, ad FD; Ac propterea BD, secta est in F, extrema ac media ratione, estque maius segmentum BF, lateri pentagoni æquale, vt ostensum est. Simili ratione ostendemus, rectam CE, secari ia F, extrema ac media ratione, maiusque illius segmentum EF, æquale esse lateri pentagoni DE. Itaque si pentagoni æquilateri & æquianguli duos angulos, &c. Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

FACILE etiam demonstrabimus, rectam, quæ angulum pentagoni æquilateri & æquianguli subtendit, parallelā esse opposito lateri: hoc est, BD, parallelam esse lateri AE; et CE, lateri AE. Descripto enim circulo circa pentagonum, [i] *Quoniam tam duo anguli A, & BCE, quam duo ABC, AEC, duobus rectis æquales sunt: Sunt autem A, & ABC, inter se æquales in pentagono æquiangulo; erunt & reliqui anguli BCE, AEC, æquales. Cum ergo A, & BCE, duobus sint rectis æquales; erunt etiā A, & AEC, duobus rectis æquales:* [k] *ac proinde AB, CE, parallelæ erunt. Quod est propositū.*

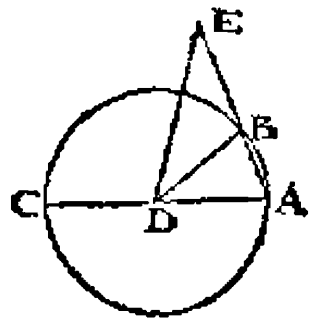
THEOR.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

9.

SI hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo descriptorum, cóponantur: Tota recta linea extrema ac media ratione secatur, & maius eius segmentum est hexagoni latus.

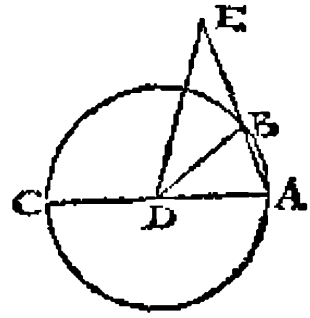
IN circulo ABC, sit latus decagoni AB, cui in rectũ addatur BE, æqualis semidiametro circuli, ac proinde lateri hexagoni eidẽ circulo inscripti. Dico EA, rectã sectam esse in B extrema ac media ratione maiusq; segmentũ esse EB, latus hexagoni. Ducatur. n. ex A, per centrũ D, diameter AC, coniungaturq; recta DB, DE. Quoniam igitur AB, arcus, est decima pars totius peripheriæ circuli; continebit arcus semicirculi arcum AB, quinquies; Ac proinde arcus BC, quadruplus erit arcus AB. [a] Quare & angulus BDC, anguli ADB, quadruplus erit. Rursus quia latera BD, BE, sunt æqualia, nempe latera hexagoni; (est enim BE, latus hexagoni semidiametro BD, æquale, ex coroll. propos. 15. lib. 4.) erũt & anguli BDE, BED, æquales: [b] quibus cum æqualis sit externus ABD; erit angulus ABD, duplus anguli BED: [d] Est autem angulo ABD, æqualis angulus BAD, ob æqualitatem laterum DA, DB. Igitur & angulus BAD, duplus erit anguli BED: ac proinde duo anguli DAB, DBA, simul quadrupli erunt anguli BED. [e] Cum ergo angulis DAB, DBA, æqualis sit externus BDC; erit angulus BDC, quadruplus eiusdem anguli BED: Atqui idem angulus BDC, ostensus fuit quadruplus anguli ADB. Igitur æquales sunt anguli AED, ADB. Quocirca cum duo anguli AED, DAE, trianguli ADE, æquales sint



[a] 33. sexti.
[b] 5. primi
[c] 32. primi
[d] 5. primi
[e] 32. primi

duobus angulis ADB, BAD, trianguli ABD; [a] erũt trian gula ADE, ABD, æquiangula. [b] Igitur erit vt BA, ad AD, hoc eſt, ad EB, ipſi AD, æqua lem, ita AD, hoc eſt, EB, ſibi æqua lis ad BA; Atq; idcirco recta EA, ſecta eſt in B, extrema & media ratione, eſtque maius ſegmentum EB, latus hexagoni. Itaque ſi hexa goni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum, componan tur: Tota recta linea extrema ac media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. Quod erat demonſtrandum,

[a] 32. primi.
[b] 4. ſexti.



SCHOLIVM.

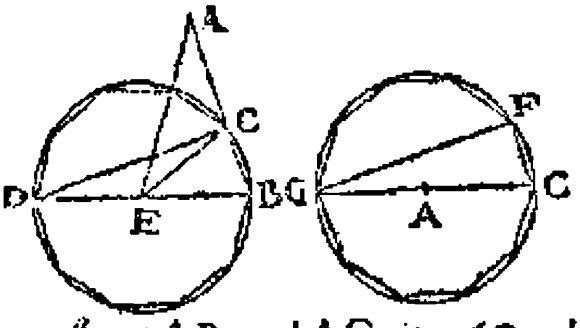
QVIA vero demonſtrauimus ad propoſ. 5. huius lib. ſi minus ſegmentum lineæ diuiſæ extrema ac media ratione ex maiori ſegmento detrahatur; maius ſegmentum ſecari quoque extrema et media ratione, eiuſque ſegmentum maius eſſe minus ſegmentum detractum. Hic autem oſtenſum eſt, latus hexagoni compoſitum cum latere decagoni, ſecari extrema ac media ratione: Fit, ſi latus hexagoni ſecetur extrema & media ratione, maius illius ſegmentum eſſe latus decagoni. Nam ſi hoc detrahatur ex latere hexagoni, quod eſt maius ſegmentum, diuiſum erit hexagoni latus extrema ac media ratione, vt ad propoſ. 5. huius lib. oſtendimus. Hoc tamen aliter demonſtrabimus lib. 14. propoſ. 4.

CONVERSVM quoque huius theorematis facile cum Campano demonſtrabimus. Videlicet.

SI lineæ diuiſæ extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; Erit minus ſegmentum latus decago ni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fa rit latus decagoni alicuius circuli; Erit ma ius ſegmentum latus hexagoni eiuſdem circuli.

SIT enim AB, diuiſa in C, extrema & media ratione ſitque,

ſitque primū AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Dico minus ſegmentum* CB, *eſſe eiuſdē circuli latus decagoni. Coaptetur enim* BC, *in circulo, ita vt* CA, *extra circulū cadat. Et ducta ex* B, *per centrum* E, *diametro* BED, *connectantur recta* EA, EC. *Quia ergo eſt, vt* AB, *ad* AC, *ita* AC, *ad* CB; *& eſt* AC, *latus hexagoni æquale ſemidiametro* EB, *ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Erit quoque vt* AB, *ad* BE, *ita* EB, *ad* EC, [a] *ideoque triangula* ABE, EEC, *æquiangula erunt, cū habeant latera circa communem angulum* B, *proportionalia; eritque angulus* A, *angulo* BEC, *æqualis. Rurſus quia latera* CA, CE, *æqualia ſunt, nempe latera hexagoni;* [b] *erunt anguli* CAE CEA, *æquales;* [c] *quibus cum æqualis ſit externus* BCE, *erit* BCE, *duplus anguli* A: [d] *Eſt autem angulo* BCE, *angulus* CBE, *ob æqualitatem laterum* EB, EC, *æqualis. Igitur & CBE, duplus erit anguli* A; *Ac proinde duo anguli* BCE, CBE, *ſimul quadrupli erunt eiuſdē anguli* A. [e] *Cum ergo angulis* BCE, CBE, *æqualis ſit externus* CED; *erit quoque angulus* CED, *eiuſdem anguli* A, *& propterea anguli* BEC, *qui æqualis oſtenſus eſt angulo* A, *quadruplus.* [f] *Quare & arcus* CD, *quadruplus erit arcus* BC; *Ac proinde arcus ſemicirculi* BCD, *eiuſdem arcus* BC, *quintuplus exiſtet, ideoque tota peripheria circuli decupla erit arcus* BC. *Quapropter recta* BC, *latus eſt decagoni.*

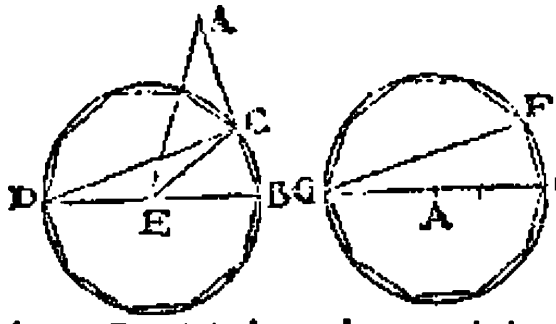


SIT deinde CB, *minus ſegmentum, latus decagoni circuli* BCD. *Dico maius ſegmentum* AC, *eſſe eiuſdem circuli latus hexagoni. Coaptetur enim rurſus* BC, *in circulo* BCD, *ducaturque diameter* BED. *Deinde interuallo* AC, *deſcribatur circulus* CFG, *cuius diameter* CAG; *eritq; ex coroll. propoſ 14, lib. 4. AC, latus hexagoni circuli* CF. *Quoniā igitur* AB, *ſecta eſt in* C, *extrema ac media ratione, eſtq; maius ſegmentum* AC, *latus hexagoni circuli* CFG; *erit, vt iam oſtenſum eſt, minus ſegmentum* CB, *latus decagoni eiuſdem circuli* CFG. *Deſcribatur ergo in circulo* CFG, *decagonum æquilaterū & æquiangulum* CFG; *Item in circulo* BCD,

[a] 6. ſexti.
[b] 5. primi.
[c] 32. primi.
[d] 5. primi.
[e] 32. primi
[f] 33. ſexti.

decagonum æquilaterum, & æquiangulum BCD; *eruntque latera* BC, CF, *inter ſe æqualia. Quoniam vero, ſi connectantur rectæ* CD, FG, *anguli* CDB, FGC, *ſunt æquales, vt in ſcholio propoſ. 22. lib. 3. oſtendimus, quod inſiſtant arcubus ſimilibus* BC, CF, *nempe decimis partibus peripheriarum; & ſunt quoque anguli* BCD, CFG, *in ſemicirculis æquales,* [a] *nimirum recti:* [b] *Erunt quoque latera* BD, CG, *inter ſe æqualia. Quam ob rem cũ diametri* BD, CG, *ſint æquales, æquales quoque erunt circuli* BCD, CFG. *Ac proinde, cũ recta* AC, *ſit latus hexagoni circuli* CFG, *erit quoq; eadem recta* AC, *latus hexagoni circuli* BCD. *Quod eſt propoſitum.*

[a] 31. tertij.
[b] 26. primi.



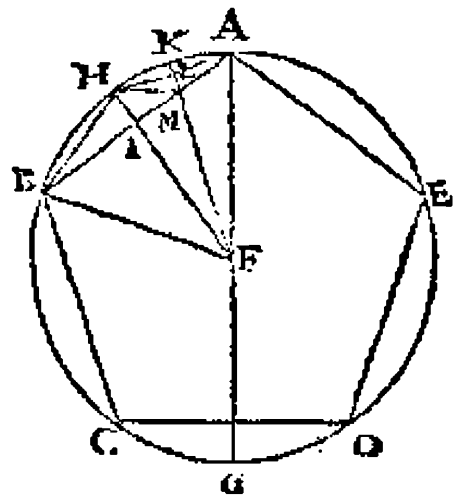
10. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in circulo pentagonum æquilaterũ deſcribatur; Pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum.

IN circulo ABCDE, cuius centrum F, deſcriptum ſit pentagonum æquilaterum. Dico quadratum lateris AB, æquale eſſe quadrato lateris hexagoni, vna cũ quadrato lateris decagoni eiuſdem circuli. Ducatur.n.diameter AFG, & connectatur recta FB. Diuiſo deinde arcu AB, bifariam in H, connectantur rectæ AH, BH, & FH, ſecans rectam AB, in I; eritque recta AH, latus decagoni, & BF, latus hexagoni. Rurſus diuiſo arcu AH, bifariam in K, adiungatur recta FK, ſecans rectam AH, in L, & rectam AB, in M, puncto, ad quod recta ducatur HM. Qm̃ igitur arcus AH, BH, æquales ſunt; [c] erũt & anguli ipſis inſiſtentes AFH, BFH, æquales. Quare cum

[c] 27. tertij.

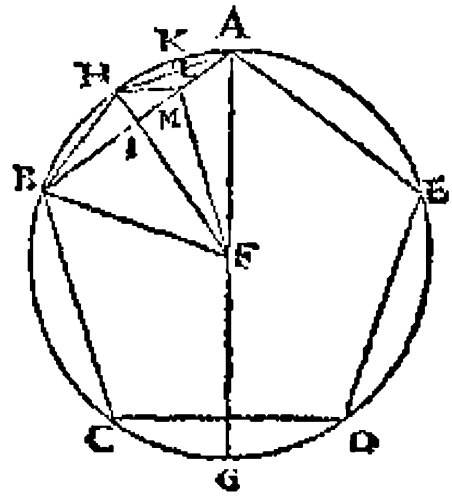
cum latera *AF*, *FI*, trianguli *AFI*, æqualia ſint lateribus *BF*, *FI*, trianguli *BFI*, & anguli ipſis contenti æquales quoque; [a] erunt & baſes *AI*, *BI*, æquales, & anguli *AIF*, *BIF*, ideoque recti: Eademque ratione æquales erunt rectæ *AL*, *HL*, & anguli *ALF*, *HLF*, recti. Deinde ſi ex ſemicirculis æqualibus *ABCG*, *AEDG*, demantur æquales arcus *ABC*, *AED*; relinquentur arcus *CG*, *DG*, inter ſeſe æquales, ideoq; erit arcus *CG*, dimidium arcus *CD*. Eſt autẽ & arcus *AH*, dimidium dimidium arcus *AB*. Igitur cum arcus *AB*, *CD*, æquales ſint; erunt quoque eorum dimidij arcus *CG*, *AH*, æquales; Ac proinde cum arcus *AH*, duplus ſit arcus *HK*, erit & arcus *CG*, duplus eiuſdem arcus *HK*. Eodem modo, quia arcus *AB*, *BC*, æquales ſunt, & eſt arcus *AB*, duplus arcus *BH*, erit etiã arcus *BC*, eiuſdem arcus *BH*, duplus. Quare arcus *CG*, *BC*, æquemultiplices ſunt, nempe dupli, arcuum *HK*, *BH*; [b] Ac propterea totus arcus *EG*, duplus quoq; erit totius arcus *BK*; [c] & idcirco angulus quoque *BFG*, duplus anguli *BFK*: Sed quia idem angulus *BFG*, ad centrum duplus eſt quoque anguli *FAB*; erunt idcirco anguli *BFM*, *FAB*, æquales; Ac propterea triangula *ABF*, *FBM*, cum habeant angulos *FAB*, *MFB*, æquales, & angulum *ABF*, communem, æquiangula erunt. [f] Quocirca erit vt *AB*, ad *BF*, ita *BF*, ad *BM*; [g] ideoque rectangulum ſub *AB*, *BM*, æquale erit quadrato rectæ *BF*.



RVRSVS quia latera *AL*, *LM*, trianguli *ALM*, æqualia ſunt lateribus *HL*, *LM*, triãguli *HLM*, & anguli quoq; ipſis contenti æquales, nẽpe recti: [h] erunt & baſes *AM*, *HM*, & anguli *LAM*, *LHM*, æquales: [i] Eſt autẽ angulus *LAM*, angulo *HBA*, æqualis, quod & latera *HA*, *HB*, æqualia ſint. Igitur & angulus *LHM*, eidem angu

[a] 4. primi.
[b] 8. quin.
[c] 33. ſexti
[d] 20. tertij.
[e] 32. primi
[f] 4. ſexti
[g] 17. ſexti
[h] 4. primi.
[i] 5. primi.

lo HBA, æqualis erit; [a] Ac propterea triangula ABH, AHM, cum habeant angulos ABH, AHM, æquales, & angulum HAM, communem, æquiangula erũt. [b] Quam obrẽ erit vt AB, ad AH, ita AH, ad AM; [c] ideoque rectãgulum sub AB, AM, æquale erit quadrato rectæ AH: Ostẽsum est autem & rectangulum sub AB, BM, æquale quadrato rectæ BF. Igitur rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, simul æqualia sunt quadratis rectarũ BF, AH: [d] At vero rectangula sub AB, BM, & sub AB, AM, æqualia sunt quadrato rectæ AB. Quadratum ergo rectæ AB, nempe lateris pentagoni, æquale est quadratis rectarum BF, AH, lateris videlicet hexagoni, & lateris decagoni. Si igitur in circulo pentagonum æquilaterum describatur, &c. Quod erat demonstrandum.



[a] 32. primi

[b] 4. sexti.

[c] 17. sexti.

[d] 2. secun.

COROLLARIVM I.

HINC sequitur, lineam rectam, quæ ex centro diuidit arcum quempiam bifariam, diuidere quoque rectam illi arcui subtensam bifariam, & ad angulos rectos. Ostensum enim est, rectam FH, propterea quod arcum AB, diuidit bifariam, diuidere quoque rectam AB, bifariam in I, & ad angulos rectos. Eademque in cæteris est demonstratio.

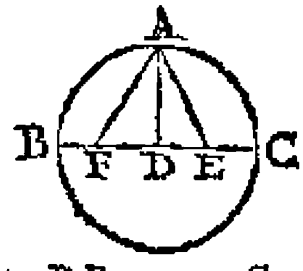
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM quoque est, diametrum circuli ex angulo quouis pẽtagoni ductam diuidere & arcũ, quem latus pentagoni illi angulo oppositum subtẽdit, & la-

& latus ipſum oppoſitum bifariam, & ad angulos rectos. Demonſtratum enim eſt, diametrum AG, ex puncto A, ductam diuidere arcum CD, quem latus oppoſitum CD, ſubtendit, bifariam. Quare ex præfato coroll. cum tranſeat per centrum, ſecabit quoque latus CD, bifariam, & ad angulos rectos. Eadem demonſtratio erit in omni polygono æquilatero in circulo deſcripto, ſi numerus laterum fuerit impar, vt conſtat.

SCHOLIVM.

QVONIAM ad finem lib. 4. praxim quandam ex Ptolemæo tradidimus, qua vna eademque opera in dato circulo & pentagonum, & decagonum æquilaterũ deſcribitur, eiuſque demonſtrationem in hunc locum diſtulimus; paucis nunc a nobis ea demonſtranda eſt. Sit igitur datus circulus ABC, cuius centrum D. Ducta autem diametro BC, erigatur DA, perpendicularis ad BC. Deinde diuiſa ſemidiametro CD, bifariam in E, ducatur recta EA, cui æqualis abſcindatur EF, adiungaturque recta AF. Dico rectam AF, eſſe latus pentagoni, & DF, latus decagoni. Cum enim CD, ſecta ſit bifariam in E, eique addita DF; a erit rectangulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale quadrato rectæ EF, ideoq; quadrato rectæ EA, quæ ipſi EF, eſt æqualis. b Eſt autem quadratum rectæ EA, æquale quadratis rectarum AD, DE. Igitur rectãgulum ſub CF, DF, vna cum quadrato rectæ DE, æquale eſt quadratis rectarum AD, DE; Ac proinde, dempto communi quadrato rectæ DE, relinquetur rectangulum ſub CF, DF, æquale quadrato rectæ AD, hoc eſt, quadrato rectæ CD. c Quamobrem erit vt CF, ad CD, ita CD, ad DF; propterea quæ recta CF, diuiſa erit in D, extrema ac media ratione. Cum igitur maius ſegmentum CD, ſit latus hexagoni circuli ABC, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. erit minus ſegmentum DF, latus decagoni eiuſdem circuli, vt demonſtrauimus ad propoſ. 9. huius lib. d Rurſus



a 6. ſecundi

b 47. primi

c 17. ſexti

d 10. tertiædecimi

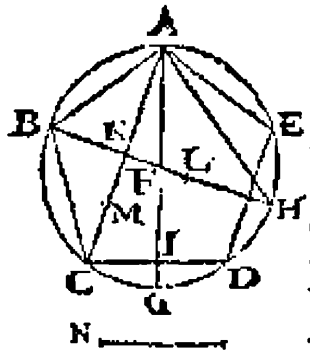
ſus quoniam quadrato lateris hexagoni AD, vna cum quadrato lateris decagoni DF, æquale eſt quadratum lateris pentagoni eiuſdem circuli; [a] *Eſt autem eiſdem quadratis rectarum AD, DF, æquale quadratum rectæ AF; erit quadratum lateris pentagoni æquale quadrato rectæ AF; ac propterea recta AF, lateri pentagoni æqualis. Quod eſt propoſitũ.*

[a] 47. primi

12. THEOR. 11. PROPOS. 11.

SI in circulo Rationalem habente diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur: Pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

IN circulo ABCDE, habente diametrum Rationalem, deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE. Dico eius latus AB, eſſe lineam Irrationalem, quæ dicitur Minor. Ducantur enim per centrum I, diametri AG, BH, ſecetque AG, latus CD, in I, connectanturque rectæ AC, AH, quarum AC, ſecet diametrum BH, in K. Abſcindatur quoque ex ſemidiametro FH, quarta eius pars FL; Item ex recta AC, quarta eius pars CM. Quia igitur diameter BH, ponitur Rationalis; erunt quoq; FL, BF, illi commenſurabiles, cum ſint eius partes aliquotæ, Rationales; Atque idcirco & tota BL, compoſita, [b] cum ſit commenſurabilis vtrique FL, BF, Rationalis erit.



[b] 16. deci.

RVRSVS quoniam recta FB, ex centro ducta ſecat AC, biſariam in B; ſecabit quoque rectam AC, biſariam in L, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. præcedentis propoſ. Secat autem & recta AG, rectam CD, in I, biſariam, & ad angulos rectos, ex coroll. 2. eiuſdem propoſ. Triangula ergo ACI, AFK, cũ habeant angulos AIC, AKF, rectos, & angulum CAI, communẽ, æquiãgula inter

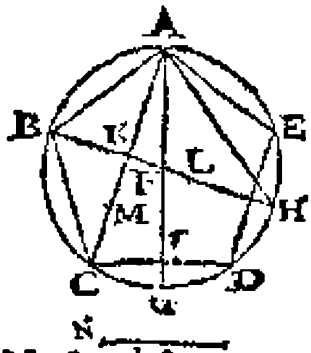
[c] 32. primi

inter se erunt. [a] Quam obrem erit, vt CI, ad CA, ita FK, ad FA; & permutando vt CI, ad FK, ita CA, ad FA: [b] Vt autem CA, ad AF, ita est CM, quarta pars ipsius CA, ad FL, quartam partem ipsius FH. Erit igitur vt CI, ad FK, ita CM, ad FL; & permutando, vt CI, ad CM, hoc est, vt CD, dupla ipsius CI, ad CK, duplam ipsius CM, ita FK, ad, FL; Atque componendo, vt CD, CK, simul, ad CK, ita FK, FL, simul, nimirum recta KL, ad FL; [c] Ac propterea erit, vt quadratum rectæ compositæ ex CD, CK, ad quadratum rectæ CK, ita quadratū rectæ KL, ad quadratum rectæ FL. Quia vero si AC, secetur extrema ac media ratione, (ducta videlicet recta BD, [d] maius eius segmentum æquale est lateri pentagoni, nimirum ipsi CD; [e] Erit quadratum rectæ compositę ex CD, maiori segmento, & CK, dimidia totius, quintuplum quadrati rectæ CK, dimidiæ scilicet totius. Quare & quadratum rectæ KL, quintuplum erit quadrati rectæ FL; [f] ideoque quadratum rectæ KL, commensurabile erit quadrato rectæ FL; Ac proinde rectæ KL, FL, commensurabiles quoque erunt, saltem potentia: Est autem FL, ostensa Rationalis. Igitur & KL, Rationalis erit.

[a] 4. sexti.
[b] 15. quin.
[c] 22. sexti
[d] 8. tertiædecimi.
[e] 1. tertiædecimi
[f] 6. decimi

DEINDE quia qualium partium 4. est BF, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL; ac propterea qualium 5. est BL, talium 1. est FL; erit quadratum rectæ BL, talium partium 25. qualium 1. est quadratū rectæ FL, (vt in his numeris patet 1. 5. 25. [g] habent enim quadrata proportionē laterum duplicatam.) Qualium uero partium 1. est quadratū rectæ FL, taliū 5. ostensum est quadratū rectæ KL. Qualiū igitur 25. est quadratū rectæ BL, talium 5. est quadratū rectæ KL; ac proinde quadratum rectæ BL, quintuplum erit quadrati rectæ KL. Quia ergo quadrata rectarum BL, KL, proportionem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, (ut patet ex coroll. propos. 24. lib. 8. Est enim eorum proportio, quæ 25. ad 5. vel 5. ad 1.) [h] Erunt rectæ BL, KL, longitudine incōmensurabiles; ideoq;, cū ostensæ sint Rationales, erunt Rōnales potentia tantum commensurabiles. Quare si ex Rōnali BL,

[g] 20. sexti
[h] 9. deci.



BL, dematur Rationalis KL, potẽtia tantum commensurabilis; [a] erit reliqua BK, Irrationalis, quæ dicitur Apotome, ei uero congruẽs erit KL.

IAM vero recta BL, possit plus, quam recta KL, quadrato rectæ N. Quoniam igitur quadratũ rectæ BL, æquale est quadratis rectarum KL, & N; Qualiũ autem partiũ 5. fuit quadratũ rectæ BL, taliũ 1. fuit quadratũ rectæ KL; Erit reliquum quadratũ rectę N, talium partium 4. qualium 5. est quadratũ rectæ BL; Ac propterea quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ habebunt, quam numerus ad numerum. [b] Quare commẽsurabilia erunt; propterea quæ rectæ ipsæ BL, & N, commensurabiles, saltem potentia: Est autem BL, ostensa Rationalis. Rationalis igitur erit & N. Quia uero quadrata rectarum BL, & N, proportionẽ non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt perspicuum est ex coroll. propos. 24. lib. 8. quod proportio eorum sit, quę 5. ad 4.) [c] Erunt rectæ BL, & N, longitudine incommensurabiles; Ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. Quapropter cum tota recta BL, Rationalis longitudine sit commẽsurabilis Rationali BH. (Qualium enim partium 8. est BH, talium 5. est BL,) possitque plus, quam congruens KL, quadrato rectæ N, sibi longitudine incommensurabilis, vt ostensum est; Erit BK, Apotome quarta, ex definitione.

POSTREMO quia recta AB, est media proportionalis inter BH, BK, (ex coroll propos. 8. lib. 6.) quod triangulum ABH, [d] habeat angulum BAH, rectum, a quo ducta est AK, ad basin perpendicularis; [e] erit quadratum rectæ AB, æquale rectangulo sub BH, BK. Quocirca cum superficiem cõtentam sub Rationali BH, & Apotoma quarta BK, possit recta linea AB, [f] Erit AB, linea Minor. Si igitur in circulo Rationalem habente diametrum, &c Quod erat demonstrandum.

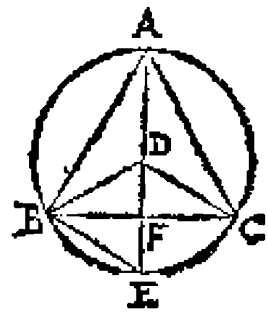
[a] 74. deci.
[b] 6. decimi
[c] 9. decimi
[d] 23. tertij.
[e] 17. sexti
[f] 91. deci.

8. THEOR. 12. PROPOS. 12.

SI in circulo triangulum æquilaterum

rum deſcribatur; Trianguli latus, potentia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur.

IN circulo ABC, cuius centrum D, triangulum æquilaterum inſcribatur A B C. *Dico* quadratum lateris AB, triplum eſſe quadrati ex ſemidiametro. Ducta enim diametro AE, quæ ſecet, ex coroll. 2. propoſ. 10. huius lib. arcum B C, biſariam in E. & rectam B C, biſariam quoque & ad angulos rectos in puncto F; cum arcus B C, ſit tertia pars totius peripheriæ; erit arcus BE, eiuſdem peripheriæ ſexta pars, ideoque coniuncta recta B E, latus erit hexagoni, & æqualis ſemidiametro circuli, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quod etiam ita probabitur. Semicirculus ABE, continet tres ſextas partes totius circuli: arcus vero AB, cum ſit tertia pars totius circuli, duas ſextas comprehendit eiuſdem circuli. Igitur arcus BE, ſexta pars eſt eiuſdem, ac proinde recta BE, latus eſt hexagoni, & æqualis ſemidiametro DE, ex coroll. propoſ. 15. lib. 4. Quoniam igitur quadratum rectæ AE, æquale eſt quadratis rectarum AB, BE, [b] quod angulus A BE, in ſemicirculo rectus ſit; Eſt autem quadratum rectæ A E, quadruplum quadrati rectæ BE, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2 quod linea AE, dupla ſit lineæ BE; erunt quadrata rectarum AB, BE, ſimul, quadrupla quoque quadrati eiuſdem rectæ B E; Ac propterea qualium partium 4. ſunt quadrata rectarum AB, BE, talium partium 1. erit quadratum rectæ BE; & idcirco talium partium 3. erit quadratum rectæ A B. Quare quadratum rectæ AB, triplum eſt quadrati rectæ BE, quæ æqualis eſt ſemidiametro. Si igitur in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur, &c. Quod erat oſtendendum.

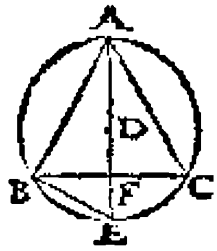


[a] 47. primi

[b] 31. tertij.

SE-

COROLLARIVM I.



SEQVITVR ex his, diametrum circuli potentia esse sesquitertiam lateris trianguli aequilateri in eo circulo descripti. Nam cum latus AB, ostensum sit potentia triplum semidiametri AD; posito quadrato ex AB, 3. erit quadratum ex AD, 1. atq; adeo quadratum ex AE, quod ex scholio propos. 4. lib. 2. quadruplum est quadrati ex AD, erit 4. Quare quadratum ex AE, quadrati ex AB, sesquitertium est, hoc est, proportionem habet, quam 4. ad 3.

ET quia ex coroll. propos. 8. lib. 6. vt est AE, ad AB, ita se habet AB, ad AF; erit quoque latus trianguli aequilateri AB, perpendicularis AF, ex vno angulo ad basim demissa potentia sesquitertium: quod tamen aliter demonstrabitur ab Euclide lib. 14. propos. 12.

COROLLARIVM II.

HINC facile etiam colligi potest, semidiametrum DE, bifariam secari in F, a latere trianguli BC. Cum enim quadratum rectæ AB, triplum sit quadrati rectæ BE; si ponatur quadratum rectæ AB, partium 12. erit quadratum rectæ BE, talium partium 4. Est autem quadratum rectæ BE, aequale quadratis rectarum BF, FE. Igitur & talium partium 4. erunt quadrata rectarum BF, FE. Est autem talium partium 3. quadratum rectæ BF, (quod quadratum rectæ AB, quadruplum sit quadrati rectæ BF, ex scholio propos. 4. lib. 2. Est enim AB, dupla ipsius BF.) Igitur talium 1. erit quadratum rectæ FE; Ac proinde quadratum rectæ BE. hoc est,

[a] 47. primi

quadra-

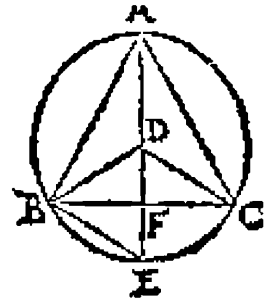
quadratum rectæ DE, ſibi æquale, quadruplum erit quadrati rectæ FE. Cum igitur, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. idem quadratum rectæ DE, quadruplum ſit quadrati dimidiæ lineæ ipſius DE; erit FE, dimidia ipſius DE. Quocirca DE, bifariam ſecatur in F.

SCHOLIVM.

HOC tamen corollarium aliter demonſtrabitur hoc theoremate propoſito.

SI in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Diameter ex vno angulo ducta diuidet & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos; Semidiameter quoque viciſsim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito.

IN circulo AEC, *cuius centrum* D, *triangulum æquilaterum inſcribatur* ABC. *Dico rectam* AE, *per centrum* D, *ductam, hoc eſt, diametrum, ſecare bifariam & angulum* BAC, *& latus* EC, *necnon ad angulos rectos; Semidiametrum quoque* DE, *ſecari a latere* BC, *bifariam, & ad angulos rectos. Ductis enim rectis* BD, CD, BE; *cũ latera* AB, AD, *æqualia ſint lateribus* AC, AD, *trianguli* CAD; *& baſes* BD, CD, *æquales quoq;* : [a] *Erunt anguli* BAD, CAD, *æquales. Quod eſt primum.*



[a] *8. primi*

DEINDE, *cum latera* AB, AF, *trianguli* BAF, *æqualia ſint lateribus* AC, AF, *trianguli* CAF, *& anguli ipſis contenti æquales oſtenſi:* [b] *Erunt & baſes* BF, CF, *& anguli ad* F, *æquales, ideoque recti. Quod eſt ſecundum.*

[b] *4. primi*

POSTREMO, *cum anguli* BAE, CAE, *demonſtrati ſint eſſe æquales;* [c] *erunt & arcus* BE, CE, *æquales. Quare cum* BEC, *arcus ſit tertia pars circumferentiæ, erit* BE, *ſexta*

[c] *28. tertij*

pars

pars eiuſdem; Ac propterea recta BE, latus hexagoni, atque ſemidiametro proinde BD, æqualis, ex coroll. prop. ſ. 15. lib. 4. Igitur anguli BDE, BED, æquales erunt. Quoniam ergo anguli BDF, BFD, trianguli DBF, æquales ſunt angulis BEF, BFE, trianguli EBF, & latus BF, commune; Erunt & latera DF, EF, æqualia.

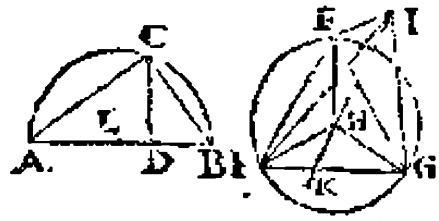
a 5. primi

b 26. primi

13. PROBL. 1. PROPOS. 13.

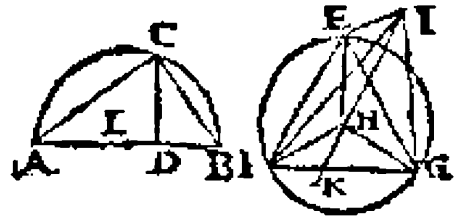
PYRAMIDEM conſtituere; & data ſphæra complecti; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit ſeſquialtera lateris ipſius pyramidis.

SIT datę ſphæræ diameter *AB*, circa quã ſemicirculus deſcribatur ABC; & ex *AB*, auferatur tertia pars BD, vt ſit AD, ipſius DB, dupla; at vero AB, eiuſdem DB, tripla; & ipſius AD, ſeſquialtera. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, cũnectantur rectę AC, BC. Ad interuallum rectæ HE, quæ æqualis ſit ipſi DC, deſcribatur circulus EFG, cuius centrũ H, in quo triangulũ æquilaterum inſcribatur EFG, adiũganturq; rectæ HF, HG, quæ ſingulæ æquales erunt ipſi DC, cum æquales ſint ipſi HE, ad cuius interuallum deſcriptus eſt circulus. Erigatur deinde ex H, ad planum circuli perpẽdicularis HI, quæ æqualis ponatur rectæ AD, & ex I, demittantur rectæ IE, IF, IG. Dico ſolidum contentum quatuor triangulis FEC, IEF, IFG, IEG, eſſe Pyramidẽ, ſiue Tetraedrum. Quoniam.n. latera DA, DC, trianguli ADC, æqualia ſunt lateribus HI, HE, trianguli IHE, & anguli ipſis contenti, recti, ex hypotheſi, & 3. defin. lib 11. erit baſis AC, baſi IE, æqualis. Non aliter oſtendemus eandem rectam AC, æqualem eſſe rectis IF, IG. Rurſus quia tres lineæ AD, DC, DB, proportionales ſunt



c 4. primi

ſunt ex coroll propoſ.8.lib.6.erit,ex coroll. propoſ.20. lib.6. vt AD, ad DB, ita quadratum rectæ *A* D, ad quadratum rectæ D C; & componendo, vt *A*B, ad *D*B, ita quadrata rectarum *A*D, DC, ſimul ad quadratum rectæ DC: Sunt autem quadrata rectarum AD, DC, æqualia quadrato rectę AB Igitur erit quoque vt AB.ad DB,ita quadratum rectæ A C, ad quadratũ rectæ DC; Ac proinde cum AB,ſit ipſius D B, tripla, erit quoque quadratum rectæ AC,triplum quadrati rectæ HE, cum HE,æqualis ſit ipſi DC: Atqui & quadratum rectæ E F, triplum quoque eſt eiuſdem quadrati rectæ HE. Quadratum ergo rectæ A C, quadrato rectæ *E*F,æquale erit;& propterea recta AC, rectæ EF Quare cum recta AC, oſtenſa quoque ſit æqualis rectis IE, IF, IG;erunt quatuor triangula EFG,*E*FI,FGI,GEI,æquilatera & æqualia inter ſe.Conſtituta igitur iam eſt pyramis,ſeu Tetraedrum,cuius baſis EFG, vertex vero I.Dico pyramidem hanc comprehendi ſphæra data, cuius diameter *A* B; & diametrum ſphæræ A B, potentia ſeſquialteram eſſe lateris E*F*, vel AC.



EXTENDATVR perpendicularis IH, vſque ad *K*, vt ſit H*K*,ipſi DB,& tota I*K*,toti *A*B,æqualis. Quia ergo tres rectæ *A*D,DC,*D*B,proportionales ſunt, quibus æquales exiſtunt tres IH, H*E*, H*K*; erunt quoque I H, *H*E,H*K*,proportionales. Quare cũ HE, ſit ad I*K*, perpendicularis,& media proportionalis inter IH,H*K*, ſemicirculus circa I K, deſcriptus in plano rectarum I*K*, HE,tranſibit per E, vt mox oſtendetur; Eodemque argumento tam ſemicirculus circa eandem rectam I*K*, deſcriptus in plano rectarum I*K*,HF,tranſibit per F,quam ſemicirculus circa eandem I*K*, deſcriptus in plano rectarum I*K*,HG,per G. Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus,manente fixa diametro, ſphæram deſcribet, quæ conſtitutum Tetraedrum complectitur, cũ per omnes illius angulos E, F, G, I,incedat. Cum ergo hæc ſphęra deſcripta æqualis ſit ſphæræ datæ, quod diameter

a 47.primi

b 12.tertij dec.

meter IK, æqualis ponatur diametro AB, comprehendetur idem Tetraedrum ſphæra data.

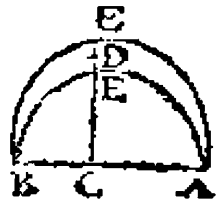
QVONIAM vero tres rectæ AB, AC, AD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. erit vt AB, ad AD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. Eſt autem recta AB, ſeſquialtera rectæ AD, quod qualium partium 3. eſt AB, taliũ 2. ſit AD. Igitur & quadratũ rectę AB, ſeſquialterum erit quadrati rectę AC; Ac propterea cum AB, ſit diameter ſphęrę, & AC, recta lateri pyramidis EF, ęqualis; perſpicuũ eſt, diametrũ ſphęrę potẽtia ſeſquialterã eſſe lateris Tetraedri, ſeu pyramidis. Pyramidem ergo cõſtituimus, & data ſphęra cõplexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

LEMMA.

QVOD autem ſemicirculus circa IK, in plano rectarum IK, HE, deſcriptus, tranſeat per E, facile demonſtrabitur hoc propoſito theoremate.

SI ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectã deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

SIT enim ad AB, perpendicularis CD, & media proportionalis inter AC, & CB. Dico ſemicirculum circa AB, deſcriptum tranſire per D. Nam ſi tranſeat citra D, vel vltra, nimirum per punctum E; erit quoque CE, media proportionalis inter AC, & CB, ex coroll. propoſ. 13. lib. 6. Quare tam quadratum rectæ CD, quam quadratum rectæ CE, [a] *æquale erit rectangulo ſub AC, CB; Ac proinde quadrata rectarum CD, CE, inter ſe æqualia, &*



a 17. ſexti

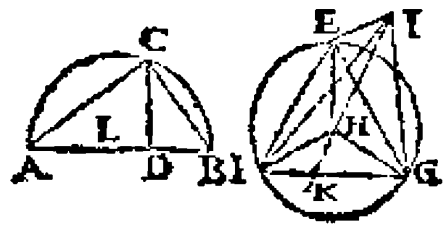
ipſæ

ipſæ rectæ C D, C E, æquales erunt, pars & totum. Quod eſt abſurdũ. Tranſibit ergo ſemicirculus per D.

HINC manifeſtum eſt, ſemicirculum in ſuperiori figura deſcriptum circa I K, in plano rectæ lineæ I K, H E, tranſire per E, cum H E, ſit ad I K, perpendicularis, & media proportionalis inter I H, H K.

COROLLARIVM I.

HINC facile colligemus, diametrum ſphæræ eſſe potentia quadruplam ſeſquialteram ſemidiametri circuli circa baſim pyramidis deſcripti. Cum enim diameter ſphæræ A E, oſtenſa ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis E F, erit quadratum rectæ E F, talium partium 6. qualiũ 9 eſt quadratum rectæ A B: At qualium partiũ 6. eſt quadratum rectæ E F, taliũ partium 2. eſt quadratum rectæ H E,



, quod quadratum rectæ E F, triplum ſit quadrati rectæ H E. Qualium igitur partium 9. eſt quadratum rectæ A B, talium partium 2. erit quadratum rectæ H E; Ac propterea diameter ſphæræ A B, potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri H E, cum proportio quadratorum ſit, quæ 9. ad 2. *13. terij decimi.

COROLLARIVM II.

RVRSVS perpendicularis ex centro ſphæræ ad planum baſis pyramidis demiſſa, ſexta pars erit diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. Sit enim L, centrum ſemicirculi A C B, eritque L, centrum quoq; ſphæræ. Dico rectã L D, (quæ nimirũ ex centro ſphæræ ad baſin E F G, ducitur perpendicularis; cum A D, æqualis ſit ipſi I H, & ideo punctum D,

idem quod H, quemadmodum & L, idem eſt quod centrum ſphæræ) eſſe ſextam partem diametri ſphæræ, nempe rectæ AB, & tertiã partẽ ſemidiametri AL. Quoniã.n. AD, dupla eſt ipſius DB; Qualium partium 4. eſt AD, talium 2. erit DB; ac proinde talium 6. tota AB, & ſemidiameter AL, talium 3. Quare ſi AD, eſt 4. & AL, 3. erit LD, 1. & idcirco LD, ſexta pars erit rectæ AB, quæ fuit partium earundem 6. & tertia pars rectæ AL, quæ fuit earundem partium 3.

SIMILITER, altitudo pyramidis HI, duas tertias partes continebit ipſius diametri. Eſt enim HI, eadem, quæ AD, continens duas tertias diametri, ex conſtructione.

RVRSVS, qualium partium 9. ponetur quadratum diametri, talium 4. erit quadratum altitudinis pyramidis. Nã proportio 9. ad 4. eſt duplicata proportionis 3. ad 2. vt hic apparet 9. 6. 4.

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex materia aliqua conficiantur quatuor triangula æquilatera æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipſis rite inter ſe complicatis componetur Tetraedrum, ſecundum totã ſoliditatem. Hanc vero praxim, & ſequentes quatuor, quibus reliqua quatuor ſolida regularia in materia quauis ſenſibili conficiuntur, deſumpſimus ex Alberto Durero non ignobili ſcriptore.



15. ## PROBL. 2. PROPOS. 14.

OCTAEDRVM conſtituere, & ſphæra complecti, qua & pyramidem; & demon-

demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit dupla lateris ipſius octaedri.

SIT ſphæræ, quæ conſtitutam pyramidem comprehendit, diameter AB, circa quam ſemicirculus deſcribatur ACB, & ex centro D, ad AB, perpendicularis ducatur DC, connectanturque rectæ AC, BC, quæ æquales inter ſe erunt. Sumpta iam recta EF, quæ æqualis ſit ipſi AC, vel BC, deſcribatur ſuper eam quadratũ EFGH, in quo ducantur diametri EG, FH, ſe mutuo ſecantes in I eruntque rectæ IE, IF, IG, IH, æquales, cum ſint ſemidiametri circuli circa quadratum deſcripti, vt in 4. lib. demonſtratũ eſt. Deinde ex I, in vtramq; partem ad planum quadrati erigatur perpendicularis KL, ponanturque IK, IL, æquales ipſi IE: Et denique ex K, & L, deducantur ad angulos quadrati rectæ KE, KF, KG, KH, LF, LE, LH, LG. Dico ſolidum contentum octo triangulis KEF, KFG, KGH, KEH; LFE, LEH, LHG, LFG, eſſe octoaedrum, quod quæritur. Quoniã enim latera EI, IK, trianguli EIK, æqualia ſunt lateribus EI IH, trianguli EIH; & anguli ipſis contenti recti; ipſe quidem EIK, ex defin. 3. lib. 11. At vero EIG, [b] eo quod ſit æqualis angulo GIH, ſibi deinceps, ob æqualitatem laterum EI, IH, GI, IH, & baſium EH, GH.) [c] Erit & baſis EK, baſi EH, æqualis; Eodemq; modo eidem EH, æqualis erit KH; ideoque triangulum æquilaterum erit KEH. Simili argumento concludemus, reliqua triangula eſſe æquilatera; atque adeo æqualia triangulo KEH, cum illorum latera æqualia ſint lateribus quadrati EFGH, ſingula ſingulis. Conſtitutum igitur iam eſt octaedrum ex octo triangulis æquilateris & æqualibus. Quod octaedrum dico comprehendi ſphæra diametri AB, qua nimirum & pyramis cõſtructa comprehenditur; & diametrum ſphæræ AB potentia duplam eſſe lateris EF, vel AC.

[a] 4. primi

[b] 8. primi

[c] 4. primi

QVONIAM.n.IE,perpẽdicularis eſt ad KL,ex 3. defin. lib. 11. & media proportionalis inter ſegmenta KI, IL;(quod tres rectę KI, IE, IL, æquales ſint, ideoque eandem habeãt proportionem.) Semicirculus circa KL, in plano rectarum KL,IE, deſcriptus tranſibit per punctum E,ex lemmate præcedentis propoſ. Eadem ratione ſemicirculus deſcriptus circa eandem KL, in plano rectarum KI, IF incedet per punctum F. Idemque dicendum eſt de punctis G,H.Igitur quilibet horum ſemicirculorum circumductus, manente fixa diametro KL, deſcribet ſphęram,quę complectitur octaedrum conſtitutum, cum per omnes illius angulos incedat. Cum ergo hęc ſphæra æqualis ſit datæ ſphæræ, cuius diameter AB;(Nam cum rectæ AC, EF,æquales ſint, ideoque ipſarum quadrata æqualia; Sit autem tam quadratum rectæ AC,duplum quadrati rectæ AD, quam quadratum rectæ EF quadrati rectę EI;Erunt & rectæ AD, EI, hoc eſt, KI, ſemidiametri æquales. Quare & totæ diametri AB, KL, æquales erunt; ac proinde ſphæræ ipſarum æquales exiſtent.) comprehendetur idem octaedrum data ſphęra.

[a] 47. primi

QVIA vero quadratum rectæ AB,[a] æquale eſt quadratis rectarũ AC, BC,quæ æqualia ſunt; erit quadratũ rectæ AB, duplum quadrati rectæ AC. Quamobrem cũ AB, ſit diameter ſphæræ, & AC, recta æqualis lateri octaedri EF; manifeſtum eſt, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lat 1s octaedri. Itaque octaedrum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, qua & pyramidem, &c. Quod erat faciendum.

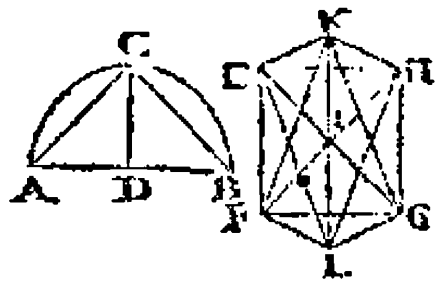
COROLLARIVM I.

EX dictis manifeſtum eſt, in octaedro tres diametros ſe mutuo ad angulos rectos ſecare in centro ſphæræ: quales ſunt KL, EG FH, ſecãtes ſeſe in I. Omnes enim anguli ad I, oſtenſi ſunt recti. Atque proinde, cum KI, recta ſit ad lineas EG, HF;

[b] 4. vndec.

recta

cta quoque erit ad planum EFGH, per ipſas ductũ; a 18. vnde. Ideoque & plana KFLH, ELGK, per KI, ducta, recta erunt ad planum EFGH. Immo eadem ratione, vt paucis rem com plectar, tria plana EFGH, KFLH, ELGK, ſe mutuo ad angulos rectos ſecabunt; Quæ quidem plana ſunt quadrata, cum omnia eorum latera ſint ipſius octaedri latera, ac proinde æqualia exiſtant inter ſe, comprehendantque angulos rectos; eo quod (cum quadratum diametri ſphæræ duplum ſit quadrati lateris octaedri, vt oſtendimus,) quadratum diametri HF, æquale exiſtit quadratis laterũ octaedri FK, KH. b Ita enim efficitur, vt angulus FKH, rectus ſit. Eademque eſt ratio de cæteris angulis.



b 48. primi

COROLLARIVM II.

OCTAEDRVM diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales, quarum baſis communis, eſt quadratum EFGH, vertices vero K, & L; altitudines denique, ſemidiametri IK, IL: cuiuſmodi ſunt pyramides EFGHK, EFGHL. Nam plana vnius ſunt ſimilia & æqualia planis alterius, vt conſtat, cum ſint triangula æquilatera, & æqualia, præter baſin communem, quæ eſt quadratum ſubduplum quadrati diametri ſphæræ, vt eſt demonſtratum.

COROLLARIVM III.

SI tetraedrum, & octaedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertiũ

lateris octaedri. Ponatur enim quadratum diametri sphæræ diuisum in sex partes. [a] Quoniam igitur diameter sphæræ est potẽtia sesquialtera lateris tetraedri, erit quadratum lateris tetraedri talium partium 4. qualium 6. est quadratum diametri sphæræ. [b] Rursus quia diameter sphæræ est potentia dupla lateris octaedri, erit quadratum lateris octaedri talium partiũ 3. qualiũ 6. est quadratũ diametri sphæræ. Igitur cum talium partium 4. sit quadratum lateris tetraedri, qualium 3. est quadratum lateris octaedri; perspicuum est, latus tetraedri potentia sesquitertium esse lateris octaedri.

[a] 13. tertij decimi

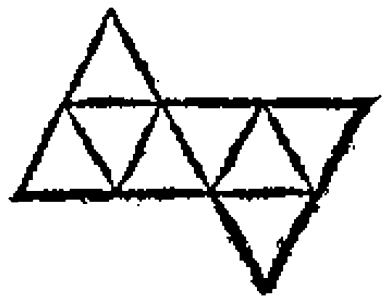
[b] 14. tertij decimi

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE, quia in quadrato EFGH, recta EH, parallela est rectæ FG; & in quadrato ELGK, recta EK, rectæ GL: [c] Erit planum EHK, per EH, EK, ductum plano FGL, per FG, GL, ducto parallelum. Cum igitur eadem sit ratio de cæteris basibus octaedri, efficitur, bases octaedri oppositas inter se parallelas esse.

[c] 15. vnde.

SCHOLIVM.



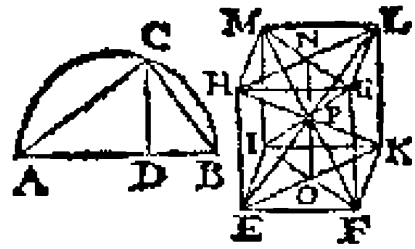
QVOD si ex materia aliqua conficiantur octo triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, facile ex ipsis rite inter sese complicatis componetur octaedrum secundum totam solliditatem, vt ait Albertus Durerus.

CVBVM

PROBL. 3. PROPOS. 15. 14.

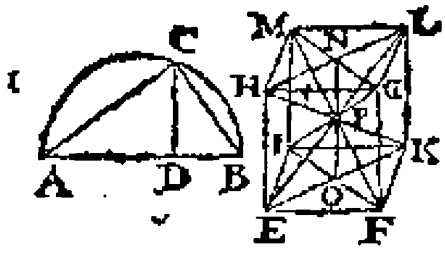
CVBVM conſtituere; & ſphæra cõplecti, qua & priores figuras; & demonſtrare, quod ſphæræ diameter potentia ſit tripla lateris ipſius cubi.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras comprehendit, diameter AB, circa quã ſemicirculus deſcribatur ACB: & ex AB, auferatur tertia pars BD, vt ſit AB, ipſius BD, tripla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, cõnectantur rectæ AC, BC. Super rectã EF, quæ rectæ BC, ſit æqualis, quadratum conſtituatur EFGH, ſuper quod erigantur perpendiculares EI, FK, GL, HM, æquales quoque ipſi BC, quarum extrema coniungantur rectis IK, KL, LM, MI. Quoniam ergo rectæ EI, FK, ad planũ EFGH, rectæ ſunt; [a] erunt rectæ EI, FK, parallelæ: Sunt autem & æquales, quod vtraque æqualis poſita ſit ipſi BC, hoc eſt ipſi EF. [b] Igitur & EF, IK parallelæ ſunt & æquales; & ideo parallelogrammũ eſt EFKI; In quo, cum lineæ EI, IK, KF, æquales ſint ipſi EF, omnes quatuor lineæ æquales exiſtunt: [c] Sũt autem & omnes quatuor anguli recti, cum EIK, FKI, æquales ſint oppoſitis rectis KFE, IEF. Igitur EFKI, quadratum eſt. Eadem ratione quadrata erunt FKLG, GLMH, HMIE; Atque idcirco & IKLM, quadratum erit, [d] cũ ſimile ſit & æquale quadrato oppoſito EFGH. Eſt enim EL, ſolidum parallelepipedum, [e] quod eius plana oppoſita ſint parallela, nimirum per lineas parallelas ſe mutuo tangentes ducta. Quare cubus erit EL. Quem dico comprehendi ſphæra diametri AB. Sint enim planorum oppoſitorum EFKI, GHML, diametri EK, FI, GM,



[a] 6. vnde.
[b] 33. primi
[c] 34. primi
[d] 24. vnde.
[e] 25. vnde.

GM, *H L*, per quæ ducantur plana E *K* L H, F I M G.



[a] Quia igitur tam planum EKLH, quam FIMG, cubũ bifariam ſecat; vtrumque per centrum cubi trãſibit, ex ſcholio propoſ. 39. lib. 11. per punctum videlicet P, in quo ex coroll. eiuſdẽ propoſ. ſe mutuo quoque bifariam diuident omnes diametri cubi; Ac propterea communis plãorum ſectio, recta ſcilicet NO, per idem punctum P, incedet. Quia vero plana EKLH, FIMG, rectãgula ſunt, (Cũ.n. HE, perpẽdicularis ſit duabus rectis EI, EF, ob quadrata EM, EK;[b] perpẽdicularis quoq; erit ad planũ EK, ideoq; & ad rectã EK, ex defi. 3. lib. 11. Rectus ergo angulus eſt H E K. Eadem ratione recti erunt reliqui anguli in plano EKLH, necnon & anguli in plano FIMG. Rectangula ergo ſunt plana EKLH, FIMG,) & æqualia, quod latera vnius æqualia ſint lateribus alterius; erunt quoque eorum diametri EL, HK, FM, GI, æquales, vt conſtat ex ſcholio propoſ. 34. lib. 1. Ac proinde & ſemidiametri PE, PL, PH, PK; PF, PM, PG, PI, æquales erunt. Quare ſemicirculus circa E L, ex centro P, deſcriptus, & circumductus, fixa manente diametro EL, ſphęrã deſcribet per omnes cubi angulos tranſeuntem; quam quidem æqualem eſſe ſphęrę diametri AB, ita demonſtrabitur.

[c] CVM quadratũ rectæ EK, æquale ſit quadratis æqualibus rectarũ æqualiũ EF, FK, ac proinde duplũ quadrati rectę EF, hoc eſt, quadrati rectæ KL: Erũt quadrata rectarum E K, K L, tripla quadrati rectæ K L: [d] Eſt autem quadratis rectarum EK, K L, æquale quadratum rectæ EL, qđ angulus EKL, ſit rectus in rectangulo E K LH. Igitur & quadratum rectæ E L, triplum erit quadrati rectæ KL, hoc eſt, quadrati rectæ FC: At vero eiuſdem quadrati rectæ BC, triplum eſt quadratum rectæ A B. (Nam tres rectæ AB, B C, BD, proportionales ſunt, ex coroll. propoſ. 8. lib. 6. Ac proinde ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt eſt AB, ad B D, ita erit quadratũ rectæ AB, ad qua-

[a] 28. vnde.
[b] 4. vnde.
[c] 47. primi
[d] 47. primi

ad quadratum rectæ BC. Cum ergo AB, ipſius BD, ſit tripla; erit quoque quadratum rectæ AB, quadrati rectæ BC, triplum.) Igitur quadrata rectarum EL, AB, æqualia ſunt; ac propterea ipſæ rectæ EL, AB, diametri nimirum ſphærarum, ideoque & ipſarũ ſphæræ æquales exiſtunt.

QVIA vero oſtenſum eſt quadratum diametri EI, triplum eſſe quadrati lateris cubi KL; manifeſtum eſt diametrum ſphæræ potentia triplam eſſe lateris cubi. Quocirca cubum conſtituimus, & ſphæra complexi ſumus, &c. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM I.

EX demonſtratione huius problematis manifeſtum eſt, omnes diametros cubi inter ſe eſſe æquales, ſeſeque mutuo bifariam in centro ſphæræ ſecare. Atque eadem ratione rectas lineas, quæ centra quadratorum oppoſitorum coniungunt, bifariam diuidi in eodem centro. Demonſtratum enim eſt, diametros cubi EL, HK, FM, GI, æquales eſſe, ſeſeque mutuo bifariam ſecare in centro P. Quod vero & recta NO, coniungens centra N, & O, quadratorum oppoſitorum GHML, EFKI, in eodem centro P, bifariam diuidatur, hac ratione oſtendetur. Duo anguli OFP, OPF, trianguli OFP, æquales ſunt duobus angulis NMP, NPM, trianguli NMP: (a Nam angulus OFP, æqualis eſt alterno NMP, inter lineas FI, GM, b quæ parallelæ ſunt, cum ſint communes ſectiones planorũ parallelorum EFKI, GHML; c & angulus OPF, æqualis eſt oppoſito ad verticem NPM.) Sunt autem & latera PF, PM, quibus adiacent, æqualia, cum ſint ſemidiametri. Igitur & latera PO, PN, æqualia erũt; ac proinde recta NO, bifariam ſecabitur in P. Eademque eſt ratio de cæteris lineis coniungentibus centra aliorum quadratorum oppoſitorum.

a 29. primi.
b 16. vnde.
c 15. primi

CO-

COROLLARIVM II.

RVRSVS potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi, æqualis eſt potentiis laterum tetraedri & cubi ſimul ſumptis. [a] *Nam qualium partium 9. eſt quadratum diametri, talium 6. eſt quadratum lateris tetraedri:* [b] *Qualium vero partium 9. eſt idem quadratum diametri, talium 3. eſt quadratum lateris cubi. Igitur quadratum lateris tetraedri, & quadratum lateris cubi ſimul ſunt partium 9. quemadmodum & quadratum diametri; Ac proinde quadratum diametri æquale eſt quadratis dictorum laterum. Hoc etiam manifeſtum eſt ex ſemicirculo circa diametrũ ſphæræ deſcripto, in quo latus tetraedri eſt AC, cubi vero BC.* [c] *Perſpicuum autem eſt, diametrũ ſphæræ AB, poſſe & rectam AC, & rectam BC, cum angulus ACB, ſit rectus.*

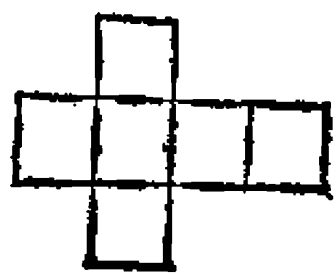
[a] 13. tertij dec.

[b] 15. tertij dec.

[c] 47. primi

SCHOLIVM.

QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur ſex quadrata inter ſe æqualia, diſponanturque, vt hæc figura indicat, facile componetur cubus ſecundum totam ſoliditatem, ſi dicta quadrata rite complicentur inter ſe. Efficietur enim ex illis figura quædam ſolida octo angulos ſolidos continens inſtar teſſaræ cuiuſpiam, vt conſtat.



16. PROBL. 4. PROPOS. 16.

ICOSAEDRVM conſtituere; & ſphæra complecti, qua & ante dictas figuras;

guras: & demonſtrare, quod Icoſaedri latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor.

SIT ſphæræ, quæ prædictas figuras cõprehẽdit, diameter AB, circa quã ſemicirculus deſcribatur ACB: Et ex AB, abſcindatur quinta pars BD. vt AB, ipſius BD, ſit quintupla: & ipſius AD, ſeſquiquarta; At vero AD, ipſius BD, quadrupla. Deinde ducta DC, perpendiculari ad AB, connectantur rectæ AC, BC. Ad interuallum rectæ EF, quæ ipſi BC, ſit æqualis, circulus deſcribatur ex centro E; in quo pentagonum æquilaterum inſcribatur FGHIK. Poſt hæc diuiſis arcubus FG, GH, HI, IK, KF, bifariam in punctis L, M, N, O, P, cõnectantur rectæ FL, LG, GM, MH, &c. nempe latera decagoni. Deinde ex cẽtro E, & punctis L, M, N, O, P, ad planum circuli FGHIK, perpendiculares erigantur EQ, LR, MS, NT, OV, PX, quæ æquales ponantur ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. Eruntq; omnes inter ſe æquales; [b] ſed & parallelæ ſunt. Igitur rectæ, quæ illas cõiungunt, nempe EL, QR; EM, QS; EN, QT; EO, QV; EP, QX. (quas tamen omnes, vt vitaremus confuſionem, non duximus.) binæ inter ſe æquales erunt: Ac proinde cum æquales ſint EL, EM, &c, ſemidiametro EF; æquales quoque erunt QR, QS, QT, QV, QX, & inter ſe, & ſemidiametro EF, ſeu rectæ BC. [d] Quia vero planum per rectas QR, QS, ductum parallelum eſt plano FGHIK, per rectas EL, EM, ducto: eademq; ratione planum per rectas QS, QT, ductum parallelum eſt plano eidem FGHIK, per rectas EM, EN, ducto, conuenit autem planum per rectas QR, QS, cum plano per QS, QT, in recta QS. Igitur efficient hæc duo plana vnum planum per ea, quæ ad propoſ. 16. lib. 11. oſtendimus. Non aliter oſtendemus planũ per QT, QV, cum hoc plano efficere vnum planum; necnon planum per QV, QX; & planum per QX, QR. Sunt ergo quinque lineæ QR, QS, QT, QV, QX, in eodem plano; Ac proinde ſi ex Q ad interuallum QR, in eo plano circulus deſcribatur, is per reliqua puncta S, T, V, X, tranſibit, eritque

[a] 11. quar.

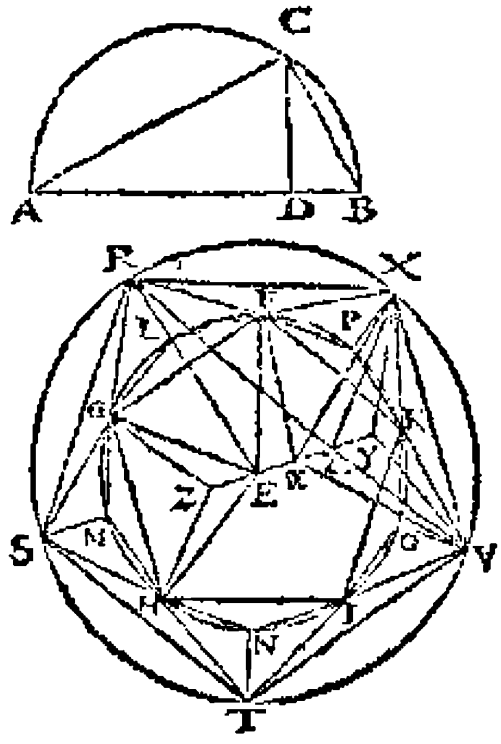
[b] 6. vndec.

[c] 33. primi.

[d] 15. vnde.

æqualis

æqualis circulo FGHIK. Coniungantur puncta R,S,T, V,X,rectis RS,ST,TV,VX,XR.[a] Quia igitur L R, PX, æquales ſunt,& parallelæ; ſi concipiatur duci recta LP; [b] erunt quoque LP,RX, æquales & parallelæ; [c] Ac proinde ex circulis æqualibus æquales arcus auferent: Aufert autem LP,quintam partem circuli FGHIK,nempe duas decimas partes FL,FP. Igitur & RX,quintam partem auferet circuli RSTVX. Similiprſus argumento concludemus, reliquas rectas RS,ST,TV, VX, quintas partes auferre. Quamobrem pẽtagonum æquilaterũ eſt RSTVX, omnia latera æqualia habẽs lateribus pẽtagoni FGHIK. Demittantur ex angulis pentagoni RSTVX, ad angulos pẽtagoni FGHIK, rectæ RF, RG, SG, SH, TH, TI, VI, VK, XK, XF. Quia igitur perpendicularis LR, æqualis ponitur ſemidiametro EF, hoc eſt, lateri hexagoni circuli FGHIK; & eſt IF, latus decagoni; [d] erit quadratum lateris pẽtagoni eiuſdem circuli æquale quadratis rectarum LR, LF: [e] Eſt autem eiſdẽ quadratis æquale quadratum rectæ FR; quod angulus FLR, rectus ſit ex 3. defin. lib. 11. Igitur quadratum rectæ FR, æquale eſt quadrato lateris pentagoni: ideoque recta FR, lateri pẽtagoni LP, ſeu FG, hoc eſt, ipſi RX, æqualis erit. Eademq; rõne erunt reliquæ lineæ RG, SG, SH, &c. reliquis lateribus vtriuſq; pentagoni æquales; Ac propterea decem triãgula RFX, RFG, RGS, SGH, SHT, THI, TIV, VIK, VKX, XKF, æquilatera erunt, & inter ſe æqualia, cum eorum omnia latera æqualia ſint lateribus pentagoni, æquilateri



[a] 6. vndec.
[b] 33. primi
[c] 28. tertij.
[d] 10. tertij. dec.
[e] 47. primi

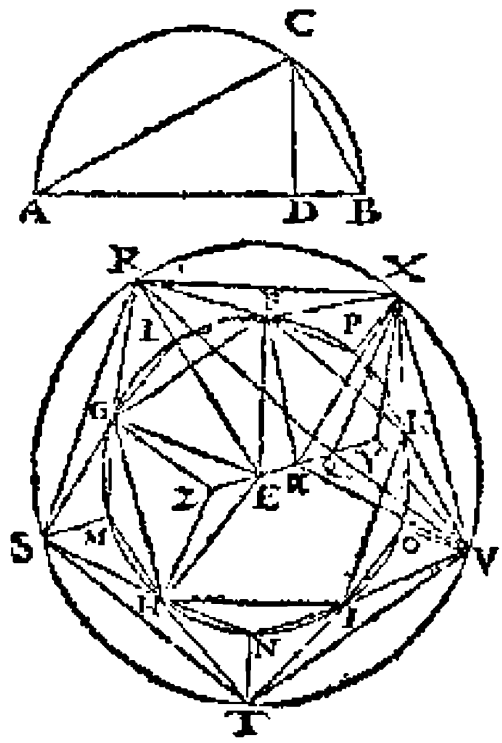
lateri. Poſt hæc, perpendicularis EQ, in vtramq; partẽ extendatur, ſintq; rectæ QY, EZ, æquales ſingulæ, lateri decagoni circuli FGHIK, vel RSTVX; & connectantur rectæ VQ, VY, XQ, XY, GE. GZ, HE, HZ. Quũ ergo QX, ſemidiameter eſt circuli RSTVX, hoc eſt, latus hexagoni, & QY, latus eſt decagoni eiuſdem circuli; erit quadratũ lateris pentagoni XV, æquale quadratis rectarũ QX, QY; b Eſt autẽ eiſdem quadratis æquale quadratum rectæ XY, quod angulus XQY, rectus ſit ex defin. 3. lib. 11. (Nam cum plana circulorum FGHIK RSTVX, parallela ſint oſtenſa, ſitque EQ, ad illius planum recta, ex conſtructione, erit quoque EQ, ad huius planum recta, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. ideoque perpendicularis ad rectam QY, in eodem plano) Igitur quadratum rectæ XY, æquale eſt quadrato rectæ XV, propterea que recta XY, rectæ XV, æqualis. Eodemque modo eidem XV, æqualis oſtendetur VY; Ac proinde triangulum VYX, æquilaterum eſt. Non aliter demonſtrabimus, ſi ducantur rectæ KY, SY, TY, (quas tamen, vt vitaremus confuſionem linearum, non duximus.) quatuor triangula RYX, RYS, SYT, TYV, æquilatera eſſe, & æqualia triangulo VYX, hoc eſt, prioribus decem, cum omnium latera æqualia ſint lateribus pentagoni. Simili argumento æquilaterum erit triangulum GZH, (cum EG, ſit latus hexagoni, nempe ſemidiamer, & EZ, latus decagoni, angulusque GEZ, rectus, ex 3. defin. lib. 11.) nec non quatuor triangula HZI, IZK, KZF, FZG, (quorum tamen lineas, ne pareremus confuſionem, non duximus,) quę omnia prioribus quindecim æqualia erunt, eandem ob cauſam. Cum igitur omnia hæc triangula viginti æquilatera ſint, & æqualia, copulenturque ſingula ſingulis per lineas rectas, nempe per eorum latera; conſtitutum erit ex ipſis Icoſiedrum. Quod dico comprehendi ſphæra diametri AB.

DIVISA enim recta EQ, bifariã in α, ducantur rectæ αF, αX, αV. Quoniam igitur latera αQ, QV, trianguli αQV, æqualia ſunt lateribus αQ, QX, trianguli αQX, cum QV, QX, ſint ſemidiametri circuli RST,

a 10 tertij. dec.

b 47. primi.

VX: Sunt autem & anguli ∝QV, ∝QX, æquales, nempe re-
a 4. primi. cti, ex defin. 3. lib. 11. a Erunt & baſes ∝V, ∝X, æquales. Eademque ratione, ſi ducatur rectę ex ∝, Q, ad R, S, T, oſtendentur rectę ∝R, ∝S, ∝T, æquales & inter ſe, & ipſis ∝V, ∝X. Rurſus quia latera ∝Q, QX, trianguli ∝QX, æqualia ſunt lateribus ∝E, EF, trianguli ∝EF, cum QX, EF, ſint ſemidiametri circulorum æqualium, & EQ, diuiſa ſit bifariam in ∝: Sunt autem & anguli ∝QX, ∝EF, æquales, nimirum recti, ex defin. 3. lib. 11.



b 4. primi. b Erunt quoque baſes ∝X, ∝F, æquales: eodemq; modo ſi ex ∝, E, ad G, H, I, K, rectę ducatur, oſtendentur ∝G, ∝H, ∝I, ∝K, æquales ipſi ∝X; Ac proinde decem lineę ductę ad decem angulos F, G, H, I, K; R, S, T, V, X, æquales ſunt. Quoniam vero QE, ſemidiameter eſt, hoc eſt, latus hexagoni circuli FGHIK; & EZ, latus decagoni eiuſdē circuli; erit QZ, diuiſa in E, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit QE. Quare minus ſegmentum ZE, aſſumens E ∝, dimidium maioris ſegmenti, hoc eſt, recta ∝Z, quintuplum poteſt eius, quod ex E∝, deſcribitur, quadrati: Poteſt autem & recta ∝F, quintuplum eiuſdem quadrati rectę E∝. (Nam cum quadratum rectę EF, quadruplum ſit quadrati rectę ∝E, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod recta EF, dupla ſit ipſius E∝; erunt quadrata rectarum EF, E∝, ſemel quintupla quadrati rectę E∝. d Cum ergo quadratis rectarum EF, E∝, æquale ſit quadratum rectæ AF; erit quoq; quadratum

c 9. tertij-dec.

d 3. tertij-dec.

e 47. primi

dratum rectæ αF, quintuplum quadrati rectæ Eα.) Igitur æqualia sunt quadrata rectarum αZ, αF, ac proinde rectæ ipsæ αZ αF, æquales erunt. Cum igitur ZY, bifariam secetur in α, (propterea quod si æqualibus αE, αQ, æquales rectæ addantur EZ, QY totæ Zo, Yα, æquales fiant) Erunt omnes rectæ ductæ ex α, ad omnes angulos Icosaedri æquales. Quocirca sphæra descripta circa diametrum ZY, ex centro α, per omnes angules Icosaedri constituti transibit. Hanc ergo sphæram dico æqualem esse sphęræ diametri AB.

[a] CVM.n. sit vt αZ, ad αE ita YZ, dupla ipsius αZ, ad QE, duplam ipsius αF; [b] Ac propterea vt quadratum rectę αZ, ad quadratum rectę αE, ita quadratũ rectæ YZ, ad quadratum rectæ QE; sit autem quadratũ rectæ αZ, ostensum quintuplum quadrati rectæ αE: Erit quoque quadratum rectæ YZ, quintuplum quadrati rectæ QE, hoc est, quadrati rectæ BC; quod recta QE, æqualis sit posita semidiametro EF, hoc est, rectę BC: Est autem & eiusdem quadrati rectæ BC, quintuplum quadratum rectæ AB; (Nam cum, ex coroll. propos. 8. lib. 6, sit vt AB, ad BC, ita BC, ad BD; erit vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę BC, ex coroll. propos. 20. lib. 6. Ac proinde existẽte AB, quintupla ipsius BD, erit etiam quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BC.) Quadrata igitur rectarum YZ, AB, æqualia sunt, ideoque & rectæ YZ, AB; Ac propterea & sphæræ circa ipsas, æquales erunt.

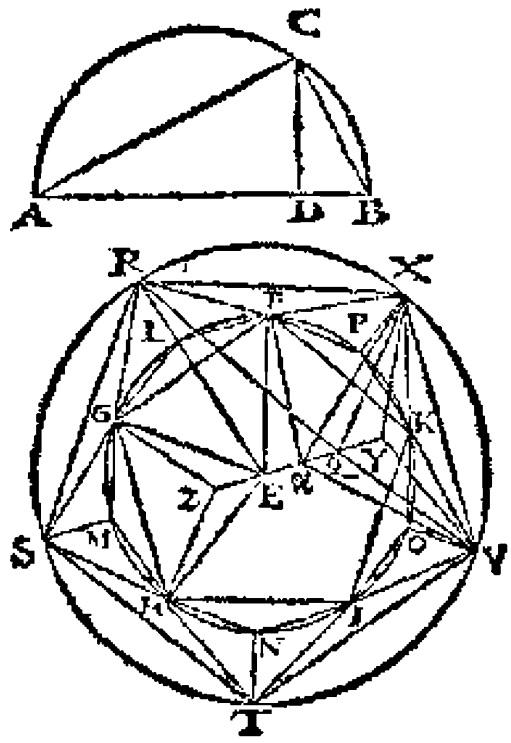
[a] 15. quin.
[b] 22. sexti

QVONIAM denique diameter sphæræ AB. Rationalis ponitur; (Nam comparatione ipsius ostendendũ est, latus Icosaedri esse lineam Irrationalem, quæ Minor vocatur) põtq; quintuplũ quadrati rectæ BC, hoc est, rectę illi æqualis EF; erit quoque semidiameter EF, circuli FGHIK, Rationalis, (Nam quadrata rectarum AB, EF, cum habeant proportionem, quam numerus ad numerum, nempe quam 5. ad 1. vel 10. ad 2. [c] erunt commensurabilia; Ac propterea & rectæ AB, EF, commensurabiles erunt, saltem potentia. Cum ergo AB, sit Rationalis, erit & EF, Rationalis.) Quare & tota diameter circuli FGHIK, Rationalis erit; Ac propterea FG,

[c] 6. dem.

l tus pentagoni, hoc eſt, latus Icoſaedri, Irrationalis erit linea, quæ vocatur Minor. Icoſaedrum igitur cõſtituimus & ſphæra ſumus complexi, qua & antedictas figuras; & demonſtrauimus, quod Icoſaedri latus irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. quod erat facien.

COROLLARIVM I.



EX dictis infertur, ſphæræ diametrum eſſe potẽtia quintuplam ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis, ex quo ſcilicet Icoſaedrum conſtitutũ eſt, & quip quinque Icoſaedri angulos incedit. Oſtenſum. n. eſt quadratum diametri AB, quintuplum eſſe quadrati rectæ BC, hoc eſt, ſemidiametri EF.

COROLLARIVM II.

ITEM manifeſtum eſt, ſphæræ diametrum eſſe compoſitam ex latere hexagoni, hoc eſt, ex ſemidiametro, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli: Nam Y Z, diameter ſphæræ componitur ex EQ, latere hexagoni, & ex QY, EZ, lateribus decagoni circuli FGHIK.

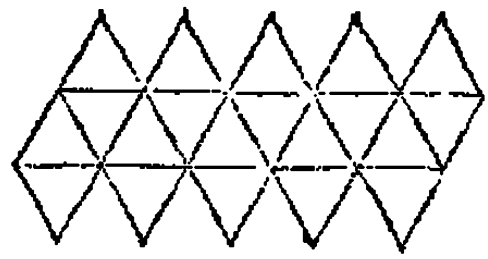
COROL-

COROLLARIVM III.

CONSTAT denique latera Icosaedri oppositia, qualia sunt RX, HI, esse parallela. Nam recta RX, ostensa est parallela rectæ, quæ ex L, in P, duceretur. Cum igitur eidē rectæ LP, sit quoq; parallela recta HI, vt in scholio propos. 27. lib. 3. demonstrauimus; (eo quod æquales sunt arcus HL, IP; continet enim vterque tres decimas partes totius circumferentiæ,) perspicuum est, rectas RX, HI, esse parallelas. Eademque est ratio de cæteris lateribus oppositis.

SCHOLIVM.

QVOD si ex aliqua materia conficiantur viginti triangula æquilatera inter se æqualia, disponanturque, vt hæc figura indicat, componetur Icosaedrum secundum totam solidit atem, si rite inter sese aptentur.

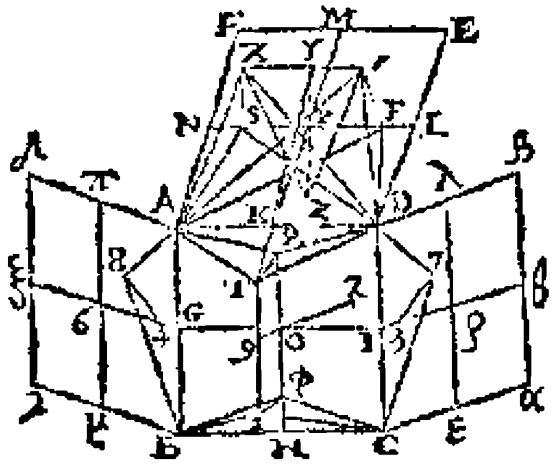


PROBL. 5. PROPOS. 17. 17.

DODECAEDRVM constituere; & sphæra cōplecti, qua & prędictas figuras; & demōstrare, quod Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ vocatur Apotome.

SIT vna basis cubi data sphæra comprehensi, quadratū ABCD, cui insistat aliud æquale ad rectos angulos ADEF, vt sit cōmunis horum sectio recta AD, (Insi

fiunt enim omnes baſes cubi ſibi mutuo ad angulos rectos Nam in præcedentibus, vt cubus conſtitueretur, erectæ ſunt ex angulis baſis EFGH, quatuor lineæ EI, FK, GL, HM, ipſi baſi EFGH, perpendiculares. Id quod facile apparere poteſt ex figura propoſitionis 15. huius lib. Quare & baſes cubi per ipſas ductę, rectæ erunt ad eandem baſin EFGH) Diuiſis itaque cunctis lateribus bifariam in punctis G,H,I,K,L, M, N, quę rectis cõnectantur ſecãtibus ſeſe in O, P, centris quadratorum, vt cõſtat ex demonſtratione octaui problematis lib. 4. ſecentur OK, PL, PN, extrema ac media ratione in pũctis Q, R, S, ex quibus ad plana quadratorum educantur extra cubum perpendiculares QT, RV, SX, æquales ſegmẽtis maioribus OQ, PR, PS. Coniunctis deinde rectis AT, AX, DT, DV, VX; Dico ATDVX, eſſe vnum ex duodecim pentagonis æquilateris, & æquiangulis Dodecaedri conſtituendi. Quod enim pentagonum ATDVX, ſit in vno plano, ita oſtendetur. Cum RV, SX, ſint ad quadratum ADEF, rectę, [b] ipſę erunt parallelę; Ac proinde, cũ ſint æquales, (quia ſegmenta maiora PR, PS, quibus æquales ſunt poſitæ, æqualia ſunt, cum & lineæ ſectę PL, PN, æquales ſint.) [c] erunt quoque coniungentes rectę RS, VX, æquales & parallelę: [d] Eſt autem & AD, eidem RS, ſiue LN, parallela, eo quod AN, DL, parallelę ſunt & æquales. [e] Igitur & AD, VX, parallelę ſunt; [f] Ac propterea rectæ coniungentes AX, DV, in eodem cum ipſis erunt plano; ideoque trapezium ADVX, in vno exiſtet plano: Eſt autem & triangulum ATD, in vno plano. Dico quod & in eodẽ plano cum trapezio ADVX. Ex P.n. ducatur PY parallela ipſi RV, quæ erit recta ad quadratum ADEF, quod ad idem recta ſit RV: Et conectantur re-



11. vnde.

b 6. vndec.

c 33. primi

d 33. primi

e 9. vndec.

f 7. vndec.

g 8. vndec.

rectæ K T, K Y. Quũ igitur est vt O K, ad O Q, ita O Q, ad Q K, ob sectionem rectæ O K: Est autem K P, ipsi O K, æqualis: (sunt enim dimidia latera cubi;) & P Y, ipsi O Q, (cum æqualis sit ipsi R V, quæ posita fuit æqualis ipsi O Q, maiori segmento;) Erit quoque vt K P, ad P Y, ita O Q, hoc est, Q T, illi æqualis, ad Q K. Quare cum triangula P K Y, Q T K, duo latera habeant duobus lateribus proportionalia, sintque ad vnum angulum K, composita, [a] ita vt homologa latera sint parallela, nempe P K, & Q T, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A B C D; & P Y, Q K, inter se, quod vtrumque rectum sit ad quadratum A D E F: [b] Erunt reliqua latera K Y, K T, in rectam lineam collocata; [c] Ac propterea recta T Y, in vno erit plano, ideoque planum A T D, & planum A D V X, vnum planum constituent, per rectas T Y, A D, ductum. Quocirca pentagonum A T D V X, in vno existit plano.

[a] 6. vndec.

[b] 32. sexti

[c] 1. vndec.

QVOD vero sit æquilaterum, ita docebitur. Cum latera A N, N S, trianguli A N S, æqualia sint lateribus A K, K Q, trianguli A K Q; (Sunt enim A N, A K, dimidia latera cubi, & N S, K Q, segmenta minora rectarum æqualium sectarũ.) & anguli A N S, A K Q, recti; si ducatur recta A Q, erunt bases A S, A Q, æquales. Rursus cum latera A S, S X, trianguli A S X, sint æqualia lateribus A Q, Q T, trianguli A Q T; (Nã rectæ A S, A Q, ostensæ sunt æquales, & S X, Q T, sunt segmenta maiora rectarum æqualium sectarum) & anguli A S X, A Q T, recti, ex defin 3. lib 11. [c] Erunt quoque bases A X, A T, æquales. Quod si ducatur recta D Q, ostendemus eodem argumento, rectam D T, rectæ A T; si vero ducatur recta D R, rectam D V, rectæ D T, esse æqualem Sunt igitur pentagoni quatuor latera X A, A T, T D, D V; æqualia; quibus etiam æquale ostendemus reliquum V X, hac ratione. [f] Quadrata rectarum P N, N S simul tripla sunt quadrati rectæ P S, hoc est, quadrati rectæ S X: Est autem quadrato rectæ P N, æquale quadratum rectæ A N Igitur & quadrata rectarũ A N, N S, simul tripla sunt quadrati rectæ S X. [g] Cum ergo quadratis rectarũ A N, N S, æquale sit quadratum rectæ A S; erit quoque quadratum

[d] 4. primi.

[e] 4. primi.

[f] 4. tertij decimi.

[g] 47. primi

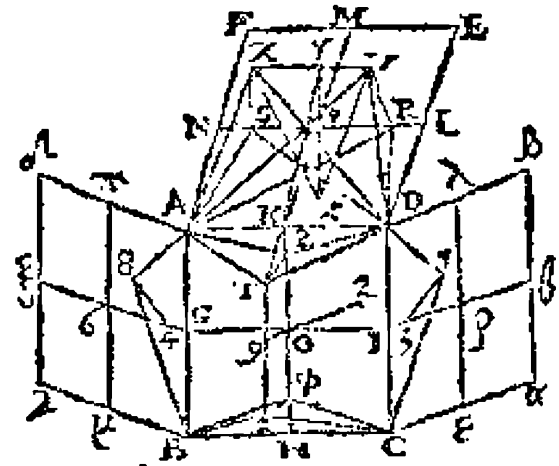
rectæ AS, triplum quadraxi rectæ SX; Ac proinde quadrata rectarũ AS, SX, ſimul, quadrupla eiuſdẽ quadrati
[a] 47. primi. rectæ SX. [a] Eſt autem quadratis rectarum AS, SX, æquale quadratum rectæ AX. Quadratũ ergo rectę AX, quadruplum quoque erit quadrati rectę SX, hoc eſt quadra
[b] 34. primi ti rectæ PS, hoc eſt quadrati rectę XY; [b] Sunt enim rectæ PS, XY, æquales. Cum igitur & quadratum rectę VX, quadruplum ſit eiuſdem quadrati rectę XY ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2 quod VX, dupla ſit ipſius XY; Erunt quadrata rectarũ AX, VX, æqualia; Ac proinde rectæ ipſę æquales. Quare cum & XA, AT, TD, DV, oſtenſæ ſint eſſe æquales; æquilaterum eſt pẽtagonum ATDVX,

QVOD autem & æquiangulum ſit, ita perſpicuum fiet. Ductis rectis AR, AV; cum PN, ſecta ſit in S, extrema ac media ratione, eique addita PR, æqualis maiori
[c] 5. tertij d. ſegmento PS; [c] erit quoque NR, ſecta in P, extrema ac
[d] 4. tertij d. media ratione, maiusque ſegmentum erit NP. [d] Quadrata igitur rectarum NR, RP, ſimul tripla ſunt quadrati rectę NP, hoc eſt, quadrati rectæ AN: Eſt autem quadratum rectæ RV, æquale quadrato rectæ RP. Ergo & quadrata rectarum NR, RV, tripla ſunt quadrati rectæ AN; Ac proinde quadrata rectarum NR, RV, AN, quadrupla ſunt
[e] 47. primi eiuſdem quadrati rectæ AN. [e] Sunt autem quadrata rectarum NR, AN, æqualia quadrato rectæ AR. Igitur & quadrata rectarũ RV, AR, quadrupla ſunt
[f] 47. primi. quadrati rectæ AN. [f] Cum ergo quadratis rectarũ AR, RV, æquale ſit quadratum rectæ AV; Erit quoque quadratum rectæ AV, eiuſdem quadrati rectę AN, quadruplum. At vero eiuſdem quadrati rectæ AN, quadruplum eſt qnadratum rectæ AD, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod AD, dupla ſit ipſius AN. Æqualia igitur ſunt quadrata rectarum AV, AD, ideoq; & rectę AV, AD, æquales. Simili argumento, ductis rectis DS, DX, oſtendemus DX, DA, æquales eſſe; ac propterea tres rectas AD, AV, DX, inter ſe eſſe æquales. Quoniã igitur latera TA, TD, trianguli TAD, æqualia ſunt lateribus DV, VX, trianguli DXV; & baſes AD DX, æquales quoque:
[g] 8. primi [g] Erunt & anguli ATD, DVX, æquales. Non ſecus oſtendetur angulus DVX, æqualis angulo AXV. Ac proinde,

cum

cũ in pentagono æquilatero ATDVX, tres habeãtur anguli æquales ATD, DVX, AXV, ipſum erit æquangulũ. [a] 7. tertij de.

QVOD ſi ſumantur alia duo cubi quadrata Cαδ D, Bγβ A, recta ad quadratum ABCD, in communibus ſectionibus CD, AB, quorum ſingula latera bifariam ſecentur in ε, θ, λ, I, μ, ξ, π, G, punctis, quæ rectis iungantur ſe mutuo ſecantibus in quadratorũ centris ρ, σ. Secẽtur deinde Oα, OK, ρI. σG, extrema ac media ratione in punctis φ, Q 3, 4, ex quibus ad plana quadratorum educãtur ad partes cubi ex eriores perpendiculares φ2, Q T, 37, 48, æquales ſegmentis maioribus φO, QO, 3ρ, 4σ, coniunganturq; rectæ T2, 2C, C7, 7D, DT, TA, A8, 8B, B2, demonſtrabimus eadem ratione, pẽtagona T2C7DT2B8A, æquilatera eſſe & æquiangula, & æqualia priori ATDVX, ob communia latera TD, TA. Conſtructa igitur iã ſunt tria pentagona tangẽtia cubi tria latera AD DC, AB, & ſibi mutuo cohærẽtia lateribus communibus TD, TA. Si igitur eadem methodo fabricentur alia nouem ſimilia pentagona tãgentia reliqua nouem cubi latera; cõſtitutum erit Dodecaedrum. Quod quidem ſphæra comprehendi, qua & cubus, & præcedentes figuræ, hac arte demonſtrabimus.

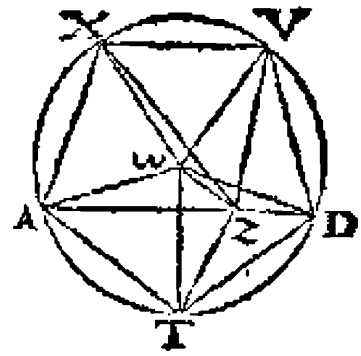


INTELLIGANTVR plana cubi oppoſita ſecari planis, quæ per rectas planorum latera bifariam ſecantes ducuntur, nempe planum ADEF, & eius oppoſitum, planis ductis per rectas KM, LN. Item planum ABCD, & eius oppoſitum, planis per rectas GI, HK, ductis &c. Quoniã igitur plana ſecantia recta ſunt ad dicta plana cubi, qđ parallela ſint baſibus cubi, quæ rectæ ſunt ad plana ADEF, ABCD. Erũt & cõmunes eorũ ſectiones ad eadẽ cubi plana rectæ. Quare cũ YP, recta ſit ad planũ ADEF, ipſa producta verſus Z, erit cõis ſectio [b] 19. undec.

planorum per rectas KM, LN, ductorum. Eodem pacto si ex O, ad planum ABCD, erigatur perpendicularis OZ; erit ipsa communis sectio planorũ, quę per rectas GI, HK, ducuntur. [a] Quia vero dictæ communes sectiones & diametri cubi se mutuo bifariam secant; secent se mutuo bifariam in Z: Secant autem sese diametri cubi bifariam in centro sphęræ cubum complectentis, ex coroll. 1. propos. 15. huius lib. Punctum igitur Z, centrum erit sphæræ circa cubum descriptæ; Ac proinde omnes rectæ ex Z, ad omnes angulos cubi ductæ inter se æquales erunt: quibus omnibus æquales quoq; esse oẽs rectas ex Z, ad omnes angulos Dodecaedri ductas, sic fiet perspicuũ, ducta recta ZX. [b] Quoniã parallelæ sunt KP, OZ, quod vtraq; recta sit ad planũ AB. D; item parallelæ sunt OK, ZP, quod vtraq; recta sit ad planũ ADEF; erit PKOZ, (debent. n. duo puncta Z intelligi esse cõiuncta) parallelogrãmum; ac ppea PZ æqualis erit ipsi KO, hoc est, ipsi NP, dimidio lateri cubi: Est autẽ & PY, ipsi PR, æqualis. Tota ergo ZY, toti NR æqualis erit. [d] Quare cum quadrata rectarum NR. PR, simul tripla sint quadrati rectæ NP, quod NR, in P, secta sit extrema & media ratione; erũt quoq; quadrata rectarum ZY. PY, hoc est, quadrata rectarum ZY, YX, simul tripla quadrati rectæ PZ: (Est. n. YX, æqualis ipsi PS, hoc est, ipsi PY:) [e] Est autẽ quadratis rectarum ZY, YX, æquale quadratum rectæ ZX. Igitur & quadratũ rectæ ZX, triplum erit quadrati rectæ ZP, hoc est, quadrati dimidij lateris cubi. At quia eiusdem quadrati dimidij lateris cubi triplum est quoq; quadratũ semidiametri sphæræ cubũ comprehendẽtis. ([f] Nã vt diameter ad latus cubi, ita est semidiameter ad dimidiũ lateris; [g] Ac proinde vt quadratũ diametri ad quadratũ lateris, ita quadratum semidiametri ad quadratũ dimidij lateris. [h] Cũ ergo quadratũ diametri triplũ sit quadrati lateris, erit quoq; quadratũ semidiametri triplũ quadrati dimidij lateris.) Aequale igit̃ est quadratũ rectæ ZX, quadrato semidiametri sphręę, seu cubi; Ac ppea ZX, æqualis semidiametro. Eadẽ rõne erit ducta recta ZV, semidiametro æqualis. Vel certe qa cũ latera ZY, YX, triãguli ZYX, æqualia sint lateribus ZY, YV,

[a] 39. vnde.
[b] 6. vnde.
[c] 34. primi
[d] 4. tertij dec.
[e] 47. primi
[f] 8. primi
[g] 22. sexti.
[h] 15. tertij dec.

YV, trianguli ZYV, & anguli cõtenti recti. (cũ enim PY, sit perpendicularis ad LN, erit quoque eadem ad sibi parallelã VY, perpẽdicularis.) Erunt bases ZX ZV, æquales: Sunt aũt & ZA ZD, ad angulos cubi, si midiametro sphæræ æquales, vt dictũ est. Sunt ergo iã quatuor rectæ ductæ ex Z. centro sphærę ad quatuor angulos pentagoni A, D, V, X, æquales semidiametro sphæræ. Vt autem ostendatur & recta ducta Z T, ad quintum angulum T, semidiametro æqualis, describatur circa pentagonum, cum sit æquilaterum & æquiangulum, circulus ATDVX, & in planum ipsius ex Z, centro sphæræ perpendicularis demittatur Z ω, connectanturque rectæ ω A, ω T, ω D, ω V, ω X. [b] Quoniam igitur quadratũ rectę Z A, æquale est quadratis rectarum Z ω, ω A; & quadratum rectæ Z X, quadratis rectarum Z ω, ω X: Sunt autem quadrata rectarum Z A, Z X, æqualia, quod rectę Z A, Z X, ostensæ sint æquales; Igitur & quadrata rectarũ Z ω, ω A, quadratis rectarũ Z ω, ω X, æqualia; Ac proinde dempto communi quadrato rectę Z ω, æqualia relinquentur quadrata rectarũ ω A, ω X, ideoq; rectę ipsę ω A, ω X, ęquales erunt. Non aliter ostendentur rectę ω V, ω D, & inter se, & ipsis ω A, ω X, ęquales, quod & rectę Z V, Z D, ęquales sint ostensę rectis Z A, Z X. Quare cum ex ω, cadant in circumferentiam plures rectę lineę ęquales, quam duę, [c] punctum ω, centrum erit circuli; Ac proinde ω T, reliquis ex centro ductis æqualis; ideoque quadrata rectarũ Z ω, ω A, æqualia erunt quadratis rectarum Z ω, ω T. [d] Cũ ergo illis duobus æquale sit quadratum rectæ Z A; his vero quadratũ rectæ Z T; Erũt æqualia quadrata rectarũ Z A, Z T; ppeaq; & rectæ Z A, Z T, æquales. Quare sphæra complectens cubum ex centro Z, descripta comprehendet pentagonum quoque ATDVX; Eodemque modo & reliqua pentagona Dodecaedri; Ac propterea eadem sphæra comprehendetur Dodecaedrum, qua cubus.



POSTREMO cum sit vt NP, ad PS, ita PS, ad SN: erit

a 4. primi.

b 47. primi

c 9. tertij

d 47. primi

erit quoque vt NL, dupla ipsius NP, ad KS, duplam ipsius PS, ita KS dupla ipsius PS, ad rectam compositam ex SN, RL, nimirum ad duplam ipsius SN. Si igitur cubi latus NL, secetur extrema ac media ratione, maius segmentum erit SR: Sed NL, tota ita secta, Rationalis est. (Nam eius quadratum commensurabile est quadrato diametri sphæræ, quæ Rationalis ponitur; cum sit illud tertia pars huius.) Igitur maius segmentum SR, hoc est, dodecaedri latus XV, illi æquale, Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome. Dodecaedrum ergo constituimus, & sphæra complexi sumus, qua & prædictas figuras; & demonstrauimus, quòd Dodecaedri latus Irrationalis est linea, quæ uocatur Apotome. Quod erat faciendum.

a 15. quin

b 6. tertij d.

COROLLARIVM. I.

CVM ergo demonstratum sit; rectam LN, extrema ac media ratione sectam, maius segmentum esse rectam RS: Sit autem LN, æqualis lateri cubi, & RS, lateri Dodecaedri; Perspicuum est, si latus cubi secetur extrema ac media ratione, maius segmentum esse latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti.

COROLLARIVM II.

SIC quoque latus cubi æquale est lineæ rectæ subtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eadem sphæra comprehensi. Nam AD, latus cubi subtendit angulum T, pentagoni, estque ostensum æquale rectis AV, DX, subtendentibus angulos X, & V, eiusdem pentagoni.

QVONIAM vero recta subtendens dictum angulum pentagoni secta extrema ac media ratione, facit maius segmentum latus pentagoni; ac propterea recta composita ex dicta recta subtendente angulum pentagoni, hoc est, ex latere cubi, & ex maiori

c 8. tertij decimi.

d 3. tertij de.

segmen-

ſegmento, id eſt, ex latere Dodecaedri, ſimiliter diuiditur, facitque minus ſegmentum latus Dodecaedri, & maius ſegmentum latus cubi: Efficitur, ſi recta linea ſecetur extrema ac media ratione, cuius minus ſegmentum ſit latus Dodecaedri, maius ſegmentum eſſe latus cubi eiuſdem ſphæræ.

COROLLARIVM III.

CONSTAT etiam ex dictis, in Dodecaedro eſſe ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos a tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariam quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. Nam duo ex dictis lateribus ſunt V X, T 2, quæ videlicet parallela ſunt lateribus cubi E F, AB; aliaque quatuor reperiuntur ſuper reliquas quatuor baſes cubi, quorum, quæ ſuper baſes cubi oppoſitas exiſtunt, parallela ſunt, cum parallela ſint cubi lateribus paralle lis & oppoſitis, ſecanturque, ex demonſtratis, bifariã & ad rectos angulos, a lineis rectis, quæ centra baſiũ cubi oppoſitarum coniungunt; quales ſunt rectæ YZ, 9Z, &c. quæ vt demonſtratum eſt, ſe mutuo interſecant in centro Z. Dico ſe mutuo ſecare bifariam & ad angulos rectos: bifariam quidem, quoniam cum rectæ PZ, OZ, æquales ſint dimidio lateri cubi; et YP, 9O, æquales maioribus ſegmentis æqualibus PS, OQ; Erũt totæ YZ, 9Z, æquales; Eademq; ratione reliquæ lineæ ex Z, ad ſectiones oppoſitorum laterum ductæ æquales erunt. Quare totæ tres lineæ æquales ſunt, ſeque bifariam in centro Z, mutuo ſecant: Ad angulos rectos vero, quia in parallelogrammo KOZP, angulus OZP, rectus eſt, cum opponatur recto OKP. Non aliter oſtendentur reliquæ lineæ rectæ centra baſium coniungentes efficere angulos re-

ctos.

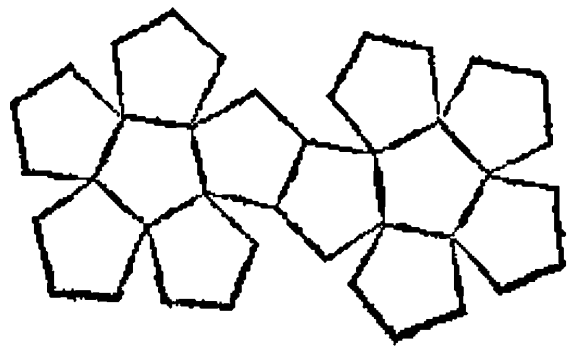
ctos. Omnes enim parallelæ ſunt lateribus cubi parallelis rectos angulos conſtituentibus, vt perſpicuum eſt.

COROLLARIVM IIII.

DENIQVE conſtat, ſi recta diuidens oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, vt dictum eſt, ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum eſſe latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eadem ſphæra comprehenſi. Cum enim quadrata rectarum ZΥ, ΥP, tripla oſtenſa ſint quadrati rectæ PZ; erit ZΥ, ſecta in P, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmẽtum erit PZ, ex ſcholio propoſ. 4. huius lib. Ac proinde erit vt ZΥ, ad ZP, ita ZP, ad PΥ; [a] ideoque vt dupla ipſius ZΥ, nempe recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ad duplam ipſius ZP, nimirum ad latus cubi, ita eadem dupla ipſius ZP, ad duplam ipſius PΥ, hoc eſt, ad latus Dodecaedri. Quare recta diuidens latera oppoſita Dodecaedri bifariam, ſecta extrema ac media ratione, facit maius ſegmentum, latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ.

[a] 15. quin.

SCHOLIVM.



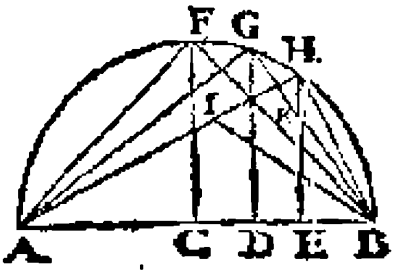
QVOD ſi ex aliqua materia conficiantur duodecim pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, diſponaturque, vt hæc figura indicat, componetur Dodecaedrũ ſecundum totam ſoliditatem, ſi rite inter ſe complicentur.

LATE-

PROBL. 6. PROPOS. 18. 18.

LATERA quinque figurarum exponere, & inter se comparare.

SIT sphæræ diameter *AB*, quæ in C, secetur bifariam In D, vero ita, vt BD, sit ipsius pars tertia; In E, denique ita, vt *BE* sit quinta pars eiusdem. Descripto deinde circa *AB*, semicirculo, ducantur ad eius circumferentiam ex C, D, E. ipsi AB, perpendiculares CF. DG, EH; connectanturque rectæ *AF*, *BF*, *AG*, *BG*, *AH*, *BH*. Post hæc ex HA, abscindatur *HI*, æqualis lateri Decagoni in eo circulo descripti, cuius semidiameter, seu latus Hexagoni est BH: connectaturque recta BI. Postremo BG secetur extrema ac media ratione in *K*, sitque maius segmentum BK.



QVOD igitur attinet ad expositionem laterum prædictarum figurarum, dico *AG*, esse latus Pyramidis, seu Tetraedri; *AF*, latus Octaedri; *BG*, latus cubi; *BI*, latus Icosaedri; *BK*, denique latus Dodecaedri. Quoniã. n. AG, media proportionalis est inter BA, *AD*, ex coroll. propos. 8 lib. 6. Erit ex coroll. propos. 20. eiusdem lib. vt BA, ad *AD*. ita quadratum rectæ BA, ad quadratum rectæ *AG*: Est autem *BA*, ipsius AD, sesquialtera; cum talium partium 2. sit *AD*, qualium 3. est *BA*. Igitur & quadratum rectæ *BA*, sesquialterum est quadrati rectæ AG; Ac proinde cum diameter sphæræ sit potentia sesquialtera lateris Tetraedri; erit *AG*, latus Tetraedri.

a 13. tertij dec.

RVRSVS quoniam AF, est media proportionalis inter *BA*, *AC*, ex eodem coroll. propos. 8. lib 6. Ac proinde vt BA, ad AC, ita quadratum rectæ *BA*, ad quadratum rectæ *AF*, ex adducto coroll. propos. 20. lib. 6. Est autem BA, ipsius AC, dupla: Erit quadratum rectæ *BA* duplum quadrati rectæ *AF*. Quare cum diameter sphæræ potentia sit dupla lateris Octaedri; erit AF, latus Octaedri. Eodem modo erit BF, latus Octaedri.

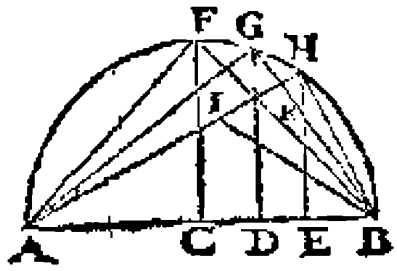
b 14. tertij dec.

DEIN-

DEINDE cum BG, sit media proportionalis inter AB, BD, ideoque vt AB, ad BD, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BG, ex præfatis duobus corollariis lib. 6. Sit autem AB, ipsius BD, tripla ex constructione: Erit quadratum rectæ AB, triplum quadrati rectæ BG. [a] Quocirca cum sphæræ diameter potentia sit tripla lateris cubi; Erit BG, latus cubi.

[a] 15. tertij dec.

PRAETEREA quia, ex eisdem corollariis, BH, est media proportionalis inter AB, BE, atque idcirco vt AB, ad BE, ita quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ BH: Est autem, ex cõstructione AB, ipsius BE, quintupla: Erit quadratum rectæ AB, quintuplum quadrati rectæ BH. Cum igitur diameter sphæræ potentia sit quintupla semidiametri circuli quinque latera Icosaedri ambientis, ex coroll. 1. propos. 16. huius lib. Erit BH, semidiameter, hoc est, latus hexagoni dicti circuli: Est autem HI, latus decagoni eiusdem circuli, ex constructione. [b] Igitur latus pentagoni poterit & BH, & HI, simul; Ac proinde [c] cum quadratum rectæ BI, æquale sit quadratis rectarũ BH, HI; erit BI, latus pentagoni circuli eiusdem. [d] Quam ob rem BI, latus est Icosaedri.



[b] 10. tertij dec.

[c] 47. primi

[d] 16. tertij dec.

DENIQVE, cum BG, latus cubi sectum sit in K, extrema & media ratione, erit BK, maius segmentum, latus Dodecaedri in eadem sphæra descripti, ex coroll. 1. propos. 17. huius lib. Exposita ergo sunt latera quinque figurarum regularium in eadem sphæra descriptarum.

QVOD uero ad comparationem laterum iam inuentorum spectat; cum demonstratum sit, diametrum sphæræ esse potentia sesquialteram lateris pyramidis; potentia vero duplam lateris Octaedri, & potentia triplam lateris cubi; perspicuum est, qualiũ partium 6 fuerit quadratum diametri, talium 4: esse quadratum lateris Tetraedri; talium uero 3. quadratũ lateris Octaedri.

Diamet.	6.
Tetræd.	4.
Octaed.	3.
Cub.	2.

Octaedri;& denique quadratum lateris cubi, talium 2. Ac propterea latus pyramidis,seu Tetraedri,esse potentia sesquitertiũ lateris Octaedri,potẽtia uero duplũ lateris cubi. Item latus Octaedri potentia esse sesquialterũ lateris cubi. Quapropter quadrata ex lateribus harum trium figurarum,Tetraedri nimirum,Octaedri,& cubi, nec non ex sphæræ diametro descripta, proportionẽ inter se habent,quam numerus ad numerum,[a] Ac propterea diameter sphæræ & latera dictarum figurarum lineę sunt commensurabiles; atque adeo cum diameter sphæræ ponatur esse Rationalis, erunt quoque prædicta latera Rationalia. Quia uero dicta quadrata non habent proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, vt constat ex coroll.propos 24.lib 8 Erũt huiusmodi lineæ, nimirũ diameter sphæræ,latus Tetraedri,latus Octaedri & latus cubi, logitudine incommensurabiles ac proinde Rationales potentia tantum commensurabiles. [b]

[a] 6. decimi

[b] 9. decimi.

AT vero latera Icosaedri & Dodecaedri, quoniam sunt lineæ Irrationales,aliud quidem, Minor; hoc verò Apotome,vt demonstratum est,nullo modo,hoc est,nec longitudine,nec potentia commensurabilia sunt lateribus prædictis.Si enim commensurabilia essent latera harum posteriorum figurarum lateribus priorum, cum latera priorum sint diametro sphæræ commensurabilia;essent quoque latera posteriorum eidem diametro commensurabilia;Ac proinde, existente diametro Rationali,forent quoque ipsa latera Rationalia. quod est absurdum.ostensum enim est. ipsa esse Irrationalia.

SED neque inter se ullo pacto cõmmensurabilia sũt dicta latera Icosaedri & Dodecaedri.Si namque credãtur esse commensurabilia longitudine inter se, cum latus Dodecaedri sit Apotome,[c] erit quoque latus Icosaedri, Apotome. Item cum latus Icosaedri sit linea Minor,[d] erit & latus Dodecaedri linea Minor. Quod si dicantur commensurabilia esse potentia tantum,sequetur eodem modo, latus Dodecaedri esse lineam Minorem, ex eo. [e] quod latus Icosaedri Minor est. Quod est absurdum. Nam ex scholio propos. 112.lib.10.Apotome, & Minor

[c] 104. decimi.

[d] 106. dec.

[e] 16. tertiædec.

& Minor ſunt lineæ Irrationales prorſus inter ſe differentes, ita vt neutra ſit eadem alteri.

ITAQVE quamuis ex lateribus expoſitis quinque figurarum regularium, tria quidem priora ſint commenſurabilia & inter ſe, & diametro ſphęræ, ideoque Rationalia exiſtant, duo vero poſteriora incommenſurabilia & inter ſe, & diametro, reliquiſque lateribus; ac proinde Irrationalia ſint: Cernitur tamen inter omnia latera prædicta hic ordo, vt latus Tetraedri maius ſit latere Octaedri, Octaedri latus maius latere cubi; Latus cubi maius latere Icoſaedri; Latus denique Icoſaedri maius latere Dodecaedri. Hoc eſt, eo ordine ſe mutuo excedunt dicta latera, quo præfatas figuras conſtruximus. Quæ forte cauſa fuit, cur Euclides non eodem ordine huiuſmodi figuras fuerit fabricatus, quo eas definiuit.

NAM latus Tetraedri maius eſſe latere Octaedri, perſpicuum eſt. Cum enim AG, latus Tetraedri ſubtendat maiorem arcum, quã AF, latus Octaedri; maior erit recta AG, quam AF, ex ſcholio propoſ. 28. lib. 3.

EODEM modo oſtendemus latus Octaedri maius eſſe latere cubi. Nam BF, latus Octaedri maiorem arcum ſubtendit, quam BG, cubi latus.

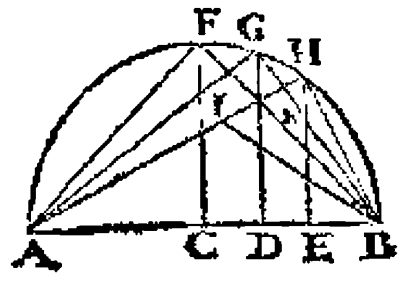
LATVS autem cubi BG, maius eſſe latere Icoſaedri BI, hac arte demonſtrabimus. Quoniam AB, tripla ponitur ipſius BD; [a] & quadrata habent proportionem laterum duplicatam; erit quadratum rectę AB, noncuplum quadrati rectę BD, cũ noncupla proportio ſit duplicata proportionis triplæ, vt hic apparet 1. 3. 9. Ac propterea qualium partium 9. ponetur quadratum rectæ AB, talium 1. erit quadratum rectæ BD. Qualium autem partium 9. eſt quadratum rectæ AB, talium 3. eſt quadratum rectæ BG; [b] quod illud huius triplum ſit; Ac proinde talium quoque 3. ſunt quadrata rectarum GD, BD, cum æqualia ſint quadrato rectæ BG. Igitur ſi auferatur quadratum rectæ BD, talium partium 1 relinquetur talium partium 2. quadratum rectæ GD. Quoniam vero quadratum rectæ AB, quintuplum eſt quadrati rectæ BH, erit quadratum rectæ BH, minus quam talium partium 2. [c] Nam cum 9. ad 2. minorem habeant propor

tio-

[a] 20. ſexti.

[b] 15. tertij decimi.

tionem quintupla, quod 10. ad 2. quintuplam proportionem habeant; [a] erit numerus, ad quem 9. habent proportionem quintuplam, minor quam 2. Quare quadratum rectę GD, maius est quadrato rectæ BH, ideoq; recta GP, maior quá recta BH. Rursus quia diameter sphęrę AB, cõponitur ex BH, semidiametro circuli, ex quo Icosaedrũ cõstituitur, & ex linea dupla lateris decagoni HI eiusdẽ circuli, per coroll. 2. propos. 16. huius lib. cõstat latus decagoni HI, minus esse tertia parte rectæ AB, hoc est, minus recta BD. Nam si HI, recta æqualis credatur tertiæ parti rectæ AB; erit dupla illius, æqualis duabus tertijs partibus, nempe ipsi AD; Ac propterea BH, reliquæ tertiæ parti erit æqualis, nimirum ipsi BD; Atque adeo, cum quadratum rectę AB, nonuplum sit ostensum quadrati rectę BD, erit idem quadratum rectæ AB, nonuplum quadrati rectæ BH. Quod est absurdum. quintuplum enim est demõstratum. Non ergo HI, tertia pars est ipsius AB: Sed neque maior tertia parte. Si enim recta HI, dicatur maior tertia parte rectę AB, & proinde dupla ipsius HI, maior quam duę tertiæ, hoc est, quam AD, erit BH, minor quã tertia pars BD. Quare quadratũ rectę AB, maius erit, quam nõuplum quadrati rectæ BD. Quod magis est absurdum. Non igitur maior est HI, tertia parte ipsius AB: Sed neque æqualis tertię parti, vt ostendimus. Minor ergo est quã tertia pars, hoc est, quam BD. Itaque cum rectę GD, DB, maiores sint rectis BH, HI, vt demonstratum est, erunt quoque quadrata illarum quadratis harum maiora: [b] Est autem quadratum rectæ BG, æquale quadratis rectarum GD, DB; & quadratum rectę BI, quadratis rectarũ BH, HI. Quadratum ergo rectæ BG, maius quoque erit quadrato rectæ BI; Ac proinde recta BG, nempe latus cubi, maior erit quam recta BI, latus scilicet Icosaedri.



MAIVS denique esse latus Icosaedri BI, latere Dodecaedri BK, hac ratione patebit. Cum rectæ BG, diuisæ

[a] 10. quin.

[b] 47. primi.

extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit B K, & minus G K; erit rectangulum ſub B G, B K, maius rectangulo ſub BG, GK; atque adeo rectangula ſub BG, BK, & ſub BG, GK, ſimul maiora duplo rectanguli ſub BG, GK: [a] Eſt autem rectangulis ſub BG, BK, & ſub BG, GK, æquale quadratum rectæ BG; Et duobus rectangulis ſub B G, G K, æqualia ſunt duo quadrata rectæ B K. (Nam cum ſit, vt BG, ad BK, ita BK, ad GK; [b] erit quadratum rectæ BK, æquale rectangulo ſub BG, G K, ideoque duo quadrata rectæ BK, æqualia duobus rectangulis ſub BG, G K.) Maius igitur quoque eſt quadratum rectæ BG, duobus quadratis rectæ BK; Atque idcirco maiora erunt tria quadrata rectæ B G, ſex quadratis rectæ BK: Atqui tribus quadratis rectæ BG, æqualia ſunt quinque quadrata rectæ B H, (Cum enim quadratum rectæ A B, triplum ſit quadrati rectæ B G, & quintuplum quadrati rectæ B H; erunt tam tria quadrata rectæ B G, quam quinque quadrata rectæ B H, æqualia eidem quadrato rectæ A B, ideoque tria illa his quinque æqualia.) Igitur & quinq; quadrata rectæ BH, maiora erunt ſex quadratis rectæ B K; Ac proinde vnũ quadratum rectæ B H, maius erit uno quadrato rectæ B K. (Si namque æquale eſſet quadratum rectæ BH, quadrato rectæ BK, vel minus; forent quinque quadrata rectæ B H, minora ſex quadratis rectæ B K. quod eſt abſurdum, cum illa quinque hiſce ſex maiora ſint demonſtrata.) Quam ob rem & recta B H, maior erit quam recta B K; Ac propterea cum B I, maior ſit quam B H, multo maior erit BI, latus uidelicet Icoſaedri, quam B K; latus Dodecaedri. Latera igitur quinq; figurarũ expoſuimus, & inter ſe comparauimus. Quod erat faciendum.

[a] 2. ſecundi

[b] 17. ſexti.

SCHOLIVM.

INTERPRETES hoc loco demonſtrant, præter dictas quinque figuras, non poſſe aliam conſtitui figuram ſolidam, quæ planis & æquilateris & æquiangulis contineatur, inter ſe æqualibus, hac ſeruatione.

EX duobus triangulis, vel ex duabus figuris alijs, ſolidus angulus conſtitui non poteſt, cum ſaltem tres anguli plani requi-

quirantur ad ſolidi anguli conſtitutionem.

EX tribus autem triangulis æquilateris, conſtat pyramidis angulus.

EX quatuor, Octaedri angulus;

EX quinque, angulus Icoſaedri;

EX ſex autem huiuſmodi triangulis ad idem punctũ coeuntibus fieri non poteſt angulus ſolidus. Cum enim trianguli æquilateri angulus contineat duas tertias partes vnius recti, ex coroll. 3. propoſ. 32. lib. 1. Erunt eiuſmodi anguli ſex, duodecim tertiæ partes vnius recti, hoc eſt, quatuor rectis æquales. Quare ex ipſis nullus angulus ſolidus conſtituetur. Nam ſolidus omnis angulus, minoribus quam quatuor rectis angulis continetur. Multo ergo minus ex pluribus, quam ſex planis eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. 120 unde.

EX tribus deinde quadratis, cubi angulus cõficitur. Ex quatuor autem quadratis nullus angulus ſolidus conſtitui poteſt. Rurſus enim recti quatuor erũt. Multo ergo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus cõſtabit.

EX tribus denique pentagonis æqualateris, & æquiangulis, Dodecaedri angulus componitur. Cũ enim quinque anguli pentagoni æquales ſint ſex rectis, vt oſtendimus ad propoſ. 32. lib. 1. Ac proinde vnus angulus contineat vnũ rectũ, ac præterea quintam partem vnius recti; continebunt tres eiuſmodi anguli tres rectos, & inſuper tres quintas partes vnius recti. Quare minores erũt quatuor rectis, ideoq; ex ipſis angulus ſolidus cõſtituetur. Sed ex quatuor huiuſmodi angulis, nullus ſolidus angulus cõfici poteſt. Cum enim vnus, vt dictum eſt, maior ſit recto, eo quod continet vnũ rectum, & inſuper recti quintam partem; erunt quatuor maiores quatuor rectis. Quare nullus angulus ſolidus ex ipſis conſtituetur; Ac propterea multo minus ex pluribus, quã quatuor eiuſmodi angulis, ſolidus angulus conſtabit. Nec ſane ex alijs figuris æquilateris, & æquiangulis cõſtitui poterit angulus ſolidus. Nam cũ ſex anguli hexagoni æquales ſint octo rectis, vt ad propoſ. 32. lib. 1. eſt demonſtratum; Ac proinde vnus angulus contineat unum rectũ, ac præterea duas partes ſextas vnius recti; continebunt tres anguli eiuſmodi tres rectos, & ſex ſextas partes recti, hoc eſt, quatuor rectos. Quare ex ipſis nullo modo cõponetur angulus ſolidus; Atque idcirco multo minus ex pluri-

bus eiuſmodi angulis, quam tribus, angulus ſolidus conficietur; neque propterea ex alijs polygonis. Quilibet enim tres maiores ſunt quatuor rectis. Quam ob rem perſpicuum eſt, preter dictas quinque figuras, aliam figuram ſolidam non poſſe conſtitui, quæ planis æquilateris, & æquiangulis inter ſe æqualibus contineatur.

NAM ſi tria triangula æquilatera & æqualia coeant in vnum punctum ad conſtitutionem anguli ſolidi, conſtituetur Pyramidis contenta quatuor huiuſmodi triangulis.

SI vero quatuor eiuſmodi triangula conueniant ad angulum ſolidum componendum, efficietur Octaedrum octo triangulis eiuſmodi comprehenſum.

SI denique aſſumantur quinque talia triangula ad efformandum angulum ſolidum, conficietur Icoſaedrũ viginti triangulis eiuſmodi contentum.

QVOD ſi tria quadrata æqualia coeant in vnum punctum, vt conſtituant angulum ſolidum, fabricabitur cubus ex ſex huiuſmodi quadratis.

POSTREMO, ſi tria pentagona æquilatera, & æquiangula, inter ſe æqualia, conueniant ad conſtitutionem anguli ſolidi, componetur Dodecaedrum duodecim eiuſmodi pentagona continens.

HOC etiam loco apponere libet modum quendam ex Hypſicle Alexandrino, quo expedite numerus laterum, & angulorum cuiuslibet figuræ regularis habeatur.

SI enim quis interrogauerit, quotnam latera quoduis Regularium Solidorum habeat; Multiplicanda ſunt omnes baſes in unius baſis latera, vt habeantur omnium baſium latera: Quia vero bina ſemper latera baſium in vnum conueniunt, ad conſtitutionem vnius lateris Regularis ſolidi, ſumendum eſt dimidium omnium laterum, vt numerus laterum Regularis ſolidi appareat.

EXEMPLVM. Si quatuor triangula Pyramidis, ſiue Tetraedri, multiplicentur in numerum laterum vnius triãguli, vt in 3. ſunt 12. quorum dimidium eſt 6. numerus ſcilicet laterum Pyramidis. Ad eundem modum & in reliquis. Si enim ſex quadrata cubum componentia multiplicentur in vnius quadrati latera, nempe in 4 fiunt 24. quorum dimidiũ eſt 12. numerus videlicet laterum cubi. Si autem octo trian-

gulo

gula Octaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 24. quorum dimidium est rursus 12. numerus laterum Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicentur in 3. numerum laterum vnius trianguli, fiunt 60. quorum dimidium est 30. numerus laterum Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedrum constituentia multiplicentur in 5. numerum laterum vnius pentagoni, fiunt 60. quorum dimidium est rursus 30. numerus laterum Dodecaedri.

QVOD si quis rursus interrogauerit, quinam anguli solidi quoduis Regularium Solidorum habeant; Multiplicandæ sunt omnes baſes in vnius baſis angulos, vt habeantur omnium baſium anguli: Quia vero tres, quatuor, vel quinque semper anguli baſium in vnum conuenũt, ad constitutionem vnius anguli solidi, diuidendi sunt omnes anguli in numerum angulorũ, qui simul coeunt ad angulũ solidum constituendũ, vt numerus angulorum solidorum Regularis solidi appareat.

EXEMPLVM: Si quatuor triangula Pyramidis multiplicentur in 3. numerum angulorum vnius trianguli, fiunt 12. anguli, qui si diuidantur in 3. (Tot enim anguli constituunt vnum solidum angulum Pyramidis) faciunt 4. angulos solidos Pyramidis. Si vero 6. quadrata cubi multiplicentur in 4. numerum angulorum vnius quadrati, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 3 (Tot enim anguli conficiunt vnum angulum solidum cubi) faciunt 8. angulos solidos cubi. Si quoque octo triangula Octaedri multiplicentur in 3. numerum angulorũ vnius trianguli, fiunt 24. anguli, qui diuisi in 4. (Tot enim anguli componunt solidũ angulum Octaedri.) conficiũt 6. angulos solidos Octaedri. Si rursus 20. triangula Icosaedri multiplicẽtur in 3. numerũ angulorũ vnius trianguli, fiũt 60. anguli, qui diuisi in 5. (Tot enim anguli constituũt angulum solidum Icosaedri) producunt 12. angulos solidos Icosaedri. Si denique 12. pentagona Dodecaedri multiplicentur in 5. numerum angulorum vnius pentagoni, fiunt 60. anguli, qui diuisi in 3. (Tot. n. anguli conueniunt ad constituendum angulũ solidũ Dodecaedri.) efficiunt 20. angulos solidos Dodecaedri.

DENIQVE consideratione etiam dignum est, cubum & octaedrum reciproca esse, quod ad baſes attinet, & ad angulos solidos. Nam quot baſes in vno continentur, tot anguli solidi in altero reperiuntur, & contra. Vt cubus habet sex baſes,

& octo angulos ſolidos, octaedrum vero octo continet baſes, & ſex angulos ſolidos. Sic etiam reciproca ſunt Icoſaedrum, & Dodecaedrum. Nam Icoſaedrum habet viginti baſes, & duodecim ſolidos angulos, at Dodecaedrum duodecim baſes poſſidet, & viginti angulos ſolidos. Solum Tetraedrum, (hoc eſt Pyramis) cum nullo reciprocatur, niſi cum ſeipſo. Habet enim quatuor baſes totidēq; ſolidos angulos.

FINIS ELEMENTI DECIMITERTII.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVARTVMDECIMVM.

Et Solidorum quartum,

Vt quidam arbitrantur: vt alij vero, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus.

LIBER PRIMVS.

PROOEMIVM HYPSICLIS ALEXANDRINI ad Protarchum.

BASILIDES Tyrius, Protarche, Alexandriam profectus, patrique noſtro ob diſciplinę ſocietatem commendatus, longiſſimo peregrinationis tempore cum eo verſatus eſt. Cumque diſſererent aliquando deſcripta ab Apollonio comparatione Dodecaedri & Icoſaedri eidem ſphæræ inſcriptorũ, quam hæc inter ſe habeant rationem, cenſuerunt ea non recte tradidiſſe Apollonium; quæ a ſe emendata, vt pater meus dicebat, literis prodiderũt. Ego autẽ poſtea incidi

in alterum librum ab Apollonio editum, qui demonſtrationem accurate complectebatur de re propoſita, ex eiuſque problematis indagatione magnam equidē cæpi voluptatem. Illud certe ab omnibus perſpici poteſt, quod ſcripſit Apollonius, cum ſit in omnium manibus. Quod autem diligenti, quantum conijcere licet, ſtudio nos poſtea ſcripſiſſe videmur, id monimentis cōſignatum tibi dedicandum duximus; vt qui feliciter cum in omnibus diſciplinis, tum vel maxime in Geometria verſatus, ſcite ac prudenter iudices ea, quæ dicturi ſumus: Ob eam vero, quæ tibi cum patre fuit, vitæ conſuetudinem, quaque nos complecteris beneuolentiam, tractationem ipſam libenter audias. Sed iam tempus eſt, vt prooemio finem imponentes id, quod propoſitum eſt, aggrediamur.

TREDECIM *libri hactenus expoſiti ab omnibus* Euclidi *aſcribuntur: Duo vero ſubſequentes a pleriſque* Hypſicli *Alexandrino & recte, meo iudicio, tribui ſolent; in quorū quidem priori inter ſe comparantur Icoſaedrū, & Dodecaedrū, tam ſecundum ſuperficies, quam ſolidi tates: In poſteriori vero exponuntur deſcriptiones aliquot figurarū regularium vnius intra aliam; vt hi duo libri ſint inſtar appendicis cuiuſdam elementorum* Euclidis. *Verum quia plurima omittuntur ab* Hypſicle *ſcitu non iniucunda, quæ ſpectant ad comparationes dictorum quinque corporum regularium, eorumque mutuas inſcriptiones unius in alio; quatuor enim propoſitionibus duntaxat liber hic quartusdecimus, quinque vero problematibus decimusquintus abſoluitur: Viſum eſt, vt aliquam lucem huic tractationi afferremus, paulo uberius de dictis figuris regularibus in uniuerſum diſſerere, proponendo varia theoremata, atq; problemata, quibus & prædicta corpora regularia inter ſe comparantur, & ſibi mutuo inſcribūtur. Quæ in re maximo nobis adiumento fuiſſe Campanū, & Franciſcum Fluſſatem Candallam, qui diligentem operā, & ſedulam*

ſedulam in hoc negotio collocauit, non negamus. Hic enim nõ ſolum inſequentes duos libros quamplurimis theorematibus, problematibusque locupletauit; verumetiam integrum librũ, qui ordine decimusſextus eſt, adiũxit, in quo proprietates illuſtres de dictis corporibus proponit. Caterum præcipuum fuiſſe Hypſicles inſtitutum, in hoc lib. 14. diſputare de comparatione mutua Icoſaedri & dodecaedri, facile intelligi poteſt ex eius proœmio ad Protarchum, quod ſuperius eſt poſitum.

QVONIAM vero in hiſce duobus libris Hypſicles, & Campanus tam in numero propoſitionum, quam in earundem ordine, & inter ſe, & a Franciſco Fluſſate, ideoque a nobis diſcrepant; annotauimus in margine ordinem vtriuſque duobus numeris, quorum ſuperior ordinem Hypſiclis, inferior vero Campani ſeriem indicat. Quando autem in margine vnicus tantum numerus reperitur, nullam eſſe tunc differentiam inter Campanum & Hypſiclem, ſignificatur; Quod ſi aliquando loco ſuperioris numeri apponatur hæc nota O, intelligendum eſt, in Hypſicle dictam propoſitionem deſiderari. Idemque in Campano intellige, ſi forte loco numeri inferioris eadem nota poſita fuerit. Quando denique nihil in margine deprehenditur, indicio eſt, tam apud Hypſiclem, quam apud Campanum, illam propoſitionem deeſſe.

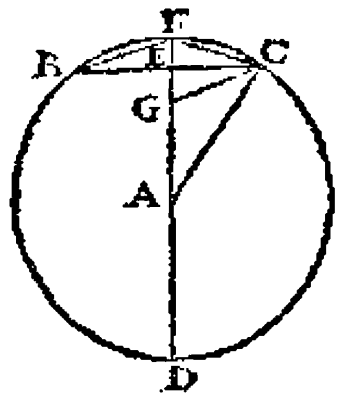
THEOR. 1. PROPOS. 1.

1.

QVAE ex centro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti.

EX centro A, circuli BCD, ducatur AE, perpendicularis ad BC, latus pentagoni in dicto circulo deſcripti. Dico AE, dimidium eſſe lineæ compoſitæ ex latere hexagoni & decagoni eiuſdem circuli. Extenſa enim AE, in vtram-

vtramque partem, vt perficiatur tota diameter DF, sumptaque EG, æquali ipsi EF; connectantur rectæ AC, CG, CF, BF. [a] Quoniam igitur perpendicularis AE, secat rectam BC, bifariam; erunt latera BE, EF, trianguli BEF, æqualia lateribus CE, EF, trianguli CEF; Cum igitur & anguli contenti sint æquales, nempe recti; [b] erunt bases CF, BF, æquales; [c] ideoque & arcus CF, BF, æquales; Ac proinde existente arcu BC, quinta parte totius circumferentiæ, erit CF, eiusdem pars decima; atque adeo recta CF, latus erit decagoni. Rursus quia latera CE, EF, trianguli CEF, æqualia sunt lateribus CE, EG, trianguli CEG, suntque anguli contenti recti; [d] erunt & bases CF, CG, & anguli CFG, CGF, æquales. Quia vero arcus CF, quinta pars est semicircumferentiæ DCF, cum sit totius circumferentiæ decima pars; Erit talium partium 1. arcus CF, qualium 4. est arcus DC, hoc est, arcus DC, quadruplus erit arcus CF. [e] Quare & angulus DAC, quadruplus erit anguli CAF: [f] Est autem angulus CFD, dimidium anguli DAC, cum illius ad circumferentiam, & huius ad centrum eadem sit basis DC. Igitur angulus CFD, atque adeo illi æqualis ostensus CGF, duplus erit anguli CAF: [g] Atqui angulus CGF, externus, æqualis est internis GAC, GCA, in triangulo GAC. Cum igitur GAC, sit dimidium anguli CGF, vt ostensum est, erit GCA, reliquum dimidium eiusdem anguli CGF, ideoque æquales erunt anguli GAC, GCA; [h] ac proinde & latera AG, CG, æqualia: Est autem CG, recta ostensa æqualis rectæ CF. Igitur & AG, recta æqualis erit eidem CF. Quare additis æqualibus GE, EF, fiet AE, æqualis duabus EF, FC, simul: Ac proinde tres simul AE, EF, FC, hoc est, duæ simul AF, FC, duplæ erunt ipsius AE, atq; idcirco e contrario erit AE, ducta videlicet perpendicularis in pentagoni latus, dimidia duarum simul AF, FC, nempe lateris hexagoni, & decagoni. Quæ ergo ex centro circuli cuiuspiam in pentagoni



[a] 3. tertij.
[b] 4. primi.
[c] 28. tertij.
[d] 4. primi
[e] 33. sexti
[f] 20. tertij
[g] 32. primi
[h] 6. primi.

goni eidem circulo inſcripti latus, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

EX his ſequitur, lineam perpendicularem ductã ex centro circuli ad lineam rectam in eodem circulo aptatam, ſecare arcum, quem dicta hæc linea recta ſubtendit, bifariam. Demonſtratum enim eſt rectam AE, quæ ex centro perpendicularis eſt ad BC, diuidere arcum BC, bifariam in F.

COROLLARIVM II.

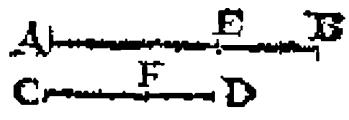
HINC quoque fit, perpendicularẽ ex centro ad latus pẽtagoni ductã, æqualẽ eſſe utriq; lineæ ſimul, et ei, quæ ex centro ad latus trianguli æquilateri eidem circulo inſcripti ducitur, perpendiculari, & dimidiæ lateris decagoni. Quoniam.n. vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, perpendicularis ad latus pentagoni æqualis eſt dimidio lateris hexagoni, & dimidio lateris decagoni ſimul; Eſt autem perpendicularis ad latus trianguli æquilateri, ex coroll. propo. 12. lib. 13. æqualis dimidio ſemidiametri, ſeu lateris hexagoni: perſpicuum eſt, eandem perpendicularem ad latus pentagoni eſſe æqualem perpendiculari ad latus trianguli, & dimidio lateris decagoni ſimul.

THEOR. 2. PROPOS. 2. 4. 2.

SI binæ rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur; ipſæ ſimiliter ſecabuntur, in eaſdem ſcilicet proportiones.

SECEN-

SECENTVR binæ rectæ *A B*, *C D*, extrema ac media ratione in *E*, & *F*. Dico ipſas in eaſdem proportiones ſecari, hoc eſt, eſſe vt *A B*, ad *C D*, ita *A E*, ad *C F*, & *E B*, ad *F D*; Item vt *A E*, ad *E B*, ita *C F*, ad *F D*, &c. Cum enim ſit, vt *A B*, ad *A E*, ita *A E*, ad *E B*; & vt *C D*, ad *C F*, ita *C F*, ad *F D*; [a] erit rectangulũ ſub *A B*, *E B*, æquale quadrato rectæ *A E*; & rectangulum ſub *C D*, *F D*, æquale quadrato rectæ *C F*. Quamobrem erit vt rectangulum ſub *A B*, *E B*, ad quadratum rectæ *A E*, ita rectangulum ſub *C D*, *F D*, ad quadratum rectæ *C F*; (eſt enim vtrobique æqualitatis proportio) Ac propterea, per ea, quæ demonſtrauimus inſcholio propoſ. 22. lib. 5. vt quadruplum rectãguli ſub *A B*, *E B*, ad quadratum rectæ *A E*, ita quadruplum rectanguli ſub *C D*, *F D*, ad quadratum rectę *C F*: & componẽdo, vt quadruplũ rectanguli ſub *A B*, *E B*, & quadratum rectę *A E*, ad quadratum rectę *A E*, ita quadruplum rectanguli ſub *C D*, *F D*, & quadratum rectę *C F*, ad quadratum rectę *C F*: [b] Sed quod quater continetur ſub *A B*, *E B*, vna cum quadrato rectę *A E*, æquale eſt quadrato lineę compoſitę ex *A B*, *E B*; Et quod quater continetur ſub *C D*, *F D*, vna cum quadrato rectę *C F*, æquale eſt quadrato lineę compoſitę ex *C D*, *F D*. Igitur erit quoque, vt quadratum lineæ compoſitæ ex *A B*, *E B*, ad quadratũ rectæ *A E*, ita quadratum lineæ compoſitæ ex *C D*, *F D*, ad quadratum rectæ *C F*; [c] Ac proinde, vt recta compoſita ex *A B*, *E B*, ad rectam *A E*, ita recta compoſita ex *C D*, *F D*, ad rectam *C F*: Et componendo vt compoſita recta ex *A B*, *E B*, & recta *A E*, hoc eſt, dupla ipſius *A B*, ad rectam *A E*, ita recta compoſita ex *C D*, *F D*, & recta *C F*, id eſt, dupla ipſius *C D*, ad rectam *C F*; Et permutãdo, vt dupla ipſius *A B*, ad duplam ipſius *C D*, ita *A E*, ad *C F*; [d] Vt autem dupla ipſius *A B*, ad duplã ipſius *C D*, ita eſt *A B*, ad *C D*. Erit ergo vt *A B*, ad *C D*, ita *A E*, ad *C F*; Ac propterea, cum ſit vt tota *A B* ad totam *C D*, ita *A E*, ablata ad *C F*, ablatam; [e] erit quoque reliqua *E B*, ad reliquam *F D*, vt tota ad totam. Quare vt *A E*, ad *C F*, ita erit *E B*, ad *F D*, cum vtraq; proportio eadem ſit proportioni *A B*, ad



[a] 17. ſexti

[b] 8. ſecundi

[c] 22. ſexti

[d] 15. quin.

[e] 19 quin.

ad CD: Et permutãdo, erit vt AE, ad EB, ſic CF, ad FD: & ſic denique iuxta omnes modos arguendi ex proportionalitate, oſtendemus & totas lineas, & earundem partes eſſe proportionales inter ſe. Si binæ itaque rectæ lineæ extrema ac media ratione ſecentur, &c. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

FACILE hoc loco demonſtrabimus hoc ſequens theorema.

LATVS hexagoni ad latus decagoni in eodẽ circulo deſcriptorum eãdem proportionem habet, quam recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus ipſius pentagoni.

QVONIAM. n. [a] *latus hexagoni cum latere decagoni efficit lineam media & extrema ratione ſectam; & recta ſubtendens pentagoni angulum ſecta extrema ac media ratione facit maius ſegmentum, latus ipſum pentagoni:* [b] *ſit vt eadem ſit proportio lateris hexagoni ad latus decagoni, maioris ſegmenti ad minus, quæ maioris ſegmenti rectæ angulum pentagoni ſubtendentis ad minus. Cum ergo ſit, vt maius ſegmẽtum ad minus, ita tota ad maius ſegmentum; erit quoque latus hexagoni ad latus decagoni, vt recta ſubtendens angulũ pentagoni æquilateri & æquianguli ad latus pentagoni. quod eſt propoſitum.*

[a] 9. tertij decimi.

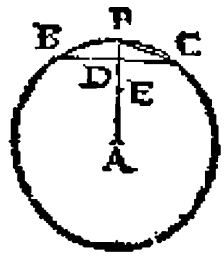
[b] 2. quarti decimi.

EX hac quoque propoſitione & precedenti inferemus hoc alterum theorema.

SI linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni in eodem circulo deſcripti ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpẽdiculari ex eodem centro ad latus trianguli æquilateri ductæ, minus

nus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eidem circulo inſcriptorum.

EX centro enim A, circuli B C, ducta perpendicularis A D, ad latus B C, pentagoni eidem circulo inſcripti, ſecetur in E, extrema ac media ratione. Dico maius ſegmentum A E, eſſe æquale perpendiculari ex A, ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ductæ; minus vero ſegmentum E D, æquale eſſe dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli.



Extenſa namque recta A D, ad F, & connexa recta F C; erit F C, latus decagoni, cum ex coroll. 1. propoſ. 1. huius lib. arcus B C, nempe quinta pars totius circumferentiæ, biſariam ſecetur in F; [a] *Ac proinde recta compoſita ex A F, latere hexagoni, & F C, latere decagoni, ſecta erit extrema ac media ratione, cuius maius ſegmentum A E, latus hexagoni, minus vero ſegmentum F C, latus decagoni. Quare vt in hac propoſ. oſtenſum eſt, erit vt tota A D, diuiſa ſecundum extremam ac mediam rationem, ad totam compoſitam ex A F, F C, ſimiliter diuiſam, ita A E, maius ſegmentum ad A F, maius ſegmentum; & E D, minus ſegmentum ad F C, minus ſegmentum:* [b] *Eſt autem tota A D, dimidium totius compoſitæ ex A F, F C. Igitur & A E, ipſius A F, ſemidiametri, & E D, ipſius F C, lateris decagoni dimidium erit. Cum ergo, per corollarium propoſitionis 12. lib 13. perpendicularis ex centro ad latus trianguli æquilateri ducta, æqualis ſit dimidio ſemidiametri; perſpicuum eſt, maius ſegmentum A E, æquale eſſe dictæ perpendiculari, minus vero E D, dimidio lateris decagoni.*

[a] 9. tertij decimi.

[b] 1 quarti decimi.

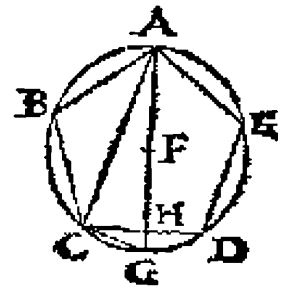
THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI in circulo pentagonum æquilate

rum

rum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati.

DESCRIBATVR in circulo ABCDE, cuius centrum F, pentagonum ABCDE, ſubtendatque recta AC, bina latera AB, BC. Dico quadrata rectarũ CD, AC, ſimul quintupla eſſe quadrati ex ſemidiametro circuli deſcripti. Ducta enim ex A, per centrum recta AFG, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13 diuidat & arcum CD, & latus CD, biſariam in G, & H; erit arcus CG, decima pars totius circumferentiæ, ideoque recta ſubtenſa CG, latus decagoni. Quoniam igitur recta AG, dupla eſt rectæ FG; erit ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quadratũ rectæ AG, quadruplum quadrati rectæ FG: [a] Sunt autem quadrato rectæ AG, æqualia quadrata rectarum AC, CG. Igitur & quadrata rectarum AC, CG, quadrupla ſunt quadrati rectæ FG; Atq; adeo tria quadrata rectarum AC, CG, FG, quintupla quadrati eiuſdẽ rectæ FG; [b] Cum ergo quadratis rectarum FG, CG, nempe lateris hexagoni, & lateris decagoni, æquale ſit quadratum rectæ CD, lateris videlicet pentagoni; Erunt quoque quadrata rectarum AC, CD, quintupla quadrati rectæ FG, nimirũ ſemidiametri. Si in circulo igitur pentagonum æquilaterum deſcribatur; quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. Quod erat demonſtrandum.



[a] 47. primi

[b] 10. tertiædec.

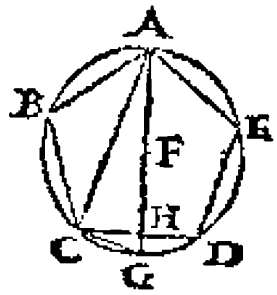
COROL-

COROLLARIVM.

INFERTVR ex his theorema huiusmodi.

SI in sphæra eadem cubus, & dodecaedrum inscribantur; quadratum lateris cubi & quadratum lateris Dodecaedri, vtraque simul, quintupla sunt quadrati semidiametri circuli pentagonum Dodecaedri circumscribentis.

CIRCVMSCRIBAT enim circulus ABCDE, pentagonum vnum Dodecaedri in quapiã sphæra descripti; eritque ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta AC, subtendens pentagoni angulum B, latus cubi in eadẽ sphæra descripti.



Perspicuum est autem, quadrata rectarum AC, CD, lateris scilicet cubi, & lateris Dodecaedri, quintuplæ esse quadrati semidiametri F G, &c.

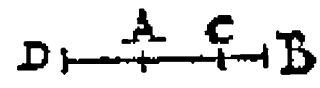
a 3. quarti decimi.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

SI latus hexagoni alicuius circuli secetur extrema ac media ratione; maius illius segmentum erit latus decagoni eiusdem circuli.

SECETVR. n. *AB*, latus hexagoni alicuius circuli extrema ac media ratione in C, sitque maius segmentũ AC. Dico AC, esse latus decagoni eiusdẽ circuli. Sit. n. *AD*, latus decagoni eiusdem circuli, adiungaturque in rectum

rectum ipsi *AB*; [a] eritque tota composita BD, ex latere hexagoni, & latere decagoni, diuisa in A, extrema ac media ratione, cuius maius segmentum B*A*: Ponitur autem & A B, secta in C, similiter. [b] Igitur erit vt *BD*, tota ad maius sui segmentum *AB*, ita *AB*, tota ad maius sui segmentum AC: Sed est quoque vt BD, tota ad maius sui segmentum *AB*, ita AB, maius segmentū ad *AD*, segmentum minus, per definitionem lineæ sectę extrema ac media ratione. Igitur erit vt A*B*, ad AC, ita eadem AB, ad AD; Ac propterea AC, AD, æquales erūt. Cum ergo AD, ponatur latus decagoni illius circuli, cuius latus hexagoni est *AB*; erit & AC, eiusdem circuli latus decagoni.



[a] *9. tert ij-decim.*

[b] *2. quartidecimi.*

ALITER. Adiungatur ipsi AB, in rectū recta *AD*, æqualis maiori segmento AC; [c] eritque tota recta BD, diuisa in A, extrema ac media ratione. Cum igitur AB, maius segmentum ipsius, ponatur latus hexagoni alicuius circuli, per ea, quę demonstrauimus ad propos. 9. lib. 13. AD, minus segmentum eiusdem circuli latus decagoni; Ac propterea & AC, æqualis ipsi AD, latus erit decagoni in eodē circulo descripti, cuius *AB*, latus hexagoni ponitur. Si ergo latus hexagoni alicuius circuli, &c. Quod erat ostendendum.

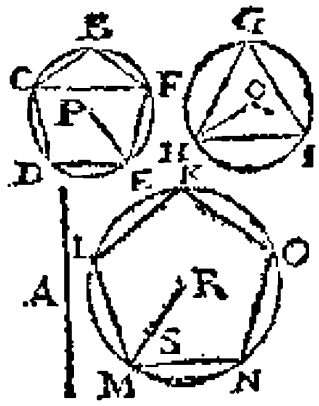
[c] *5. tertijde.*

THEOR. 5. PROPOS. 5. 2. 5.

IDEM circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triāgulum, eidem sphæræ inscriptorum.

IN sphæra, cuius diameter A, intelligatur descriptū & Dodecaedrum, cuius vnum pentagonum BCDEF, & Icosaedrum, cuius vnum triangulum GHI. Dico eundē circulū circumscribere & pentagonum *BCDEF*, & triāgulū GHI, hoc est, circulos BCDEF, GHI, ipsa circum

ſcribentes eſſe æquales. Circumſcribat.n. circulus KLMNO, pentagonum K L M N O, [a] ex quo Icoſaedrum ſphæræ inſcribitur, ita vt quinque latera huius pentagoni ſint latera Icoſaedri, ideoque quodlibet ipſorũ æquale cuiuis lateri trianguli GHI. Deinde ex centris P, Q, R, ducantur rectæ PE, QH, RM; Seceturque RM, extrema ac media ratione in S; [b] eritque maius ſegmentum RS, latus decagoni in circulo KLMNO, in quo RM, eſt latus hexagoni. Subtẽdat quoque recta CF, angulum B, pẽtagoni Dodecaedri, quæ erit per coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. latus cubi in eadem ſphæra deſcripti. Quoniam igitur ex coroll. 1. eiuſdẽ propoſ. BF, latus Dodecaedri eſt maius ſegmentum lateris cubi CF, ſecti extrema ac media ratione; [c] erit vt tota CF, ad totam RM, ita BF, maius ſegmentum ad RS, maius ſegmentum; [d] Ac propterea vt quadratum rectæ CF, ad quadratum rectæ RM, ita quadratũ rectæ BF, ad quadratum rectæ RS; Atque adeo, per ea, quæ demonſtrata ſunt in ſcholio ppoſ. 22. lib. 5. vt triplum quadrati rectæ CF, ad quintuplum quadrati rectæ RM, ita triplum quadrati rectæ BF, ad quintuplum quadrati rectæ RS: Eſt autem triplum quadrati rectæ CF, æquale quintuplo quadrati rectę RM, (quia tam triplum quadrati lateris cubi CF, ex propoſ. 15. lib. 13. quam quintuplum quadrati ſemidiametri RM, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 13. æquale eſt quadrato ex A, diametro ſphæræ.) Igitur & triplum quadrati rectæ BF, æquale erit quintuplo quadrati rectæ RS: [e] Quia vero quadratum rectæ MN, lateris pentagoni, æquale eſt quadrato lateris RM, hexagoni, & quadrato rectæ RS, lateris decagoni; erunt quoq; quinque quadrata rectæ MN, æqualia quinque quadratis rectæ RM, & quinque quadratis rectæ RS. Igitur & quinq; quadrata rectæ MN, æqualia ſunt tribus quadratis rectæ CF, (cũ hæc oſtenſa ſint æqualia quinque quadratis rectæ RM,) & tribus quadratis rectæ BF, quæ æqualia fuerunt quinque quadratis rectæ



[a] 16. tertij dec.

[b] 4. quarti dec.

[c] 2. quarti dec.

[d] 22 ſexti.

[e] 10. tertij dec.

&æ RS. Sed qm̃, (ª cum quadrata rectarum CF, BF, quinque quadratis semidiametri PE, sint æqualia;) tria quadrata rectæ CF, & tria quadrata rectæ BF, æqualia sunt quindecim quadratis rectæ PE, & quinque quadrata rectę MN, æqualia sunt quindecim quadratis semidiametri QH; (Nam cum MN, æqualis sit ostensa ipsi GH, lateri Icosaedri, seu trianguli æquilateri; ᵇ sit autem quadratum ipsius GH, æquale tribus quadratis semidiametri QH; Erunt quinque quadrata rectæ GH, hoc est, rectę MN, æqualia quindecim quadratis rectę QH.) erunt quoque quindecim quadrata rectę PE, æqualia quindecim quadratis rectę QH; ac propterea vnum quadratum rectę PE, vni quadrato rectę QH, & idcirco semidiameter PE, semidiametro QH, æqualis erit. Quare circuli BCDEF, GHI æquales sunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat demonstrãdum.

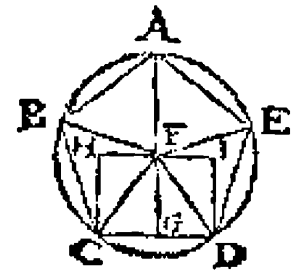
ª 3. quarti dec.

ᵇ 12. terti decimi.

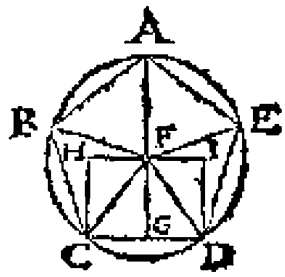
THEOR. 6. PROPOS. 6. 3. 6.

SI ex centro circuli pentagonũ Dodecaedri circumscribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; Erit, quod sub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigesies sumptum, Dodecaedri superficiei æquale.

EX centro F, circuli circumscribentis pentagonum Dodecaedri ABCDE, ducatur ad latus CD, perpendicularis FG. *Dico* rectangulũ sub FG, & CD, trigesies sumptum, esse æquale toti superficiei Dodecaedri. Ductis.n. rectis ex F, ad eõs angulos pentagoni, resoluetur pẽtagonũ in quinq; triãgula æqualia, ex coroll. prop. 8. lib. 1. cũ



bina latera vnius æqualia ſint binis lateribus aliorum, & baſis quoque vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *F*, recta HI, parallela ipſi CD, occurrés duabus perpendicularibus CH, DI, ductis ex *C*, *D*, ad CD, in punctis H, & I. Eritque rectangulum *C* I, contentum ſub HC, hoc eſt, ſub F *G*, & *C D*.



a 41. primi. a Quoniam vero rectangulum C I, duplum eſt trianguli F C D, atque adeo cuiuslibet reliquorum quatuor triangulorum ipſi FCD, æqualium; erit rectangulum *C* I, quinquies ſumptum, æquale decem huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus pẽtagonis Dodecaedri, cum quinque triangula æqualia ſint vni pentagono; Atque adeo ſextuplum rectanguli C I, quinquies ſumpti, nimirum rectangulum C I, ſumptum trigeſies, æquale quoque erit ſextuplo duorũ pentagonorum, id eſt, duodecim pentagonis, hoc eſt, toti ſuperficiei Dodecaedri. Si igitur ex centro circuli pentagonum Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

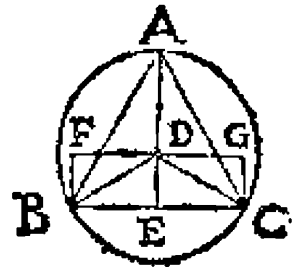
b 41. primi. ALITER. Facta eadem figuræ conſtructione, b cũ rectangulum CI, duplum ſit trianguli *F* C D, hoc eſt, æquale triangulo FCD, bis ſumpto; Erit rectangulũ *C*I, trigeſies ſumptũ æquale triangulo FCD, bis ſumpto trigeſies, hoc eſt, ſumpto ſexageſies; ac proinde toti ſuperficiei *D*odecaedri. Cum enim vnum pentagonum *D*odecaedri conſtet quinque huiuſmodi triangulis, conſtabũt duodecim pentagona, nempe tota ſuperficies Dodecaedri, ſexaginta huiuſmodi triãgulis. Atq; idcirco triãgulum FCD, ſumptum ſexageſies æqualis erit ſuperficici *D*odecaedri.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

3. 7. SI ex centro circuli triangulum Icoſaedri circũſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; Erit, quod

quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehenditur, rectangulum trigeſies ſumptum Icoſaedri ſuperficiei æquale.

EX centro D, circuli circumſcribentis triangulum Icoſaedri *A* B C, ducatur ad latus perpendicularis D E. Dico rectangulum contentum ſub D E, & B C, trigeſies ſumptum, æquale eſſe toti ſuperficiei Icoſaedri. Ductis nã que rectis ex D, ad omnes trianguli angulos, reſoluetur triangulum in tria triangula æqualia, ex coroll. propoſ. 8. lib 1. Sunt enim bina latera vnius binis lateribus aliorum æqualia, & baſis vnius baſibus aliorum æqualis. Ducatur quoque per *D*, recta *F*G, parallela ipſi BC, occurrens in *F*, & G, duabus perpendicularibus *B*F, CG, ex B, C, ductis ad B C; eritque rectangulum B G, contentum ſub *F* B, hoc eſt, ſub *D* E, & BC.[a] Quoniã vero rectangulũ BG, duplum eſt trianguli BDC; atque adeo cuiuslibet reliquorum duorum triangulorum ipſi DBC, æqualium: Erit rectangulũ BG, ter ſumptum æquale ſex huiuſmodi triangulis, hoc eſt, duobus triangulis Icoſaedri, cum tria talia triangula æqualia ſint vni triãgulo Icoſaedri; Atq; adeo idẽ rectangulum trigeſies ſumptũ, nẽpe decuplũ rectãguli BG, ter ſumpti, æquale erit viginti triãgulis Icoſaedri, hoc eſt, toti ſuperficiei Icoſaedri, nimirũ decuplo duorũ triangulorũ Icoſaedri. Si ergo ex centro circuli triẽgulum Icoſaedri, &c. Quod erat oſtendendũ.



[a] 41. primi

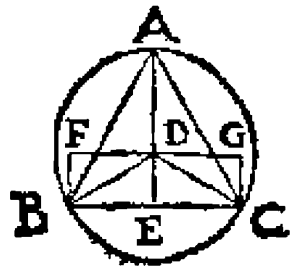
ALITER. Facta eadem conſtructione figuræ,[b] cũ rectangulum *B*G, duplum ſit trianguli D B C, id eſt, æquale dicto triangulo bis ſumpto; Erit rectãgulum BG, trigeſies ſumptum, æquale triangulo D *B*C, ſumpto ſexageſies: Atqui ſexaginta huiuſmodi triangula conficiunt viginti triangula Icoſaedri, eo quod tria cõficiunt vnũ.

[b] 41. primi

Igitur rectangulum BG, trigesies sumptum æquale est toti superficiei Icosaedri.

COROLLARIVM.

ITAQVE superficies cuiuslibet Dodecaedri ad superficiem cuiuscunque Icosaedri, etiamsi non describantur ambæ figuræ in eadem sphæra, est sicut rectangulum contẽtum sub latere Dodecaedri, & perpendiculari ducta ex centro pẽtagoni Dodecaedri in latus dictũ, ad rectangulum contentum sub latere Icosaedri, & perpendiculari ducta ex centro trianguli Icosaedri in dictum latus.



[a] *Cum enim superficies Dodecaedri æqualis sit illi rectangulo trigesies sumpto;* [b] *Item superficies Icosaedri æqualis huic rectangulo trigesies quoque sumpto: Erit tam illud rectangulum trigesima pars superficiei Dodecaedri, quam hoc rectangulum, superficiei Icosaedri.* [c] *Quare erit superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt rectangulum illud, trigesima videlicet pars Dodecaedri, ad rectangulum hoc, trigesimam scilicet partem Icosaedri. Quod est propositum.*

[a] *6. quartidec.*

[b] *7. quartidec.*

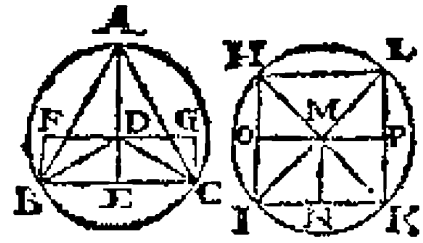
[c] *15. quinti*

SCHOLIVM.

NON dissimili argumento indagabimus superficies reliquorum trium corporum regularium, Tetraedri videlicet, octaedri, & cubi. Nam si ex centro circuli trianguli Tetraedri, vel Octaedri, siue quadrati cubi, circumscribentis perpendiculares ducatur ad vnum aliquod eorum latus; Erit, quod sub dicto latere & perpendiculari continetur, rectangulum, in Tetraedro quidem sumptum sexies, superficiei

To-

Tetraedri; In octaedro vero & cubo duodecies ſumptum, ſuperficiei Octaedri, & cubi æquale. Sit enim primæ triangulũ Tetraedri ABC, circumſcriptũ a circulo, cuius centrum D, a quo perpendicularis ducatur DE, ad latus BC, & reliqua fiant, vt de triangulo Icoſaedri dictum eſt. Dico rectangulum BG, ſexies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Tetraedri. [a] *Quoniam enim rectangulum BG, duplum eſt trianguli DBC, hoc eſt æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit ipſum ſexies ſumptum æquale duodecim talibus triangulis. Cum igitur duodecim talia triangula conſtituant totã ſuperficiem Tetraedri, nempe quatuor triangula æquilatera ipſi ABC, æqualia, eo quod tria conficiunt vnum; Erit rectangulum BG, ſexies ſumptum, ſuperficiei Tetraedri, ſeu Pyramidis æquale.*



[a] 41. primi

SIT deinde idem triangulum ABC, Octaedri, &c. Dico rectangulum BG, duodecies ſumptum, æquale eſſe ſuperficiei Octaedri. [b] *Cum enim rectangulũ BG, duplum ſit trianguli DBC, hoc eſt, æquale duobus eiuſmodi triangulis, erit idem rectangulum duodecies ſumptum æquale viginti quatuor huiuſmodi triangulis: Sed viginti quatuor talia triangula conſtituunt octo triangula Octaedri, id eſt, totam ſuperficiem Octaedri, propterea quod tria conficiunt vnum. Igitur rectangulum BG, duodecies ſumptum æquale eſt ſuperficiei Octaedri.*

[b] 41. primi

SIT tertio quadratum cubi HIKL, circa quod circulus ex centro M, deſcribatur, & deducta MN, perpendiculari ad IK, ducantur ex M, ad omnes angulos quadrati rectæ lineæ, vt quadratum reſoluatur in quatuor triangula æqualia; Atque per M, agatur OP, ipſi IK, parallela. Dico rectangulum IP, contentum ſub OI, hoc eſt, ſub MN, & IK, ſumptum duodecies, æquale eſſe ſuperficiei cubi. [c] *Quoniam enim rectangulũ IP, duplum eſt trianguli MIK, hoc eſt, æquale duobus talibus triangulis; Erit idem duodecies ſumptum æquale viginti quatuor eiuſmodi triangulis. Quare cum viginti quatuor talia triangula conſtituant ſex*

[c] 41. primi

quadrata, id eſt, totam ſuperficiem cubi, quod quatuor talia triangula vnum quadratum conficiant; Erit rectangulum IP, duodecies ſumptum æquale ſuperficiei cubi. Quod eſt propoſitum.

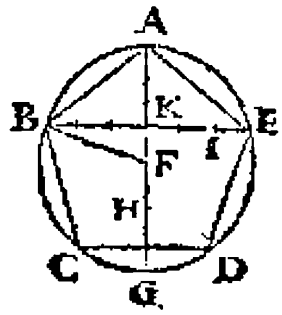
ALITER. Cum duo rectangula IP, conficiant quadratum HIKL; (ſunt enim IP, PH, æqualia, cum recta OI, ſit dimidium lateris HI, nempe æqualis ipſi MN) conſtituent duodecim talia rectangula ſex quadrata eiuſmodi, hoc eſt, totam ſuperficiem cubi.

4. 8.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

RECTANGVLVM contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineæ ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti; æquale eſt dicto pentagono.

IN circulo, cuius centrum F, deſcribatur pentagonum æquilaterum ABCDE, & ducta diameter AG, diuidatur in quatuor æquales partes, quarum tres ſint AH: Angulum vero A, ſubtendens recta BE, ſecetur in ſex partes æquales, quarum quinque ſint BI, & vna IE, ita vt BI, ſit quintupla ipſius IE. Dico rectangulũ cõprehenſum ſub AH, BI, æquale eſſe pentagono ABCDE. Ducta enim recta BF; quoniam AH, cõtinet tres quartas partes diametri, & AF, duas, cum ſit ſemidiameter, erit AH, ipſius AF, ſeſquialtera. Quia vero recta FA, diuidens arcum BAE, bifariam, diuidit quoque rectam BE, bifariam, per coroll. 1. ppoſ. 10. lib. 13. in puncto K; cõtinebit tã KB, q̃ KE, tres ſextas rectæ BE; atq; adeo cũ BI, cõtineat quinq;, cõtinebit KI, duas; Ac proinde & KB, ipſius



ipſius KI, erit ſeſquialtera. Quamobrem erit vt AH, ad AF, ita KB, ad KI; [a] atque idcirco rectangulum ſub extremis AH, KI, æquale erit rectangulo ſub medijs AF, KB. [b] Eſt autem rectangulum ſub AF, KB, duplum trianguli ABF, cum rectangulum, & triangulum eandem habeant baſin AF, & eãdem altitudinem BK, hoc eſt, inter eaſdem ſint parallelas conſtituta. Igitur & rectangulum ſub AH; KI, duplum erit eiuſdem trianguli ABF. [c] Eſt autem & rectangulum ſub AH, KI, duplum rectanguli ſub AH, IE; propterea quod & baſis KI, dupla eſt baſis IE, (continet enim KI, duas ſextas partes ipſius BE, & IE, vnam.) eademque ſemper altitudo AH. Igitur æqualia ſunt triangulum ABF, & rectangulum ſub AH, IE; ideoque & eorum quintupla æqualia erunt. At vero pentagonum ABCDE, quintuplum eſt triãguli ABF, quod pentagonum in quinque huiuſmodi triangula reſoluatur, ductis rectis e centro F, vt propoſ. 6. huius lib. docuimus. [d] Rectangulum vero ſub AH, BI, quintuplum eſt rectanguli ſub AH, IE; quod & baſis BI, quintupla ſit baſis IE, eademque ſemper altitudo AH. Igitur pentagonum ABCDE, & rectangulum ſub AH, BI, æqualia ſunt. Rectangulum ergo contentum ſub tribus, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 16. ſexti

[b] 41. primi

[c] 1. ſexti

[d] 1. ſexti

COROLLARIVM.

QVONIAM vero, ſi pentagonum ABCDE, ſtatuatur baſis Dodecaedri in aliqua ſphæra deſcripti, BE, eſt latus cubi in eadem ſphæra deſcripti, ex coroll. 2. propoſ. 17. lib. 13. & vnum latus trianguli Icoſaedri in eadem ſphæra conſtituti, (e compre-henſi videlicet eodem circulo, quo & pentagonum Dodecaedri,) ſecat diametrum AG, in H, (cum ex coroll. propoſ. 12. lib. 13. ſecet ſemidiametrum FG, bifariam, quemadmodum & punctum H, eandem ſemidiametrum FG, bifariam diuidit) Manifeſtum eſt, rectangulum comprehenſum ſub perpendiculari ab angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, nempe ſub AH, & ſub quinque ſextis partibus lateris

[e] 5. quartidecimi.

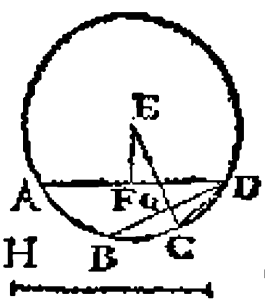
lateris cubi eidem sphæræ, in qua Icosaedrum, inscripti, nimirum sub BI, æquale esse pentagono Dodecaedri in eadem sphæra constituti.

4. 8.

THEOR. 9. PROPOS. 9.

SVPERFICIES Dodecaedri ad superficiem Icosaedri in eadem sphæra descripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icosaedri.

IN circulo ABCD, [a] circunscribente & pentagonũ Dodecaedri, & triangulum Icosaedri, sit latus pentagoni BD, & triãguli AD; & ex centro E, ducantur ad AD, BD, perpendiculares EF, EG; Sit deniq; H, latus cubi in eadem sphæra cum Dodecaedro, & Icosaedro descripti. Dico esse vt H, latus cubi, ad AD, latus Icosaedri, ita superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri. Quoniam enim lateris cubi H, secti extrema ac media ratione, maius segmentum est BD, latus Dodecaedri, ex coroll 2. propos. 17. lib. 13. Rectæ autem EG, sectæ quoque extrema ac media ratione maius segmentũ est EF, ex coroll propos. 2. huius lib. [b] Erit vt H, tota ad BD, maius sui segmentum, ita EG, tota ad EF, maius sui segmentum; [c] Ac proinde rectangulum sub extremis H, EF, æquale erit rectangulo sub medijs BD, EG. [d] Quia uero est, vt H, ad AD, ita rectangulum sub H, EF, ad rectangulum sub AD, EF, cum bases sint H, AD, altitudo vero semper eadem EF; Erit quoque vt H. ad AD, ita rectangulum sub BD, EG, (quod est æquale rectãgulo sub H, EF,) ad idem rectangulum sub AD, EF. Quare cum, ex coroll. propos 7. huius lib. sit, vt rectãgulum sub BD, EG, ad rectangulum sub AD, EF, ita superficies Dodecaedri



[a] 5. quarti decimi.

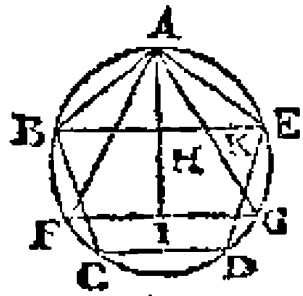
[b] 2. quarti decimi.

[c] 16. sexti

[d] 1. sexti

caedri ad ſuperficiem Icoſaedri; Erit quoque, vt *H*, latus cubi, ad A D, latus Icoſaedri, ita ſuperficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri. Superficies itaque Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, &c. Quod oſtendendum erat.

ALITER. [a] Circumſcribat pentagonum Dodecaedri *A* BCDE, & triangulum Icoſaedri AFG, circulus idem, cuius centrum H. Ducatur deinde ex A per centrum H, recta A I, quę per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. diuidet latus FG, biſariam, & ad angulos rectos. Connectatur denique recta BE, quę latus erit cubi, ex corol. 2. propoſ. 17. lib. 13. cuius quinque ſextę partes ſint BK. *Dico* rurſus eſſe, vt B E, latus cubi ad FG, latus Icoſaedri, ita ſuperficiem *D*odecaedri ad ſuperficié Icoſaedri. Quoniam. n. rectãgulum ſub AI, BK, ęquale eſt pentagono A BCDE, ex coroll. propoſ. 8. huius lib. Item rectangulum ſub AI, IF, ęquale eſt triangulo AFG, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum FG, baſis trianguli dupla ſit ipſius I F, baſis rectanguli: Erit vt rectangulum ſub AI, *BK*, ad rectangulũ ſub AI, IF, ita pentagonum ABCDE, ad triangulum AFG: [b] Eſt autem vt rectangulum ſub AI, BK, ad rectangulum ſub AI, IF, ita BK, ad IF, cum baſes ſint BK, I F, & altitudo eadem ſemper A *I*. Erit igitur quoque vt pentagonum ABCDE, ad triangulum *A*FG, ita BK, ad I F; *A*c proinde, (ſi primum, & tertium, nimirum pentagonum AB CDE, & recta BK, ęquemultiplicẽtur per numerum 12. Item ſecundum, & quartum, nempe triangulum AFG, & recta I F, ęquemultiplicentur per numerum 20. [c] erit quoque vt pentagonum *A*BCDE, duodecies ſumptum, hoc eſt, ſuperficies Dodecaedri, ad triangulum AFG, vigeſies ſumptũ, nempe ad ſuperficiem Icoſaedri, ita recta BK, duodecies sũpta ad rectã IF, vigeſies ſumptã: Atqui recta BK, duodecies ſumpta ęquiualet lateri cubi BE, decies ſumpto; (Nam cum BK, contineat quinq; ſextas partes ipſius BE; continebit eadẽ BK, duodecies ſumpta ſexaginta partes ſextas eiuſdẽ BE, quę efficiũt decẽ integras



[a] 5 quarti decimi.

[b] 1. ſexti

[c] ſchol. 22. quinti.

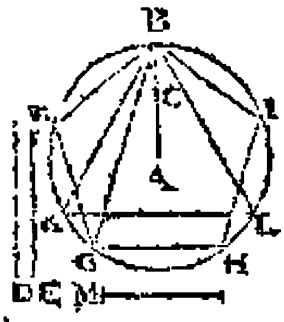
gras rectas BE.) Recta vero *IF*, vigesies sumpta æqualis est lateri Icosaedri FG, decies sumpto; (eo quod FG, est ipsius IF, dupla.) Erit igitur superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi BE, decies sumptum ad latus Icosaedri FG, decies sumptum; Ac propterea, [a] cum eandem proportionem habeant decem latera cubi ad decem latera Icosaedri, quam vnum latus cubi ad vnum latus Icosaedri; perspicuum est, ita esse superficiem Dodecaedri ad superficiem Icosaedri; vt latus cubi ad latus Icosaedri. Quod est propositum.

[a] 15. quin.

4. 9. THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI recta linea secetur extrema ac media ratione; Erit vt recta potens id, quod a tota, & id quod a maiori segmento, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minori segmento, ita latus cubi ad latus Icosaedri eidem sphæræ cum cubo inscripti.

SECETVR recta *AB*, in *C*, extrema ac media ratione, sitque maius segmentum AC. Sit quoque D, latus cubi, & E, latus Icosaedri in sphæra eadem cum cubo descripti. Ex *A*, centro, ad intervallum *AB*, circulus describatur, in quo cõstituatur & pentagonum æquilaterũ BFGHI & triangulum æquilaterum BKL. Si igitur BF, ponatur latus Dodecaedri alicuius sphæræ, erit ducta recta BG, latus cubi in eadem sphæra descripti, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. Quoniam uero AC, maius segmentum semidiametri *AB*, secta extrema ac media rõne, [b] est latus Decagoni



[b] 4. quarti decimi.

cagoni in circulo BFGHI, in quo nimirum AB, latus eſt Hexagoni; [a] poterit BE, latus pentagoni & totâ AB, latus videlicet hexagoni, & maius ſegmentum AC, latus ſcilicet Decagoni in eodem circulo. Poſsit iam & recta M, totam AB. & minus ſegmentum BC, per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus. Dico ſic eſſe D, latus propoſiti cubi ad L, latus propoſitu n Icoſaedri, vt eſt BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC, ad M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC [b]. Quoniam enim quadratum lateris trianguli æquilateri BK, triplum eſt quadrati ſemidiametri AB: [c] Item quadrata rectarum AB, BC, tripla ſunt quadrati rectæ AC; Erit vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ AB, ita quadrata rectarum AB, BC, hoc eſt, quadratum rectæ M, ipſis æquale, ad quadratum rectæ AC. Vtrobique enim proportio eſt tripla. Permutando ergo erit, vt quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M, ita quadratum rectæ AB, ad quadratũ rectæ AC: Eſt autem vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectæ AC, ita quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BF. (Nam cum rectæ BG, ſectæ extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit BF, ex coroll. 1. propoſ. 17. lib 13. eo quod BG, eſt latus cubi, & BF, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ;) Erit vt tota AB, ad maius ſegmẽtum AC, ita tota BG, ad maius ſegmentũ BF: Ac proinde vt quadratum rectæ AB, ad quadratum rectę AC, ita quadratũ rectæ BG, ad quadratum rectæ BF.) Igitur erit quoque, vt quadratum rectæ BG, ad quadratũ rectæ BF, ita quadratum rectæ BK, ad quadratum rectæ M: Et permutando, vt quadratum rectæ BG, ad quadratum rectæ BK, ita quadratum rectæ BF, ad quadratũ rectę M; [f] Ac propterea erit vt recta BG, ad rectam BK, ita recta BF, potens totam AB, & maius ſegmentum AC; ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC. Cum igitur propoſita latera D, E, cubi, & Icoſaedri, eandem habeant proportionem, quam rectę BG, BK, vt mox oſtendemus; perſpicuum eſt, vt ſe habet recta BF, potens totã AB, & maius ſegmentum AC, ad rectam M, potentem totam AB, & minus ſegmentum BC, ita ſe habere propoſitum

[a] 10. tertij dec.

[b] 12. tertij dec.

[c] 4. tertij d.

[d] 2. quarti decimi.

[e] 22. ſexti

[f] 22. ſexti

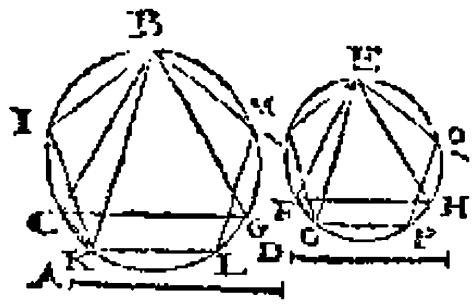
positum cubi latus D, ad Icosaedri propositum latus r. Si recta itaque linea secetur extrema ac media ratione, &c. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

QVOD vero proposita latera cubi & Icosaedri D, & E, eiusdem sphæra eandem habeant proportionem, quam rectæ BG, BK; demonstrabimus hoc proposito theoremate.

QVAM proportionem habent latera cubi, & Icosaedri eiusdem sphæræ, eandem habent latera cubi & Icosaedri in quauis alia sphæra descriptorum.

SIT enim A, latus cubi, & BC, latus Icosaedri eiusdem sphæra: Item D, latus cubi, & EF, latus Icosaedri in quauis alia sphæra. Dico esse vt A, ad BC, ita D, ad EF. Perfectis namque triangulis Icosaedrorum BCG, EFH, et circa ipsa descriptis circulis, describantur in his circulis pentagona æquilatera BIKLM, ENOPQ, connectãturq; rectæ BK, CK, EO, FO. [1] *Quoniam ergo idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icosaedri triangulum eiusdem sphæra; & ponitur BCG, triangulum Icosaedri in eadem sphæra descripti, in qua cubus lateris A: Erit BIKLM, pentagonũ Dodecaedri in eadem cũ ipsis sphæra descripti; Ac proterea, ex coroll. 2. propos. 17. lib. 13. recta BK, latus erit cubi eiusdem sphæra, ideoq; ipsi A, æqualis. Simili argumento æqualis erit recta EO, lateri cubi D. Rursus quia arcus BIK, ENO, similes sunt; (Nam vterque continet duas quintas partes suæ circunferentiæ.) Item arcus BGC, EHF; (vterque enim duas tertias partes totius circumferentiæ comprehendit.) Erunt tam anguli BCK, EFO, ex definitione segmẽtorum similium, æquales inter se, quã anguli*



[1] 5. quarti-decæ.

guli BKC, EOF; inter ſe, cum tam illi, quam hi in ſegmentis circulorum ſimilibus exiſtant: Ac proinde, ex coroll. 1. propoſ. 32. lib. 1. reliquus angulus CBK, trianguli BCK, reliquo angulo FEO, trianguli EFO, æqualis erit, & totum triangulum BCK, toti triangulo EFO, æquiangulũ. a Quare erit, vt BK, hoc eſt, recta A, illi æqualis, nempe latus cubi, ad BC, latus Icoſaedri, ita EO, hoc eſt, recta D, illi æqualis, latus ſcilicet alterius cubi, ad EF, latus Icoſaedri. Quod eſt propoſitum. a 4 ſexti.

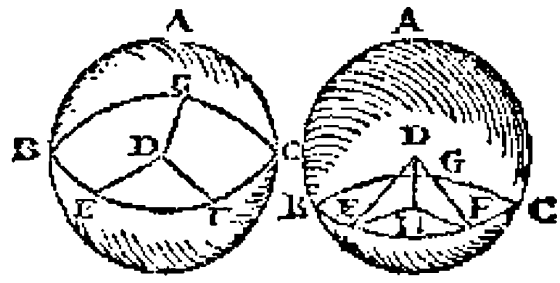
PERSPICVVM eſt igitur id, quod in demonſtratione aſſumebatur, nimirum eandem habere proportionem D, & E, latera cubi & Icoſaedri in vna ſphæra, quam habent BG, BK, latera cubi & Icoſaedri in alia ſphæra.

EX hoc quoque elicitur, Superficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri non ſolum habere eandem proportionem, quam latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphæra cum ipſis, vt vult propoſ. 9. huius lib. Sed etiam, quam obtinet latus cubi ad latus Icoſaedri in quacunque alia ſphæra.

LEMMA I.

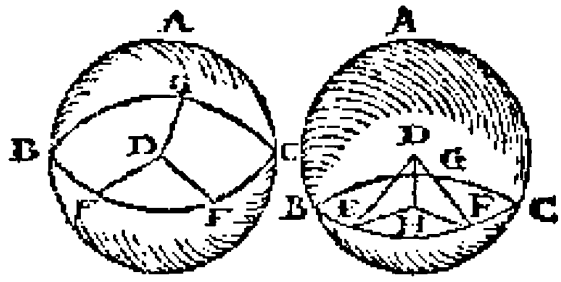
SI ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit.

SECETVR ſphæra ABC, cuius centrum D, plano aliquo faciente communem ſectionem planum BEFCG. Dico BEFCG, eſſe circulum. Tranſeat enim primo planum ſecans per centrum ſphęræ, ita vt centrum D, ſit in plano, ſeu communi ſectione BEFCG; ducanturque ex D, centro ſphæræ ad extremitatem communis ſectionis, lineæ rectæ quotcunque DE, DF, DG.



DG. Quoniam igitur omnes hæ lineæ rectæ, quotcunque fuerint, æquales sunt, ex definitione sphæræ, cum ex eius centro ad superficiem cadant; erit figura plana BEFCG, vnica linea contenta, circulus, eiusque centrum D, idem cum centro sphæræ.

TRANSEAT secundo planum secans non per centrum sphęræ: Ducatur autẽ ex D, centro sphęræ ad planum secans perpendicularis DH; emittãturque ex H, rectæ vtcunque HE, HF, ad extremitatem vsque communis sectionis; & connectantur rectæ DE, DF. Quoniam igitur anguli DHE, DHF, ex defin. 3. lib. 11. recti sunt; * erit tam quadratum rectæ DE, quadratis rectarum DH, HE, quam quadratum rectæ DF, quadratis rectarum DH, HF, æquale: Sunt autem quadrata rectarum DE, DF, æqualium ex centro sphęræ ad eius superficiem cadentium, æqualia. Igitur & quadrata rectarum DH, HE, quadratis rectarum DH, HF, æqualia erunt; & proinde, dempto communi quadrato rectæ DH, reliquum quadratum rectæ HE, reliquo quadrato rectæ HF, æquale erit. Quare & rectæ HE, HF, æquales erunt. Eodem argumento ostendemus, omnes lineas ex H, ad extremitatem communis sectionis cadentes esse æquales & inter se, & dictis duabus HE, HF. Figura igitur plana BEFCG, vnica linea cõtenta, circulus erit; eiusq; centrũ, punctũ H, in quod perpendicularis DH, cadit. Quod est propositum.



* 47. primi

CO-

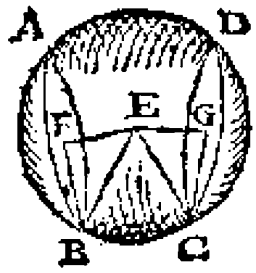
COROLLARIVM.

ITAQVE si planum secans transierit per centrum sphæræ, efficietur circulus idem centrum habẽs, quod sphæra. Si vero planum secans per sphæræ centrum non transierit, efficietur circulus habens aliud centrum, quam sphæra; illud videlicet punctum, in quod cadit perpendicularis ex centro sphæræ ad planum secans ducta. Nam semper demonstrabuntur lineæ rectæ cadentes ex hoc puncto in circumferentiam circuli esse æquales, vt perspicuum est.

LEMMA II.

CIRCVLI in sphæra æquales, æqualiter distant a centro sphæræ: & circuli æqualiter distantes a centro sphęræ, æquales sunt.

IN sphæra ABCD, cuius centrum E, sint circuli æquales AB, DC. Dico ipsos æqualiter a centro E, distare. Ducantur enim ex E, ad eorum plana perpendiculares EF, EG, quæ per coroll. prȩcedentis lemmatis in ipsorum centra cadent, ex quibus ducantur rectæ FB, GC, ad circumferentias circulorum vtcunque, connectanturque rectę EB, EC. Quoniam igitur anguli EFB, EGC, recti sunt, ex defin. 3. lib. 11. Erit tam quadratum rectæ EB, quadratis rectarum EF, FB, quam quadratum rectę EC, quadratis

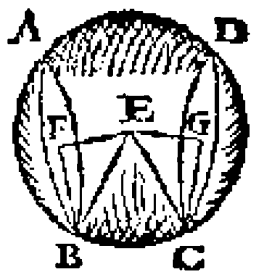


[1] 47. primi.

dratis rectarum EG, GC, æquale: Sunt autem quadrata rectarum EB, EC, æqualium, cum cadant ex centro sphæræ ad eius superficiem, æqualia. Igitur & quadrata rectarum EF, FB, quadratis rectarum EG, GC, æqualia erunt. Et proinde demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium FB, GC, cum sint semidiametri circulorum æqualium, erit reliquum quadratum rectæ EF, reliquo quadrato rectæ EG, æquale; Atque adeo æquales erunt rectæ perpendiculares EF, EG. Quam ob rem circuli AB, DC, æqualiter distant a centro E.

47. primi

SED iam æqualiter distent circuli AB, DC, a centro sphæræ E. Dico ipsos esse æquales. Constructa enim figura, vt prius, ostendemus eodem modo, quadrata rectarum EF, FB, æqualia esse quadratis rectarũ EG, GC; Ac proinde, demptis quadratis æqualibus rectarum æqualium EF, EG, cum circuli æqualiter ponantur distare a centro, reliquum quadratum rectæ FB, reliquo quadrato rectæ GC; atque adeo æquales erunt rectæ FB, GC, semidiametri scilicet circulorum AB, DC. Circuli igitur AB, DC, æquales sunt. Quod est propositum.



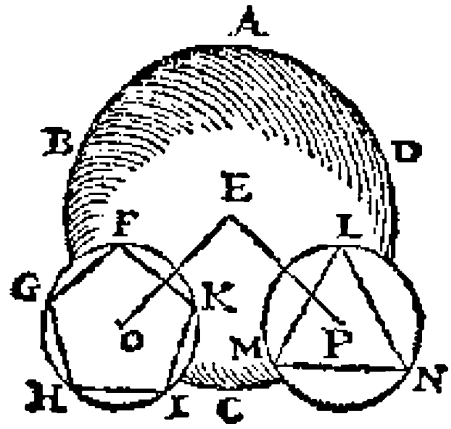
THEOR. 11. PROPOS. 11.

4. 10.

DODECAEDRVM ad Icosaedrum in eadem cum ipso sphæra descriptum, est vt cubi latus ad latus Icosaedri, in vna eademque sphæra.

IN

IN ſphæra *A B C D*, cuius centrum E, inſcriptum ſit Dodecaedrum, cuius unum pentagonum F G H I K: Item Icoſaedrum, cuius vnum triangulum L M N. Dico eſſe Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri, in una eademque ſphæra, ſiue hæc eadem ſit, quæ ſphæra A B C D, ſiue non. Quoniam omnes anguli tam pentagoni, quam trianguli, ſuperficiem ſphæræ tangunt; ſi per pentagonum, & triangulum plana ducantur, efficientur, per 1. lemma præcedens, duo circuli in ſphæra F G H I K, L M N, comprehendentes pentagonum, & triangulum. [a] Quia vero idem circulus comprehendit & Dodecaedri pentagonum, & Icoſaedri triangulum; æquales erunt idcirco circuli F G H I K, L M N, Ac propterea, per lemma 2. præcedens, æqualiter ab E, centro ſphæræ diſtabũt, ideoque perpendiculares ex E, in plana circulorum deductæ, & in eorum centra, per coroll. lemmatis 1. cadentes, quales ſunt E O, E P, æquales erunt. Non aliter oſtendentur perpendiculares ex E, ad omnia pentagona Dodecaedri; & ad omnia triangula Icoſaedri deductæ æquales. Quare ſi ex omnibus angulis Dodecaedri ad E, ducantur rectæ lineæ, reſoluetur Dodecaedrum in duodecim pyramides æqualium altitudinum; Ac proinde cum & baſes ipſarum æquales ſint, nempe pentagona Dodecaedri, æquales inter ſe, ex coroll. propoſ. 6. lib. 12. Eodemque modo, ſi ex omnibus angulis Icoſaedri ad E, lineæ rectæ ducantur, reſoluetur Icoſaedrum in 20. pyramides inter ſe æquales, quarũ altitudines æquales erunt altitudinibus pyramidũ Dodecaedri. [b] Quoniã aũt eſt, vt baſis F G H I K, ad baſin L M N,



[a] 6. quartidec.

[b] 6. duodec.

LMN, ita pyramis FGHIKE, ad pyramidem LMNE, cum vtriuique eadem ſit altitudo; Erunt quoque, per ea, quæ in ſcholio propoſ 22. lib. 5. demõſtrauimus, vt duodecim baſes Dodecaedri, tota videlicet ſuperficies Dodecaedri, ad baſin LMN, ita duodecim pyramides Dodecaedri, hoc eſt, totum ſolidum Dodecaedri, ad pyramidem LMNE. Rurſus quia eſt, vt tota ſuperficies Dodecaedri, ad Icoſaedri baſin LMN, ita Dodecaedrum ad pyramidem LMNE; erit, per idem ſcholium, vt tota ſuperficies Dodecaedri ad 20. baſes Icoſaedri, id eſt, ad totam ſuperficiem Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad 20. pyramides Icoſaedri, nempe ad totum ſolidum Icoſaedri: [a] Atqui ita eſt Dodecaedri ſuperficies ad Icoſaedri ſuperficiem, vt cubi latus ad Icoſaedri latus eiuſdem cum ipſis ſphæræ; atq; adeo, ex ſcholio propoſ. 10. huius lib. vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque alterius ſphæræ vnius. Igitur erit quoque Dodecaedrum ad Icoſaedrum, vt latus cubi ad latus Icoſaedri cuiuſcunque ſphæræ. Quapropter Dodecaedrum ad Icoſaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.

[a] 9. quarti decimi.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero oſtenſum eſt quoque, [b] *ita eſſe ſuperficiem Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in eadem cum ipſis ſphæra: Item ita eſſe cubi latus ad latus Icoſaedri vnius eiuſdemq; ſphæræ, vt eſt linea potens totam diuiſam quamcunque extrema ac media ratione, & maius ſegmentum illius, ad lineam potentem totam diuiſam eandem, & minus illius ſegmentum:* [c] *Item ita eſſe Dodecaedrũ ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, vt latus cubi ad latus Icoſaedri in vna eademque ſphæra; Perſpicuum eſt, has quatuor proportiones, nimirum lateris cubi ad latus Icoſaedri; & ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri*

[b] 9. quarti decimi.

[c] 10. quarti dec.

[d] 11. quarti dec.

dri; & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & minus ſegmentum illius; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ, eſſe inter ſe æquales.

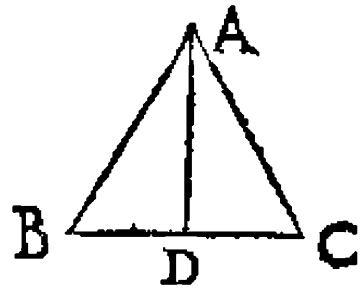
THEOR. 12. PROPOS. 12.

o.

LATVS trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt lineę perpendicularis ab uno angulo ad latus oppoſitum deductæ.

II.

IN triangulo æquilatero *A* B C ducatur ex angulo A, ad latus oppoſitum B C, perpendicularis *A* D. Dico quadratum lateris A B, ſeſquitertium eſſe quadrati perpendicularis AD. Quoniã. n. ob æqualitatem laterum A B, A C, [a] anguli B, & C, æquales ſunt; & anguli ad D, recti: Erũt duo anguli B, & *D*, trianguli A D B, æquales duobus angulis C, & D, trianguli A D C; habent autem & latus A D, commune, vel A B, *A* C, æqualia. [b] *Igitur &* reliqua latera B *D*, C D, æqualia ſunt; ac propterea latus B *C*, hoc eſt, latus A B, duplum rectæ B D; & idcirco quadratum lateris A B, quadruplum quadrati rectæ B D, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. [c] Cũ igitur quadrato rectæ *A* B, æqualia ſint quadrata rectarum A D, B D; erunt quoque quadrata rectarum A D, B D, quadrupla quadrati rectæ B *D*; Ac proinde, qualium partium 4. eſt quadratum rectæ A B, vel quadrata rectarum A D, B D, talium 1 erit quadratum rectæ B D, ideoque talium 3. quadratum reliquum rectæ *A D*. Quare quadratum rectæ *A* B, partiũ 4, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ *A* D, partium 3. Latus igitur trianguli æquilateri potentia ſeſquitertium eſt, &c. Quod oſtendendum erat.



[a] 5. primi.

[b] 26. primi

[c] 47. primi

COROLLARIVM.

HINC manifeſtum eſt, lineam perpendicularem ex vno angulo trianguli æquilateri ad latus oppoſitum demiſſam, ſecare & angulum & latus bifariam. Demonſtratum enim eſt BD, & CD, rectas æquales eſſe, hoc eſt, latus BC, ſecari bifariam a perpendiculari AD. Quare cum latera AB, AD, trianguli ABD, æqualia ſint lateribus AC, AD, trianguli ACD; & baſis BD, baſi CD, æqualis; a Erunt et anguli BAD, CAD, æquales, id eſt, angulus BAC, bifariam ſecabitur ab eadem perpendiculari AD.

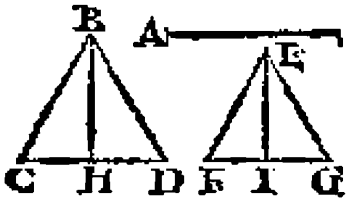
a 8. primi.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

13.

SI ſphæræ diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media.

SIT ſphęrę diameter Rationalis A. Dico tam ſuperficiem Tetraedri, quam Octaedri in dicta ſphęra, eſſe Mediam. Sit enim B C D, vnum triangulum Tetraedri, & E F G, Octaedri illius ſphęrę, ducanturque ex angulis B, & E, ad latera oppoſita CD, FG, perpendiculares BH, EI. b Quoniã igitur quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri BC, c & duplum quadrati lateris Octaedri E F; habebunt quadrata rectarum A, BC, EF, proportionem, quam numeri 6.4.3. d ideoque commenſurabilia erunt. Quare lineę ipſæ A, BC, EF, commenſurabiles exiſtent, ſaltem potentia; Atque adeo, cum A, ponatur Rationalis, erunt quoque Rationales B C, EF, & idcirco & earum dimidiæ Rationales erunt CH, FI.



b 13. tertij decimi.
c 14. tertij dec.
d 6. decimi.

RVR-

RVRSVS, [a] quia tam quadratum rectæ BC, quadrati rectę BH, quam quadratum rectæ EF, quadrati rectæ EI, ſeſquitertium eſt; habebunt tã quadrata rectarum B C, BH, quam quadrata rectarum EF, EI, proportionem inter ſe, quam numeri 4. 3. [b] ideoque tam illa, quam hæc inter ſe commenſurabilia erunt. Quare & tam lineæ ipſæ BC, BH, quam lineæ EF, E*I*, commenſurabiles exiſtent. Eſt autem & tam CH, ipſi BC, quam FI, ipſi EF, dimidia videlicet toti, commenſurabilis. [c] Igitur & tam BH, CH, quam EI, F*I*, commenſurabiles inter ſe erunt; Ac proinde, cum CH, & FI, oſtenſæ ſint Rationales, erunt quoq; BH, E*I*. Rationales. [d] Quoniã vero tam CH, BH, quam FI, EI, longitudine ſunt incommenſurabiles, quod earum quadrata non habeant proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; (vt conſtat ex coroll. propoſ. 24. lib. 8. Habent enim proportionem, quam 1. ad 3. [e] cum oſtenſum ſit talium partium 1. eſſe tã CH, quam FI, qualium 3. eſt tam BH, quam EI,) Erunt tam CH, BH, quam FI, EI, Rationales potentia tantum commenſurabiles: [f] Ac proinde tam rectangulum ſub CH, BH, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus, quam rectangulum ſub FI, EI, Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus cõtentum, Medium erit: Sunt autem triãgula BCD, EFG, æqualia rectangulis ſub CH, BH, & ſub FI, EI, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſes triangulorum C D, F G, duplę ſint baſium rectangulorum CH, FI. Igitur & triangula BCD, EFG, Media erunt. Quocirca cum tota ſuperficies Tetraedri triangulo BCD, ſit commenſurabilis; (eſt enim triangulum BCD, totius ſuperficiei quarta pars.) Item tota ſuperficies Octaedri triangulo EFG, commenſurabilis; (Eſt enim triangulum E F G, totius ſuperficiei octaua pars.) Erunt quoque, ex coroll. propoſ. 24. lib. 10. ſuperficies Tetraedri, & Octaedri, Mediæ. Si igitur ſphęrę diameter fuerit Rationalis; Erit tam ſuperficies Tetraedri, quã Octaedri in ea ſphæra, Media.

Quod erat oſtend.

[a] 12. quarti decimi.
[b] 6. decimi.
[c] 12. dec.
[d] 9. decimi.
[e] 12. quarti decimi.
[f] 22. deci.

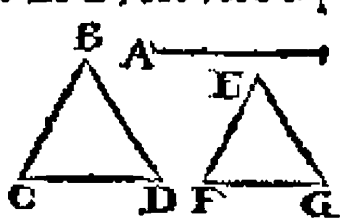
COROLLARIVM.

SEQVITVR ex demonſtratione huius propoſitionis, omne triangulum æquilaterum, cuius latus fuerit Rationale, eſſe ſuperficiem Mediam. Nam ex eo, quod latera BC, EF, & ob id eorum dimidia CH, FI, Rationalia ſunt oſtenſa, demonſtratum eſt, tam rectas CH, BH, quam FI, EI, eſſe Rationales potentia tantum commenſurabiles; Ac propterea rectangula ſub CH, BH, & ſub FI, EI, hoc eſt, triangula BCD, EFG, ipſis æqualia, eſſe Media. Cum igitur eadem ſit ratio de omni triangulo æquilatero, cuius vnum latus ſit Rationale; perſpicuum eſt, quod infertur.

0. 14. THEOR. 14. PROPOS. 14.

SI Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribãtur; erit baſis Tetraedri ſeſquitertia baſis Octaedri: Superficies autem Octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri.

SIT ſphæræ diameter *A*, in qua deſcripti Tetraedri baſis ſit triangulũ BCD; Octaedri vero baſis triangulũ EFG. *Dico* triangulum BCD, ſeſquitertiũ eſſe trianguli EFG; At vero ſuperficiem Octaedri eſſe ſeſquialterã ſuperficiei Tetraedri. [a] Quoniã n. quadratũ diametri A, ſeſquialterum eſt quadrati lateris Tetraedri CD; duplũ vero quadrati lateris Octaedri FG; fit, vt qualiũ partiũ 6. ſuerit quadratũ diametri A, taliũ 4. ſit quadratum



[a] *13. tertij decimi.*
[b] *14. tertij dec.*

dratũ lateris CD,& taliũ 3.quadratũ lateris FG. Quare quadratum rectæ CD, ſeſquitertium eſt quadrati rectæ FG:Vt autem quadratum rectæ CD, ad quadratum rectæ FG, ita eſt triãgulum BCD, ad triangulum EFG. (a quia tam quadrata, quam triangula proportionem inter ſe habent laterum CD,FG, duplicatam, cum ſint ſimilia.)Igitur & triangulũ BCD,ſeſquitertium eſt trianguli EFG.

a 20. et 19. ſexti.

RVRSVS, quoniam oſtenſum eſt triangulum BCD, ſeſquitertium eſſe trianguli EFG;Ac propterea qualiũ partium 4. fuerit triangulum BCD, talium 3.eſſe triangulum EFG; Efficitur, vt triangulum EFG, octies ſumptum,hoc eſt, tota ſuperficies Octaedri, ſit earũdem partium 24;At triangulum BCD,quater ſumptum, id eſt,tota ſuperficies Tetraedri, earũdem partium 16.Quam ob rem ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri eiuſdem ſphęræ. Si igitur Tetraedrum, atque Octaedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. Quod erat oſtendendum.

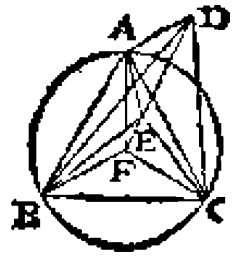
THEOR. 15. PROPOS. 15.

0.

15.

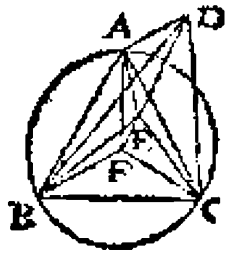
RECTA linea ex angulo quouis Tetraedri in ſphæra deſcripti per centrum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad dictam baſim.

SIT Tetraedrum ABCD, cõtentum quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus ABC, DAB, DBC, DCA, in ſphæra, cuius centrum E; ducaturque ex angulo D, per E,centrum ſphæræ recta DEF,incidens in baſim ABC, circulo inſcriptam ad punctum F. Dico F, eſſe centrum baſis ABC,& DF,perpendicula



rem

rem esse ad eandem basin. Ductis enim ex E,& F, ad angulos dictæ basis rectis EA, EB, EC; FA, FB, FC; quoniam rectæ EA, EB, EC, ductæ ex cétro sphæræ ad eius superficiem æquales sunt; erunt duo latera EA, ED, trianguli EAD, æqualia duobus lateribus EC, ED, trianguli CED; Sunt autem & bases AD, CD, æquales, cum sint latera triangulorum æquilaterorum æqualium. Igitur anguli AED, CED, æquales erũt; Ac proinde & reliqui AEF, CEF, æquales erunt, eo quod tam AED, AEF, quam CED, CEF, duobus rectis æquiualent. Eadem ratione æquales erunt anguli BEF, CEF, si considerentur triangula BED, CED. Quoniam igitur latera EA, EF, triãguli EAF, æqualia sunt lateribus EC, EF, trianguli ECF; & anguli ipsis contenti, ostensi æquales; Erunt bases FA, FC, æquales. Sic quoq; æquales erunt FB, FC, si considerentur triãgula EBF, ECF. Quare cum tres rectæ FA, FB, FC, ex F, in circumferentiam circuli cadentes sint æquales; erit F, centrũ basis ABC, seu circuli eam circumscribentis.



a 8. primi.
b 13. primi
c 4. primi.
d 9. tertij.

QVIA vero ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. linea perpendicularis ex E, centro sphæræ ad planum circuli ABC, demissa in centrum circuli cadit; effi citur, vt recta DE, per centrum ducta, & in centrum circuli F, cadens, perpendicularis sit ad planum circuli, seu basis Tetraedri ABC. Nam si alia duceretur perpendicularis, caderet ea in centrum circuli, per dictum coroll. Quare cum F, quoque sit demonstratum centrum eiusdẽ circuli, haberet vnus idemque circulus duo centra, quod est absurdum. Recta igitur linea ex angulo quouis, &c. Quod demonstrandum erat.

10. 16. THEOR. 16. PROPOS. 16.

OCTAEDRVM in sphæra descriptum, *diuiditur in duas pyramides* æqua-

æquales, & ſimiles æqualium altitudinum; baſis vero vtriuſque eſt quadratũ ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ.

SIT Octaedrum ABCDEF, contentum octo triangulis æquilateris & æqualibus EAD, EAB, EBC, ECD, FBC, FBA, FAD, FDC, & in ſphæra deſcriptum, cuius centrum G. Dico ipſum diuidi in duas pyramides æquales & ſimiles æqualium altitudinum, quarum baſis communis eſt quadratum ſubduplũ quadrati diametri ſphæræ. Ductis enim ex G, centro ſphæræ ad omnes angulos rectis lineis GA, GB, GC, GD, GE, GF, q̃ æquales ſunt, cum ſint ſemidiametri ſphęrę, ductæ videlicet e cẽtro ad ſuperficiẽ ſphęrę: [a] qm̃ quadratum diametri ſphęrę duplum eſt quadrati lateris Octaedri AB; & quadruplum quadrati ſemidiametri, AG, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Qualium partium 4. ponetur quadratum diametri ſphęræ talium partium 2. erit quadratum rectæ AB, & talium partium 1. quadratum rectæ AG; Ac proinde quadratũ rectę AB, duplum erit quadrati rectæ AG. Cũ ergo quadratum rectæ AG, æquale ſit quadrato rectæ BG; erit quadratum rectæ AB, æquale duobus quadratis rectarum AG, BG; [b] Ac propterea angulus AGB, rectus erit. Non aliter oſtendentur reliqui anguli AGD, BGC, CGB, recti. [c] Quam ob rem AG, CG, & BG, DG, in rectũ erunt cõiunctæ; [d] atque adeo rectæ AC, BD, ſeſe ſecantes in G, in vno exiſtẽt plano; [e] Ac ꝓpterea rectæ earũ extrema cõnectentes AB, BC, CD, DA, in eodẽ plano erunt cũ ipſis. Quare quadrilaterum ABCD, in vno plano eſt ſitum. Diuiſum eſt ergo Octaedrũ in duas pyramides ABCDE, ABCDF, quarum baſis communis ABCD, vertices vero E, & F; quæ pyramides ęquales ſunt & ſimiles ex defin. 10. lib. 11. cũ quælibet conſtet ex quatuor triãgulis æquilateris octaedri, quæ æqualia ſũt & ſimilia, & baſi cõmuni ABCD. Dico iam earum altitudines eſſe ęquales, & baſin ABCD, eſſe quadratũ ſubduplum



[a] 14. tertij dec.

[b] 48. primi

[c] 14. primi.

[d] 2. vndec.

[e] 7. vndec.

duplũ quadrati diametri ſphæræ. Quoniam.n. oſtenſum eſt,quadratum lateris Octaedri AB, æquale eſſe duobus quadratis ſemidiametrorum AG,BG;erit quoque quadratum lateris AE,æquale duobus quadratis ſemidiametrorum AG, EG; [a] Ac propterea angulus A G E, rectus erit. Eadem ratione rectus erit angulus D G E. Quoniam igitur recta E G, duabus rectis AG, DG, ſe mutuo ſecantibus in G, ad rectos angulos inſiſtit, [b] ipſa recta erit ad planum A B C D, per rectas A G, DG, ductum, nempe ad baſin pyramidum. Quare E G, altitudo eſt pyramidis ABCDE. Similiter oſtendemus FG, altitudinem eſſe pyramidis ABCDF. Cum ergo EG, FG, ſint ſemidiametri ſphæræ æquales, perſpicuum eſt, dictas pyramides eſſe æqualium altitudinum. Rurſus quia AC, eſt diameter ſphæræ; [c] erit eius quadratum duplum quadrati lateris A D; Ac propterea æquale duobus quadratis laterũ AD, DC. [d] Quare angulus ADC, rectus eſt: Eodem modo recti erunt anguli DAB, ABC, BCD. Quare quadrilaterum ABCD, rectangulum eſt: Sed & æquilaterum, cum eius latera ſint latera Octaedri. Igitur quadratum eſt; quod cum ſit deſcriptum ex latere octaedri AB; [e] conſtat ipſum eſſe ſubduplum quadrati diametri ſphæræ. Octaedrum ergo in ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 48. primi
[b] 4. undec.
[c] 14 tertij dec.
[d] 48. primi
[e] 12. tertij dec.

SCHOLIVM.

MVLTO breuius hanc propoſitionẽ demonſtrauimus in coroll. 2. propoſ. 14. lib. 13. ex ipſa videlicet conſtructione octaedri. Veruntamen quia hic demonſtratur a Campano, nõ habita ratione conſtructionis octaedri, viſum eſt eius demonſtrationem hoc etiam loco conſcribere.

0. 17. THEOR. 17. PROPOS. 17.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum

ſitum ad Octaedrum in eadē ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente vigintiſeptem ſexageſimasquartas partes quadrati lateris Tetraedri, & ſub linea continente octo nonas partes eiuſdem lateris, comprehenſum ad quadratum diametri ſphæræ.

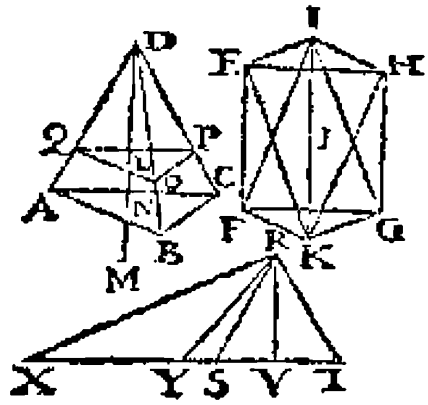
VEL, vt Campanus loquitur.

TETRAEDRVM ſphæræ impoſitum ad octaedrum in eadē ſphæra deſcriptum ſe habet, vt rectangulum ſub linea, quę potentia eſt ſubſeſquitertia trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub linea ſuperquintupartiente vigeſimas ſeptimas partes earūdem triū quartarum partium lateris tetraedri contentum, ad quadratum diametri ſphærę.

SIT Tetraedrum ABCD, & octaedrum EFGHIK, in vna eademque ſphæra, cuius centrum L. Ducatur ex angulo *D*, per centrum L, diameter ſphæræ D *M*, incidens in baſin A B C, ad punctum N.[a] Erit igitur N, centrum baſis *ABC*, & DN, perpendicularis ad eandem baſin. Quia vero pars diametri LN, inter centrum ſphæræ & baſin tetraedri, eſt ſexta pars diametri, & tertia ſemidiametri, per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Erit DL, ſemidiameter talium partium 3. qualium 1. eſt L N; *Ac* propterea D N, talium 4. *Ducatur* deinde, ex ſcholio propoſ. 15. lib. 11. per centrum L, planum OPQ, parallelum

[a] 15. *quartadecimi*

[a] 16. vnde. lũ plano ABC; [a] Eruntq; rectæ QO, OP, PQ, parallelæ rectis AB, BC, CA; Ac



[b] 10. vnde. ppea triangulum QOP, æquiangulum erit triangulo æquilatero ABC, [b] cum anguli illius æquales sint angulis huius, singuli singulis: At ABC, est æquiangulum ex coroll. propos. 5. lib. 1. Igitur & QOP, æquiangulũ erit; Ac propterea & æquilaterum, ex coroll. propos. 6. lib. 1. ideoque simile ipsi ABC: Sũt autem & triangula DQO, DOP, DQP, triangulis DAB, DBC, DAC, æquilateris similia, ex coroll. propos. 4. lib. 6. Igitur pyramides ABCD, QOPD, similes sunt ex defin. 9. lib. 11. [c] Rursus quia plana parallela ABC, QOP, secant rectas DN, DC, proportionaliter; erit vt DN, ad DL, ita DC, ad DP: Erat autem DN, ad DL, vt 4. ad 3. (cum ostensum sit DN, esse talium partium 4. qualium 3. est DL.) Igitur & DC, ad DP, erit vt 4. ad 3. Ac proinde, [d] cum pyramides similes habeant proportionem laterum triplicatam, erit pyramis ABCD, ad pyramidem QOPD, vt 64. ad 27. hęc enim proportio triplicata est proportionis 4. ad 3. vt cõstat in his numeris 64. 48. 36. 27. Nam hi numeri sunt minimi in proportione 4. ad 3. vt constat ex propos. 2. lib. 8. Rursus, [e] quia quadrata habent laterum proportionem duplicatam; erit quadratum rectæ DC, ad quadratum rectæ DP, vt 64. ad 36. vt in iisdem numeris constat.

[c] 17. vnde.

[d] 8. duode.

[e] 20. sexti.

SIT iam triangulum æquilaterum RST, æquale triãgulo DQP; demittaturq; ex R, ad ST, perpendicularis RV. [f] Eritque latus RT, hoc est, DP, illi æquale, potentia sesquitertium perpendicularis RV. Ac proinde qualium partium 36. fuit quadratum rectę DP, taliũ 27. erit quadratum rectæ RV: Erat autem earũdem partium 64. quadratum rectæ DC. Igitur linea RV, est potens vigintiseptẽ sexagesimasquartas partes quadrati lateris tetraedri

[f] 12. quarti dic.

RVRSVS extensa TS, fiat TX, ad TS, vt 64. ad 27. ex coroll. propos. 6. lib. 10. diuidaturq; TX, bifariam in Y, vt

Y, vt ſit TY, talium partium 32. qualium 27. eſt TS, ſeu illi æqualis DP. Quoniam vero proportio DC, ad DP, erat, vt 4. ad 3. nempe ſeſquitertia, erit DC, talium partium 36. qualium DP, eſt 27. (proportio enim 36. ad 27. eſt ſeſquitertia.) Ac propterea qualium partium TY, eſt 32. Quare linea TY, cõtinet octo nonas partes lateris tetraedri DC. Dico igitur ita eſſe tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK, vt rectãgulum cõtentum ſub recta RV, (q̃ pót vigintiſeptẽ ſexageſimasquartas partes quadrati lateris DC) & ſub recta TY, (q̃ cõtinet octo nonas partes eiuſdẽ lateris) ad quadratum diametri ſphæræ.

CVM enim ductis rectis RX, RY, triãgulum RTX, duplum ſit triãguli RTY, quod & baſis TX, dupla ſit baſis TY: [b] Eſt autem & rectangulum ſub RV, TY, duplum eiuſdem trianguli RTY; Erit triangulum RTX, æquale rectangulo ſub RV, TY. [c] Ac propterea erit vt triangulum RTX, ad triangulum RST, ita rectangulum ſub RV, TY, ad idẽ triangulum RST: [d] Eſt autẽ triangulum RTX, ad triangulum RST, vt baſis TX, ad baſin ST, nimirum vt 64. ad 27. Igitur & rectangulum ſub RV, TY, ad triangulum RST, hoc eſt, ad triangulum DQP, ſiue QOP, ſibi æquale; erit vt 64. ad 27. Fuit autẽ & pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD, vt 64. ad 27. Erit ergo vt rectãgulum ſub RV, TY, ad triangulum QOP, ita pyramis ABCD, ad pyramidẽ QOPD: At vero vt triangulũ QOP, ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita eſt pyramis QOPD, ad octaedrum EFGHIK. (Nã cum DN, recta ſit ad planum ABC, recta quoq; erit ad planũ QOP, ex ſcholio prop. 14. lib. 11. ideoq; ſphæræ ſemidiameter DL, altitudo erit pyramidis ſeu tetraedri QOPD: [e] Octaedrum autẽ EFGHIK, diuiditur in duas pyramides æquales EFGHI, EFGHK, quarũ baſis cõis quadratum EFGH, dimidiũ quadrati diametri ſphęrę; & altitudines æquales ſemidiametri ſphæræ LI, LK. Pyramides ergo QOPD, EFGHI, æquales habent altitudines. Quare ex ſch. pp. 5. lib. 12. erit vt baſis QOP, ad baſin EFGH, ita pyramis QOPD, ad pyramidẽ EFGHI; Ac propterea per ea, quæ in ſcholio propoſ. 22. lib. 5. oſtendimus, vt baſis QOP, ad duplum baſis EFGH, hoc eſt, ad quadratũ diametri

[a] 1. ſexti

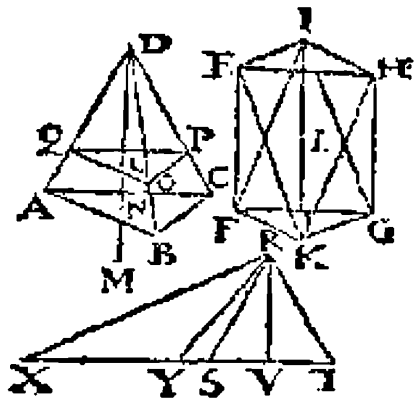
[b] 41. primi

[c] 7. quinti

[d] 1. ſexti

[e] 16. quarti decimi.

metri ſphæræ DM, ita pyramis QOI D, ad duplum pyramidis EFGHIK, hoc eſt, ad Octaedrũ EFGHIK.) Ex æquo igitur erit, vt re ctangulum ſub RV, poten te viginti ſeptem ſexageſimas quartas partes quadrati lateris tetraedri DC & ſub TY, octo nonis eiuſdem lateris DC, contentum ad quadratum diametri ſphæræ DM, ita pyramis, ſeu tetraedrum ABCD, ad octaedrũ EFGHIK. Tetraedrum ergo ſphæræ impoſitũ ad Octaedrum, &c. Quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

QVONIAM vero De, talium partium 4. ſuit, qualium 3. DP; continebit DP, ſeu illi æqualis RT, tres quartas partes lateris tetraedri DC: ac proinde, [a] *cum recta RT, ſit potentia ſeſquitertia rectæ RV; erit RV, potentia ſubſeſquitertia ipſius RT, nempe trium quartarum partium lateris tetraedri. Rurſus quia TY, ſunt talium partium 32. qualium 27. ST, ſeu DP; (tres videlicet quartæ partes lateris tetraedri) erit TY, ſuperquintupartiens vigeſimas ſeptimas partes ipſius ST, nimirum trium quartarum partium lateris tetraedri. Quare cõſtat, eſſe quoque tetraedrum ABCD, ad octaedrum EFGHIK, vt rectangulum ſub RV, quæ potentia ſubſeſquitertia eſt trium quartarum partium lateris tetraedri, & ſub TY, quæ ſuperquintupartiens eſt vigeſimas ſeptimas partes earundem trium quartarum partium lateris tetraedri, vt volebat Campanus.*

[a] 12. quartidecimi

0. 17.

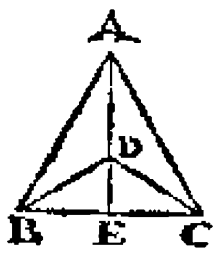
THEOR. 18. PROPOS. 18.

LINEA perpendicularis ex quolibet angulo trianguli æquilateri ad baſin

oppo

oppoſitam demiſſa; tripla eſt eius perpendicularis, quæ ex centro triāguli ad eandem baſin deducitur.

SIT triangulum æquilaterum *ABC*, cuius centrum *D*. Ducatur ex *A*, per D, recta *AE*, quæ perpendicularis erit ad *BC*, eamq; bifariam diuidet, ex coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. Dico AE, triplam eſſe rectæ DE, quæ ſcilicet perpendicularis eſt e centro ad baſin ducta. Ductis enim rectis BD, CD, cum latera *DA*, *DB*, trianguli ADB, æqualia ſint lateribus *DB*, DC, trianguli B*D*C; (e cētro enim ducuntur;) ſit autem & baſis



AB, baſi BC, æqualis: Erunt triangula ABD, BDC, æqualia ex coroll. propoſ. 8. lib. 1. Atque eadem ratione æqualia erunt triangula ADB, ADC. Quare ob æqualitatem trium triangulorum ADB, BDC, CDA, triangulum ABC, triplum eſt trianguli B*D*C. Quoniam vero rectangulum ſub AE, EB, triangulo ABC; & rectangulum ſub DE, EB, triangulo B*D*C, æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. cum baſis trianguli BC, dupla ſit baſis BE, vtriuſque rectanguli: Erit quoque rectangulum ſub AE, EB, triplum rectanguli ſub DE, EB: Eſt autem vt rectangulum ſub AE, EB, ad rectangulum ſub DE, EB, eiuſdē altitudinis EB, ita baſis *AE*, ad baſin DE. Igitur & AE, tripla eſt ipſius DE. Linea ergo perpendicularis ex quolibet angulo, &c. Quod erat oſtendendum.

a 1. ſexti

COROLLARIVM.

ITAQVE eadem perpendicularis AE, ſeſquialtera eſt reliquæ rectæ AD, inter angulum & centrum comprehenſæ. Cum enim AE, tripla ſit ipſius DE; qualium partium 3. ponetur AE, talium 1. erit DE; Reliqua igitur AD, earundē partiū 2. continebit: Ac propterea AE, ſeſquialtera erit ipſius AD.

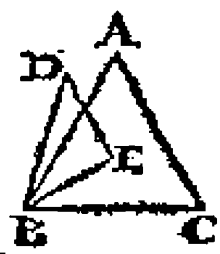
EX quibus rursus fit, rectam AD, rectæ DE, duplam esse.

THEOR. 19. PROPOS. 19.

0. 17.

SI octaedrum sphæræ inscribatur; erit semidiameter sphęrę potentia tripla eius perpendicularis, quę ex centro sphærę in basin quamcunque octaedri ducitur.

SIT basis aliqua octaedri in sphera, cuius centrum D, descripti, triangulum æquilaterum ABC, in quod e centro sphęræ D, perpendicularis demittatur DE; ducaturque semidiameter sphærę DB. Dico semidiametrum DB, potentia triplam esse perpendicularis DE. Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. huius lib. perpendicularis DE, in centrum circuli sphæræ, qui triangulum ABC, circumscribit, cadat, erit E, centrum trianguli. Ducta igitur recta BE; a quoniam quadratum diametri sphæræ duplum est quadrati lateris octaedri AB; & quadruplum quadrati semidiametri sphærę DB, ex scholio propos. 4. lib. 2. Si ponatur quadratum diametri partiũ 12. erit quadratum lateris AB, 6. & quadratum semidiametri sphæræ DB, 3. b Quia vero quadratum lateris AB, triplum est quadrati semidiametri circuli triangulum ambientis, rectæ scilicet BE; Erit quadratum rectæ BE, talium partium 2. qualium 6. fuit quadratum lateris AB. Quare c cum quadratũ rectæ DB, æquale sit quadratis rectarum BE, DE; sit autem quadratum rectæ DB, ostensum partium 3. Erit reliquum quadratum perpendicularis DE, talium partium 1. Ac proinde quadratum rectæ DB, triplum est quadrati rectæ DE. Si igitur octaedrum sphæræ inscribatur, &c.



a *14. tertij dec.*

b *12. tertij dec.*

c *47. primi.*

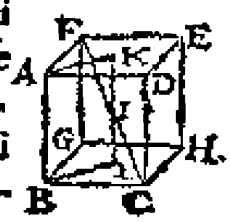
THEOR.

THEOR. 20. PROPOS. 20.

0.
18.

DVPLVM quadrati ex diametro cuiuslibet ſphęrę deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi in illa ſphęra collocati: Perpendicularis autem a centro ſphæræ in aliquam baſin cubi demiſſa, ęqualis eſt dimidio lateris cubi.

SIT cubus ABCDEFGH, in ſphæra deſcriptus, cuius centrum I ex quo IK, perpendicularis ducatur ad vnam baſin cubi, nempe ad ADEF. Dico duplum quadrati diametri ſphæræ æquale eſſe ſuperficiei cubi; & perpendicularem IK. æqualem eſſe dimidio lateris cubi. Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, hoc eſt, æquale tribus quadratis cubi; Erit duplum eiuſdem quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti æquale ſex quadratis cubi, id eſt, toti ſuperficiei cubi.



[a] 15. tertij dec.

PRODVCTA autem KI, ad baſin oppoſitam ECHG, vſque in punctum L; cum KL, recta ſit ad planum AE, recta quoque erit ad planum BH, illi parallelum, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. Rurſus, [b] quia AB, KL, parallelæ ſunt, quod rectæ ſint ad planum AE; ducatur per ipſas planum faciens in planis oppoſitis parallelis AE, BH, communes ſectiones, lineas rectas AK, BL, [c] quæ parallelæ quoque erunt inter ſe; Ac propterea parallelogrammum erit ABLK; atque adeo recta KL, æqualis lateri cubi AB. Quoniã vero perperpendicularis KL, e cẽtro ſphęræ I, cadit in baſes AE, BH, ad pũcta K, & L, erũt K, & L, cẽtra circulorũ dictas baſes ambientiũ in ſphæra, per coroll. lẽmatis 1. prop. 10. huius lib. Quare KL, in centro I, biſariã ſecabitur a dicta diametro CF, vt in coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. oſtendimus; Ac propterea

[b] 6. vndec.

[c] 16. vnde.

cum KL, oſtenſa ſit æqualis lateri cubi, erit IK, dimidium eiuſdem lateris cubi. Duplum igitur quadrati ex diametro cuiuslibet ſphæræ deſcripti, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX dictis colligitur, ſolidum, quod ſit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictum cubum comprehendentis, æquale eſſe cubo. Cum enim quadratum diametri ſphæræ triplum ſit quadrati lateris cubi, erunt duo quadrata AE, BH, duæ tertiæ partes quadrati diametri ſphæræ; Perſpicuum autem eſt, ſolidum, quod ſit ex IK, dimidio lateris cubi in AE, tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe ſolido, quod ſit ex IL, dimidio lateris cubi in BH, tertiã partẽ quadrati diametri ſphæræ, eo quod dicta ſolida habeãt et baſes, et altitudines æquales. Itaq; cũ dicta duo ſolida cõpleant totum cubum, manifeſtum eſt, id, quod ſit ex dimidio lateris cubi, in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe toti cubo. Quod eſt propoſitum.

ALITER proponi poteſt hoc corollarium, vt dicamus, ſolidum, quod ſit ex latere cubi in tertiam partem quadrati diametri ſphæræ, æquale eſſe cubo. Nam cubus BE, producitur ex BA, latere cubi in quadratum AE, quod eſt tertia pars quadrati diametri ſphæræ: Vt perſpicuum eſt.

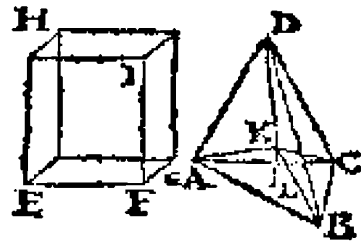
[a] 15. tertij. dec.

[b] 31. vnde.

SCHOLIVM.

VNIVERSE autem ſolidum, quod ſit ex perpendiculari e centro cuiuſcunque corporis regularis ad aliquam eius baſim ducta in tertia partẽ ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori regulari. Sit .n. corpus regulare quodcunque

tunque ABCD, contentum planis ABC, ABD, ACD, BCD, ſolidum autem EFGH, cõtentum ſub EI, tertia parte ſuperficiei corporis ABCD, & ſub altitudine FG, quæ æqualis ſit perpendiculari KL, ductæ ex centro K, ad baſin ABC. Dico ſolidũ EFGH, æquale eſſe dato corpori regulari ABCD. Nã ductis



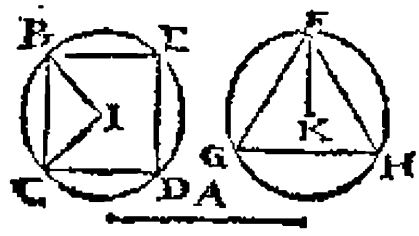
ex centro K, rectis KA, KB, KC, KD, ad omnes angulos corporis, reſoluetur corpus regulare in pyramides æquales, cum æquales habeant baſes & altitudines. Cum enim circuli dictas baſes ambientes, æquales ſint; ipſi æqualiter a centro diſtabunt, per lemma 2. propoſ. 15. huius lib. Ac propterea perpẽdiculares ex K, centro ad ipſorum plana ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales erunt. Quoniam vero priſma contẽtum ſub baſi ABC, & altitudine KL, triplũ eſt pyramidis ABCK, per coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Atque eadem ratione priſmata contenta ſub reliquis baſibus, & eadem altitudine KL, tripla ſunt ſuarum pyramidum; Erit priſma contentum ſub tota ſuperficie corporis regularis, & altitudine KL, (nimirum compoſitum ex omnibus illis priſmatis) triplum corporis regularis ABCD. Quam ob rem cum idem priſma triplum ſit priſmatis EFGH, quod & ſimilis baſis tripla penatur baſis huius, per ea, quæ ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus, erunt ſolida EFGH, ABCD, æqualia. Quod eſt propoſitum.

THEOR. 21. PROPOS. 21. 20. 11.

IDEM circulus comprehendit & cubi quadratum, & octaedri triangulum, eiuſdem ſphæræ.

IN ſphæra, cuius diameter A, intelligatur deſcriptus cubus, cuius vnum quadratum BCDE, & octaedrum, cuius vnum triangulum FGH. Dico eũdem circulum cir-

cumſcribere & quadratum BCDE, & triangulũ FGH, hoc eſt, circulos BCDE, FGH, ipſa circumſcribentes, eſſe æquales. Sint. n. rectæ e cẽtris IB, KF. [a] Quia igitur quadratum diametri A, triplũ eſt quadrati lateris cubi BC, & quadratum lateris BC, duplũ quadrati rectæ BI; (Nã ducta recta IC, fiet angulus BIC, rectus, cum ſubtendat quadrantem;) [b] Ac proinde quadratum rectę BC, æquale erit quadratis rectarum BI, IC. Quare cum rectarum æqualium BI, IC, æqualia ſint quadrata: duplum erit quadratum rectæ BC, quadrati rectę BI (qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A. talium 2. erit quadratum lateris BC, & talium 1. quadratũ rectæ BI. Rurſus [c] quia quadratum diametri A, duplũ eſt quadrati lateris octaedri FG; [d] & quadratum lateris FG, triplum quadrati rectę FK, ex cẽtro ductę; qualiũ partium 6. ponetur quadratũ diametri A, talium 3. erit quadratum lateris FG, & taliũ 1. quadratum rectę FK. Cum igitur & talium partium 1. oſtenſum ſit quadratum rectę BI; æqualia erunt quadrata rectarum BI, FK; Ac propterea & rectæ ipſę, & circuli ex ipſis deſcripti BCDE, FGH, æquales erunt. Idem ergo circulus comprehendit, &c. Quod erat oſtendendum.



[a] 15. tertij decimi.

[b] 47. primi.

[c] 14. tertij dec.

[d] 12. tertij dec.

COROLLARIVM.

HINC ſit lineas perpendiculares coniungentes centra circulorũ, qui baſes oppoſitas tam cubi, quam octaedri circumſcribunt, æquales eſſe. Si enim ex cẽtro ſphæræ ad baſes cubi & octaedri perpendiculares ducantur, cadent hæ in centra circulorũ ipſas circũſcribẽtiũ, ex coroll. lẽmatis 1. prop. 10. huius lib. [e] qui cum ſint æquales oſtenſi, æquilater diſtabunt a centro ſphæræ, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Ac proinde æquales erunt dictæ perpendiculares. Quæ cum ſint dimidiatæ partes rectarum, quæ centra oppoſitorum baſium connectunt. (Nam ſi producantur, perpendiculares

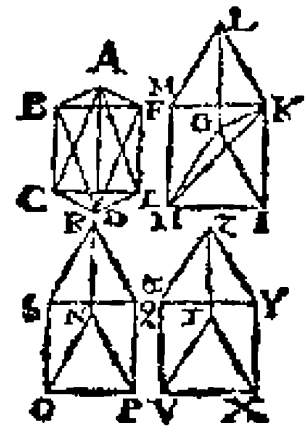
[e] 21. quarti dec.

lares quoque erunt ad oppoſitas baſes, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 11. propterea quod parallela ſunt oppoſitæ baſes in octaedro, ex coroll. 4. propoſ. 14. lib. 13. quemadmodũ & oppoſitæ baſes cubi parallelæ ſunt.) æquales erunt perpendiculares centra oppoſitarum baſium coniungentes tam in cubo, quam in octaedro. quod eſt propoſitum.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

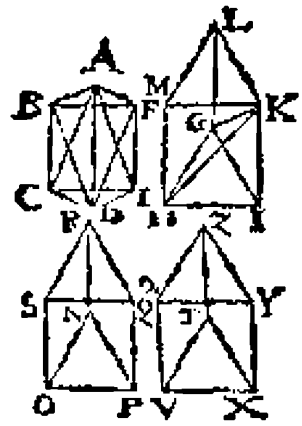
SI octaedrum, atque tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur; Erit octaedrũ ad triplum tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri.

IN eadem ſphæra inſcriptum ſit & octaedrum ABCDEF, & tetraedrum GHIK. Dico ita eſſe octaedrum ad triplum tetraedri, vt latus BF, ad latus HI. Ducta enim in octaedro diametro AD, diuidetur octaedrum in quatuor pyramides, quarum latus cõmune eſt ipſa diameter AD, & vertex cõmunis A, nẽpe in BCDA, cuius baſis BCD; in BDFA, cuius baſis BDF; in CDEA, cuius baſis CDE; & in DEFA, cuius baſis DEF; quæ quidem omnes baſes infra quadratum BCEF, exiſtunt cõtinentes cum ipſo dimidiatam partem octaedri. Quoniã vero quælibet harum pyramidũ conſtat duobus triangulis æquilateris octaedri, & duobus alijs triangulis, quæ quoniam latus ipſorũ cõe eſt AD, diameter, & reliqua latera, ipſius octaedri latera exiſtũt, inter ſe æqualia ſunt; efficitur has quatuor pyramides æquales eſſe inter ſe, cum cõtineãtur planis & multitudine, & magnitudine æqualibus Cõſtituatur



a 8. primi.

tur ſuper GHI, baſin tetraedri, priſma GHIKLM, eiuſdem cum tetraedro altitudinis; quod ipſius tetraedi triplum erit, per coroll. 1 propoſ. 7. lib. 12. Rurſus, ſuper baſin octaedri NOP, & TVX, baſi tetraedri æqualem, conſtituantur duo priſmata NOPQRS, TVXYZα, eiuſdem cum octaedro, ſeu pyramide ACDE, altitudinis. a Quũ igitur GHI, hoc eſt, TVX, baſis tetraedri ſeſquitertia eſt ipſius NOP, baſis octaedri: Erit quoque priſma TVXYZα, priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium, cum priſmata eiuſdem altitudinis ſint, vt baſes, ex iis, quę ad propoſ. 7. lib. 12. demonſtrauimus. Eſt autem & octaedrum ABCDEF, eiuſmodi priſmatis NOPQRS, ſeſquitertium; (Nam priſma æquale eſt tribus pyramidibus ex coroll. 1. prop. 7. lib. 12. qualium quatuor continere diximus octaedrũ.) Igitur æquale eſt octaedrum priſmati TVXYZα. Quia vero priſma TVXYZα, ad priſma GHIKLM, proportionem habet, quam altitudo illius ad altitudinem huius, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Eſt autem altitudo priſmatis TVXYZα, quod octaedro æquale eſt, eadem quę octaedri, ex conſtructione: Erit quoque octaedrũ ad priſma GHIKLM, hoc eſt, ad triplum tetraedri GHIK, vt altitudo octaedri ad altitudinẽ tetraedri: Eſt autẽ altitudo octaedri, nempe perpendicularis centra baſium oppoſitarũ coniungens, æqualis lateri cubi, nimirum perpẽdiculari centra baſium oppoſitarum connectenti, per coroll. propoſ. 21. huius lib. Atq; vt latus cubi ad altitudinẽ tetraedri, ita eſt latus octaedri ad latus tetraedri. (Nã tam quadratum lateris cubi ad quadratum altitudinis tetraedri, quã quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris tetraedri, eſt, vt 3. ad 4. Poſito.n. quadrato diametri ſphærę 9. erit quadratum lateris cubi 3. ex prop. 15. lib. 13. & quadratũ altitudinis tetraedri 4. ex coroll. 2 pp. 13. lib. 13. ideoq; quadratum lateris cubi ad quadratũ altitudinis tetraedri, eſt vt 3. ad 4. Rurſus poſito quadrato diametri ſphærę 6. b erit quadratum lateris octaedri 3. &



a 14. quartidecimi

b 18. tertiidec.

& quadratum lateris tetraedri 4. &c.) Eſt igitur octaedrum ad triplum Tetraedri, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. Si itaque octaedrum, atque Tetraedrum eidem ſphæræ inſcribantur, &c. quod demonſtrandũ erat.

COROLLARIVM.

*EX dictis infertur, ita eſſe altitudinem octaedri ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Oſtenſum enim eſt, ita eſſe latus cubi, quod quidem æquale eſt altitudini octaedri, ad altitudinem tetraedri, vt latus octaedri ad latus tetraedri. Item colligitur, ita eſſe diametrum ſphæræ ad latus tetraedri, vt latus octaedri ad latus cubi. * Nam & quadratum diametri ad quadratũ lateris Tetraedri, & quadratum lateris octaedri ad quadratum lateris cubi, proportionem habet ſeſquialteram.*

* 13. tertij dec.

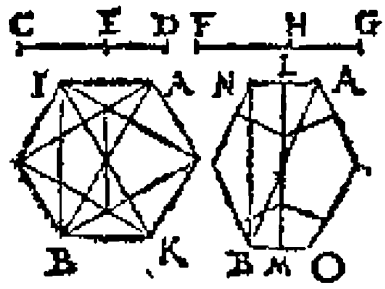
THEOR. 23. PROPOS. 23.

SI recta linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus Dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta linea propoſita diameter exiſtit.

POSSIT recta AB, rectam CD, & eius ſegmentum maius CE; Item rectam FG, & eius ſegmentum minus HG. Dico CE, eſſe latus Icoſaedri, & HG, latus Dodecaedri, eius ſphæræ, cuius AB, diameter exiſtit. Intelligatur enim in ſphæra, cuius diameter AB, deſcriptum Icoſaedrum AIBK, & Dodecaedrum ANBO. Latera deinde

de Icoſaedri oppoſita AI, B K, connectantur recta I B, quæ ſubtendet unum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus cõpoſiti, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 13. quod etiam videre licet in aliquo Icoſaedro materiali. Quia vero AI, BK, latera oppoſita parallela ſunt, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 13. [a] erunt anguli AIB, IBK, æquales

[a] 29. primi.



duobus rectis; Ac proinde, cũ ſint inter ſe æquales, (Ducta enim alia diametro I K; cum latera AI, IB, trianguli AIB, æqualia ſint lateribus K B, BI; & baſes quoque AB, IK, æquales; [b] Erunt anguli AIB, I B K, æquales) recti erunt; [c] ideoque quadratum rectæ propoſitæ A B, æquale erit quadratis rectarum AI, IB: Erat autem idem quadratum rectæ AB, æquale, ex hypotheſi, quadratis rectarum CD, CE: Igitur quadrata rectarum IB, IA, æqualia ſunt quadratis rectarum CD, CE; Ac propterea cum CE, ſit maius ſegmentum ipſius C D, diuiſæ extrema ac media ratione; Item IA, maius ſegmentum ipſius I B, ſimiliter diuiſæ; [d] Nam IB, ſubtendit angulum pentagoni, cuius latus eſt IA, latus Icoſadri. Conſtat autem, rectæ ſubtendentis angulum pentagoni, ſi ſecetur extrema ac media ratione, [e] maius ſegmentum eſſe æquale lateri eiuſdem pentagoni) æquale erit CE, maius ſegmentum ipſi IA, lateri Icoſaedri. [f] Cum enim ſit vt CD, ad CE, ita IB, ad IA; erit quoque vt quadratum rectæ CD, ad quadratum rectę CE, ita quadratum rectæ IB, ad quadratum rectæ IA; Ac componendo, vt quadrata rectarum CD, CE, ad quadratum rectæ CE, ita quadrata rectarum IB, IA, ad quadratum rectæ I A: Oſtenſa ſunt autem quadratis rectarum CD, CE, æqualia quadrata rectarum IB, IA; [g] Igitur & quadrato rectæ CE, æquale eſt quadratum rectæ IA; ideoque rectæ CE, IA, æquales ſunt. Quod eſt propoſitum.

[b] 8. primi.
[c] 47. primi
[d] 8. tertij dec.
[e] 2. quarti dec.
[f] 22. ſexti.
[g] 14. quinti

RVRSVS latera Dodecaedri oppoſita AN, B O, ſecẽtur bifariã in L, & M punctis quæ recta LM, & ipſa latera recta NB, coniungantur. Quoniam igitur NL, BM, æquales,

æquales, parallelę ſunt, per coroll. 3. propoſ. 17. lib. 13., erunt quoque LM, NB, æquales & parallelæ: Eſt autem recta LM, ſecans latera oppoſita bifariam, perpendicularis ad ipſa latera oppoſita, per idem coroll. Igitur & NB, ad eadem perpendicularis erit, [b] Ac proinde quadratum rectæ propoſitæ AB, æquale erit quadratis rectarum NB, NA. Quare cum idem quadratum rectæ AB, æquale ſit poſitum quadratis rectarum FG, HG; æqualia erunt quadrata rectarum NB, NA, quadratis rectarum FG, HG. Ac propterea, cum HG, ſit minus ſegmentum ipſius FG, ſectæ extrema ac media ratione: Item NA, minus ſegmentum ipſius NB, hoc eſt, ipſius LM, ſimiliter diuiſę, per coroll. 4. propoſ. 17. lib. 13. æquale erit HG, minus ſegmentū ipſi NA, lateri Dodecaedri Quod quidem non aliter oſtendemus, ac ſupra demonſtrauimus CE, maius ſegmétum æquale eſſe ipſi IA, lateri Icoſaedri. Si recta ergo linea propoſita potuerit totam aliquam lineam ſectam extrema ac media ratione, & maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum: Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 33. primi

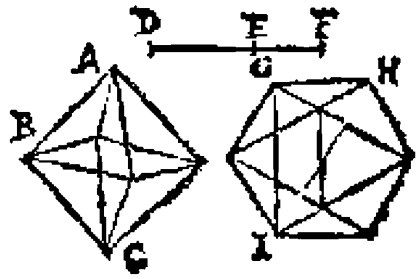
[b] 47. primi

THEOR. 24. PROPOS. 24.

SI latus octaedri potuerit maius & minus ſegmentum rectæ lineæ extrema ac media ratione ſectæ: Poterit latus Icoſaedri in eadem ſphera deſcripti duplum minoris ſegmenti.

POSSIT latus AB, octaedri ABC, & maius ſegmentum DE, & minus EF, rectę DF, ſectę extrema ac media ratione. Sit quoq; eidem ſphęrę inſcriptum Icoſaedrum GHI, cuius latus GH, & ſubtendens angulū pętagoni ex lateribus Icoſaedri compoſiti GI, & diameter HI. Dico quadra-

quadratum lateris G *H*, duplum esse quadrati minoris segmenti EF. Cum enim GH, sit latus pentagoni, cuius vnum angulum subtendit recta GI; [a] erit GH, maius segmentum ipsius G I, diuisæ extrema ac media ratione; [b] Ac proinde composita recta ex GI, GH, secabitur similiter in G, puncto extrema ac media ratione, [c] Quia vero quadratũ diametri HI, æquale est quadratis rectarũ GI, GH, quod angulus IGH rectus sit, vt in præcedenti propos. ostensum est; & quadratum lateris A *B*, æquale quadratis rectarum DE, EF, ponitur; Erunt, vt quadratum diametri HI, ad quadratum lateris *A*B, ita quadrata rectarum GI, G*H*, ad quadrata rectarũ DE, EF: [d] Est autem quadratum diametri H I, duplum quadrati lateris octaedri A B. Igitur & quadrata rectarum G I, G H, dupla sunt quadratorum rectarũ *D*E, EF. *A*tqui vt quadrata rectarum GI, GH, ad quadrata rectarum DE, EF, ita est quadratũ rectę GH, ad quadratum rectę EF. (Nâ cũ sit vt GI ad GH, ita DE, ad EF. [f] Erit quoq; vt quadratũ rectæ GI, ad quadratum rectæ GH, ita quadratũ rectæ DE, ad quadratũ rectę EF; & cõponendo, vt quadrata rectarum GI, G*H* ad quadratũ rectæ GH, ita quadrata rectarum DE, EF, ad quadratum rectæ EF. Et permutãdo, vt quadrata rectarum G I, G H, ad quadrata rectarum DE. E F, ita quadratum rectæ G H, ad quadratum rectæ *E*F.) Quadratum igitur rectæ *G* H, duplum quoque est quadrati rectæ EF. Quare si latus Octaedri potuerit maius, & minus segmentum, &c. Quod erat ostendendum.



[a] 8. *tertij dec.*

[b] 5. *tertij decimi.*

[c] 47. *primi*

[d] 14. *tertii decimi.*

[e] 2. *quarti decimi.*

[f] 22 *sexti.*

THEOR. 25. PROPOS. 25.

SI recta linea diuisa extrema ac media ratione cum minore segmento angulum rectum constituat, cui recta subten-

datur:

datur: Erit recta linea, quæ potentia ſit ſubdupla ipſius rectæ ſubtenſæ, latus octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus exiſtit Dodecaedri.

LINEA recta AB, ſecta in C, extrema ac media ratione conſtituat cum recta AD, quæ æqualis ſit minori ſegmento AC, angulum rectum A, cui recta ſubtendatur BD, ſitq; recta E, potentia ſubdupla ipſius BD. Dico E, latus eſſe octaedri illius ſphæræ, in qua AD, vel AC, latus eſt Dodecaedri. Cum enim per coroll. 2. propoſ. 17. lib 13. maius ſegmentum BC, latus ſit cubi illius ſphæræ, cuius minus ſegmẽtum AC, vel AD, latus eſt Dodecaedri; erit diameter illius ſphęrę potentia tripla maioris ſegmenti BC, nempe lateris cubi: Sunt autem & quadrata rectarum AB, AD, nempe totius lineæ, & minoris ſegmenti, tripla eiuſdem quadrati maioris ſegmenti BC. Quadratum igitur diametri ſphęrę, æquale erit quadratis rectarũ AB, AD, hoc eſt, quadrato rectę BD; Ac proinde recta BD, diameter eſt ſphæræ. Quare cum diameter ſphæræ potentia ſit dupla lateris Octaedri; Poſsit autem recta BD, duplum rectæ E, quod recta E, ponatur potentia ſubdupla ipſius BD; Erit E, latus Octaedri eiuſdem ſphæræ, cuius AD, latus Dodecaedri ponitur. Si igitur recta linea diuiſa, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] 4. tertiidæ.

[b] 14. tertijdec.

COROLLARIVM.

QVONIAM vero latus Octaedri E, potentia ſeſquialterum eſt lateris cubi BC, cuius maius ſegmentum eſt AD, latus Dodecaedri, vt conſtat ex iis, quæ oſtendimus ad propoſ. 4. lib. 13. cum BC, ſit ma-

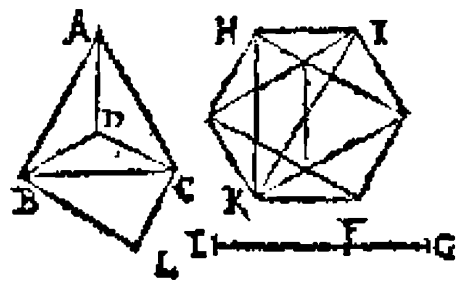
[c] 18. tertijdec.

ius ſegmentum, & AD, minus recta AB, extrema ac media ratione diuiſa: Perſpicuum eſt, ſi linea quauis recta (nimirum BC,) ſecetur extrema ac media ratione, & alia linea (verbi gratia E,) potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum (nimirum AD,) eſſe latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ, in qua Octaedrum deſcriptum fuerit.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

SI latus Tetraedri poſſit maius & minus ſegmentum lineę rectæ extrema ac media ratione ſectę: latus Icoſaedri eidem ſphęræ inſcripti potentia ſeſquialterum eſt minoris ſegmenti.

POSSIT Tetraedri ABCD, latus BC, maius ſegmentum EF, & minus FG, rectę EG, diuiſæ extrema ac media ratione; Sit quoque HI, latus Icoſaedri HIK, eiuſdem ſphęrę. Dico HI, rectâ potẽtia eſſe ſeſquialteram minoris ſegmenti FG. Subtendat enim recta HK, vnum angulum pentagoni ex Icoſaedri lateribus compoſiti, connectaturque recta IK, diameter.



[a] Quia igitur HI, eſt maius ſegmentum rectæ HK, diuiſę extrema ac media ratione; [b] Erit quoque compoſita KHI, diuiſa eodem modo in H, maiuſque ſegmentum HK, & minus HI. [c] Fiat ex rectis BC, EF, FG, triangulũ BCL, ita vt BL, recta ipſi EF, & CL, ipſi FG, ſit æqualis. [d] Eritque angulus L, rectus, quod recta BC, ponatur poſſe rectas BL, CL, hoc eſt, rectas EF, FG: Eſt autem & angulus IHK, rectus, vt propoſ. 23. huius lib. oſtendimus;

Eſtque

[a] 8. tertij-dec.
[b] 5. tertij-dec.
[c] 22. primi
[d] 48. primi

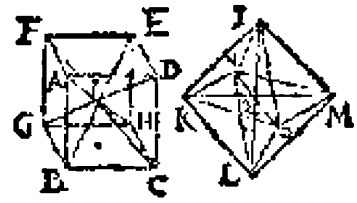
[a] Estque vt BL, ad LC, ita KH, ad HI. [b] Igitur triangula BLC, KHI, æquiangula sunt, [c] Ac propterea vt KI, ad IH, ita BC, ad CL; & permutando, vt KI, ad BC, ita HI, ad CK: [d] Atqui IK, diameter est potentia sesquialtera lateris Tetraedri BC. Ergo & HI, latus Icosaedri erit potentia sesquialterum ipsius CL, hoc est, minoris segmenti FG. Si latus itaque Tetraedri posset maius, & minus segmentum, &c. Quod ostendendum erat.

[a] 2. quarti. dec.
[b] 6 sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 13. tertiædec.

THEOR. 27. PROPOS. 27.

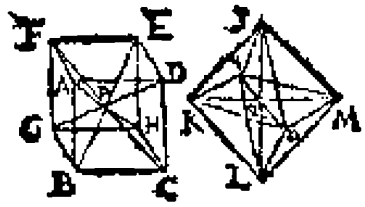
CVBVS ad Octaedrum in eadem cum ipso sphęra descriptum, est, vt superficies cubi ad Octaedri superficiem. Item vt latus cubi ad semidiametrum sphæræ.

SINT in eadem sphæræ cubus ABCDEFGH, & Octaedrum IKLMNO, quorum centra P, & Q. Dico eâ esse proportionem cubi ad Octaedrum, quam habet superficies cubi ad superficiem Octaedri; nec nō, quam habet cubi latus ad semidiametrum sphæræ. Ductis enim ex centris P, & Q, ad omnes angulos tam cubi, quam Octaedri, rectis lineis, resoluetur cubus in sex pyramides æquales, quod habeant & bases æquales, & altitudines, (Cum enim circuli descripti circa pyramides, seu cubi bases æquales, sint æquales, ac propterea æqualiter a centro sphæræ distent; erunt lineæ perpendiculares ex centro P, ad plana circulorum, seu basium dictarum ductæ, nempe altitudines pyramidum, æquales per lemma 2. propos. 10. lib. 14.) Atque Octaedrum in octo pyramides æquales, eandem ob causam. Quoniam autem idem circulus complectitur & cubi quadratum, & Octaedri triāgulum; æqualiter distabūt bases pyramidū cubi, & Octae



[e] 21. quartidecimi

& Octaedri a centro ſphæræ, per lemma præfatum: Ac propterea æquales etunt altitudines pyramidum cubi,& Octaedri. Quam ob rem erit, vt vna pyramis cubi ad vnam pyramidem Octaedri, ita baſis pyramidis cubi ad baſim pyramidis Octaedri, ex ſcholio propoſ. 6. lib. 12. Ac proinde, ex ijs,quæ in ſcholio propoſ.4. lib.5. demonſtrauimus, vt ſextuplum pyramidis cubi, nempe cubus ipſe,ad pyramidem Octaedri,ita ſextuplum baſis pyramidis cubi,ſuperficies videlicet tota cubi,ad baſim pyramidis Octaedri; Ideoque rurſus,ex eodem ſcholio, vt cubus ad octuplum pyramidis Octaedri, nimirum ad ipſum Octaedrum,ita ſuperficies cubi ad octuplum baſis pyramidis Octaedri, ad ipſam ſcilicet ſuperficiem Octaedri. Quod primo loco oſtendendum proponebatur



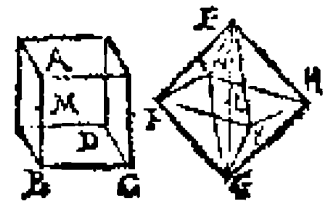
SINT rurſus in eadē ſphæra cubus ABCD,& Octaedrum EFGHIK, ſitque diameter ſphæræ, ſeu Octaedri EG.& centrum L. Auferatur autem ex AB, latere cubi tertia pars AM; Item ex ſemidiametro EL, tertia pars EN. Quoniam vero quadratum IFKH, lateris Octaedri, baſis exiſtens duarum pyramidum,in quas Octaedrū ſecari diximus propoſ. 16. huius lib. [a] ſeſquialterum eſt quadrati BD,lateris cubi BC: Eſt autem & recta AB, recta BM, ſeſquialtera,ex conſtructione;reciprocabuntur baſes IFKH, BD,& altitudines AB,BM: [b] Ac propterea parallelepipedum ſuper baſim IFKH,& ſub altitudine BM,æquale erit parallelepipedo ſuper baſim BD, & ſub altitudine AB,nimirum cubo ABCD. Rurſus quia recta EL,rectæ EN,tripla eſt;erit & parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudinē EL, triplum parallelepipedi ſuper eandem baſim, & ſub altitudine EN, vt in ſcholio propoſ.14. lib. 12.oſtendimus:Sed & idem parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine EL,triplum eſt pyramidis IFKHE,ex corollario 1. propoſ.7. lib.12 Igitur pyramis IFKHE,æqualis erit parallelepipedo ſuper baſim IFKH,& ſub altitudine EN: Atqui huius parallelepipedi duplum eſt parallelepipedum

[a] 18. tertij decimi.

[b] 34. unde.

ſuper

ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, [a] ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. quod & altitudo LN, dupla ſit altitudinis EN. Item Octaedrum EFGHIK, duplũ eſt pyramidis IFKHE. Aequale igitur erit parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine LN, Octaedro EFGHIK. Cæterum quia parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, eſt ad parallelepipedũ ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, vt altitudo BM, ad altitudinem LN, ex ſcholio propoſ. 14. lib. 12. Vt autem BM, ad LN, ita eſt AB, ad EL. (Cum enim ſit vt AM, ad MB, ita EN, ad NL: & componendo, vt AB, ad BM, ita EL, ad LN; erit quoque permutando, vt AB, ad EL, ita BM, ad LN.) Et parallelepipedum ſuper baſim IFKH, & ſub altitudine BM, æquale eſt oſtenſum cubo ABCD; Et parallelepipedũ ſuper eandem baſim, & ſub altitudine LN, æquale eſt Octaedro EFGHIK. Igitur erit quoque vt cubus ABCD, ad Octaedrum EFGHIK, ita AB, latus cubi ad EL, ſemidiametrum ſphæræ. Quod ſecundo loco demonſtrandũ proponebatur. Quocirca cubus ad Octaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum, &c. Quod erat oſtendendum.

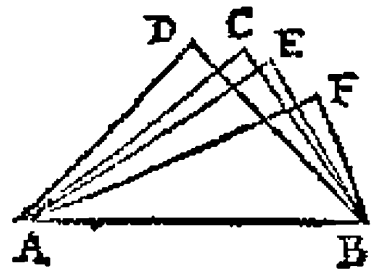


[a] 16. quartidecimi

SCHOLIVM.

QVIA demonſtratum eſt [b], diametrum ſphæræ, in qua omnia quinque corpora regularia deſcribuntur, eſſe ſeſquialterã potentiæ lateris Tetraedri, ita vt, ſi quadratũ diametri ponatur 3. partium, earũdem 2. ſit quadratum lateris Tetraedri; perſpicuũ eſt, ſi ex quadrato diametri datæ auferatur quadratũ duas tertias illius partes continens, vt in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. oſtẽdimus, latus huiuſce quadrati eſſe Tetraedri latus. Vel etiam, ſi quadrato diametri conſtituantur duo quadrata æqualia, quæ proportionem habeant duplam, ex eodẽ ſcholio; maioris quadrati latus eſſe latus Tetraedri. Nam ſi ex quadrato diametri 3. partium detrahatur quadratum lateris Tetraedri 2. partium, relinquatur neceſſe eſt quadratum 1. partis, ad quod duplam habet proportionem quadratũ lateris

[b] 13. tertij dec.



Tetraedri. Vt ſi diameter ſphæræ ponatur AB, *ex cuius quadrato detrahatur quadratum rectæ* AC, *continens duas tertias partes, quadrati diametri* AB; *Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum* AC, BC, *quadrato diametri* AB, *æqualia, ita vt quadratum rectæ* AC, *duplum ſit quadrati rectæ* BC; *Erit recta* AC, *latus Tetraedri.*

[a] *14. tertij decim.*

RVRSVS, cum oſtenſum ſit, diametrum ſphæræ potentia duplam eſſe lateris Octaedri; Fit, ſi ex quadrato diametri AB, *dematur quadratum rectæ* AD, *quod dimidium ſit quadrati diametri* AB; *Vel ſi conſtituantur duo quadrata rectarum* AD, BD, *quadrato diametri* AB, *æqualia, & inter ſe proportionem habentia æqualitatis, ſecundum doctrinam ſcholij propoſ. 33. lib. 6. rectam* AD, *latus eſſe Octaedri.*

[b] *15. tertij decimi.*

DEINDE, quoniam docuimus, diametrum ſphæræ potentia eſſe triplam lateris cubi; Efficitur, ſi ex quadrato diametri AB, *auferatur quadratum rectæ* BC, *quod tertia pars ſit quadrati diametri* AB; *Vel ſi quadrato diametri* AB, *conſtruantur duo quadrata æqualia rectarum* AC, BC, *ita vt quadratum rectæ* AC, *duplum ſit quadrati rectæ* BC, *iuxta doctrinam eiuſdem ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Lineam rectam* BC, *cubi latus exiſtere. Vel certe cum diameter* AB, *poſſit & latus Tetraedri, & latus cubi, ex coroll. 2. propoſ. 15. lib. 13. manifeſtum eſt, ſi ex quadrato diametri* AB, *auferatur quadratum lateris Tetraedri* AC, *relinqui quadratum lateris cubi* BC: *Quemadmodum e contrario, ſi ex quadrato diametri* AB, *tollatur quadratum lateris cubi* BC, *remanet quadratum lateris Tetraedri* AC.

[c] *23. quarti decim.*

PRAETEREA, quia ſi recta aliqua potuerit totam quandam rectam extrema ac media ratione ſectam, & maius ipſius ſegmentum [c]; *Maius ſegmentum eſt latus Icoſaedri illius ſphæræ, cuius diameter eſt recta prior linea; Conſtat, ſi quadrato diametri* AB, *exhibeantur, iuxta ea, quæ in ſcholio propoſ. 33. lib. 6. demonſtrata ſunt a nobis, duo quadrata æqualia rectarum* AE, BE, *proportionem habentium, quam recta quæuis extrema ac media ratione diuiſa ad maius ſegmen-*

segmentum; Rectam minorem B E, *esse Icosaedri latus.*

POSTREMO, quoniam si recta quæpiam ponatur tota quam rectam diuisam extrema ac media ratione, & minus illius segmentum; [a] *Minus segmentum latus est Dodecaedri circumsphæræ, cuius diameter prior linea: Liquet, si quadrato diametri* A B, *constituantur duo quadrata æqualia rectarum* A F, B F, *proportionem habentium, quam quæcunq; recta linea extrema ac media ratione diuisa ad minus segmentum: Minorem lineam* B F, *latus esse Dodecaedri.*

[a] 23. quarti dec.

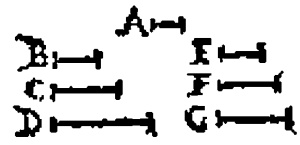
HACTENVS ergo Hypsicl s, Campanus, & Franciscus Cardalla de comparatione solidorum regularium eidem sphæræ inscriptorum scripserunt: Sequentes autem quinque propos. ad idem negotium pertinentes collegi ex Cardano lib. 5. de Proportionibus, ad hunc, qui sequitur, modum. Ad finem deinde lib. 16. nonnulla alia adiiciemus, quæ ad eorundem quinque corporum Regularium in sphæra descriptionem, eorundemque comparationem spectant.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

SI sint quatuor lineæ rectæ continue proportionales, nec non & aliæ quatuor, ita vt sit eadem antecedens omnium. Erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis secundæ ad secundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiusdem proportionis secundæ ad secundam triplicata.

SINT quatuor rectæ A, B, C, D, continue proportionales; necnon quatuor A, E, F, G, ita vt *A*, recta antecedens sit omnium. Dico proportionem C, ad F, tertiæ ad tertiam, esse duplicatam proportionis B, ad E, secundæ ad

secundam,& proportionem D,ad G, quartæ ad quartã, esse triplicatam eiusdem proportionis B, ad E, secundæ ad secundam. Cum enim recta C, ad rectam A, ex defin. 10.lib. 5. proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ B,ad rectam A ; [a] habeat autem & quadratum



rectæ B,ad quadratum rectæ A, duplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B,ad rectam A; Erit vt recta C,ad rectam A, ita quadratum rectæ B, ad quadratum rectę A. Eadem ratione erit, vt recta F,ad rectam *A*, ita quadratum rectæ *E*, ad quadratum rectæ A:Et conuertendo, vt recta A, ad rectam F, ita quadratum rectæ A , ad quadratum rectæ E. Quoniam igitur est quadratum rectę B, ad quadratum rectæ A, vt recta C, ad rectam *A*; & quadratum rectæ A , ad quadratum rectæ E, vt recta *A* , ad rectam F;

quadr. B. Recta C.
quadr. A. Recta A.
quadr. E. Recta F.

Erit ex æquo quadratum rectæ B , ad quadratum rectæ E, vt recta C,ad rectam F: [b] Est autem proportio quadrati rectæ B, ad quadratum rectæ E, duplicata proportionis rectæ B , ad rectam E . Igitur & proportio rectæ C, ad rectam F, duplicata est proportionis rectæ B , ad rectam E. Quod erat primum .

RVRSVS cum recta D,ad rectam *A*,ex defin. 10. lib. 5.proportionem habeat triplicatam proportionis rectæ B,ad rectam A; [c] habeat autem & cubus rectæ *B*, ad cubum rectæ A, triplicatam proportionem eiusdem proportionis rectæ B,ad rectam A; Erit vt recta D, ad rectã A, ita cubus rectæ B , ad cubum rectæ A.Eaceinratione erit vt recta G, ad rectã A, ita cubus rectæ E,ad cubum rectæ A ; Et conuertendo vt recta *A* , ad rectam G , ita cubus rectę A , ad cubum *E*.Quia ergo est cubus rectæ B,ad cubum rectæ A, vt recta D,ad rectam *A*;& cubus rectæ *A*, ad cubum rectæ E, vt recta A,ad rectam G; Erit ex æquo,cubus rectæ B, ad cubum rectę E, vt recta D,ad rectam G: [d] Est autem proportio

[a] 20. sexti.
[b] 22. sexti
[c] 33. vnde.
[d] 33. vnde.

portio cubi rectæ B, ad cubum rectæ E, triplicata proportionis rectæ B, ad rectam E. Igitur & proportio rectæ D, ad rectam G, triplicata est proportionis rectę B, ad rectam E. Quod est secundum. Itaque si sint quatuor lineę rectæ, &c. Quod demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

HOC idē demonstrauimus ad propos. 10. lib. 8. de quotcunque numeris continue proportionalibus duorum ordinum ab vno aliquo, eodemque numero incipientium.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

QVADRATVM lateris trianguli æquilateri ad ipsum triangulum habet proportionem duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppositum ductam, & dimidium ipsius lateris.

IN triangulo æquilatero A B C, ducatur ex angulo A, ad latus oppositū *BC*, recta perpendicularis AD, quæ bifariam secabit latus *BC*, vt in coroll. propos. 12. huius lib. demonstratum est; *Ac* propterea *B D*, dimidium est lateris *AB*. [a] Inueniatur ergo recta E, media proportionalis inter *A D*, & B D. Dico quadratum lateris AB, ad triāgulum ABC, habere proportionem duplicatam lateris *AB*, ad rectam E. Cum enim rectangulo sub AD, BD, æquale sit triangulum *ABC*, vt perspicuum est ex scholio propos. 41. lib. 1. [b] Sit autem eidem rectangulo sub A D, B D, æquale quadratum rectæ *E*; *Æ*qualia erunt triangulum *ABC*, & quadratum rectæ E. [c] Quoniam uero quadratum late-



[a] *13. sexti*

[b] *17. sexti*

[c] *20. sexti*

ris AB, ad quadratum rectæ E, proportionem habet duplicatam lateris AB, ad rectam E; Conſtat, quadratum lateris AB, ad triangulum ABC, proportionem habere quoque duplicatam lateris AB, ad rectam E. Quam ob rem, quadratum lateris trianguli æquilateri, &c. Quod erat demonſtrandum.

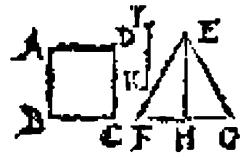
COROLLARIVM.

ITAQVE, ſi in triangulo æquilatero perpendicularis ducatur ex vno angulo ad latus oppoſitum; quadratum rectæ, quæ medio loco proportionalis eſt inter dictam perpendicularem, & dimidium lateris, æquale eſt ipſi triangulo. Oſtenſum enim eſt, quadratum rectæ E, quæ media proportionalis eſt inter AD, DB, æquale eſſe triangulo ABC.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

SI cubus, & Tetraedrum in eadem ſphæra deſcribantur: erit quadratum cubi ad triangulum Tetraedri, vt latus Tetraedri ad lineam perpẽdicularem, quæ ex vno angulo trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum deducitur.

SIT quadratum cubi cuiuſuis ABCD, & Tetraedri in eadem ſphæra deſcripti triangulum EFG, in quo perpendicularis EH, ex angulo E ad latus oppoſitum FG, adducta diuidens FG, latus bifariam, ex coroll. propoſ. 12. huius lib. Dico, eſſe quadratum AC, ad triangulum EFG, vt latus trianguli EF, ad perpendicularem EH. Poſita enim inter EH, FH, media proportionali IK; cum quadratum lateris Tetraedri EF, duplum ſit quadrati



[a] 13. tertij dec.

quadrati lateris cubi AB, [a] sit autem & duplum rectanguli sub latere EF, & dimidio eius FH, eo quod dictũ quadratum, & rectangulum eandem habeant altitudinem, nempe EF: Erit rectangulum sub EF, FH, æquale quadrato lateris AB; [b] Ac propterea AB, media proportionalis erit inter EF, FH, hoc est, tres rectæ FH, AB, EF, cõtinue erunt proportionales: Sunt autem & tres rectæ FH, IK, EH, continue proportionales, ex constructione. Igitur cum omnium antecedens sit FH, [c] erit proportio rectæ EF, ad rectam EH, tertiæ ad tertiã, proportionis rectæ AB, ad rectam IK, secundæ ad secundam duplicata. Quare cum & quadratum AC, rectæ AB, ad quadratum rectę IK, hoc est, ad triangulum EFG, (est enim ex coroll. propos 29. huius lib. quadratum rectę IK, æquale triangulo EFG,) [d] proportionem habeat duplicatam proportionis rectæ AB, ad rectam IK; Erit quadratum cubi AC, ad triangulũ Tetraedri EFG, vt latus EF, ad perpendicularem EH. Quocirca si cubus & Tetraedrum in eadem sphera describantur, &c. Quod erat demonstrandum.

FH.
AB. IK.
EF. EH.

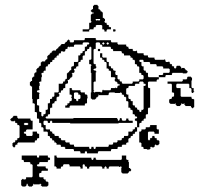
[a] 1. sexti.
[b] 17. sexti.
[c] 28. quarti dec.
[d] 20. sexti.

THEOR. 31. PROPOS. 31.

LATVS Tetraedri potentia sesquialterum est axis, seu altitudinis ipsius: Axis vero, siue altitudo Tetraedri potentia sesquitertia est lateris cubi in eadem sphæra descripti.

SIT Tetraedri triangulũ ABC, & altitudo, seu axis Tetraedri DE, latusq; cubi eiusdẽ sphęrę F. Dico latus Tetraedri AB, esse potẽtia sesquialterũ axis DE: Axem vero DE, potentia sesquitertiũ lateris cubi F. Nã circa

[a] 5. quarti.



triangulum, descripto circulo A B C; ad centrum D, in quod videlicet cadit axis D E, vt constat ex propos. 15. huius lib. ducatur A D, semidiameter, & A E, latus Tetraedri. Quia igitur quadratũ lateris A E, hoc est, lateris A B, [b] æquale est quadratis rectarum A D, D E, [c] & triplum quadrati semidiametri A D; Fit, vt posito quadrato lateris A B, seu A E, partium 6. quadratum rectę A D, sit earundem partium 2. Ac proinde reliquum quadratum axis D E, talium partium 4. Quapropter quadratum lateris Tetraedri sesquialterum est quadrati axis Tetraedri.

[b] 47. primi

[c] 12. tertij decc.

QVONIAM vero latus Tetraedri A B, [d] potentia duplum est lateris cubi F; Erit quadratum lateris F, talium partium 3. qualium 6. positum est quadratum lateris A B; Ostensum est autem earundem 4. esse quadratum axis DE. Igitur quadratum axis D E, sesquitertium est quadrati lateris cubi F. Latus itaque Tetraedri potentia sesquialterum est, &c. Quod erat ostendendum.

[d] 13. tertiidecimi.

COROLLARIVM I.

QVIA vero, posito quadrato lateris AB, partium 6. quadratum diametri sphæræ talium partium est 9. [e] *quod diameter potentia sit sesquialtera lateris Tetraedri: Earundem uero partium 4. ostensum est quadratum axis DE; perspicuum est, diametrum sphæræ potentia esse duplam sesquiquartam axis Tetraedri; Ac proinde,* [f] *cum quadrata habeant proportionem laterum duplicatam, manifestum est, diametrum esse sesquialteram axis Tetraedri. Sesquialteræ enim proportionis duplicata est proportio dupla sesquiquarta, vt in his numeris 4. 6. 9. appareat. Id quod etiam docuimus in coroll. 2. propos. 13. lib. 13.*

[e] 13. tertij decimi.

[f] 20. sexti

COROL-

COROLLARIVM II.

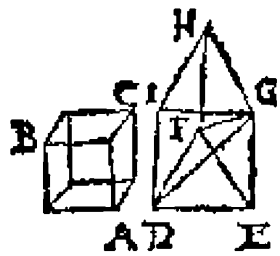
CONSTAT quoque, ita esse axem, seu altitudinẽ Tetraedri ad latus cubi eidem sphæræ inscripti, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo basis ad latus oppositum ductam. Quia videlicet tam latus trianguli æquilateri, hoc est, latus Tetraedri, potentia sesquitertium est perpendicularis ex vno angulo ad latus oppositum deductæ, quam ex hac propos. ipse axis Tetraedri lateris cubi. [a] 12. quartidec.

THEOR. 32. PROPOS. 32.

CVBVS triplus est Tetraedri eidẽ sphæræ inscripti.

DESCRIBANTVR in eadem sphæra cubus *ABC*, & Tetraedrum *DEFG*. Dico cubum Tetraedri esse triplum. Constituatur super DEF, basim Tetraedri prisma DEFGHI, eandem habens cum Tetraedro altitudinem. [b] Quoniam igitur est basis prismatis, seu cubi ABC, ad basim prismatis, seu Tetraedri DEF, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ductam ex angulo quouis basis DEF, ad latus oppositum. Vt autem latus Tetraedri ad perpendiculare dictam, ita est, per coroll. 2. propos. 31. huius lib. altitudo Tetraedri, ac proinde prismatis DEFGHI, ad latus cubi, ideoque ad altitudinem cubi, seu prismatis ABC; Erit basis prismatis ABC, ad basim prismatis DEFGHI, vt huius altitudo ad illius altitudinem. Quare, per ea, quæ ad propos. 9. lib. 12. demonstrauimus, æqualia erunt prismata *ABC*, DEFGHI, cum ipsorum bases & altitudines reciprocentur. Atqui prisma

[b] 30. quartidec.



ma DEFGHI triplum eſt pyramidis, ſeu Tetraedri DEFG; ex coroll. 1. propoſ. 7. lib. 12. Cubus ergo ABC, triplus quoque erit eiuſdem tetraedri DEFG. Quapropter cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphęræ inſcripti. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM

VNDE priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo in eadem ſphæra, in qua Tetraedrum, deſcripto. Oſtenſum enim eſt, cubum ABC, æqualem eſſe priſmati DEFGHI, &c.

FINIS ELEMENTI DECIMIQVARTI.

EVCLI-

EVCLIDIS ELEMENTVM QVINTVMDECIMVM.

ET SOLIDORVM QVINTVM vt nonnulli putant. Vt vero alij, Hypſiclis Alexandrini de quinque corporibus

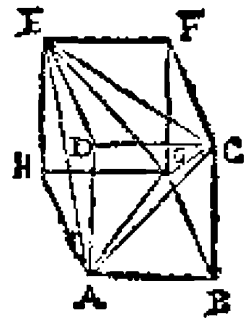
LIBER SECVNDVS.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

1.

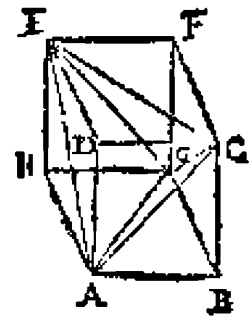
IN dato cubo pyramidem deſcribere.

IN cubo dato ABCDEFG*H*, oporteat deſcribere pyramidẽ, ſeu tetraedrũ. *A*b vno eius angulo, nempe ab E, ducantur in baſibus tribus ipſum conſtituentibus tres diametri E A, *E*G, E *C*, ex quarũ extremitatibus A, G, C, ſimiliter diametri ducantur AG, GC, CA, in reliquis tribus baſibus. Quoniam igitur diametri quadratorum æqualium æquales ſunt, quod potẽtia duplæ ſint



late-

laterum æqualium quadratorum, vt in ſcholio propoſ. 47. lib. 1. demonſtrauimus; perſpicuum eſt, quatuor triãgula ACE, GAC, GAE, GCE, ex dictis diametris compoſita, æquilatera eſſe, & inter ſe æqualia; ac propterea pyramidem, ſeu tetraedrum conſtitui ex ipſis. Quia vero omnes anguli tetraedri in angulis cubi collocantur; manifeſtũ eſt, ipſum in cubo eſſe inſcriptũ, ex defin. 31. lib 11. Quare in dato cubo pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

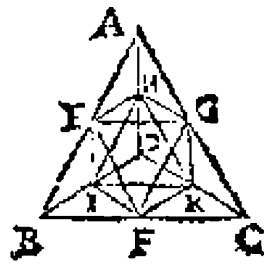


PROBL. 2. PROPOS. 2.

2.

IN data pyramide octaedrum deſcribere.

SIT in pyramide, ſeu tetraedo ABCD, deſcribendum octaedrum. Diuiſis omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, I, K, & ductis duodecim rectis EF, FG, GE, HI, IK, KH, EI, IF, FK, KG, GH, HE, cõſtituentur octo triangula, quorum quidem quatuor EHI, IHK, KHG, GHE, ſupra planum EIKG; quatuor autem IFE, EFG, GFK, KFI; infra idem planum cõſiſtunt. Quoniam vero latera AE, AH trianguli AEH, æqualia ſunt lateribus AG, AH, triãguli AGH, quod ſint dimidia rectarum æqualium AB, AD, AC; Item & anguli contenti EAH, GAH, æquales, quod ſint anguli triangulorum æquilaterorum ABD, ACD: * æquales erunt baſes EH, GH. Eademque ratione æquales erunt rectæ EH, HI, & reliquæ eodem modo. Quare dicta octo triangula æquilatera ſunt, & æqualia inter ſe; ideoque octaedrum componunt EIKGIIF; quod quidem ex defin 31. lib. 11.



* 4 primi.

intra

intra tetraedrum deſcriptum eſt; cum omnes eius anguli tangant omnia latera tetraedri, ex conſtructione. In data igitur pyramide octaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

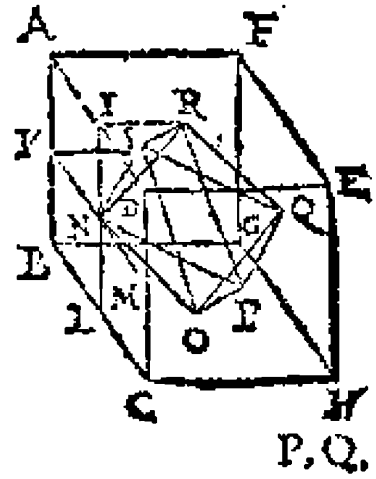
QVONIAM vero tria plana EIKG, GHIF, FKHE, quadrata ſunt æqualia, ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecãtia, vt in coroll. 1. prop. 14. lib. 13. demonſtrauimus; quorum quodlibet pyramidem ABCD, ſecat bifariam. (Nam quadratum EIKG, ipſam diuidit in pyramidem HIKD, & priſma HIKGAE; necnon in pyramidem EBFI, & priſma EFCGKI; Conſtat autem pyramidem pyramidi eſſe æqualem, & priſma priſmati: [a] *Eodemque modo reliqua quadrata GHIF, FKHE, diuidunt bifariam eandem pyramidem ABCD.) Manifeſtum eſt, ſi in tetraedro octaedrum inſcribatur, tetraedrum bifariam ſecari tribus quadratis æqualibus, quæ octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant.*

[a] 3. duode.

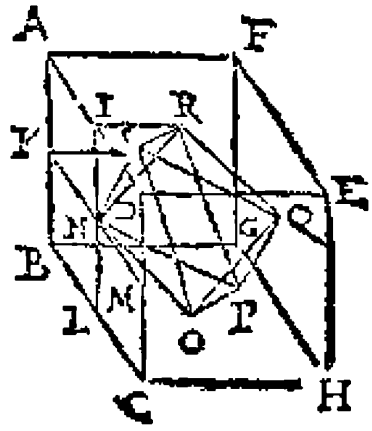
PROBL. 3. PROPOS. 3. 3.

IN dato cubo octaedrum deſcribere.

DESCRIBENDVM ſit octaedrum in cubo dato AH. Diuidãtur latera baſis ABCD, bifariã in punctis I, K, L, M, quę connectantur rectis IL, KM, ſecantibus ſeſe in N, pũcto, quod quidem centrum eſt quadrati ABCD, vt conſtat ex demonſtratione propoſ. 8. lib. 4. Deinde eadem ratione inueniantur reliquarum baſium centra O,



P,Q,R,S. Erunt igitur omnes rectæ,ex dictis centris ductæ ad media puncta latiũ,cuiuſmodi ſunt NI,RI,NK, SK, &c. æquales dimidiis lateribus cubi, ſeu quadratorum, vt per ſpicuum eſt ex prædicta demonſtratione propoſ. 8.lib.4.Poſtremo ſi præfata cẽtra coniungantur duodecim rectis NO, OP, PQ, QR, RS, SN, NP, PR, KN, SO, OQ, QS; conſtituta erunt octo triãgula, quorum quidem quatuor NSR,RSQ, QSO,OSN, ſupra planũ NOQR;quatuor autẽ OPQ,QPR,RPN,NPO, infra idem planum conſiſtunt. Quoniam vero latera IN,IR, trianguli INR,æqualia ſunt lateribus KN,KS, trianguli KNS, quod omnia ſint dimidia laterum cubi æqualium, vt dictum eſt; Item & anguli contenti, æquales; propterea quod, cum NI, IR, parallelæ ſint rectis BA, AE; [a] angulus NIR, æqualis ſit recto angulo KAF, in quadrato AG,eademque ratione angulus NKS, angulo recto IAF, in quadrato AE; [b] Erunt baſes NR,NS,æquales. Non aliter oſtendemus,reliquas lineas omnes & inter ſe,& his duabus æquales eſſe;ſi nimirum e centris ducantur rectæ ad dimidia laterum,hac lege, vt quælibet duæ ducantur ad dimidium illius lateris, quod commune eſt duobus cubi quadratis,quorum duo illa puncta, e quibus videlicet rectæ egrediuntur,centra exiſtunt.Ita enim vides duas rectas NI,RI,ductas eſſe ad I, dimidiũ lateris AD, quod commune eſt quadratis AC,AE,quorum centra ſunt puncta N, & R; Ita quoque duæ rectæ NK,SK, ductæ ſunt ad K,dimidium lateris AB,quod commune eſt quadratis AC, AG, quorum centra exiſtunt puncta N,& S, &c. Quam ob rem conſtituta octo triangula & æquilatera ſunt,& æqualia inter ſe;ideoque Octaedrum conſtituunt NOQRSP; Quod quidem ex defin.31.lib.11. intra cubum eſt deſcriptum,cum omnes eius ſex anguli tangant cubi omnes ſex baſes in earum centris.



[a] 1.6. vnd. 4.

[b] 4. primi.

centris. Quam ob rem in dato cubo octaedrum inscripsimus. Quod faciendum erat.

ALITER. [a] In cubo dato inscribatur pyramis; [b] In hac demde pyramide Octaedrũ figuretur, factumque erit, quod proponitur. Cum enim ex demonstratione propos. 2. huius lib. a. 15 Octaedri tangant latera pyramidis; Latera vero pyramidis, ex demonstratione propos. 1. huius lib. existant in planis basium cubi, cum sint harum basium diametri per spicuum est, angulos Octaedri tangere quoque bases cubi; atque adeo Octaedrum cubo esse inscriptum.

a 1. quinti decimi.

b 2. quinti decimi

COROLLARIVM.

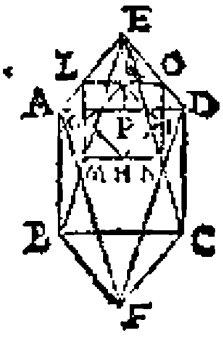
QVIA vero diametri Octaedri in cubo describi NQ, RO, si ducerentur, se mutuo secant ad angulos rectos, ex coroll. 1. propos. 14. lib. 13. quæ quidem coniungunt centra basium cubi oppositarũ: Manifestum est, rectas lineas centra basium cubi oppositarum connectentes non solum se se mutuo bifariam, vt docuimus coroll. 1. propos. 15. lib. 13. sed etiam ad angulos rectos, vt hic ostendimus, diuidere.

PROBL. 4. PROPOS. 4.

4.

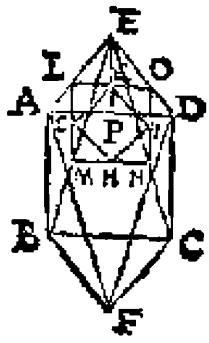
IN dato octaedro cubum inscribere.

DATVM octaedrum sit *ABCDEF*, in quo oporteat describere cubum. Quoniam in octaedro sex pyramides quadrangulæ continentur, quarum videlicet vertices sunt sex anguli octaedri, & quælibet duæ octaedrum constituunt; sit vna earum pyramis ABCDE, cuius basis *ABCD*, quadratum, triãgula vero æquilatera ABE, EBC, CED, DEA, sintque horum triangulorum centra G, H, I, K, per quæ ducantur



rectæ

rectæ LM, MN, NO, OL, parallelæ lateribus AB, BC CD, DA. Erunt igitur & triangula LME, EMN, NEO, OEL, æquilatera, cum similia sint triangulis æquilateris ABE, EBC, CED, DEA, ex coroll. propos. 4. lib. 6. atque adeo inter se æqualia, propterea quod latera habeant communia. Est enim EM, latus commune triangulis LME, EMN; Et EN, cõmune triangulis EMN, NEO; & denique EO, cõmune triãgulis NEO, OEL. Hinc enim fit, triãgulũ LME, triãgulo EMN; hoc vero ipsi NEO; & hoc ipsi OEL, æquale esse. Conueniunt enim rectæ LM, MN, NO, OL, in punctis L, M, N, O, vt mox ostẽdemus. Quocirca & quatuor rectæ LM, MN, NO, OL, inter se æquales sũt.



[a] Quia vero ducta recta EKP, tripla est rectæ KP; [b] Est autem vt EP, a [1] KP, ita EA, ad LA; Erit quoque EA, tripla rectæ LA. Eademque ratione EB, EC, ED, triplæ erunt rectarum MB, NC, OD. Quocirca rectæ LM, MN, NO, OL, conuenient in punctis L, M, N, O, in quibus latera ea proportione secantur, quadrilaterumque constituent LMNO. Rursus quia LO, LM, parallelæ sunt rectis AD, AB, non in eodem cum ipsis existentibus plano; [c] æqualis erit angulus MLO, angulo BAD, qui rectus est, cum ABCD, quadratum sit, vt ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. & in propos. 16. lib. 14. Ac propterea & angulus MLO, rectus erit. Non secus demonstrabimus & reliquos angulos LMN, MNO, NOL, rectos esse. Quoniam vero tam planum per LO, LM, quam per NM, NO, ductu n. [d] parallelum est plano ABCD; ipsa quoque inter se parallela erunt, atq; adeo, cum conueniant in punctis M, & O, vnum planum efficient, ex scholio propos. 16. lib. 11. Quocirca LMNO, quadratum erit, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Deinde, cum latera EL, EK, trianguli ELK, æqualia sint lateribus EO, EK, trianguli EOK, & anguli quoque ipsis contenti, æquales, quod recta EK, ex angulo E. per centrum K, trianguli æquilateri EAD, ducta bifariam secet angulum AED, per coroll. propos. 12. lib.

[a] 18. quar-tidec.
[b] 2. sexti.
[c] 30. vnde.
[d] 15. vnde.

12.lib.13. [a] Erunt & baſes KL,KO,æquales, hoc eſt, recta LO, bifariam ſecabitur in K. Eadem ratione LM, MN, NO, bifariam ſecabuntur in G,H,I. Ac propterea rectæ GL,GM, HM,HN, IN,IO,KO,KL, cum ſint laterũ quadrati LN, dimidia, æquales inter ſe erunt; Ideoque, cum & angulos contineant æquales, nimirum rectos, [b] æquales erunt & rectæ GH,HI,IK, KG, centra G, H, I, K, connectentes. Quia vero hæ rectæ in plano exiſtunt quadrati LN, angulosque comprehendunt rectos; ([c] cum enim anguli LKG,GKI,IKO, duobus ſint rectis æquales; Sint autem LKG,IKO, per corollarium 2.propoſ 32.lib. 1. ſemirecti; rectus erit angulus GKI; Eademq; ratione recti erũt anguli KGH,GHI, HIK.) quadratum erit GHIK, cum habeat & latera æqualia, & angulos rectos. Quod ſi eadem arte in reliquis quinque pyramidibus Octaedri centra triangulorum rectis coniungantur, deſcribentur ſimiliter quadrata: quæ cum latera habeant cõmunia, æqualia inter ſe erunt. Quare ſex huiuſmodi quadrata cubum component: qui quidem ex defin. 31. lib. 11. intra Octaedrum deſcriptus erit, cum octo eius anguli tangant octo Octaedri baſes in earum centris. Quare in dato Octaedro cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 4. primi

[b] 4. primi

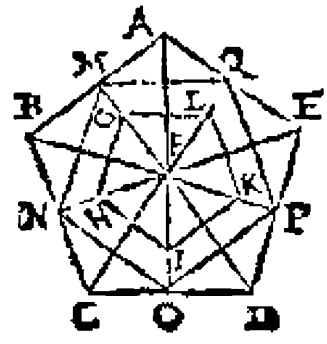
[c] 13. primi.

PROBL. 5. PROPOS. 5.

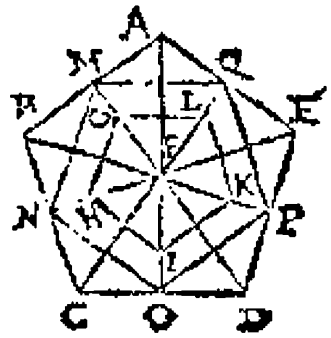
5.
6.

IN dato Icoſaedro, Dodecaedrum inſcribere.

SIT ex duodecim pyramidibus pentagonis, quæ in Icoſaedro continentur, quarum videlicet baſes ſunt pẽtagona ex quinque Icoſaedri lateribus compoſita, vertices vero, duodecim anguli Icoſaedri, vna pyramis ABCDEF, cuius baſis pentagonum ABCDE, triangula vero æquilatera ABF, BCF,



CDF, DEF, EAF, ſintque horum triangulorum centra G, H, I, K, L, quæ rectis connectãtur lineis GH, HI, IK, KL, LG. Rurſus ex vertice F, per centra triangulorum rectæ demittantur FM, FN, FO, FP, FQ; quæ ex ſcholio propoſ. 12. lib. 13. biſariã ſecabũt latera AB, BC, CD, DE, EA, in M, N, O, P, Q; ita vt decem rectæ MA, MB, NB, NC, OC, OD, PD, PE, QE, QA, æquales ſint, quę cum angulos comprehendant æquales, nempe angulos pentagoni, [a] æquales quoq; erunt rectæ MN, NO, OP, PQ, QM, puncta M, N, O, P, Q, connectentes; [b] Ac proinde & anguli MFN, NFO, OFP, PFQ, QFM, æquales erunt, quod & latera FM, FN, FO, FP, FQ, æqualia ſint, nempe perpendiculares ex angulis triangulorum æquilaterorum, æqualium ad baſes oppoſitas demiſſæ. Cum enim latera FB, BM; trianguli FBM, lateribus FB, BN, trianguli FBN, æqualia ſint, continentque angulos æquales, nempe triangulorum æquilaterorum; [c] erunt baſes FM, FN, æquales; & ſic de reliquis. Quoniam vero & rectę FG, FH, FI, FK, FL, nimirum ſemidiametri circulorum ęqualium triangula æquilatera æqualia circũſcribentiũ, ęquales ſunt, & angulos comprehendunt æquales, vt demonſtratum eſt; [d] Erunt & rectæ GH, HI, IK, KL, LG, æquales. [e] Rurſus quia tam anguli AMQ, QMN, NMB, quã anguli BNM, MNO, ONC, æquales ſunt duobus rectis. [f] Sunt autem anguli AMQ, NMB, angulis BNM, ONC, æquales; Erunt reliqui anguli QMN, MNO, æquales; Eademque ratione reliqui anguli NOP, OPQ, PQM, & inter ſe, & hiſce æquales erunt. Quare pentagonum erit æquilaterum & æquiangulum MNOPQ, in plano pentagoni ABCDE, exiſtens. Deniq; cum rectæ FM, FN, FO, FP, FQ, æquales proportionaliter ſecentur in G, H, I, K, L, quod & IG, FH, FI, FK, FL, ex centris, æquales ſint; Vel certe quia FG, FH, FI, FK, FL, duplę ſunt ipſarum GM, HN, IO, KP, LQ, ex coroll propoſ. 18. lib. 14. [g] parallelæ erunt



[a] 4. primi.
[b] 8. primi.
[c] 4. primi.
[d] 4. primi.
[e] 13. primi.
[f] 4. primi.
[g] 2. ſexti.

lx erunt GH, HI, IK, KL, LG, ipſis MN, NO, OP, PQ, QM; Ac propterea anguli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, angulis æqualibus QMN, MNO, NOP, OPQ, PQM, ideoque & inter ſe æquales erunt.[b] Quia vero plana per rectas GH, HI, & per HI, IK, ducta, parallela ſunt plano pentagoni MNOPQ, per rectas MN, NO, OP, ductо, conueniuntque in recta HI; ipſa vnum planum efficient, ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. Eodemque modo oſtendemus plana per IK, KL, & per KL, LG, necnon per LG GH, ducta idem planum conſtituere cum plano per GH, HI, IK, ducto. Quocirca GHIKL pentagonum eſt æquilaterum & æquiangulum, cum & latera habeat æqualia & angulos. Quod ſi eadem arte in reliquis vndecim pyramidibus Icoſaedri centra triangulorum rectis connectantur lineis, deſcribentur ſimiliter pentagona æquilatera & æquiangula: quæ cum latera habeant communia, æqualia inter ſe erunt. Quamobrem duodecim huiuſmodi pentagona Dodecaedrum conſtituent: quod quidem ex defin. 31. lib. 11. in Icoſaedro erit deſcriptum, cum viginti anguli Dodecaedri in centris viginti baſium Icoſaedri conſiſtant. Quapropter in dato Icoſaedro Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 10. vnde

[b] 15. vnde.

COROLLARIVM.

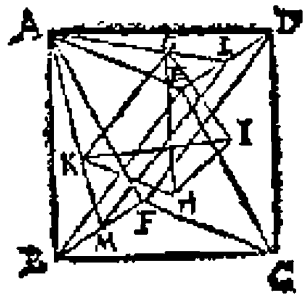
ITAQVE cum omes rectæ e centro Icoſaedri ad centra baſium, hoc eſt, ad angulos Dodecaedri ſibi inſcripti, ſint æquales; (Cum enim ex coroll. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. perpendiculares ſint ad plana circulorum æqualium baſes Icoſaedri circumſcribentium, atque adeo eorundem diſtantiæ exiſtant a centro ſphæræ, ſeu Icoſaedri; æquales erunt inter ſe, ex lemm. 2. eiuſdem propoſ. 10. lib. 14.) Idem erit centrum Icoſaedri, atque ſibi inſcripti Dodecaedri.

o.
5.

PROBL. 6. PROPOS. 6.

IN dato octaedro pyramidem describere.

PYRAMIS describenda sit in octaedro *ABCDEF*. In pyramide octaedri superiori ABCDE, sumantur G, & H, centra triangulorum ex aduerso sibi respondentium AED, BEC; *Item in pyramide inferiori ABCDF*, capiantur I, & K, centra triangulorum ex aduerso quoque sibi correspondentium CFD, AFB: quæ quidem centra coniũgantur sex rectis GH, GI, GK, HI, HK, IK, vt fiat pyramis HIKG. Deinde ex A, demittantur per centra G, K, rectæ AL, AM, secantes latera opposita octaedri DE, BF, bifariam in L, & M, per scholium propos. 12. lib. 13. coniungaturq; recta LM, [a] quæ ipsi BE, vel FD, æqualis & parallela erit: cum EL, BM; Item DL, FM, rectæ æquales sint, & parallelæ, nimirum dimidia laterũ DE, BF, oppositorũ in quadrato EF. Quoniam vero rectæ AL, AM, sectæ sunt proportionaliter in G, & K, pũctis, quod AG, AK, dupla sint ipsarum GL, KM, ex coroll. propos. 18. lib 14. [b] Erunt GK, LM, parallelæ; Ac propterea, per coroll. propos. 4. lib. 6. triãgula ALM, AGK, similia. [c] Quare erit vt AL, ad LM, ita AG, ad GK; & permutando, vt AL, ad AG, ita LM, ad GK: [d] Est autẽ AL, ipsius AG, sesquialtera; quod GL, sit tertia pars ipsius AL, ideoque AG, eiusdem AL, duæ tertiæ. Igitur & LM, hoc est, ipsi æqualis DF, sesquialtera erit ipsius GK. Hac eadem arte ostẽdemus, & reliquarum linearum centra G, H, I, K, coniungentiũ sesquialtera esse latera octaedri; Ac proinde rectas pyramidem HIKG, componentes inter se esse æquales, hoc est, triangula æquilatera æqualia ex ipsis confici,



[a] 33. primi

[b] 2. sexti.
[c] 4. sexti.
[d] 18. quarti decimi.

confici, ideoque Tetraedrum cõstitui: quod, cum habeat angulos omnes in centris quatuor basium octaedri, descriptum erit ex defin. 31. lib. 11. in octaedro. Quocirca in dato octaedro pyramidem descripsimus. Quod erat faciendum.

ALITER. [a] In octaedro dato inscribatur cubus, [b] & in cubo pyramis, factumq; erit, quod proponitur. Cum enim cubi anguli consistant in centris basium octaedri; & in angulis cubi collocẽtur quoque anguli pyramidis; perspicuum est, pyramidis angulos tangere bases octaedri in earum centris; Ac propterea pyramidem ipsi octaedro esse inscriptam.

[a] *4 quintidecimi.*
[b] *1. quintidecimi.*

COROLLARIVM I.

QVIA vero ostensum est, vtramque GK, DF, parallelam esse ipsi LM; [c] *ac propterea & GK, ipsi DF, atque adeo ipsi BE, parallelam esse; Atque eadem ratione KH, ipsis FC, EA, parallelam esse;* [d] *Atque idcirco planum GKH, per GK, KH, ductum, parallelum esse plano DFC, per DF, FC, necnon & plano BEA, per BE, EA, ducto; Eodemque modo reliqua triangula pyramidis reliquis triangulis octaedri esse parallela, binis nimirum singula; Constat, si tetraedrum octaedro inscribatur, quatuor bases tetraedri, octo basibus octaedri parallelas esse, singula videlicet binis oppositis.*

[c] *9. undec.*
[d] *15. unde.*

COROLLARIVM II.

PRAETEREA, cum octaedrum circumscribat & cubum, & tetraedrum in cubo descriptũ, quod tetraedri anguli in angulis cubi, & huius anguli in centris basium octaedri constituantur; Atque adeo recta coniungens centra basium octaedri opposita, sit diameter cubi, hoc est, sphæræ circumscribentis & cubum, & tetraedrum in cubo descriptum, vt

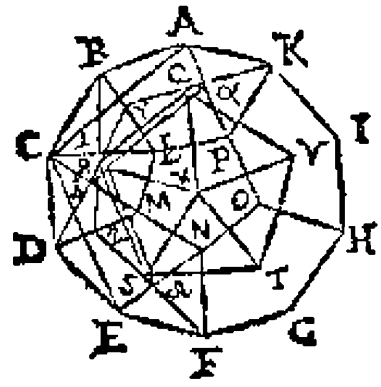
conſtat ex 4. propoſ. huius lib. Sit autem diameter ſphæræ ſeſquialtera axis tetraedri in ea ſphæra deſcripti per coroll. 1. propoſ. 31. lib. 14. vel per coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. Manifeſtum eſt, ſi in octaedro tetraedrum inſcribatur, rectam, quæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungit, ſeſquialteram eſſe axis tetraedri, hoc eſt, perpendicularis ab angulo tetraedri ad baſin oppoſitam deductæ.

PROBL. 7. PROPOS. 7.

o. 7.

IN dato dodecaedro Icoſaedrum deſcribere.

SIT dimidium Dodecaedri, in quo deſcribendum eſt Icoſaedrum, contentum ſex pentagonis A B L P K, PKIHO, OHGFN, NFEDM, MDCBL, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, quælibet duo proxima rectis iungantur QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX: Et ex angulis K. D, quos ſubtendant rectæ AP, CM, per centra Q, R, rectæ ducantur KY, DY, quæ per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. bifariam diuident latus oppoſitum BL, & ad angulos rectos, ideoq; in puncto Y, conuenient: Diuidunt autem & rectæ eædem YK, YD. rectas AP, CM, bifariam & ad angulos rectos in α, β, ex 1. coroll. eiuſdem propoſitionis, quod & arcus AKP, CDM, circulorum circa pentagona deſcriptorum bifariam diuidant, (a conſtat enim rectas AK, PK; Item CD. MD, arcus ſubtendere æquales.) Igitur Aα, Cβ, parallelæ ſunt rectæ BY; b atque adeo & inter ſe parallelæ: Sunt autem & æquales, nempe dimidia rectarum AP, CM; c quæ æquales ſunt, cum latera KA, KP, lateribus DC, DM,



a 21. tertij.
b 28. primi 9. vndec.
c 4. primi.

DM, æqualia ſint, angulosque contineant æquales. Rectæ ergo ipſas connectentes AC, αß, æquales erunt, & parallelę. Non aliter oſtendemus, ſi ex angulis B, F, quos ſubtendant rectę CL, EN, per centra R, S, rectę ducãtur BZ, FZ, connectanturque rectæ CE, γδ, æquales eſſe ipſas CE, γδ: [b] Sunt autem AC, CE, inter ſe æquales, cum contineant angulos æquales æqualibus lineis comprehenſos: (quia tam latera dodecaedri AB, BC, quam CD, DE, angulum pentagoni æquianguli continent, vt conſtat ex aliquo Dodecaedro materiali. Hi autem anguli non vergunt verſus X, vt figura monſtrare videtur, ſed extrorſum, vt ex eodem materiali Dodecaedro patet.) Igitur & αß, γδ, æquales erunt. Quapropter cum & rectę Xα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales ſint, (NãYQ, YR, ZR, ZS, perpendiculares, diſtantiæ ſunt æqualium rectarum BL, DM, a centris Q, R, S, circulorum æqualiũ, qui nimirum pentagona æqualia circumſcribunt, [c] atque adeo æquales. Item Qα, Rβ, Rγ, Sδ, diſtantię ſunt rectarum æqualium AP, CM, CL, EN, a centris eorundem circulorum æqualium, [d] ideoque æquales; Ac proinde & totæ Yα, Yβ, Zγ, Zδ, æquales erunt,) [e] Erunt quoque anguli αYβ, γZδ, æquales; Ac propterea, cum & rectæ YQ, YR, ZR, ZS, æquales ſint; [f] æquales quoque erunt rectæ QR, RS, centra Q, R, S, connectentes. Eadem prorſus arte æquales demonſtrabuntur omnes rectæ centra pentagonorũ copulantes. Quare triãgula QXR, RXS, SXT, TXV, VXQ, ſub quinque angulis ſolidis Dodecaedri LM, OP, conſtituta, æquilatera erũt, & æqualia. Quod ſi ſimili modo ſub reliquis quindecim angulis ſolidis Dodecaedri, ſimilia triangula conſtruantur: (Habet enim dodecaedrũ viginti angulos ſolidos.) quæ quidem latera habent communia, deſcriptum erit Icoſaedrum intra Dodecaedrum, cum duodecim anguli ſolidi Icoſaedri conſiſtant in centris duodecim baſium dodecaedri. In dato ergo Dodecaedro Icoſaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[b] 4. primi

[c] 14. tertij.

[d] 14. tertij.

[e] 8. primi.

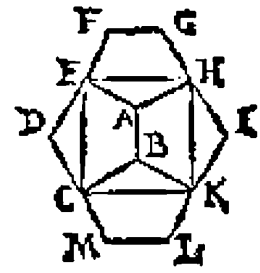
[f] 4. primi.

o.
8.

PROBL. 8. PROPOS. 8.

IN dato Dodecaedro cubum deſcribere.

PROPONANTVR quatuor pentagona Dodecaedri, cui inſcribendus ſit cubus, *ALCDL*, *EFGHA*, *AHIKB*, *BKLME*, conuenientia ad latus AB; duo quidem *ABCDE*, *ABKIH*, ſecundum latus idem commune AB; alia autem duo *AEFGH*, *BCMLK*, ſecundum angulos *EAH*, *CBK*. In his vero pentagonis ſubtendantur angulis A, B, D, I, rectę EH, CK, CE, IK, quadrilaterum efficientes EHKC. [a] Quoniam igitur rectæ AE, BC, æquales, auferũt ex circulo pentagonum *ABCDE*, circumſcribente arcus æquales; Erunt ex ſcholio prop. 27. lib. 3. rectę AB, CE, parallelæ. Eademque ratione parallelę erunt AB, HK. [b] Quare & EC, HK, inter ſe parallelæ erunt; [c] Ac propterea rectæ EH, CK, quæ ipſas connectunt, parallelæ erunt, [d] in eodemque cum ipſis plano; ideoque parallelogrammum erit EHKC; quod dico eſſe æquilaterum. Cum enim omnia latera AE, AH, DE, DC, BC, BK, IH, IK, æqualia ſint, angulosque contineãt æquales, ex hypotheſi; [e] æquales erũt baſes EH, HK, KC, CE. Quia vero planũ ECKH, productum communem ſectionem in ſphæra facit circulum, per lemma 1. propoſ. 10 lib. 14. circa quadrilaterum EK, deſcriptum; [f] Erunt tam anguli oppoſiti E, K, quam C, H, duobus rectis æquales; [g] Ac propterea cum oppoſiti E, & K, ſint æquales, necnon & oppoſiti C, & H; erunt omnes quatuor anguli E, C, K, H, recti. Quare EK, quadratum erit, collocans ſuos angulos in quatuor angulis dodecaedri, & latera in planis quatuor pentagonorum Dodecaedri. Si igitur in reliquis octo pẽtagonis ſimiliter octo angulis octo alię rectæ ſubtendan-



[a] 28. tertij.
[b] 9. vndec.
[c] 33. primi
[d] 7. vndec.
[e] 4. primi.
[f] 22. tertij.
[g] 34. primi.

dantur eodem ordine; cõstitutum erit solidum sex quadratis contentum; quæ cum sint æqualia, eo quod eorum latera æquales angulos pentagonorum æqualibus rectis comprehensos subtendentia æqualia sunt; cubum constituent intra Dodecaedrum descriptum, propterea quod duodecim eius latera iacent in planis duodecim pentagonorum Dodecaedri, eiusque octo anguli in octo Dodecaedri angulis residēt. In dato ergo Dodecaedro cubum descripsimus. Quod erat faciendum. a 4. primi.

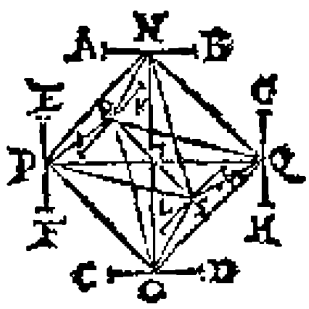
COROLLARIVM.

HINC fit, rectam, quæ subtendit vnum angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli, parallelam esse opposito lateri. Ostensum enim est, CE, ipsi AB, esse parallelam.

PROBL. 9. PROPOS. 9. 0. 9.

IN dato Dodecaedro octaedrum describere.

SVMANTVR in Dodecaedro, cui inscribendum sit octaedrum, sex illa latera, quæ opposita esse diximus in corollario 3. propos. 17. lib. 13. nimirum AB, CD; EF, GH, IK, LM, quæ bifariam secentur in N, O, P, Q, R, S. Rectæ igitur NO, PQ, RS, sectiones oppositorum laterum coniungentes æquales erunt, seque mutuo in T, centro sphæræ bifariam, & ad angulos rectos diuident, per coroll. 3. propos. 17. lib. 13. atque adeo æquales quoq; erunt earum dimidiatæ partes NT, OT, PT, QT, RT, ST. Quo circa duodecim rectæ subtendentes duodecim angulos rectos NTP, PTO, OTQ, QTN, NTR, RTP, PTS, STQ, QTR, RTO, OTS, STN, quales sunt NP, PO, OQ, QN.



b 4. primi.

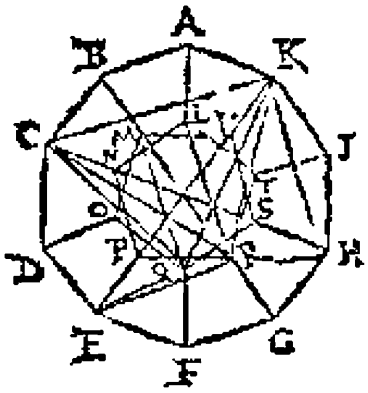
[a] 4. primi

QN, NR, RP, PS, SQ, QR, RO, OS, SN, [a] æquales erũt, cum dicti anguli æqualibus rectis contineãtur; Ac proin de octo triãgula NRP, PRO, ORQ, QRN, OSP, PSN, NSQ, QSO, æquilatera, & æqualia erunt, constituentq; octaedrum intra Dodecaedrum descriptum, cum sex anguli octaedri tangant sex latera Dodecaedri opposita, ex constructione. In dato igitur Dodecaedro octaedrũ descripsimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 10. PROPOS. 10.

IN dato Dodecaedro Pyramidem describere.

SIT Dodecaedrum contentum duodecim pentagonis ABCNL, CDEPN, EFGRP, GHITR, IKALT; MOQSV; BCDOM, DEFQO, FGHSQ, HIKVS, KABMV, LNPRT, in quo describenda sit pyramis, siue tetraedrum. Sumantur tria pẽtagona ABCNL, LAKIT, TLNPR, angulum solidum L, componentia, in quibus tres anguli C, R, K, (quorum quidem C, opponitur lateri AL, cõmuni pentagonis CAL, ALI; At vero K, lateri LT, communi pentagonis KLT, LTP; Denique R, lateri LN, communi pentagonis RLN, LNB,) rectis connectantur CK, CR, KR; & ex pũctis C, K, R, ad angulum Q, ipsi L, oppositum rectæ ducantur CQ, KQ, RQ, vt sit pyramis constructa CKRQ. Ductis autem tribus diametris Dodecaedri, seu sphæræ CH, KF, RM, & connexis rectis KH, RH, RE, QE, QM, QH; [b] quoniam Dodecaedrũ in sphera describitur; si planũ trianguli CHK, extendatur, fiet communis eius sectio cum sphæra circulus per lemma 1. propos. 10. lib. 14. Ac propterea angulus CAH, in semicirculo existens, rectus erit. Non secus ostẽ-



[b] 17. tertij decimi

[c] 31. tertij

oſtendemus rectos eſſe angulos CRH, KRE, KQE, RQM, CQH. [a] Quocirca cum in omni triangulo rectangulo quadratum lateris recto angulo oppoſiti æquale ſit quadratis laterum circa rectum angulum; ſint autē quadrata diametrorum æqualium CH, KE, RM, æqualia: Æqualia erunt quadrata rectarū CK, KH, quadratis rectarum CR, RH, & quadratis rectarum KR, RE, & quadratis rectarum KQ, QE, & quadratis rectarum RQ, QM, nec non & quadratis rectarum CQ, QH. Ablatis ergo quadratis æqualibus rectarum æqualium KH, RH, RE, QE, QM, & QH, (Hæ enim rectæ cum ſubtendant angulos pentagonorum æquales æqualibus rectis comprehenſos, [b] æquales ſunt.) æqualia remanebunt quadrata rectarum CK, CR, RK, KQ, RQ, & CQ; Ac proinde & ipſæ rectæ æquales erunt. Quare quatuor triangula CKR, CKQ, KRQ, RCQ, æquilatera ſunt, & æqualia, ideoque tetraedrum componunt CKRQ: quod cum habeat quatuor angulos C, K, R, Q, in quatuor angulis Dodecaedri, inſcriptum erit intra Dodecaedrum.

[a] 47 primi

[b] 4. primi

ALITER. [c] In propoſito Dodecaedro cubus deſcribatur; [d] & in hoc cubo pyramis, factumque erit, quod proponitur. Cum enim anguli pyramidis in angulis cubi, nec non & anguli cubi in angulis Dodecaedri reſideant; perſpicuum eſt, angulos pyramidis ſedem habere in angulis Dodecaedri. Quare pyramis in Dodecaedro deſcripta erit. Itaque in dato Dodecaedro pyramidem deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[c] 8. quintidec.

[d] 1. quintidecimi

PROBL. 11. PROPOS. 11. 0. 11.

IN dato Icoſaedro cubum deſcribere.

DESCRIBATVR in dato Icoſaedro Dodecaedrū; [e] & in hoc Dodecaedro cubus, factumq; erit, quod proponitur. Cū.n. anguli cubi reſideāt in angulis Dodecaedri; anguli vero Dodecaedri in cētris baſiū Icoſaedri collocētur; tangēt anguli cubi eadē cētra baſiū Icoſaedri: Ac propterea cubus in Icoſaedro deſcriptus erit. Quam ob rē in dato Icoſaedro cubū deſcripſimus. Qd faciēd. erat.

[e] 5. quintidec.

[f] 8. quintidecimi

PROBL.

6. 12.

PROBL. 12. PROPOS. 12.

IN dato Icoſaedro Pyramidem deſcribere.

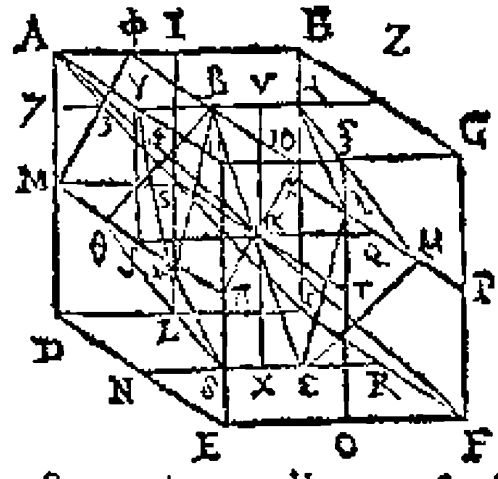
IN dato Icoſaedro [a] cubus deſcribatur, [b] & in hoc cubo pyramis; factumque erit, quod proponitur. [c] Cum enim anguli cubi tangant centra baſium Icoſaedri; [d] & anguli pyramidis angulis cubi congruant, manifeſtum eſt, angulos pyramidis attingere centra earundem baſium Icoſaedri; Ac proinde pyramidem in Icoſaedro eſſe deſcriptam. In dato igitur Icoſaedro pyramidem deſcripſimus. Quod erat faciendum.

[a] 15. quintidecimi
[b] 1. quintidec.
[c] 11. quintidec.
[d] 1. quintidec.

PROBL. 13. PROPOS. 13.

IN dato cubo Dodecaedrum deſcribere.

SIT in cubo propoſito AF, deſcribendum Dodecaedrum. Secentur ſingula latera bifariam in I, K, L, M, N, O, P, R, ϖ, ξ, Z, Y, coniunctis rectis IL, YZ, ξO, Mϖ, KP, NR, nuſquã inter ſe coeũtibus, ita vt ductæ in baſibus oppoſitis ſint inter ſe parallelæ, & à nullo puncto duæ lineæ ducantur, ſed vna duntaxat, quæ rurſus bifariam ſecentur in S, V, T, ρ, Q, X, connexis rectis ST, VX, ρQ, quæ ſe mutuo in centro κ, bifariam ſecant, & ad angulos rectos, vt in coroll. propoſ. 3. huius lib. docuimus, ſuntq; lateribus cubi, ſicut & priores ſex, æquales. Iam dimidia recta-



rectarum YZ, Mπ, ſecentur extrema ac media ratione in β, γ, θ, κ, vt ſint maiora ſegmenta, Yβ, Zγ, Mθ, πκ, ductis rectis Yρ, Yκ, βθ, βκ. Quoniam ergo Yρ, YV, dimidio lateris cubi ſunt æquales; & ρκ, ρV, ſegmenta minora rectarum æqualium YV, ρπ, æqualia quoque: [a] Sunt autem quadrata rectarum YV, ρV, tripla quadrati rectæ Yβ; Erunt & quadrata rectarum Yρ, ρκ, tripla eiuſdem quadrati rectæ Yβ. Quare, [b] cum quadratis rectarum Yρ, ρκ, æquale ſit quadratũ rectæ Yκ, [c] quod angulus Yρκ, rectus ſit; Erit & quadratum rectæ Yκ, triplum quadrati rectæ Yβ. Rurſus, quia VY, perpendicularis ad AY, Yρ, [d] recta eſt ad planum AE, per rectas AY, Yρ, ductum, rectus erit angulus ρYκ, ex defin. 3. lib 11. Ac propterea quadratũ rectæ βκ, æquale quadratis rectarum Yκ, Yβ, exiſtens, quadruplum erit quadrati rectæ Yβ. (quia nimirum quadrata rectarum Yκ, Yβ, quadrupla etiam ſunt quadrati rectæ Yβ, cum quadratum rectæ Yκ, triplum ſit oſtẽſum quadrati rectæ Yξ.) Ideoque [e] cum quadrata proportionem habeant laterum duplicatam, dupla erit recta βκ, rectę Yξ. Quadrupla enim proportio duplicata eſt duplę proportionis, vt *in his numeris* 1. 2. 4. apparet: Eſt autem & θκ, dupla ipſius ρκ, quod minora ſegmenta θρ, κρ, rectarum æqualium Mρ, πρ, æqualia ſint. [f] Erit igitur vt Yβ, ad ρκ, ita βκ, dupla ipſius Yβ, ad θκ, duplam ipſius ρκ: Eſt autem Yβ, maius ſegmentum ad ρκ, rectam minori ſegmento ρV, æqualem, vt tota ad maius ſegmentum. Ergo & βκ, ad θκ, erit vt tota ad maius ſegmentum; Ac proinde θκ, erit maius ſegmentum rectę βκ, ſectę extrema ac media ratione. Eadem ratione oſtendemus θκ, maius eſſe ſegmentum rectę βθ, extrema ac media ratione ſectę. ſi nimirum ducatur recta Yθ. Quare æquales erũt βθ, βκ, conſtituentes triangulum Iſoſceles βθκ, ſimile illi, quod ab Euclide conſtructum eſt propoſ. 10. lib. 4. vt poſtea demonſtrabimus; Ac proinde θκ, erit latus pentagoni in circulo triangulum βθκ, circumſcribente deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 11. propoſ. lib. 4.

INTELLIGATVR iam planum trianguli βθκ, extendi, (ducta per β, recta βφ, ipſi Mϖ, parallela,) per parallelas Mϖ, φ 10. vt ſit planum extenſum φπ, occurrens

[a] 4. tertii decimi.
[b] 47. primi
[c] 29. primi.
[d] 4. vndec.
[e] 47. primi
[f] 20. ſexti
[g] 15. quinti

rens diametro AC, quadrati ABCD, in puncto 3. cubi vero diametro AF, in puncto 4. & per 3. ducatur 37. recta ipsi Aφ, parallela, connectaturque MS, [a] quæ parallela est vtrique Aφ, 73. Quoniam igitur, per coroll. prop. 4. lib. 6. triangulum A73. simile est triangulo AMS; [b] ac proinde vt AM, ad MS, ita est A7. ad 73. Sunt autem AM, MS, æquales, nempe dimidia cubi latera; Erũt quoque A7. 73. æquales. Eadem ratione erit vt MA, ad Aφ, ita M7. ad 73. Est autem Aφ, maius segmentum rectæ MA, diuisæ extrema ac media ratione. ([c] quod æquales sint Aφ. Yβ. necnõ & MA, YV, dimidia cubi latera.) Igitur & 73. hoc est, 7A, maius segmentũ erit rectę M7. extrema ac media ratione sectæ; [d] Ac propterea tota MA, diuisa erit extrema ac media ratione in 7. maiusque segmentum erit M7. [e] Atqui vt M7. ad 7A, ita est S3 ad 3.A. Secta est ergo & SA, extrema ac media ratione in 3. maiusque segmentũ est S3. [f] Quia vero Sα T, parallela est ipsi Mπ; quod & recta ducta πT, æqualis & parallela sit ipsi MS; si per Sα T, planũ ducatur parallelũ plano φπ, ducto per Mπ, [g] secabũtur rectæ AS. Aπ, in easdẽ rõnes, in punctis 3. & 4. Atque idcirco, cũ AS, secta sit in 3. extrema ac media ratione, secta erit eodem modo Aα, semidiameter cubi, in 4. maiusq; segmẽtum erit α4.

a 33. primi
b 4 sexti
c 34. primi
d 5. tertij d.
e 2 sexti
f 33. primi
g 17. vnde.

IISDEM argumentis ostẽdemus, ducta diametro HF, quadrati EFGH, & diametro cubi HC, semidiametrum cubi secari in 9. pũcto extrema ac media ratione a plano φπ, vt perspicuũ est, si cubus inuertatur, vt in hac figura secunda apparet. Sunt, n. lineamẽta omnino similia lineamẽtis prioris figuræ, licet bases cubi sedes mutauerint, ita vt quadratũ AC, locũ quadrati HF; & quadratũ HF, locũ quadrati AC, obtineat in hac secũda figura. Qd tñ in prima figura, sine hac inuersione probabitur ẽt hoc modo. Ducta diametro cubi HC, in ea figu-

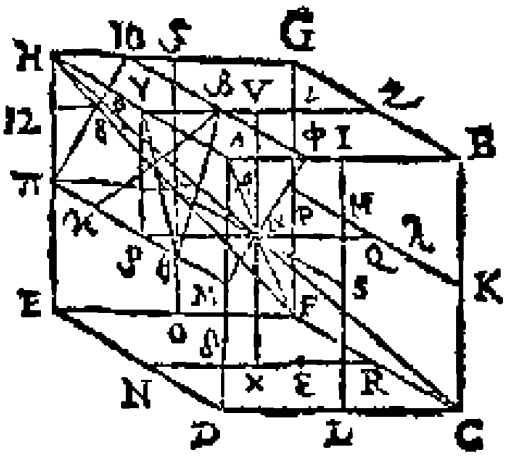
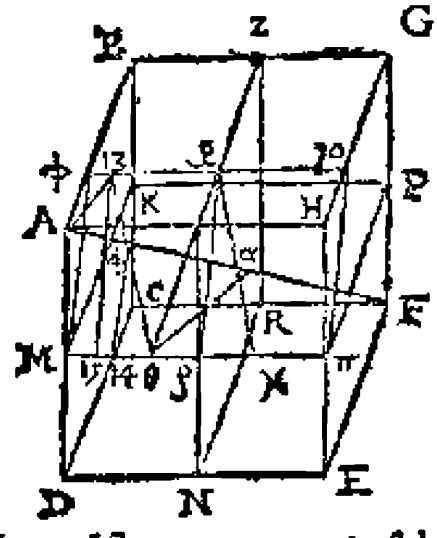


figura. (Hęc deeſt in figura, quã tñ quilibet ducere poterit) quã planũ φπ, ſecet in 9. ppe pũctũ A; intelligaturq; per rectam AH, planũ plano φϖ, parallelũ. Quoniam igitur rectæ Aα, Hα, in centro α, conueniũt, ſecanturq; planis parallelis in punctis A, H, & 4, 9; erit vt α 4, ad 4 A, ita α 9, ad 9 H. Cum ergo α A, ſecta ſit in 4, extrema & media ratione, erit quoque α H, ſimiliter ſecta. quæ quidem demõſtratio locum etiã habet in hac cubi inuerſione in ſecunda figura. Oſtendamus nunc, ſi rectæ iungantur β 4. β 4, β 9. ϰ 9. rectilineum β 4 ϰ β 9. in plano φπ, exiſtens pentagonum eſſe æquilaterum, & æquiangulũ.

[a] 17. vnde.

INVERTATVR rurſum cubus, vt quadrata ADEH, ABGH, quæ nimirũ continẽt triangulũ βϑϰ, ſiue planũ φϖ, hũc ſitũ habeãt, quẽ mõſtrat tertia hęc figura. Deinde in plano φπ, recta cõiuncta θ 4. extendãt vſque ad rectã φ 10. in punctum 13. Quoniã igitur ducta recta K P, & iũctis rectis M K, ϖ P, [b] planũ M P, parallelum eſt plano A G, (quod & rectæ PK, KM, parallelę ſint rectis GB, BA,) [c] ſecatq; cubũ bifariã; ideoq; per cẽtrũ α, trãſit, per ea, quæ in ſchol. prop. 39. lib. 11. oſtenſa ſunt; ſi per rectas α 4 A, ϑ 4. 13. planũ extẽdatur, [d] fient αϑ, A 13. cões ſectiones planorũ MP, AG, parallelæ, Ac proinde triãgula αβ 4. α 13 4. æquiãgula erũt; [e] Eritq; vt α 4. ad 4. A, ita β 4. ad 4. 13. Quare cũ α A, in 4. ſecta ſit extrema ac media ratione, vt oſtẽdimus; eodẽ modo erit ſecta θ 13. in 4. Rurſus plano NZ, per centrũ α, tranſeũti, parallelũ ducatur planũ per punctũ 4. ex ſchol. propoſ. 15. lib. 11. ſecãs planũ φπ, recta 4. 14. [f] Eſt autẽ eidẽ plano NZ, parallelũ planũ DB. [g] Rectę igitur α A, ρ M, in eaſdẽ róne ſecabuntur in pũctis 4. & 14. Quocirca & ρ M, in 14. ſecta erit extrema ac media róne minuſq; erit ſegmentũ 14. M, ideoq; æquale minori ρ ϑ, ipſius Mρ. Quare cũ ex ρ 14. maiori ſegmento ipſius



[b] 15. vnde.

[c] 32. vnde.

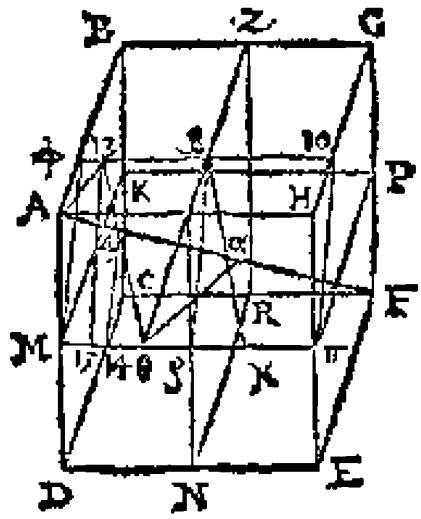
[d] 16. vnde.

[e] 4. ſexti

[f] 15. vnde.

[g] 17. vnde.

sius ρ M, auferatur ρ ϑ, minus segmentum; Erit, vt demonstrauimus ad propos. 5. lib. 13. ρ 14. diuisa in ϑ, extrema ac media ratione, maiusq; segmentum erit ρ ϑ. Postremo acta per 13. recta 13. 15. rectæ 4. 14. parallelæ



[a] secabũtur rectę ϑ 13. ϑ 15. proportionaliter; Ac proinde & ϑ 15. secta erit in 14. extrema ac media ratione, maiusque segmentum erit ϑ 14. [b] Quapropter erit vt ρ ϑ, maius segmentũ ad ϑ 14. minus, ita ϑ 14. maius ad 14. 15. minus: Vt autem ϑ 14. ad 14. 15. ita est tota ϑ 15. ad ϑ 14. maius segmentum. Igitur erit vt ρ ϑ, ad ϑ 14. ita ϑ 15. ad eandem ϑ 14 Ac propterea rectę ρ ϑ, vel ρ κ, & ϑ 15. æquales erũt. Quoniam vero planum NZ, & planum illi parallelũ per 4. 14. ductum, secantur plano ϛ ϖ. [c] erunt communes sectiones β ρ, 4. 14. parallelę, ideoque & 13 15. β ρ, parallelę erunt, [d] angulusque externus β ρ κ. interno 13. 15 ϑ, æqualis. Cum igitur & latera β ο, ρ κ, lateribus 13. 15. 15 ϑ, sint æqualia. [e] æquales erunt quoque rectę β κ. 13 ϑ; Ac proinde & earum segmenta maiora ϑ κ, ϑ 4 (Ostensum enim est ϑ κ, esse maius segmentum ipsius β κ,) æqualia erunt Eadem arte & β 4 ipsi β γ, in prima figura ostendetur æqualis, si simili situ triangulum Isosceles formetur super basim β γ. cuius vertex consistat in puncto, quod rectam IS, diuidit extrema ac media ratione. Eodemque modo eisdem ϑ κ, β γ, æquales erunt κ 9. β 9. Aequilaterum ergo est pentagonum β 4 θ κ 9; quandoquidem β γ, β κ, rectę æquales sunt, cum componantur ex minoribus segmentis linearum æqualium extrema ac media ratione sectarum, quales sunt YV, ZV, π ρ, M ρ. Sed & æquiangulum, vt mox ostendemus. Si igitur hac arte duodecim triãgula, nimirum ad singulas rectas M ϖ, YZ, NR, IL, ϛ O, KP; bina ipsi β ϑ κ, similia, & æqualia construantur (Ita enim ad M ϖ, duo huiusmodi triangula vides

β θ κ

[a] 3. sexti

[b] 9. quinti.

[c] 16. vnde.

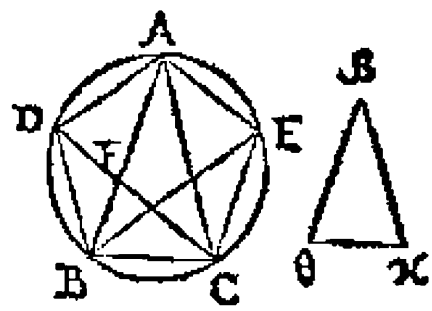
[d] 29. primi

[e] 4. primi.

βθκ, δθκ) & ipſorũ officio duodecim pentagona ipſi βγ. ξκ 9. ſimilia & æqualia fabricentur, conſtituetur Dodecaedrum, cuius duodecim quidem anguli in ſex rectis lineis Mπ, YZ, NR, IL, ξO, KP, bini nimirũ in ſingulis, octo uero reliqui in octo ſemidiametris cubi conſiſtunt, nempe in punctis, quę ipſas extrema ac media ratione diuidunt, qualia ſunt puncta γ. & 9. in ſemidiametris Aα, & Hα, ſecundæ figuræ; Ac propterea quodammodo inſcriptũ eſſe dicetur cubo huiuſmodi Dodecaedrũ, quãuis nõ proprie, cũ non omnes eius anguli vel in angulis, vel lateribus, vel deniq; in planis cubi cõſtituantur, ſed duodecim quidem in ſex planis cubi, octo vero in punctis, quæ octo ſemidiametros cubi extrema ac media ratione ſecant, reſideant. Quocirca in dato cubo Dodecaedrum deſcripſimus. Quod erat faciendum.

LEMMA

QVOD autem triangulum βθκ cuius baſis θκ. maius ſegmentum exiſtit vtriuſque lateris βθ, βκ, extrema ac media ratione diuiſi ſimile ſit illi, quod Euclides conſtruxit propoſ. 10. lib. 4. ita demonſtrabimus. Deſcribatur circa triangulum Iſoſceles AEC, quale Euclides conſtruere docet propoſ. 10. lib. 4. circulus ADBCE, diuiſiſque angulis ABC, ACB, biſariam rectis BE, CD, perficiatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum ADBCE, vt propoſ. 11. lib. 4. tradimus, ſecentque ſe mutuo rectæ AB, CD, in F. [a] *Quoniam ergo AB, in F, ſecatur extrema ac media ratione, maiuſque eius ſegmentum eſt AF, æquale lateri BC:* [b] *Erit vt AB, tota ad maius ſuum ſegmentum*

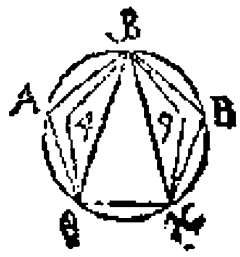


[a] 8. tertii decimi.

[b] 2. quarti dec.

tum BC, ita ♃, tota ad maius suum segmentum ♃κ; Eodemque modo, vt tota A C, ad maius segmentum CB, ita ♂, tota ad maius segmentum κ♃: Est autem quoque vt A B, ad A C, ita ♃ ♂, ad ♃ κ, vtrobique enim est proportio æqualitatis. [a] Triangula igitur ♂♃κ, ABC, proportionalia habentia latera, æquiangula sunt, æqualesque erunt anguli ♃, B; Item κ, C, & ♂, A; propterea quæ vterque angulorum θ, κ, duplus erit anguli ♂; & triangula ♂θκ, ABC, similia.

PENTAGONVM vero ♂ 4 ♃ κ 9, æquilaterum, esse quoque æquiangulum, hac ratione ostendemus. Describatur circa triangulum ♂♃κ, circulus ♂ A ♃ κ B; qui si transeat per puncta 4, & 9, perspicuum est ex ijs, quæ ad propos. 16. lib. 4. docuimus, pentagonum æquiangulum esse. Si vero non incedat per puncta 4, & 9. Describatur in circulo dicto, iuxta doctrinam propos. 11. lib. 4. pentagonum æquilaterum & æquiangulum ♂ A ♃ κ B. Quoniam igitur tam rectæ A ♃, A ♂, quam rectæ 4 ♃, 4 ♂, æquales sunt rectæ ♃κ, cum & ♂ 4 ♃ κ 9, & ♂ A ♃ κ B, pentagonum sit æquilaterū; Erunt tã duæ rectæ ♃ A, ♃ 4, quam duæ ♂ A, ♂ 4, æquales. quod fieri non posse demonstratum est propos. 7. lib. 1. Transit ergo circulus triangulo ♂θκ, circumscriptus per puncta 4, & 9. Ac proinde pentagonum ♂ 4 ♃ κ 9, æquiangulum est.



SCHOLIVM.

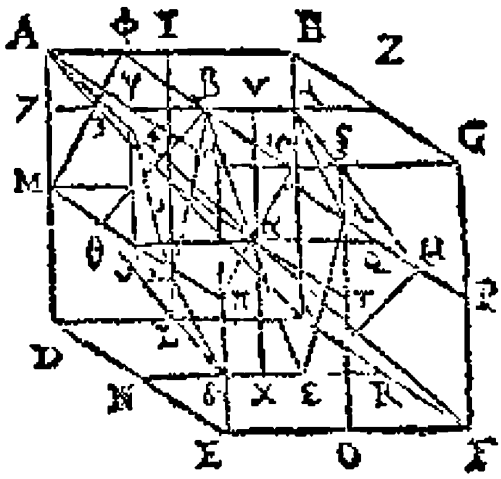
EX his colligere licebit sequentes propositiones.

DIA-

I.

DIAMETER Dodecaedri duo latera potest, ipsius scilicet Dodecaedri, & cubi, in quo Dodecaedrum describitur.

DVCATVR enim in prima figura diameter Dodecaedri βε, intelligaturq; coniuncta recta γε, [a] aequalis existens & parallela lateri cubi VX, quod & Vγ, Xε, aequales sint, & parallelae. Quoniam igitur angulus βVX, rectus est; [b] rectus quoque erit angulus βγε, ad γ, constitutus, [c] Ac proinde quadratum diametri βε, aequale erit quadratis laterum βγ, γε, nempe Dodecaedri, & cubi.



[a] 33. primi

[b] 29. primi

[c] 47. primi

II.

SI latus cubi secetur extrema ac media ratione, minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti: Maius vero segmentum latus cubi in hoc dodecaedro descripti.

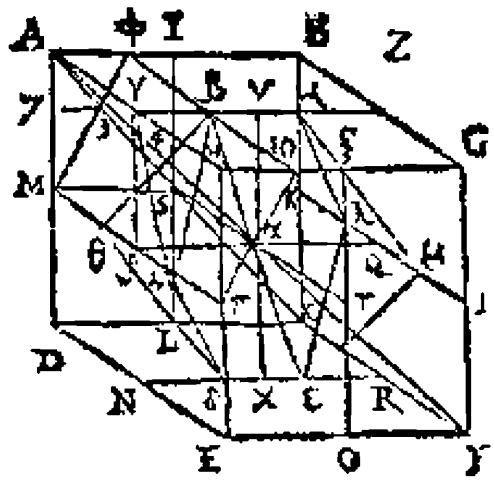
IN eadem enim prima figura, [d] cum sit vt YV, ad βV, ita YZ, dupla ipsius YV, ad βγ, duplam ipsius βV; Sit autem βV, minus segmentum ipsius YV, secta extrema ac media ratione: Erit & βγ, minus segmentū lateris cubi YZ, secti extrema ac media ratione; composita vero ex Yβ, γZ, hoc est, recta βκ, (quae dupla sunt ostensae ipsius Yβ, adeoque compositae ex Yβ, γZ, aequalis) maius segmentum. Constat autem ex constructione βγ, esse latus Dodecaedri, [e] & κζ, seu βϑ, esse latus cubi in dicto Dodecaedro descripti, cum subtendat angulum pentagoni β9κ, vel β4ϑ.

[d] 15. quinti

[e] 8. quinti dict.

III.

LATVS cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, & Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti.



NAM in prima rurſus figura, latus cubi YZ, componitur ex latere Dodecaedri βγ, in ipſo deſcripti, & ex recta compoſita ex Yβ, γZ; quæ conſtat eſſe latus Dodecaedri eidem cubo circumſcripti. Cum enim YZ, cubi latus ſubtendat angulum pentagoni Dodecaedri circa cubum deſcripti, vt perſpicuum eſt ex 8. propoſ. huius lib. a *Sit autem latus illius pentagoni maius ſegmentum lateris YZ, ſecti extrema ac media ratione. Erit βθ, exiſtens quoque maius ſegmentum eiuſdem lateris YZ, vt iam demonſtrauimus, latus Dodecaedri cubo lateris YZ, circumſcripti.*

a 8. tertij decs.

IIII.

RECTA duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur.

IN prima enim figura, recta connectens puncta β, δ, in quibus conſtituuntur duo anguli pentagonorum communi lateri βα, oppoſiti, b *æqualis eſt rectæ VX. (quod & βV, δX. æquales ſint, & parallelæ) hoc eſt, lateri cubi, in quo Dodecaedrum deſcribitur.*

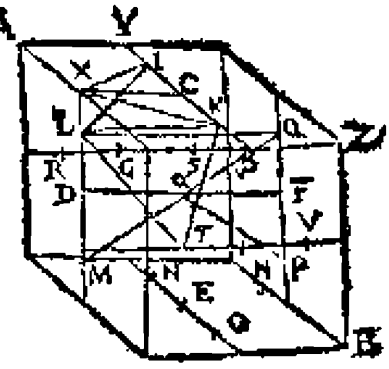
b 33. primi

PROBL

PROBL. 14. PROPOS. 14.

IN dato cubo Icosaedrū describere:

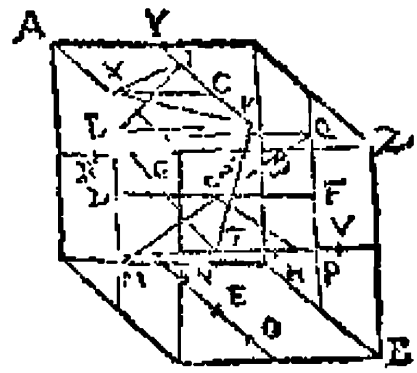
CVBVS datus, in quo describendum sit Icosaedrum, sit AB, per cuius basium cētra C, D, E F, G, H, lateribus cubi rectæ lineæ parallelæ agantur nusquā inter se conuenientes, & harum medietates extrema ac media ratione secentur, ita vt maiora segmenta prope centra sint in punctis I, K; L, M; N, O; P, Q; R, S; T, V; quorum quodlibet cum quatuor vicinioribus connectatur, vt L, cum I, K, T, & R: R, cum L, M, I, & N, &c. vt constituantur viginti triangula IKL, IKQ, LMR, LMT, NOM, NOP, PQV, PQS, ISI, KSN, TVK, TVO, ILR, ISQ, KTL, KQV, OPV, OTM, NSP, NMR; quorum priora duodecim subtenduntur duodecim cubi lateribus, posteriora vero octo eiusdem cubi octo angulis substernuntur. Cōnectantur iam rectæ XC, XI, XK. Quoniam igitur latera XC, CI, trianguli XCI, æqualia sunt lateribus XC, CK, trianguli XCK; & anguli contenti, recti, quod XC, parallela sit ipsi AY; [b] Erunt & bases XI, XK, æquales. Deinde quia linea LX, recta est ad planum AZ, per defin. 4. lib. 11. recta quoq; erit ad lineas XI, XK; Ac propterea cum latera LX, XI, trianguli LXI, æqualia sint lateribus LX, XK, triāguli LXK, & anguli contenti, recti; [c] æquales erunt bases LI, LK. Rursus [d] quoniam quadratū rectæ LI, æquale est quadratis rectarum LX, XI; Et quadratum rectæ LX quadrato rectæ IY; quadratum uero rectæ XI, quadratis rectarum XC, CI est æquale: Æquale erit quadratum rectæ LI, tribus quadratis rectarum XC, CI, IY: Sunt autem & quadrata rectarum XC, CY, æqualia, quod eorum latera sint dimidia cubi latera. Igitur quadratum rectæ LI, æquale est tribus quadratis



[a] 29. primi.
[b] 4. primi
[c] 4. primi.
[d] 47. primi

dratis rectarum CY, CI, IY: Sed hæc tria quadrata quadrupla sunt quadrati rectæ CI. (a Cum enim quadrata rectarum CY, IY, totius, & minoris segmenti, tripla sint quadrati rectæ CI, maioris segmenti; Addito quadrato rectæ CI, illis duobus, erunt tria quadrata rectarum CY, CI, IY, quadrupla eiusdē quadrati rectę CI) Quadratum ergo rectæ LI, quadruplum est quoq; quadrati rectæ CI; Ac propterea, cū eiusdem quadrati rectæ CI, quadruplum sit quadratum rectę KI, ex scholio propos. 4. lib. 2. Æqualia erunt quadrata rectarū LI, IK, ideoq; & rectæ ipsæ æquales. Æquilaterū igitur est triangulū IKL, lateri cubi AG, substratū.

a 4. tertij. cum



NON aliter ostendemus, reliqua vndecim triāgula, vndecim reliquis lateribus cubi suppositā, esse æquilatera; Atque adeo inter se æqualia, cum eorum latera IK, LM, NO, PQ, RS, TV, æqualia sint. Quoniam uero latera reliquorum octo triāgulorum, octo angulis cubi supposītorum, communia sunt dictis duodecim triangulis; vt in triangulo KTL, latus KL, commune est triangulo IKL; & latus KT, triangulo TVK; & latus TL, triangulo LMT; perspicuum est, ea quoque esse æqualia & inter se, & dictis duodecim triangulis. Quare omnia viginti huiusmodi triangula Icosaedrum component cubo inscriptum, cum eius anguli omnes duodecim in sex cubi basibus consistant, bini nimirum in singulis. Itaque in dato cubo Icosaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

SCHOLIVM.

COLLIGIMVS ex hac propositione sequentes.

I.

DIAMETER Icosaedri potest & latus Icosaedri, & cubi Icosaedrum ambientis.

DV-

DVCTA enim recta LQ, [a] quæ lateri cubi DF, parallela est, & æqualis, quod & DL, FQ, parallelæ sint, & æquales; [b] manifestum est, quadratum diametri QM, æquale esse quadratis rectarum LM, lateris Icosaedri, & LQ, lateris cubi, in quo Icosaedrũ descriptum est, [c] cum angulus MLQ, sit rectus, quod & LDF, rectus sit.

[a] 33. primi
[b] 47. primi
[c] 29. primi.

II.

BIFARIAE sectiones sex oppositorum laterum Icosaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, se se in centro Icosaedri bifariam, & ad angulos rectos secantibus.

NAM huiusmodi tres lineæ nimirum DF, CE, GH, cũ coniungant centra basium cubi oppositarum, æquales sunt lateribus cubi, sesequę per coroll propos. 2. huius lib. bifariam, & ad angulos rectos in centro cubi, quod sit α, diuidunt. Quod quidem & centrum esse Icosaedri, ita ostendetur, ducta recta αP. Quoniam latera αF, FQ, trianguli αFQ, æqualia sunt lateribus αF, FP, trianguli αFP, angulosque comprehendunt rectos, [d] æquales erunt rectæ αQ, αP. Eademque ratione æquales erunt omnes rectæ ex α, ad angulos Icosaedri producentes. Igitur α, centrum est Icosaedri.

[d] 4. primi

III.

SI latus cubi extrema ac media ratione secetur, maius segmentum latus est Icosaedri in dicto cubo descripti.

CVM enim CI, sit maius segmẽtum rectæ CY; [e] sitque vt CI, ad CY, ita KI, dupla ipsius CI, ad βY, dupla ipsius CY; [f] erit quoque KI, latus Icosaedri, segmentum maius lateris cubi βY.

[e] 11. quinti
[f] 2. quartidec.

IIII.

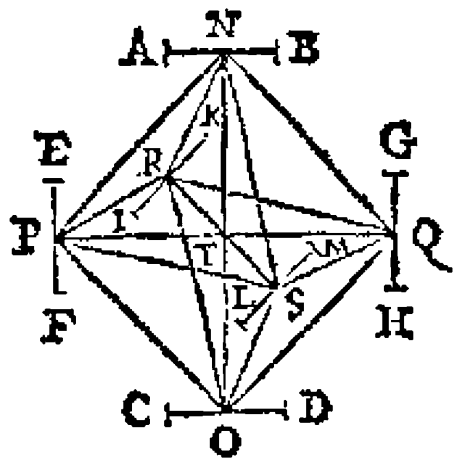
ICOSAEDRI tam latera, quam triangula opposita, inter se sunt parallela.

SI enim quorumlibet duorum laterum oppoſitorum extrema puncta duabus diametris connectantur, fient duo triangula inter ſe æqualia, angulosque alternos habentia æquales, ex 4. propoſ. lib 1. quæ quidem in centro conueniunt. Quare
a 15. unde. *quælibet latera oppoſita parallela erunt;* a *Atque idcirco, & triangulorum plana, per ipſa latera parallela ducta, inter ſe erunt parallela.*

PROBL. 15. PROPOS. 15.

IN dato Icoſaedro Octaedrum deſcribere.

EXPONANTVR dati Icoſaedri, cui inſcribendum eſt Octaedrum, ſex latera oppoſita. *AB CD, EF, GH, IK, LM*, quorum biſarias ſectiones N, O, P, Q, R, S, iungant tres rectæ NO, PQ, RS, æquales ſeſe in centro T, biſariam, & ad angulos rectos ſecantes, per ea, quæ in ſcholio propoſ. precedentis oſtenſa ſunt; ducanturque rectæ NP, NR, NS, NQ; OP, OR, OS OQ; PR, PS; QR, QS, conſtituẽtes octo triãgula SNP SPO, SOQ, SQN; RNP, RPO, ROQ, RQN. Quia igitur latera TN, TS, trianguli TNS, æqualia ſunt lateribus TN, TP, trianguli TNP, (cum ſint rectarum æqualiũ dimidia) angulosque continent rectos, vt dictum eſt; b Aequales erunt baſes NS, NP: Eodemq; modo reliquę omnes lineæ æquales erunt & hiſce duabus, & inter ſe. Octo ergo dicta triangula æquilatera ſunt, & inter ſe æqualia; Ideoq; Octaedrum conſtituunt. Quod in Icoſaedro deſcriptum eſt, cum eius anguli reſideant in biſariis ſectionibus ſex laterum Icoſaedri oppoſitorum. In dato itaq; Icoſaedro Octaedrũ deſcripſimus. Quod faciẽdum erat.



b 4. primi

CO-

COROLLARIVM

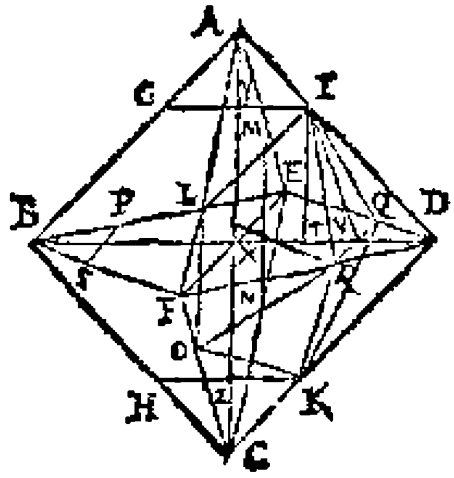
SEQVITVR hinc, idem esse centrum Icosaedri, & Octaedri in eo descripti. Quoniam sulicet rectæ NO, PQ, RS, per T, centrum Icosaedri incedentes, diametri sunt Octaedri NPOQRS, sibi inscripti. Quare T, centrum Icosaedri, vbi se intersecant, centrum quoque est Octaedri.

PROBL. 16. PROPOS. 16.

IN dato Octaedro Icosaedrum describere.

DATVM Octaedrum, in quo describendum est Icosaedrum, sit ABC*D*EF. Cũ a quolibet angulo quatuor latera exeant, sumantur à singulis bina non proxima, sed sibi e regione respondentia, hoc est, quę ad angulos quadratorum Octaedri oppositos cadunt, sumendo semper bina iuxta angulos oppositos eiusdem quadrati, qualia sunt B*A*, BC; DA, DC, iuxta angulos oppositos B, D, quadrati ABCD; AF, *A*E; CE, CF, iuxta angulos oppositos A, C, quadrati AECF: (Nã a quolibet angulo sumẽda sunt tm̃ duo latera; at vero latera AB, AD; CB, CD, quadrati ABCD, iuxta eosdẽ angulos A, C, iã sumpta fuere,) EB, ED; FD, FB, iuxta angulos oppositos E, F, quadrati *E*B*F*D; (Nã latera E*A*, EC; FC, F*A*, quadrati *A*ECF, iuxta eosdẽ angulos, E, F, iam accepta sunt,) q̃ omnia secentur extrema ac media ratione, hac lege, vt maiora segmenta sint prope angulos, a quibus egrediuntur, in duodecim punctis G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, & a singulis ad quinque proximas sectiones quinque lineæ rectæ ducantur, vt ex R, rectæ RQ, RI, RL, RO, RK, Et ex I, rectæ IQ, IR, IM, IL, IG, & sic de cæteris, quamuis non omnes ductæ sint in figura, ad euitandam linea-

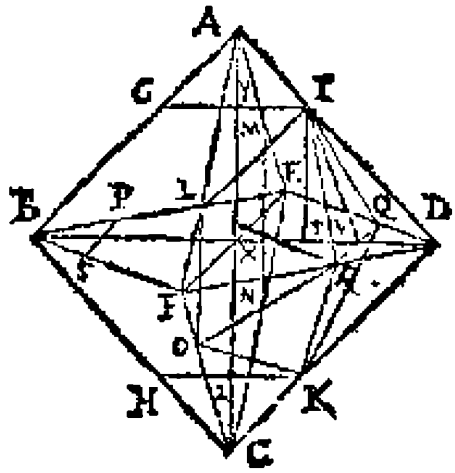
linearum confuſionẽ. Quæ autem ſint hæc quinque puncta proxima, pulchre indicat octaedrum materiale. Sunt.n. tria in lateribus reliquis tribus, quæ cum eo, in quo punctum acceptum eſt pyramidẽ conſtituunt; alia aũt duo ſunt in duobus lateribus duorũ triangulorum octaedri, quæ habent cõe illud latus, in quo punctũ acceptũ eſt. Vt qa punctũ acceptũ eſt *R*, in latere *DF*, qd cũ tribus *DE*, *DA*, *DC*, pyramidẽ cõſtituit in vertice D, & eſt cõe triãgulis octaedri *DFA*, *DFC*; ppea ex R, ad quinque pũcta horũ quinque laterum ductæ ſunt lineę rectę, & ſic de cæteris. Poſt hec, ductis tribus octaedri diametris AC, BD, EF, ſe ſe in cẽtro X, ſecantibus bifariã, & ad angulos rectos, ex coroll. 1. prop 14. lib. 13. quarũ AC, *BD*, ſecãt rectas GI, RQ, in Y, & V; connectaturq; recta IV, agaturq; IT, parallela ipſi YX Qm ergo latera DQ, DI, triãguli DQI, æqualia ſunt lateribus DR, DI; (Sunt.n DQ, *DR*, minora ſegmenta rectarum æqualium DE. DF,) & angulos cõprehendunt æquales, nẽpe triangulorũ Octaedri ADE, ADF; [a] Erunt baſes IQ, IR, æquales. Deinde cũ ſit, [b] vt BG, ad GA, ita *DI*. ad IA; [c] erit GI, rectæ BD, parallela. Eademq; ratione QR, ipſi *EF*, parallela; [d] Ac proinde vt *DI*, ad *IA*, ita XY, ad YA. Recta igitur XA, ſecta erit in Y, extrema ac media ratione Rurſus quia eſt vt AX, ad XD, ita *AY*, ad *YI*, (quod triangulum AYI, ſimile ſit triangulo AXD per coroll. propoſ. 4 lib. 6.) Eſt autem AX, ipſi XD, æqualis; Erit & *AY*, ipſi YI, æqualis. Quare YI, minus ſegmentum eſt rectæ XA. Non aliter oſtendemus AY, ipſi YG, eſſe æqualẽ; ideoq; GI, rectam, bifariã in Y; ſimiliterq; *QR*, in V, ſecari. Cum vero latera AG, AI, trianguli AGI, æqualia ſint lateribus DQ, DR, triãguli DQR, (nimirum minora ſegmenta minoribus ſegmentis æqualium rectarum) angulosq; cõprehendant rectos,



[a] 4. primi.
[b] 2. quarti 6. idem.
[c] 2. ſexti
[d] 4. ſexti

ctos, nempe quadratorum ABCD, DEEF.[a] Aequales ei ſũt baſes GI, QR. Eadem ratione his æquales oſtendẽtur rectæ HK, PS, MN, LO, quæ nimirum ſubtẽdunt reliquos quadratorum ABCD, DEEF, AECF, angulos, in ſingulis videlicet quadratis binos oppoſitos, cõplectunturq; duo ſegmenta laterum minora. Deinde quia YI, minus ſegmentum ipſius XA, oſtenſum, maius eſt ſegmẽtum maioris ſegmenti XY, diuiſi extrema ac media ratione, vt demõſtrauimus ad prop. 5. lib. 13. Eſt autẽ XY, rectę XV, æqualis. (cum ambæ ſint maiora ſegmenta æqualium rectarum XA, XD,) & YI. rectæ XT; erit XT, maius ſegmẽtum ipſius XV, & idcirco TV, ſegmẽtum minus eiuſdem XV. Quare quadrata rectarum XV, totius, hoc eſt, ipſius IT, (cum & recta IT, æqualis ſit ipſi XY) & TV, minoris ſegmẽti,[d] tripla ſunt quadrati rectę XT, maioris ſegmenti; Atq; adeo quadratum rectæ IV,[e] æquale exiſtens quadratis rectarum IT, TV, triplum eſt eiuſdẽ quadrati rectæ XT, hoc eſt, rectæ RV, quæ æqualis eſt ipſi XT, ſeu ipſi YI, ex demonſtratis, cum RV, YI, dimidia ſint æqualium rectarum RQ, GI. Addito igitur quadrato rectæ RV, ipſi quadrato rectæ IV; erunt quadrata rectarũ IV, VR, quadrupla quadrati rectæ RV: At quadratis rectarũ IV, VR, æquale eſt quadratum rectæ IR,[g] qđ anguli IVR, IVQ, comprehenſi lateribus æqualibus IV, VR; IV, VQ, & ſubtẽſi baſibus æqualibus IR, IQ, æquales ſint, ideoq; recti. Ergo & quadratum rectæ IR, quadruplum eſt quadrati rectæ VR; Ac propterea cum eiuſdem quadrati rectę VR, quadruplum quoq; ſit per ſcholium prop. 4. lib. 2. quadratum rectę QR; Æqualia erunt quadrata rectarum IR, QR, ideoque & rectæ ipſæ æquales: Erat autem IQ, ipſi IR, æqualis. Triangulum igitur æquilaterum eſt IQR. Non ſecus demonſtrabimus, æquilatera eſſe triãgula ſimilem ſitum cum IQR, habentia, nempe KQR; GIL, GIM; GPS, HPS; NHK, OHK; RLO, SLO; PMN, QMN; atque adeo triangulo IQR, æqualia, cum latera omnium ſint æqualia inter ſe. quod tamen hac etiam ratione demonſtrabimus. Cum enim in quolibet horum triangulorum vnum latus ſubtendat angulum rectum quadrati comprehenſum duobus ſegmentis

[a] 4. primi.
[b] 34. primi
[c] 34. primi
[d] 4. tertij de.
[e] 47. primi.
[f] 47. primi.
[g] 8. primi.



mentis minoribus laterum octaedri; duo vero reliqua ſubtendãt duos æquales angulos triangulorum æquilaterorum cõtentos ſingulos duobus ſegmentis laterũ Octaedri, maiore & minore: Erunt latera vnius triãguli lateribus aliorum æqualia; ac propterea & ipſa triangula æqualia, per corollarium propoſitionis 8. lib. 1. Vt in triangulis IQR, GIL, latera RQ, GI, ſubtendentia angulos rectos QDR, GAI, quadratorum DEBF, ABCD, comprehenſos minoribus ſegmentis DQ, DR; AG, AI, æqualia ſunt. Eodem modo latera IQ, IL, equalia erunt, cum ſubtendant angulos æquales IDQ, IAL, triangulorum æquilaterorum ADE, ADF, quorũ ille continetur ſegmentis laterum Octaedri DI, DQ, maiore & minore; hic vero ſegmentis AL, AI, maiore & minore quoque. Non ſecus latera IR, GL, æqualia erũt. Aequalia igitur ſunt triangula IQR, GIL, per corollarium propoſ. 8. lib. 1. Atqui IQR, oſtenſum eſt eſſe æquilaterum; Ergo & GIL, æquilaterum eſt. Eademque eſt ratio de cæteris habenda. Atque hæc quidem duodecim triangula ſupponuntur ſex angulis Octaedri, bina videlicet ſingulis. Ex his conſequitur reliqua octo triangula octo baſibus Octaedri impoſita, videlicet GMP, in AEB; HNP, in BEC; KNQ, in CED; IMQ in AED; GLS, in AFB; HOS in BFC; KOR, in CFD; ILR, in AFD, æquilatera quoque eſſe, & prædictis æqualia, cum horũ latera cum illorum lateribus communia ſint. Viginti ergo hæc triãgula, quorum quina in ſingulis ſectionibus laterũ octaedri conueniunt ad conſtitutionem anguli ſolidi, (vt vides in quinque RQI, RII, RLO, ROK, RKQ, ſolidum angulum R, componentibus.) Icoſaedrum componunt Octaedro inſcriptum cum Icoſaedri duodecim anguli duodecim ſectiones laterum Octaedri poſſideant. In dato itaq; Octaedro, &c. Quod faciendum erat.

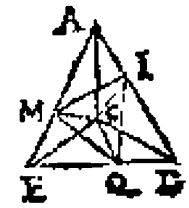
Co-

COROLLARIVM I.

COLLIGITVR ex demonſtratis, ſi duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmentum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; Rectam connectentem dictas ſectiones dupium poſſe minoris ſegmẽti. Cum. n. in triãgulo æquilatero ADE, maius ſegmentum lateris AD, ſit DI, & DQ, minus lateris DE; Sit autem recta IQ, oſtenſa æqualis rectæ GI, quæ duplum poteſt minoris ſegmenti AI, cum quadratum rectæ GI, æquale ſit duobus quadratis æqualibus rectarum æqualium AG, AI: Perſpicuum eſt, & rectam IQ, duplum poſſe eiuſdem ſegmenti minoris AI. * 47. primi.

COROLLARIVM II.

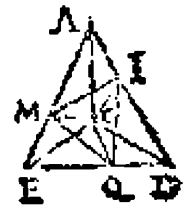
RVRSVS fit, cum octo Icoſaedri baſes collocatæ ſint in octo baſibus Octaedri, idem eſſe centrum baſis Octaedri, & Icoſaedri. Suſcipiatur namq; Octaedri ſuperioris triangulum AED, in quo collocatum eſt triangulum Icoſaedri IMQ, ſitq; C, centrum trianguli AED, ex quo rectæ educãtur CA, CE, CD; CI, CM, CQ. Quoniam igitur latera CA, AM, trianguli CAM, æqualia ſunt lateribus CE, EQ, trianguli CEQ, (quod hæc latera ſint ex centro, & maiora ſegmenta æqualium rectarum) angulosque comprehendunt æquales, nempe dimidios angulorum trianguli æquilateri, vt in ſcholio propoſ. 12. lib. 13. oſtẽdimus; Erũt baſes CM, CQ, æquales. Non ſecus demonſtrabimus CI, æqualem eſſe lineis CM, CQ, Quare C, centrum erit trianguli IMQ.



CO-

COROLLARIVM III.

NON difficile eſt denique ex dictis colligere, idē centrum eſſe Octaedri, atque ſibi inſcripti Icoſaedri. Ductis enim ex X, cētro Octaedri, duabus rectis ad quoſcunque duos angulos Icoſaedri, nimirum rectis XG, XO, ad angulos G, & O; cum latera XA, AG, trianguli XAG, æqualia ſint lateribus YF, FO, trianguli XFO, (Nā XA, XF, ſemidiametri ſunt Octaedri, & AG, FO, ſegmenta minora laterū æqualium Octaedri ſectorū extrema ac media ratione) angulosque complecta ſint æquales, ſemirectos videlicet; (cū AC, EF, diametri ſint quadratorū ABCD, EAFC; ac proinde, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 34. lib. 1, angulos quadratorum biſariam ſecent) æquales erunt & baſes XG, XO. Eodemque argumēto oſtendentur omnes aliæ rectæ ex X, ductæ ad angulos Icoſaedri æquales. Igitur X, centrum Octaedri, centrum quoque eſt Icoſaedri.



[a] 4. primi.

PROBL. 17. PROPOS. 17.

IN dato Octaedro Dodecaedrum deſcribere.

[b] 16. quintidecimi. [c] 5. quintidec.

INSCRIBATVR dato Octaedro Icoſaedrū; & in hoc Icoſaedro Dodecaedrum, factumq; erit, quod iubetur. Cum enim Dodecaedri anguli conſtituantur in centris baſium Icoſaedri, quarum octo concētricæ ſunt baſibus Octaedri, ex coroll. 2. propoſ. 16. huius lib. Manifeſtum eſt, Dodecaedri octo angulos in eiſdem cētris octo baſium Octaedri, reliquos autē duodecim in centris duodecim baſium Icoſaedri, quarum binæ ſingulis ex angulis Octaedri ſupponuntur, reſidere; Ac propterea Dodecaedrum Octaedro inſcriptum eſſe dicetur, quan-

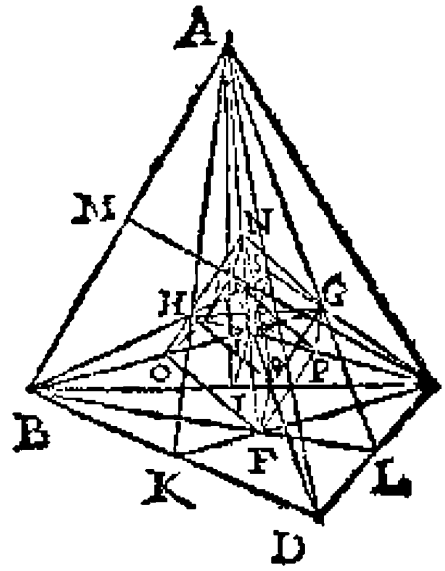
quanquam non proprie, vt ex defin. 31. lib. 11. apparere potest. Quapropter in dato Octaedro Dodecaedrum descripsimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 18. PROPOS. 18.

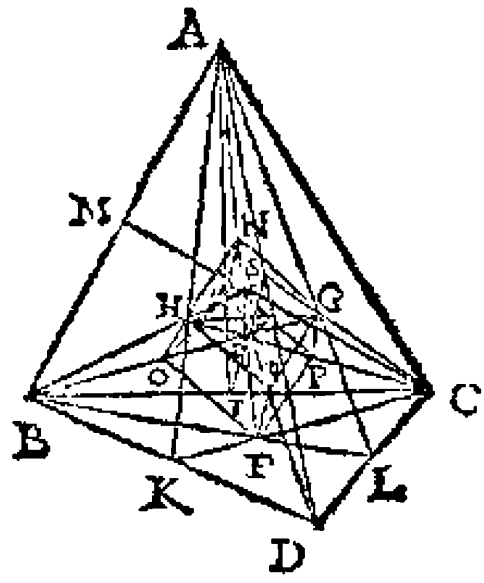
IN data Pyramide cubũ describere.

DETVR pyramis ABCD, in qua cubus iubetur describi, sitque eius centrum E, per quod ex quatuor angulis Pyramidis rectę educantur AI F, BEG, CEH, DEI, quæ cadent in centra basium oppositarum F, G, H, I, eruntque perpendiculares ad easdẽ bases ECD, ACD, ABD, ABC. Per hæc centra porro ex angulis A, B, C, rectæ ducantur AHK, AGL, AIT, BFL, BHS, CIM, CFK, CGS, secantes bases oppositas BD, CD, AB, AD, BC, bifariam, & ad angulos rectos, ex scholio propos. 12. lib. 13. in punctis K, L, M, S, T. Secentur quoque rectæ ex solidis angulis p centrum E, demissę AF, BG, CH, DI, bifariam in N, O, P, Q, punctis; quorum quodlibet cum tribus proximis centris basium (centris, inquam, basium ipsam lineam, in qua punctum est, circumstantium, ita vt relinquatur centrum illius basis, in quam perpendicularis cadit.) rectis lineis cõiungãtur, vt N, cũ G, H, I; O, cũ F, H, I; P, cũ F, G, I; & Q, cũ F, G, H. Dico solidũ NF, contẽtum quadrilateris NO, NP, NQ, FG, FH, FI, cubũ esse. Cũ. n. latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia sint lateribus AF, FL, triãguli AFL, (qđ FK, FL, cũ ppendiculares sint ad BD, CD, ex cẽtro F, ductæ ostẽdãt æquales distãtias rectarũ æqualium

a 15. quarti dec.



æqualium BD, CD, a centro F, angulosque contineant rectos, ex 3. defin. lib. 11. [a] Aequales erunt & bases AK, AL, & anguli KAF, LAF. Rursus quia latera AN, AH, trianguli ANH, æqualia sunt lateribus AN, AG, triãguli ANG, (sunt enim AH, AG, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualiũ ABD, ACD) angulos item comprehẽdunt æquales, vt demonstrauimus; [b] Aequales erunt bases NH, NG. Haud secus ostendentur æquales rectæ QG, QH, si rectæ ducantur DG, DH, necnon & reliquæ, cum omnes subtendant æquales angulos æqualibus lateribus comprehẽsos; vt perspicuum est. Si.n. recta ducatur FT, cũ latera AF, FT, æqualia sint lateribus AF, FK. (Sunt namque FT, FK, distantiæ rectarum æqualium BC, BD, a centro) & anguli contenti recti, ex defin. 3. lib. 11. Aequales erunt anguli TAF, KAF. Ac proinde cum latera AN, AI, æqualia sint lateribus AN, AH; (Sunt enim AI, AH, semidiametri triangulorum æquilaterorum æqualiũ ABC, ABD;) angulosque contineant æquales: [c] Aequales erunt bases NI, NH, &c. Sunt igitur sex dicta quadrilatera, æquilatera. Ostendamus iam, ipsa plana esse, atque rectangula, vt tandem quadrata esse concludamus, atque adeo componere cubum NF.



[a] 4. primi.

[b] 4. primi.

[c] 4 primi.

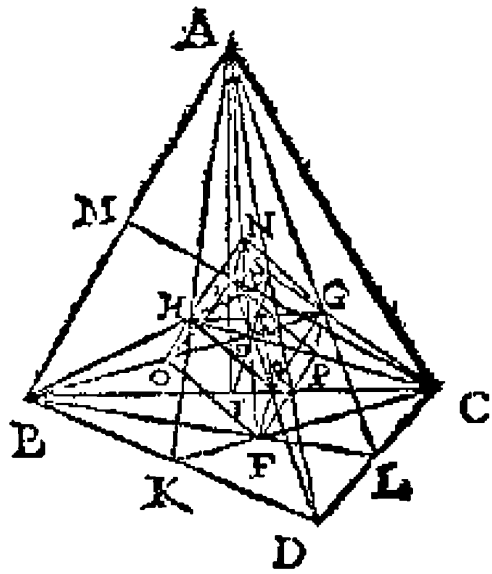
ASSVMATVR quadrilaterum NQ, ductis rectis GH, NQ. quoniam in pyramide latera BC, AD, opposita sunt, hoc est, non coeuntia in aliquo puncto; si eorum puncta media S, & T, coniungantur recta ST, erit ea diameter octaedri in pyramide descripti, vt constat ex figura propos. 2. huius lib. Nam punctum S, huius figuræ respondet puncto H, illius, & punctum T, puncto F, cum

F, cum & in illa ſint latera oppoſita, ſiue non cocuntia BC, AD. Quocirca cum idem ſit centrum pyramidis & Octaedri in ipſa deſcripti, vt mox demonſtrabimus, tranſibit ST, per E, centrum pyramidis, æqualesque erunt ES, ET, nempe ſemidiametri Octaedri. Deinde quia BS, CS, perpendiculares ſunt ad AD, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. [a] erunt HS, GS, ex centris H, & G, tertiæ partes perpendicularium BS, CS. Quare latera BS, CS, trianguli BSC, proportionaliter ſecantur, [b] atque idcirco HG, parallela eſt lateri BC, ſecatq; latera TS, CS, trianguli TSC, (quod quidem pars eſt trianguli BSC,) proportionaliter; ideoque & SR, tertia pars eſt ipſius ST; Ac proinde duæ tertiæ partes dimidiæ SE. Rurſus [c] quia DI, perpendicularis eſt ad triangulum ABC; erit EI, tertia pars ſemidiametri DE, ex coroll. 2. propoſ. 13. lib. 13. hoc eſt, qualium partium 3. ponetur DE, talium 1. erit EI, ac proinde talium 4, recta DI, ideoq; eius dimidium DQ, earundē partium 2. Quam ob rem reliqua EQ, talium partium erit 1. atque idcirco EQ, tertia pars erit ipſius DE. Eadē ratione EN, tertia pars erit ipſius AE; Ac propterea, cum latera DE, AE, trianguli AED, proportionaliter ſecentur, [d] recta NQ, parallela erit lateri AD, ſecabitque latera ES, ED, trianguli DES, (quod quidem pars eſt triāguli AED,) proportionaliter, ideoque, cum EQ, ſit tertia pars ipſius DE; tertia pars erit ER, ipſius SE; Ac proinde SR, duæ tertię partes eiuſdem SE. Quoniam igitur vtraque HG, NQ, ex SE, duas tertias partes abſtulit, in eodem puncto R; ſecabitur SE, a rectis HG, NQ; Atque idcirco & ipſæ HG, NQ, in eodem ſe ſe puncto interſecabunt. [e] Quare in eodem ſunt plano, propterea quæ & rectæ HQ, QG, GN, NH, in eodem cum ipſis plano. Planum igitur eſt quadrilaterum NQ. Eademque eſt ratio de cæteris quinque. Quod autem & rectangulum ſit, nunc demonſtremus.

CVM oſtenſa ſit HG, ipſi BC, parallela, atque adeo triangulum SHG, ſimile triangulo SBC, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. [f] Erit vt SH, ad HG, ita SB, ad BC; & permutando, vt SH, ad SB, ita HG, ad BC: Eſt autem SH, tertia pars ipſius SB: igitur & HG, tertia pars erit late-

[a] 18. quarti decimi.
[b] 2. ſexti.
[c] 5. quarti decimi.
[d] 2. ſexti
[e] 2. vndec.
[f] 2. ſexti

ris BC. Haud ſecus oſtendemus NQ, tertiam eſſe partem lateris AD. Cum ergo latera BC, AD, ſint æqualia, erunt & eorum tertiæ partes HG, NQ, æquales. Ac proinde cum ſubtendantur æqualibus lateribus HN, GN; GQ, HQ; NG, QG; NH, QH; [a] æquales erũt quatuor anguli, HNG, NGQ, GQH, QHN. Quocirca cũ ipſi ſint quatuor rectis æquales, vt oſtendimus ad 32. lib. 1. recti erunt; ideoq; quadratum erit NQ. Eademque ratione quadrata erunt reliqua quadrilatera; Ac propterea cubum conſtituent: qui ideo pyramidi dicetur inſcriptus, licet improprie, quod quatuor eius anguli F, G, H, I, in centris quatuor baſium pyramidis, quatuor vero reliqui N, O, P, Q, in biſariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis ad eius baſes ductarum reſideant, vt conſtat.



a 8. primi.

ALITER. In data pyramide deſcribatur octaedrum, & in hoc octaedro cubus; factumque erit, quod iubetur. Quoniam enim octo anguli cubi ſtatuuntur in cẽtris octo baſium octaedri, quarum quatuor ſunt in quatuor baſibus pyramidis, vt conſtat ex prop. 2. huius lib. habentque eadem centra cum ipſis, vt mox oſtendemus; fit, vt quatuor anguli cubi reſideant in centris quatuor baſium pyramidis, quemadmodum etiam in priori demõſtratione dictum eſt. Rurſus quia reliquæ quatuor baſes octaedri parallelæ ſunt baſibus pyramidis, vt conſtat ex figura propoſ. 2. huius lib. (b cum enim rectæ EG, EH, parallelæ ſint rectis BC, BD; c erunt quoque triangula EGH, BCD, per illas rectas ducta, inter ſe parallela, & ſic de cæteris.) fit, vt perpendiculares ab angulis pyramidis in baſes oppoſitas demiſſæ, ſint quoque ad illas qua-

b 2. ſexti.
c 15. vnde.

quatuor reliquas baſes octaedri perpẽdiculares, ex ſcholio prop. 14 lib. 11. Quare cũ prædictæ baſes abſcindant ex pyramide pyramides ſimiles toti, cadent illæ perpendiculares in centra dictarum baſium, quemadmodum & in centra baſium totius pyramidis cadunt. [a] Et quia dictæ quatuor baſes octaedri diuidunt illas perpendiculares proportionaliter cum lateribus pyramidis, hoc eſt, bifariã; efficitur, vt reliqui quatuor anguli cubi ſtatuantur in mediis punctis quatuor perpendicularium, veluti prior demonſtratio docuit. Conſtat ergo cubum in pyramide eſſe deſcriptum, vt prius. In data itaque pyramide cubum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

[a] 17. vnde.

COROLLARIVM I.

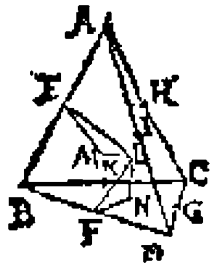
CONSTAT ex his, idem eſſe centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. Nam diametri cubi NF, OG, PH, QI, cum ſint dimidiæ partes perpendicularium ex angulis pyramidis per eius centrum ad baſes demiſſarum per E, centrum pyramidis tranſeunt.

COROLLARIVM II.

INFERTVR quoque, rectam, quæ coniungit bifarias ſectiones oppoſitorũ laterum pyramidis, tranſire per centrum pyramidis, triplamq; eſſe lateris cubi in pyramide deſcripti. Cum enim ER, ex E, centro cubi, in R, centrum baſis GNHQ, ducta dimidium ſit lateris cubi, vt conſtat; Recta RS, dupla ipſius ER, æqualis erit lateri cubi. Cum igitur RS, oſtenſa ſit tertia pars ipſius ST; perſpicuum eſt, rectam ST, coniungentem S, & T, bifarias ſectiones laterum oppoſitorum pyramidis AD, BC, tranſire per centrum pyramidis, triplamque eſſe lateris cubi RS.

LEMMA.

IDEM autem esse centrum Pyramidis, & Octaedri in ea descripti, idemque centrum basis pyramidis, & basis octaedri in ea descripti, ita demonstrabimus. Sit primum pyramis ABCD, cuius omnia sex latera bifariã secẽtur in E, F, G, H, I, K; & ex L, cẽtro Pyramidis in bases ABD, BCD, perpendiculares demittantur LM, LN; quæ in centra circulorum dictas bases circumscribentium cadent, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. Coniunctis autem rectis LE, EM, LF, FN; quoniã latera LM, ME, triãguli LME, æqualia sunt lateribus LN, NF, trianguli LNF, (cum enim circuli bases ABD, BCD, circumscribentes sint æquales, æqualiter distabunt ipsi a centro L, per lemma 2. propos. 10. lib. 14; Ac propterea eorum distantiæ LM, LN, æquales erunt. Sic quoque æquales erunt ME, NF, distantiæ rectarum æqualium AB, BD, a centris M, & N, circulorum æqualium) angulosque comprehendunt rectos per defin. 3. lib. 11.

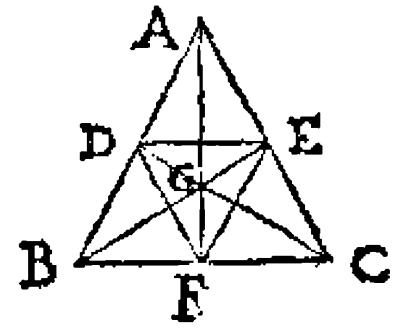


14. primi. *Æquales erunt rectæ LE, LF. Eademque ratione hicce æquales erunt, & interse rectæ LG, LH, LI, LK. Quare cum anguli Octaedri in pyramide descripti constituantur in punctis E, F, G, H, I, K, vt ex 2. propos. huius lib. constat: Erit L, centrum Octaedri, cum ab eo omnes lineæ cadentes in eius angulos sint æquales. Cũ igitur & L, centrum fuerit pyramidis; idem erit centrum pyramidis & octaedri in ea descripti.*

SIT deinde in basi pyramidis ABC, basis octaedri DEF, quæ secabit illius latera bifariam, vt patet

ex

ex propoſ. 2. huius lib. ſit autem G, centrum trianguli ABC, a quo ad angulos vtriuſque baſis rectæ ducantur. Quia igitur latera AG, AD, lateribus BG, EF, æqualia ſunt, angulosq; continẽt æquales, nimirũ ſemiſſes angulorum æqualium trianguli æquilateri, erunt & baſes GD, GF, æquales: Eademque ratione erit GE, vtrique GD, GF, æqualis. Igitur G, centrum eſt trianguli DEF. quod eſt propoſitum.

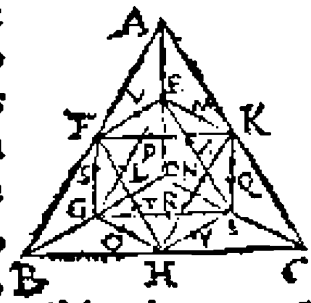


[a] 4. primi

PROBL. 19. PROPOS. 19.

IN data pyramide Icoſaedrum deſcribere.

DATAE Pyramidi ABCD, [b] inſcribatur octaedrũ EFGHIK, cuius omnia duodecim latera ſecentur extrema ac media ratione, hac lege, vt bina ſumãtur ex ſingulis angulis ſibi reſpõdentia, hoc eſt, in angulos oppoſitos quadratorum octaedri cadentia, vt in propoſ. 16. huius lib. diximus, qualia ſunt EG, EK; HK, HG; KF, KI; GI, GF; FH, FE; IE, IH, in pumctis L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y. Nam ſi quodlibet horum pũctorum cum quinque proximis coniunxerimus lineis rectis, vt M, cum V, L, X, P, & Q, &c. deſcriptum erit Icoſaedrũ in dicto octaedro, vt cõſtat ex prop. 16. huius lib. habẽs oẽs duodecim angulos in duodecim pfatis ſectionibus duodecim laterũ octaedri. Cũ ergo hæc ipſa latera octaedri in planis baſiũ Pyramidis ſint ducta; manifeſtũ



[b] 2. quintidec.

eſt, duodecim angulos Icoſaedri in planis baſiũ pyramidis cõſtitui, ternos ſcilicet in ſinguli quod & terna latera octaedri in ſingulis baſibus pyramidis ducta ſint. Nã in baſi ABC, exiſtunt latera FH, HK, KF; In ABD, latera EF, FG, GE; In BDC, latera GH, HI, IG; In ADC, denique latera IK, KE, EI. Quare dictum Icoſaedrum in pyramide deſcriptum erit, per defin. 31. lib. 11 cuius quidem quatuor baſes MXQ, KOY, LSV, NPT, in quatuor baſibus Pyramidis exiſtunt, vt cõſtat. In data igitur Pyramide Icoſaedrũ deſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROBL. 20. PROPOS. 20.

IN data Pyramide Dodecaedrum deſcribere.

[a] 19. quintidec.

[b] 5. quintidec.

[c] 8. quintidec.

[d] 18. quintidecimi.

PYRAMIDI datæ[a] inſcribatur Icoſaedrum, [b] & in hoc Dodecaedrũ habens viginti ſuos angulos in centris viginti baſium Icoſaedri; Factumque erit, quod iubetur. Cum enim quatuor baſes Icoſaedri exiſtant in quatuor baſibus pyramidis, vt in præcedenti propoſ. diximus; cõſiſtẽt quatuor anguli Dodecaedri dicto icoſaedro inſcripti in quatuor baſibus pyramidis, nempe in earum centris. Sunt. n. dictæ quatuor baſes Icoſaedri quatuor baſibus Pyramidis concentricæ, vt conſtat ex 2. coroll. propoſ. 16. huius lib. Deinde[c] quia cubus Dodecaedro inſcriptus octo ſuos angulos in octo angulis Dodecaedri collocat: Item cubus pyramidi inſcriptus, [d] quatuor angulos in centris baſium pyramidis, de quibus iam dictũ eſt, quatuor autem reliquos in bifariis ſectionibus perpendicularium ex angulis pyramidis in baſes demiſſarum conſtituit; collocabuntur quatuor anguli Dodecaedri, cum his quatuor angulis cubi conuenientes, in eiſdem bifariis ſectionibus perpendicularium dictarum: ſuperſunt autem duodecim anguli Dodecaedri, quorum bini ſingulis lateribus Pyramidis ſupponentur; Atque adeo dictũ Dodecaedrũ deſcriptũ eſſe dicetur in pyramide propoſita, etiam ſi non proprie. Quam ob rẽ in data Pyrami-

de

de Dodecaedrum deſcripſimus. Quod faciendum erat.

PROBL. 21. PROPOS. 21. 13.

IN dato ſolido regulari ſphæram deſcribere.

EX centro ſphæræ datum ſolidum cõplectentis ad ſingulas baſes perpendiculares demittantur, quæ ex corol. lemmatis 1. propoſ. 10. lib. 14. cadent in centra circulorum baſes circumſcribentium, ideoque æquales erunt, quod dicti circuli, æquales cum ſint, æqualiter a centro diſtent, ex lemmate 2. eiuſdem propoſ. Quapropter ſphæra, cuius ſemidiametri ſunt præfatæ perpendiculares æquales, in ſolido deſcripta erit, cum eius ſuperficies conuexa ſingulas baſes in earum centris contingat.

SCHOLIVM.

ITAQVE, cum quodlibet quinque ſolidorum regulariũ in quatuor reliqua inſcribatur, vt ſint in vniuerſum viginti inſcriptiones; vnum duntaxat Dodecaedrum improprie deſcribitur in cubo, octaedro, atque pyramide, vt perſpicuum eſt ex propoſ. 13. 17. & 20. huius lib. Similiter vnus tantummodo cubus non proprie in pyramide deſcribitur, vt ex propoſ. 18. huius lib. eſt manifeſtum. Nam, vt proprie ſolidum aliquod in ſolido dicatur deſcribi, neceſſe eſt, omnes angulos ſolidi inſcripti cõſtitui vel in angulis, vel in lateribus, vel denique in planis, ſiue baſibus ſolidi, cui inſcribitur, vt defin. 31. lib. 11. expoſuimus: quæ quidem conditio Dodecaedro, ſi deſcribatur in cubo, octaedro, & Pyramide; nec non & cubo, ſi deſcribatur in Pyramide, non conuenit.

CÆTERVM inter omnia quinque ſolida regularia, vnum octaedrum reliqua quatuor mutuo ſibi inuicem ſuſcipit inſcripta. a In octaedro enim deſcribitur Icoſaedrum conſtituens duodecim ſuos angulos in duodecim pũctis, quibus duodecim latera octaedri extrema ac media ratione ſecãtur. Deinde b Icoſaedro imponitur Dodecaedrũ, q eidẽ octaedro in-

a 16. quinti decimi

b 5. quinti decimi

scriptum est, vt constat ex propos. 17. huius lib. Post hæc in Dodecaedro describitur cubus, cuius octo anguli, cum octo angulis Dodecaedri conuenientes, centra basium octaedri possident; ac propterea & cubus ipse in octaedro descriptus est. Denique in cubo Pyramis includitur, quæ ideo in octaedro dicetur esse descripta, quod eius anguli quatuor, cum quatuor angulis cubi conuenientes, in centris quatuor basium octaedri resideant. Hoc autem priuilegium reliquis solidis regularibus denegari, perspicuum est ex dictis.

a 8. quintidecimi
b 1. quintidecimi

NEQVE vero prætereundum est, Dodecaedrum, sibique inscriptum cubum, & huic cubo inscriptam pyramidem, eadem sphæra comprehendi. Cum enim quatuor anguli pyramidis ex octo angulis cubi quatuor possideant, conueniantque omnes anguli cubi cum octo angulis Dodecaedri; liquido constat, sphæram Dodecaedro circumscriptam complecti quoq; cubum atque pyramidem, cum sphæræ illius superficies per horum solidorum angulos incedat.

c 1. quintidecimi.
d 8. quintidec.

PARI ratione ex dictis manifestum est, Dodecaedrum, cubum, atque Pyramidem similiter inscribi Icosaedro, octaedro, & Pyramidi. Illorum enim anguli in horum basium centris constituuntur, vt demonstratum est: In centris quidem, basium Icosaedri, propos. 5. 11. & 12. In centris vero basium octaedri, propos. 17. 4. & 6. In centris denique basium pyramidis propos. 20. & 18. huius lib.

VIGINTI porro prioribus huius lib. propositionibus omnes delineationes inscriptionesve quinque solidorum regularium, vnius in alio, quotquot excogitari possunt, absoluimus, cum in quolibet reliqua quatuor designauerimus. In pyramide enim Octaedrum, cubum, Icosaedrum, atque Dodecaedrum, propos. 2. 18. 19. 20: In octaedro vero, Pyramidem, cubum, Icosaedrum, & Dodecaedrum, propos. 6. 4. 16. 17. In cubo deinde Pyramidem, Octaedrum, Icosaedrum, ac Dodecaedrum, propos. 1. 3. 14. 13. In Icosaedro autem, pyramidem, Octaedrum, cubum, atque Dodecaedrum, propos. 12. 15. 11. 5. In Dodecaedro denique, Pyramidem, Octaedrum, cubum, & Icosaedrum propos. 10. 9. 8. 7. descripsimus. At vero posteriori vnica propositione, qua arte in quouis solido regulari sphæra depingatur, docuimus.

FINIS ELEMENTI QVINTIDECIMI.

ELEMEN-

ELEMENTVM SEXTVMDECIMVM,

Quo variæ ſolidorum regularium ſibi mutuo inſcriptorum, & laterum eorundem comparationes explicantur, a Franciſco Fluſſate Candalla adiectum, & de quinque corporibus

LIBER TERTIVS.

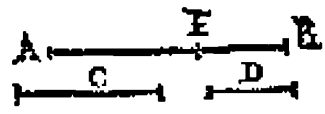
QVEMADMODVM *libro 14. traditæ ſunt comparationes quam plurimæ figurarum regularium, & laterum earundem in eadem ſphæra deſcriptarum, quarum quidem deſcriptionem libro 13. expoſuit Euclides; ita etiam Franciſcus Fluſſas Candalla hoc lib. 16. inter ſe comparat eaſdem figuras regulares ſibi mutuo inſcriptas, nec non & earundem latera, quam quidem inſcriptionem præcedenti lib. 15. tradidimus. Itaque eam connexionem habet hic liber 16. cum præcedenti 15. quam quartusdecimus cum tertiodecimo habuit; vt imperfecta quodammodo videri poſſit tractatio hæc quinque corporum regularium, ſi liber hic decimusſextus non adiungatur.*

THEOR. 1. PROPOS. 1.

SI in Dodecaedro cubus deſcribatur,

tur,& in hoc cubo aliud Dodecaedrum: erit proportio Dodecaedri exterioris ad Dodecaedrum interius proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectę lineę diuiſę extrema ac media ratione, triplicata.

LATVS cubi in Dodecaedro, cuius latus C, deſcripti ſit AB, & latus Dodecaedri in cubo lateris AB, deſcripti ſit D; diuidaturque AB, latus cubi in E, extrema ac mediâ ratione. Dico Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habere triplicatam proportionis, quâ habet AE, maius ſegmentum ad EB, minus. Cũ enim, vt in ſcholio vltimæ propoſ. lib. 15. docuimus, Dodecaedrum, cubuſq; in illo deſcriptus, eadem comprehendantur ſphæra; Diuiſo autem latere cubi extrema ac media ratione, maius ſegmentum ſit latus Dodecaedri in eadẽ ſphæra cum cubo deſcripti, ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. erit AE, maius ſegmentum lateris cubi æquale lateri C, Dodecaedri in eadẽ ſphæra, & circa cubum illum deſcripti. Rurſus quia ex demõſtratis in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. ſi diuidatur latus cubi extrema ac media ratione, minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti; erit AB, minus ſegmentum lateris cubi æquale lateri D, Dodecaedri, quod in illo cubo deſcribitur; Ac propterea erit vt C, latus Dodecaedri cubo circũſcripti ad D, latus Dodecaedri eidẽ cubo inſcripti, vt AE, maius ſegmentũ ad EB, minus: Atqui Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem habet triplicatâ lateris C, ad latus D, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Igitur idem Dodecaedrum lateris C, ad Dodecaedrum lateris D, proportionem quoq; habet triplicatam maioris ſegmenti AE, ad minus ſegmentum EB. Quocirca ſi Dodecaedrõ cubus inſcribatur, &c. Quod erat demõſtrandũ.

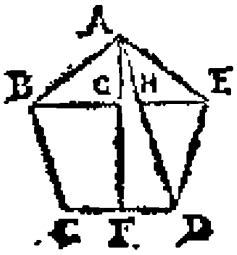


THE-

THEOR. 2. PROPOS. 2.

LINEA perpendicularis ex quouis angulo pentagoni æquilateri, & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur a recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione.

IN pentagono equilatero, & equiangulo ABCDE, ex angulo A, ad latus oppoſitum CD, perpendicularis demittatur AF. *Dico* AF, a recta BE, ſubtẽdente angulum A, ſecari in G, extrema ac media ratione. Ducta enim recta AD, que ſecet BE, in H; quoniam BE, recta lateri CD, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. eſt parallela, [a] ſecabuntur rectæ AF, AD, proportionaliter; [b] Atqui AD, in H, ſecta eſt extrema ac media ratione, eſtque maius ſegmentũ DH. Igitur & AF, in G, ſimiliter erit ſecta. Quocirca linea perpendicularis ex quouis angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.



[a] *2. ſexti*

[b] *18. tertij decimi.*

THEOR. 3. PROPOS. 3.

SI ab angulis trianguli Pyramidis ducantur rectę oppoſita latera ſecantes extrema ac media ratione, ita vt ꝑpe quẽuis angulũ ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſin Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, inſcriptam

quidem

quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri.

TRIANGVLVM pyramidis ſit *A* B C, cuius latera ſecentur bifariam in D, E, F, iunctis rectis DE, EF, FD, quibus rurſum ſectis extrema ac media ratione in G, H, I, iungantur rectæ GH, HI, IG, cõſtituentes GHI, triangulum Icoſaedri in dicta pyramide deſcripti, vt conſtat ex propoſ. 19. lib. 15. Secentur deinde latera trianguli A B C, extrema ac media ratione in K, L, M, iunctis rectis B *K*, CL, AM. Dico has rectas ſuis ſectionibus producere triãgulũ Icoſaedri GHI, hoc eſt, rectam B *K*, tranſire per puncta G, I; & rectam CL, per pũcta *H*, *I*; & rectam *A* M, per puncta G, H. Ducta enim per H, recta NO, ipſi B C, parallela; erit triangulum F*H*O, triangulo FEC, ſimile, ex coroll propoſ. 4. lib. *6.* ideoque & æquilaterum, cum & FE*C*, æquilaterum ſit, quippe quod ſimile ſit triangulo *A*B*C*, per idem coroll. Quare HO, recta æqualis eſt rectę FH, maiori ſegmento rectæ *F*E, ſeu DF, ipſi æqualis: (Eſt enim & DEF, triangulum æquilaterum, cum eius latera ſubtendant angulos æquales trianguli æquilateri rectis æqualibus, dimidius ſcilicet æqualiũ laterum eiuſdem trianguli comprehenſos, [a] ideoque æqualia ſint.) [b] Eſt autem & NH, æqualis toti DF, in parallelogrammo DH, [c] propterea quod FH, *DF*, parallelæ ſunt rectis AB, BC, ſeu NO. Igitur recta NO, compoſita ex NH, tota, & HO, maiori ſegmento, [d] ſecta erit in H, extrema ac media ratione; Ac proinde, cum tres parallelæ *B*C, NO, DF, ſimiliter ſint ſectæ in M, H, G, nimirum extrema ac media ratione; Recta autem AM, ex ijs, quæ demonſtrauimus



[a] *4. primi.*
[b] *34. primi.*
[c] *2. ſexti.*
[d] *5. tertij decet.*

uimus ad propoſ.4.lib.6.ſecet eaſdem ſimiliter; liquido conſtat,ipſam AM,tranſire per puncta G,H. Haud ſecus oſtendemus BK,per puncta G,I,& CL, per puncta H, I, tranſire,ſi per G,& I rectæ ducantur parallelæ lateribus AC,AB;Atque idcirco rectæ BK, CL, AM, ſuis ſectionibus producent triangulum Icoſaedri GHI

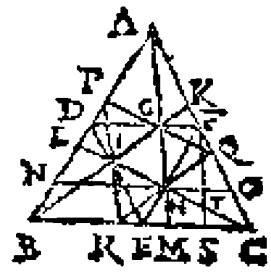
AGATVR iam per G,recta PQ, rectæ CL, parallela.Quoniam igitur AF, æqualis eſt rectæ DF, ſeu rectæ FE,cuius maius ſegmentum fuit FH, hoc eſt, IO, illi æqualis; Erit quoque FO, maius ſegmentum rectæ AF; [a] ac proinde tota AO, ſecta in F, extrema ac media ratione:[b] Eſt autē vt AF, ad FO, ita AG, ad GH, ob triangulum AHO;& vt AG ad GH,ita AQ, ad QC,& AP, ad PL,ob triangula AHC, AIL. Igitur & rectæ AH, AC,AL,ſecantur in G,Q,P, extrema ac media ratione, ſuntque maiora ſegmenta AG, AQ, AP. Rectæ ergo AQ.AL,ſegmēta maiora rectarum æqualium AC, AB, æquales erunt.Quia uero eſt [c] vt AQ, maius ſegmētum, ad QC,minus,ita AL, tota ad AP, maius ſegmentum; Et eſt AQ,recta rectæ AL,æqualis:Erit & QC,recta æqualis rectæ AP. Quare & recta AP, minus ſegmentum erit lateris AB, maiusq; reliqua BP; ac propterea recta PQ, ſecabit latera BA, AC, extrema ac media ratione. Eadem ratione recta PR, quæ per I,ducitur parallela rectæ AM,ſecabit latera CB, BA, extrema ac media ratione, ideoque in punctum P, cadet, Non aliter recta RQ,per H,ducta parallela rectæ BK, latera AC,CB,ſecabit extrema ac media ratione, atq; adeo in puncta R, Q,cadet.Quoniam vero ſingula latera trianguli PQR, cum ſubtendant angulos æquales ttianguli æquilateri æqualibus lineis comprehenſos, nimirum maiore & minore ſegmento ſingulos,[d] æqualia inter ſe ſunt;erit triāgulum PQR, ex ipſis compoſitum, æquilaterum, cuius quidem latera bifariam ſecantur ab angulis trianguli Icoſaedri GHI:(Cum enim in triangulo ACL, recta PQ, parallela ſit lateri CL;ſecabuntur PQ, LC,in eaſdem rationes,ex ijs,quę ad propoſ.4.lib 6.demonſtrauimus:Diuiditur autem CL,bifariam in H, ob triangulū ACL,in quo FH, parallela eſt lateri AL, [e] ſecans propor-tio-

[a] 5. tertij decimi.
[b] 2. ſexti.
[c] 2. quar. tdec.
[d] 4. primi
[e] 2 ſexti.

portionaliter latera CA, CL. Igitur & PQ bifariam ſecatur in G. Eademque eſt ratio de reliquis QR, RP. Ac propterea triangulum Icoſaedri GHI, inſcriptum eſt triangulo æquilatero PQR, cuius anguli diuidunt latera baſis pyramidis extrema ac media ratione, & latera ipſa bifariam ſecantur in G, H, I, ab angulis baſis Icoſaedri GHI. Quapropter, ſi ab angulis trianguli Pyramidis, &c. Quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM.

EX his facile colligi poteſt, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſſe ſegmentum rectæ diuiſæ extrema ac media rõne, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. Cum enim, vt conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. GHI, triangulum ſit Icoſaedri in octaedro, cuius baſis DEF, deſcripti; ducatur ex angulo F, trianguli FEC, quod triangulo DEF, eſt æquale, recta FS, parallela rectæ AM, ſecans MC, HO, in S, & T. [a] *Cum igitur MC, bifariam ſecetur in S, ob triangulum AMC; ſitque MS; ipſi GF, æqualis, ob parallelogrãmum GS; Erit & SC, æqualis eidem GF, minori ſegmento rectæ DF; Ac propterea cum totæ DF, EC, æquales ſint; erit quoque reliqua ES, reliquæ DG, maiori ſegmento æqualis: Ideoque EC, in S, recta erit extrema ac media ratione. Deinde* [c] *quia FE, FS, ſimiliter ſecantur; ſecatur autem FE, extrema ac media ratione; ſecabitur & FS, in T, extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit FT, recta* [d] *æqualis exiſtens lateri Icoſaedri GH, ob parallelogrammum GT. Igitur FT, latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius eſt ſegmentum rectæ FS, quæ diuidit EC, latus octaedri extrema ac media ratione, ex angulo F, demiſſa. Quod eſt propoſitum.*



[a] 2. ſexti.

[b] 34. primi

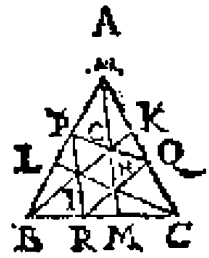
[c] 2. ſexti.

[d] 34 primi.

THE-

THEOR. 4. PROPOS. 4.

MINVS ſegmentum lateris Pyramidis extrema ac media ratione ſecti, duplum eſt potentia lateris Icoſaedri in ea pyramide deſcripti.



BASIS Pyramidis ſit ABC, cuius latera extrema ac media ratione ſecentur in K, L, M, & ductis rectis BK, CL, AM, producentibus GHI, baſim Icoſaedri in illa pyramide deſcripti, inſcriptam triangulo æquilatero PQR, cuius anguli latera trianguli ABC, ſecent extrema ac media ratione in P, Q, R, & ipſa latera PQ, QR, RP, bifariam diuidantur in G, H, I, vt in prop. præcedenti demonſtratum eſt. Dico AP, minus ſegmentum lateris Pyramidis duplum eſſe potentia lateris Icoſaedri HI. Cum enim PQ, dupla ſit potentia minoris ſegmenti AP, ex coroll. 1. propoſ. 16. lib. 15. quadrupla vero potentia rectæ HI, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. quod PQ, recta dupla ſit rectæ PG, hoc eſt, ſibi æqualis HI, ob parallelogrammum PH; Erit PQ, potentia 4. & AP, 2 & HI, 1. Quamobrem AP, dupla erit potentia rectę HI. Minus ergo ſegmentum lateris, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

SEQVITVR ex his, latus Icoſaedri in pyramide deſcripti, eſſe Apotomen. [a] *Cum enim diameter ſphæræ potentia ſeſquialtera ſit lateris Pyramidis; ſi diameter ponatur Rationalis, erit & latus Pyramidis Rationale,* [b] *cũ diametro potentia ſit cõmenſurabile.* [c] *Quare minus ſegmentũ lateris Pyramidis extrema ac media rõne ſecti Apotome erit; Atq; adeo* [d] *cũ minori*

[a] 13. tertiædec.
[b] 6. dec.
[c] 6. tertiædecimi.
[d] 6 decimæ

minori ſegmento lateris Pyramidis latus Icoſaedri potentia ſit commenſurabile; (oſtendimus enim minus ſegmentum potentia eſſe duplum lateris Icoſaedri.) Erit & latus Icoſaedri, ex ſcholio propoſ. 104. lib. 10. Apotome.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

LATVS cubi potentia dimidium eſt lateris Pyramidis in eo deſcriptæ: Latus vero Pyramidis duplum eſt longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri.

CVM enim latus Pyramidis in cubo deſcriptę diameter ſit baſis cubi, vt conſtat ex propoſ. 1. lib. 15. Sit autem quadratum huius diametri duplum baſis cubi, hoc eſt, quadrati lateris cubi, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. Manifeſtum eſt, latus cubi dimidium eſſe potentia lateris Pyramidis in cubo illo deſcriptę.

RVRSVS, quia rectę coniungentes bifarias ſectiones laterum Pyramidis conſtituunt octaedrum in pyramide deſcriptum, vt liquet ex propoſ. 2. lib. 15. Eſt autem latus trianguli æquilateri duplum rectę coniungentis bifarias eius ſectiones, cum ea recta æqualis ſit dimidio lateris trianguli, vt conſtat ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. Nam cum ſit parallela tertio lateri, auferet triangulum æquilaterum, &c. Perſpicuum eſt latus pyramidis duplum eſſe longitudine lateris octaedri ſibi inſcripti.

[a] *2. ſexti*

DENIQVE [b] quia diameter ſphęræ, ſeu octaedri potentia eſt dupla lateris octaedri; Eſt autem latus cubi æquale diametro Octaedri ſibi inſcripti, cum diameter octaedri coniungat centra baſium cubi oppoſitarum, vt in coroll. propoſ. 3. lib. 15. diximus: patet, latus

[b] *14. tertij. dec.*

tus cubi potentia esse duplum lateris octaedri in eo descripti. Quocirca latus cubi potentia dimidium est lateris Pyramidis, &c. Quod erat ostendendum.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

LATVS Dodecaedri maius segmentum est rectæ, quæ potentia est dimidia lateris Pyramidis sibi inscriptæ.

CVM enim Pyramis inscripta cubo, descripta sit quoque in Dodecaedro, cui ille cubus inscribitur, vt docuimus propos. 10. lib. 15. Sit autem latus dodecaedri maius segmentum, ex coroll. 1. propos. 17. lib. 13. lateris cubi, qui in eo describitur; [a] existat denique latus cubi dimidium potẽtia lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Aperte colligitur, latus Dodecaedri maius esse segmentum rectæ, quæ potentia dimidia est lateris Pyramidis sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.

[a] 5. sexti. dec.

THEOR. 7. PROPOS. 7.

SI in cubo describatur & Icosaedrũ, & Dodecaedrum: Latus Icosaedri medium proportionale erit inter latus cubi, & Dodecaedri.

SIT latus cubi A, & latus Icosaedri in eo descripti B, latus deniq; Dodecaedri in eodem cubo descripti C. Dico B, latus Icosaedri medio loco esse proportionale inter A, latus cubi, & C, latus Dodecaedri. Cum.n. ex ijs, quę in scholio propos. 14. lib. 15. demonstrata sunt, B, latus Icosaedri maius segmentum sit lateris cubi A; & C, latus Dodecaedri, per ea, quæ in scholio propos. 13. eiusdem lib. ostendimus, mi-

A
B
C

nus segmentum sit eiusdem lateris cubi: Planum fit, ita esse A, totam ad B, maius segmentum, vt B, maius segmentum ad C, minus. Si in cubo itaque describatur & Icosaedrum, &c. Quod ostendendum erat.

THEOR. 8. PROPOS. 8.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplū est lateris cubi in ea descripti.

CVM enim per ea, quæ propos. 18. lib. 15. sunt demōstrata, latus Pyramidis longitudine triplum sit diametri basis cubi in ea descripti, (ostensum. n. est ibi, GH, diametrum basis cubi inscripti tertiā esse partem lateris Pyramidis BC,). Et quadrata proportionem habeāt laterum duplicatam: Erit quadratū lateris Pyramidis nōcuplum quadrati diametri basis cubi in ea descripti, cū noncupla proportio sit triplæ duplicata, vt in his numeris 1. 3. 9. apparet. Quare, cū quadratū diametri basis cubi duplū sit ipsius basis cubi, ex scholio propos. 47. lib. 1. fit, vt si ponatur basis cubi, hoc est, quadratū lateris cubi 1. quadratū eiusdē basis diametri sit 2. & quadratū lateris pyramidis 18. Quamobrē latus Pyramidis potētia octodecuplū est lateris cubi in ea descripti. Quod erat ostendendum.

*a 10. sexti

THEOR. 9. PROPOS. 9.

LATVS Pyramidis potentia octodecuplum est rectæ extrema ac media ratione sectæ, cuius maius segmentū latus est Dodecaedri in pyramide descripti.

CVM enim cubus in Dodecaedro descriptus, inscriptus quoque sit Pyramidi, cui illud dodecaedrū inscribitur, vt docuimus in scholio prop. vlt. lib. 15. b Erit latus Pyramidis potētia octodecuplū lateris cubi sibi, & Dode-

b 8. sextidē.

caedro

caedro inſcripti: *H*uius autẽ lateris cubi extrema ac media ratione ſecti maius ſegmentum eſt, ex coroll. 1. ppoſ. 17. lib. 13. latus Dodecaedri in pyramide deſcripti, in quo nimirum cubus eſt deſcriptus. Igitur latus Pyramidis potentia octodecuplum eſt rectę extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. Quod demonſtrandum erat.

THEOR. 10. PROPOS. 10.

SI in octaedro Icoſaedrum deſcribatur: Erit latus Icoſaedri potentia duplũ minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac mẽdia ratione diuiſi.

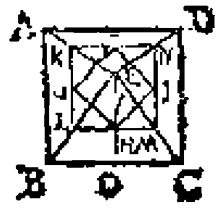
VT enim conſtat ex propoſ. 16. lib. 15. recta coniungens duas ſectiones duorum laterum octaedri rectum angulum contincntiũ prope minora ſegmenta, (qualis fuit ibi recta GI, ſubtẽdens angulum rectum GAI, minoribus ſegmentis AG, AI, comprehenſum;) latus eſt Icoſaedri in octaedro deſcripti. Quare, * cum hoc ipſum latus Icoſaedri poſsit duo illa minora ſegmenta æqualia; duplum poterit vnius minoris ſegmenti. Si in octaedro ergo Icoſaedrum deſcribatur, &c. Quod erat demonſtrandum. * 47. primi.

THEOR. 11. PROPOS. 11.

LATVS octaedri potentia quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti.

SIT vna ſex pyramidum octaedri ABCDE, cuius baſis quadratũ ABCD, triangula vero ad E, verticẽ, ABE, EBC, CED, DEA, ſintq; horum triangulorum centra F, G, H, I, per quæ rectæ ducantur KL, LM, MN, NK, rectis AB, BC, CD, DA, parallelę. Quod ſi coniungantur rectę

FG, GH, HI, IF; erit FGHI, quadratum cubi in octaedro descripti, vt demonstrauimus propos. 4. lib. 15. Quæ autem ducta recta EHO, sesquialtera est rectæ EH, per coroll. propos. 18. lib. 14. qualium partium 3. ponetur EO, talium 2. erit EH: [a] Atqui vt EO, ad EH, ita est EB, ad EL. Igitur qualium partiũ 3. continet EB, talium 2. erit EL, seu LM, sibi æqualis; Ac proptera quadratum lateris octaedri EB, partium erit 9. & quadratum rectæ LM, nimirum KLMN, partium 4. ideoque & quadratum lateris cubi GH, videlicet FGHI, talium partium 2. cum quadratum LN, duplum sit quadrati GI, sibi inscripti, per ea, quę in scholio propos. 47. lib. 1. demonstrauimus. Est enim LN, quadratum ex diametro quadrati GI, descriptum; [b] cum GI, diameter (si ducatur) æqualis sit lateri LM. Quapropter latus octaedri EB, potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi GH, cum eorum quadrata proportionem habeant, quam 9. 2. Latus igitur octaedri potentia quadruplum sesquialterum est lateris cubi in eo descripti. Quod erat demonstrandum.



[a] 2. sexti.

[b] 33. primi.

COROLLARIVM.

QVIA vero latus cubi extrema ac media ratione diuisum efficit maius segmentũ latus Dodecaedri, cui inscribitur, per coroll. 2. prop. 13. lib. 15. Inscribũturque Dodecaedrum, & cubus sibi inscriptus, eidẽ octaedro, vt docuimus in scholio propos. vltimæ lib. 15. Perspicuum fit, octaedri latus esse potentia quadruplum sesquialterum eius rectæ extrema ac media ratione diuisæ, cuius maius segmentum latus est Dodecaedri octaedro inscripti. Est enim eiusmodi recta latus cubi eidem octaedro inscripti, cuius quadruplũ sesquialterum potentia esse ostẽdimus latus octaedri.

THEOR.

THEOR. 12. PROPOS. 12.

LATVS Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti.

QVONIAM *Icoſaedri in cubo deſcripti ſex latera* oppoſita *in ſex baſibus cubi collocata ſunt, quorum bifarias ſectiones coniungunt tres rectæ lateri cubi æquales, vt conſtat ex propoſ. 14. lib. 15. eiuſque ſcholio. Et* in bifariis ſectionibus dictorum ſex laterum *Icoſaedri* reſident ſex anguli octaedri *in Icoſaedro deſcripti, ex propoſ. 15. eiuſdem lib. 15. Fit diametrum octaedri in dicto Icoſaedro deſcripti æqualem eſſe lateri cubi, in quo Icoſaedrum deſcribitur. Quare, cum per ea, quæ ad propoſ. 14. lib. 15. oſtendimus, latus Icoſaedri ſit maius ſegmentum lateris cubi prædicti extrema ac media ratione diuiſi; Erit quoque idem latus Icoſaedri maius ſegmentum diametri octaedri in illo Icoſaedro deſcripti.* [a] *At-* [a] *14. tertij dec.*
qui diameter ſphæræ, ſeu octaedri dupla eſt potentia lateris octaedri. Igitur latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt eius rectæ extrema ac media ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. Quod oſtendendum erat.

THEOR. 13. PROPOS. 13.

LATVS cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionẽ habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmẽtum ad minus rectæ lineæ diuiſæ extre-

ma ac media ratione. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ.

OSTENSVM eſt in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Minus ſegmẽtũ lateris cubi extrema ac media ratione ſecti eſſe latus Dodecaedri in cubo illo deſcripti. Cum ergo tota linea extrema ac media ratione diuiſa ad minus ſegmentum proportionẽ habeat duplicatâ proportionis totius lineę ad maius ſegmentũ, vel maioris ſegmẽti ad minus, (quod tota linea, maius ſegmentũ, atque minus, ſint tres rectæ continue proportionales:) liquido conſtat, proportionem lateris cubi ad latus dodecaedri in ipſo deſcripti eſſe quoque proportionis maioris ſegmenti ad minus duplicatam.

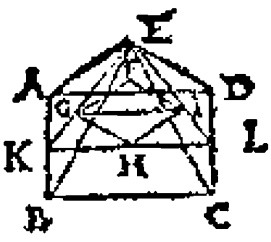
PRAETEREA, cum cõſtet ex coroll. 1. prop. 17. lib. 13. maius ſegmentũ lateris cubi extrema ac media ratione diuiſi latus eſſe Dodecaedri, cui cubus inſcribitur; manifeſtũ eſt eſſe vt latus Dodecaedri, hoc eſt, maius ſegmẽtum, ad latus cubi in ipſo deſcripti, hoc eſt, ad totam lineam extrema ac media ratione ſectam, ita minus ſegmentum ad maius. Cum enim ſit, vt tota linea ad maius ſegmentum, ita maius ſegmentum ad minus; Erit quoq; conuertendo, vt maius ſegmentum ad totam lineam, ita ſegmentum minus ad maius. Latus ergo cubi ad latus Dodecaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 14. PROPOS. 14.

LATVS Octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibĩ inſcriptæ Pyramidis.

SIT vna ſex pyramidum Octaedri ABCDE, cuius baſis quadratũ ABCD, triangula autẽ ad verticẽ E, ſint ABE, EBC, CED, DEA, ſintque horum triangulorũ cẽtra F, G, H, I, quæ rectis iungãtur FG, GH, HI, IF, quadratum

dratum cubi in Octaedro descripti constituentibus, vt docuimus in propos. 4. lib. 15. Quoniã vero Pyramis in cubo descripta, describitur quoq; in Octaedro, cui cubus imponitur, vt in scholio propos. vltimæ lib. 15. exposuimus; Estque latus pyramidis in cubo descriptæ diameter basis cubi, vt cõstat ex ppos. 1. lib. 15. Erit ducta diameter GI, latus Pyramidis in Octaedro dicto descriptæ. Dico igitur latus octaedri BC, sesquialterũ esse lateris Pyramidis GI. Ductis enim rectis EGK, EIL, diuidentur latera AB, CD, bifariam in K, L, ex scholio propos. 12. lib. 13. ipsæque EK, EL, sesquialterę erunt rectarum EG, EI, per coroll. prop. 18. lib. 14. [a] Ac propterea GI, parallela erit rectæ KL, auferens, per coroll. propos. 4. lib. 6. triangulũ EGI, simile triangulo EKL. Quare erit, vt EK, ad KL, ita EG, ad GI; & permutando, vt EK, ad EG, ita KL, ad GI; ideoque cũ EK, sesquialtera sit ipsius EG, erit & KL, sesquialtera ipsius GI. [b] Cum ergo BC, æqualis sit ipsi KL, quod & BK, CL, æquales sint, & parallelæ; Erit BC, latus octaedri sesquialterum lateris Pyramidis GI, sibi inscriptæ. Quod erat demonstrandum.



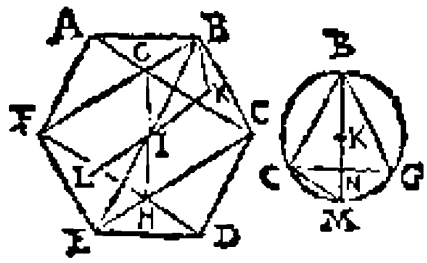
[a] 2. sexti.

[b] 33. primi

THEOR. 15. PROPOS. 15.

SI ex quadrato diametri Icosaedri auferatur triplũ quadrati lateris cubi in eo descripti; relinquitur quadratum sesquitertium quadrati lateris Icosaedri.

SIT Icosaedrum ABCDEFGH, cuius diameter BE, & centrũ I; triangula vero opposita & parallela, per coroll. 4 propos. 14. lib. 13. BCG, EFH, quorum centra K, L. Ducatur ex cẽtro I, ad planũ BCG, perpẽdicularis IK, cadens, ex coroll. lemmatis 1. propos. 10. lib. 14. in



centrum *K*. Producta igitur *KI*. perpendicularis quoque erit ad planum *EFH*, parallelum plano *BCG*, per ſcholium propoſ. 14. lib. 11. cadetque idcirco in centrum L, per coroll. præfati lemmatis. Quam ob rem, cum cubus in *I*coſaedro deſcriptus ſtatuat ſuos angulos in centris baſium *I*coſaedri, vt cõſtat ex propoſ 11. lib. 15. atque adeo angulos oppoſitos in centris baſium oppoſitarum; Erit *KL*. diameter cubi in *I*coſaedro deſcripti, tranſiens per *I*, centrum *I*coſaedri. Cum ergo eadem ratione reliquæ diametri cubi per idem centrum *I*, tranſeant, erit *I*, quoque centrum cubi inſcripti, ideoque *IK*, *IL*, ſemidiametri æquales: Conũcta autem *K B*, ſemidiametro circuli triangulum BCG, circumſcribentis, erit angulus B *K I*, rectus, ex defin. 3. lib. 11. [a] Ac proinde quadratum rectæ B*I*, æquale quadratis rectarum B *K*, *KI*. *I*gitur & quadratum diametri B E, quadruplum exiſtens quadrati ſemidiametri *B I*, vt in ſcholio propoſ 4. lib. 2. oſtendimus, æquale erit quadratis duarum rectarum, nempe diametri circuli triangulum *BCG*, circumſcribentis, & *KL*. Sunt enim & hæc quadrata, per idem ſcholium, quadrupla quadratorum ex ſemidiametris *BK*, *KI*, deſcriptorum. Ablato ergo quadrato diametri cubi KL, ([b] quod triplum eſt quadrati lateris cubi.) ex quadrato diametri *I*coſaedri *BE*; remanet quadratũ diametri circuli triangulũ *BCG*, circũſcribentis. Hoc igitur dico ſeſquitertium eſſe quadrati lateris *I*cõſaedri BC. Deſcribatur enim ex centro *K*, circa triangulũ æquilaterũ BCG circulus, extenſaq; *BK*, vſque ad M, quæ ſecet CG, in N, ducatur quoque recta CM. Quoniam igitur *BN*, per centrũ *K*, ducta perpendicularis eſt ad *CG*, per ea, quæ oſtẽdimus in ſchol. propoſ. 12. lib. 13. [c] erit recta BC, potẽtia ſeſquitertia rectæ BN: Vt autem BC, ad BN, ita eſt B M, ad BC, quod *BC*, ſit media proportionalis inter *BM*, & BN, ex corol. propoſ. 8. lib 6. [d] cũ angulus BCM, rectus ſit in ſemicirculo exiſtẽs. Recta igitur BM, potentia quoq; ſeſquitertia eſt

[a] 47. primi

[b] 15. tertij. dec.

[c] 12. quarti dec.

[d] 31. tertij.

rectæ

rectæ BC; Ac propterea quadratũ diametri BM, ſeſquitertiũ eſt quadrati lateris BC. Quapropter ſi ex quadrato diametri Icoſaedri, &c. Quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

HINC ſit, diametrũ Icoſaedri binas rectas poſſe, diametrum ſcilicet cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. Oſtenſum ſiquidem eſt, quadratum diametri Icoſaedri BE, æquale eſſe quadratis diametri cubi KL, & diametri circuli triangulum BCG, circumſcribentis.

THEOR. 16. PROPOS. 16.

LATVS Dodecaedri minus ſegmẽtum eſt rectę lineę extrema ac media ratione diuiſæ, quæ duplum poteſt lateris Octaedri in eo deſcripti.

QVONIAM diameter Octaedri in Dodecaedro deſcripti, duplum potens lateris octaedri, coniungit bifarias ſectiones laterum oppoſitorum Dodecaedri, vt manifeſtum eſt ex prop. 9. lib. 15. Eſt autem rectæ dictas ſectiones cõiungentis diuiſę extrema ac media ratione minus ſegmentũ latus Dodecaedri, ex coroll. 4. prop. 17. lib. 13. Liquet, latus Dodecaedri minus ſegmentum eſſe eius rectæ extrema ac media ratione diuiſæ, quę duplum poteſt lateris octaedri in eo deſcripti, cum huiuſmodi recta coniũgat bifarias ſectiones laterum Dodecaedri oppoſitorum, cuius quidem minus ſegmentum eſt latus Dodecaedri, ex prædicto coroll. Itaque latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ lineæ extrema ac media ratione, &c. Quod erat demonſtrandum.

14. tertiædecimi

THEOR.

THEOR. 17. PROPOS. 17.

DIAMETER Icoſaedri poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum.

CVM cubus & Pyramis in eo deſcripta, in eodē Icoſaedro deſcribātur, vt docuimus in ſcholio prop. vltimę lib. 15. eademque ſphæra comprehendantur; eadem erit diameter cubi, & diameter ſphęræ pyramidē circundantis: [a] poteſt autem diameter ſphęræ ſeſquialterum lateris Pyramidis. Igitur & diameter cubi in Icoſaedro deſcripti, in quo & Pyramis deſcribitur, ſeſquialterum poterit lateris pyramidis in ipſo cubo, & Icoſaedro deſcriptæ: Atqui diameter circuli baſim Icoſaedri circumſcribentis ſeſquitertium poteſt latus Icoſaedri, vt in demonſtratione propoſ. 15. huius lib. demonſtrauimus. Igitur diameter Icoſaedri potens & diametrum cubi in ipſo deſcripti, & diametrum circuli baſin Icoſaedri circūdantis, ex coroll. propoſ. 15. huius lib. poteſt & ſui ipſius lateris ſeſquitertium, nimirum diametrum circuli circa baſim Icoſaedri deſcripti, & lateris Pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum, nempe diametrum cubi. Quod erat demonſtrandum.

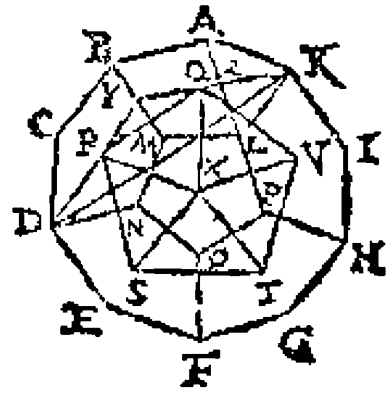
[a] 13. tertij decimi

THEOR. 18. PROPOS. 18.

LATVS Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentū lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitū ductæ, atque extrema ac media ratione diuiſæ,

uiſæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pẽtagoni, & latus eiuſdem poſitæ.

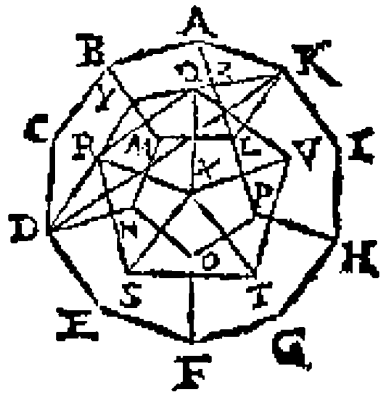
SIT dimidium Dodecaedrum contentum ſex pentagonis ABML K, LKIHP, PHGFO, OFEDN, NDCBM, LMNOP, quorum centra Q, R, S, T, V, X, (quælibet videlicet duo proxima) iungantur rectis QR, RS, ST, TV, VQ, QX, RX, SX, TX, VX. Conſtituta ſunt igitur quinque triangula Icoſaedri in Dodecaedro deſcripti componentia angulum ſolidum X, in centro pentagoni LMNOP, vt oſtenſum eſt in demonſtratione propoſ. 7. lib. 15. A duobus angulis pentagonorum D, K, in cõmunem baſim BM, per centra R, Q, rectæ demittantur DY, KY, quæ quoniam bifariam, & ad rectos angulos ſecant latus BM, per coroll. 2. propoſ. 10. lib. 13. conuenient in pũcto Y. Quod ſi ſubtendatur recta AL, angulo K; ſecabitur [a] perpendicularis KY, in Z, extrema ac media ratione. Dico ita eſſe latus Dodecaedri IM, ad latus Icoſaedri ſibi inſcripti QR, vt KZ, minus ſegmentum perpendicularis KY, ad rectam QY, inter centrum Q, & latus BM, interceptam. Subtenſa enim recta DK, quæ, per demonſtrata in ſcholio propoſ. 13. lib. 15. latus eſt cubi, in quo Dodecaedrum propoſitum deſcribitur; erit LM, latus Dodecaedri, minus ſegmentum ipſius DK, ſi extrema ac media ratione ſecetur, ex eodẽ ſcholio propoſ. 13. lib. 15. Quoniam vero latera YD, YK, trianguli YDK, proportionaliter ſecantur in R, & Q; (ſunt enim RD, QK, ſemidiametri circulorum æqualium æquales; necnon & YR, YQ, diſtantiæ nimirum rectæ BM, a centris R, & Q, eorundem circulorum æqualium) [b] parallela erit QR, ipſi DK; Ideoque triangulũ YRQ, triangulo YDK, ſimile per coroll. propoſ. 4. lib. 6. [c] Quam ob rem erit, vt DK, ad KY, ita QR, ad QY. [d] Vt autem



[a] 2. sextidec.

[b] 2. sexti
[c] 4. sexti.
[d] 2. quartidec.

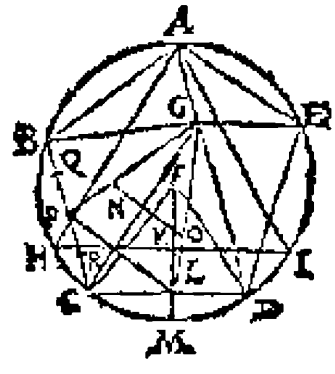
autem DK, tota ad totam K Y, ita eſt LM, minus ſegmentum ad minus K Z. Vt igitur L M, ad K Z, ita erit QR, ad QY; Et permutando, vt LM, latus Dodecaedri ad QR, latus Icoſaedri ſibi inſcripti, ita KZ, minus ſegmentum perpendicularis K Y, ad QY, inter centrum Q, & latus BM, interpoſitam. Latus ergo Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus, &c. Quod erat demonſtrandum.



THEOR. 19. PROPOS. 19.

SI dimidium lateris Icoſaedri extrema ac media ratione ſectum fuerit, minusq; eius ſegmentum a toto latere Icoſaedri ſublatum; a reliqua quoque recta pars rurſum tertia detracta: Relinquetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti.

CIRCA pentagonum ABCDE, ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circulus deſcribatur, cuius centrũ F; & ſuper quinque latera pentagoni quinque triangula æquilatera excitentur conſtituentia angulum ſolidum Icoſaedri G, ex iis, quæ in propoſ. 16. lib. 13. ſunt demonſtrata. In dicto deinde circulo triangulum æquilaterũ inſcribatur AHI. Quoniã igitur arcus ABC, AED, æquales ſunt, cũ quilibet duas quintas partes totius circumſc-



cũſerentiæ cõtineat, necnon & duo arcus *ABH*, AEI, cũ ſint tertiæ partes eiuſdẽ circũferentiæ; erunt reliqui arcus HC, ID, æquales; ppeaque rectæ HI, C*D*, parallelæ, per ſcholium propoſ. 27. lib. 3. *Ad* quas ex cẽtro F, perpendicularis deducatur *FKL*, ſecans rectas HI, CD, bifariam in *K*, & L; coniunganturque rectæ FC, F*D*. Suſcipiantur inſuper triangulorum æquilaterorum G B C, G C D, centra N, & O, per quæ rectæ ducantur G N P, GO*L*, diuidentes, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. latera oppoſita BC, C*D*, bifariam, & ad angulos rectos. Itaq; recta GO, in punctum L, in quo diuiſa eſt CD, bifariam, cadet. Iungantur autem centra N, O, recta NO, quæ, vt conſtat ex demouſtratis in propoſ. 5. lib. 15. latus erit dodecaedri in *I*coſaedro deſcripti. *D*enique BP, dimidium lateris *I*coſaedri ſecetur in Q, extrema ac media ratione; & ablato minori ſegmento *BQ*, ex toto latere BC. reliquæ CQ, tertia pars detrahatur C R. Dico reliquã QR, æqualẽ eſſe lateri Dodecaedri NO. Cum enim FL, perpendicularis a latere trianguli æquilateri H *I*. ſecetur in K, extrema ac media ratione; (quod FL, hac ratione ſecta faciat maius ſegmentum æquale perpendiculari FK, per corollarium propoſitionis 2. lib. 14.) ſit autem maiori ſegmento FK, æqualis recta *KM*, per coroll. propoſ. 12. lib 13. Erit ex iis, quæ demõſtrauimus ad propoſ. 5. lib. 13 maius ſegmentum KM, ſectum quoque in L, a minori ſegmento *KL*, extrema ac media ratione; Ac proinde recta FM, excedit rectam F*L*, minore dimidiæ ſuiipſius ſegmento *LM*. Quoniam vero iuncta PL, eſt latus pentagoni æquilateri, & ęquianguli in pentagono ABC*D*E, deſcripti, idemque centrum *F*, habentis, ex ſcholio vltimo lib. 4. ideòque ſimilis illi; erunt triãgula FCD, FPL, (ſi recta ducterur FP,) ſimilia, per ſcholiũ propoſ. 20. lib. 6. [b] Quare vt FC, ad C*D*, ita erit FL, ad LP; & permutando, vt FC, ad FL, ita CD, ad LP: Atqui FC, hoc eſt, ſibi æqualis FM, excedit rectã *FL*, minore ſegmento dimidij ipſius FM, nempe minore ſegmẽto rectæ K M, vt oſtendimus. Recta igitur C *D*, vel ſibi æqualis *BC*, excedet quoque rectam I. P, minore ſegmento dimidij ipſius *B C*, nimirum minore ſegmento rectæ

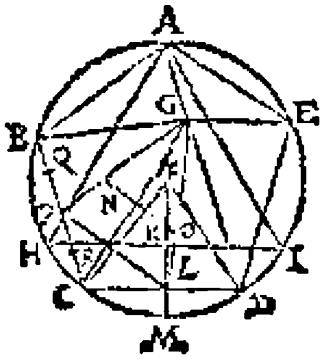
[a] 3. tertij.

[b] 4. ſexti

BP,

BP, quod fuit BQ; ideoque reliqua CQ, rectæ PL, æqualis erit. Rursus quia GP, GL, proportionaliter secantur in centris N, O; (quod GN, GO, duplæ sint ipsarum NP, OL, per coroll. propos. 18. lib. 14.) [a] parallelæ erunt PL, NO; ac proinde triangulum GNO, triangulo GPL, simile, ex coroll. propos. 4. lib. 6. igitur erit vt GP, ad PL, ita GN, ad NO; & permutando, vt GP, ad GN, ita PL, ad NO: Est autem GP, ipsius GN, sesquialtera, per coroll. propos. 18 lib. 14. Quare & pL, hoc est, sibi æqualis CQ, sesquialtera erit ipsius NO; Ac proinde, cum CQ, sesquialtera quoq; sit rectæ QR. (Nam qualium partiũ 3. est CQ. talium 1. est CR. per constructionem; Ac propterea earundem 2. QR,) æqualis erit QR. ipsi NO, lateri Dodecaedri in Icosaedro descripti. Si dimidium itaque lalateris Icosaedri extrema ac media ratione sectum fuerit, &c. Quod erat demonstrandum.

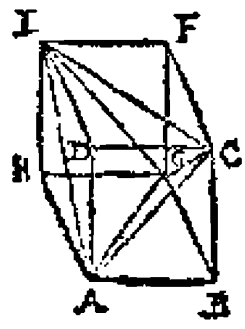
[a] 2. sexti.



THEOR. 20. PROPOS. 20.

CVBVS sibi inscriptæ pyramidis triplus est.

IN cubo AF, descripta sit pyramis ACEG. Dico cubum pyramidis triplum esse. Cum enim inscriptam pyramidem æquilaterã circumstent quatuor pyramides fundatæ super quatuor bases ipsius, vertices vero habentes reliquos quatuor angulos cubi, in quibus nõ resident quatuor anguli pyramidis æquilaterę inscriptę: (Ná super basin ACE, fundatur pyramis ACED; super basin AEG, pyramis AEGH, super basin CEG, pyramis CEGF; & super



per baſin ACG, pyramis ACGB: quæ quidem quatuor pyramides æquales ſunt, ex 10. defin. lib. 11. cum contineantur planis ſimilibus æqualibusq; & multitudine & magnitudine. Quælibet. n. cõſtat tribus æqualibus & ſimilibus triangulis, dimidiis ſcilicet quadratorum cubi, vt patet, & vno triangulo pyramidis æquilateræ inſcriptę. Sit autẽ cubus cuiuslibet harum pyramidum ſextuplus; (Nã exempli cauſa, pyramis ABCG, baſim habens ABC, dimidium baſis cubi BD, altitudinẽ vero eandem, quã cubus, rectã videlicet BG, tertia pars eſt, per coroll. 4. propoſ. 7. lib. 12. priſmatis eandem baſim & altitudinẽ habentis.[a] Cum igitur cubus duplus ſit eiuſmodi priſmatis, quod & baſis cubi dupla ſit baſis priſmatis; manifeſtũ eſt pyramidem ABCG, ſextã partem eſſe cubi, propterea q; cubum pyramidis illius eſſe ſextuplum.) Efficitur, quatuor illas pyramides circumſtantes, quatuor eſſe ſextas partes, id eſt, duas tertias partes cubi; Ac proinde reliquã pyramidẽ æquilaterã ACEG, cubo inſcriptã eiuſdem cubi tertiam eſſe partẽ. Cubus igitur ſibi inſcriptæ pyramidis triplus eſt. Quod erat demonſtrandum.

[a] 32. vnde.

ALITER. Cum cubus, & in eo deſcripta pyramis eadem ſphæra comprehendantur, vt docuimus in ſcholio propoſ. vltimæ lib. 15.[b] Cubus vero triplus ſit pyramidis in eadem ſphæra deſcriptæ, vt demonſtratum eſt; perſpicue colligitur, cubũ triplũ eſſe ſibi inſcriptæ pyramidis, qñquidem hæc in eadẽ ſphera, in qua cubus, continetur.

[b] 33. quæritur.

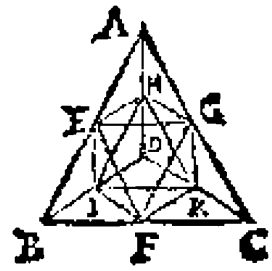
THEOR. 21. PROPOS. 21.

PYRAMIS ſibi inſcripti octaedri dupla eſt.

IN pyramide ABCD, deſcriptũ ſit octaedrum EIKGHF. Dico pyramidẽ octaedri eſſe duplam. Cum enim octaedrũ circumſtent quatuor pyramides pyramidi ABCD, ſimiles, vt prop. 3. lib. 12. demonſtratum eſt, fundatæ ſuper quatuor baſes octaedri EGH, EFI, FGK, HIK; quales ſunt pyramides EGHA, EFIB, FGKC, HIKD:

(quæ

(quæ quidem æquales inter ſe ſunt, ex defin. 10. lib. 11. cum contineantur triangulis ſimilibus, æqualibuſq; numero & magnitudine, quippe quæ ſimilia ſint baſibus pyramidis æquilateræ ABCD. per coroll. propoſ. 4. lib. 6. lateraque habeant æqualia, nempe dimidia laterum æqualium eiuſdem pyramidis ABCD, ex conſtructione propoſ. 2. lib. 15.) [a] Habeant autem pyramides ſimiles proportionem homologorum laterum triplicatam; Erit pyramis ABCD, octupla cuiuslibet illarum quatuor pyramidum octaedro circumpoſitarum, (cum octupla proportio, ſit proportionis duplæ, qualem habent latera pyramidis ABCD, ad latera dictarum quatuor pyramidũ, triplicata, vt in his numeris 1. 2. 4. 8. perſpicue apparet) hoc eſt, quælibet illarum quatuor pyramidum pars erit octaua pyramidis AECD; Atque idcirco omnes quatuor dictæ pyramides quatuor partes octauas, id eſt, dimidium pyramidis ABCD, conficient. Quare & reliquum octaedrum EIKGHF, reliqua erit dimidiata pars eiuſdem pyramidis ABCD. Pyramis igitur ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. Quod erat demonſtrandum.



[a] 8. duodec.

THEOR. 22. PROPOS. 22.

CVBVS ſibi inſcripti octaedri ſextuplus eſt.

QVONIAM ſi pyramis in cubo deſcribatur, & in pyramide octaedrum; octaedrum in cubo quoque inſcriptum eſt, vt conſtat ex ſecunda demonſtratione propoſ. 3. lib. 15. [b] Eſt autem cubus pyramidis in eo deſcriptæ triplus, [c] & pyramis octaedri ſibi inſcripti dupla; Fit, vt qualium partium 6. ponatur cubus, talium 2. ſit pyramis, & earundem 1. contineat octaedrum; atque adeo cubus octae-

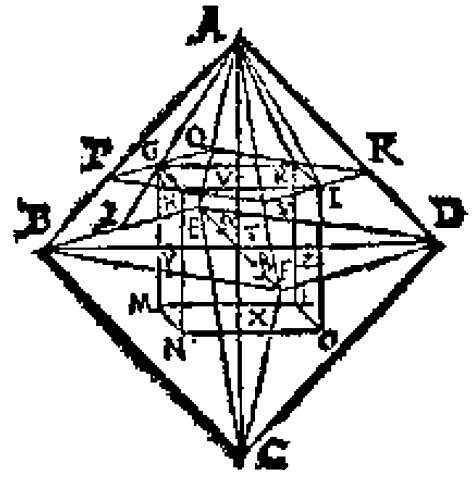
[b] 20. ſextidec.
[c] 21. ſextidec.

octaedri sit sextuplus. Quare cubus sibi inscripti octaedri sextuplus est. Quod erat demonstrandum.

THEOR. 23. PROPOS. 23.

OCTAEDRVM sibi inscripti cubi quadruplum sesquialterum est.

IN octaedro ABCDEF, cubus descriptus sit GHIKLMNO, angulos suos statuens in centris basiũ octaedri. *Dico* octaedrum cubi esse quadruplum sesquialterũ. *Assumpta.n.* pyramide octaedri BEDF*A*, ducantur per G, K, I, H, centra quatuor basium octaedri, rectæ PQ, QR, RS, SP, lateribus BE, ED, DF, FB, parallelæ quadratum constituẽtes PQRS, vt *in* 4. *post.* 4. lib. 15. est demonstratum; [a] quod quidẽ parallelum erit quadrato BEDF. Ducatur quoque octaedri diameter AC, perpendicularis existens ad quadratum BEDF, in centro T, per ea, quæ ostendimus in coroll. 1. propos. 14. lib. 13. *A*c proinde perpendicularis ad bases cubi GI, MO, in punctis V, X, per scholium propos. 14. lib. 11. Est autem V, centrum quadrati PQRS: [b] cum.n. plana BEDF, PQRS, parallela secẽt rectas æquales AB, *A*E, AD, AF, proportionaliter; erunt & AP, AQ, AR, *A*S, æquales. Intelligantur ductæ rectæ VP, VQ, VR, VS. [c] Quoniam igitur æqualia quadrata rectarum æqualium AP, AQ, æqualia sunt quadratis rectarum AV, VP; AV, VQ, quod anguli AVP, AVQ, recti sint, per defin. 3. lib. 11. dempto communi quadrato rectæ AV; æqualia erunt reliqua quadrata rectarum VP,

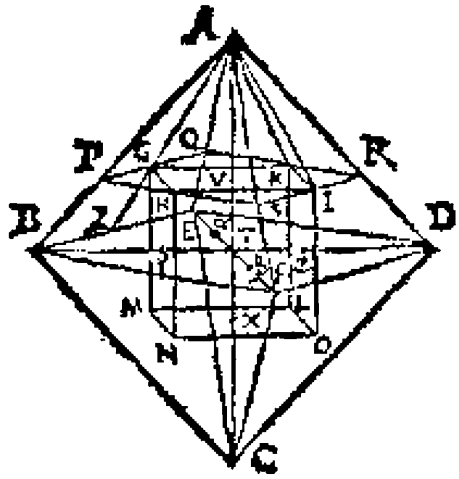


[a] 15. vnde.

[b] 17. vnde.

[c] 47. primi

VQ, propterea q; & rectæ ipſæ VP, VQ, æquales. Non aliter oſtendemus & hiſce, & inter ſe æquales eſſe rectas VR, VS. Quare V, centrum eſt quadrati PQRS.) Igitur & centrum erit quadrati GHIK, in illo deſcripti, per ſcholium vltimum lib. 4. Secantur.n. latera PQ, QR, RS, SP, bifariam in G, K, I, H, vt conſtat ex demóſtratis in propoſ. 4. lib. 15. Eodem argumento cócludemus X, centrũ eſſe baſis LMNO; Nec non & alias diametros ductas BD, EF, per Y, Z, α, β, centra reliquarum baſium tranſire. Ducta iam recta Aγ, per G, centrum trianguli æquilateri ABE; erit AG, dupla ipſius Gγ, per coroll. propoſ. 18. lib. 14. Cum ergo plana PR, BD, parallela ſecent rectas Aγ, AT, proportionaliter; dupla quoque erit AV, ipſius VT. Eodem modo dupla probabitur CX, ipſius XT; Ac proinde cum æquales AT, CT, ſimiliter ſecentur in V, & X; æquales erunt AV, CX; nec non VT, XT. Recta igitur VX, cõiungens centra baſium cubi oppoſitarum, bifariam ſecatur in T. Quare cum ad eundem modum YZ, αβ, bifariam ſecentur in T, erit T, centrum cubi; cum, per coroll. 1. propoſ. 15. lib. 13. rectæ centra baſium cubi oppoſitarum cõnectentes ſe ſe bifariã fecẽt in cẽtro. Iã vero, qm̃ VX, ipſius VT, dupla eſt; dupla aũt fuit & AV, eiuſdẽ VT; æqualis erit AV, ipſi VX, nẽpe altitudini cubi. Quare pyramis GHIKA, ductis rectis AI, AK, AH, tertia pars eſt cubi, ſeu priſmatis GO, per coroll. 1. prop. 7. lib. 12. cum vtriuſq; eadẽ ſit baſis GI, & altitudines æquales AV, VX:



a 17. vnde.

b 6. duode.

b Eſt autem pyramis PQRSA, pyramidis GHIKA, dupla, quod & baſis PQRS, dupla ſit baſis GHIK, illi inſcriptæ. Igitur pyramis PQRSA, duas tertias partes cubi GO, continet. Quia vero pyramides BEDFA, PQRSA, ſimiles exiſtentes, per defin. 9. lib. 11. (cum triangula

huius

huius ſimilia ſint, ex coroll. propoſ. 4. lib. 6. triangulis illius.): proportionem habent laterum homologorum triplicatam; Eſt autem latus AB, lateris AP, ſeſquialterũ, quod & recta Ay, [b] proportionaliter ſecta ipſi AB, ſeſquialtera ſit ipſius AG; Erit pyramis BEDFA, ad pyramidẽ PQRSA, vt 27. ad 8. hæc enim proportio triplicata eſt proportionis ſeſquialteræ 3. ad 2. vt in his numeris 8. 12. 18. 27 conſtat; Ac proinde totum octaedrum ABCDEF, duplum exiſtens pyramidis BEDFA, proportionẽ habebit ad eandem pyramidem PQRSA, quam 54. ad 8. At qualium partium 8. ponitur pyramis PQRSA, taliũ 12. eſſe cubum GO, iam demonſtratum eſt. (Nam numero 8. duas tertias continet numeri 12.) Igitur octaedrum ABCDEF, ad cubum GO, proportionem habet, quam 54. ad 12. hoc eſt, in minimis numeris, per 35. propoſ. lib. 7. repertis, quam 9. ad 2. quæ quidem proportio quadrupla ſeſquialtera eſt[c]. Octaedrum itaque ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. Quod erat oſtendendum.

[a] 8. duodec.

[b] 2. ſexti

COROLLARIVM I.

IDEM ergo centrum eſt octaedri, atq; cubi ſibi inſcripti. oſtendimus enim T, utriuſque eſſe centrum.

COROLLARIVM II.

PERSPICVE etiam hinc inferemus, Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eandem habere proportionem, quam eorum laterum quadrata habent.

[c] *Nam quadrata ipſorum laterum proportionem habent quadruplam ſeſquialteram qualem videlicet demonſtrauimus habere octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum.*

[c] 11. ſexti-dec.

THEOR. 24. PROPOS. 24.

OCTAEDRVM ſibi inſcriptæ Pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt.

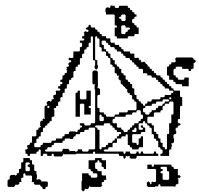
QVONIAM vt oſtendimus ad finẽ lib. 15. cubus, ſibique inſcripta pyramis in eodem octaedro deſcribuntur; [a] Eſt autem octaedrum cubi in eo deſcripti quadruplum ſeſquialterum; & cubus ſibi, ac proinde octaedro, inſcriptæ pyramidis [b] triplus: qualium partium 4. ponetur pyramis, talium 6. erit cubus, & earundem 27. octaedrum. Habent enim 27. ad 6. proportionem quadruplã ſeſquialteram, & 6. ad 2. triplam. Igitur octaedrum ad ſibi inſcriptam pyramidem proportionem habet, quã 27. ad 2. hoc eſt, tredecuplam ſeſquialteram. Ac propterea octaedrum ſibi inſcriptæ pyramidis, &c. Quod erat oſtendendum.

[a] 23. ſextidec.
[b] 20. ſextidec.

THEOR. 25. PROPOS. 25.

PYRAMIS ſibi inſcripti cubi nõcupla eſt.

IN pyramide A B D C, cubus intelligatur deſcriptus.



Dico pyramidẽm cubi eſſe nõcuplam. Aſſumantur enim G, H, cẽtra duarum baſium A C D, A B D, commune latus A D, habentium, per quæ ex angulis C, B, ad latus commune oppoſitum A D, rectæ ducantur C G S, B H S, diuidentes latus A D, bifariam, & ad angulos rectos, per ſcholium propoſ. 12. lib. 13. ac propterea conuenientes in medio puncto S. Cõnexa vero recta G H; cum B H, C G, duplæ ſint rectarum H S, G S, ex coroll. propoſ. 18.

18.lib.14.ac proinde proportionaliter ſecentur BS,CS, parallelæ erunt BC, HG,& per coroll.propoſ.4.lib. 6. triangulum HGS,triangulo BCS, ſimile. [b] Erit ergo vt BC,ad CS,ita HG,ad GS;& permutãdo, vt BC,ad HG, ita CS,ad GS:[c] Eſt autem CS,ipſius GS,tripla. Igitur & BC, tripla erit ipſius HG. Quoniam autem latus pyramidis deſcriptæ in cubo diameter eſt baſis cubi,vt in propoſ.1.lib.15. demonſtratum eſt; Recta vero connectens duo centra baſium pyramidis commune latus habentiũ diameter eſt baſis cubi in pyramide deſcripti, vt perſpicuum eſt ex demonſtratis in propoſ.18.lib.15. (Ibi enim recta GH,iungens centra G,H,baſium ACD,ABD,cõmune latus AD,habẽtium diameter fuit baſis GNHQ, cubi deſcripti in pyramide.)Erit latus pyramidis BC, diameter baſis cubi pyramidem ABDC,circumſcribentis;GH, vero diameter baſis cubi in eadẽ pyramide deſcripti. Cum ergo eandem habeant proportionem diametri quadratorum,quam latera;(Eſt enim vt diameter vnius quadrati ad ſuum latus, ita diameter alterius quadrati ad ſuum latus, quod proportio vtraque ſit potentia dupla:Permutãdo ergo, vt diameter ad diametrum, ita latus ad latus)habeat autem BC,diameter baſis cubi circumſcripti ad GH, diametrum baſis cubi inſcripti proportionem triplam, vt oſtendimus; habebit quoque latus cubi circumſcripti ad latus cubi inſcripti proportionem triplam. At vero cubi, cum ſint parallelepipeda ſimilia, [d] proportionem habent laterum homologorum triplicatam. Cubus igitur circumſcriptus ad cubum inſcriptum pyramidi ABDC,proportionem habet, quam 27. ad 1. Hæc enim proportio triplicata eſt triplæ proportionis,vt hic 1.3.9.27. videre licet. Quam ob rem, [e] cum cubus ad pyramidem inſcriptam proportionem habeat quam 27. ad 9. videlicet triplam; Habebit pyramis ABDC, ad cubum ſibi inſcriptum proportionem,quam 9.ad 1.nimirum noncuplam; Atque adeo pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt.Quod erat demonſtrandum.

[a] 2.ſexti
[b] 4.ſexti.
[c] 18.quarti dec.
[d] 33.vnde.
[e] 20.ſexti-dec.

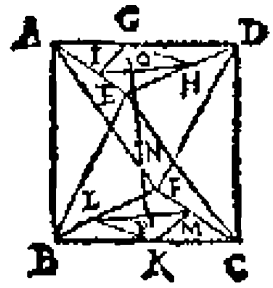
COROLLARIVM.

IGITVR cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, quæ in priori cubo deſcribitur, proportionẽ habet, quam 27. ad 1. Hoc enim demonſtratum eſt ex propoſ. 33. lib. 11. in demonſtratione huius propoſitionis.

THEOR. 26. PROPOS. 26.

OCTAEDRVM ad ſibi inſcriptũ Icoſaedrum proportionem habet, quam duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri.

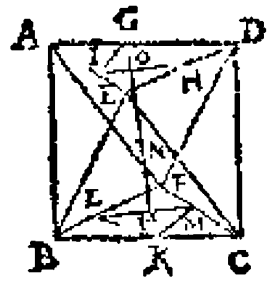
IN octaedro ABCDEF, concipiatur deſcriptũ Icoſaedrum. Dico octaedrum eſſe ad Icoſaedrum, vt ſunt duæ baſes octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. Cũ enim vt ex demonſtratis in propoſ. 16. lib. 15. liquet, octo baſes Icoſaedri in octo baſibus octaedri reponantur; ſint duæ baſes Icoſaedri GHI, KLM, in duabus baſibus oppoſitis octaedri ADE, BCF; atque ex N, cẽtro octaedri, nec non & Icoſaedri (idem enim vtriuſque eſt centrum, per coroll. 3. propoſ. 16. lib. 15.) ad baſim ADE, perpendicularis ducatur NO, cadens in centrum O, triãguli ADE, ſeu circuli ipſum ambientis, ex coroll. lemm. 1. prop. 10. lib. 14. quod quidẽ O, centrum quoque eſt trianguli GHI, per coroll. 2. propoſ. 16. lib. 15. Cum ergo plana oppoſita ADE, BCF, parallela ſint, ex corollario 4. propoſitionis 14. lib. 13. Recta ON, producta perpendicularis quoque erit, per ſcholium



lium propoſitionis 14. lib. 12. ad planum BCF, in eiuſque propterea centrum P, commune etiam triangulo KLM, cadet. Quare OP, recta altitudo eſt & octaedri & Icoſaedri ſibi inſcripti. Quia vero octaedrum in octo pyramides, ductis rectis ex centro N, ad omnes angulos octaedri, æquales diuiditur, quarum altitudo eſt NO, dimidium altitudinis octaedri; Similiterq; Icoſaedrum in 20. pyramides æquales eiuſdem altitudinis NO: Eſt autem priſma triplum pyramidis eandem cum ipſo & baſim,& altitudinem habentis,per coroll. 1.propoſ.7. lib. 12.Erit priſma,cuius baſis ADE, & altitudo ON,æquale tribus pyramidibus octaedri: At vero priſma, cuius eadem baſis ADE, altitudo autem OP, dupla altitudinis ON,duplum eſt priſmatis, cuius baſis eadem ADE, altitudo vero ON,per ea,quæ in ſcholio propoſ.14.lib. 12.oſtendimus. Priſma igitur,cuius baſis ADE, & altitudo OP,æquale eſt ſex pyramidibus octaedri; Ac proinde reliquis duabus octaedri pyramidibus,quæ tertiam partem illarum ſex conſtituunt,æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſim ADE,& ſub altitudine OP, conſtituti; priſma videlicet, cuius baſis tertia pars eſt trianguli ADE, altitudo vero eadem OP. Hoc enim priſma tertia pars eſt priſmatis ſuper baſem ADE, & ſub altitudine OP; cũ per ea, quæ docuimus ad prop.7. lib.12.priſmata eiuſdem altitudinis inter ſe ſint,vt baſes. Quare duo priſmata,quorum vnius baſis ADE, & altitudo OP,alterius autem baſis tertia pars baſis ADE, & altitudo eadem OP, æqualia ſunt octaedro ABCDEF. Non ſecus demonſtrabimus priſma, cuius baſis GHI, altitudo vero OP, æquale eſſe ſex pyramidibus Icoſaedri: propterea que triplum huius priſmatis,nempe priſma, cuius baſis tripla ſit baſis GHI, altitudo autem eadem OP, æquales eſſe 18.pyramidibus Icoſaedri.Reliquis igitur duabus Icoſaedri pyramidibus, quæ tertiã partem ſex pyramidum eiuſdem Icoſaedri conſtituunt, æqualis erit tertia pars priſmatis ſuper baſem GHI, & ſub altitudine OP,conſtituti;priſma ſcilicet,cuius baſis tertia pars eſt trianguli GHI,altitudo vero eadem OP; Atq; idcirco duo priſmata,quorum vnius baſis tripla ſit

trianguli GHI, altitudo autem O P, alterius vero basis tertia pars basis GHI, & altitudo eadem OP, æqualia erunt Icosaedro in dicto octaedro descripto. Iam vero, cum duo illa prismata, octaedro æqualia, ad duo hæc prismata, Icosaedro æqualia, sint, per ea, quæ ostendimus ad propos. 7. lib. 12. vt bases prismatum octaedro æqualium, quatuor tertias partes trianguli ADE, continentes, (cum vnius basis sit A D E, nempe tres tertiæ partes ipsius A D E, complectens, alterius vero basis tertia pars ipsius ADE,) ad bases prismatum Icosaedro æqualium, decem tertias partes trianguli GHI, comprehendentes; (cum vnius basis tripla sit trianguli GHI, nimirum nouem tertias partes ipsius GHI, cõtinens, alterius vero basis tertia pars ipsius GHI,) Sint autem, vt quatuor tertiæ partes trianguli ADE, ad decem partes tertias trianguli G H I; [a] ita duæ tertiæ partes ipsius ADE, nempe dimidium quatuor tertiarum, ad quinque tertias partes ipsius GHI, hoc est, ad dimidium decem tertiarum: Et vt duæ tertiæ partes ipsius ADE, ad quinque tertias partes ipsius G H I, ita quoque sint, per ea, quæ demonstrauimus in scholio propos. 22. lib. 5. sex tertiæ partes ipsius ADE, (hoc est, duæ bases octaedri triplum duarum tertiarum vnius basis constituentes, cum sex tertias contineant,) ad quindecim tertias partes ipsius G H I; (id est, ad quinque bases Icosaedri, triplum quinque tertiarum vnius basis complectentes, cum quindecim tertias complectantur,) Erunt quoque duo illa prismata, octaedro æqualia, hoc est, ipsummet octaedrum, ad duo hæc prismata Icosaedro æqualia, nempe ad ipsummet Icosaedrum, vt duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri. Quocirca octaedrum ad sibi inscriptum Icosaedrum, proportionem habet, quam duæ bases octaedri ad quinque bases Icosaedri.

Quod erat demonstrandum.



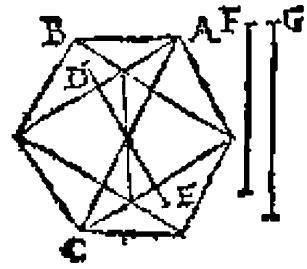
[a] 15. quinti

THE-

THEOR. 27. PROPOS. 27.

ICOSAEDRVM ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphęra deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarum coniungentem.

EXHIBEATVR Icoſaedrum ABC, in quo recta DE, coniungat cẽtra baſium oppoſitarum, diameter autem eius ſit AC; & F, ſit latus Icoſaedri, & G, latus cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti. Dico proportionem Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum componi ex proportione F, lateris Icoſaedri ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata diametri AC, ad rectã DE. Cum enim, ex demonſtratis propoſ. 5. lib. 15. Dodecaedrũ in Icoſaedro deſcriptum ſtatuat angulos ſuos in centris baſium Icoſaedri, atque adeo oppoſitos angulos in centris baſiũ oppoſitarum; Erit DE, diameter dodecaedri in Icoſaedro ABC, deſcripti, cum copulet angulos ipſius oppoſitos in D, & E, centris baſium Icoſaedri oppoſitarum reſidẽtes. Propoſitis iam tribus magnitudinibus, Icoſaedro ſcilicet ABC; Dodecaedro diametri AC, hoc eſt, in eadẽ ſphæra, in qua Icoſaedrum ABC, deſcripto, cum vtriuſque eadem ſit diameter; & Dodecaedro diametri DE, intra Icoſaedrum videlicet, ABC, conſtructo; Proportio primæ magnitudinis, nempe Icoſaedri ABC, ad tertiã, videlicet ad Dodecaedrum diametri DE, ſibi inſcriptũ, compo-



componetur ex proportionibus primæ ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiam, per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis ſunt demonſtrata, nimirum ex proportionibus Icoſaedri *ABC*, ad Dodecaedrum diametri AC, in eadē ſphæra cum ipſo deſcriptum, & Dodecaedri eiuſdem diametri AC, ad Dodecaedrum diametri *DE*, in Icoſaedro ABC, deſcriptum. Cum ergo Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri AC, eadem ſphæra comprehēſum, ſit vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi: (a Nā Dodecaedrum diametri AC, ad Icoſaedrū ABC, eiuſdē diametri eſt, vt G, latus cubi ad F, latus Icoſaedri. Conuertendo igitur erit Icoſaedrum ABC, ad Dodecaedrū diametri AC, vt F, latus Icoſaedri ad G, latus cubi.) *At* vero Dodecaedrum eiuſdē diametri AC, ad Dodecaedrū diametri DE, in Icoſaedro videlicet ABC, deſcriptū, proportionē habeat triplicatā diametri AC, ad diametrū DE, id eſt, ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarū cōiungentem, ex coroll. propoſ. 17. lib. 12. Manifeſtum eſt, proportionē Icoſaedri ABC, ad ſibi inſcriptū Dodecaedrū diametri DE, cōponi quoq; ex proportione F, lateris Icoſaedri, ad G, latus cubi, & ex proportione triplicata proportionis diametri *AC*, ad rectā DE. Quare Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionē habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

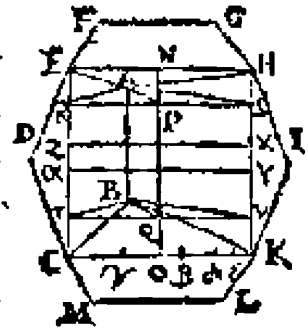
a 11. quarti dec.

THEOR. 28. PROPOS. 28.

DODECAEDRVM excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis a quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: At vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit.

QVO.

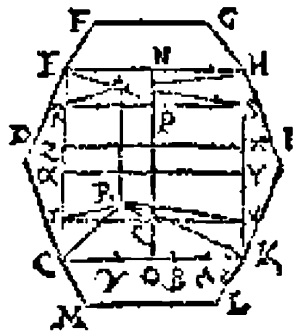
QVONIAM ex demonſtratis prop.8.lib.15. quatuor latera baſis cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtẽdũt quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus conuenientiũ; ſint huiuſmodi pẽtagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, conuenientia ad latus AB; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum latus idem commune AB, alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK. His vero pentagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, ſuper quod conſiſtat pars Dodecaedri cubum circumſcribẽtis, ſolidum ſcilicet CBKHAE, conſtans quinque planis CBK, EAH, ABCE, ABKH, ECKH; quorum duo CBK, EAH, triangula ſunt æqualia, cum latera pentagoni BC, BK, æqualia ſint lateribus pentagoni AE, AH, angulosque comprehendant æquales pentagonorum EAH, CBK. Duo vero ABCE, ABKH, trapezia ſunt æqualia quoque: (cum enim & pẽtagona ABCDE, ABKIH, per hypoteſin, & triangula ex ipſis ablata CDE, HIK, æqualia exiſtant; æqualia erunt & reliqua trapezia ABCE, ABKH;) Quintum denique eſt baſis cubi inſcripti ECKH. Simili modo reperientur alia quinque ſolida huic ſimilia & æqualia, p 10.defin.lib.11. ſuper reliquas quinque cubi baſes; ita vt Dodecaedrum ſuperet cubum ſibi inſcriptum ſex huiuſmodi ſolidis. Dico igitur hunc totum exceſſum ex ſex illis ſolidis cubum inſcriptum circumſtantibus conflatum, æqualem eſſe parallelepipedo, cuius quidem baſis deficit a CEHK, baſe cubi, rectangulo contento ſub latere cubi CK, tertiaq; parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; at vero altitudo ab altitudine, ſeu latere cubi, minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentũ minus exiſtit. Sectis.n. lateribus EH, CK, bifariam in N, O, iunctaq; recta NO, quæ parallela eſt lateri pentagoni AB, & in quã cadunt perpendiculares AP, BQ, demiſſæ in planum EK, vt conſtat ex demonſtratis propoſ.17.lib.13. (Exprimunt enim lineæ NO, AB, AP, BQ, huius figuræ lineas LN, VX,



a 4. primi.

b 4. primi.

VX, VR, XS, figuræ propoſ. 17. lib. 13.) Erit vtraque recta AB, PQ, maius ſegmentũ lateris cubi NO, vel HK, & vtraque AP, BQ, æqualis dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, vt liquet ex eadẽ propoſ. 17. lib. 13. Ac propterea ſi per P, Q, ducantur rectæ RS, TV, rectis EH, CK, parallelæ; erunt quoq; RT, SV, maiora ſegmenta laterum EC, HK; atque adeo ER, CT, ſimul, & HS, KV, ſimul minora eorundem laterum ſegmenta. Ductis deinde rectis AR, AS, BT, BV, conſtituantur duæ pyramides ERSHA, CTVKB, quæ per coroll. propoſ. 6. lib. 12. æquales inter ſe erunt, cũ & earũ baſes ERSH, TCKV, & altitudines PA, QB, æquales ſint; conſiſtentque extra ſolidum ABTVSR. [a] Quoniam autẽ AS, ipſi BV, & AR, ipſi BT, æqualis eſt, & parallela, cum cõiungant æquales rectas, & parallelas AB, SV, RT, [b] parallela erunt plana triangulorũ ARS, BTV, atque adeo inter ſe æqualia, ex coroll prop. 8. lib. 1. cum latera vnius lateribus alterius ſint æqualia. Quare ſolidum ABTVSR, contentum duobus aduerſis triangulis æqualibus, ſimilibus, & parallelis ARS, BTV, & tribus parallelogrãmis RV, AT, AV, priſma eſt, ex definitione.



[a] 33. primi

[b] 15. vnde.

IAM vero, cum oſtenſum ſit rectas HS, KV, minus ſegmentum efficere lateris HK, fiat illis æqualis VX, dupla nimirum vtriuſque HS, & KV; & ipſius VX, minoris ſegmenti lateris HK, duas tertias partes cõtineat VY, tertia vero pars ſit XY, ducanturque XZ, Yα, rectæ TV, parallelæ. Quoniam igitur pyramides ERSHA, CTVKB, æquales ſunt oſtenſæ; [c] vtriuſque vero earum dupla eſt pyramis ſuper baſem TX, & ſub eadem altitudine PA, vel QB, conſtituta, [d] quod & baſis TX, dupla ſit baſis CV, vel RH; Aequalis erit pyramis TVXZB, vtrique pyramidi ERSHA, CTVKB, ſimul: At pyramis TVXZB, duas tertias partes continet priſmatis, cuius baſis eadem TX, & altitudo eadẽ QB, vertex vero linea recta, pars videlicet rectæ AB, quæ æqualis ſit ipſi VX, vt demonſtrauimus in ſcholio propoſ. 7. lib. 12. Item eiuſ-

[c] 6. duode.

[d] 1. ſexti.

dem

dem priſmatis, cuius baſis TX, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VX, duas tertias partes cõtinet priſma, cuius baſis TY, & altitudo eadem QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, ex ſcholio propoſ. 25. lib. 11. quod & baſis TY, duas partes tertias cõplectatur baſis TX. Igitur & priſma, cuius baſis TY, & altitudo QB, vertex vero pars rectæ AB, æqualis ipſi VY, æquale erit duabus pyramidibus ERSHA, CTVKB; Ac proinde hoc priſma appoſitum priſmati ABTVSR, efficiet priſma æquale ſolido CBKIHAE, habens baſin rectangulum cõtentum ſub latere cubi TV, & ſub recta compoſita ex VY, duas tertias partes minoris ſegmenti VX, comprehendente, & ex VS, maiore ſegmento, ideoq; a baſe cubi deficientem rectangulo a X, contentõ ſub latere cubi a Y, & ſub XY, tertia parte minoris ſegmenti VX. Non diſsimili ratione inueſtigabimus alia ſimilia quinque priſmata æqualia & proxime dicto priſmati, & reliquis quinque ſolidis ſuper reliquas quinque cubi baſes conſtitutis. Sex igitur huiuſmodi priſmata æqualia erunt ſex illis ſolidis, exceſſui nimirum Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum. Quia autem duo quælibet priſmata illiuſmodi inter ſe aptata componunt parallelepipedum eiuſdem altitudinis; conſtruentur ex ſex illis priſmatis tria parallelepipeda ſub eadẽ altitudine QB, quæ æqualis eſt dimidio lateris pentagoni AB, ſeu maioris ſegmenti lateris cubi, & ſuper baſes a baſe cubi deficientes ſingulas rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi; Ac proinde ex tribus his parallelepipedis inter ſe compoſitis exurget parallelepipedum exceſſui eidem Dodecaedri ſupra cubum ſibi inſcriptum æquale, cuius baſis a baſe cubi deficit rectangulo contento ſub latere cubi, & ſub tertia parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo vero æqualis eſt tribus altitudinibus prædictorum trium parallelepipedorum, hoc eſt, altitudini QB, quæ æqualis fuit dimidio maioris ſegmẽti lateris cubi, ter ſumptæ. Hanc igitur altitudinem dico ab altitudine, ſeu latere cubi deficere minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. Diuidatur

[1] 1. ſexti.

uidatur enim CK, latus cubi extrema ac media ratione in β: itemque Cβ, maius segmentum, & βK, minus bifariã in γ, δ; atque ex βK, abscindatur βε, æqualis ipsi βγ, seu Cγ, ita vt Cγ, vel γβ, vel βε, dimidia pars maioris segmenti Cβ, æqualis sit ipsi QB, & Cε, toti altitudini præfati parallelepipedi. Potest autem ex minori segmento βK, abscindi recta æqualis ipsi Cγ, dimidio maioris segmenti; quia βK, maior est, quam dimidium maioris segmenti Cβ. Cũ enim sit, vt CK, ad Cβ, ita Cβ, ad βK; sit autẽ CK, minor, quam dupla ipsius Cβ, quod Cβ, sit ipsius maius segmẽtum; erit quoque Cβ, minor, quã dupla ipsius βK, hoc est, erit βK, maior, quam dimidium ipsius Cβ. Quoniã igitur est, vt tota CK, ad maius segmentũ Cβ, ita maius segmentum Cβ, ad minus βK; a erit quoq; vt CO, dimidia ipsius CK, ad Cγ, vel βε, dimidiã ipsius Cβ, ita Cγ, vel βε, ad βδ, dimidiã ipsius βK; Ac proinde si CO, secetur extrema ac media ratione, erit maius illius segmentum Cγ, vel βε, & minus βδ. Quare & βδ, minus segmentum secabit βε, maius segmẽtum extrema ac media ratione, vt demõstrauimus ad prop. 5. lib. 13. eritq; maius segmentum ββδ, minus autẽ δε; Ac propterea rursus δφ, minus segmẽtum secabit rectã δK, maiori segmẽto βδ, æqualẽ, extrema ac media ratione, minusq; segmẽtum erit φK. Deficit igitur Cφ, altitudo præfati parallelepipedi ab altitudine, seu latere cubi CK, minore segmẽto φK, rectæ δK, vel sibi æqualis rectæ βδ, quæ dimidiati lateris cubi fuit segmẽtũ minus ostensa. Constat ergo basem parallelepipedi, quo dodecaedrũ excedit sibi inscriptum cubum a base cubi deficere rectãgulo cõtento sub latere cubi, tertiaq; parte minoris segmẽti eiusdẽ lateris cubi; altitudinẽ vero ab altitudine cubi deficere minore segmẽto eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi segmentũ minus existit. Quocirca Dodecaedrũ excedit cubum sibi inscriptũ parallelepipedo, &c. Quod erat demõstrãdum.

a 15. quinti

COROLLARIVM.

VNDE elicitur, Dodecaedrum a duplo cubi sibi inscripti deficere duobus parallelepipedis, quorum

vnius

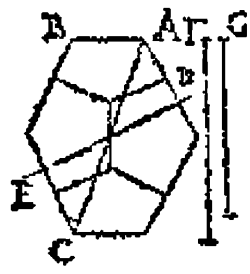
vnius longitudo lateri cubi eſt æqualis, latitudo autem tertiæ parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus ſegmentũ exiſtit; Alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, altitudo autem minus ſegmentũ eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint æquales. Nam ſi prius parallelepipedum addatur illi parallelepipedo, quo cubũ a Dodecaedro ſuperari docuimus, conficietur parallelepipedum, cuius & longitudo, & latitudo lateri cubi æqualis eſt, baſin nimirum eandem habens, quam cubus, altitudo vero a latere cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi minus eſt ſegmentum, hoc eſt, altitudine poſterioris parallelepipedi. Quare ſi confecto iam parallelepipedo adiungatur poſterius paralellepipedum, compoſitum erit parallelepipedum prorſus æquale cubo intra Dodecaedrum deſcripto, ſiquidem & baſis, & altitudo parallelepipedi, æqualis eſt & baſi & altitudini cubi. Atque idcirco, vt Dodecaedrum cubi inſcripti duplum exiſtat, deſunt prædicta duo parallelepipeda; cum his accedentibus ad exceſſum Dodecaedri ſupra cubum inſcriptum, conſtituatur parallelepipedum cubo inſcripto æquale, immo vero alter cubus, vt demonſtratum eſt.

THEOR. 29. PROPOS. 29.

DODECAEDRVM ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata

cara eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra basium Dodecaedri oppositarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icosaedri in eadem sphæra cum cubo descripti.

IN Dodecaedro ABC, diameter sit AC, & recta conjungens centra basium oppositarum DE; At uero F, latus cubi, & G, latus Icosaedri in eadẽ sphæra cum cubo descripti. Dico proportionem Dodecaedri ABC, ad sibi inscriptum Icosaedrum componi ex proportione triplicata proportionis diametri AC, ad rectam DE; & ex proportione F, lateris cubi ad G, latus Icosaedri. Cum enim anguli Icosaedri in Dodecaedro descripti reponantur in centris basium Dodecaedri, atque adeo anguli oppositi in cẽtris basium oppositarum; erit recta DE, centra basium Dodecaedri oppositarum connectens, diameter Icosaedri inscripti; Ac propterea Dodecaedrum, cuius diameter DE, in eadem sphæra cũ Icosaedro intra Dodecaedrũ ABC, collocato describetur, cum eandem habeãt diametrum DE. Intellectis iam tribus magnitudinibus, Dodecaedro scilicet ABC; Dodecaedro diametri DE; & Icosaedro eiusdem diametri DE, intra Dodecaedrum videlicet ABC, descripto; Proportio Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis ad Icosaedrum sibi inscriptum, tertiam magnitudinem, componetur per ea, quæ ad defin. 5. lib. 6. a nobis sunt demõstrata, ex proportionibus Dodecaedri ABC, primæ magnitudinis, ad Dodecaedrum diametri DE, secundam magnitudinem, & Dodecaedri ex diametro DE, descripti secundæ magnitudinis ad Icosaedrum in Dodecaedro ABC, descriptum, tertiam magnitudinem; Cum ergo Dodecaedrum ABC, ad Dodecaedrum diametri DE, proportionem habeat triplicatam diametri AC, ad diametrum DE, ex coroll. propos. 17. lib. 12.* Dodecaedrum vero



* 11. quarti decimi.

vero diametri *DE*, ad Icoſaedrum eiuſdē diametri DE, quod nimirum in Dodecaedro *ABC*, deſcribitur, proportionem habeat, quam F, latus cubi ad G, latus *I*coſaedri; liquido conſtat proportionem Dodecaedri *ABC*, ad Icoſaedrum ſibi inſcriptum, cuius ſcilicet diameter *DE*, componi quoque ex triplicata proportione proportionis diametri *AC*, ad diametrum DE, rectam videlicet centra oppoſitarum Dodecaedri copulantem, & ex proportione *F*, lateris cubi, ad G, latus *I*coſaedri, in eadem ſphæra cum cubo deſcripti. Dodecaedrum itaque ad ſibi inſcriptum *I*coſaedrum proportionem habet compoſitam, &c. Quod erat demonſtrandum.

THEOR. 30. PROPOS. 30.

DODECAEDRVM Pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes cō tinet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo vero tertiæ parti minoris ſegmēti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique a latere eiuſdem cubi deficit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit; Alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo vero minus ſegmentum eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem ſegmentum minus exiſtit, ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdem cubi ſint æquales.

QVONIAM si in Dodecaedro intra Pyramidem descripto cubus describatur, hic idem cubus in eadē pyramide est descriptus, vt ad finē lib. 15. tradidimus; Cubus autē pyramidis, in qua describitur, nona pars est, *cū pyramis cubi sibi inscripti sit noncupla: Fit, vt magnitudo dicti cubi dupla contineat duas partes nonas pyramidis Dodecaedrum, seu cubum ambientis. Quare, cum Dodecaedrum cubi sibi inscripti duplum sit, ex coroll. propos. 28. huius lib. minus duobus illis parallelepipedis, quorum mentio facta est in verbis propositionis huius; non obscure colligitur, Dodecaedrum pyramidi inscriptum duas nonas partes continere ipsius pyramidis, minus dictis duobus parallelepipedis; adeo vt si dicta duo parallelepipeda addantur Dodecaedro, tum demum magnitudo exurgat duas partes nonas pyramidis complectens. Quamobrem Dodecaedrum Pyramidis, in qua describitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide descripti æqualis est, &c. Quod erat demonstrandum.

* 15. sextidec.

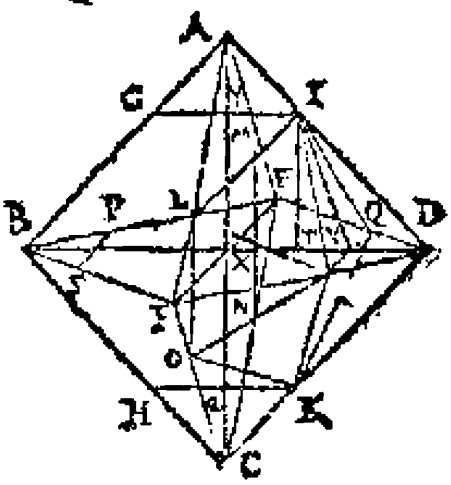
THEOR. 31. PROPOS. 31.

OCTAEDRVM excedit sibi inscriptum Icosaedrum Parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, altitudo vero maius segmentum semidiametri octaedri extrema ac media ratione sectæ.

OCTAEDRVM, cui inscriptum est Icosaedrū. sit ABCDEF, repetita figura prop. 16. lib. 15. vbi demonstratum est, viginti triangula Icosaedrū inscriptū cōponentia esse IQR, KQR, GIL, GIM, GPS, HPS, NHK, OHK, RLO, SLO, PMN, QMN, GMP, HNP, KNQ, IMQ, GLS, HOS, KOR, ILR, quorum octo postrema octo basibus octaedri sunt imposita, sectantia videlicet

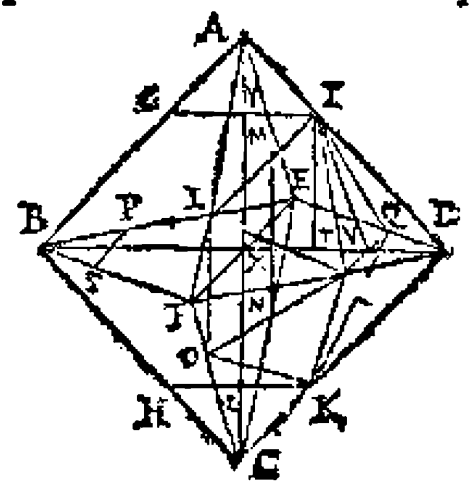
omnia

omnia eius latera extrema ac media ratione; Ité rectam IT, perpendicularé ad BD, æqualẽ eſſe maiori ſegmẽto XY, ſemidiametri *AX*. Dico octaedrũ ABCDEF, ſuperare Icoſaedrũ ſibi inſcriptũ parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratũ lateris Icoſaedri QR, altitudo vero IT, maius ſegmentũ ſemidiametri AX. Cũ.n. in quatuor baſib⁹ octaedri DEA, DFA, DEC, DFC, angulũ ſolidũ octaedri D, conſtituẽtibus poſitæ ſint quatuor baſes Icoſaedri IMQ, ILR, KNQ, KOR; remanebũt iuxta angulũ ſolidũ *D*, in eiſdẽ quatuor baſibus octaedri quatuor triãgula IQD, IRD, KQD, KRD, quibus ſi accedant duo triãgula Icoſaedri, QIR, KQR, & cõe triangulũ DQR, conſtituentur duæ pyramides ſuper cõem baſem DQR, nempe IDQR, KDQR, inter ſe æquales. per coroll. prop. 5. lib. 12. cum earũ altitudo ſit recta eadẽ IT, maius videlicet ſegmẽtũ ſemidiametri octaedri. (Nã quemadmodum AX, ſecta eſt a recta GI, in Y, extrema ac media rõne, ita quoq; ſecta eſt CX, a recta HK, in Z. Quare ſi ex K, ad BD, perpendicularis ducatur, altitudo nimirum pyramidis KDQR; erit ea æqualis rectæ ZX, maiori ſegmẽto ſemidiametri CX hoc eſt, ipſi IT.) Quæ quidẽ pyramides extra Icoſaedrum in octaedro deſcriptũ cõſiſtũt. Simili modo prope ſingulos reliquos quinq; angulos octaedri conſtituentur binæ pyramides & inter ſe & dictis duabus æquales, extra coſaedrum prædictum: Ita vt octaedrum ſuperet Icoſaedrum ſibi inſcriptum duodecim illis pyramidibus æqualibus. Quia vero triangulum DQR, dimidiũ eſt quadrati lateris DQ; (Cum DQ, DR, rectæ æquales ſint minora ſcilicet ſegmenta laterum octaedri, angulumq, contineant rectum.) erit recta QR, diameter illius quadrati; Ac proinde quadratum ipſius QR, duplum erit quadrati lateris DQ, ideoque quadruplum trianguli DQR. Priſma igitur, ſiue parallelepipedum, cuius baſis quadra-



a 34. primi

tum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque erit prisinatis, cuius basis triangulum DQR, & altitudo eadem IT, per ea, quæ demonstrauimus ad propos. 7. lib. 12. Prisma autem, cuius basis DQR, & altitudo IT, triplum existens, ex coroll. 1. propos. 7. lib. 12. pyramidis IDQR, æquale est tribus pyramidibus earũ duodecim, quas circa Icosaedrum consistere diximus. Prisma ergo, vel parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, & altitudo IT, quadruplum quoque est trium illarũ pyramidum. Quare cum earundem trium pyramidũ quadruplæ sint omnes duodecim pyramides simul Icosaedrum ambientes; æquale quoq; erit prisma, seu parallelepipedum, cuius basis quadratum rectæ QR, lateris nimirum Icosaedri, & altitudo IT, maius segmentum semidiametri AX, duodecim illis pyramidibus, hoc est, excessui octaedri supra Icosaedrum sibi inscriptũ; Ac proinde octaedrum superabit Icosaedrum dicto prismate, vel parallelepipedo. Octaedrum ergo excedit sibi inscriptum Icosaedrum parallelepipedo, cuius basis est quadratum lateris Icosaedri, &c. Quod erat ostendendum.



COROLLARIVM.

HINC infertur, Pyramidem excedere duplũ Icosaedri sibi inscripti parallelepipedo, cuius basis quadratũ lateris Icosaedri, altitudo vero recta linea bifariam sectiones oppositorum laterum Icosaedri coniungens. Cum enim ex demõstratis propos. 19. lib. 15. constet, si Pyramidi octaedrum, & huic octaedro Icosaedrum imponatur, Icosaedrum eidẽ Pyramidi esse inscriptum; a *octaedrum autem superet Icosaedrum sibi inscriptum parallelepipedo, cuius basis quadratum*

a 21. sexti-dec.

tum lateris Icoſaedri, nempe recta QR, altitudo vero maius ſegmentum ſemidiametri octaedri, recta videlicet IT, ſeu YX: Fit, vt octaedrum bis ſumptum, nempe pyramis, cui inſcribitur, (quod Pyramis dupla ſit ſibi inſcripti octaedri) ſuperet idem Icoſaedrũ in octaedro, ideoque & in Pyramide deſcriptum, duplo illius parallelepipedi, nimirum parallelepipedo, cuius baſis idem quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta YZ, coniungens bifarias ſectiones laterum Icoſaedri oppoſitorum GI, HK. Hoc enim parallelepipedum illius duplum eſt, per demonſtrata a nobis in ſcholio propoſ. 14. lib. 12. cum altitudines duplam habeant proportionem. Quare hoc eodem parallelepipedo, cuius baſis quadratum lateris Icoſaedri, altitudo vero recta linea bifarias ſectiones oppoſitorum laterum Icoſaedri copulans, Pyramis duplum Icoſaedri ſibi inſcripti excedit.

[a] 25. ſextidec.

DE QVINQVE CORPORVM Regularium deſcriptione in data ſphæra, ex Pappo Alexandrino.

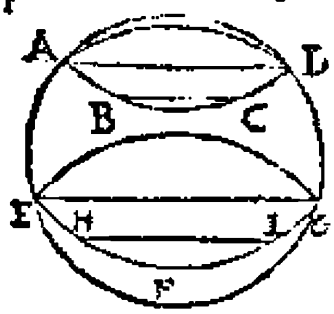
QVONIAM Euclides libro 13. quinq; corpora Regularia ſeorſum extra ſphæram conſtruxit, deinde vero eadem a ſphæra comprehendi, noua demonſtratione confirmauit; nõ erit abs re docere, qua ratione Pappus Alexandrinus eadem quinque corpora in data ſphæra deſcribat: præſertim cũ eius ratio multo clarior videatur, & facilior, quam cõſtructio illa ab Euclide præſcripta. Sed prius ex eodem Pappo lemmata nonnulla præmittenda ſunt, quorum aliqua etſi per elementa ſphærica Theodoſij demonſtrantur, non tamen propterea ordinem Euclidis peruertere cenſeri poſſumus; quippe cum propoſitiones ſphæricorum elementorum, quibus hic indigemus, ex ſolis 19. prioribus propoſitionibus lib. 11. Euclidis pendeant; vt commode ante lib. 12. atque adeo multo magis ante hanc corporum Regularium conſtructionem percipi poſſint. Inſtitandis

autem Theodosii propositionibus sequemur ordinem nostrorum commentariorum, quos in eadem elementa conscripsimus. Hinc ergo initium sumamus.

LEMMA I.

DATIS duobus circulis in sphæra parallelis, dataq; in vno eorum linea recta; ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam.

IN sphæra sint duo circuli parallelι ABCD, EFG; sitq; primũ in ABCD, data diameter AD, cui in EFG, ducenda sit diameter parallela. Ducatur, vt in scholio prop. 18. lib. 11. docuimus, ℔ diametrũ AD, planũ rectũ ad circulum ABCD, [a] faciens in sphæra superficie circulũ AEGD. Quoniã igitur circulus AEGD, circulũ ABCD, bifariã, & ad angulos rectos secat, erit circulus AEGD, maximus, eráque bit q; per polos circuli ABCD, ex schol. ℔pos. 15. lib. 1. Theod. ac proinde & per polos circuli EFG, [b] cum paralleli eosdem polos habeant: [c] ideoq; eũ bifariã secabit. Cõmunis ergo sectio EG, eius diameter erit: [d] quæ cum sit ipsi AD, parallela, patet propositũ.



DEINDE in circulo ABCD, data recta BC, nõ sit eius diameter, cui ducẽda sit diameter parallela in circulo EFG. [e] Ducatur ipsi BC, ℔ centrũ circuli ABCD, diameter parallela AD; cui in circulo EFG, ducatur diameter parallela EG, vt proxime ostendimus. Quoniam igitur vtraq; BC, EG, eidem AD, parallela est, ex constructione, [f] ipsa quoq; BC, EG, inter se parallelæ erunt. Quod est propositum.

EADEM ratione rectæ EC, ducetur in circulo EFG, parallela HI, a diametro EG, diuersa, quæ ipsi BC, æqualis sit, si modo BC, maior non sit diametro EF. Nam si in circulo EFG, ducatur ipsi BC, parallela HI, & æqualis, vt ad propos. 1. lib. 4. tradidimus, factum erit, quod iubetur.

[a] 1. 1. Theodosii.
[b] 1. 2. Theodosii.
[c] 15. 1. Theodosii.
[d] 16. vnde.
[e] 31. primi
[f] 9. vndec.

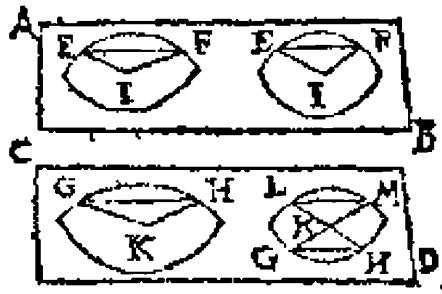
LEMMA II.

SI in planis parallelis descripti sint duo circuli, in quibus duæ rectæ abscindãt arcus similes; erunt duæ rectæ coniungentes extrema

vnius

vnius rectæ cum cẽtro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectę cũ cẽtro cõiungunt.

IN planis parallelis AB, CD, deſcripti ſint duo circuli, in quibus rectæ EF, GH, primum parallelæ ſint, ad eaſdẽ partes centrorum I, K; auferantq; arcus ſimiles EF, GH, ac tandẽ iungãtur ad cẽtra rectæ EI, FI, GK, HK. Dico tã EI, GK, quam FI, HK, parallelas eſſe. Quoniam.n. arcus EF, GH, ſimiles ſunt, erunt anguli I, K, æquales, ex ſcholio prop. 22. lib. 3. [a] *Igitur reliqui anguli E, F, reliquis angulis G, H, æquales erunt.* [b] *Cum ergo tã illi, quã hi, ſint inter ſe æquales; erit tam angulus E, angulo G, quã angulus F, angulo H, æqualis. Quoniã igitur in planis parallelis rectæ EF, GH, parallelæ ſunt, & rectæ EI, GK, ad eaſdẽ partes plani per EF, GH, ductæ efficiunt cũ ipſis æquales angulos E, G, erunt ex ijs, quæ in ſcholio propoſ. 10. lib. 11. demonſtrauimus, EI, GK, parallelæ: Eademque ratione FI, HK, parallelæ erunt.*



[a] 32. primi

[b] 5. primi.

DEINDE *ſint* EF, GH, *parallelæ, non ad eaſdẽ partes cẽtrorũ* I, K. *Dico tam* EI, HK, *quam* FI, GK, *eſſe parallelas. Productis enim* GK, HK, *iũgatur recta* LM. *Et quia latera* GK, HK, *lateribus* LK, MK, *ſunt æqualia,* [c] *angulorque ad verticẽ* K, *æquales cotinent;* [d] *erũt & baſes* GH, LM, *& anguli* H, L, *æquales, &* [e] *anguli* G, M. [f] *Igitur arcus* GH, LM, *æquales ſunt,* [g] *& rectæ* GH, LM, *inter ſe parallelæ: Ac pinde cũ vtraq;* EF, LM, *ipſi* GH, *ſit parallela,* [g] *erunt &* EF, LM, *parallelæ inter ſe. Quia igitur* EF, LM, *parallelæ ſunt abſcindentes ad eaſdem partes centrorum arcus ſimiles* EF, LM; *(Nam cum arcus* GH, *ſit arcui* EF, *ſimilis, erit quoque arcus* LM, *qui arcui* GH, *æqualis eſt, eidem arcui* EF, *ſimilis.) erunt tam* EI, LK, *hoc eſt,* EI, HK, *quam* FI, MK, *hoc eſt,* FI, GK, *parallelæ. Quod eſt propoſitum.*

[c] 15. primi.

[d] 4. primi.

[e] 28. tertij.

[f] 27. primi.

[g] 9. vndec.

LEMMA III.

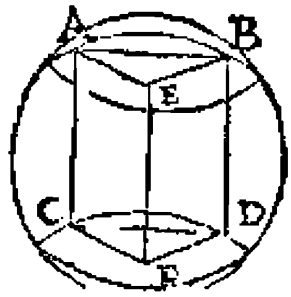
SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ &

æquales,ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelę ſunt,& ad plana circulorũ perpendiculares.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales AB, CD, *in quibus ſint duæ rectæ æquales & parallelæ* AB, CD, *ad eaſdem partes centrorũ, quarum extremæ iungantur ad eaſdem partes rectis* AC, BD. *Dico rectas* AC, BD, *æquales quoque eſſe, ac parallelas, & ad plana circulorũ perpendiculares. Quoniam enim* AB, CD, *parallelæ ſunt,* [a] *erunt* AC, BD. *in eodem cum ipſis plano. Quare cũ* AB, CD, *ſint etiã æquales;* [b] *æquales quoque erunt ac parallelæ* AC, BD, *quod eſt primum.*

[a] 7. undec.

[b] 33. primi



EX cẽtris deinde E, F, *ductis rectis* EA, EB; FC, FD, *iunctaq; recta* EF *erunt tam* AE, CF, *quam* BE, DF, *parallelæ, ex 2. lemmate: Sunt autẽ & æquales ob circulorum æqualitatẽ.* [c] *Igitur & AC,* EF, *& BD,* EF, *parallelæ erunt, & æquales.* [d] *Quoniam vero circuli* AB, CD, *paralleli circa eoſdẽ polos ſunt,* [e] *recta per eorũ polos ducta tranſibit per eorundẽ centra, & per centrum ſphæræ, & ad plana eorũdem recta erit. Quocirca recta* EF, *eorum cẽtra coniungens, per eorũ polos, & centrum ſphæræ incedet, ne duæ rectæ per eorum centra dicantur tranſire, nimirum recta* EF, *& recta per eorum polos extẽſa. quod eſt abſurdũ. Haberent enim illæ rectæ ſegmentum cõmune* EF. [f] *Igitur* EF, *ad plana circulorum* AB, CD, *recta eſt:* [g] *Ac propterea & vtraque* AC, BD, *ipſi* EF, *parallela, ad eandem planæ erit rectæ. Quod eſt ſecundum.*

[c] 33. primi.

[d] 1. 2. Theo.

[e] 10. 1. Theodoſii.

[f] 10. 1. Theodoſii.

[g] 8. undec.

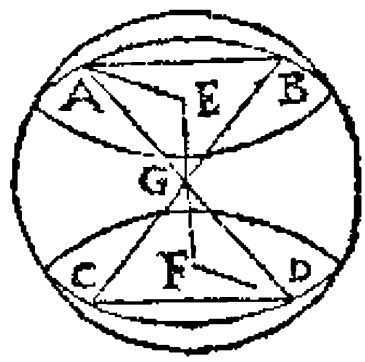
HÆC demonſtratio locũ etiam habet, quando parallelæ AB, CD, ſunt circulorum diametri, ſed tunc EA, EB, FC, FD, *erunt partes diametrorum, vt patet.*

LEMMA IIII.

SI in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductę ſint duę rectę parallelę & æqua-

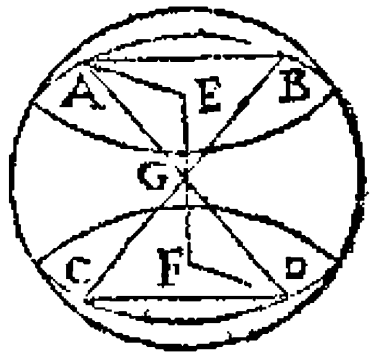
& æquales, non ad eaſdem partes centrorum: rectæ harum parallelarum extrema pũcta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: Rectæ vero earundẽ parallelarum extrema pũcta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſunt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt.

IN ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales A B, C D, *& in iis duæ rectæ parallelæ & æquales* A B, C D, *non ad eaſdem partes centrorum, quarum puncta extrema primum non ad eaſdem partes iungantur rectis* A D, B C. *Dico eas* A D, B C, *in centro ſphæræ ſe interſecare, ideoque diametros eſſe ſphæræ inter ſe æquales. Quoniam enim* A B, C D, *parallelæ ſunt;* [a] *Erunt* A D, B C, *in eodem cum ipſis plano; ac proinde ſe mutuo interſecabunt, vt in puncto* G: *quod dico eſſe cẽtrum ſphæræ. Connectantur. n. circulorum centra* E, F, *rectis* E A, E G; F D, F G. [b] *Et quia anguli* A G E, C G D, *ad verticem æquales ſunt:* [c] *Istẽ tam alterni anguli* B A D, C D A, *quã alterni* A B C, D C B; *æquiangula erũt triangula* A B G, C D G. [d] *Igitur erit vt* A B, *ad* B G, *ita* D C, *ad* C G: *Item vt* A B, *ad* A G, *ita* D C, *ad* D G. *Cum ergo* A B, C D, *ponantur æquales,* [e] *erunt quoque tam* B G, C G, *quam* A G, D G, *inter ſe æquales. Rurſus quia* A E, D F, *ſemidiametri circulorum æqualium æquales ſunt; ſunt autem ex 2. lemmate & parallelæ,* [f] *ideoque anguli alterni* E A D, F D A, *æquales; erunt duo latera* E A, A G, *duobus lateribus* F D, D G, *æqualia, angulosque comprehendent æquales.* [g] *Igitur & baſes* E G, F G, *& anguli* A G E, D G F, *æquales ſunt. Et quia*



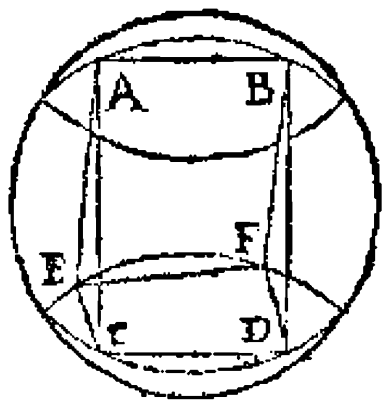
[a] 7. vndec.
[b] 15. primi.
[c] 29. primi.
[d] 4. ſexti.
[e] 14. quinti
[f] 29. primi.
[g] 4. primi

[a] 7. vndec. [b] 2. vndec. [a] Et quia AD, in eodem plano est, in quo parallelæ AE, DF; [b] & EG, FG, in eodē plano, in quo AD, AE, DF; erunt EG, FG, in rectum & continuum constitutæ, propter æquales angulos AGE, DGF, vt ex Proclo ad propos. 15. lib. 1. ostendimus. Quare EF, recta coniungens centra circulorum parallelorum per centrum sphæræ trāsibit, vt in præcedenti lemmate demonstrauimus, [c] perpendicularisque ad eorum plana erit. Cum ergo EG, FG, æquales sint ostensæ, erit G, centrū sphæræ, [d] propterea quod circuli æquales AB, CD, æqualiter a centro sphæræ absunt; inæqualiter vero abessent, si centrum sphæræ in recta EF, diceretur aliud punctū quam G. Quocirca AD, BC, diametri sphæræ sunt, & inter se propterea æquales quod est primum.



[c] 10. 1. Theodosii. [d] 16. 1. Theodosii.

SED iam puncta extrema parallelarum æqualium AB, CD, ad easdem partes iungātur rectis AC, BD. Dico rectas AC, BD, & æquales ac parallelas inter se esse, & angulos CAB, ABD, BDC, DCA, esse rectos. Quod enim sint parallelæ & æquales, [c] manifestum est, cum extrema puncta parallelarum æqualium coniungant. Quod autem ad AB, CD, sint perpendiculares, ita ostendetur. In circulo CD, ad rectam CD, excitentur perpēdiculares CE, DF, iunganturque EF, AE, BF. Quia igitur anguli ECD, FDC, recti sunt, erunt ex scholio propos. 31. lib. 3. arcus ECD, FDC, semicirculi, ac proinde & reliqui arcus EFD, CEF, semicirculi erunt, [f] & anguli EFD, CEF, recti. Quare in parallelogrammo rectangulo DE, rectæ CD, EF, æquales sunt, [g] ideoque & AB, EF, parallelæ erunt, & æquales. Igitur ex 3. lemmate AE, BF, ad plana circulorum rectæ erunt, ac proinde ex defin. 3. lib. 11.



[c] 33. primi. [f] 31. tertij. [g] 9. vndec.

lib. 11. anguli AEC, BFD, recti erunt. Recta igitur EF, perpendicularis ad vtramq; EC, EA, & ad vtramq; FD, FB, vt oſtendimus, perpendicularis erit & ad planum trianguli AEC, per EC, EA, ducti, & ad planum trianguli BFD, per FD, FB, ducti: ac propterea & CD, AB, ipſi EF, parallela, ad eadem plana triangulorum perpendiculares erunt; ideoque ex defin. 3. lib. 11. anguli CAB, ABD, BDC, DCA, recti erunt. Quod eſt ſecundum.

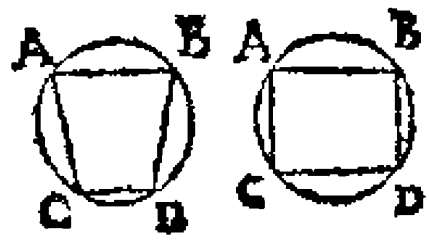
[a] 4. vndec.

[b] 8. vndec.

LEMMA V.

SI in ſphæra ſint duæ rectæ parallelę, rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt. Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniungentes non ſolum æquales, ſed & parallelæ erunt, rectosque cum ipſis angulos conficient.

SINT in ſphæra duæ parallelæ AB, CD, quarum extrema puncta ad eaſdem partes connectantur rectis AC, BD. Dico AC, BD, æquales eſſe. Quæ enim parallelæ ſunt AB, CD; [c] erũt AC, BD, in eodem cum ipſis plano. Ducto igitur per ipſas plano, [d] fiat in ſphæra circulus ABDC, in quo cum parallelæ ſint AB, CD; erunt ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus AC, BD, æquales: [e] ideoque & rectæ AC, BD, æquales erunt. Quod ſi parallelæ AB, CD, fuerint æquales, ita vt quadrilaterum ABDC, in circulo habeant duo oppoſita latera AB, CD, parallela, & æqualia; erit ex ſcholio propoſ. 33. lib. 3. ABDC, parallelogrammum rectangulum; ac proinde anguli A, B, D, C, recti erunt. Quod eſt propoſitum.



[c] 7. vndec.

[d] 1. 1. Theodoſii.

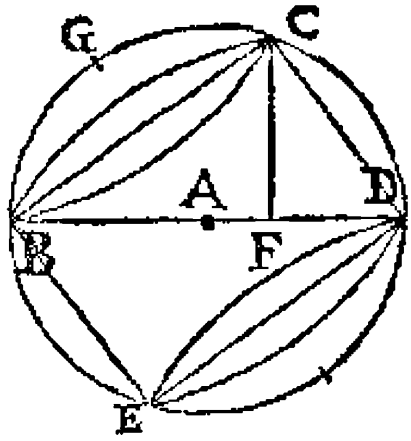
[e] 29. tertij.

LEMMA

LEMMA VI.

IN data ſphæra duos circulos æquales, ac parallelos deſcribere, ita vt diameter ſphærę ſit vtriuſque diametri potentia ſeſquialtera.

SIT ſphæræ centrum A, *per quod planum ductum faciat circulum maximũ* BCDE, *cuius diameter* BD, *ex coroll. 1. prop. 1. lib. 1. Theod. Secta aũt* BD *in* F, *vt* BF, *ipſius* FD, *dupla ſit; erit* BD, *taliũ partium 3, qualium 2. eſt* BF; *ac proinde* BD, *ipſius* BF, *ſeſquialtera eſt. Ducta quoq;* FC, *ad* BD, *perpẽdiculari, iungãtur rectæ* BC, DC, *ductaq;* DE, *ipſi* EC, *parallela, connectatur recta* BE. [a] *Et quoniam tam duo anguli* BCD, EDC, *quam duo* BED, CBE, *duobus rectis æquales ſunt.* [b] *eſtq; tam* BCD, *quam* BED, *rectus; erit quoq; & EDC, & CBE, rectus. Igitur ex ſcholio prop. 34. lib. 1. quadrilaterum rectangulum* ECDE, *parallelogrammum eſt;* [c] *ideoque rectæ* BC, DE, *æquales ſunt. Diuiſo iam arcu* BC, *biſariam in* G, *erit quoque arcus* EGD, *diuiſus biſariã in* G, *quod ex ſcholio propoſ. 27. lib. 3. arcus quoque* BE, CD, *æquales ſint. Polo igitur* G, *& interuallis* GB, GE, *circuli in ſuperficie ſphæræ deſcribantur tranſeuntes per* C, D, *ob æqualitatẽ tam arcuum* GB, GC, *quam* GE, GD; [d] *qui paralleli erunt, cum eoſdem habeant polos.* [e] *Et quia circulus maximus* BCDE, *per polos ſecat circulos* BC, ED, *biſariam; erũt* BC, ED, *diametri ipſorum, quæ cum æquales ſint oſtenſæ, erunt & circuli* BC, ED, *æquales. Dico diametrum ſphæræ* BD, *ad vtramque diametrum* BC, ED, *proportionẽ habere potentia ſeſquialteram. Quoniam enim ex coroll. propoſ. 8. lib 6. tres rectæ* DB, BC, BF, *continue proportionales ſunt; erit ex coroll. propoſ. 20. lib. 6. vt* BD, *ad* BF, *ita quadratum*



[a] *29. primi*

[b] *31. tertij.*

[c] *34. primi.*

[d] *2. 2. Theodoſii.*

[e] *15. 1. Theodoſii.*

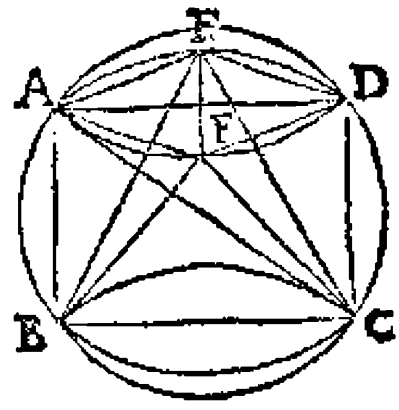
dratum ex BD, *ad quadratum ex* BC: *Eſt autẽ* BD, *ipſius* BF, *ſeſquialtera, vt oſtenſum eſt. Igitur & quadratum ex* BD, *quadrati ex* BC, *atque adeo & quadrati ex* DE, *ſeſquialterum eſt: atque idcirco diameter ſphæræ* BD, *vtriuſque diametri* BC, DE, *potentia ſeſquialtera eſt. quod eſt propoſitum.*

HIS demonſtratis, hoc modo in ſphæra data deſcribemus quinque corpora regularia.

PROBL. 1. PROPOS. 1.

IN data ſphæra Pyramidem deſcribere.

DESCRIBANTVR in data ſphæra, ex lemmate 6. duo circuli AD, BC, *æquales, & paralleli, quorum diametrorũ potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ: & per eorum polos maximus circulus ducatur* ABCD, [a] *qui eos ad angulos rectos, ac bifariam ſecabit, ac proinde cum eis cõmunes ſectiones faciet diametros* AD, BC. *Ducatur in circulo* AD, *alia diameter* EF, *ſecans* AD, *ad angulos rectos in centro, & rectæ ducantur* EB, EC, FB, FC. *Dico* EBCF, *eſſe pyramidẽ, hoc eſt, quatuor triãgula* EBC, BCF, CFE, EFB, *eſſe æquilatera & æqualia. Iũctis. n. rectis* AE, ED, DF, FA, AB, CD, CA; *erit* AC, *diameter ſphæræ, ex lemmate 4. &* AB, DC, *æquales erunt, & ad plana circulorum recta, ex 3. lemmate. Denique* AEDF, *quadratum erit in circulo* AD, *deſcriptum, vt conſtat ex prop. 6. lib. 4. Itaque quoniam ex conſtructione quadratum ex diametro ſphæræ* AC, *ſeſquialterum eſt quadrati ex* AD, *diametro circuli; ſi ponatur quadratũ ex* AC, 3, *erit quadratum ex* AD, 2. *Cum ergo quadratum ex* AC, [b] *æquale ſit quadratis ex* AD, DC, *quod angulus* ADC, *rectus ſit, ex defin. 3. lib. 11. erit quadratum ex* DC, 1. *ac proinde*



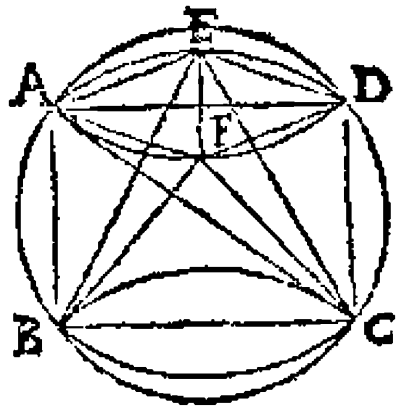
[a] 15. 3. Theodoſii.

[b] 47. primi.

de quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum erit: Est autem & quadratum ex AD, quadrati ex DF, duplum, ex scholio prop. 47. lib. 1. Æqualia ergo sunt quadrata ex DC, DF: [a] quibus cum æquale sit quadratum ex CF, quod angulus CDF, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; erit quadratũ ex CF, quadrati ex DF, quoque duplum, propterea q; quadrato ex AD, æquale. Recta igitur CF, recta AD, hoc est, ipsi BC, æqualis est. Eodem modo ostendetur BF, eidem BC, æqualis; ideoque BCF, triangulum est æquilaterum.

a 47. primi.

RVRSVS quia quadratum ex AD, quadrati ex DC, duplum est ostensum; est autem, ex scholio propos. 47. lib. 1. & duplum quadrati ex DE: æqualia erunt quadrata ex DC, DE: [b] quibus cum æquale sit quadratum ex CE, quod angulus CDE, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit; duplum quoque erit quadratum ex CE, quadrati ex DE. Æqualia ergo sunt quadrata ex CE, AD, propterea quæ recta CE, rectę AD, hoc est, rectis BC, EF, æqualis est, atq; adeo & recta CF, quę ipsi BC, ostensa est æqualis. Triangulum igitur CEF, æquilaterum etiam est, & ipsi BCF, æquale, ob laterum æqualitatẽ. Non aliter demonstrabimus, triangulum BEF, esse æquilaterum, & ipsis BCF, FCE, æquale. Ex quo sequitur & BCE, triangulum æquilaterum esse, & aliis tribus æquale: quippe cum latera BE, CE, ipsi BC, ostensa sint æqualia. Pyramis ergo est EBCF, ex defin. 26. lib. 11. & in data sphæra descripta, cum eius anguli solidi E, B, C, F, in superficie sphæræ consistant, quod est propositum.



b 47. primi

COROLLARIVM.

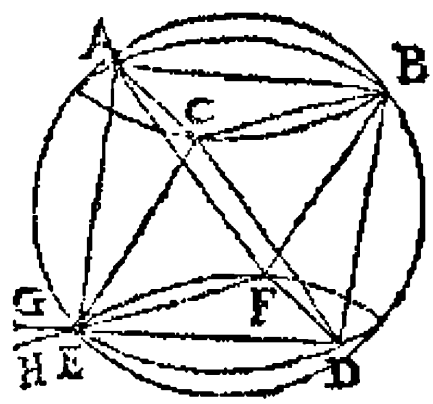
HINC sequitur, diametrum sphæræ potentia esse sesquialteram lateris pyramidis in ea sphæra descriptæ. Nam latus pyramidis est æquale diametro AD, vt ostendimus, & ex cõstructione diameter sphæræ potentia est sesquialtera diametri AD.

PROBL.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

IN data ſphæra octaedrum deſcribere.

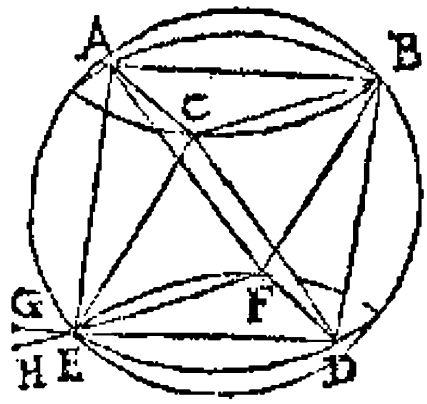
DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales & paralleli ABC, DEF, *ita vt ſphæra diameter diametri cuiuslibet eorum potentia ſit ſeſquialtera.* [a]*Deſcripto autem triangulo æquilatero* ABC, *in circulo* ABC, *ducatur per primum lemma, recta* AB, *in circulo* DEF, *parallela & æqualis* DE, *ad diuerſas partes centrorum: quæ latus etiam erit triãguli æquilateri in circulo* DEF, *deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo triangulo æquilatero* DEF, *erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus triãguli* ABC, *æqualia & parallela: æqualia quidem, ob laterum* AB, DE, *æqualitatem; parallela vero, ex ſchol. propoſ.* 10. *lib.* 11. *Cum enim parallelæ ſint* AB, DE, *& anguli* ABC, DEF, *æquales; productis rectis* DE, FE, *ad* G, H, *erunt quoque anguli* ABC, GEH, *æquales. Cum ergo parallelæ ſint* AB, GE, *&* BC, EH, *ad eaſdẽ partes plani per* AB, GE, *ducti; erunt quoque* BC, HE, *hoc eſt,* BC, EF, *parallelæ ex illo ſcholio propoſ.* 10. *lib.* 11. *Eadem ratione parallela erit* DF, *ipſi* AC. *Connectantur denique* AE, EC, CD, DB, BF, FA, *vt in figura. Dico* AD, *octaedrum eſſe, hoc eſt, octo triangula* ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, *æquilatera eſſe, & æqualia. Quoniam enim in circulis parallelis & æqualibus ſphæræ, rectæ* AB, DE, *æquales ſunt & parallelæ ad diuerſas partes centrorũ, erunt per 4. lemma, rectæ iunctæ* AD, BE, *(quas tamẽ confuſionis vitandæ gratia nõ duximus) diametri ſphæræ, & rectæ* AE, BD, *æquales etiã erũt, ac perpendiculares ad ipſas* AB, DE. [b] *Quadratum igitur ex* BE, *duobus quadratis ex* BD, DE, *æquale erit: Poſito autem quadrato*



[a] 2. quarti.

[b] 47. primi

quadrato ex diametro ſphæræ BE, 6. quadratum ex DE, eſt 3. (Nam cum per conſtructionem diameter ſphæræ potentia ſit ſeſquialtera diametri circuli DEF: poſito quadrato ex BE, 6. erit quadratum diametri circuli DEF, 4. At poſito quadrato diametri circuli DEF, 4. quadratum lateris trianguli æquilateri DE, eſt 3. quod ex coroll. 1. prop. 12. lib. 13. diameter circuli potentia ſit ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri.) Igitur & quadratum ex BD, eſt 3. ac proinde quadrata ex DE, BD, æqualia ſunt, & rectæ ipſæ DE, BD, æquales. Eſt autem DE, ipſi AB, per conſtructionem, & BD, ipſi AE, per 4. lemma, æqualis. Quatuor ergo rectæ AB, BD, DE, EA, æquales erunt, conſtituentq; quadratum ABDE, cum anguli ad A, B, D, E, recti ſint ex eodem 4. lemmate.



RVRSVS quia BC, EF, parallelæ ſunt & æquales ad diuerſas partes centrorum; erũt quoque iunctæ rectæ BE, CF, non ad eaſdem partes, diametri ſphæræ, ex 4. lemmate, & rectæ BF, CE, æquales inter ſe, atque ad BC, EF, perpendiculares, eritque rurſus, vt prius, quadratum BCEF. Non aliter oſtendemus, ACDF, quadratum eſſe, cum iunctæ rectæ AD, CF, ſint quoque ſphæræ diametri ex 4. lemmate, &c. Cum ergo tria quadrata AD, BE, CF, conſtructa ſint ſuper latera æqualia AB, BC, CA, nimirum ſuper latera trianguli æquilateri, eũ AB, latus ſit quadrati AD; & BC, quadrati BE; & CA, quadrati CF; erũt omnia triãgula octo ABC, CAE, ECD, DCB, BFA, AFE, EFD, DFB, æquilatera, & inter ſe æqualia. Octaedrum ergo eſt AD, ex defin. 27. lib. 11. & in data ſphæra deſcriptum, cum eius anguli ſolidi, A, E, D, E, C, F, ſphæræ ſuperficiem attingant. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM.

COLLIGITVR ex his, ſphæræ diametrum potentia duplam eſſe lateris octaedri in ea ſphæra deſcripti. Demonſtratum

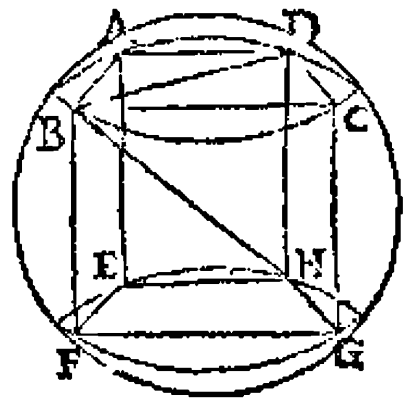
ſtratum enim eſt, quadratũ ex BE, diametro ſphæræ duplum eſſe quadrati ex DE, lateris octaedri.

PROBL. 3. PROPOS. 3.

IN data ſphæra cubum deſcribere.

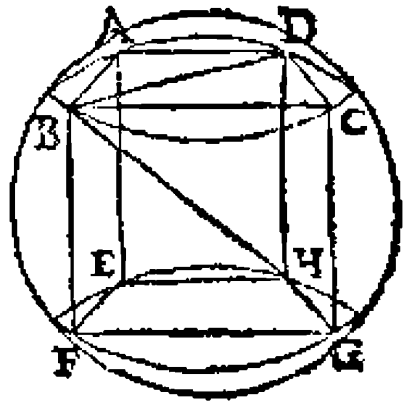
DESCRIBANTVR ex lemmate 6. in data ſphæra duo circuli æquales ac parallelι ABCD, EFGH, quorum diametrorum potentia ſit ſeſquialtera diameter ſphæræ. [2] Deſcripto autem quadrato ABCD, in circulo ABCD, ducatur per 1. lẽma recta AD, in circulo EFGH, parallela EH, & æqualis ex eadẽ parte centrorum, quæ latus quoque erit quadrati in circulo EFGH, deſcripti, ob circulorum æqualitatem. Completo ergo quadrato EFGH, erunt ſingula eius latera ſingulis lateribus quadrati ABCD, æqualia, & parallela; æqualia quidem, ob laterũ AD, EH, æqualitatem; parallela vero ex ſcholio propoſ. 10. lib. 11. Nã quia parallelæ ſunt AD, EH, ſuntq; anguli æquales ADC, EHG, nimirum recti; erunt quoque DC, HG, parallelæ, cum ſint ad eaſdem partes plani per AD, EH, ducti, & ſic de cæteris. Jungantur denique ad eaſdem partes centrorum rectæ AE, BF, CG, DH, quæ per lemma 3. ad plana circulorum rectæ erunt, & inter ſe parallelæ. Dico AG, eſſe cubum, hoc eſt, ſex quadrilatera ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, eſſe quadrata, & æqualia. Ductis enim rectis BH, BD, erit ex lemmate 4. BH, diameter ſphæræ; at BD, diameter circuli ABCD, quippe quæ diameter ſit quadrati circulo inſcripti. Quoniam igitur per conſtructionem, quadratum ex BH, ſeſquialterum eſt quadrati ex BD; quadratum autem ex BD, quadrati ex BC, duplum, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. ſi ſtatuatur quadratum ex BH, 3. erit quadratum ex BC, 2. quare quadratum ex BH, ſeſquialterum eſt quadrati ex BC. Quadratum autem ex BH, æquale eſt quadratis ex BC, CH, quia BCH eſt angulus rectus; ergo quadratum ex BC, ſeſquialterum eſt quadratorum ex BC, CH. Quare quadratum ex BC, ſeſquialterum eſt quadratorum ex BC, CH, hoc eſt, quadrati ex BC, & quadrati ex CH, æqualium. Quadratum igitur ex BC, duplum eſt quadrati ex CH. Quadratum autem ex BC, duplum eſt quadrati ex AB, ex ſcholio propoſ. 47. lib. 1. quia BAC eſt angulus rectus; ergo quadratum ex CH, æquale eſt quadrato ex AB. Quare CH, AB, ſunt æquales. Sed CH, æqualis eſt ipſi AE, ex 33. propoſ. lib. 11. ergo AB, AE, ſunt æquales. Eadem ratione oſtendemus AB, BF, CG, DH, AD, EH, ſingulas ſingulis æquales eſſe. Quare ſex quadrilatera ABCD, EFGH, ADHE, BCGF, ABFE, CDHG, ſunt æqualia. Sed & quadrata, quia rectos angulos continent. Ergo AG, cubus eſt, & in data ſphæra deſcriptus.

[2] 6. quarti.



dratum ex B D, 2. & quadratum ex DC, 1. atq; adeo quadratum ex BH, quadrati ex DC, triplum erit. Rursus quia quadratum ex B H, est 3. & quadratum ex B D, 2.

[a] *47. primi.*



[a] est que quadratum ex BH, aquale quadratis ex B D, DH, quod angulus B D H, ex defin. 3. lib. 11. rectus sit, erit quadratum ex D H, 1. Quadratum igitur ex B H, triplū est quadrati ex D H. Fuit autem idem quadratū ex BH, triplum quadrati ex DC. Æqualia ergo sunt quadrata ex D C, D H, ac proinde rectæ DC, DH, æquales. [b] Cum ergo oppositis lateribus GH, CG, æquales sint; erunt omnia quatuor latera æqualia in parallelogrammo CH. Cum igitur & anguli recti sint, ex defin. 3. lib. 11. quadratum erit CH. Eadem ratione & BE, AH, BG, quadrata ostendentur: Sed & AC, EG, quadrata sunt ex constructione. Sunt ergo omnia sex quadrilatera quadrata, & inter se æqualia, ob laterum æqualitatem. Cubus igitur est AG, ex defin. 25. lib. 11. & in data sphæra descriptus, cum eius anguli solidi A, B, C, D, E, F, G, H, superficiem sphæræ contingant. quod est propositum.

COROLLARIVM.

CONSTAT ex his, diametrum sphæræ potentia triplam esse lateris cubi in ea sphæra descripti. Demonstratum enim est, quadratum ex diametro sphæræ B H, triplum esse quadrati lateris cubi DC, vel DH, vel AD, &c.

MANIFESTVM quoque est, eundē circulum comprehendere & quadratum cubi, & triangulum Octaedri in eadem sphæra descriptorum: quia videlicet circulus ABCD, huius figuræ æqualis est circulo ABC, figuræ antecedentis propositionis. Id quod demonstratum quoque est lib. 14. propositio. 11.

PRO-

PROBL. 4. PROPOS. 4.

IN data ſphæra Icoſaedrum deſcribere.

REPERIATVR[a] *recta linea, ad quam ſic ſe habeat diameter ſphæræ datæ, vt pentagoni latus ad latus hexagoni in eodem circulo cũ pẽtagono deſcripti: Fiatq; ex coroll. prop. 6. lib. 10. vt numerus 3. ad 1. ita quadratum rectæ inuentæ ad quadratum alterius cuiuſdã lineæ, ad cuius interuallum, veluti ſemidiametrum, circulus in data ſphæra deſcribatur. Hoc autem facili negotio ita fiet. Deſcripto maximo circulo in ſphæra data,*[b] *accommodetur in eo recta, quæ inuentæ ſemidiametri ſit dupla, cum hæc recta minor ſit diametro ſphæræ, ſiue illius circuli maximi, vt infra probabitur. Nam, ſi per eam rectã planum ducatur rectũ ad circulum illũ maximum,*[c] *faciet id circulũ ABC, in ſphæra, cuius ſemidiameter, ex conſtructione, potentia ſubtripla eſt rectæ initio inuentæ. Deinde*[d] *inueniatur rurſus recta linea, ad quam ita ſe habeat data ſphæræ diameter, vt pentagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo cum pentagono deſcripti; Fiatq; vt 3. ad 1. ita per coroll. prop. 6. lib. 10. quadratũ rectæ inuentæ ad quadratum alterius lineæ, ad cuius interuallum alter circulus in ſphæra deſcribatur priori circulo ABC, parallelus: quod fiet, ſi in eodem illo circulo maximo accommodetur recta æqualis duplæ ſemidiametri inuentæ, & parallela prioris circuli diametro, ex iis, quæ ad prop. 1. lib. 4. demõſtrauimus, & per eam rectã planum extendatur priori circulo parallelum, hoc eſt, ad dictum circulum maximum rectũ, ex ſcholio propoſ. 18. lib. 11. Nam per idem ſcholium, planum hoc erit circulo ABC, parallelũ,*[e] *facietq; in ſphæra circulũ, cuius ſemidiameter ſemidiametro inuentæ æqualis eſt. His duobus circulis ex altera parte centri ſphæræ aliꝰ duo æquales ac paralleli deſcribantur GHI, KLM: quod facile fiet, ſi illorum diametris æquales rectæ, & parallelæ in eodem illo circulo maximo ducantur, &c.*[f] *Deſcripto autem in circulo DEF, triangulo æquilatero DEF, ducatur lateri EF, in parallelo circulo ABC, ex lemmate primo, recta linea AB, ex altera parte centri, parallela, quæ æqualis ſit vni lateri trianguli æquilateri in*

[a] 12. ſexti

[b] 1. quarti.

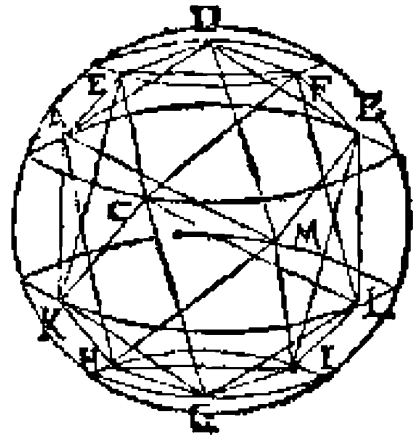
[c] 1. 1. Theodoſii.

[d] 12. ſexti

[e] 1. 1. Theodoſii.

[f] 2. quarti.

circulo ABC, deſcripti: Item huic AB, agatur ex altera parte centri, parallela KL, in circulo KLM, & æqualis: Ac denique huic KL, in circulo GHI, ducatur ex altera parte centri, parallela HI, & æqualis ipſi EF, hoc eſt, lateri trianguli æquilateri in circulo GHI, deſcripti. Compleatis ergo triangulis æquilateris ABC, KLM, GHI, erunt ſingula latera ſingulis lateribus trianguli DEF, parallela; nimirum AC, ML, GH, ipſi DF; at BC, MK, GI, ipſi DE: quod probabitur ex ſcholio propoſ. 10. lib. 11. vt in problemate ſecundo oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, ad diuerſas partes centrorum ductas. In figura non deſcripſimus ea triangula in circulis ABC, KLM, ne multitudo linearum confuſionem pareret, ſed tantum laterum extrema puncta notauimus. Poſtremo ex quolibet 12. punctorum quatuor triangulorum æquilaterorum ad viciniora quinque puncta ducantur quinque lineæ rectæ; videlicet ex puncto D, rectæ DE, DA, DM, DB, DF: ex G, rectæ GH, GK, GC, GL, GI, &c. vt in figura apparet. Ex quolibet enim pũcto quinque rectas lineas emiſſas eſſe cernis. Dico DG, eſſe Icoſaedrum, hoc eſt, viginti triangula DEF, DEA, DAM, DMB, DFB, &c. eſſe æquilatera, & æqualia. Quod vt demonſtretur, oſtendendum prius eſt, Icoſaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in ſphæra data deſcribi Icoſaedrum, Euclides docuit propoſ. 16. lib. 13.) ſuos 12. angulos conſtituere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, nimirum ternos angulos in ſingulis circulis, atque eo ſitu, quo eadem puncta notauimus.



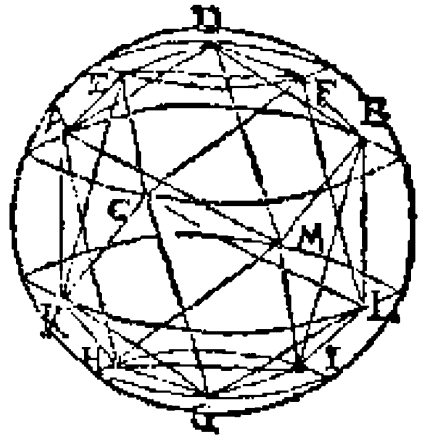
SIT igitur in ſphæra deſcriptũ Icoſaedrũ DG, duodecim angulos ſtatuẽs in pũctis D, E, A, K, H, G, I, L, B, F, M, C. Et quia quinq; rectæ DE, DA, DM, DB, DF, æquales ſunt, eũ ſint latera triangulorũ æquilaterorũ æqualiũ, ſi ex polo D, per E, in ſphæra circulus deſcribatur, tranſibit is per reliqua puncta A, M, B, F; ac propterea pentagonum EAMBF, in

vno

vno plano erit, nimirum in plano illius circuli. Cum ergo eiuſ latera ſint æqualia, vtpote latera Icoſaedri, erit illud pentagonum etiam æquiangulum, ex iis, quæ ad finem lib. 4. demonſtrata ſunt a nobis. Eadem ratione pentagonum æquilaterum, & æquiangulum erit AKCFD, ob quinque rectas æquales EA, EK, EC, EF, ED: Et KHMDE, ob quinque latera Icoſaedri inter ſe æqualia AK, AH, AM, AD, AE: Et HGCEA, ob quinq; latera Icoſaedri æqualia KH, KG, KC, KE, KA: Et GIMAK, ob latera quinq; Icoſaedri æqualia HG, HI, HM, HA, HK: Et ILCKH, ob quinque rectas æquales GI, GL, GC, GK, GH: Et LBMHG, ob rectas quinque æquales IL, IB, IM, IH, IG: Et BFCGI, ob quinque rectas æquales LB, LF, LC, LG, LI: Et FDMIL, ob quinque rectas æquales BF, BD, BM, BI, BL: Et DECLB, ob rectas quinque æquales FD, FE, FC, FL, FB: Et DAHIB, ob quinq; latera Icoſaedri æqualia MD, MA, MH, MI, MB: At tandem GLFEK, ob quinque Icoſaedri latera æqualia CG, CL, CF, CE, CK; ita vt 12. pentagona æquilatera, æquiangulaque inter ſe æqualia conſtituantur. Quoniam vero recta ſubtendens angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli oppoſito lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8 lib. 13. demonſtrauimus; erit iuncta recta AB, ipſi EF, parallela in pentagono EAMBF: & AC, iuncta ipſi DF, parallela in pentagono AKCFD. Et BC, iuncta parallela ipſi DE, in pentagono DECLB. [a] Plana ergo per rectas DE, EF, & CB, BA, ducta parallela ſunt, [b] faciuntque circulos parallelos in ſphæra DEF, ABC. Eodem modo erit iuncta KL, ipſi LI, parallela in pentagono ILCKH: Et iuncta KM, ipſi GI, in pentagono GIMAK: Et LM, iuncta ipſi CH, in pentagono LBMHG: Ac propterea circuli in ſphæra paralleli erunt GHI, KLM. Non aliter erit AB, iuncta ipſi HI, parallela in pentagono DAHIB: Et iuncta KL, ipſi EF, in pentagono GLFEK, [c] Igitur EF, HI, cum ſint eidem iunctæ AB, vel KL, parallelæ, inter ſe parallelæ ſunt. Eademque ratione DE, GI, cum ſint eidem iunctæ BC, vel KM, parallelæ, inter ſe parallelæ erunt; propterea que plana circulorum DEF, GHI, per rectas DE, EF, & HI, GI, ductæ parallelæ erunt. Omnes ergo quatuor circuli in ſphæra DEF, ABC, KLM, GHI, paralleli inter ſe

[a] 15. vnde.
[b] 1. 1. Theodoſii.
[c] 8. duodec.

ſunt, & tam circuli DEF, GHI, *inter ſe æquales, ob trian gula æquilatera in illis deſcripta æqual. n. & circuli* A B C, K L M, *inter ſe etiam æquales, & triangula æquilatera æqualia in iſis, quæ ex nactis* A B, B C, C A, *&* K L, L M, M K, *conſtituuntur: quippe cum latera hæc ſint recta ſubtendentes angulos pentagonorum æqualium.*



QVIA vero iuncta recta K B, *quæ connectit non ad eaſdem partes extrema* K, B *parallelarum* K L, A B, *in parallelis circulis non ad eaſdem partes centrorum ductarum, ſphæræ diameter eſt, & angulus* E A K, *rectus, ex 4. lemmate, quod* K A, *connectat ad eaſdem partes extrema* K, A, *earundem parallelarum;* [a] *erit quadratum diametri* K B, *æquale duobus quadratis ex* A B, A K. *Rurſus quia in pentagono* E A M B F, *recta iuncta* A B, *angulum* A M B, *ſubtendit: Vt autem recta angulum pentagoni ſubtendens ad latus pentagoni, ita eſt hexagoni latus ad latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum, ex ſcholio propoſitionis 2. lib. 14. erit* A B, *iuncta ad* E F, *vel* A K, *ipſi* E F, *æqualem, vt hexagoni latus ad latus decagoni: Atque idcirco* [b] *cum latus pentagoni poſſit & latus hexagoni, & latus decagoni in eodem circulo deſcriptorum; erit diameter ſphæræ* K B, *(quæ ambas* A B, A K, *poteſt, vt oſtendimus,) latus pentagoni in eo circulo, in quo* A B, *latus eſt hexagoni, &* A K, *vel* E F, *latus decagoni. Quare ſphæræ diameter* K B, *ad iunctã* A B, *proportionẽ habet, quã pẽtagoni latus ad latus hexagoni, at vero ad* E F, *eã, quã latus pẽtagoni habet ad latus decagoni:* [c] *Ac proinde cũ tã* A B, *latus triãguli æquilateri in circulo* A B C, *quã* E F, *latus trianguli æquilateri in circulo* D E F, *potentia triplum ſit ſemidiametri ſui circuli; erũt circuli* D E F, A B C, *ac proinde &* G H I, K L M, *qui illis æquales ſunt, illi, quos in principio propoſitionis deſcripſimus. Ex quo patet, rectam, quæ dupla eſt ſemidiametri*

[a] 47. primi.

[b] 10. tertiædec.

[c] 12. tertiædec.

tri

tri initio inuenta, minorem esse diametro sphæræ, vt supra diximus.

HIS demonstratis, facili negotio concludemus, solidam figuram a nobis descriptam DG, esse Icosaedrum, cum Icosaedro in sphæra descripto, cuius basis triangulum DEF, omnes eius anguli solidi cadant in terna puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera triangulorum eduximus; ac proinde singula horum latera singulis lateribus illius Icosaedri congruant.

COROLLARIVM I.

CONSTAT ex his, sphæra diametrum ad latus Icosaedri in ea descripti habere proportionem, quam latus pentagoni ad latus decagoni in eodem circulo descriptorum: adeo vt si diameter sphæræ fuerit latus pentagoni in aliquo circulo, latus Icosaedri sit latus decagoni in eodem illo circulo. Nam descripto Icosaedro DG, in sphæra, ostensum est esse diametrum sphæræ KB, ad EF, latus Icosaedri, vt latus pentagoni ad latus decagoni.

EX quo fit, latus Icosaedri maius esse semidiametro sphæræ: quemadmodum & latus decagoni maius est semisse lateris pentagoni, quippe cum duo latera decagoni cum vno latere pentagoni triangulum Isosceles constituant: a ac propterea duo latera decagoni maiora sint latere pentagoni, ideoque vnum latus decagoni maius dimidio lateris pentagoni.

a 20. primi.

COROLLARIVM II.

COLLIGITVR etiam ex demonstratis, diametrum sphæræ esse potentia triplam lateris pentagoni in circulo ABC, descripti. Quoniam enim est, vt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodem circulo ABC, descriptorum, ita diameter sphæræ KB, ad iunctam AB, ex constructione; erit permutando, vt latus pentagoni ad diametrum sphæræ, ita latus hexagoni ad iunctam AB: b Est autem latus hexagoni in circulo ABC, hoc est, semidiameter potentia subtriplum rectæ iunctæ AB.

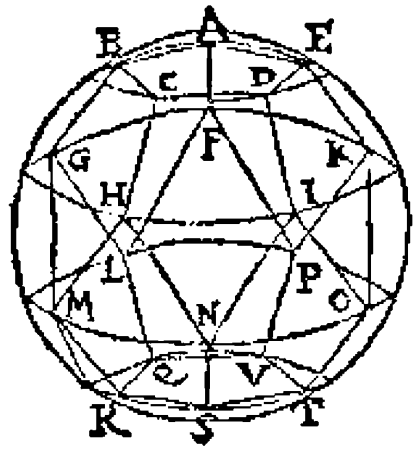
b 15. tertij dec.

AB, quod AB, *ſit latus trianguli æquilateri. Igitur & latus pentagoni in eodem circulo* ABC, *potentia ſubtriplum eſt diametri ſphæræ, hoc eſt, diameter ſphæræ potentia tripla eſt lateris pentagoni in circulo* ABC, *deſcripti.*

PROBL. 5. PROPOS. 5.

IN data ſphæra Dodecaedrum deſcribere.

DESCRIBANTVR *in data ſphæra quatuor circuli paralleli, vt in antecedenti propoſ.* ABCDE, FGHIK, LMNOP, QRSTV, *ita vt ſemidiametri circulorum* ABCDE, QRSTV, *ſint potentia ſubtripla duarum rectarum, ad quas diameter ita ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus decagoni, ſemidiametri vero circulorum* FGHIK, LMNOP, *potentia ſint ſubtriplæ duarum rectarum, ad quas diameter ſphæræ ſic ſe habeat, vt pentagoni latus ad latus hexagoni. Deſcripto autem in circulo* ABCDE, *pentagono* ABCDE, *æquilatero, & æquiangulo, ducatur eius lateri* CD, *ad eaſdem partes centrorum parallela* HI, *in circulo* FGHIK, *& æqualis lateri pentagoni eiuſdem circuli, ex 1. lemmate: Rectæ autem* HI, *ad diuerſas partes centrorum agatur eodem modo parallela* LP, *in circulo* LMNOP: *Huic tandem* LP, *ad eaſdem centrorum partes ducatur parallela* QV, *in circulo* QRSTV. *Completis autem pentagonis in hiſce tribus circulis, (quorum tamen latera, vt confuſionem vitaremus, non duximus, ſed eorum tantum extrema puncta notauimus,) erunt ſingula latera eorum ſingulis lateribus pentagoni* ABCDE, *parallela, eo ordine, quo lateri* CD, *parallela ductæ ſunt: quod demonſtra-*



monſtrabitur, vt in probl. 2. oſtendimus parallelas eſſe BC, EF, nimirum HG, PO, TV; latera iuncta, parallela erũt ipſi BC, &c. Poſtremo ex quolibet 20. punctorum quatuor pentagonorum ad viciniora tria puncta ducantur tres rectæ, vt in figura apparet. Ex quolibet enim puncto tres rectas vides eſſe emiſſas. Dico AS, Dodecaedrum eſſe, hoc eſt, duodecim pentagona AECDE, DEKOI, OINST, STVQR, QRMGL, GLFAB, AFPKE, KPVTO, RSNHM, FLQVP, CDINH, BCHMG, æquilatera eſſe, æquiangula, & æqualia. Quod vt oſtendatur, demonſtrãdum prius eſt, Dodecaedrum in ſphæra deſcriptum (poſſe autem in data ſphæra Dodecaedrum deſcribi, docuit Euclides propoſ. 17. lib. 13.) ſuos 20. angulos ſtatuere in quatuor circulis parallelis, quos deſcripſimus, quinos videlicet in ſingulis circulis, atque in eo ſitu, quo eadem 20. puncta notauimus.

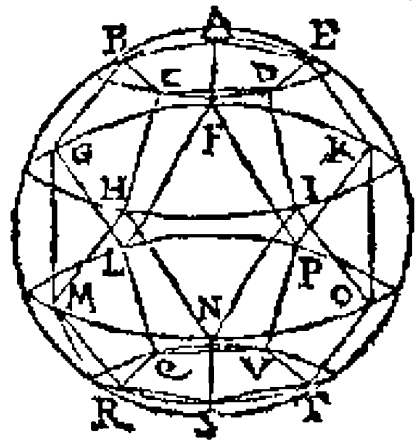
SIT ergo in ſphæra deſcriptum Dodecaedrum AS, viginti angulos ſtatuẽs in punctis A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V. Et quoniam recta ſubtẽdens angulum pentagoni æquilateri & æquianguli oppoſitũ lateri æquidiſtat, vt in ſcholio propoſ. 8. lib. 13. demonſtrauimus, erit iuncta GH, lateri BC, parallela in pentagono BCHMG; & iuncta HI, lateri CD, in pentagono CDINH; & IK, lateri DE, in pentagono DEKOI; & KF, ipſi AE, in pentagono AEKPF, & FG, ipſi AB, in pentagono ABGLF; & ſic de cæteris. Quia igitur rectæ AB, AE, rectis FG, FG, parallelæ ſunt; [a] erit & planum per FG, FK, ductum plano pentagoni ABCDE, per AB, AE, ducto parallelum. Eadem ratione eidem plano pentagoni parallelũ erit planum per FG, GH, ductum; quod hæ rectæ rectis AB, BC, ſint parallelæ. Igitur ex ſcholio propoſ. 16. lib. 11. plana per FG, FK, & per FG, GH, ducta, inter ſe parallela ſunt, cum eidẽ plano pentagoni ABCDE, ſint parallela; atque adeo, ex eodem ſcholio, cum conueniant in rectam FG, vnum planum efficient. Non aliter oſtendemus, planum quoque per FK, KI, & planum per KI, IH, & planum per IH, HG, cum plano per FK, FG, ducto vnum planum efficere. Plana igitur per puncta A, B, C, D, E, & per puncta F, G, H, I, K, ducta in ſphæra [b] efficient duos circulos parallelos ABCDE, FGHIK. Eodemq; modo plana per puncta Q, R, S, T, V, & per puncta L, M, N, O, P, ducta circulos parallelos

[a] 15. vnde.

[b] 1. 1. Theodoſii.

parallelos efficient QRSTV, LMNOP. Eruntq; tam duo circuli ABCDE, QRSTV, quam duo FGHIK, LMNOP, inter se æquales, ob pentagona æqualia ABCDE, QRSTV, & obrectas FG, GH, HI, IK, KF; LM, MN, NO, OP, PL,

[a] 4. primi. [a] quæ omnes æquales sunt, cum subtendant angulos æquales in pentagonis æqualibus.



DEINDE quia ex scholio propos. 8. lib. 13. rectæ iunctæ ND, MB, lateri CH, parallelæ sunt in pentagonis CHNID, BGMHC; [b] erunt quoque ipsæ iunctæ ND, MB parallelæ. Sunt autem & æquales, quod æquales angulos in pentagonis æqualibus subtendant. [c] Igitur & iunctæ NM, BD, æquales erunt ac parallelæ. Eodem modo æquales erunt & parallelæ, iunctæ NO, CE, cum connectant duas NC, OE, æquales ac parallelas, quod vtraq; lateri DI, sit parallela. [d] Circulus igitur LMNOP, circulo ABCDE, parallelus est, cum ille ducatur per rectas NM, NO, hic vero per rectas BD, CE, quibus illæ parallelæ sunt ostensæ. Non secus ostendentur parallelæ circuli QRSTV, FGHIK. Omnes ergo quatuor circuli paralleli sunt.

[b] 9. vndec.

[c] 33. primi

[d] 15. vnde.

RVRSVS quoniam iunctæ rectæ EE, OV, cum ex scholio propos. 8. lib. 13. lateri PK, in pentagonis AEKPF, TVPKO, æquidistent, [e] parallelæ sunt; nec non & inter se æquales, quod angulos æquales in pentagonis æqualibus subtendant, [f] erunt & rectæ iunctæ EO, FV, parallelæ & æquales. Quadrilaterum ergo EFVO, in vno plano est, [g] cum EF, OV, in eodem sint plano cum parallelis EO, FV. Est autem & in circulo, [h] propterea quod planum, in quo existit, in sphæra circulum efficit. Igitur ex ijs, quæ ad propos. 31. lib. 3. demonstrauimus, cum in eo quadrilatero opposita latera æqualia sint, quadrilaterum rectangulum est EFVO; ac proinde cum omnia latera æqualia sint, subtendētia angulos æquales in pentagonis æqualibus, quadratum erit. Iuncta ergo eius diameter FO, duplum potest lateris FE, ex scholio propos. 47. lib. 1. hoc est, rectæ iunctæ FG, quod æquales sint FG, FE, subtendentes angulos pentagono-

[e] 9. vndec.

[f] 33. primi

[g] 7. vndec.

[h] 1. 1. Theodosii.

tagonorum æqualium: ideoque qualium partium 1. ſtatuetur quadratum rectæ FG, talium 2. erit quadratum rectæ FO, & ambo quadrata ſimul earundem partium 3. Quibus [a] cum æquale ſit quadratum iunctæ rectæ OG, quæ diameter ſphæræ eſt; (Nam cū æquales ſint iunctæ FG, ON, ſubtendentes æquales angulos pentagonorum, & inter ſe parallelæ, quod duabus parallelis AB, ST, parallelæ ſint, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. erit ex lemmate 4. iuncta recta OF, ad FG, perpendicularis, & OG, diameter ſphæræ.) erit quoque quadratum diametri ſphæræ 3. qualium 1. eſt quadratum rectæ FG, hoc eſt, quadratum diametri ſphæræ quadrati rectæ FG, triplum erit. [b] Eſt autem & quadratum trianguli æquilateri triplum quadrati ſemidiametri, hoc eſt, lateris hexagoni. Igitur erit, vt quadratum diametri ſphæræ ad quadratum rectæ FG, ita quadratum lateris triāguli ad quadratum lateris hexagoni; [c] atque adeo vt diameter ſphæræ ad rectā FG, ita latus triāguli æquilateri ad latus hexagoni: Vt autem recta FG, ad latus trianguli in eodem circulo FGHIK, ita eſt latus pentagoni eiuſdem circuli ad latus trianguli, quod FG, ſit latus pentagoni. Igitur ex æqualitate perturbata erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli æquilateri in circulo FGHIK, ita latus pentagoni ad latus hexagoni, vt in appoſita formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque vt diameter ſphæræ ad latus trianguli, hoc eſt, ad iunctam rectam AB, in illa figura, ita latus pentagoni ad latus hexagoni; erit vterque circulus ABC, KLM, illius figuræ vtrique circulo FGHIK, LMNOP, huius figuræ æqualis.

Diam. ſphæræ	Latus pentag.
Recta FG.	Lat. triang.
Lat. triang.	Lat. hexag.

PRÆTEREA quia ex ſcholio propoſ. 2. lib. 14. eſt, vt iuncta recta FG, ſubtendens angulum pētagoni ABGLF, ad AB, latus pentagoni, ita latus hexagoni ad latus decagoni: Et vt FG, latus pentagoni in circulo FGHIK, ad AB, latus pētagoni in circulo ABCDE, ita latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE; erit quoq; vt latus triāguli in circulo FGHIK, ad latus triāguli in circulo ABCDE, ita hexagoni latus ad latus decagoni ē eodē circulo

[a] 47. primi

[b] 12. tertiidec.

[c] 22. ſexti

cum

cum hexagono deſcripti. Vt autem diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo F G H I K, *ita eſt latus pentagoni ad latus hexagoni in eodẽ circulo cũ pẽtagono deſcripti, vt proxime demõſtratũ eſt. Igitur ex æquo erit, vt diameter ſphæræ ad latus trianguli in circulo* A B C D E, *ita latus pentagoni ad latus decagoni in eodẽ circulo tũ pentagono deſcripti, vt in hac altera formula apparet. Cum ergo in figura præcedentis propoſ. ſit quoque, vt diameter ſphæræ ad* E F, *latus trianguli in circulo* D E F, *ita latus pentagoni ad latus decagoni; erit vterq; circulus* D E F, G H I, *figuræ antecedentis propoſ. vtrique circulo* A B C D E, Q R S T V, *huius figuræ æqualis. Quare circuli* A B C D E, F G H I K, L M N O P, Q R S T V, *ſunt illi, quos in propoſ. antecedenti, & in hac deſcripſimus.*

Diam. ſphæræ.	Lat. pentagoni.
Lat. triang. in circulo FGHIK.	Lat. hexagoni.
Lat. triang. in circulo ABCDE.	Lat. decagoni.

Q V I B V S demonſtratis, nullo negotio probabimus, ſolidam figuram A S, *a nobis deſcriptam eſſe Dodecaedrum: quippe cum Dodecaedro in ſphæra deſcripto, cuius baſis pentagonum* A B C D E, *omnes eius anguli ſolidi cadant in quina puncta aliorum trium circulorum parallelorum, e quibus latera pentagonorum eduximus; ac proinde ſingula horum latera ſingulis lateribus illius Dodecaedri congruant.*

COROLLARIVM.

P E R S P I C V E colligitur ex his, eundem circulum comprehendere & triangulum Icoſaedri, & pentagonum Dodecaedri in eadem ſphæra deſcriptorum: quia videlicet circulus D E F, *figuræ antecedentis propoſ. æqualis eſt circulo* A B C D E, *figuræ huius propoſ. Id quod demonſtratum quoque eſt lib. 14 propoſ. 5.*

M A N I F E S T V M quoque eſt, eoſdem prorſus circulos ſuſtinere & angulos ſolidos Icoſaedri, & angulos ſolidos Dodecaedri.

SCHO-

SCHOLIVM.

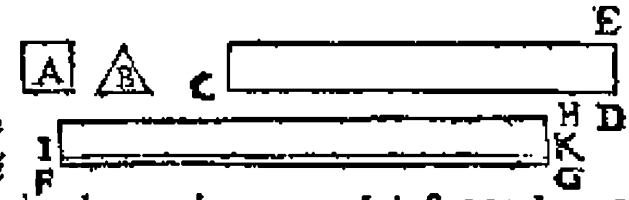
EX his, quæ hoc loco, & lib. 13. & 14. demonſtrauimus, facile etiam oſtendemus, ſi omnia quinque corpora regularia in vna eademque ſphæra deſcribantur, maximum omnium eſſe Dodecaedrum: Deinde Icoſaedrum maius reliquis tribus: Tertio cubum maiorem reliquis duobus: Octaedrum denique Tetraedro eſſe maius. Ex quo conſtabit, Euclidem recto ordine quinque hæc corpora conſtruxiſſe, cũ poſt Tetraedrum ſtatim octaedrum, non autem cubum, conſtituerit. Ita enim ſemper a minoribus ad maiora progreſſus eſt. Sed prius alia nonnulla demonſtranda ſunt. Hinc ergo exordiamur.

I.

SI quadratum, & triangulum æquilaterum æqualia habeant latera; erunt viginti triangula ſimul maiora, quam octo quadrata ſimul.

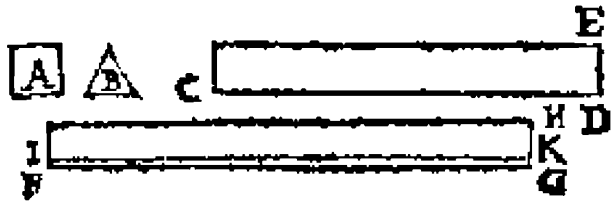
HABEANT quadratum A, & triangulum æquilaterum B, latera æqualia. Dico viginti triangula octo quadratis eſſe maiora. Sit enim rectangulum CE, cuius vnum latus CD, octuplum ſit lateris quadrati A, & latus DE, lateri eiuſdem quadrati æquale: Eritque rectangulũ CE, octuplum quadrati A, cum ſit, vt CD, ad latus quadrati A, ita rectãgulum CE, ad quadratum A, ob æqualem altitudinem. [a] *1. ſexti*

Sit quoque rectangulum FH, cuius vnum latus FG, decuplum ſit lateris trianguli B, & latus GH, æquale perpendiculari ex vno angulo trianguli ad eius baſem demiſſæ, hoc eſt, altitudini trianguli B. Et quoniam triangulum rectangulum, cuius vnum latus eſt vigecuplũ lateris trianguli B, & alterum latus æquale ipſi GH, hoc eſt, altitudini trianguli B, [b] *vigecuplum eſt trianguli B; Ei autẽ triangulo rectangulo æquale eſt, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. rectangulum*



[b] *1. ſexti*

ctangulum FH, quippe cum baſis FG, dimidium ſit baſis illius trianguli; erit quoque rectangulum FH, vigecuplũ trianguli B. Probandum igitur eſt, rectangulum FH, maius eſſe rectangulo CE. [a] Quoniam latus trianguli B, hoc eſt, latus DE, potentia ſeſquitertiũ eſt eius perpẽdicularis, hoc eſt, lateris GH: Latus autem FG, ad latus CD, potẽtia proportionẽ habet, quam 25. ad 16. quod FG, ſit 10. & CD, 8, hoc eſt, FG, 5. & CD, 4. Erit maior proportio FG, ad CD, quam DE, ad GH. Eſt enim maior proportio 25. ad 16. ſupernõcupartiens ſextaſdecimas, quam 4. ad 3. ſ. ſquitertia, quod maior ſit fractio $\frac{9}{16}$. quam $\frac{1}{3}$. [b] Fiat vt FG, ad CD, ita DE, ad HK; eritque maior quoque proportio DE, ad HK, quam ad GH; [c] ac proinde maior erit GH, quam HK. Ducta ergo KI, ipſi FG, parallela, erit vt IK, ipſi FG, æqualis ad CD, ita DE, ad HK. [d] Igitur erit IH, rectangulũ rectangulo CE, æquale: ideo ♃ FH, maius, quam CE. Quod eſt propoſitum.



a 12. quarti decim.

b 12. ſexti

c 10. quin.

d 14. vel 16. ſexti.

I I.

OCTO quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti.

[e] QVONIAM duo quadrata ex diametro ſphæræ deſcriptæ ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti æqualia ſunt: Duo vero eadem quadrata æqualia ſunt octo quadratis ex ſemidiametro ſphæræ deſcriptis, quod quadratum diametri quadruplum ſit quadrati ſemidiametri, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. efficitur, octo quadrata ſemidiametri ſphæræ æqualia quoque eſſe ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ. Quod eſt propoſitum.

e 20. quarti decim.

III.

SI octaedrum, cubus, & Icoſaedrum in eadẽ ſphæra deſcribantur, erit perpendicularis e centro

tro ſphæræ ad vnam baſim Icoſaedri ducta, maior perpendiculari ex eodem centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri,& cubi ducta.

NAM quia latus octaedri maius eſt latere Icoſaedri in eadem ſphæra; erit vnum triangulum octaedri maius quoque vno triangulo Icoſaedri. Quare ſi vtrumq; ſolidum ita intra ſphæram conſtituantur, vt triangulum vnius triangulo alterius ſit parallelum, longius a centro aberit Icoſaedri triangulum, quam triangulum Octaedri; cum vtrumque tribus angulis ſuperficiem ſphæræ attingat: Ac proinde perpendicularis e centro ſphæræ ad baſim Icoſaedri deducta maior erit perpendiculari ex eodem centro ad baſim Octaedri. Cum ergo perpendicularis octaedri æqualis ſit perpendiculari cubi; [b] quod baſis cubi, & baſis octaedri eodem circulo circumſcribantur, ideoque æqualiter a centro diſtent; erit quoq; perpendicularis Icoſaedri perpendiculari cubi maior. Quod eſt propoſitum.

[a] 18. tertii dec.

[b] 21. quarti dec.

IIII.

SI Cubus & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior eſt.

QVONIAM viginti triangula æquilatera ſuper ſemidiametro ſphæræ maiora ſunt octo quadratis ex eadē ſphæræ ſemidiametro deſcriptis, vt theoremate 1. demōſtrauimus: Sunt autem viginti triangula Icoſaedri maiora viginti triangulis æquilateris ſuper ſemidiametro ſphæræ conſtructis, quod latus Icoſaedri ſemidiametro ſphæræ maius ſit, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris. Igitur & vigints triangula Icoſaedri multo maiora ſunt octo quadratis ex ſphæræ ſemidiametro deſcriptis. Quam ob rem, cum viginti triangula Icoſaedri totam ſuperficiem Icoſaedri conficiant, at octo quadrata ex ſemidiametro ſphæræ deſcripta, ſuperficiei cubi æqualia ſint, ex theoremate 2. paulo ante demonſtrato; erit quoque Icoſaedri ſuperficies maior ſuperficie cubi. Quod eſt propoſitum.

DE

DE COMPARATIONE Soliditatum quinque corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum.

HIS præmiſſis, demonſtremus iam, Dodecaedrum maius eſſe Icoſaedro: Icoſaedrum maius cubo: Cubum maiorem Octaedro: Octaedrum denique maius Tetraedro. quod hunc in modum fiet.

I.

DODECAEDRVM Icoſaedro maius eſt.

QVONIAM eſt, [a] *vt cubi latus ad latus Icoſaedri, ita Dodecaedrum ad Icoſaedrum:* [b] *eſt autem latus cubi latere Icoſaedri maius; maius quoque erit Dodecaedrum Icoſaedro. Quod eſt propoſitum.*

[a] *17. quartidec.*
[b] *18. tertiædecimi*

II.

ICOSAEDRVM cubo maius eſt.

QVONIAM perpẽdicularis ex centro ſphæræ in vnã baſim Icoſaedri cadens, maior eſt perpendiculari ex eodem centro in vnam baſim cubi demiſſa, vt in 3. theoremate præmiſſo oſtenſum eſt: Item ex 4. theoremate, ſuperficies Icoſaedri ſuperficie cubi maior quoque eſt; Erit ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Icoſaedri cadente, & tertia parte ſuperficiei Icoſaedri contentum, maius ſolido, quod ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim cubi cadente, & tertia parte ſuperficiei cubi continetur. Cum ergo, vt in ſcholio propoſ. 20. lib. 14. demonſtrauimus, illud ſolidum Icoſaedro ſit æquale, & hoc cubo; maius quoque erit Icoſaedrum, quam cubus. Quod eſt propoſitum.

III.

CVBVS Octaedro maior eſt.

QVONIAM eſt, [a] vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ, ita cubus ad Octaedrum: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius. (Nam, cum latus cubi maius ſit latere Icoſaedri; & latus Icoſaedri, ex coroll. 1. problematis 4. ſuperioris, maius ſemidiametro ſphæræ; erit latus cubi multo maius ſemidiametro ſphæræ.) Igitur & cubus maior erit Octaedro. Quod eſt propoſitum.

[a] 27. quartidec.
[b] 18. tertiidec.

IIII.

OCTAEDRVM Tetraedro maius eſt.

QVONIAM baſis octaedri minor eſt baſe Tetraedri, [c] quod baſis Tetraedri ad baſem octaedri proportionem habeat ſeſquitertiam; erit perpendicularis ex centro ſphæræ ad vnam baſim octaedri demiſſa, maior perpendiculari ex eodem ſphæræ centro ad vnam baſim Tetraedri cadente: quod probabitur non aliter, quam ſupra theoremate 3. oſtendimus, perpendicularem in Icoſaedro maiorem eſſe perpendicularis in octaedro, & cubo. Eſt autem & ſuperficies octaedri ſuperficie Tetraedri maior, [d] cum illa huius ſit ſeſquialtera. Igitur ſolidum contentum ſub perpendiculari ex centro ſphæræ in vnam baſim Octaedri cadēte, & tertia parte ſuperficiei octaedri, maius eſt ſolido contento ſub perpendiculari ex eodem centro ſphæræ in vnam baſim Tetraedri deducta, & tertia parte ſuperficiei Tetraedri. Quocirca cum, ex ſcholio propoſ. 20. lib. 14. illud ſolidum octaedro ſit æquale, hoc vero Tetraedro; erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod eſt propoſitum.

[c] 14. quartidec.
[d] 14. quartidec.

ALITER. Quoniam eſt, [e] vt latus Octaedri ad latus Tetraedri, ita Octaedrum ad triplum Tetraedri: Vt autem latus Tetraedri ad eius tertiam partem, ita eſt triplum Te-

[e] 22. quartidec.

traedri ad tertiam eius partem, id est, ad ipsum Tetraedrũ. Igitur ex aequalitate erit quoque, vt latus Octaedri ad tertiam partem lateris Tetraedri, ita Octaedrum ad Tetraedrum. Cum ergo latus Octaedri maius sit tertia parte lateris Tetraedri; (Nam quũ quadratum lateris Tetraedri sesquitertium est quadrati lateris Octaedri; habebit latus Tetraedri ad latus Octaedri proportionem minorem sesquitertia, ideoque multo minorem triplam; ac proinde tertia pars lateris Tetraedri minor erit latere Octaedri.) Erit quoque Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

a 18. tertij dec.

b 10. quin.

ALITER. c Quoniam Tetraedrum ad Octaedrum se habet, vt rectangulum sub linea potente $\frac{2}{6}$. quadrati lateris Tetraedri, & sub linea continente $\frac{8}{9}$. lateris Tetraedri, ad quadratum diametri sphaeræ; Est autem rectangulum illud minus quadrato diametri sphaeræ, quod eius latera minora sint sphaeræ diametro; quippe quæ singula minora sint latere Tetraedri. Igitur & Tetraedrum Octaedro minus erit, hoc est, Octaedrum Tetraedro maius. Quod est propositum.

c 17. quartidec.

ALITER. d Quoniam cubus triplus est Tetraedri; minor vero quam triplus Octaedri e (Nam cubus ad octaedrum est, vt latus cubi ad semidiametrum sphaeræ; & latus cubi minus est, quam triplum semidiametri sphaeræ, quod & tota diameter, qua cubi latere maior est, minorem proportionem habeat ad semidiametrum, quam triplam.) e Erit Octaedrum maius, quam Tetraedrum. Quod est propositum.

d 32. quartidec.

e 27. quartidec.

EODEM prorsus ordine se mutua superant conuexa superficies eorundem corporum Regularium: hoc est, superficies conuexa Dodecaedri maior est superficie conuexa Icosaedri. Superficies conuexa Icosaedri maior superficie conuexa cubi: Conuexa superficies cubi superficie Octaedri maior: Octaedri denique superficies conuexa maior est conuexa superficie Tetraedri.

QVONIAM enim f est superficies Dodecaedri ad superficiem Icosaedri, vt latus cubi ad latus Icosaedri. Est autem cubi latus latere Icosaedri maius, g vt supra demonstratum est: Erit & superficies Dodecaedri superficie Icosaedri maior. h

f 9. quartidec.

g 18. tertij dec.

SVPERFICIEM vero Icosaedri maiorem esse superficie

perficie Cubi, demonſtratum eſt paulo ante theoremate quarto ante comparationem ſoliditatum quinque corporum Regularium.

DEINDE [a] quoniam eſt ſuperficies cubi ad octaedri ſuperficiem, vt latus cubi ad ſemidiametrum ſphæræ: Eſt autem latus cubi ſemidiametro ſphæræ maius, vt in theoremate tertio, quo oſtendimus, cubum Octaedro maiorem eſſe, demonſtratum eſt; Erit quoq; ſuperficies cubi ſuperficie Octaedri maior. [a] 27. quartidec.

DENIQVE [b] quia ſuperficies Octaedri ſeſquialtera eſt ſuperficiei Tetraedri; perſpicuum eſt, Octaedri ſuperficiem maiorem eſſe Tetraedri ſuperficie. [b] 14. quartidec.

VIDES igitur ſuperficies & ſoliditates corporum Regularium contrario ordine reſpondere eorundem lateribus: ita vt quo maius fuerit corpus, eo maiorem quidem habeat etiam ſuperficiem, at eo minus latus. Nam [c] vt ſupra demonſtratum eſt, Tetraedri latus eſt omnium maximum, eius vero ſuperficies atque ſoliditas, vt hic demonſtrauimus, omnium minima eſt: Item Dodecaedri latus omnium eſt minimum, eius vero conuexa ſuperficies & ſoliditas omnium maxima. Denique quemadmodum, ſi Tetraedrum, Octaedrum, Cubus, Icoſaedrum, & Dodecaedrum in eadẽ ſphæra deſcripta ſint, latera eorum, eo ordine, quo propoſita ſunt, atque ab Euclide deſcripta, ſe mutuo ſuperant, [d] vt ſupra oſtenſum eſt; ita contrario ordine eorundem ſuperficies conuexæ, atque ſoliditates ſe mutuo ſuperant, vt hoc loco demonſtrauimus. [c] 15. tertiidec. [d] 18. tertiidec.

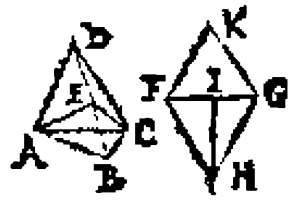
CÆTERVM prætereundum non eſt hoc ioco id, quod a Pappo demonſtratum eſt lib. 5. Mathematicarum collectionum; ſoliditates videlicet quinque corporum Regularium, ſi iſoperimetra ſint, atque idcirco, non in eadem ſphæra conſtructa, longe aliter ſe habere, quam a nobis demonſtratum eſt. Nam corpus, quod plures habet baſes, maius ſemper eſt corpore pauciorum baſium: Ita vt Icoſaedrum ſuperet Dodecahedrum, Dodecaedrũ maius ſit Octaedro, Octaedrum ſuperet Cubum, Cubus denique Tetraedro maius ſit.

INVENTIO ANGVLI inclinationis duarum baſium cuiuſcunque ſolidi regularis, vnius ad alteram, ex Iſidoro Hypſiclis præceptore.

I.

ANGVLVM inclinationis duarum Pyramidis baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT Pyramis A B C D, cuius latere B D, bifariam ſecto in E, ex angulis A, & C, lateri BD, oppoſitis rectæ ducantur A E, & C E; quæ cum perpendiculares ſint ad B D, communem ſectionem planorum A B D, C B D, in quibus exiſtunt. (a Sunt.n.in triangulis AEB, A E D, anguli ad E, æquales,&c.) angulũ inclinationis AEC, baſiũ ABD,CBD,continebunt,ex defin. 6. lib. 11. Huic ergo æqualem exhibebimus in quolibet plano, hac ratione. Aſſumatur FGH, triangulum æquilaterum ſuper rectam FG, lateri pyramidis æqualem conſtructum, atque idcirco triangulo cuicunque pyramidis propoſitæ, ipſi nimirum A B D, æquale, in quo ducta HI, perpendiculari ad F G, conſtituatur ſuper FG, triangulum FGK, habens vtrumque latus F K, G K,



a 8. primi.

GK, æquale perpendiculari HI, hoc eſt, vtrique perpendiculari AE, CE, cum perpendiculares HI, AE, CE, ſint æquales in triangulis æqualibus. Dico angulum FKG, æqualem eſſe angulo inclinationis AEC, baſium ABD, CBD. Cum enim latera KF, KG, æqualia ſint lateribus EA, EC; & baſis FG, baſi AC; Aequales erunt anguli FKG, AEC. Dico inſuper angulum inclinationis AEC, acutum eſſe. Cum enim latus AD, vel illi æquale AC, ſeſquitertium ſit potentia vtriuſque perpendicularis AE, CE; qualium partium 4. ponetur quadratum rectæ AC, taliũm 3. erit quadratum vtriuſque rectæ AE, CE; ideoque earundem partiũ 6. erunt ambo ſimul quadrata rectarum AE, CE. Quare cũ in triangulo ABC, quadratum lateris AC, minus ſit quadratis ſimul laterum AE, CE, acutus erit angulus AEC, vt in ſcholio propoſ. 13. lib. 2. demonſtrauimus.

[a] 8. primi.

[b] 12. quartidec.

COROLLARIVM.

FACILE hinc colligemus, omnes inclinationes baſium pyramidis æquales eſſe. Cum enim ſinguli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad baſes oppoſitas ductis, cuiuſmodi ſunt AE, CE, ſubteudanturque a lateribus pyramidis, quale fuit AC; omnes erunt inter ſe æquales, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æqua-

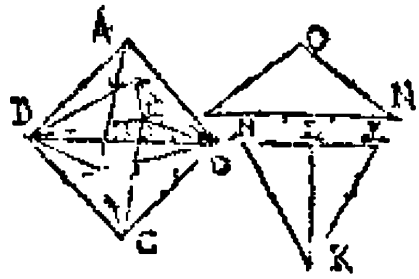
[c] 8. primi.

les ſint; nõe non & latera pyramidis eaſdem ſubtẽdentia?

II.

ANGVLVM inclinationis duarum octaedri baſium, vnius ad alteram, reperire.

EXHIBEATVR octaedrum ABCDEF, cuius diameter BD. Ex angulis B, & D, ad latus AE, triangulis ABF, ADE, communi, bifariamq; ſectum in G, rectæ ducãtur BG, DG; quę cũ perpẽdiculares ſint ad AE, communẽ ſectionem planorum ABE, ADE, in quibus exiſtũt, (quod in triãgulis BGA, BGE, anguli ad G, æquales ſint, &c.) continebunt angulum BGD, inclinationis baſium ABE, ADE, per defin. 6. lib. 11. Huic igitur æqualem exhibebimus in plano quolibet hac via. Sumatur HIK, triangulum æquilaterum ſuper rectam HI, lateri octaedri æqualem fabricatum, ideoque triangulo cuicunque octaedri propoſiti, triangulo ſcilicet ABE, æquale, in quo ducta KL, perpendicularis ad HI, conſtituatur ſuper recta MN, quæ æqualis ſit diametro octaedri BD, hoc eſt, diametro



* 8. primi.

metro quadrati ABCD, ex AB, latere octaedri descripti, triangulum OMN, habens vtrũque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtrique perdendiculari BG, DG, cum perpendiculares KL, BG, DG, in triangulis æqualibus æquales sint. Dico angulum MON, æqualem esse angulo inclinationis BGD, basium ABE, ADE. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GD; & basis MN, basi BD, Æquales erunt anguli MON, BGD. Dico præterea, angulum inclinationis BGD, esse obtusum. Cũ enim diameter octaedri BD, dupla sit potentia lateris AB, latus vero AB, potentia sesquitertium rectæ BC: quaiium partium 8. ponetur quadratum diametri BD, talium 4. erit quadratum lateris AB, earundemque 3. quadratum rectæ BG; ideoque ambo simul quadrata rectarum BG, DG, talium partium 6. erunt. Quare quadratum lateris BD, in triangulo GBD, maius est quadratis simul laterum GB, GD; Ac propterea angulus BGD, obtusus erit, vt in scholio propos. 12. lib. 2. ostendimus.

[a] 8. primi.

[b] 14. terti decimi

[c] 12. quarti dece.

COROLLARIVM.

HINC fit, omnes inclinationes basium octaedri æquales esse. Cum enim singuli anguli inclinationum continentur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales

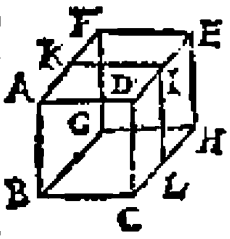
ſunt BG, DG, ſubtendanturque ab octaedri diametris, cuiuſmodi eſt BD; omnes inter ſe æquales erunt, quod & omnes illæ perpendiculares, quæ ipſos continent, æquales ſint, necnon & diametri octaedri eoſdem ſubtendentes.

a 8. primi.

III.

ANGVLVM inclinationis duarum cubi baſium, vnius ad alteram, inuenire.

SIT cubus ABCDEFGH, in quo ſecetur latus DE, bifariam in I, necnon & latera illi oppoſita in quadratis AE, EC, commune latus illud DE, habentibus, in punctis K, L. Deinde rectæ ducantur IK, IL; quę cum æquales, ac parallelæ ſint lateribus EF, EH, (quod & KF, IE, inter ſe, nec non & IE, LH, inter ſe æquales exiſtant, & parallelæ) ideoque angulos rectos ad latus DE, efficiant, cõtinebunt KIL, angulum inclinationis baſium AE, EC, ex defin. 6. lib. 11. Quoniam vero rectæ IK, IL, parallelæ exiſtentes rectis EF, EH, & non in eodem cum illis plano, angulum KIL, æqualem continent angulo recto FEH; Rectus erit angulus inclinationis baſium cubi. Quare vt angulo inclinationis baſium cubi æqualis in aliquo plano exhibeatur, cõſtituendus erit angulus rectus. Hic enim, vt modo demonſtrauimus, æqualis erit angulo inclinationis baſium cubi.



b 33. primi

c 10. vnde.

C o-

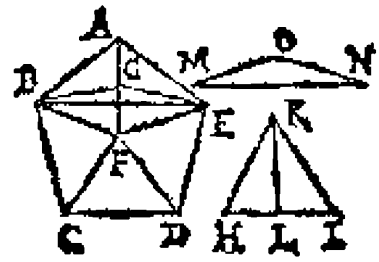
COROLLARIVM I.

QVOCIRCA, cum eodem argumento demonſtrari poſſit, quarumlibet duarum baſium cubi angulum inclinationis eſſe rectum; perſpicue concluditur, omnes inclinationes baſium cubi æquales inter ſe eſſe.

IIII.

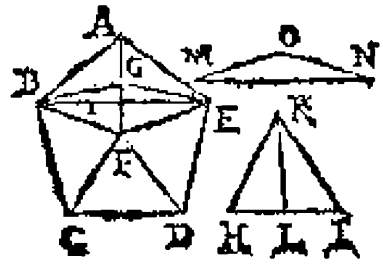
ANGVLVM inclinationis duarum baſium Icoſaedri, vnius ad alteram, inuenire.

ESTO pyramis ABCDEF, una ex 12. pyramidibus Icoſaedri, cuius baſis pentagonum *ABCDE*, ex quinque Icoſaedri lateribus compoſiti ſitum, vertex autem F. Diuiſo itaque latere AF, bifariam in G, ducantur ex triangulorum ABF, AEF, latus *A*F, commune habentium, angulis *B*, & *E*, lateri *A*F, oppoſitis rectæ *B*G, *E*G, quæ cum ex demonſtratis in problemate 2. huius ſcholij, perpendiculares ſint ad *A*F, communem ſectionem planorum A*B*F, *A E* F, in quibus ducuntur, comprehendent



*B*GE,

BGF, angulum inclinationis basium ABF, ALF, per 6. defin. lib. 11. Huic igitur in plano quouis exhibebimus æqualem, hac arte. Accipiatur triãgulum æquilaterum HIK, super rectam HI, lateri Icosaedri æqualem fabricatũ, hoc est, cuiuis triangulo Icosaedri, ipsi videlicet ABF, æquale, in quo ducta recta KL, ad HI, perpendicularis, constituatur super recta MN, quæ rectæ BE, angulum pentagoni A, subtendenti sit æqualis, triangulum OMN, habens vtrumque latus MO, NO, perpendiculari KL, æquale, hoc est, vtrique perpendiculari BG, EG, cum perpendiculares KL, LG, EG, in triangulis æqualibus sint æquales. Dico angulum MON, angulo BGE, inclinationis basium ABF, ALF, æqualem esse. Cum enim latera OM, ON, æqualia sint lateribus GB, GE, & basis MN, basi BE; Æquales erunt anguli MON, BGE. Dico hunc etiam angulum inclinationis BGE, esse obtusum. Cum enim BG, angulum rectum faciat AGE; erit recta AB, maior quam recta BG; ad eundemque modum AE, maior erit quam EG. Quare rectæ AB, AE, maiores quoque erunt rectis OM, ON, cum hæ rectis GB, GE, positæ sint æquales. Si itaque recta BL, super rectam sibi æqualem MN, intelli-



a 8. primi.

b 19. primi.

intelligatur poni; cadet angulus *A*, extra trian gulum *MON*, ita vt rectæ *AL*, *AL*, rectas *OM*, *ON*, prorsus includant. [a] Angulus ergo *O*, maior erit angulo *BAL*: At hic obtusus est. (cum enim quilibet angulus pentagoni ex sex rectis sint æquales, per ea, quæ a nobis sunt demonstrata in scholio propos. 32. lib. 1. comprehendet quilibet illorum rectum, ac insuper vnius recti partem quintam, obtusus ergo erit, cum recto sit maior). Multo igitur magis obtusus erit angulus *MON*, hoc est, sibi æqualis *BGE*. [a] 21. primi.

COROLLARIVM.

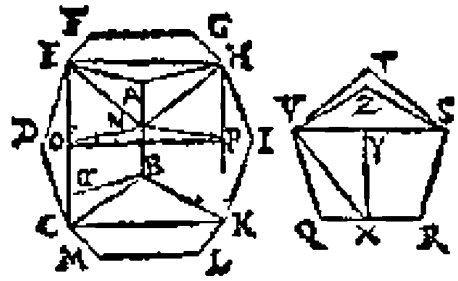
NON obscure quoque ex his consequitur, omnes basium Icosaedri inclinationes inter se æquales esse. Nam cum singuli anguli inclinationum contineantur binis perpendicularibus ab angulis triangulorum ad bases oppositas ductis, quales sunt EG, EG, subtendanturque a rectis angulos pentagonorum subtendentibus, cuiusmodi est BE: [b] *omnes inter se erunt æquales, quod & illæ omnes perpendiculares, quæ ipsos continent, æquales sint, nec non & rectæ illæ omnes, quæ pentagonorum angulos subtendunt æquales æqualibus rectis comprehensos,* [c] *æquales erunt.* [b] 8. primi. [c] 4. primi.

V.

ANGVLVM inclinationis duarũ basium Dodecaedri, vnius ad alteram, reperire.

CVM

CVM per ea, quæ oſtendimus in propoſ. 8. lib. 15. quatuor latera cubi in Dodecaedro deſcripti ſubtendant quatuor angulos quatuor baſium Dodecaedri ad vnum latus coeuntium; ſint huiuſmodi pentagona ABCDE, EFGHA, AHIKB, BKLMC, ad latus AB, conuenientia; duo quidem ABCDE, AHIKB, ſecundum idem latus cõmune AB; alia autẽ duo AEFGH, BCMLK, ſecundum angulos EAH, CBK.

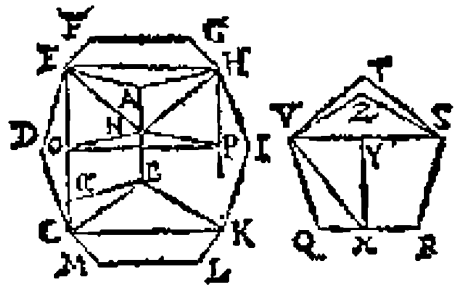


His porro pẽtagonis inſcriptum ſit quadratum cubi ECKH, cuius quatuor latera ſubtendant quatuor angulos pentagonorum D, B, I, A. Diuiſo autem latere AB, bifariam in N, ducantur ex N, in planis pentagonorum ABCDE, ABKIH, ad AB, perpendiculares NO, NP, ſecantes latera EC, HK, in O, & P, ad angulos quoque rectos, cum rectæ EC, HK, ipſi AB, ſint parallelæ, ex ſcholio propoſ. 8. lib. 13. Comprehendunt igitur NO, NP, angulum ONP, inclinationis baſium ABCDE, ABKIH. Cui æqualem in quouis plano hac arte conſtruemus. Super rectam QR, lateri Dodecaedri AB, æqualem conſtituatur pentagonum æquilaterum & æquiangulum QRSTV, hoc eſt, cuiuis pentagono Dodecaedri, nimirum ipſi ABCDE, æquale, cuius angulo T, recta

recta ſubtendatur V S, æqualis exiſtens rectæ E C, cum & latera T V, T S, lateribus D C, D E, æqualia ſint, angulosque contineant æquales. Diuiſa deinde recta Q R, biſariam in X, ducatur a puncto X, ad Q R, perpendicularis X Y; proptereaque perpendicularis ad V S, cum V S, ſit parallela ipſi Q R, ex ſcholio propoſit. 8. libri 13. Ac poſtremo ſuper recta V S, triangulum fabricetur V Z S, habens vtrumque latus Z V, Z S, perpendiculari X Y, æquale. Dico angulum V Z S, æqualem eſſe angulo inclinationis O N P. Ductis enim rectis N E, N H, V X; cum latera E A, A N, æqualia ſint lateribus H A, A N: Item lateribus V Q, Q X, angulosque comprehendant æquales; [a] Aequales erunt & baſes N E, N H, V X, & anguli A N E, A N H, Q X V; ideoque & reſidui ex rectis, anguli videlicet E N O, H N P, V X Y, æquales erũt. Quoniã igitur anguli E N O, E O N, trianguli E N O, æquales ſunt angulis H N P, H P N, trianguli H N P; nec nõ & angulis V X Y, V Y X, triãguli V X Y; (ſunt.n. E O N, H P N, V Y X oſtenſi recti.) Et latus N E, lateribus N H, V X, æquale demonſtratum; [c] Aequalia erunt reliqua latera N O, O E, reliquis lateribus N P, P H; Item lateribus X Y, Y V. Quare rectæ Z V, Z S, æquales exiſtentes ipſi X Y, rectis N O, N P, æquales erunt. Iam vero, quia O E, P H, æquales ſunt, ac parallelæ; [d] erit quoque recta coniuncta O P, æqualis & parallela ipſi E H, ideoque æqualis ipſi E C, hoc eſt, rectæ V S,

[a] 4. primi.
[b] 4. primi
[c] 6. primi.
[d] 33. primi

VS. Quam ob rem, cum latera ZV, ZS, lateribus NO, NP, æqualia sint; basis item VS, basi
[a] 8. primi. OP; [a] æqualis erit angulus VZS, angulo inclinationis ONP. Dico etiam angulum hunc ONP, inclinationis, esse obtusum. Nã ducta recta Bα, ipsi NO, parallela; cũ sit quoq; NB, ipsi Oα, parallela, ex scholio prop. 8. lib. 13. Parallelogrãmum erit NOαB, ideoq; recta Bα, ipsi NO, æqualis. Quia vero BC, latus pentagoni oppositum angu-



[b] 34. primi

[c] 29. primi lo Cαβ, qui rectus est, (æqualis nimirum interno CQN,) maius est latere Bα, hoc est, rectæ NO, vel vtraque ZV, ZS, quæ ipsi NO, ostensæ sunt æquales; Erunt duæ rectæ TV, TS, maiores duabus rectis ZV, ZS. Cadit igitur punctum Z, intra triangulum TVS, ita vt rectæ TV, TS, rectas ZV, ZS, includant omnino; Atque proinde angulus VZS, ideoque illi æqualis ONP, maior est angulo pentagoni T: Hic vero, cum sit pentagoni angulus, paulo ante, cum de inclinatione basium Icosaedri ageremus, demonstratus est maior recto. *Multo* igitur maior recto erit angulus inclinationis ONP, ideoque obtusus.

COROLLARIVM.

PATET igitur ex his, omnes inclinationes basium Dodecaedri *æquales esse inter se. Cum enim singuli*

guli anguli inclinationum continentur binis perpendicularibus a medio puncto lateris Dodecaedri ad duo latera cubi in Dodecaedro descripti ductis; quales sunt NO, NP, subtendant itaque a rectis, quę cubi inscripti lateribus sint æquales, vel certe, quę rectis subtendentibus angulos pentagonorum æquales sunt, cuiusmodi est recta OP, lateri cubi inscripti EH, quod angulum pentagoni EAH, subtendit, æqualis; [a] *Erunt omnes inter se æquales, cum & omnes illæ perpendiculares, quę ipsos continent, æquales sint, nec non & rectę illæ omnes, quę eosdem subtendunt, latera videlicet cubi, inter se etiam sint æquales.*

[a] *8. primi.*

ELEMENTI DECIMISEXTI FINIS.

INDEX PROBLEMATVM,

QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR.

QVORVM EA, QVAE EVCLIDIS sunt, eodem charactere sunt expressa, quo in propositionum demonstrationibus vsi sumus: quæ vero adiecta a nobis, charactere, quo scholia notauimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, secundum significat. Vt autem facilius quisque inueniat problemata, quæ cupit, digessimus ea secundum materias, de quibus proponuntur.

ACVTANGVLVM trian gulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquila tera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquian gula figura. vide. Figura in- tra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangu- lum. vide. Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Angulum datum rectilineum bi fariam secare. pag. 97. A

Angulum datum rectilineum in quotuis partes æquales diuidere. pag. 99. & 902. A

Angulum rectum datũ in tres an- gulos æquales partiri. 176. A

Angulum rectum ad pũctum in data recta linea datum conſtituere. 103 A

Angulum rectum ad extremũ punctum lineæ rectæ conſtituere, &c. pag. 104. & 168. A

Angulum rectum in data recta per lineam ex puncto extra rectam dato ductam conſtituere. 105. & 106. A

Angulum rectũ in data recta conſtituere per lineam ductam ex puncto extra rectam dato, quando punctum vicinum eſt datæ rectæ, vel prope extremum plani cuiuſpiam, vel quando recta data prope extremum plani eſt, vel denique quando & datum punctum eſt vicinum extremo plani, et recta data eſt prope aliud extremum plani. 107. & 168. A

Angulus propoſitus, rectus ne ſit, an obtuſus, acutusve, cognoſcere. pag. 40. & 41. A

Angulum dato angulo rectilineo æqualem ad datã rectam lineam, datumque in ea punctũ conſtituere. 131. & 132. A

Angulos rectilineos, & arcus circulorum reperire incommenſurabiles. 918. A

Ex tribus angulis planis, quorũ duo quomodocũque aſſumpti reliquo ſunt maiores, ſolidũ angulum cõſtituere. Oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores eſſe. pagina 579. B

Ad datam rectam lineam, eiuſq; punctum angulum ſolidũ conſtituere ſolido angulo dato æqualem. 590. B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

Circuli dati centrum reperire. pag. 327. A

Per datum punctum in circumferentiæ rectam, quæ circulũ tangat, ducere. 353. A

A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulũ tangat. 388. & 432. A

Circulis duobus datis, quorum neuter alterum includat; rectam lineam ducere, quæ vtrumque circulum tangat. 389. A

Circulum per datum punctum deſcribere, qui alium datum circulum tangat. 391. A

Lineæ rectæ, quæ circulum ſecat, lineam parallelã ducere, quæ eundem circulum tangat. 394. A

Circuli ſegmento dato, deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum. 410. A

Circulum per tria puncta non exiſtentia in lineæ rectæ, deſcribere. 412. & 465.

Arcum datum ſecare bifariam pag. 425. A

Circuli ſegmẽtum ſuper datam rectam deſcribere, in quo angulus exiſtens ſit æqualis dato angulo rectilineo. 436. A

A dato circulo ſegmentum abſcindere

ſcindere capiens angulum angulo dato rectilineo æqualem pag. 437.A

Circulis duobus datis, quorũ vnus non ſit totus intra alium, circulum, qui vtrumque tangat, deſcribere. 449.A

In circulo dato rectam accommodare datæ rectæ, quæ diametro maior nõ ſit, æqualem. pag. 456.A

In circulo rectam accommodare æqualem datæ rectæ, quæ circuli diametro maior non ſit, & alteri rectæ parallelam. 457.A

Dato circulo, & duobus punctis, ſiue extra circulum, ſiue intra, dummodo neutrũ ſit in circumferentia; per ea puncta duas rectas ducere ad aliquod vnũ punctum circumferentiæ, ita vt recta coniungens duo puncta, quibus duæ illæ rectæ circumferentiã ſecant, parallela ſit rectæ datæ duo puncta connectenti. 890.A

Datum arcum circuli in datã proportionem diuidere. 900.A

Datum arcum, vel angulum rectilineum in quotuis partes æquales partiri 902.A

Dato arcu circuli, ex cuius quadrante quadratrix deſcripta eſt, rectam lineam inuenire æqualem. 905.A

Dato circulo quadratum æquale conſtituere. 908.A

Dato quadrato, circulũ æqualem deſcribere. 911.A

Circulum cuicũque rectilineo æqualem deſcribere: Et circulo figurã rectilineam æqualem conſtituere, quæ cuicunque alteri ſimilis ſit. 912.A

Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli æqualem reperire. 912.A

Datis duobus circulis inæqualibus, datoque arcu in vno eorum; ex altero arcum æqualem abſcindere. 913.A

Arcus circulorum, & angulos rectilineos inuenire incommenſurabiles. 918.A

CIRCVMFERENTIA.

vide, Circulus.

COMMENSVRABILES, & incommenſurabiles magnitudines.

An duæ quæcunque magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles, nec ne, explorare. 293.B

Duabus magnitudinibus commẽſurabilibus datis, maximã earum communem menſuram inuenire. 294.B

An quotlibet magnitudines propoſitæ ſint commenſurabiles nec ne, conſiderare. 295.B

Tribus magnitudinibus commẽſurabilibus datis, maximã earum mẽſuram communem inuenire. 297.B

Propoſitis duabus magnitudinibus commenſurabilibus, quam proportionem habeant in numeris, inuenire. 301.B

Rectam inuenire, ad quam ita ſe habeat

ra complecti, qua & prædictas figuras. 739.&936.B
Latera quinque corporum Regularium exponere, & inter se comparare. 749.B
Numerum laterum, & angulorum solidorum cuiusq; corporis Regularis expedite cognoscere. 756.B
In dato cubo pyramidem describere. 827.B
In data pyramide octaedrũ describere. 828.B
In dato cubo octaedrum describere. 829.B
In dato octaedro cubum inscribere. 831.B
In dato Icosaedro Dodecaedrũ inscribere. 833.B
In dato octaedro pyramidem describere. 836.B
In dato Dodecaedro Icosaedrum describere. 838.B
In dato Dodecaedro cubum describere. 840.B
In dato Dodecaedro octaedrum describere. 841.B
In dato Dodecaedro Pyramidem describere. 842.B
In dato Icosaedro cubum describere. 843.B
In dato Icosaedro Pyramidem describere. 844.B
In dato cubo Dodecaedrum describere. 844.B
In dato cubo Icosaedrum describere. 853.B
In dato Icosaedro octaedrum describere. 856.B
In dato octaedro Icosaedrum describere. 857.B
In dato octaedro Dodecaedrum describere. 862.B
In data pyramide cubum describere. 863.B
In data pyramide Icosaedrum describere. 869.B
In data pyramide Dodecaedrum describere. 870.B
In dato solido Regulari sphæram describere. 871.B
Datis duobus circulis in sphæra parallelis, datáque in vno eorum linea recta, ducere in altero diametrum huic rectæ datæ parallelam: vel etiam aliam rectam, quæ datæ rectæ sit æqualis et parallela, dũmodo rectæ datæ maior no sit diametro posterioris circuli. 918.B
In data sphæra duos circulos æquales, ac parallelos describere, ita vt diameter sphæræ sit vtriusque diametri potentia sesquialtera. pag. 924.B
Angulum inclinationis duarum basium cuiusque corporis Regularis inuenire. 948.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

A data recta linea imperatã partem auferre. 768.A
Datam rectam lineã similiter secare, vt data altera recta secta fuerit. 769.A
Datã rectam in quotuis partes æquales secare. 210.&770.A
Data rectã secare in duas partes datam

datam proportionem habentes. pag. 773.A
Datam rectam in quotuis partes Arithmetice proportionales secare. 776.A
Datis duabus rectis, tertiã proportionalem inuenire. 777.A
Quotuis rectas in data proportione continue proportionales reperire. pag. 778.A
Datis tribus rectis, quartã proportionalem inuenire. 780.A
Datis duabus rectis, alias duas in eadem cum illis proportione reperire. 781.A
Datis tribus rectis, quartam inuenire, quæ sit ad tertiam, vt prima ad secundam. 781.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem inuenire. 782.A
Data recta, aliam rectam (quæ minor non sit, quàm dupla illius) ita secare, vt data recta sit media proportionalis inter segmenta huius. 783.A
Secta recta in duas partes vtcunq; alterutram earum ita rursus partiri in duas partes, vt omnes tres partes sint continue proportionales. 789.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalẽ in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792.A
Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Arithmetica proportionalitate inuenire. 792.A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Arithmetica inuenire. 793.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Geometrica proportionalitate inuenire. 793.A
Datis duabus rectis, minorẽ extremitatẽ in Geometrica proportionalitate inuenire. 794.A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in Geometrica proportionalitate inuenire. 794.A
Datis duabus rectis, mediam proportionalem in Harmonica proportionalitate inuenire. 795.A
Datis duabus rectis, minorem extremitatem in Harmonica medietate inuenire. 796.A
Datis duabus rectis, maiorem extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 797.A
A data recta dato rectilineo simile, similiterque positum rectilineum describere. 810.A
Dato rectilineo simile, similiterque positum, & alteri dato æquale idem constituere. pag. 839.A
Ad datam rectam, dato rectilineo, quod maius non sit parallelogrammo ad dimidiam applicato, æquale parallelogrãmum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo dato. 846.A
Ad datam rectam, dato rectilineo æquale parallelogrammũ applicare, excedens figura parallelogramma, quę similis sit parallelogrammo alteri dato. pag. 849.A

Datam

Datã rectã terminatã extrema, ac media rõne ſecare. 850.A

A dato rectilineo imperatam partem auferre, itæ tamen, vt & ablatũ, & id, quod relinquitur, ſimile ſit cuiuis rectilineo dato, ſimiliterque poſitum. 869.A

Datis duobus rectilineis, tertium proportionale inuenire. 870.A

Datis tribus rectilineis, quartũ proportionale inuenire. 870.A

Datis duobus rectilineis, medium proportionale inuenire. 871.A

Dato rectilineo, duo rectilinea ęqualia conſtituere, quæ ſimilia ſint ſimiliterque deſcripta cuicunque rectilineo, habeantq; datam proportionem inter ſe. 872.A

Dato rectilineo, duo rectilinea ęqualia exhibere, quę cuiuis rectilineo ſimilia ſint, ſimiliterq; deſcripta, lateraque eorum homologa habeant inter ſe datam proportionem. 873.A

Datis duobus rectilineis, æquale rectilineum conſtituere, quod ſimile ſit, ſimiliterque poſitum dato rectilineo. 874.A

A dato puncto in latere trianguli rectam ducere, quæ triangulum diuidat in duo ſegmenta ſecundum datam proportionem. pag. 879.A

Dato rectilineo ſimile, ſimiliterque poſitum rectilineum deſcribere, maius vel minus, ſecundum datam proportionem. 881.A

In dato quadrato aliud quadratum deſcribere in data proportione, quæ dupla maior non ſit. pag. 885.A

Datum arcum circuli in datã proportionem diuidere. 900.A

Iſoſceles triangulum conſtituere, cuius vterque angulorum æqualiũ ad reliquum habeat proportionem datam. 902.A

FIGVRAE planę quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

IRRATIONALES magnitudines. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Triangulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.

Proportionem ex duabus, vel pluribus proportionibus componere. pag. 831.A

Proportionem minorem ex maiore auferre. 831.A

MINVTIAE numerorum.

Duas minutias diuersarum denominationum ad alias duas eiusdem denominationis illis æquales reducere. 249.B

Integrum numerum quemcunque ad dati denominatoris minutiã reducere. 249.B

Datam minutiam duplare, ac dimidiare. 250.B

Minutiam minutiæ, aut minutiam minutiarum ad simplicem minutiam reducere. 253.B

Datis duabus minutijs, alterutram earum ad aliam æqualem reducere, ita vt alterius numeri numeros huius inuenta numerent, per numeros ex numeratore datæ minutiæ reductæ in denominatorem alterius minutiæ datæ, & ex numeratore alterius huius minutiæ datæ ad denominatorem illius reductæ productos. 254.B

Datam minutiam ad minimos terminos reducere. 257.B

Datam minutiam ad aliam æqualem datæ denominationis, quando id fieri potest, reuocare. 257.B

Minutias plures in vnam summam colligere. 259.B

Minutiam minorem ex maiore detrahere. 261.B

Minutiam per minutiam multiplicare. 263.B

Minutiam per minutiam diuidere. 264.B

Minutiam in minutiam inferere. pag. 267.B

NVMERI proportionales in communi.

Ex datis duobus numeris, tres numeros Harmonice proportionales inuenire, quorum extremi eandem proportionem habeant, quam dati duo numeri. 800.A

Datis duobus numeris, medium Harmonice proportionalem inuenire. pag. 802.A

Datis duobus numeris, minorẽ extremitatem in proportionalitate Harmonica inuenire. 803.A

Datis duobus numeris, maiorẽ extremitatem in proportionalitate Harmo-

Harmonica inuenire. 803.A
Datis duobus numeris, maiorem extremitatē in Harmonica proportionalitate inuenire, 805.A
Datis nun eris quotcunque, reperire minimos omniū eandem rationem habentium cum ipsis. 95.B
Duos minimos numeros reperire in proportione quotuis numerorum continue proportionalium. pag. 96.B
Numeros reperire deinceps proportionales minimos quotcūque quis iusserit in data ratione. 110.B
Numeros quotcunque integros, & minimos continue proportionales aliter reperire, in proportione data non multiplici. 114.B
Datis quotcunque rationibus in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus 117.A
Duobus numeris datis, considerare, an possit ipsis tertius proportionalis inueniri. pagina 210.A
Tribus numeris datis, considerare, an ipsis quartus proportionalis possit inueniri. 211.B
Datis quotlibet numeris, considerare, an ipsis possit alius proportionalis adiungi. 213.B
Summam quotcunque numerorum continue proportionalium inuenire. 230.B
Inuenire quotcūq; numeros continue proportionales in data proportione, quorum summa æqualis sit numero, qui ex primo in vltimum gignitur, vel ex quibuslibet duobus, qui ab extremis æqualiter distant. 239.B
Item quorum summa sit numerus quadratus, cuius radix sit medius terminus. 239.B
Duos numeros in data proportione inuenire, quorum summa æqualis sit numero producto ex vno in alium. 239.B

NVMERVS fractus. vide. Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Datī duo numeri an sint primi, inter se, necne, considerare. 34.B
Datis duobus numeris non primis inter se; maximam eorum communem mensuram reperire. 35.B
Datī quotuis numeri sint ne primi inter se, an non, considerare. pag. 36.B
Datis tribus numeris nō primis inter se, maximā eorū communem mensuram reperire. 37.B
Datis duobus numeris, minimū numerum ab eis numeratum reperire. 97.B
Tribus numeris datis, reperire minimum ab eis numeratum. pag. 100.B

Datis quotuis numeris, inuenire minimum ab eis numeratum. pag. 102.B

Numerũ reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes. pag. 103.B

Numerum reperire, qui minimus cum ſit, habeat datas partes, hac lege, vt qualibet pars contineat partem ſubſequentem. 106.B

Primis numeris datis quotcunque, inuenire alium primum numerum ab illis diuerſum. 216.B

Omnes pariter pares tantum reperire. 226.B

Omnes pariter impares tantum inuenire. 227.B

Omnes pariter pares, & pariter impares inuenire. 229.B

Omnes numeros perfectos inuenire. pag. 233.B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

Quadratum numerum inuenire, cũ quo datus quinus numerus quadratum quoque numerum conſtituat: Et a quo idem datus numerus ſubtractus relinquat quadratũ. 265.268.272.& 278.A

Planos numeros, vel ſolidos duos nõ ſimiles reperire. 171.B

Planos, vel ſolidos numeros quotcunque non ſimiles inuenire. pag. 318.B

Duos numeros planos ſimiles inuenire, pares, vel impares, vel vnum parem, & alterũ imparem. pag. 366.B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis quadratus etiam ſit. pagina 367.B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt exceſſus eorum quadratus etiam ſit. 368.B

Duos numeros quadratos inuenire, quorum exceſſus non ſit quadratus. 368.B

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis non ſit quadratus. 369.B

Duos numeros inuenire, ita vt compoſitus ex ipſis ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus ad quadratum. pag. 372.B

OBTVSANGVLVM triangulum, vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ, vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & plana parallela.

Dato plano, per datum punctum, quod in eo nõ eſt, parallelum planum ducere. 565.B

A data recta linea, dato ſolido parallelepipedo ſimile & ſimiliter poſitum ſolidum parallelepipedum deſcribere. pagina 592.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammum conſtruere, cuius vnus angulorum æqualis ſit dato angulo rectilineo, lateraque circa illum angulum datis duabus rectis æqualia. 165. A

Parallelogrammum ſecare biſariã per rectam per quoduis punctum ductam, quod non ſit in diametro, niſi quando diametrum ſecat biſariam. 183. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale conſtituere in dato angulo rectilineo. 218. A

Parallelogrãmo dato æquale triãgulum conſtituere in dato angulo rectilineo. 218. A

Parallelogrammum dato triangulo æquale cõſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221. A

Parallelogrãmo dato æquale triangulum conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223. A

Parallelogrammum dato rectilineo æquale conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 224. A

Parallelogrammum datis quotcunque rectilineis æquale conſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 225. A

Rectilineis duobus inæqualibus datis, exceſſum maioris ſupra minus inquirere. 226. A

Quadratum ſupra datam rectam conſtruere. 226. A

Quadratis duobus inæqualibus datis, inuenire alia duo quadrata, quæ & æqualia inter ſe ſint, & ſimul ſumpta æqualia duobus datis ſimul ſumptis. 236. A

Quadratis quotlibet datis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire quadratum omnibus illis æquale. 238. A

Quadratis duobus datis, alteri illorum adiungere figuram, quæ reliquo quadrato ſit æqualis, ita ut tota figura compoſita ſit etiã quadrata. 238. A

Quadratum dato rectilineo æquale conſtituere. 315. A

Dato exceſſu diametri alicuius quadrati ſupra latus eiuſdem: Inuenire latus ipſius quadrati. pag. 317. A

Dato circulo quadratũ æquale conſtituere. 908. A

Dato quadrato, circulum æqualem deſcribere. 911. A

PAR, & impar numerus. vide. numerus par, &c,

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par, &c.

PERFECTVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum, &c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum, &c.

PLANI numeri ſimiles. vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. vide. Numerus par, &c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum, &c.

PROPORTIO Figurarũ, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide. Numeri Proportionales in communi.

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſita Rationali com

men-

menſurabiles inuenire, quarum vna Rationali expoſitæ ſit æqualis. 342.B

Duas Rationales longitudine & inter ſe, & expoſita Rationali commenſurabiles inuenire, quarum neutra Rationali expoſitæ æqualis ſit. 342.B

Duas Rationales longitudine quidem inter ſe, potentia vero tantũ ex oſtæ Rationali commenſurabiles inuenire. 343.B

Rationales quotcũque longitudine inter ſe commenſurabiles inuenire. 343.B

Duas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles inuenire, quarum altera expoſitæ Rationali ſit æqualis. 348.B

Duas Rationales potentia tantum inter ſe commenſurabiles inuenire, quarũ neutra ſit expoſitæ Rationali æqualis. 348.B

Rationales quotcunque potentia tantum inter ſe commenſurabiles reperire. 349.B

Datis quotcunque Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus, inuenire aliam Rationalem omnibus potentia tantum commenſurabilem. 350.B

Duas Medias rectas longitudine commenſurabiles: Itẽ duas potentia tantum commenſurabiles inuenire. 357.B

Medias inuenire potentia tantũ commenſurabiles, quæ Rationale comprehendant. pagina 364.B

Medias inuenire potentia tantũ commenſurabiles, quæ Medium contineant. 365.B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quã minor, plus poſſit quadrato rectæ longitudine ſibi commenſurabilis. pag. 373.B

Duas Rationales inuenire potentia tantum commenſurabiles, ita vt maior, quã minor plus poſſit quadrato rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis. pag. 374.B

Duas Medias inuenire potentia tantum commẽſurabiles, quæ Rationale contineant, ita vt maior plus poſſit, quã minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. 376.B

Duas Medias inuenire potentia ſolum commenſurabiles, quæ Medium cõtineant, ita vt maior plus poſſit, quam minor, quadrato rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, vel incommenſurabilis. 378.B

Duas rectas inuenire potẽtia incommenſurabiles, quæ faciãt compoſitum quidem ex ipſarum quadratis, Rationale, rectangulum vero ſubipſis contentum, Medium. pagina 382.B

Duas rectas inuenire potẽtia incommenſurabiles, quæ faciãt compoſitum quidem ex ipſa-

rum

rum quadratis Medium; Rectangulum vero ſub ipſis contentum, Rationale. 384.B
Duas rectas inuenire potẽtia incommenſurabiles, quæ faciãt & compoſitum ex ipſarũ quadratis Mediũ, & rectangulum ſub ipſis contentum, Medium, incommenſurabileque compoſito ex ipſarum quadratis. pag. 386.B
Duas Medias inuenire longitudine, & potentia incommenſurabiles. 387.B
Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur, inuenire. 409.B
Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur, inuenire. 469.B

RECTA LINEA.

Rectæ datæ lineæ æqualem rectam lineam ad datum punctũ ponere. 80.A
Rectam lineam æqualẽ datæ minori ex maiore detrahere. pag. 81.A
Rectam lineam datam finitã bifariam ſecare. 101.A
Rectam perpendicularem ad rectam lineam ex puncto in ea dato educere. 102.A
Rectam perpendicularem ad rectã in puncto extremo erigere. pag. 104. & 106 A
Rectam perpendicularem ad rectam ducere ex puncto extra eam dato. 105.& 106.A
Rectam perpendicularem ad rectã ducere ex puncto extra eam dato, quando punctum datum eſt vicinum datæ rectæ, vel prope extremũ plani cuiuſpiam, vel quando recta data prope extremum plani eſt, vel denique quando & datum punctum eſt vicinum extremo plani, & recta data eſt prope aliud extremum plani pos-ma 107. & 108.A
Rectæ datæ parallelam rectam a dato puncto ducere 164.A
Rectam lineam a puncto extra datam rectam lineã propoſito duce e, quæ cũ data recta angulum efficiat dato angulo rectilineo æqualem. 165.A
Rectam lineam datæ rectæ parallelam ducere per punctum datæ rectæ vicinum. 167.A
Inter duas rectas infinitas angulũ facientes lineã rectam datæ lineæ æqualem collocare, quæ cum utralibet earũ faciat angulum dato angulo æqualem, dummodo datus angulus, & angulus eõ prehenſus datis rectis minores ſint duobus rectis. 184.A
Rectam datam lineam finitam, in quotlibet partes æquales ſecare, pag. 210. & 770. A
Rectis duabus inæqualibus datis, inuenire id, quo plus potest maior, quam minor. 237. A. & pag. 324 B.
Datis duab. rectis, ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, inuenire rectã, quæ

qua illas pōt. 236. A. & 327. B
Rectam lineam datam ſecare, vt rectangulum ſub tota,& altero ſegmēto æquale ſit quadrato reliqui ſegmenti. 286. A
Datis duobus rectis, alterutri earū rectam adiungere, vt rectangulum ſub tota compoſita,& adiuncta, æquale ſit quadrato alterius. 446. A
Rectam lineam cuilibet arcui circuli, ex cuius quadrate Quadratrix linea deſcribitur, æqualem inuenire. 905. A
Duabus datis rectis inæqualibus quartam partem quadrati ex minore deſcripti ad maiorem applicare, ita vt deficiat figura quadrata. 332. B
Datam rectam lineam ita ſecare, vt rectangulū ſub ſegmentis contentū æquale ſit dato rectilineo, quod tamen maius non ſit, quam quadratum a dimidia linea deſcriptum. 334. B
A dato pūcto in ſublimi ad ſubiectum planum perpendicularem rectam ducere. 560. B
Dato plano, a puncto, quod in illo datum eſt, perpendicularē rectam excitare. 561. B
Per rectam in plano quouis datam planum ducere, quod ad ipſum planum ſit rectum. 571. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide. Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac ſolidi numeri. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDA figura intra, & extra ſphæra, atq; aliam figuram. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri ſimiles. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. numerus planus, &c.

SPHAERA. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide. Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triangulum æquilaterum ſuper data recta linea terminata cõſtituere. 75.A
Iſoſceles ſuper data recta conſtituere. 77.A
Scalenum ſuper data recta conſtituere. 78.A
Triangulum ex tribus rectis lineis, quæ ſunt tribus datis rectis lineis æquales, quarum quælibet duæ reliqua ſint maiores, conſtituere. 129.A
Triangulum alteri dato triangulo æquilaterum, & æquiangulum conſtituere. 130.A
In ſcaleno, & Iſoſcele, cuius baſis minor nõ ſit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarũ vtraque ſimul vtrique lateri ſimul ſit æqualis. 185.A
In æquilatero, vel Iſoſcele, cuius baſis vtrouis latere minor ſit, quælibet duæ lineæ intra triangulum ductæ ſunt ſimul minores duobus lateribus ſimul. 187.A
In Scaleno, & Iſoſcele, cuius baſis minor non ſit vtrouis latere, duas rectas intra triangulum ducere, quarum vtraque vtrique lateri ſit æqualis, vel maior. pag. 188.A
Triãgulum biſariam ſecare per lineam a quouis puncto in vno latere dato ductam. 199.A
Triangulo dato æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo. 218.A
Triangulum dato parallelogrammo æquale conſtituere in dato angulo rectilineo. 218.A
Triangulo dato parallelogrammum æquale cõſtituere ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 221.A
Triangulum dato parallelogrammo conſtituere æquale ſuper datam rectam, & in dato angulo rectilineo. 223.A
Trianguli rectanguli cognitis duobus lateribus, in cognitionem reliqui lateris peruenire. 239.A
Amblygonium triangulum cõſtituere, in quo propoſ. 12. lib. 2. numeris poſſit accommodari. 293.A
Oxygonium triangulum conſtruere, in quo prop. 13. lib. 2. numeris poſſit accommodari. 303.A
Trianguli cuiuſuis aream cognoſcere. 312.A
Iſoſceles conſtruere, quod habeat vtrumque angulorum ad baſim reliqui duplum. 468.A
Iſoſceles oxygonium conſtruere, cuius tertium latus vtrouis æqualium ſit maius. 479.A
In dato triangulo quotcunque quadratum deſcribere. 884.A

FINIS.

INDEX THEOREMATVM, QVAE HISCE COMMENT. CONTINENTVR:

QVORVM EA, QVAE AB EVCLIDE demonſtrantur, eodem charactere ſunt notata, quo in propoſitionum demonſtrationibus vſi ſumus: quæ vero a nobis adiecta, charactere, quo ſcholia excuſimus. Litera porro A, primum tomum, & litera B, ſecundum ſignificat. Vt autem facilius quiſque inueniat theoremata, quæ cupit, digeſsimus ea ſecundum materias, de quibus demonſtrantur.

ACVTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

AEQVIANGVLA, & æquilatera figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERA, & æquiangula figura. vide. Figura intra & extra circulum, &c.

AEQVILATERVM triangulum. vide. Triangulum.

ANGVLI proportionales. vide. Figuræ, anguli, & lineæ proportionales.

ANGVLVS.

Anguli recti omnes ſunt inter ſe æquales. 66.A

Anguli oppoſiti ad verticẽ duarum rectarum ſe' interſecantium ſunt æquales. 111.A

Anguli quatuor a duabus rectis ſe interſecantibus facti, ſunt quatuor rectis æquales. 112.A

Anguli quotcunq; circa idem punctum quatuor rectis ſunt æquales. 112.A

Angulus externus trianguli maior eſt vtrouis interno oppoſito. 114.A

Angulus externus figuræ quadrilateræ maior eſſe poteſt quouis interno oppoſito. 115.A

Anguli duo trianguli quomodocunque ſumpti duobus rectis ſunt minores. 117.A

Anguli duo trianguli orthogonij, & amblygonij ſunt acuti. 118.A

Anguli omnes trianguli æquilateri, & duo Iſoſcelis ſupra baſem, acuti ſunt. 119.A

Anguli tres cuiuſcunque trianguli æquales ſunt duobus rectis: Et externus æqualis eſt duobus internis

ternis oppoſitis ſimul. 169.A
Anguli omnes interni cuiuſcunque figuræ rectilineæ quot rectis angulis æquinaleãt. 171.& 172.A
Anguli omnes externi cuiuſcunq; figuræ rectilineæ, productis ſingulis lateribus ordinatim verſus eandem partem, quatuor rectis ſunt æquales. 173.A
Anguli quinque, q̃ ſunt ex cõcurſu binorũ laterũ pẽtagoni p̃ducторũ æquales sũt duobus rectis. 174.A
Angulus cõtactus vere angulus eſt, contra Peletarium, vbi eius ſophiſmata diſſoluuntur. 354. *vſque ad* 387.A
Angulo quouis contactus dari poteſt alius minor, & hoc alius minor vſq; in infinitũ: Item maior, & hoc alius maior ĩ infinitũ. 361.A
Anguli contatus, quo modo inter ſe ſint æquales, & qui æquales ſint. pag. 363.A
Anguli cõtactus, quotquot ſint, efficiunt aggregatũ omni rectilineo acuto angulo minus. 365.A
Anguli contactus Apologia aduerſus Peletariũ. 366. *vſq; ad* 387.A
Angulus quiſpiam poteſt in infinitum augeri, & alius in infinitũ minui; & tamẽ augmẽtũ illius, quantũcunq; ſit, minus ſemper erit decremento huius. 387.A
A minori angulo trãſitur ad maiorẽ, et per oẽs intermedios, nũquã tamẽ p̃ æqualẽ. 387.& 430.A
Anguli oppoſiti in quadrilatero intra circulũ deſcripto æquales sũt duobus rectis. 401.A
Angulus externus quadrilateri in circulo, æqualis eſt ei, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A
Angulus rectus in cẽtro inſiſtit quadrãti; acutus uero arcui quadrãte minori; & obtuſus maiori. Et cõtra, angulus in cẽtro quadrãti inſiſtẽs, rectus eſt; inſiſtẽs uero arcui quadrãte minori, acutus; & maiori, obtuſus. 417.A
Angulus curuilineus angulo rectilineo æqualis eſſe poteſt. 624. A
Si duæ rectæ ſe mutuo tãgẽtes, ad duas rectas ſe mutuo tãgẽtes ſint parallelę, non autẽ in eodẽ plano; illę angulos æquales cõprehendent. 558.B
Idem eueniet, ſi omnes illa rectæ ſint in vno plano. 558.B
Si ſolidus angulus tribus angulis planis contineatur; Ex his duo quilibet vtut aſsũpti tertio ſunt maiores. 573.B
Omnis ſolidus angulus ſub minoribus, quam quatuor rectis angulis planis cõtinẽt. 574.B
Si fuerint tres anguli plani, quorũ duo vtlibet aſſumpti reliquo ſint maiores, cõphendãt aũt ipſos rectę lineę æquales; fieri poteſt, vt ex lineis æquales illas rectas cõnectentibus triangulũ cõſtituatur. 576.B
Si fuerint duo plani anguli æquales, quorum verticibus ſublimes rectæ lineæ inſiſtant, quæ cum lineis primo poſitis angulos contineant æquales, vtrumq. vtrique; in ſublimibus aũt lineis quælibet ſumpta fuerint puncta, & ab his

ad plana, in quibus consistunt anguli primum positi, ductæ fuerint perpẽdiculares; a punctis vero, quæ in planis a perpendicularibus fiunt, ad angulos primum positos adiunctæ fuerint rectæ lineæ: Hæ cum sublimibus æquales angulos comprehendent. 609.B

Si fuerint duo anguli plani æquales, quorum verticibus sublimes rectæ æquales cũm lineis primum positis angulos continentes æquales, vtrumque vtrique: Erunt a punctis extremis linearum sublimiũ ad plana angulorum primum positorum demissæ perpendiculares, inter se æquales. 611.B

ARCVS. vide. Circulus.

CIRCVLVS.

Circulus a diametro bifariam diuiditur. 45.A

Circulus a recta, quæ diameter non sit, diuidetur non bifariã. 46.A

Si in circulo recta aliqua linea rectam quampiam bifariam secet, & ad angulos rectos; in secante centrum erit circuli, pag. 328.A

Si in circuli peripheria duo puncta coniungantur linea recta; cadet hæc recta intra circulum. 328.A

Recta circulum in vno tantum puncto tangit, si ita tangat, vt eum non secet. 29.A

Si in circulo recta linea per centrum ducta secet aliã non per centrum ductam bifariam; & ad angulos rectos ipsa secabit. Et si ad angulos rectos eã secet; bifariam quoque eam secabit. 330.

Duobus circulis ex eod. centro descriptis, si ab aliquo puncto circumferentiæ exterioris recta ducatur interiorem circumferentiã secans: erunt eius segmenta inter vtramq. circumferẽtiam æqualia. 331.A

In circulo duæ rectæ non per centrum extensæ, se mutuo bifariam non secant. 332.A

Duo circuli se mutuo secantes non habent idem centrum, pag. 333.A

Duo circuli se mutuo interius tangentes non habent idem centrum. 333.A

Si in diametro circuli a puncto, quod centrum non sit, plurimæ rectæ cadãt: maxima omnium erit, in qua centrum, minima vero reliqua: aliarum autẽ propinquior ei, quæ per centrum, remotiore semper maior est: Duæ autem solum rectæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt ad vtrasque partes minimæ vel maximæ. 334.A

Si intra circulum punctum sumatur, ab eoque in circulum rectarum cadentium vna quidem sit maxi-

maxima, vna vero minima, & reliquarum aliæ ſint inæquales, aliæ æquales: Maxima quidem per centrum tranſibit, minima vero erit reliqua pars diametri; & aliarum maiores quidē erunt maximæ propinquiores, æquales autem a minima vel maxima æqualiter diſtabunt. 336.A

Si extra circulum ſumatur punctum quodpiam, ab eoq; puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarum vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verovt libet: In cauam peripheriā cadentiū rectarum, maxima quidem eſt illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autē propinquior ei, quæ per cēntrū tranſit, remotiore ſemper maior eſt, &c. 338.A

Ex puncto extra circulum ſumpto, in peripheriam concauam duæ tantum lineæ rectæ æquales cadunt ad vtraſque partes maximæ lineæ. 340.A

Si ex puncto extra circulum ducatur recta tangens circulum, erit ea minor omnibus ex eodem puncto in concauam peripheriam cadentibus, maior vero omnibus in conuexam peripheriā cadentibus. 340.A

Punctū in circulo, a quo plures quam duæ rectæ æquales ad peripheriam ducuntur, centrum circuli eſt. 341.A

Circulus circulum in pluribus punctis, quam duobus, non ſecat. 342.A

Recta per centra duorum circulorum ſe interius tāgentium ducta, cadit in circulorū contactum. 343.A

Recta per centra duorum circulorum ſe exterius tangentiū ducta, tranſit per circulorum contactum. 344.A

Circulus circulum non tangit in pluribus pūctis, quam vno. pag. 345.A

Si in ſemidiametro circuli producta punctum vltra centrum ſumatur, circulus ex eo puncto, vt centro, per extremum ſemidiametri punctum deſcriptus, tanget priorem circulum in eo puncto extremo, totuſq. extra eundem cadet. 347.A

In circulo æquales rectæ æqualiter a centro diſtant. Et quæ æqualiter a centro diſtant, ſunt æquales. 348.A

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore ſēper maior. 349.A

Ex puncto circumferentiæ in concauam peripheriam duæ tātum rectæ æquales cadunt ad vtraſq; partes diametri. 351.A

Quæ ab extremitate diametri cuiuſque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum cadet; & in locū inter ipſam rectam, & peripheriā comprehenſum, altera re-

ēta non cadet: Et ſemicirculi quidem angulus quouis acuto rectilineo angulo maior eſt, reliquus autem minor. 351.A

Recta ad extremū diametri ppē dicularis circulū tāgit. 353.A

Si circulū recta tangat; recta ad cōtactū ducta, perpē dicularis eſt ad tāgentē lineam. 394.A

Circulis duobus ex eodē centro deſcriptis; recta interiorē tāgentes, & vſq; ad exteriorē extēſę, inter ſe æquales ſunt, bifariāq; in punctis cōtactuum ſecantur. 395.A

Si circulū tetigerit recta; ppēdicularis ad tāgentem in puncto cōtactus, p cētrū trāſit. 395.A

In circulo, angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam, ſi fuerit eadem peripheria baſis angulorum. 396.A

In circulo ſpatium ad cētrū, duplū eſt anguli ad peripheriā, cū fuerit eadem peripheria baſis ſpatij, & anguli. 399.A

In circulo, qui in eodē ſegmento ſunt, anguli ſunt inter ſe æquales. 399.A

Si a duobus punctis quatuor rectæ ducantur, ex ſingulis binæ, quæ in concurſu contineāt duos angulos æquales: circulus per duo illa puncta, & alterutrum illorum angulorū deſcriptus, per alterū quoq; angulum trāſibit. 401.A

In circulo quadrilaterū quodcū que habet angulos oppoſitos duobus rectis æquales. 401.A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſū deſcribi pōt. 402.A

Si ex ſemicirculis, aut circulis ſimilia ſegmēta detrahātur; reliqua ſegmēta ſimilia etiā sūt. 403.A

Arcus, quibus anguli æquales, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias inſiſtunt, ſimiles ſunt: Et anguli arcubus ſimilibus inſiſtentes ſiue ad centra, ſiue ad peripherias, æquales ſunt. 404.A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Rectæ ex centro ductæ abſcindunt arcus ſimiles. pag. 405. & 862.A

Si duo aut plures circuli ſe mutuo tangant interius; Rectæ a puncto contactus ductæ abſcindunt arcus ſimiles. 406.A

Si vnum latus quadrilateri in circulo producatur; angulus externus æqualis eſt angulo, qui opponitur angulo ei deinceps. 407.A

Segmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ſuper eadem recta linea. 407.A

Segmēta ſimilia ſuper æqualibus rectis, ſunt æqualia. 408.A

Segmenta ſimilia, & æqualia, ſunt conſtituta ſuper æquales rectas, vel ſuper eandem rectā. 409.A

In circulis æqualibus, vel eodē anguli æqualibus peripherijs inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias. 413.A

In circulis æqualibus, vel eodē maior angulus, maiori peripheriæ inſiſtet. 414.A

In circulis æqualibus, vel eodē anguli æqualibus peripherijs inſiſtētes, sūt æquales. 415.A

In circulis ęqualibus, vel eodem angulus maiori peripheriæ insistẽs maior est. 415.A

In circulo, duæ rectæ se nõ intersecãtes, et intercipientes arcus ęquales, parallelæ sũt: Et parallelæ intercipiũt arcus æquales. 416.A

Recta, quę ex medio pũcto arcus alicui⁹ duciť tãgẽs circulũ, parallela est chordę illius arcus. 416.A

Angulus rectus in cẽtro insistit quadrãti; acutus vero, arcui minori quadrante; & obtusus, maiori. Et contra, angulus in centro insistens quadrãti, rectus est; insistẽs vero arcui quadrante minori, acutus; et maiori obtusus. 417.A

Recta e centro secans rectam aliã bifariam, secat quoq; arcum bifariam. Et secans arcum bifariam, secat quoque chordã bifariam. 418.A. & 712.763.B

In circulis ęqualibus, vel eodęm rectæ æquales, auferunt arcus æquales. 419.A

In circulis ęqualib. vel eodẽ, maior linea maiorẽ arcũ aufert, si de arcubus semicirculo minoribus sermo fiat: minorẽ vero, si de segmẽtis maioribus agatur. 420.A

In circulis æqualibus, vel eodẽ, si arcus sint æquales, erunt & rectæ æquales. 420.A

In circulis æqualibus, vel eodẽ maior arcus habet chordã maiorẽ, si de arcubus semicirculo minoribus loquamur: minorem vero, si de maioribus. 421.A

Circuli, e qb. ęquales rectæ auferũt similes arcus, æquales sũt. 422.A

Ex circulis inæqualibus rectæ ęquales auferũt arcus dissimiles. 422.A

Ex circulis inæqualibus lineæ rectę auferentes arcus similes, inæquales sunt. 422.A

Rectæ lineæ auferẽtes arcus similes inæquales ex quibusuis circulis, inæquales sunt. 423.A

Si in diametro circuli præter cẽtrũ sumaťr pũctũ, ab eoq; in peripheriã duæ rectæ nõ in easdẽ partes cadẽtes efficiãt ad diametrũ angulos æquales; rectæ illæ æquales erũt, et arcus abscindẽt ęquales. Et si lineæ sint æquales, cõstituẽt ad diametrũ angulos ęquales, abscindẽtq; arcus ęquales. Si deniq; abscindãt arcus ęquales, erũt rectę illæ æquales, angulosq; ad diametrũ ęquales eõstituẽt. 423.A

Si in diametro circuli præter cẽtrũ sumatur pũctũ, a quo ad easdẽ partes duo anguli æquales constituantur, insistent hi anguli arcubus inæqualibus, maiorque erit ille, qui a minori portione diametri remotior est. 425.A

In semicirculo angul⁹ rectus est: In maiore segmẽto acutus: Et in minore obtusus. Angulus item maioris segmenti recto maior: minoris vero segmenti recto minor. 426.A

Segmẽtũ circuli, in quo angulus rectus ẽ, est semicirculus, in quo vero acutus, segmẽtũ maius est: & ĩ quo obtusus, segmẽtũ minus. Et segmẽtũ, cuius angulus est recto maior, ẽ maius; cuius vero angulus ẽ recto minor, ẽ minus. 431.A

Circulus ex puncto mediò lateris recto angulo oppositi in triãgulo rectãgulo descriptus per vnũ angulũ, trãsit quoq; p reliquos. 431. A

Si per centrum circuli alius circulus describatur, & per vtriusq. centrum recta ejciatur: a puncto vero, ubi hæc recta posteriorẽ circulũ secat, ducatur recta vtcunq;, secabitur eius portio intra priorẽ circulum bifariã. 432. A

Si circulum tangat recta, & a cõtactu ducatur linea vtcunque secans: anguli ad contingentem æquales sunt angulis in alternis segmentis. 434. A

Si recta ducta ad extremitatem rectæ circulum secantis faciat cũ ea angulos æquales angulis in alternis segmentis; recta illa ducta circulum tangit. 435. A

Si in circulo duæ rectæ se secẽt: rectãgulũ sub segmẽtis vnius æquale est rectangulo sub segmentis alterius. 438. A

Si duæ rectæ ita se secent, vt rectangulum sub segmentis vnius æquale sit rectãgulo sub segmentis alterius: describi poterit per quatuor earum puncta extrema circulus. 439. A

Si extra circulum sumatur punctum, a quo ducatur recta tangens, & altera secãs: erit quadratũ tangẽtis æquale rectãgulo sub tota secante, & eius segmento exteriore. 440 A

Si a puncto extra circulũ ducãtur plures rectæ secantes; rectangula sub totis secantibus, & segmẽtis exterioribus æqualia sũt. 442. A

Duæ rectæ tãgẽtes circulũ ab eodẽ pũcto ductæ, sũt æquales. 442. A

Ab eodẽ puncto duæ tantũ rectæ circulũ tangẽtes duci possũt. 443. A

Si duæ rectæ æquales ducantur ab eodem puncto ad circulum, vna autem earum sit tangens, erit & altera tangens. 443. A

Si a puncto duæ rectæ egrediẽtes ita secentur in binas partes singulæ, vt rectãgula sub totis, & segmẽtis prope punctã, æqualia sint: describi poterit circulus per extrema reliquorũ segmẽtorũ. 445. A

Si extra circulum pũctum sumatur, a quo ducatur recta secãs, & altera incidẽs, vsq; ad circumferentiã conuexã; sit aũt quadratum incidẽtis æquale rectãgulo sub tota secante, & eius segmẽto exteriore: Incidẽs circulum tanget. 447. A

Si a puncto duæ tangentes ad circulum ducantur, aut duæ secantes æquales: Recta ab eodem puncto per centrũ ducta diuidit angulũ ab eis cõprehensum, bifariam. Et contra, Recta secãs angulum bifariam, per centrum circuli transit. 448. A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferũt arcus inæquales, maiorque est arcus minoris circuli, quam vt similis sit arcui circuli maioris. 863. A

Æquales rectæ ex circulis inæqualibus auferunt arcus simpliciter inæquales

inæquales, maiorq; eſt arcus circuli minoris ſimpliciter. & non ſolum maior, quam vt ſimilis ſit arcui circuli maioris. 864. A

Si in circulo, ductis duabus diametris ſeſe ad angulos rectos ſecãtibus, altera earũ producatur, eiq; ex vna parte quotquot parallelæ agantur diuidentes vtrunque quadrantem in partes æquales, ac denique ex puncto extremo alterius diametri per extremũ punctum proximæ parallelæ recta ducatur cõueniens cũ diametro producta: Erit tota recta inter punctũ concurſus, & cõcauã peripheriã circuli, oĩbus parallelis, vna cum diametro, qua producta eſt, ſimul ſumptis, æqualis. 865. A

Si ad diametrum circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eiſdem extremis per vnum idemq; punctum duæ aliæ rectæ circulum ſecantes ducantur, occurrentes duabus perpẽdicularibus; erit rectãgulũ ſub vtralibet ſecatiũ, & eius ſegmẽto interiore cõprehenſum quadrato diametri æquale. 887. A

Si in circulo duæ diametri ſeſe ad rectos angulos ſecẽt, & ab vnius extremo rectæ ducatur vtrunque ſecans circumferentiam, & alteram diametrũ ſiue productam, ſiue intra circulum; erit rectangulum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremũ prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum vero inter idem punctũ extremum, & circumferẽtiam interiicitur, æquale quadrato intra circulum deſcripto. 888. A

Circumferentia circuli ad eius diametrum quã proportionem plus minus, habeat. 907. A

CIRCVMFERENTIA: vide. Circulus.

COMMENSVRABILES & incommenſurabiles magnitudines.

Duabus magnitudinibus inæqualibus ꝓpoſitis, ſi a maiore auferatur maius quã dimidium; & ab eo quod reliquũ eſt, rurſus detrahatur maius quam dimidiũ: & hoc ſemper fiat: relinquetur tandẽ quędã magnitudo, quæ minor erit propoſita minore magnitudine. 289. B

Idem eueniet, ſi dimidium auferatur, &c. 290. B

Si duabus magnitudinibus inæqualibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione, & reliqua minime præcedẽtẽ metiatur: incommenſurabiles erũt ipſę magnitudines 291. B

Si duabus magnitudinibus incommẽſurabilibus propoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã relꝛ qua præcedentẽ metietur. 293. B

Si duabus magnitudinibus commenſurabilibus propoſitis, detrahatur

ſemper

ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione: nunquã reli qua præcedentẽ metietur. 293. B

Si duabus magnitudinibus commẽ menſurabilibus propoſitis, detrahatur sẽper minor de maiore, alterna quadã detractione: metietẽ quedã reliqua præcedẽtẽ. 293. B

Magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earũ mẽſurã communẽ. 295. B

Magnitudo metiẽs tres aut quotcũque magnitudines, metitur quoque maximam earum menſuram communem. 298. B

Si ſint quotcunque magnitudines, & totidẽ numeri, qui bini in eadem ratione ſumãtur, in qua bina magnitudines: et ex æqualitate in eadem ratione erunt magnitudines & numeri. 298. B

Commẽſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quã numerus ad numerum. 300. B

Commẽſurabiles magnitudines proportionem habent eãdem, quam numeri, per quos earum menſura communis maxima ipſas metitur. 301. B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem habeant, quam numerus ad numerum, commenſurabiles erunt magnitudines. 302. B

Incommenſurabiles magnitudines inter ſe proportionem nõ habent, quam numerus ad numerum. 304. B

Si duæ magnitudines inter ſe proportionem non habeant, quam numerus ad numerum: incommenſurabiles erunt magnitudines. 305. B

Si ſint tres quãtitates continue proportionales, & aliæ tres continue quoq; proportionales, ſitq; vt prima illarum ad tertiã, ita prima harũ ad tertiã; erit & vt prima illarum ad ſecundam, ita prima harum ad ſecundam. 306. B

Idem ſequitur ſi plures quantitates ſint, quam tres, &c. 306. B

Quæ a rectis lineis longitudine commenſurabilibus ſũt quadrata, inter ſe proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter ſe proportionẽ habẽtia, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ; & latera habebũt lõgitudine cõmenſurabilia. Quæ vero a rectis lineis longitudine incõmenſurabilibus ſũt quadrata; inter ſe proportionẽ non habent, quã quadratus numerus ad quadratũ numerũ: Et quadrata inter ſe proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratũ numerũ; neq; latera habebũt lõgitudine cõmẽſurabilia. 307. B

Rectæ longitudine commẽſurabiles, omnino & potẽtia ſunt cõmenſurabiles; quæ vero potentia cõmenſurabiles ſunt, non omnino & lõgitudine cõmẽſurabiles ſunt. Et q̃ lõgitu

dine ſunt incõmenſurabiles, nõ oĩno & potentia incõmenſurabiles ſunt, quæ vero põtẽtia incõmenſurabiles ſunt, omnino & lõgitudine incommenſurabiles ſunt. 310.B

Si quatuor magnitudines ſint ꝓportionales, prima vero ſecũdæ ſit cõmẽſurabilis; & tertia quartæ cõmenſurabilis erit. Et ſi prima ſecundæ ſit incommenſurabilis, & tertia quartæ incommẽſurabilis erit. 315. B

Recta media proportionalis inter duas rectas potẽtia tantũ cõmenſurabiles, vtrilibet illarũ incommenſurabilis eſt lõgitudine et potẽtia ac proinde appellabitur Irrationalis, ſi alterutra illarũ ſtatuatur Rationalis. 321. B

Quæ eidẽ magnitudini ſunt cõmenſurabiles, & inter ſe ſunt commenſurabiles. 321.B

Si ſint duæ magnitudines commenſurabiles, altera vero ſit vni cuipiã commẽſurabilis; erit & reliqua eidẽ cõmenſurabilis. 323. B

Si ſint duæ magnitudines, & altera quidẽ eidẽ ſit cõmenſurabilis, altera vero incõmenſurabilis; incommenſurabiles erũt magnitudines. 324.B

Si ſint duæ magnitudines cõmenſurabiles, altera autem ipſarũ magnitudini cupiã incõmenſurabilis fuerit; Et reliqua eidẽ incõmẽſurabilis erit. 325.B

Quæ incommenſurabilibus ſunt cõmenſurabiles; & inter ſe incommenſurabiles erunt. 326.B

Si quatuor rectæ proportionales fuerint, prima vero tãto plus poſsit, q̃ ſcda, quantũ eſt quadratũ rectæ ſibi cõmenſurabilis lõgitudine; Et tertia tanto plus poterit q̃ quarta, quantũ eſt quadratũ rectæ ſibi lõgitudine cõmẽſurabilis. Q̃d ſi prima tãto plus poſsit q̃ ſcda q̃tũ eſt quadratũ rectę ſibi incõmẽſurabilis lõgitudine; Et tertia tãto plus poterit q̃ quarta q̃tũ eſt quadratũ rectę ſibi lõgitudine incõmẽſurab. 328.B

Si duæ magnitudines cõmenſurabiles cõponantur; & tota magnitudo vtriq; ipſarũ cõmenſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni; ipſarũ cõmẽſurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines commenſurabiles erunt. 329.B

Si tota magnitudo ex duabus cõpoſita, cõmenſurabilis ſit alteri ipſarum; eadem & reliquæ commenſurabilis eſt. 330.B

Si duæ magnitudines incõmẽſurabiles cõponant; & tota magnitudo vtriq; ipſarũ incõmẽſurabilis erit. Quod ſi tota magnitudo vni ipſarũ incõmenſurabilis fuerit, & quæ a principio magnitudines incommenſurabiles erunt. 330.B

Si tota magnitudo ex duabus cõpoſita incõmenſurabilis ſit alteri ipſarũ; eadem & reliquæ incommenſurabilis eſt. 331.B

Si ſint duæ rectę inæquales, quartæ aũt parti quadrati, q̃d ſit a

mino-

minore, æquale parallelogrãmũ ad maiorẽ applicetur, deficiẽs figura quadrata, & in partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidat; Maior tãto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commenſurabilis. Quod ſi maior tãto plus poſſit quam minor, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine commenſurabilis, quartæ autem parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur, deficiens figura quadrata; In partes longitudine commenſurabiles ipſam diuidet. 336.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, quartæ autẽ parti quadrati, quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiens figura quadrata, & in partes incommenſurabiles longitudine ipſam diuidat; Maior tanto plus poterit quam minor, quantum eſt quadratum rectę ſibi longitudine incommenſurabilis. Quod ſi maior tanto plus poſſit, quantum eſt quadratum rectæ ſibi longitudine incommenſurabilis, quartę autẽ parti quadrati quod fit a minore, æquale parallelogrammum ad maiorem applicetur deficiẽs figura quadrata; In partes longitudine incommenſurabiles ipſam diuidet. 338.B

Diameter quadrati longitudine incommenſurabilis eſt lateri. pag. 656.A. & 130.B. & 516.B

Inuentis rectis lineis lõgitudine incommenſurabilibus, inuenientur & aliæ quam plurimæ magnitudines, plane ſcilicet, atque ſolide incommenſurabiles inter ſe. pag. 519.B

COMPOSITI inter ſe numeri. vide. Numerus par, &c.

COMPOSITVS numerus. vide. Numerus par, &c.

CONVS, & Cylindrus. vide. Parallelepipedum, &c.

CORPVS Regulare. vide, Figura intra & extra circulum, &c.

CVBVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

CYLINDRVS, & Conus. vide. Parallelepipedum, &c.

DIAMETER circuli. vide. Circulus.

FIGVRA intra, & extra circulum, ſphæram, atque aliam figuram.

Quadrilaterũ in circulo habet oppoſitos angulos duobus rectis æquales. 401.A

Si in quadrilatero anguli oppoſiti ſint duobus rectis æquales; circulus circa ipſum deſcribi poteſt. pag. 402. A

Quadrilateri in circulo angulus externus æqualis eſt ei, qui opponitur ei deinceps. 407. A

Quadrilaterũ in circulo, cuius duo latera oppoſita ſunt parallela, & æqualia, parallelogrammum eſt rectangulum. 433. A

In omni triangulo, cui circulus inſcribitur, duo quæuis latera ſuperant reliquum recta linea, cuius quadratum quadruplum eſt rectanguli comprehenſi ſub recta ab angulo illis lateribus comprehenſo in cauam peripherium ducta, & ſub ſegmento eius exteriore. Quod ſi angulus cõprehenſus ſit rectus, ſuperabunt duo illa latera latus recto angulo oppoſitũ diametro circuli triangulo inſcripti. Vel duo quæuis latera ſuperant reliquum duabus rectis tangentibus inter angulum illorum laterum, & circulum interpoſitis. 462. A

Si centrum circuli triangulo circũſcripti cadit intra triangulum, omnes eius anguli acuti ſunt: Si in vnum latus, angulus oppoſitus rectus eſt: Si denique extra vnũ latus, angulus oppoſitus obtuſus eſt. 464. A

In triangulo acutangulo centrum circuli circumſcripti cadit intra: In rectangulo, in latus recto angulo oppoſitum: In obtuſangulo denique extra latus angulo obtuſo oppoſitum. 464. A

Quadratũ circulo circumſcriptum duplum eſt quadrati eidem circulo inſcripti. 468. A

Pentagoni circulo inſcripti, hoc eſt, æquilateri, & æquianguli, angulus quilibet continet tres quintas duorum rectorum, vel ſex quintas vnius recti. 471. A

Si in circulo figura quæuis æquilatera & æquiangula deſcribatur, & ad extrema ſemidiametrorum excitentur perpendiculares, conſtituent hæ perpendiculares ſimilem figuram circulo circumſcriptam. 474. A

Hexagoni circulo inſcripti latus, æquale eſt ſemidiametro circuli. 479. A

Si in circulo ab eodem puncto inſcribantur latera duarũ figurarum regularium; continebit arcus inter illa inclusus tot latera alterius figuræ inſcribendæ in eodem circulo, quot vnitatibus inter ſe differunt denominatores eorundem laterum: Figura autem inſcribenda continebit tot latera, quot vnitates ſunt in numero ex multiplicatione denominatorum producto. 482. A

Omnis figura æquilatera circulo inſcripta, eſt quoque æquiangula: at non omnis figura æquilatera circulo circũſcripta, æquiangula quoque eſt, niſi quando numerus angulorum ipſius eſt impar, &c. 483. A

Omnis figura aquiangula circulo circũſcripta, eſt quoq; aequilatera: at non omnis figura aquiãgula circulo inſcripta, aequiangula quoque eſt, niſi quando numerus laterum. &c. 488. A

Si bifariã ſectiones laterũ regularis figuræ rectis coniũgantur, inſcripta erit ſimilis figuræ, idem centrum habens. 497. A

Solum triangulum aequilaterum, quadratum, & Hexagonum aequilaterum atque aequiangulũ, ex omnibus figuris regularibus, locum replent. 499. A

In figura aequilatera, & aequiangula, ſi quidem angulorum numerus impar eſt, recta linea ex quouis angulo demiſſa ſecans oppoſitum latus bifariam, diuidit quoque angulum bifariam: Et contra, recta linea diuidens angulũ bifariam, ſecat quoque latus oppoſitum bifariam. Si vero numerus angulorum eſt par, recta linea ex quouis angulo ad oppoſitum angulũ ducta ſecat vtrumque angulum bifariam: Et contra, recta linea ſecans quemuis angulum bifariam, cadit in oppoſitum angulum, eumque bifariam etiam diuidit. 866. A

Si baſis quadratricis intra quadrãtem & quadratum deſcripta ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli; eius latus, ſiue ſemidiameter quadrantis æquabitur quadranti illius circuli, &c. pagina 906. A

Quæ in circulis polygona ſimilia, inter ſe ſunt, vt a diametris quadrata. 625. B

Si pentagoni æquilateri tres anguli, ſiue qui deinceps, ſiue qui non deinceps ſint, æquales fuerint; æquiangulum erit ipſum pentagonum. 704. B

Si pentagoni æquilateri, & æquianguli duos angulos, qui deinceps ſint, ſubtendant lineæ rectæ; hæ extrema & media ratione ſe mutuo ſecant, & maiora ipſarum ſegmenta æqualia ſunt pentagoni lateri. pag. 705. B

Recta ſubtendens vnum angulum pentagoni æquilateri & æquianguli, parallela eſt oppoſito lateri. pag. 706. & 841. B

Si hexagoni latus, & decagoni, in eodem circulo deſcriptorum componantur; tota recta linea extrema atque media ratione ſecatur, & maius eius ſegmentum eſt hexagoni latus. 707. B

Si latus hexagoni ſecetur extrema ac media ratione; maius illius ſegmentum eſt latus decagoni. pag. 708. B

*Si linea diuiſa extrema ac media ratione maius ſegmentum fuerit latus hexagoni alicuius circuli; erit minus ſegmẽtum latus decagoni eiuſdem circuli. Quod ſi minus ſegmentum fuerit latus decagoni alicuius circuli; erit maius ſegmentum latus hexagoni

ni eiuſdem circuli. 708. B

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni, in eodem circulo deſcriptorum. pag. 710. B

Diameter circuli ex angulo quouis pentagoni, vel alterius figuræ æquilateræ imparium laterum, diuidit & latus oppoſitum bifariã, & ad angulos rectos, & arcum, quem illud latus ſubtendit. pag. 712. B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; Trianguli latus potẽtia triplum eſt eius lineæ, quæ ex centro circuli ducitur. 717. B

Diameter circuli potentia eſt ſeſquitertia lateris trianguli æquilateri in eo circulo deſcripti. 718. B

Si in circulo triangulum æquilaterum deſcribatur; diameter ex vno angulo ducta diuidit & angulum bifariam, & latus oppoſitum, ac inſuper ad angulos rectos: Semidiameter quoque viciſſim bifariam, & ad angulos rectos ſecabitur a latere oppoſito. pag. 719. B

Sphæræ diameter potentia eſt ſeſquialtera lateris pyramidis in ea deſcriptæ. pag. 720. & 926. B

Diameter ſphæræ potentia eſt quadrupla ſeſquialtera ſemidiametri circuli circa baſem pyramidis in ea ſphæra exiſtentis deſcripti. 723. B

Perpendicularis ex cẽtro ſphæræ ad baſim pyramidis in ea ſphæra exiſtentis demiſſa, ſexta pars eſt diametri ſphæræ, & tertia pars ſemidiametri. 723. B

Altitudo pyramidis intra ſphæram continet duas tertias partes diametri. Et diameter potentia eſt dupla ſeſquiquarta altitudinis pyramidis. 724. B

Sphęræ diameter potẽtia eſt dupla lateris octaedri in ea deſcripti. 725. & 928. B

In octaedro tres diametri ſe mutuo ad angulos rectos ſecant. pagina 726. B

Octaedrum diuiditur in duas pyramides ſimiles & æquales; quarum baſis communis quadratum lateris octaedri, altitudo vero ſemidiameter ſphæræ vel octaedri pag. 727. & 795. B

Si tetraedrum, & octaedrũ in eadem ſphæra deſcribantur, erit tetraedri latus potentia ſeſquitertium lateris octaedri. pag. 728. & 749. B

Octaedri baſes oppoſitæ ſunt inter ſe parallelæ. 728. & 927. B

Sphæræ diameter potẽtia eſt tripla lateris cubi in ea deſcripti. 729. & 930. B

Omnes diametri cubi æquales ſunt, ſeſeq; bifariam ſecant in centro ſphæræ. Itẽ rectæ coniungentes cẽtra baſiũ oppoſitarũ ſe mutuo bifariã ſecãt in eodẽ cẽtro. 731. B

Poten-

Potentia diametri ſphæræ, ſeu cubi æqualis eſt potentiæ laterum tetraedri & cubi ſimul. 732.B

Si diameter ſphæræ ſit Rationalis linea; latus Icoſaedri in ea eſt Irrationalis linea, quæ vocatur Minor. 733.B

Sphæræ diameter potentia eſt quintupla ſemidiametri circuli quinque latera Icoſaedri ambientis. pagina 738.B

Diameter ſphæræ compoſita eſt ex latere hexagoni, & duobus lateribus decagoni eiuſdem circuli. pagina 738.B

Icoſaedri latera oppoſita ſunt parallela. 739. & 931.B

Si diameter circuli ſit Rationalis linea; latus Dodecaedri in ea deſcripti eſt Irrationalis linea, q̃ vocat̃ Apotome. 739.B

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmẽtum eſt latus Dodecaedri eiuſdẽ ſphæræ. 746.B

Latus cubi æquale eſt rectæ ſubtendenti angulum pentagoni Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 746.B

Si rect̃a ſecetur extrema ac media rõne, minuſq; ſegmẽtũ ſit latus Dodecaedri; maius ſegmẽtũ erit latus cubi eiuſdẽ ſphæræ. 747.B

In Dodecaedro ſunt ſex latera, quorum bina oppoſita ſunt parallela, bifariamque ſecantur, & ad angulos rectos à tribus lineis rectis æqualibus ſeſe in centro Dodecaedri bifariã quoque, & ad angulos rectos ſecantibus. 747.B

Si recta duidẽs oppoſita latera Dodecaedri bifariam, & ad angulos rectos, ſecetur extrema ac media ratione; maius ſegmẽtum eſt latus cubi, minus vero, latus Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 748.B

Plura corpora Regularia, quam quinque, conſtitui non poſſunt. pag. 754.B

Cubus & octaedrum: Item Icoſaedrum & Dodecaedrum, reciprocantur, quod ad numerũ baſium & angulorum attinet. Solum tetraedrum tot baſes habet, quot angulos ſolidos. 757.B

Quæ ex cẽtro circuli cuiuſpiam in pentagoni eidem circulo inſcripti latus perpendicularis ducitur, dimidia eſt vtriuſque lineæ ſimul, & lateris hexagoni, & lateris decagoni eidem circulo inſcripti. 761.B

Perpendicularis ex centro ad latus pentagoni ducta æqualis eſt vtrique rectæ ſimul, & ei, quæ ex cẽtro ad latus trianguli æquilateri eiuſdem circuli ducitur, perpendiculari, & dimidio lateris decagoni. 763.B

Latus hexagoni ad latus decagoni eiuſdem circuli eandem proportionem habet, quã recta ſubtendens angulum pentagoni, ad latus ipſius pentagoni. 765.B

Si linea perpendicularis ex centro circuli ad latus pentagoni ducta ſecetur extrema ac media ratione, maius ſegmentum æquale eſt perpendiculari ex eodẽ centro

tro ad latus trianguli æquilateri ducta, minus vero æquale eſt dimidio lateris decagoni eiuſdem circuli. 766.B

Si in circulo pentagonum æquilaterum deſcribatur, quod ex latere pentagoni, & quod ex ea, quæ binis lateribus pentagoni ſubtenditur, recta linea, vtraque ſimul quadrata, quintupla ſunt eius, quod ex ſemidiametro deſcribitur, quadrati. 767.B

Si in ſphæra eadem cubus, & Dodecaedrum inſcribantur; quadratũ lateris cubi, et quadratũ lateris Dodecaedri, vtraque ſimul, quintupla ſunt quadrati ſemidiametri circuli pẽtagonũ dodecaedri circũſcribentis. 768.B

Si latus hexagoni alicuius circuli ſecetur extrema ac media rõne; maius, illius ſegmentũ erit latus decagoni eiuſdẽ circuli. 768.B

Idem circulus comprehendit & Dodecardri pentagonum, & Icoſaedri triangulum, eidem ſphærę inſcriptorum. pagina 769.& 940.B

Si ex centro circuli pẽtagonum Dodecaedri circumſcribẽtis, perpendicularis ducatur ad vnum latus pentagoni; erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehẽditur, rectangulũ trigeſies ſumptum Dodecaedri ſuperficiei æquale. 771.B

Si ex cẽtro circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis, perpendicularis ducatur ad vnum latus trianguli; erit quod ſub dicto latere, & perpendiculari comprehẽditur, rectangulum trigeſies ſumptum, Icoſaedri ſuperficiei æquale. 773.B

Superficies cuiuslibet Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri cuiuſcunque, etiamſi non deſcribantur ambæ figuræ in eadem ſphæra, eſt ſicut rectangulum ſub latere Dodecaedri, & perpendiculari ex centro pentagoni Dodecaedri in latus illud ducta contentum ad rectangulum contentũ ſub latere Icoſaedri, & perpẽdiculari ducta ex cẽtro triãguli Icoſaedri in illud latus. 774.B

Si ex centro circuli triangulum Tetraedri, vel octaedri, ſiue quadratum cubi, circumſcribentis perpẽdicularis ducatur ad vnũ latus; Erit quod ſub dicto latere & perpendiculari continetur, in Tetraedro quidem ſumptum ſexies, ſuperficiei Tetraedri: In octaedro vero & cubo, duodecies ſumptum ſuperficiei octaedri, & cubi æquale. 774.B

Rectangulum contentum ſub tribus quartis partibus diametri alicuius circuli, & quinque ſextis partibus lineę ſubtendentis angulum pentagoni æquilateri in eodem circulo deſcripti, æquale eſt dicto pentagono. 776.B

Rectangulum contentum ſub perpendiculari ex angulo trianguli Icoſaedri ad vnum eius latus ducta, & ſub quinque ſextis partibus lateris cubi in eadem ſphæra cum Icoſaedro deſcripti, æquale eſt pentagono Dodecaedri eiuſdem ſphæræ. 777. B

Superficies Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri in eadē ſphæra deſcripti, eandem proportionem habet, quam latus cubi ad latus Icoſaedri. pag. 778. B

Si recta linea ſecet extrema ac media rōne; erit vt recta potens id, quod a tota, & id, qđ a maiori ſegmēto, ad rectam potentem id, quod a tota, & id, quod a minore ſegmento, ita latus cubi ad latus Icoſaedri eidem ſphæræ cum cubo inſcripti. 780. B

Quam proportionem habent latera cubi & Icoſaedri eiuſdem ſphæræ, eandem habent latera cubi & icoſaedri in quauis alia ſphæra deſcriptorum. 782. B

Si ſphæra plano quopiam ſecetur, communis ſectio circulus erit. pag. 783. B

Si planum ſecans tranſit per centrum ſphæræ, ſit circulus idem centrum habens cum ſphæra: Si vero non tranſit per centrum, ſit circulus, cuius centrum punctū eſt, in quod cadit perpendicularis ex centro ſphæræ ad circulum ducta. 785. B

Circuli in ſphæra æquales æqualiter diſtant a centro ſphæræ: Et circuli æqualiter diſtantes a centro ſphæræ, æquales ſunt. 785. B

Dodecaedrum ad Icoſaedrum in eadem cum ipſo ſphæra deſcriptum eſt, vt cubi latus ad latus Icoſaedri, in vna eadēque ſphæra. 786. B

Eadem proportio eſt lateris cubi ad latus Icoſaedri, quæ ſuperficiei Dodecaedri ad ſuperficiem Icoſaedri, & lineæ potentis totam quamcunque ſectam extrema ac media ratione, & eius ſegmentum maius, ad potentem totam eandem, & eius ſegmentum minus; & Dodecaedri ad Icoſaedrum eiuſdem ſphæræ. pag. 788. B

Baſis Tetraedri ſeſquitertia eſt baſis octaedri eiuſdem ſphæræ: Superficies autem octaedri ſeſquialtera ſuperficiei Tetraedri. 792. B

Recta ex angulo Tetraedri per cē trum ſphæræ ducta, cadit in centrum baſis oppoſitæ, eſtque perpendicularis ad baſim. 793. B

Tetraedrum ad octaedrum eiuſdem ſphæræ ſe habet, vt rectangulum ſub linea potente viginti ſeptē ſexageſimas quartas partes lateris Tetraedri, & ſub linea cōtinente octo nonas partes eiuſdem lateris comprehenſum, ad quadratum diametri ſphæræ. 797. B

Sphæræ ſemidiameter potentia tripla

ſphæ eſt eius perpendicularis, quæ ex centro ſphæræ in baſim octaedri eiuſdē ſphæræ cadit. 802.B

Duplū quadrati ex diametro ſphæræ deſcripti, æquale eſt ſuperficiei cubi eiuſdem ſphæræ: perpendicularis autem a centro ſphæræ in baſim cubi demiſſa, æqualis eſt dimidio lateris cubi. 803.B

Solidum, quod fit ex dimidio lateris cubi in duas tertias partes quadrati diametri ſphæræ dictū cubum comprehendentis, æquale eſt cubo. Item quod fit ex latere cubi in tertiā partem eius quadrati. 804.B

Solidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuſcunque corporis Regularis in baſim demiſſa, in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, æquale eſt propoſito corpori Regulari. 804.B

Idem circulus cōprehendit & cubi quadratū, & octaedri triangulū eiuſdē ſphæræ. 805, et 930.B

Rectæ coniungentes centra baſium oppoſitarum tam in cubo, quam in octaedro, æquales ſunt. 806.B

Octaedrum ad triplum Tetraedri eiuſdē ſphæræ eſt, vt latus octaedri ad latus Tetraedri. 807.B

Altitudo Octaedri ad altitudinē Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Octaedri ad latus Tetraedri: Item diameter ſphæræ ad latus Tetraedri, vt latus Octaedri ad latus cubi. 809.B

Si recta propoſita potuerit totam aliquam rectam extrema ac media ratione ſectam, et maius eius ſegmentum; Item totam aliam ſimiliter ſectam, & minus eius ſegmentum; Erit maius ſegmentum prioris lineæ latus Icoſaedri; minus autem ſegmentum poſterioris lineæ latus dodecaedri eius ſphæræ, cuius recta appoſita diameter eſt. 809.B

Si latus Octaedri potuerit maius & minus ſegmentum recta extrema ac media ratione ſecta; poterit latus Icoſaedri eiuſdem ſphæræ duplum minoris ſegmenti. 811.B

Si recta diuiſa extrema ac media ratione, cum minore ſegmento angulum rectum conſtituat, cui recta ſubtendatur; erit recta, quæ potentia ſit ſubdupla eius rectæ ſubtenſæ, latus Octaedri eius ſphæræ, in qua dictum minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri. 813.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, & alia recta potentia huius ſeſquialtera ſit latus Octaedri, maius ſegmentum erit latus Dodecaedri eiuſdem cum Octaedro ſphæræ. 814.B

Cubus ad Octaedrum eiuſdē ſphæræ eſt, vt ſuperficies cubi ad Octaedri ſuperficiem. Item vt latus cubi ad ſemidiametrū ſphæræ. 815.B

Alia inuentiō laterum quinq; corporum Regularium in eadem ſphæra deſcriptorum. 817.B

Quadratum cubi ad triangulum

Tetraedri eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Tetraedri ad perpendiculare ex vno angulo, trianguli Tetraedri ad latus oppoſitum ductam. 822.B

Latus Tetraedri potentia ſeſquialterum eſt axis, uel altitudinis ipſius: Axis vero Tetraedri potentia ſeſquitertius eſt lateris cubi eiuſdem ſphæræ. 823.B

Diameter ſphæræ ſeſquialtera eſt axis Tetraedri illius ſphæræ. pag. 824.B

Axis Tetraedri ad latus cubi eiuſdem ſphæræ eſt, vt latus Tetraedri ad perpendicularem ex vno angulo baſis ad latus oppoſitum ductam. 825.B

Cubus triplus eſt Tetraedri eidem ſphæræ inſcripti. 825.B

Priſma eandem habens & baſim, & altitudinem cum Tetraedro, æquale eſt cubo eiuſdem ſphæræ. pag. 826.B

Si in Tetraedro Octaedrum inſcribatur; Tetraedrum bifariam ſecatur tribus quadratis æqualibus, quæ Octaedrum bifariam quoque, & ſeſe ad angulos rectos interſecant. 829.B

Rectæ connectentes centra baſium cubi oppoſitarum ſe mutuo ſecãt & bifariam, & ad angulos rectos. 831.B

Idẽ eſt centrum Icoſaedri, atq; ſibi inſcripti Dodecaedri. 835.B

Si Tetraedrum Octaedro inſcribatur; erunt quatuor baſes Tetraedri octo baſibus Octaedri parallelæ, ſingula binis. 837.B

Item rectæ centra baſium octaedri oppoſitarum coniungens, ſeſquialtera eſt axis Tetraedri. 838.B

Diameter Dodecaedri duo latera poteſt, ipſius ſcilicet Dodecaedri & cubi, in quo Dodecaedrũ inſcribitur. 851.B

Si latus cubi ſecetur extrema ac media ratione; minus ſegmentum latus eſt Dodecaedri in cubo deſcripti. Maius vero ſegmẽtum latus cubi in hoc Dodecaedro deſcripti. 851.B

Latus cubi æquale eſt duobus lateribus, Dodecaedri videlicet in ipſo deſcripti, et Dodecaedri circa eundem cubum deſcripti. pagina. 852.B

Recta duos angulos pentagonorum Dodecaedri communi lateri oppoſitos connectens eſt æqualis lateri cubi, cui Dodecaedrum inſcribitur. 852.B

Diameter Icoſaedri poteſt & latus Icoſaedri & cubi Icoſaedri ambientis. 854.B

Bifariæ ſectiones ſex oppoſitorũ laterum Icoſaedri coniunguntur tribus rectis æqualibus, ſeſe in centro Icoſaedri bifariam, & ad angulos rectos ſecantibus. pag. 855.B

Si latus cubi extrema ac media ratione ſecetur; maius ſegmentum latus eſt Icoſaedri in eo cubo deſcripti. 855.B

Icoſaedri tam latera, q̃ triangula oppoſita ſunt parallela. 855.F

Idem

Idem eſt centrũ Icoſaedri, & octaedri in eo deſcripti. 857. B

Idem eſt centrum baſis octaedri, & baſis Icoſaedri in eo deſcripti. quod intelligendum eſt de octo baſibus Icoſaedri in octo baſibus octaedri collocatis. 861. B

Idem eſt centrum octaedri, & Icoſaedri in eo deſcripti. 862. B

Idem eſt centrum pyramidis, & cubi in ea deſcripti. 867. B

Recta contungens biſarias ſectiones oppoſitorum laterum pyramidis, tranſit per centrum pyramidis, eſtque tripla lateris cubi in pyramide deſcripti. 867. B

Idem eſt centrum pramidis, & octaedri in ea deſcripti. 868. B

Idem eſt centrum baſis pyramidis, & baſis octaedri in ea deſcripti. quod intelligendum eſt de quatuor baſibus octaedri in quatuor baſibus pyramidis iacentibus. pag. 868. B

Quæ ſolida Regularia, in quibus proprie deſcribantur, & quæ nõ: Et alia de hac inſcriptione mutua. 871. B

Si in Dodecaedro cubus deſcribatur, & in hoc cubo aliud Dodecaedrum; erit proportio Dodecaedri exterioris ad interius Dodecaedrum triplicata proportionis, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ lineæ extrema ac media ratione diuiſæ. 874. B

Si ab angulis trianguli pyramidis ducantur rectæ ſecantes oppoſita latera extrema ac media ratione, ita vt prope quemuis angulum ſit maius ſegmentum vnius lateris, & minus alterius: Hæ ſectionibus ſuis in medio producent baſim Icoſaedri in ea pyramide deſcripti, inſcriptam quidem alij triangulo æquilatero, cuius anguli latera trianguli pyramidis ſecant extrema ac media ratione, & latera ipſa biſariam ſecantur ab angulis baſis Icoſaedri productæ. pag. 876. B

Latus Icoſaedri octaedro inſcripti, maius ſegmentum eſt rectæ diuiſæ extrema ac media ratione, quæ ab vno angulo baſis octaedri ducta ſecat latus oppoſitum extrema quoque ac media ratione. 878. B

Minus ſegmentum lateris pyramidis extrema ac media ratione ſecti, potentia duplum eſt lateris Icoſaedri in ea deſcripti. pag. 879. B

Latus cubi potentia dimidium eſt lateris pyramidis in eo deſcriptæ: Latus vero pyramidis duplum eſt lõgitudine lateris octaedri ſibi inſcripti: Latus denique cubi duplum eſt potentia lateris ſibi inſcripti octaedri. 880. B

Latus Dodecaedri maius ſegmentum eſt rectæ, quæ potentia dimidium poteſt lateris pyramidis ſibi inſcriptæ. 881. B

Si in cubo deſcribat̃ & Icoſaedrũ, & Dodecaedrũ; Latus Icoſaedri mediũ ꝓportionale erit inter

latus cubi, & latus Dodecaedri pag. 881. B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt lateris cubi in ea deſcripti. 882. B

Latus pyramidis potentia octodecuplum eſt rectæ extrema ac media ratione ſectæ, cuius maius ſegmentum latus eſt Dodecaedri in pyramide deſcripti. pagina 882. B

Si in octaedro Icoſaedrum deſcribatur; erit latus Icoſaedri potentia duplum minoris ſegmenti lateris octaedri extrema ac media ratione diuiſi. 883. B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterum eſt lateris cubi in ipſo deſcripti. 883. B

Latus octaedri potentia eſt quadruplum ſeſquialterũ rectæ extremæ ac mediæ ratione ſectæ, cuius maius ſegmẽtum latus eſt Dodecaedri octaedro inſcripti. pag. 884. B

Latus Icoſaedri maius ſegmentum eſt rectæ extremæ ac mediæ ratione ſectæ, quæ potentia dupla eſt lateris octaedri in Icoſaedro deſcripti. 885. B

Latus cubi ad latus Dodecaedri in ipſo deſcripti proportionem habet duplicatam eius, quam habet maius ſegmentum ad minus rectæ extremæ ac mediæ ratione ſectæ. Latus vero Dodecaedri ad latus cubi in ipſo deſcripti proportionem habet, quam minus ſegmentum ad maius eiuſdem rectæ lineæ. 885. B

Latus octaedri ſeſquialterum eſt lateris ſibi inſcriptæ pyramidis. pag. 886. B

Si ex quadrato diametri Icoſaedri auferatur triplum quadrati lateris cubi in eo deſcripti; relinquitur quadratum ſeſquitertiũ quadrati lateris Icoſaedri. pag. 887. B

Diameter Icoſaedri binas rectas poteſt, diametrum ſcilicet cubi in eo deſcripti, & diametrum circuli triangulum Icoſaedri ambientis. 889. B

Latus Dodecaedri minus ſegmentum eſt rectæ extremæ ac mediæ ratione ſectæ, quæ duplum poteſt lateris Icoſaedri in eo deſcripti. 889. B

Diameter Icoſaedri poteſt & ſuiipſius lateris ſeſquitertium, & lateris pyramidis in eo deſcriptæ ſeſquialterum. 890. B

Latus Dodecaedri ad ſibi inſcripti Icoſaedri latus ſe habet, vt minus ſegmentum lineæ perpendicularis ab vno angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, atque extremæ ac mediæ ratione ſectæ, ad partem eiuſdem lineæ inter centrum pentagoni, & latus eiuſdem poſitæ. 891. B

Si dimidium lateris Icoſaedri extremæ ac mediæ ratione ſecetur, minuſque eius ſegmentum, a toto latere Icoſaedri detrahatur; a reliqua quoq; rectæ pars rurſum tertia dematur; relinquetur

quetur latus Dodecaedri in Icoſaedro deſcripti. 892.B
Cubus ſibi inſcripte pyramidis triplus eſt. 894.B
Pyramis ſibi inſcripti octaedri dupla eſt. 895.B
Cubus ſibi inſcripti octaedri ſextupla eſt. 896.B
Octaedrum ſibi inſcripti cubi quadruplum ſeſquialterum eſt. pag. 897.B
Idem eſt centrum Octaedri, atque cubi in eo deſcripti. 899.B
Octaedrum ad ſibi inſcriptum cubum eſt, vt quadratum lateris Octaedri ad quadratum lateris cubi in eo deſcripti. 899.B
Octaedrum ſibi inſcripte pyramidis tredecuplum ſeſquialterum eſt. 900.B
Pyramis ſibi inſcripti cubi noncupla eſt. 900.B
Cubus ad cubum deſcriptum in pyramide, que in priori cubo deſcribitur, eſt vt 27. ad 1. pag. 902.B
Octaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet, quam due baſes Octaedri ad quinque baſes Icoſaedri. 902.B
Icoſaedrum ad ſibi inſcriptum Dodecaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione lateris Icoſaedri ad latus cubi in eadem cum Icoſaedro ſphera deſcripti, & ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Icoſaedri ad rectam centra baſium Icoſaedri oppoſitarũ coniungentem. 903.B
Dodecaedrum excedit cubum ſibi inſcriptum parallelepipedo, cuius quidem baſis à quadrato cubi deficit rectangulo contento ſub latere c bi, tertiaque parte minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi: at vero altitudo ab altitudine, ſiue latere cubi, minore ſegmento eius linea, qua dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit. 906.B
Dodecaedrum a duplo cubi ſibi inſcripti deficit duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi eſt equalis, latitudo autem tertia parti minoris ſegmenti eiuſdem lateris cubi, altitudo denique a latere cubi deficit minore ſegmento eius linea, qua dimidiati lateris cubi minus ſegmentum exiſtit: alterius vero & longitudo, & latitudo lateri cubi equalis eſt, altitudo autem minus ſegmentum eius linea, qua dimidiati lateris cubi ſegmentum minus exiſtit; ita vt amborum altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri cubi ſint aquales. 911.B
Dodecaedrum ad ſibi inſcriptum Icoſaedrum proportionem habet compoſitam ex proportione triplicata eius, quam habet diameter Dodecaedri ad rectam centra baſium Dodecaedri oppoſitarum copulantem, & proportione lateris cubi ad latus Icoſaedri in eadem ſphara cum

cubo deſcripti. 912.B
Dodecaedrum pyramidis, in qua deſcribitur, duas nonas partes continet, minus duobus parallelepipedis, quorum vnius longitudo lateri cubi in eadem pyramide deſcripti æqualis eſt, latitudo vero tertiæ parti minoris ſegmenti lateris eiuſdem cubi, altitudo denique a latere eiuſdē cubi deſcitit minore ſegmento eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdem minus ſegmentum exiſtit: alterius autem & longitudo, & latitudo lateri cubi prædicti eſt æqualis, altitudo vero minus ſegmentū eius lineæ, quæ dimidiati lateris cubi eiuſdē ſegmentū minus exiſtit, ita vt amborū altitudines ſimul altitudini, ſiue lateri eiuſdē cubi ſint æquales. 913. B
Octaedrum excedit ſibi inſcriptum Icoſaedrū parallelepipedo, cuius baſis eſt quadratū lateris Icoſaedri, altitudo vero maius ſegmētū ſemidiametri octaedri extrema ac media rone ſecta. 914. B
Pyramis excedit duplum Icoſaedri ſibi inſcripti parallelepipedo, cuius baſis quadratū lateris Icoſaedri, altitudo vero recta bifariam ſectionet oppoſitorum laterū Icoſaedri coniungens. 916. B
Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli, & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, ad eaſdem partes cetrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta ad eaſdem partes coniungentes, æquales quoque & parallelæ ſunt, & ad plana circulorum perpendiculares. 920. B
Si in ſphæra ſint duo circuli paralleli & æquales, in quibus ductæ ſint duæ rectæ parallelæ & æquales, non ad eaſdem partes centrorum; rectæ harum parallelarum extrema puncta non ad eaſdem partes coniungentes, in centro ſphæræ ſe interſecant, ac proinde diametri ſphæræ erunt, & inter ſe æquales: rectæ vero earundem parallelarum extrema pūcta ad eaſdem partes connectentes, & æquales ac parallelæ inter ſe ſūt, & cum parallelis rectos angulos conſtituunt. 921. B
Si in ſphæra ſint duæ rectæ parallelæ; rectæ earum puncta extrema ad eaſdem partes coniungentes, æquales inter ſe erunt. Et ſi parallelæ fuerint æquales, coniungentes non ſolum æquales, ſed & parallelæ erūt, rectoſque cum ipſis angulos conficient. 923. B
Sphęræ diameter ad latus Icoſaedri in ea deſcripti eſt, vt latus pentagoni ad latus decagoni eiuſdē circuli cuiuslibet. 935. B
Latus Icoſaedri maius eſt ſemidiametro ſphæræ, in qua deſcribitur, 935. B
Sphæræ diameter potentia eſt tripla lateris pentagoni deſcripti in circulo, qui per tres angulos Icoſaedri eius ſphæræ incedit, parallelusque eſt vni trianꝝlo Icoſaedri. 935. B

Iidem circuli ſphæra ſuſtinent & angulos Icoſaedri, & angulos Dodecaedri in ea ſphæra deſcriptorum. 940.B

Si quadratum, & triangulũ æquilaterum æqualia habeant latera; erũt viginti triangula ſimul maiora, quam octo quadrata ſimul. 941.B

Octo quadrata ex ſemidiametro ſphæra deſcripta, æqualia ſunt ſuperficiei cubi in ea ſphæra deſcripti. 942.B

Si octaedrũ, cubus, & Icoſaedrum in eadem ſphæra deſcribantur; erit perpẽdicularis ex cẽtro ſphæra ad vnam baſim Icoſaedri ducta maior perpendiculari ex eodem centro ſphæra ad vnam baſim octaedri, & cubi ducta. pagina. 943.B

Icoſaedri ſuperficies maior eſt ſuperficie cubi in eadem ſphæra deſcripti. 943.B

Dodecaedrum Icoſaedro maius eſt. pag. 944.B

Icoſaedrum cubo maius eſt. pagina. 944.B

Cubus Octaedro maior eſt. 945.B

Octaedrum Tetraedro maius eſt. pag. 945.B

Superficies Dodecaedri ſuperficiem Icoſaedri ſuperat, & hæc ſuperficiem cubi, & hæc ſuperficiem Octaedri, atque hæc demũque ſuperficiem Tetraedri. 946.B

Latus Tetraedri maius eſt latere Octaedri, & hoc maius latere cubi, & hoc maius latere Icoſaedri, atque hoc denique maius latere Dodecaedri. 949.B

Si corpora regularia ſint Iſoperimetra; illud, quod plures habet baſes, maius eſt: Vt Icoſaedrũ maius Dodecaedro, & hoc maius Octaedro, & hoc maius Cubo, atque hoc denique maius Tetraedro. 947.B

Omnes inclinationes duarum baſium cuiuſque corporis Regularis æquales ſunt. 948.B

FIGVRAE, anguli, & lineæ proporortionales.

Triangula & parallelogramma, quorum eadem eſt altitudo, ita ſe habent inter ſe, vt baſes. 752.A

Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt baſes, æquales habent altitudines, vel eandem. 754.A

Triangula & parallelegramma, quorum æquales ſunt baſes, vel eadem, ita ſe habent inter ſe, vt altitudines. 754.A

Triangula & parallelogramma, quæ ita ſe habent inter ſe, vt altitudines, æquales habent baſes, ſi vnam & eandem non habeant. 755.A

Si ad vnũ triãguli latus parallela ducta ſit, hæc ſecabit duo latera reliqua ꝓportionaliter. Et ſi duo latera ſecta ſint ꝓportionaliter; recta linea ſectiones iungens,

iungẽs, parallela erit reliquo lateri. 756.A
Si trianguli angulus bifariam ſectus ſit, ſecãs autem angulum recta linea ſecet & baſim: baſis ſegmenta ita ſe habebunt inter ſe, vt reliqua duo latera. Et ſi baſis ſegmenta ita ſe habeant, vt reliqua duo latera: recta a vertice ad ſectionẽ ducta, bifariam ſecabit angulum trianguli. 758.A
Aequiangulorum triangulorum proportionalia ſũt latera circa æquales angulos, & homologa ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. pag. 759.A
Recta linea vni lateri trianguli parallela aufert triangulum toti triangulo ſimile. 760.A
Si ex duobus punctis rectę, quorum alterum ſit extremum, alterum vero intra lineã, duæ parallelæ inter ſe educantur ad eaſdem partes, ita vt habeant eandem proportionem, quam rectæ inter ipſas, & alterum punctum extremum incluſæ: Recta coniungẽs extremum vnius earum, cum extremo prioris lineæ tranſibit per extremum alterius lineæ. 761.A
Si in triangulo parallela vni lateri agatur, recta ex angulo oppoſito ducta ſecat parallelam, & latus illud in eaſdem rationes. pag. 762.A
Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, & æquales habebũt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtẽduntur. 763.A
Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habeant; æquiangula erunt, æqualeſque habebunt angulos, ſub quibus latera homologa ſubtenduntur. pag. 764.A
Si duo triãgula vnum angulum vni angulo æqualem, circa autem alios angulos latera proportionalia habeant; reliquorum vero ſimul vtrumque aut minorem, aut non minorem recto: æquiangula erunt, & æquales habebunt eos angulos, circa quos proportionalia ſunt latera. 765.A
Si in triangulo rectãgulo ab angulo recto in baſim perpendicularis ducta ſit: quę ad perpẽdicularem triangula tum toti triangulo, tum ipſa inter ſe ſimilia ſunt. 767.A
Item tam perpẽdicularis eſt media proportionalis inter duo baſis ſegmenta, quam vtrumlibet laterum circa rectum angulum inter totam baſim, & ſegmẽtum baſis ei lateri adiacens. 768.A
Si duæ rectæ ſecentur in binis punctis proportionaliter: Erunt quoque intermediæ ſectiones in eadem proportione cum quibuslibet

bet ſegmentis duobus. 774.A

Si recta in quotcunque partes Arithmetice proportionales ſecta ſit, & alia recta ſecetur in totidem partes, quæ eaſdem inter ſe, quas illæ, proportiones habeant: Erunt quoq; partes huius lineæ Arithmetice proportionales. 775.A

Si duæ rectæ inæquales ad alias duas eandem habeant proportionem, minor ad minorem, & maior ad maiorem: Erit quoq; exceſſus priorum ad exceſſum poſteriorum, vt priorum vna ad vnam poſteriorum. 776.A

Recta a quouis puncto diametri ducta perpendicularis vſq; ad circumferentiam ſemicirculi, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta. 782.A

Aequalium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca ſunt latera circa æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circum æquales angulos, illa ſunt æqualia. 784.A

Aequalium & vnum vni æqualē habentium angulum, triangulorum, reciproca ſunt latera circum æquales angulos. Et quorum reciproca ſunt latera circa æquales angulos, illa ſunt æqualia. 785.A

Si quatuor rectæ proportionales ſint; rectangulū ſub extremis æquale eſt rectangulo ſub medijs. Et ſi rectangulum ſub extremis æquale ſit rectangulo ſub medijs, illæ quatuor rectæ proportionales ſunt. 786.A

Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, ſed tantum aquiangula. 787.A

Si tres rectæ ſint proportionales; rectāgulum ſub extremis quadrato mediæ æquale eſt. Et ſi rectangulū ſub extremis quadrato mediæ ſit æquale; illæ tres proportionales ſunt. pag. 788.A

Recta, cuius quadratum æquale eſt rectangulo ſub duabus rectis quibuſcunque, media proportionalis eſt inter eas duas rectas. pag. 788.A

Idem eueniet, ſi parallelogramma non ſint rectangula, aquiangula tamen. 789.A

Triangula ſimilia inter ſe ſunt in duplicata ratione homologorum laterum. 814.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiā, ita eſt triangulum ſuper primam ad triangulum ſuper ſecundā ſimile, ſimiliterque deſcriptū pag. 815.A

Similia polygona in ſimilia triāgula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis: Et polygona duplicatam habēt rationem homologorum laterum. 817.A

Si tres rectæ ſint proportionales; vt eſt prima ad tertiam,

ita eſt polygonum ſuper primam, ad polygonum ſuper ſecundam ſimile ſimiliterq; deſcriptum. 819.A

Similia polygona æquilatera, & æquiangula, diuiduntur in ſimilia triangula, & numero æqualia, & homologa totis; ductis rectis a centris circulorum ipſa circumſcribentium ad omnes angulos. 821.A

Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſunt ſimilia. pag. 823.A

Si quatuor rectæ ſint proportionales: Et ab eis rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta, proportionalia ſunt. Et ſi a rectis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia ſint: ipſæ etiam rectæ proportionales erunt. 823.A

Æqualia rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta, ſunt ſuper æquales rectas. 825.A

Si tres rectæ ſint proportionales; erit quoque rectilinea ſimilia ſimiliterque deſcripta ab eis proportionalia, &c. 826.A

Æquiangula parallelogramma inter ſe rationem habent ex lateribus compoſitam. 837.A

Triangula vnum angulum vni angulo æqualem habentia proportionem habet ex lateribus circa æqualē angulū cōpoſitā. 830.A

Triangula vnū angulu vni angulo æqualē habentia, eandē proportionem habent, quam rectangula ſub lateribus circa angulū æqualem contenta. 832.A

Parallelogramma æquiangula eandem rationem habent, quam rectangula ſub lateribus circa angulū æqualem contenta. 833.A

Triangula & parallelogramma inter ſe rationem habent compoſitam ex proportione baſium, & proportione altitudinum. pagina. 833.A

In parallelogrammo parallelogramma circa diametrum, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia. pag. 835.A

Datis duobus parallelogrammis æquiangulis, ſed non ſimilibus: ex quouis illorum alteri ſimile reſecare. 837.A

Si a parallelogrammo parallelogrammum ablatum ſit ſimile toti, & ſimiliter poſitum, cōmunem cum eo habens angulum; hoc circa eandem cum toto diametrum conſiſtit. pag. 840.A

Idem eueniet, ſi angulū habeant non communem. 842.A

Parallelogrammorum ſecundū eandem rectam lineam applicatorum, deficientiumq; figuris parallelogrammis ſimilibus, ſimiliterq; poſitis ei, qd a dimidia deſcribitur; maximum id eſt, quod ad dimidiū applicatur, parallelogrammum ſimile exiſtens defectui. pag. 844.A

In rectangulis triangulis, figura quæuis

quæuis a latere rectum angulum ſubtendẽte deſcripta æqualis eſt figuris, quæ priori illi ſimiles, & ſimiliter poſitæ a lateribus rectum angulũ cõtinẽtibus deſcribũtur. 852. A

Si figura, q̃ ab vno latere triãguli deſcribitur, æqualis ſit eis, quæ a reliquis duobus lateribus deſcribuntur, figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis: angulus ſub reliquis his lateribus comprehenſus, rectus eſt. 854. A

Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ſecundum vnum angulũ compoſita fuerint, ita vt homologa eorum latera ſint parallela; tũ reliqua latera in rectam lineam collocata reperientur. 855. A

In circulis æqualibus, anguli eãdem habent rationem cũ peripherijs, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad peripherias conſtituti inſiſtant: Inſup vero & ſectores, quippe qui ad centra conſiſtunt. 856. A

In circulis æqualibus, eſt ſector ad ſectorẽ, vt angulus ad angulum in centro. 859. A

Vt eſt angulus in centro ad quatuor rectos, ita eſt arcus illi angulo ſubtenſus ad totã circunferentiã. Et cõtra. 859. A

Similia circulorum ſegmenta eandem habent proportionem ad totas circumferentias. 861. A

Si duo aut plures circuli idem habeant centrum: Recta ex centro ducta abſcindunt arcus ſimiles. pag. 405. & 862. A

Si in circulo duæ rectæ ſe mutuo ſecent: erunt ſegmenta vnius ſegmenis alterius reciproca. 875. A

Si extra circulum ſumatur pũctũ aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ circulum ſecantes; erunt totæ, & ſegmenta extra circulum reciproca. Quod ſi ab eodem puncto rectæ ducatur circulum tangens; erit hæc media proportionalis inter quamlibet rectam, quæ circulum ſecat, et eius ſegmẽtũ exterius. 875. A

Si duæ rectæ ſe inuicem ſecent, & a duobus earum terminis perpendiculares ſibi mutuo demittantur: erunt duæ lineæ, quarũ vna inter vnum terminorum, & ſectionem, altera vero inter ſectionẽ, & prioris lineæ ſumptæ perpendicularẽ interiicitur, aliis duabus eodem modo incluſis reciprocæ. 876. A

In parallelogrammo duæ rectæ lateribus parallelę ſe mutuo ſecantes, diuidũt parallelogrammum in quatuor parallelogrãma proportionalia. 877. A

Omne quadrilaterũ a duab. diametris diuiditur in quatuor triãgula proportionalia. 877. A

In triãgulo rectãgulo, in quo perpẽdicularis ab angulo recto demiſſa ſecat baſim extrema ac media ratione; tria latera ſunt continue proportionalia. Et ſi tria

latera

latera trianguli rectanguli ſint continue proportionalia; perpendicularis ad baſim ex angulo recto demiſſa, ſecat baſim extrema ac media ratione. 878.A

Si ex centro per quæuis puncta lineæ Quadratricis ducantur recta vſque ad peripheriam quadrantis ex eodem centro deſcripti, & ex eiſdem punctis ad baſim demittantur perpendiculares, & alia recta eidem baſi parallelæ: Erunt arcus quadrantis inter ſemidiametros interiecti, perpendicularibus, vel ſegmetis ſemidiametri intra parallelas poſitis, proportionales. 898.A

Si quadrãtis & Quadratricis idẽ centrum ſit; erunt arcus quadrantis, ſemidiameter, & baſis Quadratricis, continue proportionales. 904.A

Circumferentiæ circuli ad eius diametrum, proportio in numeris plus minus, quæ ſit. 907.A

Si ſint duæ rectæ, erit vt prima ad ſecundam, ita quadratum primæ ad rectangulum ſub illis duabus contentum. Et vt ſecunda ad primam, ita rectãgulum ſub ipſis ad quadratum primæ. 344.B

Si ſint duæ rectæ inæquales, erit vt prima ad ſecundam, ita rectangulum ſub ipſis ad quadratum ſecundæ. 375.B

Si ſint tres rectæ, erit vt prima ad tertiam, ita rectangulum ſub prima & ſecunda contentum, ad id, quod ſub ſecunda & tertia continetur. 377.B

Si recta linea ſecetur in partes duas inæquales; erit vt altera pars ad alteram, ita rectãgulum ſub tota & priore parte aſſumpta, ad rectangulum ſub tota, & altera parte contentum. 380.B

Si recta ſit ſecta vtcunque; erit rectangulum ſub partibus cõtentum, medium proportionale inter earum quadrata. Item rectangulum ſub tota, & vna parte contẽtum, mediũ proportionale inter quadratum totius lineæ, & quadratũ dictæ partis. 416.B

Si duæ rectæ parallelis planis ſecentur; In eaſdẽ rationes ſecabuntur. 568.B

Si ſolidum parallelepipedũ plano ſecetur aduerſis planis parallelo: Erit quemadmodum baſis ad baſim, ita ſolidum ad ſolidum. 585.B

Idem conuenit in omne priſma. pag. 587.B

Si priſma quodcunque ſecetur plano oppoſitis planis æquidiſtante, ſectio eſt figura æqualis, & ſimilis planis oppoſitis. 590.B

Solida parallelepipeda ſub eadẽ altitudine; inter ſe ſunt, vt baſes. 602.B

Si parallelepipeda inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. 603.B

Similia ſolida parallelepipeda, inter

inter ſe ſunt in triplicata ratione homologorum laterũ. pag. 603.B

Si ſint quatuor rectæ continue proportionales, vt eſt prima ad quartam, ita eſt parallelepipedum ſuper primâ deſcriptum, ad parallelepipedum ſimile, ſimiliterque deſcriptum ſuper ſecundam. 605.B

Aequalium ſolidorum parallelepipedorum baſes & altitudines reciprocãtur. Et quorum ſolidorum parallelepipedorũ baſes & altitudines reciprocantur; illa ſunt æqualia. pag. 605.B

Hæc quinque, quæ proxime de parallelepipedis dicta ſunt, conueniunt etiam priſmatis, in quibus duo plana oppoſita ſunt triãgula. 608.B

Si tres rectæ ſint proportionales; quod ex illis fit ſolidum parallelepipedum, æquale eſt deſcripto a media linea ſolido parallelepipedo, qđ æquilaterum quidem ſit, equiangulum vero prædicto. 612.B

Si *parallelepipedum ex tribus rectis deſcriptum, æquale ſit parallelepipedo ſibi æquiangulo a media recta deſcripto; erunt tres rectæ continue proportionales.* *pag.* 613.B

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint; & ſolida parallelepipeda, quæ ab ipſis & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, proportionalia erunt. Et ſi ſolida parallelepipeda, quę & ſimilia, & ſimiliter deſcribuntur, fuerint proportionalia; & ipſæ rectæ lineę proportionales erunt. 614.B

Eodem modo ſi fuerint tres rectæ proportionales, erunt & parallelepipeda ſimilia, ſimiliterque deſcripta ex eis, proportionalia, etc. *pag.* 616.B

Idem quoque quadrat in priſmata triangularium planorum oppoſitorum ex quatuor rectis, vel tribus, continue proportionalibus deſcripta, ſi ſimilia, ſimiliterque poſita ſint. 616.B

Circuli inter ſe ſunt, quemadmodum a diametris quadrata. 626.B

Circulus ad circulum eſt, vt polygonum in illo deſcriptũ ad polygonum ſimile in hoc deſcriptum. 629.B

Sub eadem altitudine exiſtẽtes pyramides, & triangulares habentes baſes; inter ſe ſunt, vt baſes. 635.B

Si pyramides triangulares inter ſe ſint, vt baſes; ipſæ erunt ſub eadem altitudine. 637.B

Sub eadem altitudine exiſtentes pyramides, & polygonas habentes baſes, inter ſe ſunt, vt baſes. 638.B

Idem verum eſt de pyramidibus eiuſdem altitudinis, quarum vna baſim habet plurium angulorum, quam altera. 639.B

Pyramides quarumlibet baſium, quæ inter ſe ſunt, vt baſes; eandem habent altitudinẽ. 641. B

Pyramis quælibet tertia pars eſt priſmatis, quod eandem cum illa habet & baſim, & altitudinem. Siue priſma quod libet triplum eſt pyramidis, quæ eandem cum ipſo habet & baſim & altitudinẽ. 642. B

Eodem modo pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis baſem baſi, & altitudinem altitudini æqualem. 644. B

Priſmata eiuſdem altitudinis ſuper quaſcunque baſes, inter ſe ſunt, vt baſes. 644. B

Si priſmata quarumcũque baſium inter ſe ſint, vt baſes; ipſa erunt ſub eadem altitudine. 645. B

Quæ de priſmatis dicta ſunt, intelligi debent de ijs, quę habent plana oppoſita baſibus æqualia, & ſimilia. 646. B

Similes pyramides, quæ triangulares habent baſes, in triplicata ſunt homologorũ laterum ratione. 647. B

Similes pyramides, quarum baſes plura latera, quã tria continent, habent proportionem homologorum laterũ triplicatam. 648. B

Similia priſmata triplicatam proportionem habent laterum homologorum. 649 B

Pyramides multangulæ ſimiles diuiduntur in pyramides triangulares ſimiles, & numero æquales, & homologas totis. 651. B

Priſmata multangula ſimilia diuiduntur in priſmata ſimilia triangulares baſes habentia, & numero æqualia, & homologa totis. pag. 651. B

Æqualium pyramidum, & triangulares baſes habentium, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes habẽtium reciprocantur baſes, & altitudines; illæ sũt æquales. 651. B

Æqualium pyramidum, quarum baſes non ſunt triangulares, reciprocantur baſes & altitudines. Et quarum pyramidum triangulares baſes non habentium reciprocantur baſes & altitudines, illæ ſunt æquales. 652. B

Idẽ conuenit priſmatibus. 654. B

Sub eadẽ altitudine exiſtẽtes coni & cylindri, inter ſe ſunt, vt baſes. 658. B

Atque hoc verum eſt, ſiue coni & cylindri recti ſint, ſiue ſcaleni. pag. 661. B

Si coni & cylindri quicunque inter ſe ſint, vt baſes, ipſi ſub eadem altitudine erunt. 661. B

Coni & cylindri ſimiles, in triplicata ratione ſunt diametrorũ, quæ in baſibus. 662. B

Idem hoc locum habet in conis & cylindris ſcalenis. 665. B

Si cylindrus plano ſecetur aduerſis planis parallelo; erit vt cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem. 667. B

Idem

Idem intelligatur de cylindro ſcaleno. 668.B

Super æqualibus baſibus exiſtentes coni, & cylindri, inter ſe ſunt, vt altitudines. 668.B

Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 669.B

Item priſmatis, parallelepipedis, & pyramidibus ſuper æquales baſes conſtitutis. 670.B

Coni et cylindri eã recti, q̃ ſcaleni: ltẽ priſmata, parallelepipeda, & pyramides, proportionẽ habẽtes eãdem, quam altitudines, baſes habebunt æquales. 672.B

Æqualium conorum, & cylindrorum reciprocantur baſes, & altitudines. Et quorum conorum & cylindrorũ reciprocantur baſes & altitudines, illi ſunt æquales. 672.B

Idem conuenit conis & cylindris ſcalenis. 674.B

Sphęrę inter ſe sũt in triplicatarõne ſuarũ diametrorũ. 685.B

Ex quo fit, ita eſſe ſphæram ad ſphæram, vt polyedrum in illa deſcriptum, ad polyedrum ſimile in hac deſcriptũ. 688.B

Si recta linea ſecũdũ extremã & mediam rationẽ ſecetur; maius ſegmẽtũ aſſumẽs dimidiã totius, quintuplũ poteſt eius, quod a dimidia totius deſcribitur, quadrati. 689.B

Si recta linea ſuijpſius ſegmenti quintuplũ poſsit; Duplæ prædicti ſegmẽti extrema ac media ratione ſectæ, maius ſegmentum reliqua pars eſt eius, quæ a principio, rectæ. 691.B

Si recta linea ſecũdum extremã & mediam rationem ſecetur; minus ſegmẽtum aſſumens dimidiã maioris ſegmenti, quintuplum poteſt eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati. 693.B

Si recta inæqualiter ſecetur, & minus ſegmentũ aſſumens dimidiũ maioris ſegmeti quintuplũ poſſit eius, quod a dimidia maioris ſegmenti deſcribitur, quadrati: Recta illa linea ſecta erit extrema & media ratione. 695.B

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; quod a tota, quodq; a minore ſegmento, ſimul vtraque quadrata, tripla sũt eius, quod a maiore ſegmento deſcribitur, quadrati. 696.B

Si recta inæqualiter ſecetur, ſitque quadratum totius, vna cum quadrato minoris ſegmenti, triplum quadrati ex maiore ſegmento deſcripti: Recta illa linea extrema ac media ratione ſecabitur. 697.B

Si recta ſecũdũ extremã et mediã rationem ſecetur, tota linea aſſumens minus ſegmentũ, quintuplũ põt eius, q̃ a maiori ſegmẽto deſcribitur, quadrati. Et ſi recta inæqualiter ſecetur, totaq; aſſumens minus ſegmentum poſſit quintuplum eius, quod a maiori ſegmento deſcribitur, quadrati; Recta illa ſecundũ extremã & mediã rationẽ ſecta eſt. 698.B

Si recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur; apponaturq; ei æqualis maiori ſegmento: Tota recta linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecatur, & maius ſegmentum eſt, quę a principio, recta linea. 699.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, detrahaturque ex maiori ſegmento ſegmẽtum minus; erit maius ſegmentum ſectũ extrema ac media ratione, et maius ſegmẽtum eſt illa linea, quæ prioris lineæ minus ſegmentum erat. 700.B

Si recta ſecetur extrema ac media ratione, atque ex dimidio illius auferatur dimidia maioris ſegmenti; erit quoq; dimidia totius diuiſa extrema ac media ratione, maiuſque ſegmentum erit dimidium maioris ſegmenti totius lineæ. 701.B

Si ad rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ; ſemicirculus circa illam lineam rectã deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis. 722.B

Si binæ rectæ extrema ac media ratione ſecẽtur; ipſę ſimiliter ſecabuntur, in eaſdẽ ſcilicet proportiones. 763.B

Si ſint quatuor rectæ continue proportionales, necnon & aliæ quatuor, ita vt eadem ſit antecedes omnium; erit proportio tertiæ ad tertiam proportionis ſecundæ ad ſecundam duplicata; & proportio quartæ ad quartam eiuſdem proportionis ſecundæ ad ſecundam triplicata. 819.B

Si duo latera trianguli æquilateri ſecentur extrema ac media ratione, ita vt vnius maius ſegmẽtum, alterius vero minus ſit prope angulum ab ipſis comprehenſum; recta connectens puncta ſectionum duplum poteſt minoris ſegmenti. 861.B

Perpendicularis ex angulo pentagoni æquilateri & æquianguli in latus oppoſitum demiſſa, ſecatur a recta illum angulum ſubtendente, extrema ac media ratione. 875.B

FIGVRAE planę quadrilateræ. vide, Parallelogrammum, &c.

FRACTIONES numerorum. vide. Minutiæ numerorum.

FRACTVS numerus. vide. Minutiæ numerorum.

IMPAR numerus. vide. Numerus par, &c.

INCOMMENSVRABILES magnitudines. vide. Commenſurabiles, & incommenſurabiles magnitudines.

IRRA-

IRRATIONALES magnitudines, vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

ISOSCELES. vide. Trian gulum.

LINEA perpendicularis. vide. Recta linea.

LINEA recta. vide. Recta linea.

LINEAE parallelæ. vide. Recta linea.

LINEAE proportionales. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

MAGNITVDINES commensurabiles, & incommensurabiles. vide. Commensurabiles, & incommensurabiles magnitudines.

MAGNITVDINES proportionales in communi.

Si sint tres rectæ Arithmetice proportionales: rectangulum sub extremis, una cum quadrato excessus, æquale erit quadrato lineæ mediæ. 271 A

Proportionum rationalium genera, & inuentio: Et proportionalitatis Arithmeticæ, Geometricæ, atque Harmonicæ, sine Mediæ, proprietates variæ. a 505. *vsque ad* 632.

Euclides cur in defin. 6. & 8. lib. 5. quatuor magnitudines proportionales, & non proportionales per earum æque multiplicia definierit. 643. A

Si sint quotcunq; magnitudines quotcunq; magnitudinũ æqualium numero, singulæ singularum, æque multiplices; quam multiplex est vnius vna magnitudo, tã multiplices erunt & omnes omnium. 675. A

Si prima secũdę æque fuerit multiplex, atq; tertia quartæ, fuerit autem & quinta secundæ æque multiplex, atque sexta quartæ: erit & composita prima cum quinta, secũdæ æque multiplex, atque tertia cum sexta quartæ. 676. A

Idem sequitur, si prima & tertia, æquales sint secundæ & quartę; at quinta & sexta, æque multiplices secundæ & quartę: Vel prima et tertia, æque multiplices secundæ & quartę; at quinta & sexta, æquales secundæ ac quartæ: Vel denique si tam prima & tertia, quam quinta ac sexta, æquales sint secundæ ac quartæ. pag. 677. A

Si sit prima secũdæ æque multiplex, atq; tertia quartæ: sumãtur autẽ æque multiplices primæ ac tertiæ: Erit & ex æqualitate sumptarum vtraque vtriq; æque multiplex, altera alterius.

ſecundæ, altera autem quartæ. 678.A
Si prima ad ſecundã habeat eandẽ rationem, quam tertia ad quartam: Etiam æque multiplices primæ & tertiæ, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem eandem habebũt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint. pag. 679.A
Magnitudines quatuor proportionales, conuertendo quoq; proportionales ſunt. 681.A
Si magnitudo magnitudinis æque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: Etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. 683.A
Si duæ magnitudines duarũ magnitudinum ſint æque multiplices, & detractæ quædã ſint earundem æque multiplices: Et reliquæ eiſdem aut æquales ſunt, aut æque ipſarũ multiplices. 685.A
Æquales ad eãdem, eandem habent rationem: Et eadem ad æquales. 687.A
Eodem modo, æquales ad æquales eandẽ habent rationem. 688.A
Inæqualium magnitudinum maior ad eandem, maiorẽ rationem habet, quam minor: Et eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorẽ. 688.A
Quæ ad eandem, eandẽ habent rationem, æquales ſunt: Et ad quas eadem eandem habet rationem, eæ æquales quoque ſunt. 691.A
Ad eandem magnitudinẽ rationẽ habentiũ, quæ maiorem rationem habet, illa maior eſt: Ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor eſt. 692.A
Quæ eidẽ ſunt eędẽ rationes, & inter ſe ſunt eædem. 693.A
Quæ eiſdem ſunt eadẽ rationes, & inter ſe ſunt eadem. 694.A
Si ſint magnitudines quotcunq; proportionales: quemadmodum ſe habuerit vna antecedentium ad vnã conſequẽtiũ, ita ſe habebunt omnes antecedentes ad omnes cõſequentes. 695.A
Si prima ad ſecundam, eandẽ habuerit rationẽ, quam tertia ad quartam, tertia vero ad quartam maiorem rationẽ habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, maiorem rationem habebit, quã quinta ad ſextam. 696.A
Si prima ad ſecundã, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; tertia vero ad quartam, minorem rationem habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoque ad ſecundam, minorẽ rationem habebit quam quinta ad ſextã. 697.A
Si prima ad ſecundam, maiorẽ habuerit rationem, quã tertia ad

quartam; tertia uẽ ad quartã, maiorẽ habuerit, quam quinta ad ſextam: Prima quoq; ad ſecundam, maiorem habebit, quã quinta ad ſextam. Quod ſi prima ad ſecundam, minorem habuerit rationem, quã tertia ad quartam; tertia item ad quartam, minorẽ, quam quinta ad ſextam: Prima quoq; ad ſecundam, minorem rationẽ habebit, quã quinta ad ſextam. 697.A

Si prima ad ſecundã ſit, vt tertia ad quartam; ſit autem prima maior, quam tertia: erit & ſecũda maior quam quarta. Et ſi æqualis, æqua is: Et ſi minor, minor. 698.A

Eodẽ modo, ſi ſecũda maior fuerit quã quarta; erit et prima maior quã tertia: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 699.A

Partes cũ pariter multiplicibus in eadẽ ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuo reſpondent, ita ſumantur. 700.A

Magnitudines quatuor proportionales, vicißim quoq; proportionales ſunt. 701.A

Si ſint quatuor magnitudines proportionales, ſit aũt prima maior q̃ ſecunda: erit quoq; tertia maior q̃ quarta: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 702.A

Si compoſitæ magnitudines fuerint proportionales, hæ quoque diuiſæ proportionales erunt. 703.A

Si diuiſæ magnitudines ſint proportionales, hæ quoq; cõpoſitę ꝓportionales erunt. 705.A

Si ſit, vt totum ad totũ, ita ablatum ad ablatum: erit quoque reliquum ad reliquum, vt totum ad totum. 708.A

Si ſint quatuor magnitudines ꝓportionales; hæ quoquę per conuerſionem rationis proportionales erunt. 709.A

Si ſint tres magnitudines, & aliæ tres, quæ binæ & in eadẽ ratione ſumantur; ſit autem ex æquo prima maior, quam tertia; erit & quarta maior quã ſexta; Et ſi æqualis, æqualis; Et ſi minor, minor. 710.A

Si ſint tres magnitudines, & alię tres, quæ binæ & in eadem ratione ſumantur, fuerit q; perturbata earum proportio: ex æquo aũt ꝓprima maior fuerit q̃ tertia: Erit & quarta maior quã ſexta: Et ſi æqualis, æqualis: Et ſi minor, minor. 711.A

Si ſint quotcũq; magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, q̃ binæ in eadẽ rõne ſumãtur: Et ex æqualitate in eadem ratione erunt. 713.A

Si ſit prima ad ſecundã, vt tertia ad quartã: habebũt æquemultiplices primę ac tertię ad ſecũdã & quartam, eãdem rationem: Itẽ æquemultiplices ſecundæ & quartæ ad primã ac tertiã. Et contra, eandem rationem habebũt ſecunda & quarta ad æquemultiplices prima ac tertię: Itẽ

prima ac tertia, ad æque multiplices ſecundæ & quartæ. 715. A

Si ſint tres magnitudines, alięq; ipſis æquales numero, quę binæ in eadem ratione ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt. 716. A

Si ſit prima ad ſecundam, vt tertia ad quartam; Item quinta ad ſecũdam, vt ſexta ad quartam: Etiam compoſita prima cum quinta ad ſecũdam erit, vt compoſita tertia cum ſexta ad quartam. 717. A

Si duæ magnitudines ad duas eandem habeant rationem, & detractæ ex prioribus ad eaſdẽ poſteriores eandem quoque habeãt rationem: Et reliquæ ad eaſdem poſteriores eandem rationem habebunt. 718. A

Si quatuor magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima reliquis duabus maiores erunt. 719. A

Si tres magnitudines ſint proportionales: Maxima & minima maiores erũt, quam duplæ reliquæ. pag. 720. A

Si prima ad ſecundam habeat maiorem rationẽ, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecũda ad primam, minorem rationẽ, quã quarta ad tertiam. pag. 721. A

Si prima ad ſecundã habeat minorẽ proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo ſecũda ad primã, maiorẽ rõnẽ, quã quarta ad tertiam. 721. A

Si prima ad ſecundã habeat maiorem rationẽ, quã tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiã, maiorẽ rationem, quã ſecunda ad quartã. 722. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; vicißim prima ad tertiam, minorem rationem, quam ſecunda ad quartam. 722. A

Si prima ad ſecundã habeat maiorem rationem, quam tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam maiorem rationem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 723. A

Si prima ad ſecundam habeat minorem rationem, quã tertia ad quartam: habebit quoq; compoſita prima cum ſecunda, ad ſecundam minorem rationem, quam compoſita tertia cum quarta, ad quartam. 724. A

Si compoſita prima cum ſecũda ad ſecundam, maiorem habeat rationem, quam compoſita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad ſecundam maiorem rationem, quam tertia ad quartam. pag. 724. A

Si prima cum ſecunda ad ſecundam minorem rationẽ habeat, quam tertia cũ quarta ad quartam

tam: habebit quoque dividendo prima ad secũdam minorem rationem, quam tertia ad quartam. 725.A

Si composita prima cum secũda ad secundam habeat maiorẽ rationem, quam composita tertia cũ quarta ad quartã: habebit per conuersionem rationis, prima cũ secunda ad primam, minorem rationem, quam tertia cũ quarta ad tertiam. 726.A

Si prima cum secunda ad secundam, minorem habeat rationẽ, quam tertia cũ quarta ad quartam: habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primum, maiorem rationem, quam tertia & quarta ad tertiam. 726.A

Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam; item secunda priorum ad tertiam maior, quam secunda posteriorum ad tertiam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam. pag. 727.A

Idem eueniet, si proportio prima ad secundam eadem fuerit, quæ prima ad secundam; at secunda ad tertiam maior, quam secunda ad tertiam: Vel contra, si proportio prima ad secundam fuerit maior, quam prima ad secundam; at secunda ad tertiã eadem, quæ secũda ad tertiam. pag. 728.A

Quod si proportiones priorum magnitudinum minores fuerint: erit quoque ex æqualitate minor proportio primæ ad tertiam, quam primæ ad tertiam. 729.A

Idem eueniet, si proportio primæ ad secundam fuerit eadem, quæ prima ad secundam; at secundæ ad tertiam minor, quam secundæ ad tertiam: Vel contra, si proportio primæ ad secundam fuerit minor, quam primæ ad secundam; at proportio secundæ ad tertiam eadem, quæ secundæ ad tertiam. 729.A

Quod si plures sint magnitudines tribus, siue omnes proportiones in vno ordine magnitudinum sint maiores, vel minores omnibus proportionibus in alio ordine magnitudinum; sive vna tantum maior, quam vna, vel dua, &c. Erit maior vel minor proportio primæ ad vltimam in vno ordine, quam prima ad vltimam in alio ordine. 729.A

Si sint tres magnitudines, & alię ipsis æquales numero, sitque maior proportio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; Item secundæ priorum ad tertiam maior, quam primæ posteriorum ad secundam: Erit quoque ex æqualitate, maior proportio primæ priorum ad tertiam, quã

prima posteriorum ad tertiam. pag. 730.A

Idem eueniet, si proportio prima priorum ad secundam sit, quæ secũdæ posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam maior, quam prima priorum ad secundam: Vel contra, ratio primæ priorum ad secundam maior, quam secunda posteriorum ad tertiam; at secunda priorum ad tertiam eadem, quæ prima posteriorum ad secundã. pag. 731.A

Quod si in primis magnitudinibus aliquæ proportiones, vel omnes sint minores; erit minor proportio primæ ad tertiam, quam primæ ad tertiam. 831.A

Quod si plures sint magnitudines quam tres in quolibet eruine: erit quoque maior vel minor proportio primæ ad vltimam, quam primæ ad vltimam. pag. 731.A

Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio quam totius ad totum. 731.A

Si fuerit minor ratio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit etiam minor ratio reliqui ad reliquum, quam totius ad totum. 732.A

Si sint quotcunque magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque maior ratio primæ priorum ad primam posteriorum, quam secundæ ad secundam; & hæc maior, quam tertiæ ad tertiam, & sic deinceps: Habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima; minorem autem, quam prima priorum ad primam posteriorum; maiorem denique etiam, quam vltima priorum ad vltimam posteriorum. 733.A

Propositis quotcunque magnitudinibus, proportio prima ad vltimã cõponitur ex omnibus proportionibus intermedijs, vt ex proportione primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, &c. 742.A

Si quatuor magnitudines sint Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus sit inter primam & secundam, qui inter tertiam & quartam; hæ vicissim quoque erũt Arithmetice proportionales, hoc est, idem excessus erit inter primam & tertiam, qui inter secundam & quartam. pagina 458.B

MAGNITVDINES rationales, & irrationales. vide. Rationales, & irrationales magnitudines.

MINVTIAE numerorum.

Nullus numerus fractus, aut com-

positus

poſitus ex integro & fracto, in ſe multiplicatus procreat quadratum numerum integrum. pag. 658. A

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum vnius numerator ſit vnitas, eandem proportionem habent, quam numeratores. 240. B

Numerator cuiuſuis minutiæ ad denominatorem eandem proportionem habet, quam minutia ad integrum, cuius eſt minutia. pag. 241. B

Minutia qualibet, pars eſt numeratoris à denominatore denominata. 242. B

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, quarum neutra numeratorem habeat vnitatem, eandem proportionem habent, quam numeratores. pag. 243. B

Si duarum minutiarum numerator prioris in denominatorem poſterioris, & poſterioris numerator in denominatorem prioris ducatur; erit prior minutia ad poſteriorem, vt prior numerus productus ad poſteriorem. pag. 244. B

Integrum ad ſummam duarum minutiarum eandem proportionem habet, quam numerus ex multiplicatione mutua denominatorum productus ad ſummam duorũ productorum, quorum vnus ex numeratore prioris minutiæ in poſterioris denominatorem, alter vero ex numeratore poſterioris in denominatorem prioris gignitur. 245. B

Si duæ minutiæ eundem habeant numeratorem, erit vt prior minutia ad poſteriorem, ita poſterioris denominator ad denominatorem prioris. 246. B

Minutiæ, quarum numeratores ad denominatores eandem habent proportionẽ, æquales ſunt: Et æqualium minutiarum numeratores ad denominatores eãdem proportionem habent. Cuius autem numerator ad denominatorem habet maiorem proportionem, illa maior eſt: Et quæ maior eſt, eius numerator ad denominatorem habet proportionem maiorem. pag. 247. B

Minutiæ, quarum numeratores eandem proportionem habent, quam denominatores, ſunt æquales: Et minutiarum æqualium numeratores eandem habent proportionem, quam denominatores. Cuius autem numerator maiorẽ proportionem habet, quam denominator, illa maior eſt: Et maioris numerator maiorem habet proportionẽ quam denominator. 248. B

Minutia minutiæ æqualis eſt minutiæ ſimplici, cuius numerator ex multiplicatione mutua numeratorum, denominator vero ex mutua denominatorum multiplicatione procreatur. 252. B

Duæ minutiæ, quarum numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt numeros æquales, æquales sunt: & minutiarum æqualium numeratores in denominatores vicissim ducti gignunt æquales numeros. Cuius vero numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum gignit, illa maior est: & maioris minutiæ numerator in denominatorem alterius ductus maiorem numerum producit. pag. 215.B

Quando minor numerus per maiorem diuiditur, numerus Quotiens est minutia, cuius numerator est numerus minor diuisus, denominator vero maior numerus diuidens. 218.B

NVMERI proportionales in communi.

Propositis quatuor numeris proportionalibus, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus iuxta quamuis multiplicationem, item secundi & quarti æque multiplicibus iuxta quamcunq; etiã multiplicationem: si multiplex primi maior sit multiplice secundi, erit & multiplex tertij maior multiplice quarti: Et si æqualis, æqualis: Et si minor, minor. pag. 650.A

Propositis quatuor numeris non proportionalibus, ita vt maior sit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum; si sumantur æque multiplices primi ac tertij, item æque multiplices secundi ac quarti, fieri potest, vt multiplex primi maior sit multiplice secundi, multiplex autem tertij non maior multiplice quarti. 651.A

Propositis quatuor numeris, sumptisque æque multiplicibus primi ac tertij iuxta quamuis multiplicationem, item æque multiplicibus secundi ac quarti iuxta quamuis etiam multiplicationẽ; si multiplex primi existente maiore, quam multiplex secundi, multiplex tertij maior quoq; sit necessario, quam multiplex quarti: Et si æqualis, æqualis; Et si minor, minor. Eritq; eadem proportio primi ad secũdum, quæ tertij ad quartum. 654.A

Propositis quatuor numeris, sumptisque primi ac tertij æque multiplicibus, item secundi & quarti æque multiplicibus; si quando contingat, multiplicẽ primi maiorẽ esse multiplice secundi, multiplicem vero tertij nõ maiorem multiplice quarti: Maior erit proportio primi ad secundum, quam tertij ad quartum. 655.A

Datis tribus terminis Geometrice proportionalibus siue æqualibus, siue inæqualibus: Summa ex primo semel, secundo bis, & tertio semel collecta; ac summa conflata ex secundo et tertio semel; ac tertius semel, sunt etiã

Geome-

Geometrice proportionales. pagina 806. A

Datis tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa ex primo bis, ſecundo bis, & tertio ſemel collecta; ac ſumma ex primo, ſecundo, & tertio ſemel conflata; ac denique tertius ſemel, ſunt Arithmetice proportionales. 808. A

Datis tribus terminis ſiue æqualibus, ſiue inæqualibus, Geometrice proportionalibus: Summa collecta ex primo bis, ex ſecundo ter, & tertio ſemel; ac ſumma conflata ex ſecundo bis, & tertio ſemel; & denique ſumma ex ſecundo ſemel, & tertio ſemel coaceruata, Harmonice proportionales ſunt. 809. A

Numerus ex multiplicatione duorum numerorum productus, ita ſe habet ad alterutrũ multiplicantium, vt alter multiplicantium ad vnitatem. 12. B

Numerus ex diuiſione duorum numerorum procreatus ita ſe habet ad vnitatem, vt diuiſus numerus ad diuidentem. 13. B

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et ſimul vterque vtriuſq; ſimul eadẽ pars erit, quæ vnius vnius. 40. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 41. B

Si vnitas numeri pars fuerit, & altera vnitas, vel numerus, alterius numeri eadem pars: Et ſimul vtraque vnitas, vel vnitas & numerus ſimul, vtriuſque numeri ſimul eadem pars erit, quæ vnitas numeri. 41. B

Si ſint quotcunque numeri quotcũque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadem pars: Et omnes omniũ ſimul eadẽ pars erunt, quæ vnus vnius. pag. 42. B

Idẽ de numeris fractis cõuenit. 42. B

Si ſint quotcũque numeri quotcunque numerorum æqualium numero, ſinguli ſingulorum, eadẽ multiplices: quam multiplex eſt vnius vnus numerus, tam multiplices erũt & omnes omnium. pag. 43. B

Idem verum eſt de numeris fractis. 44. B

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et ſimul vterq; vtriuſque ſimul eædem partes erit, quæ vnus vnius. 44. B

Idem locum habet in numeris fractis. 45. B

Si ſint quotcũque numeri quotcunque numerorum, ſinguli ſingulorum, eadẽ partes: Et omnes omnium ſimul eadem partes erũt, quæ vnus vnius. 45. B

Si numerus numeri pars fuerit, qualis ablatus ablati: Et reliquus reliqui eadem pars erit qualis totus totius. 45. B

Idem locum habet in numeris fractis. 46. B

Si numerus numeri æque fuerit multi-

multiplex, atq; ablatus ablati: Etiam reliquus reliqui ita multiplex erit, vt totus totius. 46.B
Idem verum eſt de numeris fractis pag. 46.B
Si numerus numeri partes fuerit quales ablatus ablati: & reliquus reliqui eædem partes erit, quales totus totius. pag. 47.B
Idem in fractis numeris verum eſt. 48.B
Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars: Et viciſsim quæ pars eſt, aut partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes & ſecundus quarti. 49. B
In fractis numeris idem concludes. pag. 50.B
Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes: Et viciſsim quæ partes eſt primus tertij, aut pars, eædem partes erit & ſecundus quarti, aut pars. 50.B
Numeris fractis hoc idem conuenit. 51.B
Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum: Et reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum. 51.B
Idem in fractis numeris verum eſt. 52.B
Si primus ſecundũ, & tertius quartum, æqualiter contineat, eandemque inſuper partem, aut partes; erit ſecundus primi, & quartus tertij eadem partes. Et ſi ſecundus primi, & quartus tertij eadem partes ſit; continebit primus ſecundum, & tertius quartum æqualiter, eandemque inſuper parte, aut partes. 53.B
Idẽ verum eſt in numeris fractis, pag. 63.B
Si ſint quotcunque numeri proportionales; erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum conſequentium, ita omnes antecedẽtes ad omnes cõſequentes. 56.B
Verum quoque hoc eſt in numeris fractis. 58.B
Si quatuor numeri proportionales ſint, Et viciſsim proportionales erunt. 58 B
In fractis idem ternitur. 60.B
Si ſint quotcunque numeri, & alij illis æquales multitudine, qui bini ſumãtur & in eadem ratione: Etiam ex æqualitate in eadem ratione erũt. pag. 61.B
Idem in numeris fractis verum eſt. 62.B
Duæ proportiones numerorum, quæ eidem proportioni eadem ſunt; inter ſe quoque ſunt eadem. pag. 62.B
Si vnitas numerum quempiam metiatur, æque autem alter numerus alterum quendam numerum metiatur; Et viciſsim æque vnitas tertium numerum metietur, & ſecundus quartum. 63.B
Si numerus duos numeros multipli-

tiplicans fecerit aliquos: geniti ex ipſis eãdem rationem habebunt, quam multiplicati. 66. B

In fractis numeris idem verum eſt. 67. B

Si duo numeri numerum quempiam multiplicantes fecerint aliquos: geniti ex ipſis eandem rationẽ habebunt, quam multiplicantes. 67. B

In fractis idem habet locũ. 67. B

Si numerus quotcunque numeros multiplicet, vel quotcunque numeri numerum quempiam multiplicent; habebunt producti numeri eaſdem rationes, quas numeri multiplicantes. 68. B

Si quatuor numeri ſint proportionales; qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis eſt ei, qui ex ſecundo & tertio fit, numero. Et ſi, qui ex primo & quarto fit, numerus, æqualis ſit ei, qui ex ſecõdo & tertio fit, numero; ipſi quatuor numeri ꝓportionales erũt. 68. B

Verum eſt idem in numeris fractis pag. 69. B

Si duo numeri duos numeros eandem, quam illi, habentes rationem multiplicent, antecedens nimirum illorum conſequentem horum, & conſequens antecedentem; geniti ex ipſis æquales erunt. 69. B

Idẽ cõuenit numeris fractis. 69. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecundũ quam tertij ad quartũ; qui ex primo & quarto ſit, numerus, maior eſt eo, qui ex ſecũdo & tertio ſit, numero: Et contra, ita in fractis numeris, quã integris. 70. B

Si tres numeri ſint proportionales; qui ſub extremis continetur, æqualis eſt ei, q̃ a medio efficitur: Et ſi qui ſub extremis cõtinetur, æqualis ſit ei, qui a medio deſcribitur; ipſi tres numeri proportionales erunt. 71. B

In fractis idem verum eſt. 72. B

Si maior ſit proportio primi ad ſecũdũ, quã ſecũdi ad tertiũ; maior fiet numerus ex primo in tertiũ, q̃ ex ſcõdo in ſe: Et contra, tã in numeris fractis q̃ integris. 72. B

Minimi numeri omniũ eandem cũ eis rationẽ habentiũ, metiuntur æque numeros candẽ cum eis rationem habentes, maior quidem maiorem, minor vero minorem. 73. B

Si tres numeri ſint continue proportionales, & primi duo dicantur in ſua proportione minimi; metietur primus ſecundum, & ſecundus tertium. 74. B

Quotlibet numeri minimi in continuatione ſuarũ proportionũ, ſiue eadẽ ſint, ſiue diuerſæ proportiones, metiuntur æque totidẽ alios numeros, q̃ eaſdẽ cũ eis ꝓportionẽs hẽnt, primus primũ, ſecũdus ſcõm, et tertius tertiũ. etc. 74. B

Si ſint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales, qui bini

ni

ni ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio; etiã ex æqualitate in eadem ratione erunt. 76.B

Idem verum eſt in numeris fractis pag. 77.B

Si quatuor numeri tam integri, q̃ fracti, proportionales ſint; & conuertendo proportionales erunt. pag. 78.B

Si compoſiti numeri ſiue integri, ſiue fracti, proportionales ſint; & diuiſi proportionales erunt. 78.B

Si diuiſi numeri proportionales ſint ſiue integri, ſiue fracti; & diuiſi proportionales erunt. 79.B

Si compoſiti numeri tam fracti, q̃ integri, proportionales ſint; & per conuerſionem rationis proportionales erunt. 79.B

Si primus ad ſecundum eandem habeat rationem, quam tertius ad quartum; habeat autem & quintus ad ſecundum eandem rationem quam ſextus ad quartum, tam in fractis numeris, quam integris: Etiam compoſitus primus cum quinto ad ſecundum eãdem habebit rationem, quam tertius cũ ſexto ad quartum. 80.B

Si duo numeri ad duos numeros eadem habeant rationem; & detracti quidã habeant ad eoſdem eandem, tam in numeris fractis, quam integris: Et reliqui ad eoſdem eande rationem habebunt. 81.B

Si primus ad ſecundum eãdem habeat rationem, quã tertius ad quartum; habeat autem & primus ad quintum eãdem, quam tertius ad ſextum, tam in integris quam fractis numeris: Etiã primus ad compoſitũ ſecundum cum quinto eandem rationẽ habebit, quã tertius ad quartum cum ſexto. 81.A

Si quotcunque numeri ad eundem habeant proportiones, quas alij illis multitudine æquales ad quẽdam alium eundem, tam in fractis, quam integris numeris: habebunt quoque omnes illi ſimul ad eundem, proportionem, quam habent alij omnes ſimul ad alium illum eundem. Et ſi idem numerus ad quotcũque numeros proportiones habeat, quas idem alius numerus ad alios multitudine illis æquales: habebit quoque idem numerus ad omnes illos ſimul proportionẽ, quã idem alius numerus ad hos omnes ſimul. 82.B

Vltima nouem propoſ. lib. 5. a Campano adiecta, qua ratione eodẽ modo demonſtrentur in numeris improportionalibus. 83.B

Maxima menſura quotlibet numerorum metitur ipſos per numeros minimos eãdem cũ ipſis proportionem habẽtes. pag. 96.B

Si duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor

nor maiorem; producetur minimus numerus ab illis numeratus. 98. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi vero ipsorũ primi inter se sint; ipsi minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. 109. B

Si sint quotuis numeri non continue proportionales, extremi vero ipsorum sint inter se primi; ipsi minimi sunt in continuatione suarum proportionum. 110. B

Si tres numeri sint minimi continue proportionales; extremi quadrati sunt: Si autem quatuor cubi, &c. 112. B

Extremi numeri continue proportionalium quotcũque minimorum primi sunt inter se. pag. 114. & 116. B

Duo numeri minimi in sua proportione metiũtur omnes medios quotcũque minimorum in eadem ratione. 114. B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem secundum non metiatur; neque alius quisquam vllum metietur. 123. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem secundi non sit multiplex; neque alius quisquã vllius multiplex erit. 124. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus vero secũdum metiatur; & quicunque alius quemlibet sequentium metietur: Si primus autem secundi sit multiplex; & quicunq; alius cuiuslibet sequentiũ multiplex erit. 125. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autẽ, vel alius quisquam nullum a secundo metiatur, neq; primus secundum metietur. Et si primus vel alius quisquam nullius a secundo sit multiplex; neque primus secundi multiplex erit. 126. B

Si sint quotcunque numeri deinceps proportionales, primus autem extremum metiatur; is etiam metietur secundum. pag. 126. B

Si sint quotcũque numeri deinceps proportionales, primus autem, vel alius quisquam quemlibet a secundo metiatur; metietur & primus secundum. Et si primus, vel alius quisquam cuiuslibet a secundo sit multiplex; primus quoque secundi multiplex erit. 127. B

Si inter duos numeros medij cõnua proportione ceciderint numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, tot & inter alios eandem cum illis habentes rationem medij continua proportione cadent. 127. B

Inter duos numeros dupla, tripla, aut quintupla proportionis, vel superparticularis, vel superbipartientis non potest cadere medius

dius numerus proportionalis.
pag. 129. & 130. B
Item neque inter duos numeros ſola vnitate, aut binario differentes. 129. B
Ex quo fit, neque Diapaſon, neq; Tonum in Muſicis diuidi poſſe biſariam. 130. B
Si duo numeri ſint inter ſe primi, & inter eos medij continua proportione cecidẽt numeri; quot inter eos medij continua proportione cadũt numeri, totidẽ inter vtrumque eorum, & vnitatẽ medij continua proportione cadẽt. pag. 133. B
Si numerus ſeipſum multiplicans fecerit aliquem, & rurſum multiplicet productum, &c. omnes producti ſunt continue proportionales ab vnitate. 132. B
Si inter duos numeros & vnitatem cõtinue proportionales cecideriṇt numeri; quot inter utrumque ipſorum. & unitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 133. B
Si quotquot numeri ſint ab vnitate continue proportionales, ſecundus ab vnitate in ſe multiplicatus producet tertium, & ex eodem in hunc fiet quartus, & ſic deinceps. 135. B
Si ſint ab vnitate duo ordines numerorum continue proportionalium, & multitudine æqualiũ; habebunt tertij ab vnitate proportionem duplicatam eius, quã habent ſecũdi ab vnitate; quarti vero eiuſdem triplicatam, & quinti quadruplicatam; & ſemper deinceps vno amplius. 135. B
Si ſint ab aliquo numero code duo ordines numerorum cotinue proportionalium, & multitudine æqualium; habebunt tertij ab illo numero proportionem duplicatam eius, quam habent ſecundi ab eodem; quarti vero eiuſdem triplicatam, &c. 136. B
Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum aſſumptum, cõtinue proportionales reciderint numeri; quot inter vtrumque ipſorum, et aſſumptũ deinceps medij continua proportione cadunt numeri, totidem & inter ipſos medij continua proportione cadent. 138. B
Si ſint quotlibet numeri deinceps proportionales, & multiplicans quiſque ſeipſum faciat aliquos; qui ab illis producti fuerint, proportionales erunt: Et ſi numeri primũ poſiti multiplicantes iam factos fecerint aliquos; ipſi quoque proportionales erunt: Et ſemper circa extremos hoc eueniet. 143. B
Primus autẽ numeri producti ſunt in duplicata rõne proportionis datorum numerorum; & ſecũdo loco geniti in triplicata. &c. 145. B

Si ab

Si ab vnitate quotcunque nume ri ſint deinceps proportionales; minor quicunque maiorẽ quẽlibet metitur per aliquem eorum, qui in proportionalibus ſunt numeris. 186.B

In numeris ab vnitate cõtinue proportionalibus, quantũ abeſt maior quilibet a minore quouis eũ metiente, tantum ab vnitate diſtat numerus, per quem minor maiorem metitur. Item quilibet numerus ſeipſum multiplicans, producit numerum tantũ ab eo diſtantem, quantum ipſe ab vnitate abeſt. Si vero minor aliquis maiorem quempiam multiplicet, procreatur numerus tantum a maiore diſtans, quantum minor ab vnitate. 187.B

Si ab vnitate quotcunque nume ri deinceps proportionales ſint; quicunque primorum numerorum ultimum metiũtur, iidem & eum, qui vnitati proximus eſt, metientur. 188. B

Itaque neque vllus numerus primus, qui maior ſit eo, qui proximus eſt vnitati, neque vllus minor proximum vnitati non metiẽs, metiri poteſt ultimũ. 190.B

Si ab unitate quotcunque nume ri deinceps proportionales ſint, qui uero poſt unitatem, primus ſit; Maximum nullus alius metietur, prẽter eos, qui ſunt in numeris proportionalibus. 191.B.

Si quotcunq; numeri continue proportionales, ſint minimi omniũ eãdem rationem habentiũ cum ipſis; Numerus aliquem eorum metiens, metietur quoque alterum duorum numerorũ, qui in eadem rõne ſunt minimi; vel certe ad alterũ erit cõpoſitus. 194.B

Si tres numeri ſint deinceps ꝓportionales, & minimi omnium eãdem cum ipſis rationem habẽtium; Duo quilibet ſimul, ad reliquũ primi erunt pag. 205. A

Si quotcũque numeri deinceps proportionales, ſint minimi omniũ eandem cum illis rationem habentium; ad quemlibet eorum reliqui omnes ſimul collecti, erunt primi. 207. B

Si duo numeri, primi inter ſe fuerint; non erit ut primus ad ſecundum, ita ſecundus ad alium quempiam. 209. B

Si fuerint quotcunque numeri deinceps proportionales, extremi autem ipſorum primi inter ſe ſint; non erit ut primus ad ſecũdum, ita ultimus ad alium quempiam. 209.B

Si ſint quotcunque numeri deinceps ꝓportionales, detrahãtur, aũt a ſecundo, & ultimo æquales ipſi primo; Erit ut ſe cũdi exceſſus ad primum, ita ultimi exceſſus ad omnes ipſum antecedentes. 229.B

Quilibet numero per duos quoſuis numeros diuiſo, erunt duo hi numeri Quotientibus,

conuerſo ordine proportionales. pag. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros diuiſo, erunt bini numeri diuidentes binis Quottetibus reſpondentibus cõuerſo ordine proportionales. 234. B

Quolibet numero per quotuis numeros continue proportionales diuiſo, erunt Quottentes conuerſo ordine in eadem proportione continue proportionales. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; erit vt ſumma priorũ ad quemlibet eorũ, ita ſumma poſteriorum ad eum, qui illi in poſterioribus reſpondet. 235. B

Si ſint quotuis numeri quicunque, & totidem alij in eiſdem proportionibus; ſumma priorum per ipſos diuiſa ſigillatim, faciet eoſdẽ prorſus Quotientes, quos ſumma priorum per ipſos diuiſa facit. 236. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; & quotientum ſumma per ipſos Quotientes; Et horum ſecundorum Quotientum ſumma per eoſdem ſecundos Quottentes, & ſic deinceps in infinitum; procreabuntur alternis ſemper iidẽ primi Quotientes ordine conuerſo. 237. B

Si ſumma quotuis numerorum continue proportionalium per eos ſigillatim diuidatur; erit ſumma omnium quotietum æqualis numero, qui gignitur ex multiplicatione primi in vltimum, vel ex mutua multiplicatione quorumlibet duorum mediorum ab extremis æqualiter diſtantium, vel denique (ſi quottientum numerus fuerit impar) ex multiplicatione medij Quotientis in ſe. pag. 238. B

Itaque quando numerus terminorum eſt impar, ſumma Quotientum eſt numerus quadratus, cuius radix eſt medius Quotiens. pag. 238. B

Proportionum compoſitio, de qua Euclides d. fin. 20. lib. 5. & deſinit. 5. lib. 6. non eſt vere additio proportionum, vt plerique falſo exiſtimant. 273. B

Additio proportionum, ſubtractio, multiplicatio, atq; diuiſio, quomodo fiant. 275. B

NVMERVS fractus. vide, Minutiæ numerorum.

NVMERVS Par, Impar, Primus, Pariter par, Pariter par & impariter: Pariter impar, Perfectus.

Numeros, quotquot iuſſerit quis, qui inter ſe multiplicati datum numerũ gignãt, repire. 749. A

Numero per numerum diuiſo; diuiſus numerus gignitur ex multiplicatione numeri per diuiſionẽ inuenti in numerum diuidentem. 53. B

Si duobus numeris inæqualibus datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadã detractione, neque reliquus vnquam metiatur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas : qui principio dati ſunt numeri, primi inter ſe erunt. pag. 32. B

Si duobus numeris inter ſe primis datis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: nũquam reliquus metietur præcedentem, quoad aſſumpta ſit vnitas. 33. B

Si datis duobus numeris inter ſe cõpoſitis, detrahatur ſemper minor de maiore, alterna quadam detractione: detractio ad vnitatẽ vſque non perueniet, ſed ad numerum, qui præcedentem detractum metiatur. 34. B

Numerus duos numeros metiens : metitur quoque maximam eorundem menſuram. pag. 36. B

Numerus tres numeros metiẽs, uel plures; metitur etiam maximam eorũ menſuram communem. 38. B

Omnis numerus, omnis numeri, minor maioris, aut pars eſt, aut partes. 39. B

Si duo numeri mutuo ſe multiplicantes fecerint aliquos; geniti ex ipſis æquales inter ſe erunt. 64. B

Idem in fractis numeris concludes pag. 65. B

Si duo numeri ſe mutuo multiplicauerint; procreabitur vnus, idemque numerus. 65. B

Verum hoc etiam eſt in numeris fractis. 66. B

Primi inter ſe numeri, minimi ſunt omnium eãdem cum eis rationem habentium. 84. B

Minimi numeri omnium eandem cum eis rationem habentium, primi inter ſe ſunt. pag. 84. B

Quotcunque numeri inter ſe primi, minimi ſunt in continuatione ſuarum proportionũ. Et quotcunque numeri in continuatione ſuarum proportionum minimi, ſunt inter ſe primi. 85. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint; qui unum eorum metitur numerus, ad reliquum primus erit. 86. B

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex illis genitus ad eundem primus erit. pag. 87. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint: Etiam ex vno eorum genitus ad reliquum primus erit. 88. B

Si duo numeri ad duos numeros, uterque ad utrumque, primi fuerint : Et qui ex eis gignẽtur primi inter ſe erũt. pag. 88. B

Si duo numeri primi inter ſe fuerint, & multiplicans uterque ſe ipſum fecerit aliquẽ; Et geniti ex ipſis primi inter

se erunt: Et si, qui in principio, genitos ipsos multiplicãtes fecerint aliquos; Et hi quoque primi inter se erunt: Et semp circa extremos hoc eueniet. 89.B

Si duo numeri primi inter se fuerint; etiam vterque simul ad quemlibet illorũ primus erit. Et si vterque simul ad vnum illorum primus fuerit; etiam qui in principio, numeri primi inter se erunt. 90.B

Numerus, qui ex duobus compositus ad vnum illorum primus est, ad reliquum quoque primus erit. 91.B

Omnis primus numerus, ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. pagina 91.B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem; genitum autẽ ex ipsis metiatur aliquis primus numerus: is etiam vnum eorum, qui in principio, metietur. 92. B

Si duo numeri se mutuo multiplicantes fecerint aliquem: genitum autem ex ipsis metiatur aliquis non primus numerus, vel certe ad ipsum sit compositus: is etiam ad vnum eorum, qui in principio, compositus erit. pag. 93. B

Omnem compositum numerũ, aliquis primus numerus metitur. 93. B

Omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus metitur. 94. B

Si duo numeri numerum quẽpiam metiantur: Etiam minimus, quẽ illi metiuntur, eundem metietur. 99.B

Si tres numeri numerum quempiam metiantur; Etiam minimus ab eis numeratus eũdem metietur. 101.B

Idem eueniet in pluribus numeris. pag. 102.B

Si numerum quispiam numerus metiatur; ille, quem metitur, partem habebit a metiente denominatam. 102. B

Si numerus partem habuerit quamlibet; metietur illum numerus a parte denominatus. pag. 103.B

Minimus numerus, quem quotlibet numeri metiũtur; minimus est habens partes a numeris metientibus denominatas. 104.B

Datis quotlibet numeris, idem semper numerus procreabitur ex eorũ mutua multiplicatione, quomodocunq; ordinem inter se permutent. 155.B

Si minimum numerum primi numeri metiantur; Nullus aliũs numerus primus illum metietur, præter eos, qui a principio metiebantur. 193. B

Demonstratio priorum 10. propositionum lib. 2. in numeris. pagina 194. B

Nullus numerus ita diuidi potest, vt productus ex toto in vnam

partem, ſit æqualis quadrato alterius partis. 204. & pag. 222. B

Primi numeri plures ſunt, omni propoſita multitudine primorum numerorum. 215. B

Si pares numeri quotcũq; componantur; totus par erit. pag. 216. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorũ ſit par, totus par erit. 217. B

Si impares numeri quotcunque componantur, multitudo autem ipſorum ſit impar, & totus impar erit. 217. B

Impar numerus pari numero, vel pluribus paribus additus, facit imparem. 218. B

Si a pari numero par detrahatur; & reliquus par erit. pagina 218. B

Si a pari numero impar detrahatur; & reliquus impar erit. pag. 219. B

Si ab impari numero impar detrahatur; reliquus par erit. pag. 219. B

Si ab impari numero par detrahatur; reliquus impar erit. pag. 220. B

Si impar numerus parem multiplicans fecerit aliquem; factus par erit. 220. B

Si par numerus parem multiplicãs fecerit aliquem; factus par erit pag. 220. B

Par in ſe multiplicatus facit parem. 221. B

Si impar numerus imparem numerum multiplicans fecerit aliquem; factus impar erit. pag. 221. B

Impar numerus in ſe multiplicatus gignit imparem. 221. B

Numerus impar numerum parem metiens, per numerũ parem eum metitur. 222. B

Numerus impar numerum imparem metiens, per numerum imparem eum metitur. 222. B

Si impar numerus parem numerum metiatur; & illius dimidium metietur. 223. B

Si impar numerus ad aliquẽ numerum primus ſit; & ad illius duplum primus erit. 224. B

Immo & ad quadruplum, octuplũ, ſedecuplum, & ſic deinceps in proportione dupla. 225. B

Numerorum a binario duplorũ vnuſquiſque parirer par eſt tantum. 225. B

Si numerus dimidiũ habeat imparem; pariter impar eſt tantum. 226. B

Si par numerus neque a binario duplus ſit, neque dimidium habeat imparem; pariter par eſt, & pariter impar. 228. B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla pportione, quoad totus compoſitus fiat primus; & totus hic in vltimum multiplicetur: Factus erit Perfectus. pag. 231. B

NVMERVS Planus, Solidus, Quadratus, Cubus, ſimiles plani, ac ſolidi numeri.

Nullus numerus compoſitus ex integro & fracto, vel numerus fractus in ſe multiplicatus procreat numerum quadratũ integrum. pag. 638.A

Plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam. 121. B

Duorum quadratorum numerorum unus medius eſt proportionalis numerus: Et quadratus ad quadratum duplicatã habet lateris ad latus rationem. 140.B

Medio proportionali quotcunque inter duos quadratos; erit is ad utrumuis quadratorum compoſitus. 141.B

Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et cubus ad cubum triplicatam habet lateris ad latus rationem. 141.B

Duobus medijs proportionalibus cadentibus inter duos cubos, erunt ij, & vterlibet cuborum inter ſe compoſiti. 142.B

Si quadratus numerus quadratũ numerũ metiatur; & latus unius metietur latus alteri⁹. Et ſi vnius quadrati latus metiatur latus alterius; & quadratus quadratũ metietur, 146.B

Si cubus numerus cubũ numerum metiatur; & latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius cubi latus alterius metiatur; & cubus cubũ metietur. 147.B

Si quadratus numerus quadratum numerum non metiatur; neque latus unius metietur latus alterius. Et ſi latus unius quadrati non metiatur latus alterius; neq; quadratus quadratum metietur. 148.B

Si cubus numerus cubum numerũm non metiatur; neque latus unius latus alterius metietur. Et ſi latus cubi unius latus alterius nõ metiat, neq; cubus cubum metietur 149.B

Si quadratus numerus quadrati numeri, & cubus cubi, ſit multiplex; & vnius lateris alterius multiplex erit. Et ſi vnius quadrati, & cubi latus lateris alterius ſit multiplex; & quadratus quadrati, & cubus cubi multiplex erit. Si vero quadratus quadrati, & cubus cubi non ſit multiplex; neque latus lateris multiplex erit. Et ſi latus lateris nõ ſit multiplex; neq; quadratus quadrati, neq; cubus cubi erit multiplex. 149.B

Duorum ſimilium planorum numerorum unus medius proportionalis eſt numerus. Et planus ad planũ duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem. pag. 150 B

Medius numerus proportionalis inter

ter duos planos ſimiles, ad vtrũlibet compoſitus eſt. 151. B

Duorum ſimilium ſolidorũ numerorum duo medij proportionales ſunt numeri: Et ſolidus ad ſolidum triplicatam rationẽ habet lateris homologi ad latus homologum. pag. 152. B

Duo numeri medij proportionales inter duos ſolidos ſimiles, et uterius ſolidorum, ſunt compoſiti inter ſe. 153 B

Si inter duos numeros vnus medius proportionalis cadat numerus; ſimiles plani erunt illi numeri. 158. B

Si inter duos numeros duo medij proportionales cadant numeri; ſimiles ſolidi ſunt illi numeri. 159 B

Si tres numeri deinceps ſint proportionales, primus autem ſit quadratus; Et tertius quadratus erit. 161. B

Si quatuor numeri deinceps ſint proportionales, primus autẽ ſit cubus; Et quartus cubus erit. 161. B

Si duo numeri rationem habeãt inter ſe, quam quadratus ad quadratum, primus autem ſit quadratus; & ſecundus quadratus erit. 165. B

Proportio quadrati numeri ad non quadratum exhiberi non poteſt in duobus numeris quadratis. pag. 165. B

Duo numeri in quintupla proportione proportionem non habent, quam quadratus ad quadratũ. pag. 166. B

Si duo numeri rationem inter ſe habeant, quã cubus ad cubum, primus autem ſit cubus; & ſecundus cubus erit. 166. B

Proportio cubi ad non cubum, reperire non poteſt in duobus numeris cubis. 167. B

Similes plani numeri rationem inter ſe habent, quam quadratus ad quadratum. 167. B

Numeri proportionem habentes, quam quadratus ad quadratũ, ſimiles plani ſunt. 168. B

Similes ſolidi numeri rationem habent inter ſe, quam cubus ad cubum. 168. B

Numeri proportionem habentes, quam cubus ad cubum, ſimiles ſolidi ſunt. 169. B

Nulli numeri habentes duplã proportionem, vel ſuperparticularẽ, vel ſuperbipartientem: vel duo numeri primi, vel primi inter ſe, quorũs neuter primus ſit, dummodo quadrati no ſint, aut cubi; ſimiles plani ſunt, aut ſolidi. 169. B

Si ſint duo numeri plani, aut ſolidi ſimiles, ſitque minor primus; metietur minor maiorem. 170. B

Duo numeri inter ſe primi, quorum minor primus ſit, nõ poſſunt eſſe plani, vel ſolidi ſimiles. pag. 171. B

Si duo ſimiles plani numeri multiplicantes ſe mutuo faciant

quendam; productus quadratus erit. 173.B
Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciãt quadratum; ſimiles plani erunt. 174.B.
Duo numeri quadrati ſe mutuo multiplicantes producunt quadratum. 174.B
Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant quadratum, alter autem ſit quadratus; Et reliquus quadratus erit. 175.B
Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes faciant non quadratum, alter autem ſit quadratus, reliquus nõ quadratus erit. 175.B
Quadratus multiplicans non quadratum producit non quadratum. 175. B
Si cubus numerus ſeipſum multiplicans procreet aliquem; productus cubus erit. 176.B
Si cubus numerus cubum numerum multiplicans faciat aliquem; factus cubus erit. pag. 177. B
Si cubus numerus numerũ quendam multiplicans faciat cubum; Et multiplicatus cubus erit. 177.B
Cubus non cubum multiplicans facit non cubum. 178.B
Si cubus numerum quendam multiplicans faciat non cubum; Et multiplicatus non cubus erit. pag. 178.B
Si numerus ſeipſum multiplicans faciat cubum; Et ipſe cubus erit. 178.B
Si compoſitus numerus numerũ aliquem multiplicans quempiam faciat; Factus ſolidus pag. 179.B
Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps proportionales ſint; tertius quidem ab vnitate quadratus eſt, & vnum intermittentes omnes; quartus autem eſt cubus, & duos intermittentes omnes; ſeptimus vero cubus ſimul, & quadratus, & quinque intermittentes omnes. 179.B
Si ſint quotcunque numeri ab vnitate continue proportionales, omnes poſiti in locis imparibus, nimirum in tertio, quinto, ſeptimo, &c. ſunt quadrati. Omnes autem, qui ſequuntur proxime poſitos in locis, tertio, ſexto, nono, & alijs, quæ ternarius metitur, cuiuſmodi ſunt numeri, quartus, ſeptimus, decimus, &c. ſunt cubi. Omnes vero, qui proxime ſequuntur poſitos in locis, ſexto, duodecimo, decimooctauo, & alijs, quæ metitur ſenarius, quales ſunt, ſeptimus, tertiusdecimus, decimusnonus, &c. ſunt cubi ſimul & quadrati. 181.B
Si ab vnitate quotcunque numeri ſint deinceps proportionales, qui vero poſt vnitatem, ſit quadratus; Et reliqui omnes quadrati erunt. At ſi qui poſt vnitatem, ſit cubus; & reliqui omnes cubi erunt.

pag. 181.B

Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps ſint proportionales, qui vero poſt vnitatem, non ſit quadratus, neque alius vllus quadratus erit, præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes omnes. At ſi, qui poſt vnitatem, non ſit cubus; neque alius vllus cubus erit, præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes omnes. pag. 184.B

Quando in numeris ab vnitate proportionalibus continue, qui poſt vnitatem, non eſt cubus ſimul & quadratus; non neceſſe eſt, nullum alium eſſe quadratum ſimul & cubum, præter ſeptimum ab vnitate, & quinq; intermittentes omnes: quia aliquando etiam quartus, eſt quadratus ſimul ac cubus, non exiſtente primo ab vnitate quadrato ac cubo ſimul. 185.B

OBTVSANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

PARALLELAE lineæ. vide. Recta linea.

PARALLELEPIPEDVM, & aliæ figuræ ſolidæ non Regulares, ac plana parallela.

Si in planis parallelis duo anguli ſint æquales, & linea vna vnius, lineæ vni alterius parallela; erit quoque altera linea alteri lineæ parallela, ſi modo ductæ ſint ex eadem parte plani per priores parallelas ductæ. pag. 559.B

Ad quę plana, eadem recta linea recta eſt; illa ſunt parallela. 563.B.

Si ſint duo plana parallela; recta linea, quæ ad vnum eorum recta eſt, ad reliquum quoque recta erit. 563.B

Si duæ rectæ ſe mutuo tangentes, ad duas rectas ſe mutuo tangentes ſint parallelæ, non in eodem conſiſtentes plano; Parallela ſunt, quæ per illa ducuntur, plana. 564.B

Si duo plana parallela plano quopiam ſecentur; communes illorum ſectiones ſunt parallelæ. 566.B

Quæ eidem plano parallela, & inter ſe ſunt parallela; vel ſi conueniunt, vnum planum efficiēt. pag. 567.B

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes ſectiones parallelas, parallela ſunt: Et duorum planorū parallelorum, ſi vnum cuipiam plano ad rectos ſit angulos, erit & alterum ad idem rectum. 571.B

Si ſolidum parallelis planis contineatur; aduerſa illius plana parallelogramma ſunt ſimilia, & æqualia. 584.B

Si ſolidum parallelepipedū plano ſecetur per diagonios aduerſo-

uerſorum planorum; bifariã ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. 595.B

Solida parallelepipeda ſuper eãdem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorum inſiſtentes lineę in ijſdẽ collocãtur rectis lineis, ſunt inter ſe æqualia. 594.B

Solida parallelepipeda ſuper eãdem baſim conſtituta, & in eadem altitudine, quorũ inſiſtentes lineæ non in ijſdẽ collocantur rectis lineis, inter ſe ſunt æqualia. 596.B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper eandem baſim, ſiue inſiſtentes lineæ in eiſdem collocentur rectis, ſiue non; in eadem ſunt altitudine. 597.B

Solida parallelepipeda ſuper æquales baſes cõſtituta, & in eadẽ altitudine; æqualia ſunt inter ſe. 598.B

Solida parallelepipeda æqualia ſuper æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et parallelepipeda æqualia in eadem altitudine, ſuper æquales ſunt baſes, ſi non habuerint eandem baſim. 601.B

Hæc quinque, quæ proxime dicta ſunt de parallelepipedis, conueniunt etiam in priſmatis, in quibus duo plana oppoſita ſunt triãgula. 608.B

Si ſolidi parallelepipedi eorum quę ex aduerſo, planorũ latera bifariam ſecta ſint; per ſectiones autem plana ſint extenſa: Communis ſectio planorum, & ſolidi parallelepipedi diameter, bifariã ſe mutuo ſecabunt. 617.B

In omni parallelepipedo diametri ſe mutuo bifariã diuidunt in vno puncto. 618.B

Si ſolidum parallelepipedum plano ſecetur per centrum; bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano. Et ſi ſolidum parallelepipedum plano ſecetur bifariam, per centrum tranſibit ipſum planum. pag. 619.B

Si fuerint duo priſmata planorum triangularium oppoſitorum æqualis altitudinis, quorum hoc quidẽ baſim habeat, triangulum, illud vero, parallelogrammum, duplum autẽ fuerit parallelogrãmũ trianguli; Aequalia erunt ipſa priſmata. 623.

Omnis pyramis triangularem habẽs baſim diuiditur in duas pyramides æquales & ſimiles inter ſe, triangulares habentes baſes, & ſimiles toti; Et in duo priſmata æqualia, quæ duo priſmata maiora ſunt dimidio totius pyramidis. pagina 630.B

Si fuerint duę pyramides eiuſdẽ altitudinis, triangulares habentes baſes; ſit autem illarũ vtraque diuiſa & in duas pyramidas æquales inter ſe, & ſimiles toti; & in duo priſmata æqualia; Ac eodem modo diuiſa

diuiſa ſit vtraque pyramidũ, quæ ex ſuperiore diuiſione natæ ſunt, idq; ſemper fiat: Erit vt vnius pyramidis baſis ad alterius pyramidis baſim, ita & omnia, quæ in vna pyramide, priſmata ad omnia, quæ in altera pyramide, priſmata multitudine æqualia. 633.B

Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes triangulares, ſunt inter ſe æquales. 637.B

Pyramides triangulares æquales ſuper eandem, vel æquales baſes, eandem habent altitudinem. Et pyramides triangulares æquales, eiuſdẽ q; altitudinis, habent baſes æquales, vel eandẽ. 637.B

Pyramides eiuſdem altitudinis ſuper æquales baſes quaſcunque, vel eandem, ſunt inter ſe æquales. 641.B

Pyramides multangulæ æquales, et ſuper æquales baſes, vel ſuper eandem; habent eandem altitudinem. Et pyramides multangulæ æquales, eandemque habentes altitudinem; baſes habentes æquales, vel eandem. 641.B

Omne priſma triãgulatẽ habẽs baſim, diuiditur in tres pyramides æquales inter ſe, triangulares baſes habẽtes. 642.B

Priſmata eiuſdẽ altitudinis ſuper eande, vel æquales baſes quaſcunq;, inter ſe ſunt æqualia. Et priſmata æqualia ſuper æquales baſes, vel eande, in eadem ſunt altitudine. Et priſmata æqualia eiuſdẽ altitudinis, baſes habent æquales, vel eandem. 645.B

Quæ de priſmatis dicta ſunt, intelligi debent de ijs, quæ habent plana oppoſita baſibus æqualia & ſimilia. 646.B

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eãdem cum ipſo baſim habentis, & altitudinem æqualem. 654.B

Atque hoc verum eſt, ſiue coni & cylindri ſint recti, ſiue ſcaleni, licet non ſit idem axis conorũ, & cylindrorum. 658.B

Coni & cylindri eiuſdem altitudinis ſuper eandem, vel æquales baſes cõſtituti, ſiue ambo ſint recti, vel ſcaleni, ſiue vnus rectus, & alter ſcalenus, inter ſe ſunt æquales. 661.B

Coni & cylindri æquales ſuper eandem vel æquales baſes, in eadem ſunt altitudine. Et coni ac cylindri æquales in eadem altitudine, ſuper æquales baſes ſunt, vel eandem. 661.B

Si in planis parallelis deſcripti ſint duo circuli, in quibus duæ rectæ abſcindãt arcus ſimiles; erũt duæ rectæ coniũgẽtes extrema vnius rectæ cũ cẽtro, parallelæ duabus rectis, quæ extrema alterius rectæ cũ centro conungũt. 919.B

PARALLELOGRAMMVM, & aliæ figuræ planæ quadrilateræ.

Parallelogrammi cuiuſq; æqua-

lia

lia ſunt & latera oppoſita, & anguli oppoſiti, atque ipſum diametet ſecat bifariã. 177.A

Quadrilaterum habens latera oppoſita æqualia, parallelogrammum eſt. 178.A

Quadrilaterum habens angulos oppoſitos æquales, parallelogrammum eſt. 179.A

Rhombus, & Rhomboides, parallelogramma ſunt. 179.A

Quadratũ, & altera parte lõgius, parallelogramma ſunt. 179.A

Quadrilaterum diuiſum bifariã ab vna diametro, non ſemper eſt parallelogramum. 179.A

Quadrilaterum habens omnes angulos rectos, eſt parallelogrammum. 180.A

Quadrati, & Rhombi angulos ſecat diameter qualibet bifariã. pag. 180.A

Rhomboidis, & altera parte longioris angulos ſecat diameter non bifariam. 181.A

Quadrati, & altera parte longioris diametri ſũt æquales. 181.A

Rhombi, & Rhomboidis diametri non ſunt æquales. 181.A

Parallelogrammi cuiuſque diametri ſe mutuo ſecant bifariam. pag. 182.A

Quadrilaterum, in quo diametri ſe mutuo bifariam ſecant, parallelogramum eſt. 182.A

Parallelogrammum bifariam diuiditur a recta, quæ diametrum bifariam ſecat: Et recta diuidens parallelogrammum bifariam, ſecat diametrum quoque bifariam. 183.A

Parallelogramma ſuper eadem baſi, & in eiſdẽ parallelis conſtituta ſunt æqualia. 190.A

Parallelogrãma æqualia ſuper eandem baſim, ad eaſdemque partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas. 192.A

Parallelogramma ſuper æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, ſunt æqualia. 193.A

Parallelogramma æqualia ſuper baſes æquales, & ad eaſdẽ partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis: Et parallelogramma æqualia in eiſdem parallelis, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 193.A

Parallelogrammorum inter eaſdẽ parallelas, quod maiorem baſim habet, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. 194.A

Quadrilaterum, quod ab vtraque diametro diuiditur bifariam, parallelogrammum eſt. 201.A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quorum oppoſita baſes ſunt æquales, ſunt æqualia. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper eadẽ baſi, habent baſes oppoſitas æquales. 204.A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, & ſuper eadem baſi, quod maiorem habet baſim oppoſitam, ma-

ius

ius eſt: Et quod maius eſt, habet baſim oppoſitam maiorẽ. 205. A

Trapezia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, quorũ oppoſitæ baſes ſint æquales, æqualia ſunt. Et trapezia æqualia in eiſdem parallelis, & ſuper æqualibus baſibus, habent baſes oppoſitas æquales. 205. A

Trapeziorum in eiſdem parallelis, et ſuper æqualibus baſibus, quod maiorem habet oppoſitã baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim oppoſitã. pag. 206. A

Parallelogrammum duplum eſt trianguli eandem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 213. A

Parallelogrammũ æquale eſt triãgulo duplam habenti baſim, & in eiſdem parallelis conſtituto. pag. 214. A

Parallelogrammũ duplum eſt triãguli æqualem cum eo baſim habentis, & in eiſdem parallelis conſtituti. 214. A

Si parallelogrammum duplum fuerit trianguli, eandemque habuerint baſim, vel æquales, & ad eaſdem partes conſtituta; in eiſdem erunt parallelis: Et ſi parallelogrammum duplũ fuerit triãguli, in eiſdemque parallelis; erunt baſes æquales, ſi non ſit eadem. 215. A

Si trapezium & triangulum ſuper eadẽ baſi, & in eiſdem fuerint parallelis, maior autem linea parallela trapezij, ſit baſis triãguli; erit trapezium minus duplo trianguli: Si vero minor linea parallela trapezij baſis ſit trianguli; erit trapezium maius duplo trianguli. 216. A

Trapezium habens duo latera oppoſita parallela, duplum eſt triãguli, quod baſim habet unum latus trapezij coniungens duas parallelas, verticem vero in medio pũcto lateris oppoſiti. 217. A

In parallelogrammo, complementa circa diametrum æqualia ſunt. 219. A

Si parallelogrammo diuiſo in quatuor parallelogramma, duo aduerſa ſint æqualia, cõſiſtent reliqua duo circa diametrũ. 220. A

Quadrata linearum æqualiũ ſunt æqualia: Et quadratorum æqualium æquales ſunt lineæ. 227. A

Quadratum ex diametro quadrati deſcriptum, duplum eſt ipſius quadrati. 235. A

Quadratum diametri figuræ alterã parte lõgioris, æquale eſt duobus quadratis laterum inæqualium. 235. A

Parallelogrammũ, cuius vnus tantum angulus detur rectus, habet omnes angulos rectos. 250. A

Rectangulũ quodcunq; æquale eſt alteri rectangulo ſub duabus rectis contento, quæ duobus lateribus illius ſint æquales. 251. A

Parallelogramma circa diametrum quadrati, ſunt quadrata. pag. 263. A

Qua-

Quadratum cuiuſque rectæ quadruplum eſt quadrati rectæ, cuius ipſa dupla eſt. Et ſi quadratum quadrati ſit quadruplum, latus lateris duplum eſt. 264. & 821. A

Parallelogrammum ad rectam applicatum deficiens quadrato, æquale eſt rectangulo ſub ſegmentis per applicationem factis comprehenſo. 848. A

PAR, & impar numerus. vide. Numerus par,&c.

PARITER par, pariter par & impariter, ac pariter impar. vide. Numerus par,&c.

PERFECTVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PERPENDICVLARIS linea. vide. Recta linea.

PLANA figura intra, & extra circulum, atq; aliam figuram. vide. Figura intra & extra circulum,&c.

PLANAE figuræ quadrilateræ. vide. Parallelogrammum,&c.

PLANA parallela. vide. Parallelepipedum,&c.

PLANI numeri ſimiles. vide. Numerus planus, Solidus, Quadratus, &c.

PLANVS angulus. vide. Angulus.

PLANVS numerus. vide. Numerus planus.

PORTIO circuli. vide. Circulus.

PRIMI inter ſe numeri. vide. Numerus par,&c.

PRIMVS numerus. vide. Numerus par, &c.

PRISMA. vide. Parallelepipedum,&c.

PROPORTIO Figurarũ, Angulorum, & Linearum. vide. Figuræ, Anguli, & lineæ proportionales.

PROPORTIO magnitudinum in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES Magnitudines in communi. vide. Magnitudines proportionales in communi.

PROPORTIONALES numeri in communi. vide, Numeri Proportionales in cõmuni.

PROPORTIO numerorum in communi. vide. Numeri proportionales in communi.

PYRAMIS. vide. Parallelepipedum. &c.

QVADRATVM. vide. Parallelogrammum, &c.

QVADRATVS numerus. vide. Numerus Planus, Solidus, &c.

QVADRILATERAE figuræ planæ. vide. Parallelogrammum.

RATIONALES, & Irrationales magnitudines.

Omnes Rationales lineæ non ſolum expoſitæ Rationali, ſed etiam inter ſe ſunt commenſurabiles. pag. 343. B

Spatium Rationali ſpatio commenſurabile, & ipſum Rationale eſt. 345. B

Quod ſub Rationalibus longitudine commẽſurabilibus rectis (quomodocunque cõmenſurabiles ſint expoſitę Rationali) cõtinetur rectangulum; Rationale eſt. 345. B

Si Rationale ad Rationalem applicetur, latitudinem efficit Rationalẽ, & ei, ad quam applicatum eſt, longitudine cõmenſurabilem. 346. B

Quod ſub Rationalibus potentia ſolum commẽſurabilibus rectis continetur rectangulũ, Irrationale eſt: Et recta ipſum potens, Irrationalis Vocetur autem Media. 351 B

Recta media proportionalis inter duas Rationales potentia tantũ commenſurabiles, Irrationalis eſt, quæ vocatur Media. 352 B

Rectangulum ſub duabus Rõnalibus potentia tantum commenſurabilibus contentum, Medium dici poteſt. 352. B

Non omne rectangulum Medium continetur ſub duabus Rationalibus potentia ſolum commenſurabilibus. 352. B

Quod a media fit, ad Rationalẽ applicatum, latitudinem efficit Rationalem, & ei, ad quã applicatum eſt, longitudine incommenſurabilem. 353. B

Omne ſpatium Medium æquale eſt rectangulo ſub duabus Rationalibus potentia tantum commenſurabilibus contento. 353. & 355. B

Medię commenſurabilis, Media eſt. 355 B

Medio ſpatio commenſurabile, Medium eſt. 356. B

Non omnis Media recta cuilibet Medię eſt cõmẽſurabilis, 358. B

Quod ſub Mediis longitudine commenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulum, Mediũ eſt. 358. B

Quod

Quod ſub Medijs potẽtia tantũ cõmenſurabilibus rectis cõtinetur rectangulũ; vel Rationale eſt, vel Medium. 359.A

Quod ſub Medijs longitudine & potentia incommenſurabilibus continetur, nec Rationale eſt, nec Medium, ſed Irrationale aliud, quod æquale eſt rectangulo ſub linea Rationali, & Irrationali, quæ Media appellatur, contento. 361.B

Medium non ſuperat Medium Rationali. 362.B

Rationale ſuperat Rationale Rationali. 364.

Duo ſpatia Irrationalia componere poſſunt ſpatium Rationale. 383.B

Duo ſpatia Rationalia componunt ſemper ſpatium Rationale. pag. 384.B

Si duæ Rationales potentia tantum commenſurabiles componantur; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis nominibus. 387.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Rationale cõtineãt; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs prima. 389.B

Quod ſub linea Rationali, & Irrationali contenta rectangulum, Irrationale eſt. 390.B

Si duæ Mediæ potentia tantum commenſurabiles componantur, quæ Medium cõtineant; tota Irrationalis erit. Vocetur autem ex binis Medijs, ſecunda. 390.B

Si duæ rectæ potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale, quod autem ſub ipſis cõtinetur, Medium; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Maior. 393.B

Si duæ rectæ potentia incommẽſurabiles componantur, quæ faciant compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Mediũ, quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem Rationale ac Mediũ potens. 394.B

Si duæ rectæ potentia incõmenſurabiles componantur, quæ faciant & compoſitum ex ipſarum quadratis Medium, & quod ſub ipſis cõtinetur, Medium, incommenſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; tota recta Irrationalis erit. Vocetur autem bina Media potens. 395.B

Sex lineæ Irrationales compoſitæ, vt ea, quæ ex binis nominibus, quæ ex binis Medijs prima, quæ ex binis Medijs ſecunda, Maior, Rationale ac Mediũ potens, & bina Media potens, adynum dumtaxat punctum diuiduntur in nomina, ſingulæ. 398.B

Sex

Sex genera linearum Irrationalium, quæ ex binis nominibus dicuntur. 406.B

Si ſex ſpatia contineantur ſub Rationali, & ex binis nominibus prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, ac ſexta; Rectæ ea potentes Irrationales ſunt hæ ordine; ex binis Medijs prima, ex binis Medijs ſecunda, Maior, Rationale ac Medium potens, & bina Media potens. 417.B

Quadrata ſex harum linearum Irrationalium; eius quæ ex binis nominibus, ex binis Medijs primæ, ex binis Medijs ſecundæ, Maioris, Rationale ac Medium potentis, & bina Media potentis: ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine ſex lineas ex binis nominibus. pag. 426.B

Rectæ longitudine commenſurabiles ſex lineis Irrationalibus prædictis, ſunt quoque eiuſdem ordinis, & nominis Irrationales. 435.B

Idem eueniet, ſi potentiæ tantum ſint commenſurabiles, præterquam in ea, quæ ex binis nominibus dicitur. 437.B

Si Rationale & Medium componantur, quatuor Irrationales ſiunt; vel ea, quæ ex binis nominibus, vel quæ ex binis Medijs prima, vel Maior, vel Rationale ac Medium potens. 443.B.

Si duo Media inter ſe incõmenſurabilia componantur; duæ reliquæ Irrationales ſiunt; vel ex Medijs ſecunda, vel bina Media potens. 445.B

Ea, quæ ex binis nominibus, & alię quinq; Irrationales eam ſequentes, & inter ſe, & a Media differunt. 447.B

Recta linea media proportionalis ſecundum Analogiam Arithmeticam inter duo nomina cuiuſuis lineæ Irrationalis, per compoſitionem facta, eſt quoque Irrationalis eiuſdem ordinis. pag. 448.B

Si a Rationali Rationalis auferatur potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti; *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis nominibus, minus auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Apotome. 449.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Rationale contineat; *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis medijs prima, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome prima. pag. 451.B

Si a Media auferatur Media potentia tantum commenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota Medium contineat; *(Vel*

ſi a maiori nomine eius, quæ ex binis Medijs ſecunda, minus nomen auferatur) Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Mediæ Apotome ſecunda.
pag. 452.B

Si a recta linea auferatur recta potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat compoſitum quidē ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur Medium; *(Vel ſi a maiori nomine lineæ Maioris minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem Minor.
454.B

Si a recta auferatur recta potentia incōmenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat cōpoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale; *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ Rationale ac Medium poteſt, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Rationali Medium totum efficiens.
pag. 455.B

Si a recta auferatur recta potentia incommenſurabilis exiſtens toti, quæ cum tota faciat & compoſitum ex ipſarum quadratis, Medium; & quod ſub ipſis continetur, Medium, incommēſurabileque compoſito ex quadratis ipſarum; *(Vel ſi a maiori nomine eius, quæ bina Media poteſt, minus nomen auferatur)* Reliqua Irrationalis eſt. Vocetur autem cum Medio Medium totum efficiens.
pag. 457.B

Apotomę vna tantum congruit recta Rationalis, potentia ſolum commenſurabilis exiſtēs toti.
459.B

Mediæ Apotomæ primæ vna tā tum congruit recta Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Rationale continens.
pag. 461.B

Mediæ Apotomæ ſecundæ vna tantum congruit recta Media, potentia ſolum commenſurabilis exiſtens toti, & cum tota Medium continens.
pag. 462.B

Minori vna tantum congruit recta, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Rationale; quod autem ſub ipſis continetur, Medium.
pag. 464.B

Ei, quæ cum Rationali Medium totum facit, vna tantum congruit recta potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciēs compoſitum quidem ex ipſarum quadratis Medium; quod autem ſub ipſis continetur, Rationale.
pag. 465.B

Ei,

Ei, quæ cum *Medio Medium* totum facit, vna tantũ cõgruit recta, potentia incommenſurabilis exiſtens toti, & cum tota faciens & compoſitũ ex ipſarum quadratis *Medium*, & quod ſub ipſis continetur, *Medium*, incommenſurabileque compoſito ex ipſarũ quadratis. 466.B

Sex genera linearum Irrationalium, quæ Apotomæ dicuntur. pag. 467.B

Si ſex ſpatia contineantur ſub Rationali, & Apotoma prima, ſecunda, tertia, quarta, quinta, & ſexta; Rectæ ea potentes Irrationales ſunt hæ ordine; Apotome, *Mediæ* Apotome prima, *Mediæ* Apotome ſecunda, *Minor*, ea quæ cum Rationali *Medium* totum efficit, & ea quæ cũ *Medio* Medium totum efficit. pag. 475.B

Quadrata harum ſex linearum Irrationalium, Apotomæ, *Mediæ* Apotomæ primæ, *Mediæ* Apotomæ ſecundæ, *Minoris*, eius quæ cum Rationali *Medium* totum efficit, & eius, quæ cum *Medio Medium* totum efficit; ad Rationalem applicata, latitudines faciunt ordine ſex Apotomas. 485. B

Rectæ longitudine commenſurabiles ſex lineis Irrationalibus prædictis, quę per detractionem fiunt, ſunt quoque Irrationales eiuſdem ordinis, & nominis. 493.B

Idem eueniet, ſi potentia tantũ eis ſint commenſurabiles, præterquam in Apotoma. 494.B

Medio a Rationali detracto; Recta, quæ reliquum ſpatium poteſt, vna ex duabus Irrationalibus fit, vel Apotome, vel Minor. 500.B

Rationali a Medio detracto; aliæ duæ Irrationales fiunt, vel *Mediæ* Apotome prima, vel cum Rationali *Medium* totum efficiens. 501.B

Medio a *Medio* detracto, quod ſit incommenſurabile toti; reliquæ duę Irrationales fiunt, vel *Mediæ* Apotome ſecũda, vel cum *Medio Medium* totum efficiens. 503 B

Apotome non eſt eadem, quæ ex binis nominibus. 504.B

Apotome, & aliæ quinque Irrationales eam ſequentes, & inter ſe, & a *Media* differunt. pag. 505.B

Tredecim lineæ Irrationales inter ſe diuerſæ. 506.B

Quadratum Rationalis ad eã, quæ ex binis nominibus, applicatũ, latitudinẽ facit Apotomen, cuius nomina cõmenſurabilia ſũt nominibus eius, quæ eſt ex binis nominibus; & in eadem proportione; & adhuc Apotome quę fit, eundem habet ordinem, quem

ea, quæ eſt ex binis nominibus. 508.B
Quadratum Rationalis ad Apotomen applicatum, latitudinem facit eam, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commenſurabilia ſunt Apotomæ nominibus, & in eadem proportione; & adhuc, quæ ex binis nominibus fit, eundem habet ordinem, quẽ ipſa Apotome. 511.B
Si ſpatium cõtineatur ſub Apotoma, & ea, quæ ex binis nominibus, cuius nomina commẽſurabilia ſunt nominibus Apotomæ, & in eadem proportione; Recta ſpatium potens, eſt Rationalis. 513.B
Rationale ſpatium cõtineri poteſt ſub duabus rectis Irrationalibus. 514.B
A Media infinitæ Irrationales fiunt, & nulla alicui antecedentium eſt eadem. 515.B
Si recta linea Rationalis extrema ac media ratione ſecetur; vtrumque ſegmentorum Irrationalis linea eſt, quæ vocatur Apotome. 702.B
Si recta ſecundum extremam & mediam rationem ſecetur, ſitq; maius ſegmentum linea Rationalis; erit minus ſegmentum Apotome. 703.B.
Si in circulo Rationalem habẽte diametrum, pentagonum æquilaterum deſcribatur; pentagoni latus Irrationalis eſt linea, quæ vocatur Minor. pag. 714.B
Si ſphæræ diameter fuerit Rationalis, erit ea ſuperficies Tetraedri, quam Octaedri in ea ſphæra, Media. 790.B
Triangulum æquialterum, cuius latus eſt Rationale, ſuperficies Media eſt. 792.B
Latus Icoſaedri in pyramide deſcripti eſt Apotome. 879.B

RECTA LINEA.

Rectæ duæ lineæ non habent vnum, & idem ſegmentum commune. pag. 64.A
Rectæ duæ in vno puncto concurrentes, ſi producantur amba, neceſſario ſe mutuo in eo puncto interſecabunt. 65.A
Rectæ duæ linea ſpatium non comprehendunt. 68.A
Rectæ duæ lineæ duabus eiſdem rectis lineis ſuper eadem recta liuea æquales, vtraque vtrique; non conſtituentur ad aliud atq; aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio ductis rectis lineis habentes. pag. 91.A
Recta linea alteri inſiſtens facit cum ea aut duos rectos angulos, aut duobus rectis æquales. 108.A
Rectæ duæ ad vnum punctum coniunctæ faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo

lo puncto educta cum illis facit duos angulos non ad eaſdem partes, duobus rectis æquales. 109.A

Recta duæ ad vnum punctum coniuncta non faciunt vnam rectam, quando alia recta ex illo puncto educta cũ illis facit duos angulos ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 110.A

Rectæ duæ ſe interſecantes faciunt angulos ad verticẽ oppoſitos æquales. 111.A

Recta duæ ſe interſecantes faciunt quatuor angulos quatuor rectis æquales. 112.A

Rectæ quotcunq; ad vnum punctũ conuenientes faciunt omnes angulos quatuor rectis æquales. 112.A

Recta duæ facientes cum alia recta in eodem puncto, non ad eaſdem partes, angulos ad verticem æquales, in directum ſunt coniuncta. 113.A

Recta quatuor in eodem puncto facientes binos oppoſitos angulos æquales, conſtituunt duas rectas lineas. 113.A

Recta linea inter ſe æquales ex vno puncto ad rectam lineam plures quam duæ, duci non poſſunt. pag. 116.A

Recta linea ad eandem rectã perpendiculares, plures quam vna, duci non poſſunt. 117.A

Recta linea faciente cum alia angulos inæquales, perpendicularis ex vno illius puncto ad hanc demiſſa cadit ad partes anguli acuti. 118.A

Rectarum omnium ex vno puncto ad aliam rectam demiſſarum, minima eſt perpendicularis. pag. 121.A

Rectæ duæ lineæ ab extremitatibus vnius lateris trianguli interius conſtitutæ, reliquis triãguli duobus lateribus minores quidem ſunt, maiorem vero angulum continent. pag. 126.A

Recta duæ linea intra triangulum, quarum vna ab extremo vnius lateris, altera vero non ab extremo ducitur, maiores eſſe poſſunt reliquis trianguli duobus lateribus, minoremque angulum comprehendere. pag. 127.A

Rectę duæ lineę parallelæ ſunt, ſi recta in eas incidens faciat alternos angulos æquales. pag. 142.A

Rectæ duę lineæ parallelę ſunt, ſi recta in eas incidens faciat externum angulum interno ad eaſdem partes oppoſito ęqualem; aut internos ad eaſdem partes duobus rectis æquales. 143.A

Rectas duas lineas concurrere productas, ſi recta in eas incidens faciat duos internos angulos ad eaſdem partes duobus rectis minores: quo modo a Proclo demonſtretur. 147.A

Rectas eaſdem duas concurrere,

quæ ratione a nobis demonſtretur. 159.A

Rectarum linearum angulum conſtituentium diſtantia, ſi in infinitum producantur, omnem finitam magnitudinẽ excedet. pag. 145.& 149.A

Recta linea ſecans vnam duarum parallelarum, producta ſecat & alteram. 146.A

Linea, cuius omnia puncta a recta linea, quæ in eodem cum ea plano exiſtit, æqualiter diſtant, recta eſt. 150.A

Recta linea ſuper aliam rectam in tranſuerſum mota, conſtituenſque in ſuo extremo cum ea angulos ſemper rectos, deſcribet altero ſuo extremo lineam quoque rectam. 152.A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; erit perpendicularis ex quouis puncto huius rectę ad priorem rectam demiſſa, vtrilibet priorum perpendicularium æqualis. 154.A

Si ad rectam lineam duæ perpendiculares rectæ lineæ erigantur inter ſe æquales, quarum extrema puncta per lineam rectam coniungantur; efficiet hæc recta cum vtraque perpendicularis angulum rectum. 155.A

Si in duas rectas lineas alia recta incidens faciat cum vna earum angulum internum rectũ, & cum altera ex eadem parte acutum; duæ illæ rectæ minus ſemper inter ſe diſtabunt ad eas partes, vbi eſt angulus acutus, ex altera vero parte ſemper inter ſe magis diſtabunt. pagina 156.A

Recta incidens in duas parallelas facit & angulos alternos æquales, & externum interno ad eaſdem partes æqualem, & internos duos ad eaſdẽ partes duobus rectis æquales. 162.A

Rectæ lineæ, eidem parallelę, & inter ſe ſunt parallelæ. pag. 163.A

Rectæ lineæ, eidem parallelæ, ſi inter ſe coeunt, conſtituunt vnã lineam rectam. 164.A

Rectæ lineæ, quæ parallelas ad eaſdem partes connectunt, æquales ſunt, & parallelæ. pag. 176.A

In figura æquilatera, & æquiangula parium laterũ, oppoſita quælibet duo latera ſunt parallela. pag. 189.A

Recta ſecans duo trianguli latera bifariam, reliquo lateri eſt parallela 201.A

Si fuerint duæ rectæ, ſeceturq; ipſarum altera in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis lineis, æquale eſt eis quæ ſub inſecta, & quolibet ſegmentorũ comprehenduntur, rectangulis. 254.A

Si fuerint duę rectæ lineæ, ſecenturque amba in quotuis ſegmenta: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus rectis, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis vnius, & quolibet ſegmentorum alterius continentur, rectangulis. 255 A

Si ſint duæ rectæ lineæ, ſecenturque amba vtcunque: Rectangulum comprehenſum ſub illis duabus lineis, vna cum rectangulo ſub vna parte vnius, & vna parte alterius comprehenſo, æquale eſt eis, quæ ſub totis lineis, & dictis partibus mutuo continentur, rectangulis, vna cum rectangulo ſub reliquis partibus comprehenſo. 256. A

Si recta linea ſecta ſit vtcunque, vel etiam in plura ſegmenta: Rectangula, quæ ſub tota, & quolibet ſegmentorum comprehendũtur, æqualia ſunt ei, quod a tota fit quadrato. 257. A

Si linea recta ſecetur in quotuis ſegmenta: quadratum, quod a tota ſit, æquale eſt eis, quæ ſub ſingulis ſegmentis, & quolibet ſegmento comprehenduntur, rectangulis. 259. A

Si recta linea ſecta ſit vtcunque: Rectangulum ſub tota, & vno ſegmentorum comprehenſum, æquale eſt & illi, quod ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod a prędicto ſegmento deſcribitur, quadrato. pag. 260. A

Si recta linea ſecta ſit vtcunque: Quadratum totius æquale eſt quadratis ſegmentorum, & rectangulo comprehenſo bis ſub ſegmentis. pag. 261. A

Si recta linea ſecetur bifariam, & non bifariam: rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis totius comprehenſum, vna cum quadrato intermediæ ſectionũ, æquale eſt quadrato ex dimidia deſcripto. pag. 266. A

Si recta linea bifariam ſecetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur: rectangulum comprehenſum ſub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato dimidiæ, æquale eſt quadrato rectę compoſitæ ex dimidia, & adiecta. pag. 269. A

Si recta linea ſecetur vtcunque: Quadratum totius, & quadratum vnius ſegmenti, ſimul æqualia ſunt rectangulo ſub tota & illo ſegmento bis contento vna cum quadrato alterius ſegmenti. 273. A

Si recta linea inæqualiter ſecetur: Erunt quadrata ſegmentorum æqualia rectangulo bis ſub ſegmentis comprehenſo, vna cum quadrato exceſſus, quo maius ſegmentum ſuperat minus. pag. 274. A

Si recta linea ſecetur vtcunque; rectangulum quater comprehenſum ſub tota, & vno ſegmentorum, cum quadrato reliqui ſegmenti, æquale eſt quadrato rectæ compoſitę ex tota, & priore ſegmento. pag. 275. A

V E L.

Si linea recta ſecetur vtcunque; eique in rectum adijciatur alia recta vni ſegmentorum ęqualis: Quadratum totius lineæ compoſitę æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub data linea, & adiecta ſiue dicto ſegmento, vna cum quadrato alterius ſegmenti. pag. 277. A

V E L.

Si linea recta ſecetur bifariam, eique in rectum adijciatur recta alia quantacunque: Quadratum totius compoſitæ lineæ æquale eſt rectangulo quater comprehenſo ſub linea compoſita ex dimidia, & adiecta, & dimidia, vna cum quadrato adiectæ. pagina. 278. A

Si recta linea ſecetur bifariam, & nõ bifariam: quadrata ſegmentorum inęqualium, ſimul dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex intermedia ſectionum. 279. A

Si recta linea ſecetur bifariam, adijciatur aũt ei in rectum quępiam recta linea: Quod a tota cum adiecta, & quod ab adiecta, vtraque ſimul quadrata dupla ſunt quadrati ex dimidia, & quadrati ex compoſita ex dimidia & adiecta. pag. 283. A

Perpendicularis lineæ ex puncto aliquo ad rectam quampiã cadens, eſt omnium ex eodem puncto ad eandem rectam cadentium breuiſſima. 321. A

Si recta ſecetur extrema ac media ratione; Iſoſceles, cuius baſis maiori ſegmento ſit æqualis, vtrumuis vero laterum æqualium ſectæ lineæ, habet vtrumque angulorum ad baſim duplũ reliqui. 470. A

Si ſint duæ rectæ inæquales, & ad maiorem applicetur quarta pars quadrati ex minore deſcripti, deficiens figura quadrata; Non erunt ſegmenta, quæ ex applicatione fiunt, æqualia. pag. 355. B

Si ſint duæ rectæ inæquales, erit rectangulum ſub ipſis contentum, duplum rectanguli ſub alterutra earum, & dimidio alterius contenti. pagina. 381. B

Si recta linea non bifariam ſecetur; erit compoſitum ex quadratis partium maius, quam rectangulum ſub partibus bis comprehẽſum, quadrato eius lineæ, qua maior pars minotem

rem ſuperat. 392. B
Si recta non bifariam ſecetur, & rurſus nō bifariam in alio puncto; erunt quadrata partium magis inęqualium ſimul maiora quadratis partiū minus inæqualium ſimul. 396. B
Rectę lineæ pars quædam non eſt in ſubiecto plano, quædā vero in ſublimi. 548. B
Si duæ rectę ſe mutuo ſecent, in vno ſunt plano. Atque triangulum omne in vno eſt plano pag. 549. B
Si duo plana ſe mutuo ſecent, communis eorum ſectio eſt linea recta. 550. B
Si recta linea rectis duabus ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Illa ducto etiam per ipſas plano ad angulos rectos erit. 551. B
Si recta linea rectis tribus ſe mutuo ſecantibus, in communi ſectione ad rectos angulos inſiſtat: Iliæ tres rectæ in vno ſunt plano. 553. B
Si duæ rectæ eidem plano ad rectos ſint angulos; parallelæ erunt illæ rectæ lineæ. pag. 554. B
Si duæ ſint parallelæ rectæ, in quarum vtraque ſumpta ſint quęlibet pūcta: Illa recta, quę ad hæc puncta adiungitur, in eodem eſt cum parallelis plano. 555. B
Idem euenit, ſi rectæ non ſint parallelæ, in eodem tamen exiſtāt plano. 555. A
Si duæ ſint parallelæ rectæ, quarum altera ad rectos cuidam plano ſit angulos: Et reliqua eidem plano ad rectos angulos erit. 555. B
Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, ſed non in eodem cū illa plano; hæ quoq; ſunt inter ſe parallelæ. 557. B
Dato plano, a puncto, quod in illo datum eſt, duæ rectæ ad rectos angulos non excitabuntur, ad eaſdem partes. 562. B
Item neque a puncto in ſublimi ad ſubiectum planum duæ perpendiculares demittentur. 562. B
Si recta plano cuipiam ad rectos ſit angulos; & omnia, quæ per ipſum, plana eidem plano ad rectos angulos erunt. pag. 570. B
Si duo plana ſe mutuo ſecantia plano cuidam ad rectos ſint angulos, communis etiam illorum ſectio ad rectos eidem plano angulos erit. pag. 572. B
Si planum ad planum rectū fuerit; & ab aliquo puncto eorū, quæ in vno ſunt, planorum, ad alterum planum perpendicularis ducta fuerit; In communem ſectionem cadet planorum ducta perpendicularis pag. 616. B

RECTANGVLVM parallelogrammum. vide. Parallelogrammum, &c.

RECTANGVLVM triangulum. vide. Triangulum.

REGVLARIS figura. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

SCALENVM triangulum. vide. Triangulum.

SEGMENTVM circuli. vide. Circulus.

SIMILES plani ac ſolidi numeri. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDA Figura intra, & extra ſphæram, atq; aliam figuram. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDI numeri ſimiles. vide. Numerus planus, &c.

SOLIDVM Regulare. vide. Figura intra, & extra circulum, &c.

SOLIDVS angulus. vide. Angulus.

SOLIDVS numerus. vide. Numerus planus, &c.

SPHAERA. vide. Figura intra & extra circulum, ſphæram, &c.

TRAPEZIVM. vide. Parallelogrammum, &c.

TRIANGVLVM.

Triãgula duo habẽt & baſes, & angulos æquales, ipſaq; æqualia ſunt, ſi duo latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique, angulosq; contentos habeant æquales. 81.A

Iſoſcelium triangulorum anguli tam ſupra baſem, quam infra, æquales ſunt. 85.A

Æquilaterum triangulum habet tres angulos æquales. 87.A

Triangulum, cuius duo anguli ſupra baſem æquales ſunt, habet duo latera angulis illis oppoſita æqualia. 88.A

Triangulum, cuius omnes anguli æquales ſunt, æquilaterum eſt. pag. 89.A

Triangulum, cuius duo anguli infra baſem æquales ſunt, Iſoſceles eſt. 90.A

Triangula duo habent vnũ angulum vni angulo æqualem, ſi duo latera vnum ambientia æqualia ſint duobus lateribus alterum ambientibus, & baſis baſi. 94.A

Triangula duo æqualia ſunt, & inter ſe æquiangula, ſi duo latera vnius ſint æqualia duobus lateribus

teribus alterius, & baſis baſi. pag. 96.A

Trianguli externus angulus maior eſt vtrouis interno oppoſito. 114.A

Trianguli duo quilibet anguli duobus rectis minores ſunt. pag. 117.A

Trianguli orthogonij, vel amblygonij duo reliqui anguli ſunt acuti. 118.A

Trianguli æquilateri omnes anguli, & Iſoſceles duo ſupra baſem, acuti ſunt. 119.A

Triãguli maius latus maiorem angulum ſubtendit. 119.A

Scalenum habet omnes tres angulos inæquales. 119.A

Trianguli maior angulus maiori lateri ſubtenditur. 120.A

Trianguli angulo biſariam ſecto, ſi recta ſecans partiatur baſem inæqualiter; latera circa illum angulum inæqualia ſunt, maiuſque eſt illud, quod maiori ſegmento baſis adiacet. 121.A

Trianguli angulo inæqualibus lateribus comprehenſo biſariam ſecto, recta ſecans diuidit baſim inæqualiter, maiuſque ſegmentũ maiori lateri adiacet. 123.A

Trianguli angulo biſariam ſecto, ſi recta ſecans diuidat baſem biſariam, latera circa eum angulum æqualia ſunt: Et ſi æqualia ſint, recta ſecans angulum biſariam, ſecat & baſim biſariam. 124.A

Trianguli duo latera quomodocunq; ſumpta, reliquo ſunt maiora. 125.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, angulum vero comprehenſum angulo maiorem, habent & baſem baſe maiorem. 132.A

Triangula habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumque vtrique, baſem vero baſe maiorem, habent & angulum comprehenſum angulo maiorem. 135.A

Triangula habentia duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, vnumque latus uni lateri æquale, ſiue quod æqualibus adiacet angulis, ſiue quod uni æqualiũ angulorum ſubtenditur; habent & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, utrumque utrique, & reliquum angulũ reliquo angulo æqualem. pagina 138.A

Triangula habentia eaſdem conditiones, de quibus proxime dictũ eſt, ſunt inter ſe æqualia. 139.A

In triangulo æquilatero, vel Iſoſcele, recta linea ab angulo duobus lateribus æqualibus comprehenſo ducta, diuidenſque vel angulum, vel baſem biſariã, perpendicularis eſt ad baſem; & ſi quidem angulum biſariã diuidat, ſecabit quoq; baſem biſariam. Si vero baſem ſecet biſariã, diuidet quoq; angulum biſariam.

Et contra, linea perpẽdicularis ad baſem ducta diuidit & baſem, & angulum bifariam. pag. 140. A

Triangulum, in quo linea recta ab vno angulorum ducta ad baſem perpendicularis diuidit vel baſin, vel angulum bifariam, habet duo latera circa illum angulum æqualia: Et ſi quidem baſis diuidatur bifariam, angulus quoque bifariam ſecabitur: ſi vero angulus bifariam ſecetur baſis quoque diuidetur bifariã. pag. 141. A

Si duo triangula habeant duos angulos duobus angulis æquales, vtrumque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quod tamen neque æqualibus adiacet angulis, neque vni æqualium angulorum opponitur; nihil colligi poteſt. 166. A

Triãguli externus angulus duobus internis oppoſitis eſt æqualis: Et omnes tres anguli duobus rectis æquales ſunt. pag. 169. B

Trianguli cuiuslibet omnes tres anguli ſimul æquales ſunt tribus angulis ſimul cuiuſcunque alterius trianguli. 174. A

Iſoſceles duo anguli ſupra baſim ſemirecti ſunt, quando reliquus angulus rectus eſt. 175. A

Æquilateri trianguli quilibet angulus continet duas tertias partes vnius recti, vel vnã tertiam partem duorum rectorũ. 175. A

Æquilaterum trianguli ex [illegible] *perpendiculari ex* [illegible] *ſum ducta diuiditur in* [illegible] *ca ena orthogonia, &c.* [illegible] *A*

Triangula ſuper eadem baſi cõſtituta & in eiſdẽ parallelis, ſunt æqualia. 195. A

Triangula, quorum vnol tera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius, vtrumque vtrique angulum vero contentum angulo maiorem, quo pacto poſſint æqualia eſſe, & inæqualia. pagina 196. A

Triangula ſuper æqualibus baſibus conſtituta, & in eiſdem parallelis, inter ſe ſunt æqualia. 198. A

Triangulum a recta ex angulo ad medium punctum lateris oppoſiti ducta ſecatur bifariam. pag. 199. A

Triangula æqualia ſuper eadẽ baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 200. A

Triangula æqualia ſuper æqualibus baſibus, & ad eaſdẽ partes conſtituta, in eiſdem ſunt parallelis. 202. A

Triangula æqualia inter eaſdem parallelas, ſi non habuerint eandem baſim, ſuper æquales baſes ſunt conſtituta. 203. A

Triangulorum inter eaſdem parallelas, quod maiorem habet baſim, maius eſt: Et quod maius eſt, maiorem habet baſim. pag. 203. A

Si in triangulo linea recta vni laterum parallela ducatur; Recta ex angulo oppoſito ducta, diuidensq; alterutrã parallelarum bifariam, diuidit quoq; alterã bifariam. 207. A

In rectangulis triangulis, quadratum lateris anguli recto oppoſiti, æquale eſt duobus quadratis ſimul reliquorum duorum laterum. 229. A

Si fuerint duo triangula rectangula, quorum latera rectis angulis oppoſita ſint æqualia; erunt duo quadrata, reliquorum duorum laterum vnius trianguli æqualia duobus quadratis reliquorum duorum laterum alterius. 236. A

Si ex angulo a duobus lateribus inæqualibus trianguli cuiuſuis comprehenſo ad baſim perpendicularis ducatur cadens intra triangulum; ſecabitur baſis inæqualiter, maiorque pars iuxta maius latus erit. Et contra, ſi baſis a perpendiculari ſecetur inæqualiter, erunt duo latera inæqualia, maiusque erit prope maiorem partem baſis. 240. A

In omni triangulo, parallelogramma quæcunque duorũ laterum æqualia ſint parallelogrammo reliqui lateris, cuius alterum latus æquale ſit, & parallelum rectæ ductæ ab angulo, quem duo illa latera cõtinent, ad punctũ, in quo conueniunt latera parallelogrammorum lateribus trianguli oppoſita, ſi ad partes anguli illius produeantur. 241. A

Si quadratũ vnius lateris trianguli æquale ſit duobus quadratis reliquorũ duorum laterum; angulus ſub his comprehenſus, rectus erit. 242. B

Triangulorum comparationes varię, & quo modo fiant. 243. A

In amblygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo obtuſo oppoſiti quanto maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum. 288. A

In amblygoniis triangulis perpendicularis ex alterutro angulorũ acutorum ad latus oppoſitũ demiſſa, cadit extra triangulum ad partes anguli obtuſi. 289. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis aliorum duorum laterum: angulus illi lateri oppoſitus, obtuſus erit. pag. 290. A

Si in triangulo quadratum vnius lateris maius ſit quadratis reliquorum duorũ laterum, rectangulo bis comprehenſo ſub alterutro horum laterum, & ſub exteriore linea, quam ex illo latere producto recta linea ab oppoſito angulo demiſſa abſcindit: æmiſſa hæc linea ad latus productũ perpendicularis erit, & angulus propoſiti trianguli priori illi lateri oppoſitus, obtuſus. 290. A

In oxygoniis triãgulis, quadratum lateris angulo acuto oppoſiti, quanto minus ſit quadra-

dratis aliorum duorum laterum. 296. A
In quolibet triangulo perpendicularis in latus duobus acutis angulis adiacens ex opposito angulo demissa, cadit intra triangulum. 298. A
Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterum; angulus illi lateri oppositus, est acutus. 300. A
Si in triangulo quadratum vnius lateris minus sit quadratis reliquorum duorum laterũ, rectangulo bis comprehenso sub altero horum laterum, & sub recta linea inter angulum prioris lateri oppositum, & rectam lineam ab angulo alteri illi lateri opposito demissam: Linea hæc demissa ad alterum illud latus perpendicularis erit, & angulus propositi trianguli priori illi lateri oppositus, acutus. 301. A
Si in triangulo a quouis angulo recta linea ducatur secans latus oppositum bifariam, erunt duo quadrata laterum circa illum angulum, simul dupla duorum quadratorum, quorũ vnum ex linea ducta, alterũ vero ex dimidiato latere describitur. 310. A
Trianguli angulus, qui reliquis duobus est æqualis, rectus est. 430. A
Isosceles trianguli, cuius vterq; angulorum ad basim duplus est reliqui, angulus reliquus continet quintam partem duorum rectorum, vel duas quintas vnius recti, vterque vero ad basim continet duas quintas duorum rectorum, vel quatuor quintas vnius recti. 469. A
Si recta secetur extrema ac media ratione; Isosceles, cuius basis maiori segmento sit æqualis, vtrumuis vero laterum æqualium data linea secta, habet vtrumque angulorum ad basim duplũ reliqui. 470. A
Si in triangulo rectangulo ab angulo recto demittatur perpendicularis ad basim; erit rectangulum sub base, & alterutro basis segmento, æquale quadrato lateris illi segmento adiacentis; Rectangulum vero sub basis segmẽtis æquale quadrato perpendicularis; Rectangulum denique sub base, & perpendiculari æquale rectangulo sub lateribus circa angulum rectum. 380. B
Triangulum omne in vno est plano. 549. B
Latus trianguli æquilateri potentia sesquitertium est perpẽdicularis ex vno angulo ad basim demissæ. 718 & 789. B
Perpendicularis ex angulo trianguli æquilateri ad basim oppositam demissa; tripla est eius perpendicularis, quæ ex centro triãguli ad eandem basim deducitur: sesquialtera vero semidiametri circuli triangulum circũscribentis. 801. B

Quadratum lateris trianguli æquilateri ad ipſum triangulum habet proportionẽ duplicatam proportionis lateris trianguli ad lineam medio loco proportionalem inter perpendicularem ab vno angulo ad latus oppoſitum ductam, & dimidium ipſius lateris. 21.B

Quadratũ rectæ mediæ proportionalis inter dimidiũ latus trianguli æquilateri, & eius perpendicularem; æquale eſt ipſi triangulo. 22.B

FINIS.

ERRATORVM POSTERIORVM DECEM Lib. Correctiones.

Pag.	Lin.	Errata.	Correctiones.
50	4	D, $\frac{7}{22}$.	D, $\frac{14}{22}$.
64	19	a 15. defin.	a 13. ſeptimi.
68	penult.	C, tertium.	in C, tertium.
80	7. a fine	ad F H,	ad E H.
145	12. a fine	D, F, I, M,	C, F, I, M,
147	3. a fine	G, ad D.	C, ad D.
163	11. a fine	I, & C	L, & C.
183	11. a fine	propoſ. 10. lib. A,	propoſ. 10. lib. 8. A,
208	7	medios B, G;	medios B, C;
212	10. a fine	64. per 1.	64. per 3.
219	3	A C, ad D E, ita C B,	A C, ad C B, ita D E,
219	4. a fine	C a B;	C B;
327	20	deleatur vox (aliter)	
768	9. a fine	PROBL. 4.	THEOR. 4.
806	5. a fine	æquilater	æqualiter

Emendentur quoque numeri paginarum in folijs I. X. Vu. Iii.

Præterea pro figura paginæ 626. deſcribatur figura paginæ 628.

REGESTVM.

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z.

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii KK Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz.

Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii KKK Lll Mmm Nnn Ooo.

a b c d e f.

Omnia ſunt integra folia.

ROMAE,
Apud Sanctium, & Soc.
M. D. LXXXIX.